

Réviser son bac avec *Le Monde*

2020

TERMINALE, SÉRIE **S**

MATHÉMATIQUES

CAHIER
SPÉCIAL
16 pages pour
se tester avant
le bac

L'ESSENTIEL DU COURS

LES SUJETS CORRIGÉS

LES ARTICLES DU MONDE

LES CONSEILS DE RÉVISION

Antilles 9,30 €, Réunion 9,80 €,
Maroc 90 DH, Tunisie 15 DT.

M 02422 - 9H - F: 8,90 € - RD



rue des écoles


En partenariat avec

MAIF

Réviser son bac avec *Le Monde*

TERMINALE, SÉRIE **S**

MATHÉMATIQUES

Une réalisation de  rue des écoles



Avec la collaboration de :

Thomas Camara
Jean Delautre
Alain Larroche
Florence Le Grand
Daniel Pompon
Jean-Marc Ravier

En partenariat avec  MAIF

AVANT-PROPOS

L'ouvrage que vous avez entre les mains a pour objectif de vous aider dans la préparation de l'épreuve de mathématiques au baccalauréat scientifique. Son intérêt réside d'abord dans la manière dont il reprend, point par point, les différents thèmes du programme de terminale S, en synthétisant – dans la partie « L'essentiel du cours » – les connaissances que vous devez maîtriser, mais aussi en listant en bas de page les notions incontournables et les mots-clés dont vous devez connaître la définition précise.

Plusieurs exercices tirés des sujets récemment tombés au bac accompagnent chaque thème. Ils sont assortis de conseils de méthode pour les traiter ; tous sont corrigés en fin de volume.

Enfin, véritable originalité de l'ouvrage, des articles tirés du journal *Le Monde* viennent mettre en perspective chaque point du programme et vous offrent la possibilité d'enrichir votre culture mathématique et scientifique. Très accessibles, accompagnés d'un commentaire pédagogique vous permettant de bien comprendre les enjeux, ils sont signés notamment par des mathématiciens chevronnés tels Étienne Ghys ou Cédric Villani. De quoi aborder l'examen en toute confiance, mais aussi préparer votre éventuelle entrée dans l'enseignement supérieur.

Il nous reste à vous souhaiter bon courage en espérant que nous aurons, à travers cet ouvrage, contribué à votre succès.

Les auteurs

Message à destination des auteurs des textes figurant dans cet ouvrage ou de leurs ayants-droit : si malgré nos efforts, nous n'avons pas été en mesure de vous contacter afin de formaliser la cession des droits d'exploitation de votre œuvre, nous vous invitons à bien vouloir nous contacter à l'adresse bucquet@lemonde.fr.

En partenariat avec



Complétez vos révisions du bac sur www.assistancescolaire.com :
méthodologie, fiches, exercices, sujets d'annales corrigés...
des outils gratuits et efficaces pour préparer l'examen.

Le Monde CAMPUS

A l'approche du baccalauréat 2020 et durant l'examen, Le Monde Campus vous propose des conseils de lectures et de révisions, des quiz, des directs avec des professeurs, ainsi que les sujets et corrigés des épreuves.

Toute l'année, nos journalistes racontent comment les étudiants et jeunes diplômés se forment, travaillent et changent la société.

Rendez-vous sur la rubrique Lemonde.fr/campus et dans *Le Monde* avec les pages « Le Monde Campus O21 » et les suppléments mensuels « Le Monde Campus ».



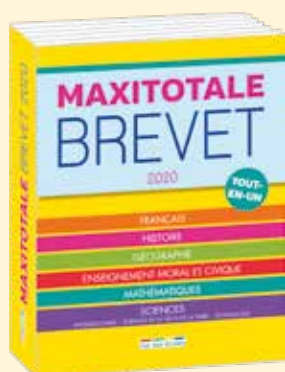
Le Monde
CAMPUS



MAXITOTALE

29€

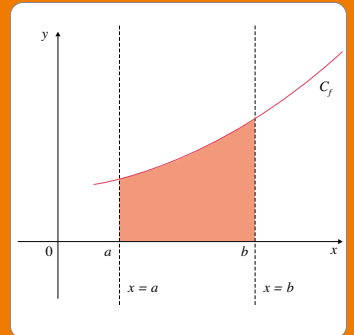
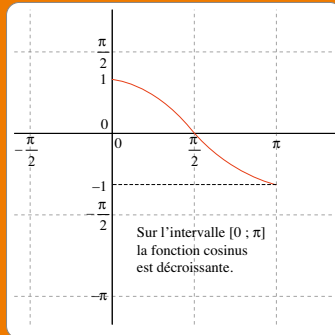
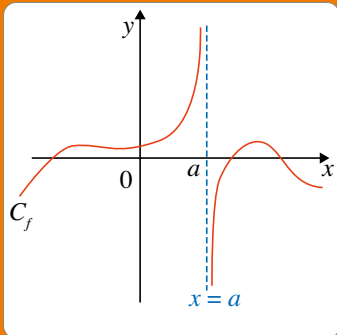
Tout-en-un : les sujets corrigés et commentés des 6 dernières années, les conseils des enseignants, la méthodologie et le programme.



Retrouvez toutes nos collections pour préparer le baccalauréat sur www.ruedesecoles.com

Analyse	p. 5
Chapitre 01 – Suites	p. 6
Chapitre 02 – Limites de fonctions, continuité et théorème des valeurs intermédiaires	p. 10
Chapitre 03 – Dérivation	p. 16
Chapitre 04 – Fonctions sinus et cosinus	p. 18
Chapitre 05 – Fonction exponentielle	p. 22
Chapitre 06 – Fonction logarithme népérien	p. 26
Chapitre 07 – Intégration	p. 30
Géométrie	p. 33
Chapitre 08 – Nombres complexes	p. 34
Chapitre 09 – Géométrie dans l'espace	p. 38
Probabilités et statistiques	p. 43
Chapitre 10 – Probabilités conditionnelles	p. 44
Chapitre 11 – Lois à densité	p. 50
Chapitre 12 – Échantillonnage	p. 56
Algorithmique/Logique	p. 59
Chapitre 13 – Algorithmique/Éléments du raisonnement mathématique	p. 60
Corrigés des exercices	p. 65
Culture scientifique : mathématicien(ne)s contemporain(e)s emblématiques	p. 83
Guide pratique	p. 93

ANALYSE



Suites

Un couple de lapins, né le 1^{er} janvier, donne naissance à un autre couple de lapins, chaque mois, dès qu'il a atteint l'âge de deux mois. Les nouveaux couples suivent la même loi de reproduction. Combien y aura-t-il de couples de lapins le 1^{er} janvier de l'année suivante, en supposant qu'aucun couple n'ait disparu ?

Pour résoudre ce problème, le mathématicien italien Fibonacci (dit aussi Léonard de Pise) introduit dès 1202 la notion de suite. Ainsi, si on note u_n le nombre de couples de lapins au cours du mois (avec $u_1 = 1$), la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. On peut alors exprimer u_n en fonction de n et prévoir le nombre de lapins au bout de quelques mois.

Quand utiliser un raisonnement par récurrence et comment le rédiger ?

On peut utiliser un **raisonnement par récurrence** chaque fois qu'une propriété à démontrer dépend d'un entier naturel n , surtout lorsqu'il semble y avoir un lien simple entre ce qui se passe au rang n et ce qui se passe au rang $n + 1$.

Un raisonnement par récurrence se rédige en quatre étapes :

- On commence par énoncer la propriété à démontrer, en précisant pour quels entiers naturels cette propriété est définie.
- **Initialisation** : on vérifie que la propriété est vraie au rang initial (qui est souvent 0 ou 1).
- **Hérédité** : on prouve le caractère héréditaire de la propriété. On suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel n arbitrairement fixé et on démontre que la propriété est encore vraie au rang $n + 1$.
- On conclut en invoquant le principe de récurrence.

Que faut-il retenir sur les suites géométriques ?

Une suite est géométrique quand on passe d'un terme au suivant en multipliant par le même facteur (la raison que l'on note q).

D'où la formule de récurrence donnée pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Le **terme général d'une suite géométrique** est : $u_n = u_0 \times q^n$.

Enfin, la somme des $(n + 1)$ premiers termes d'une suite géométrique $(u_0 + u_1 + \dots + u_n)$ de raison $q \neq 1$ est égale à : $u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Pour tout réel q différent de 1, on a : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est géométrique, on peut calculer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Si on obtient un nombre réel indépendant de n alors la suite est géométrique, sinon elle n'est pas géométrique.

Que faut-il retenir sur les suites arithmétiques ?

Une suite est arithmétique quand on passe d'un terme au suivant en ajoutant un même nombre (la raison que l'on note r).

D'où la formule de récurrence donnée pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le **terme général d'une suite arithmétique** est : $u_n = u_0 + nr$.

Cas particulier pour tout entier n , on a : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on peut calculer la différence : $u_{n+1} - u_n$.

Si on obtient un nombre réel indépendant de n , alors la suite est arithmétique, sinon elle n'est pas arithmétique.

MOTS CLÉS

SUITE

- Une suite est une fonction définie sur l'ensemble \mathbb{N} ou sur une partie de \mathbb{N} .
- L'image du naturel n par la suite u se note $u(n)$ ou plus souvent u_n .

TERME GÉNÉRAL

L'image d'un entier naturel n par la suite u se note u_n et s'appelle le **terme général de la suite** ou **terme de rang n** .

SUITE CROISSANTE

Soit u une suite :

- la suite u est **croissante** si et seulement si pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$;
- la suite u est **strictement croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n , $u_n < u_{n+1}$.

SUITE DÉCROISSANTE

Soit u une suite :

- la suite u est **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n , $u_n \geq u_{n+1}$;
- la suite u est **strictement décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n , $u_n > u_{n+1}$.

SUITE CONVERGENTE

Si la suite (u_n) admet comme limite le réel a , cela signifie que tout intervalle ouvert centré en a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit alors que la suite (u_n) **converge** vers a .

SUITE DIVERGENTE

Une suite qui n'est pas convergente est **divergente**.

Dire qu'une suite est divergente peut signifier :

- qu'elle n'a pas de limite, comme pour la suite de terme général $u_n = \cos n$;

- que son terme général tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, comme pour la suite de terme général $u_n = n + 1$.

RAISON D'UNE SUITE

• Dans une **suite arithmétique**, on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours un **même nombre r** , appelé **raison de la suite arithmétique**.

• Dans une **suite géométrique**, on passe toujours d'un terme au suivant en multipliant par un **même nombre q** , appelé **raison de la suite géométrique**.

Comment déterminer la limite d'une suite ?

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$.

La limite de la suite (u_n) dépend de son premier terme u_0 non nul et de sa raison q .

Quel que soit u_0 , si $-1 < q < 1$, alors la limite de la suite sera nulle.

Lorsque u_0 est positif :

- si $q > 1$, la limite de la suite sera égale à $+\infty$;
- si $q \leq -1$, la suite n'aura pas de limite.

Lorsque u_0 est négatif :

- si $q > 1$, la limite de la suite sera égale à $-\infty$;
- si $q \leq -1$, la suite n'aura pas de limite.

Si la suite (u_n) admet comme limite le réel l , alors tout intervalle ouvert centré en l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit que la suite (u_n) converge vers l .

Pour étudier la limite d'une suite, on peut exprimer le terme général de la suite en fonction de n et déterminer la limite de ce terme en faisant tendre n vers l'infini. Ou bien, on peut utiliser les **théorèmes de comparaison**.

Premier cas : si $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Second cas : si $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Troisième cas : si $u_n \leq w_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$.

(théorème des « gendarmes »)

Enfin, il convient de se souvenir que toute suite croissante majorée est convergente et que toute suite décroissante minorée est également convergente :

- une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout naturel n , $u_n \leq M$;
- une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout naturel n , $u_n \geq m$;
- une suite est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

- **La divine proportion p. 9**
(Étienne Ghys, *Le Monde* daté du 11.04.2013)

MOTS CLÉS

LIMITE D'UNE SOMME

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$?	$-\infty$

LIMITE D'UN PRODUIT

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	$l \neq 0$	$l \neq 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n =$	$l \times l'$	si $l > 0$, $+\infty$	si $l > 0$, $-\infty$?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
		si $l < 0$, $-\infty$	si $l < 0$, $+\infty$				

LIMITE D'UN INVERSE

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$l \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} =$	$\frac{1}{l}$	en 0^+ , ou $+\infty$ en 0^- , ou $-\infty$	0

LIMITE D'UN QUOTIENT

On se ramène au cas d'un produit pour $\frac{u_n}{v_n}$ car $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$.

Comment calculer la limite d'une somme des premiers termes d'une suite géométrique ?

On travaillera ici uniquement avec des suites géométriques de raison strictement positive.

Exemple : déterminer la limite de : $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Première étape : reconnaître la somme d'une suite géométrique.

On reconnaît la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

On sait que : $S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

$$\text{Donc : } S_n = u_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

$$\text{D'où : } S_n = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Seconde étape : on utilise les résultats de la partie 3.

On est dans le premier cas, car $q = \frac{1}{2}$ est strictement compris entre 0 et 1, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Troisième étape : on conclut, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2$.

On peut généraliser cette démarche avec une propriété.

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , strictement comprise entre 0 et 1. Soit S_n la somme des $n + 1$ premiers

termes de la suite (u_n) . Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_0}{1 - q}$.

Qu'est qu'une suite arithmético-géométrique ?

Définition : on dit qu'une suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que, u_0 étant donné, on a pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = au_n + b$.

On peut donc calculer chaque terme d'une suite arithmético-géométrique en utilisant les coefficients a et b et le terme précédent.

ZOOM SUR...

LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

On utilise un **raisonnement par récurrence** chaque fois qu'une propriété à démontrer dépend d'un entier naturel n , surtout lorsqu'il semble y avoir un **lien** simple entre ce qui se passe au **rang** n et ce qui se passe au **rang** $n + 1$:

- on énonce la propriété à démontrer, en précisant pour quels entiers naturels cette propriété est définie ;

- on vérifie que la propriété est vraie au rang initial (qui est souvent 0 ou 1) ;
- on prouve le caractère héréditaire de la propriété ; on suppose que la propriété est vraie pour un entier naturel n arbitrairement fixé et on démontre que la propriété est encore vraie au rang $n + 1$;
- on conclut que, quel que soit l'entier naturel n , la propriété est vraie.

Métropole (juin 2013)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. a) Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 . On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n \leq n + 3$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

c) En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

4. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \text{ et } T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

a) Exprimer S_n en fonction de n .

b) Déterminer la limite de la suite (T_n) .

La bonne méthode

1. a) On remplace n par 0 dans la relation de récurrence de l'énoncé pour déduire u_1 , puis n par 1 pour obtenir u_2 , etc.

b) Ordonner les termes successifs de la suite et conclure.

2. a) Démontrer la propriété par récurrence.

b) Remplacer u_{n+1} par l'expression donnée dans l'énoncé en fonction de u_n .

c) Utiliser le résultat du **2. b)** et l'inégalité du **2. a)**.

3. a) Exprimer pour un entier naturel n , v_{n+1} en fonction de u_n puis en fonction de v_n et conclure.

b) Exprimer v_n en fonction de v puis u_n en fonction de n .

c) Utiliser la propriété du cours donnant la limite de la suite (q^n) avec $-1 < q < 1$.

4. a) Décomposer S_n comme la somme d'une somme de termes d'une suite géométrique et d'une somme de termes d'une suite arithmétique.

b) Utiliser à nouveau la propriété du cours donnant la limite de la suite (q^n) avec $-1 < q < 1$.

Antilles-Guyane (sept. 2010)

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

a) Calculer v_0 .

b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d) Exprimer v_n en fonction de n .

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

a) Calculer w_0 .

b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n .

c) En déduire que pour tout n de \mathbb{N} , $w_{n+1} = w_n + 2$.

d) Exprimer w_n en fonction de n .

4. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

5. Pour tout entier naturel n , on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

$$\text{Démontrer par récurrence que pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} : S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

La bonne méthode

1. La connaissance de u_2 nous permet de comparer $u_2 - u_1$ et $u_1 - u_0$, puis $\frac{u_2}{u_1}$ et $\frac{u_1}{u_0}$ et de conclure.

2. a) Utiliser la définition de v_n en fonction de u_n .

b) Utiliser la définition de v_n en fonction de u_n et la relation de récurrence entre u_{n+2} , u_{n+1} et u_n .

c) Revenir à la définition d'une suite géométrique et ne pas oublier de préciser son premier terme.

d) Utiliser une propriété d'une suite géométrique.

3. a) Remplacer n par 0 dans la relation donnée dans l'énoncé.

b) Remplacer dans w_{n+1} , v_{n+1} et u_{n+1} en fonction de v_n et u_n , puis conclure.

c) Utiliser l'égalité obtenue précédemment et la définition de w_n .

d) Reconnaître la nature de la suite (w_n) puis utiliser la propriété *ad hoc*.

4. v_n et w_n ont été exprimés en fonction de n , d'où u_n .

5. v_n et w_n ont été exprimés en fonction de n , d'où u_n .
Démonstration par récurrence.

La divine proportion

Le nombre d'or, qui régit le rapport harmonieux entre les parties et le tout, est un exemple frappant d'idée mathématique : un concept simple, presque primitif, qui se retrouve partout autour de nous.

1,61803398875... Un livre tout entier consacré à un seul nombre ? Pourquoi celui-là plus qu'un autre ? Pourquoi porte-t-il des noms aussi prestigieux que le « nombre d'or » ou la « divine proportion » ? S'agirait-il d'un joyau ou d'une œuvre véritablement divine ? La lettre grecque φ (Phi) lui a même été attribuée, comme la lettre π est associée à son vieil ami et concurrent 3,1415926535. Ce nombre fascine depuis très longtemps. Il suffit de taper « *golden mean* » sur Google pour être frappé par la diversité des sites qui se l'approprient. On le voit partout, dans la philosophie, la spiritualité, l'art, l'économie et... dans les mathématiques. À vrai dire, les mathématiciens professionnels sont un peu agacés par la popularité de « leur » nombre d'or ; ce sont eux qui l'ont découvert (ou inventé ?), et voilà qu'il échappe à leur contrôle ! Beaucoup considèrent qu'on exagère son importance dans le domaine de l'esthétique et que le rôle mystique qu'on lui attribue est une imposture. Ils préfèrent se limiter à son aspect purement mathématique, et une revue tout à fait respectable – *The Fibonacci Quarterly* – est d'ailleurs presque entièrement consacrée à un thème très proche de φ : la suite de Fibonacci. Les mathématiques contemporaines manipulent le plus souvent des objets bien plus élaborés, et φ apparaît plutôt comme un souvenir d'un passé très lointain. Les mathématiciens ont cependant le sens de l'histoire de leur discipline et regardent cette « vieilleries » avec tendresse.

Henri Poincaré affirmait que « la mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes ». Le nombre d'or réunit toute une multitude de phénomènes. Le cœur de l'explication commune avait déjà été explicité par Euclide il y a plus de deux mille ans. Lorsqu'on décompose un objet en deux parties inégales, on dit que la proportion est divine, ou dorée, si le rapport entre la grande partie et la petite est le même que le rapport entre le tout et la grande partie. La simplicité de cette définition explique l'omniprésence de φ . On le rencontre dans la croissance des populations de lapins, décrite par Fibonacci au Moyen Âge, dans les proportions qui régissent le pentagone régulier ou dans celles du Parthéon.

De ce point de vue, le nombre d'or apparaît comme l'un des exemples les plus frappants d'une idée mathématique : un concept simple, presque primitif, qui se retrouve partout autour de nous. C'est à ce titre que le nombre d'or a droit de cité dans le paysage mathématique. Je choisis un nombre au hasard d'une quinzaine de chiffres, comme 5 387 565 581 098 724 par exemple. Pourrait-on écrire un livre sur ce nombre ? Certainement pas ! Ce nombre ne parle que de lui-même, il n'est relié à aucune idée, il ne permet pas de comprendre « des choses différentes ».

Perception de l'espace

Je suis d'ailleurs probablement le premier (et le dernier !) dans l'histoire de l'humanité à avoir écrit ce nombre : il ne sert à rien ! Dans l'univers

des nombres, certains sont plus riches que d'autres. Certains sont utiles, d'autres sont attachants, mais l'immense majorité n'a pas grand intérêt. Le monde qui nous entoure est peuplé de rectangles de toutes sortes. Quelques-uns sont dans la nature mais la plupart sont construits par l'homme, qui doit cependant se plier aux lois naturelles. Le fil à plomb est perpendiculaire à l'horizontale et il est bien commode de construire des maisons dont les murs sont rectangulaires... Il se trouve que beaucoup de ces rectangles sont dorés : le rapport entre longueur et largeur est égal à φ . Pour vérifier qu'un rectangle situé devant vous est bien doré, rien n'est plus facile. Sortez votre carte de crédit (ou votre carte Vitale, ou de bibliothèque !), et essayez de masquer le rectangle en plaçant la carte devant vos yeux. Si le rectangle est exactement masqué par la carte, il est doré ! La prédominance de ces rectangles d'or est-elle un fait acquis ou une illusion ? Ce n'est pas clair. Après tout, on voit aussi beaucoup d'autres formes de rectangles qui ne sont pas dorés, comme par exemple les feuilles au format A4 ou encore les carrés.

Dans les musées d'art, cette abondance ne fait pourtant aucun doute ; beaucoup de tableaux ont des proportions divines. Certains pensent que nous avons une préférence innée pour l'esthétique du rectangle d'or. Quant à moi, je préfère penser que les mathématiques influencent notre sens esthétique. L'artiste qui choisit ce format pour une toile ne le fait pas parce qu'il considère que ce rectangle est « beau ». De manière consciente ou inconsciente, il sait que cette proportion « contient » plus de deux mille ans de mathématiques et de réflexion sur l'harmonie et sur les liens qui unissent les nombres et notre perception de l'espace. Avant même de commencer à peindre, le tableau a déjà du contenu ; il fait partie d'une histoire et d'une culture. En filigrane, on peut deviner la présence du passé ; Euclide, Fibonacci, Léonard de Vinci, Kepler, Escher et tant d'autres sont présents... ●

Étienne Ghys, *Le Monde* daté du 11.04.2013

POURQUOI CET ARTICLE ?

Il évoque la suite célèbre de Fibonacci, pour laquelle les deux premiers termes sont 0 et 1, et chacun des termes suivants est égal à la somme des deux termes précédents. Mathématiquement, cette suite (F_n) est définie par $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. On a : $F_0 = 0$; $F_1 = 1$; $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$; $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$; $F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$; $F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$; $F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$; $F_7 = F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13$, etc.

En posant $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or) et $\varphi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, on démontre que

$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^n - \varphi'^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ (formule de Binet).

Limites de fonctions, continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Déterminer des limites éventuelles d'une fonction n'a d'intérêt que lorsque x tend vers une borne ouverte de l'ensemble de définition D_f de f . On peut ainsi mettre en évidence la présence éventuelle d'asymptotes verticales ou horizontales à la courbe représentative de la fonction f .

La notion de continuité permet notamment de résoudre des équations du type $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$, f fonction continue) ou donner une valeur approchée de ses solutions.

Opérations sur les limites

Soit f une fonction définie au voisinage de a . Ici a peut être un nombre réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Limite d'une somme en a

Si f a pour limite :	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Si g a pour limite :	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite :	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$?	$-\infty$

Limite d'un produit en a

Si f a pour limite :	l	$l \neq 0$	$l \neq 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Si g a pour limite :	l'	$+\infty$	$-\infty$	0 ou $+\infty$ $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f \times g$ a pour limite :	$l \times l'$	si $l > 0$, $+\infty$ si $l < 0$, $-\infty$	si $l > 0$, $-\infty$ si $l < 0$, $+\infty$?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Limite de l'inverse en a

Si g a pour limite :	$l \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
alors pour limite :	$\frac{1}{g}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$ ou $-\infty$

MOTS CLÉS

LIMITE

Soit f une fonction définie au voisinage de a :

- la limite de f en a est $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, si tout intervalle de la forme $]M; +\infty[$ où $M \in \mathbb{R}$, contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a ;
- la limite de f en a est $-\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, si tout intervalle de la forme $]-\infty; M[$ où $M \in \mathbb{R}$, contient tous les réels

$f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a ;

- la limite de f en a est le réel l et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, si tout intervalle de la forme $]l-r; l+r[$ où $r > 0$, contient tous les réels $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de a .

FORME INDÉTERMINÉE

Dans un calcul de limites, on a une « forme indéterminée » lorsque l'on ne peut pas conclure directement. Pour « lever » cette indétermination, il faut transformer l'écriture de la fonction :

Comment lever une forme indéterminée ?

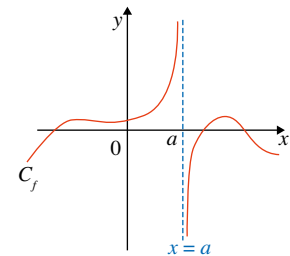
Les « ? » dans les tableaux précédents signifient que l'on ne peut pas conclure directement : on est en présence d'une « forme indéterminée », donc devant une limite de la forme : $+\infty - \infty$ ou $\infty \times 0$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

Pour « lever » cette indétermination, il faut transformer l'écriture de la fonction.

Comment détermine-t-on la présence d'asymptotes à la courbe d'une fonction ?

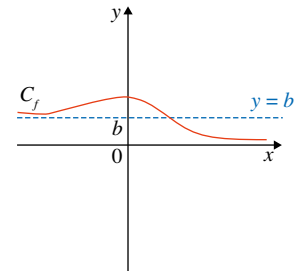
Asymptote verticale d'équation $x = a$:

lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$.



Asymptote horizontale d'équation $y = b$:

lorsque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$.



tion f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$, alors la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$, à l'infini.

THÉORÈME DES GENDARMES

si $f(x) \leq k(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} k(x) = l$.

(valable pour $a \in \mathbb{R}$ ou a qui est $-\infty$ ou $+\infty$)

Comment déterminer la limite d'une fonction en utilisant la comparaison ?

On peut utiliser les théorèmes de limite par comparaison.

Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a , et soit l un nombre réel.

Premier cas : si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Second cas : si $g(x) \leq f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Troisième cas (théorème des gendarmes) :

si $f(x) \leq k(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} k(x) = l$.

On peut utiliser les comparaisons directes :

- pour tout réel x , on sait que $x < e^x$;
- pour tout réel x strictement positif : $\ln x < x$.

Qu'est ce qu'une fonction continue ?

Approche graphique : pour une fonction f définie sur un intervalle I , on dit que la fonction f est continue sur I , lorsque sa courbe représentative C_f se trace « sans lever le crayon ».

Propriétés :

- les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée) sont continues sur leur ensemble de définition ;
- les fonctions construites à partir des fonctions de référence sont continues sur leurs ensembles de définition ;
- les fonctions polynômes sont continues sur l'ensemble des réels ;
- les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

Exemples :

- la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 1$ est continue sur l'ensemble des réels en tant que fonction polynôme ;
- la fonction f définie pour tout réel $x \neq 3$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ en tant que fonction rationnelle.

MOTS CLÉS

FONCTION CONTINUE

- Une fonction f , définie sur un intervalle ouvert contenant un réel a , est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- Une fonction f , définie sur un intervalle I ouvert, est continue sur I lorsque f est continue en tout réel a appartenant à I .
- Une fonction f , définie sur un intervalle $[a; b]$, est « continue sur $[a; b]$ » lorsque :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur }]a; b[\\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b) \end{array} \right.$$

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

- Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et $(a, b) \in I$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.
- Si, de plus, f est strictement monotone sur I , pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution $c \in [a; b]$.

RÉSOLUTION GRAPHIQUE

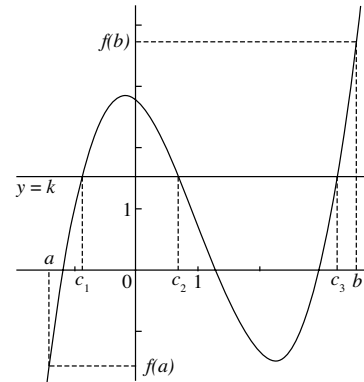
Les solutions de l'équation $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ sont les abscisses des points d'intersection de C_f avec la droite d'équation $y = k$.

Propriété des valeurs intermédiaires

Propriété fondamentale des fonctions continues : soit un intervalle I , $(a, b) \in I^2$ et f une fonction continue sur I .

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

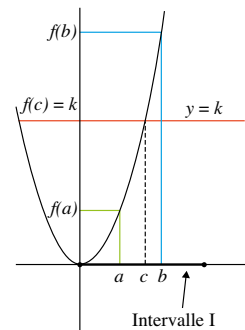
Interprétation graphique : la droite d'équation $y = k$ coupe au moins une fois la courbe représentative de la fonction f en un point dont l'abscisse est comprise entre a et b .



Interprétation en terme d'équation : l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b .

(c_1, c_2 et c_3 en utilisant le graphique).

Cas particulier des fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle : soit un intervalle I , $(a, b) \in I^2$ et f une fonction continue et strictement monotone sur I . **Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique comprise entre a et b .**



ZOOM SUR...

LA MÉTHODE PAR DICHOTOMIE

On utilise la méthode par dichotomie pour déterminer une valeur approchée de la solution d'une équation du type $f(x) = 0$ sur $[a; b]$ avec une précision donnée :

- on démontre à l'aide du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $[a; b]$;
- on calcule $f(c)$, c étant le milieu de l'intervalle $[a; b]$;
- si $f(a) \times f(c) < 0$, la solution de l'équation est dans $]a; b[$,

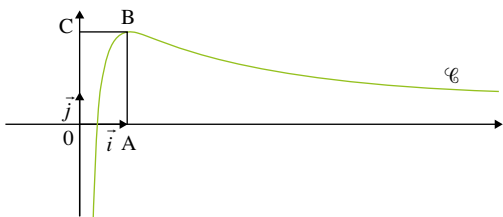
- sinon elle est dans $]c; b[$;
- on continue en testant le milieu du nouvel intervalle et ce, jusqu'au moment où l'on obtient la précision demandée.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

- **La question démographique sert d'excuse p. 13** (Propos recueillis par Catherine Vincent et Stéphane Foucart, *Le Monde* daté du 09.12.2017)

Métropole (juin 2013)

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; i ; j)$, la courbe représentative \mathcal{C} d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1 ; 0)$, $(1 ; 2)$, $(0 ; 2)$;
- la courbe \mathcal{C} passe par le point B et la droite (BC) est tangente à \mathcal{C} en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x , $f(x) = \frac{a+b \ln x}{x}$.

1. a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{(b-a) - b \ln x}{x^2}$.

c) En déduire les réels a et b .

2. a) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \frac{\ln x}{x}$.

c) En déduire le tableau de variations de la fonction f .

3. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0 ; 1]$.

b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1 ; +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$. Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

La bonne méthode

1. a) Considérer le point B d'abscisse 1.

b) Utiliser la formule donnant la dérivée d'un quotient.

c) Utiliser les résultats du **1. a)**.

2. a) Remplacer dans l'expression de f' , a et b par les valeurs trouvées précédemment, et remarquer que x^2 est positif.

b) Utiliser les limites des fonctions usuelles.

c) Déterminer le signe de $-\ln(x)$ puis les variations de f . Penser à préciser les bornes et les extremums éventuels.

3. a) Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $]0 ; 1]$.

b) Appliquer la technique de balayage.

Polynésie (juin 2010)

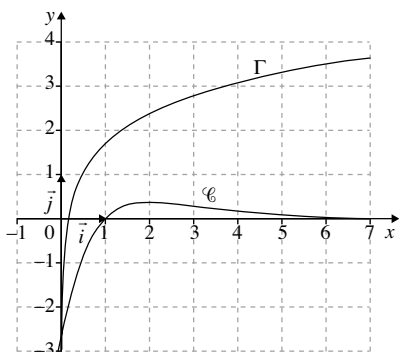
On considère la fonction g définie sur $[1 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$.

1. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1 ; +\infty[$ une unique solution notée α .

b) Démontrer que $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. a) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$.

On désigne par Γ la courbe d'équation $y = \ln(2x) + 1$ dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. Cette courbe est donnée ci-dessous.



a) En utilisant la courbe Γ , construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers α .

La bonne méthode

1. a) Il faut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

b) Par définition de α , $g(\alpha) = 0 \dots$

2. a) Il faut utiliser la bissectrice $\Delta : y = x$.

b) On montre la propriété par récurrence en posant $f(x) = \ln(2x) + 1$, et en utilisant le fait que la fonction f est croissante.

c) (u_n) est croissante et majorée donc convergente. Pour déduire la limite on fait tendre n vers $+\infty$, dans l'équation $u_{n+1} = f(u_n)$.

La question démographique sert d'excuse

Face à l'urgence écologique, une question ressurgit : sommes-nous trop nombreux ? Pour le biologiste Gilles Bœuf et le démographe Hervé Le Bras, c'est un moyen commode, pour les pays du Nord, de ne pas remettre en cause leur mode de vie.

En quarante ans, la population mondiale a doublé. De 7,5 milliards d'individus en 2017, elle pourrait, selon les Nations unies (ONU), frôler les 10 milliards en 2050. Dans un manifeste publié mi-novembre, 15 000 scientifiques internationaux appellent l'humanité à freiner d'urgence la destruction de l'environnement, préconisant notamment la limitation des naissances. Faut-il revenir au malthusianisme, une doctrine prônant la restriction démographique pour réduire la misère ? Entretien croisé entre le démographe Hervé Le Bras et le biologiste Gilles Bœuf.

Le scénario de l'explosion démographique a été évoqué dès les années 1960, notamment par le biologiste américain Paul Ehrlich, auteur de *La Bombe P* (1968). Pourquoi à cette époque précisément ?

Hervé Le Bras : On a mis du temps au XX^e siècle à admettre l'idée que la population augmentait trop vite, parce que, dans l'entre-deux guerres, on avait craint le phénomène inverse : une baisse trop rapide de fécondité et un manque d'hommes. On pensait alors que les populations indiennes, chinoises ou africaines n'augmenteraient pas, et que seule la « race blanche » était appelée à se développer. Même après 1945, il a fallu attendre avant que cette vision ne change. En janvier 1960, le magazine américain *Time* titre « That Population Explosion », et l'idée commence alors à s'imposer.

Que représente, en termes de biomasse, l'occupation de la Terre par l'homme et son cortège d'animaux domestiques ?

Gilles Bœuf : Selon un article publié dans *Science* il y a quelques années, il y a 12 000 ans (quand l'humain invente l'agriculture), on comptait environ 5 millions d'individus sur Terre. Si l'on fait la somme de ces humains et de leurs animaux domestiques, cela représente à peu près 0,1 % de l'ensemble de la biomasse que constituent les 5 000 espèces de mammifères. Aujourd'hui, c'est 90 % ! Et la biomasse que représente le milliard et demi de vaches que nous élevons, sachant qu'une vache pèse bien plus que cinq humains, excède la biomasse des 7,5 milliards d'humains vivant sur la planète...

L'appel qu'ont lancé 15 000 scientifiques sur les dangers liés à l'état de la planète insiste sur l'urgence qu'il y a à « limiter adéquatement la croissance de la population » humaine. Qu'en pensez-vous ?

H.L.B. : Selon moi, ce raisonnement est trop général. Les situations démographiques dans le monde sont très différentes. Les Iraniens en sont à 1,7 enfant par femme. Rien à voir avec le Niger, actuellement le pays ayant la plus forte fécondité avec 7,5 enfants par femme. Par ailleurs, entretenir l'angoisse d'une démographie galopante, c'est une manière commode pour les pays du Nord de ne pas remettre en cause leur propre mode de vie et de consommation. En incriminant

les pays du Sud qui font plus d'enfants, les pays riches leur disent en réalité : vous n'avez pas le droit de polluer ni de consommer autant que nous l'avons fait.

G.B. : Autre question : dans les pays où la pression démographique est trop forte, comment appliquer une politique de contrôle des naissances ? Si l'on excepte la contrainte d'Etat – comme l'a fait la Chine en 1979 avec sa « politique de l'enfant unique » –, la réponse passe par l'éducation des jeunes filles. Ce qui demande une volonté politique, des moyens et du temps. De fait, le gouvernement du Niger est actuellement incapable de faire face, et il faudrait une aide internationale importante pour espérer que les choses bougent dans ce domaine.

H.L.B. : La solution passe en effet par les femmes et tient en deux mots : éducation et autonomie. Pas l'éducation primaire, mais secondaire : il faut que les filles continuent d'aller à l'école une fois qu'elles sont nubiles. Elles y apprennent les bases du planning familial, et surtout cela les protège d'un mariage précoce. L'autonomie, cela signifie que c'est à elles et non aux hommes de décider de leur fécondité. Dans les pays très pauvres du Sahel, un enfant de plus, c'est un travailleur de plus. Les hommes continuent donc de vouloir beaucoup d'enfants. Mais les quelques enquêtes menées avec les femmes montrent qu'elles sont plus réalistes – ne serait-ce que parce qu'elles veulent, comme dans le reste du monde, accéder à l'emploi et à la vie publique.

Malthus fondait sa théorie, non sur la crise écologique mais sur l'adéquation entre la croissance de la production agricole et celle de la démographie. Pourra-t-on nourrir 10 milliards d'individus ?

G.B. : En termes de production globale, oui. Mais on se heurte à un gigantesque problème, celui de la distribution et du gaspillage alimentaire. A l'échelle mondiale, on jette presque la moitié de ce qu'on produit ! Pour améliorer la répartition de la nourriture, il faudrait mettre en place toute une organisation, en commençant par respecter les coûts de production agricole afin que les paysans puissent s'en sortir. C'est une tâche énorme, mais c'est possible.

H.L.B. : Il y a un problème plus grave : celui de l'augmentation fulgurante de la consommation mondiale de viande. Cette demande accrue en protéines animales est apparue à la fin des années 1980, lorsque les classes moyennes des pays émergents ont gagné en pouvoir d'achat. En Chine, la consommation de viande a été multipliée par vingt en quarante ans ! On produit actuellement deux fois plus de calories végétales qu'on en consomme, car ces calories végétales nourrissent les animaux qui nous apportent des calories animales. La moitié de la production actuelle de céréales est destinée à des animaux domestiques. Or, pour récupérer une calorie de viande ou de lait, il faut donner quatre calories végétales à un poulet, dix à une vache...

Mais pourra-t-on produire demain autant de nourriture qu'aujourd'hui, alors que les océans s'acidifient, que les pollutions dégradent les écosystèmes, que le changement climatique est en route ?

G.B. : Je le crois, à condition de changer sacrément nos habitudes. Et d'appliquer quelques principes simples. Ne pas gaspiller l'eau. Arrêter d'utiliser des pesticides dangereux, diminuer les engrais. Développer l'emploi ailleurs que dans les villes, en misant sur la polyculture raisonnée. Et cesser d'augmenter indéfiniment les surfaces agricoles ! Si nous créons demain un gigantesque agrosystème sans zone humide ni forêt tropicale, avec des océans mis en coupe réglée, on court à la catastrophe. Il faut aussi veiller à préserver de la biodiversité, pas seulement au sein des plantes cultivées.

Comment le changement climatique va-t-il affecter la croissance démographique ?

H.L.B. : Cette croissance sera très différente selon les régions. Sur le continent américain, par exemple, la fécondité a diminué presque partout, au Nord comme au Sud – la région en tête étant... la Guyane française, avec 3,4 enfants par femme. En Afrique, c'est autre chose : selon la projection moyenne de l'ONU, c'est entre les deux tropiques africains que se produiront les trois quarts de la croissance mondiale en 2050. Avec deux types de situations. Au Sud, le terrain est encore presque vide : la densité est de 10 habitants par kilomètre carré au Gabon, de 35 dans l'immense République démocratique du Congo (RDC). Il suffirait donc d'y augmenter les rendements agricoles pour nourrir bien plus d'habitants. Mais au Nord, c'est le Sahel. Et là, le problème est immense. Du Sénégal jusqu'au Niger (sans compter le Tchad), il y a environ 65 millions d'habitants : au taux de fécondité actuel, ils seront 200 millions en 2050, 400 millions en 2100. Pour eux, la question de l'alimentation et de l'emploi va se poser très fortement.

G.B. : D'autant que le changement climatique touchera de plein fouet cette région intertropicale. On y est déjà : l'assèchement du lac Tchad, principale source d'eau potable en Centrafrique, est une catastrophe sociale monstrueuse pour les quatre pays qui en dépendent – Niger, Tchad, Cameroun et Nigeria. La seule solution pour enrayer cette

évolution, c'est d'arrêter la déforestation. L'association de la sécheresse et de la disparition des forêts est la première cause des problèmes dans plusieurs régions du monde. Or la forêt garantit la pluie (par évapotranspiration des arbres), sans laquelle il ne peut par ailleurs pas y avoir d'agriculture. Faute de quoi les habitants de ces régions migrent vers les villes – où ils ne trouvent pas de travail.

La question de la pression démographique ne se poserait donc que dans quelques régions du monde ?

H.L.B. : Oui. Avec un autre phénomène qui complique encore les choses : la guerre. Quels sont les pays d'Asie qui ont la plus forte fécondité ? L'Afghanistan (5,3 enfants par femme), suivi de l'Irak (4,6), du Yémen (4,4), de la Palestine (4,3) et du Pakistan (3,7). En Afrique, c'est d'abord le Niger, puis la Somalie, le Mali, la RDC, le Tchad... Or, tous ces pays connaissent une grande instabilité politique, voire des conflits. Comment implanter une politique de régulation des naissances dans un pays en guerre ?

Il y a là un cercle vicieux, car une croissance démographique trop rapide est un facteur de déstabilisation propice aux conflits. C'est un phénomène relativement nouveau : géographiquement, les zones de conflit coïncident de plus en plus avec celles où la démographie est la plus forte, et les deux facteurs font système. On entre dans un problème plus préoccupant et plus large encore, qui est la gestion politique de la planète.

G.B. : S'y ajoute la question du changement climatique. Il y a d'étroites relations entre l'écologie et la géopolitique d'une région. La guerre de Syrie intervient en 2011, après les douze pires années de sécheresse du Croissant fertile depuis trois siècles : ce n'est pas une coïncidence.

Quelle que soit l'efficacité des politiques démographiques à venir, il faut compter avec l'inertie des générations : nous serons plus nombreux en 2050 qu'aujourd'hui. Comment concilier cette contrainte avec l'urgence écologique ?

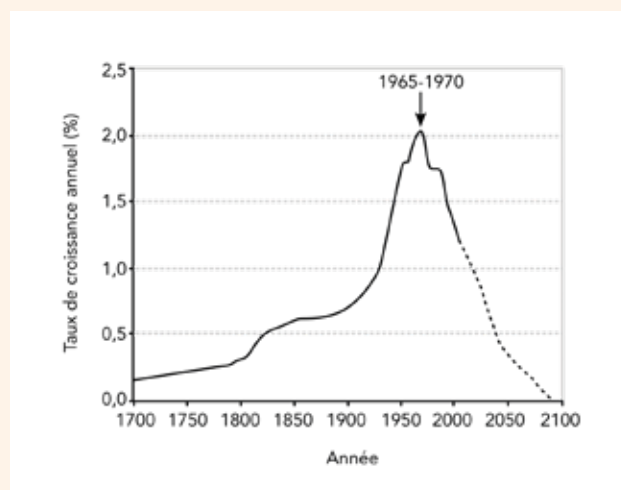
G.B. : Il y a là un paradoxe. Mais l'inertie, malheureusement, est aussi très forte en écologie ! Le premier texte faisant date sur le sujet

POURQUOI CET ARTICLE ?

Si l'on considère une fonction D qui à une année associe l'espérance de vie d'un individu, alors on constate effectivement que cette fonction D est croissante sur l'intervalle $[0, 2018]$. On peut également affirmer que : $\lim_{(n \rightarrow +\infty)} D(n) = A$, avec A un réel positif.

En effet, les humains ne sont pour le moment pas immortels. Étant donné que $D(2018) > 70$, on pourrait penser que $A > 70$, mais rien ne l'assure. Nul ne peut prédire les variations de la fonction D sur $[2018, +\infty[$. Ainsi, on est en droit de penser que la courbe représentative de D va admettre un point d'inflexion ou un sommet d'abscisse supérieure à 2018 en plus d'une asymptote horizontale d'équation $y = A$.

Si l'on considère une fonction T qui à une année associe le taux de croissance de la population mondiale, alors, en supposant que T est dérivable sur $[1700, 2018]$, on constate que $T'(1969) = 0$ et que T' est positive sur $[1968, 1969]$ et négative sur $[1969, 1970]$. Cela prouve bien que la fonction T admet un maximum local $T(1969) = 2,116$, atteint lorsque $a = 1969$. En prouvant que pour tout a de $[1700, 2018]$ on a bien $T(a) = 2,116$, on prouve que ce maximum est global.



remonte à 1895 : des Américains s'alarment de la disparition des grandes forêts de conifères, qu'ils coupaient pour faire de la pâte à papier, et de la contamination des rivières à saumon. Plusieurs alertes sont ensuite lancées dans les années 1950-1960. Mais le premier article d'écologie dans une grande revue scientifique, *Science*, date de 1997 ! En revanche, l'accélération de ces publications est maintenant continue. Et chaque article est plus inquiétant que le précédent.

En termes de population, on parle beaucoup de ce qui « entre », moins de ce qui « sort »... La mortalité sera-t-elle affectée par les bouleversements environnementaux ?

G.B. : C'est une question très profonde. Les résultats d'un article récent sont très parlants : en prenant comme critères la durée de vie, la taille et les performances physiques de l'homme, on voit que tout est « au taquet ». Après avoir pris 15 cm en cent cinquante ans, nous ne grandissons plus. Pareil pour la durée de vie : on a gagné 35 ans sur cent cinquante ans, mais la courbe est pratiquement à l'asymptote – et la différence homme-femme s'amenuise. Avons-nous atteint les capacités de développement et d'augmentation des performances propres à notre espèce ? Ou les freins qu'on se crée en dégradant l'environnement nous empêchent-ils de faire croître ces paramètres ?

H.L.B. : A l'échelle mondiale, il y a eu à partir des années 1970 une extraordinaire baisse de la mortalité après 60 ans – ce qui participe à la croissance de la population. Les champions du monde sont les Japonais. La France est légèrement derrière le Japon. Quant aux Etats-Unis, ils sont très au-dessous, et l'espérance de vie y plafonne depuis une dizaine d'années. Ce n'est pas la limite biologique qui est en jeu chez les Américains, mais le mode de vie, en particulier l'obésité.

Revenons au contrôle des naissances. Pour que celui-ci soit efficace, il faut que les changements soient consentis et les filles éduquées. Mais il y a des pays où le poids de la tradition, musulmane notamment, s'y oppose fermement...

H.L.B. : La religion musulmane n'est pas seule en cause. En Haïti, où la fécondité est une des plus fortes d'Amérique du Sud, c'est la religion catholique qui est aux manettes. Mais les Eglises, quelles qu'elles soient, ne freinent pas toujours. Ainsi, au Mexique, la baisse de fécondité fut négociée en 1972 entre l'Eglise et le président Echeverria

et le taux de fécondité est passé de 6,5 enfants par femme à 2,3.

En Iran, pays à strict régime musulman, la pression démographique a fortement diminué ces dernières décennies. Même chose dans les pays du Maghreb. En Algérie, l'âge moyen du mariage est passé de 17 ans à 28 ans en une seule génération, notamment parce que les femmes se sont massivement dirigées vers les études. En Tunisie, on compte, à la sortie de l'université, 40 % de plus de femmes que d'hommes.

Il est vrai toutefois que, dans certaines situations locales, des groupes religieux luttent contre le contrôle des naissances. Notamment dans les pays musulmans où les conflits sont les plus violents et où une partie des groupes en présence cherchent à empêcher l'éducation des filles. Le nom du mouvement terroriste Boko Haram vient des mots *book* et *haram* et signifie « livres interdits ».

A vous entendre, le problème démographique n'est pas celui dont nous souffrons le plus. Le malthusianisme ne s'impose donc pas ?

H.L.B. : Il s'impose d'autant moins qu'une grande partie du chemin est déjà fait. Les projections en nombre absolu sont une chose, mais il faut aussi prendre en compte le taux de croissance de la population mondiale. Celui-ci a augmenté dans les années 1950, puis a atteint son maximum au début des années 1970. Aujourd'hui, il a déjà pratiquement diminué de moitié par rapport à ce maximum. Et les éléments sont réunis pour que ce ralentissement global continue, sauf dans quelques *hot spots* problématiques.

G.B. : La question démographique doit être posée, mais la population sert d'excuse ou de masque à d'autres problèmes. On brandit la menace de 10 milliards d'humains, mais ce qui importe pour un avenir meilleur, c'est de savoir qui émet le plus de pollution, de contrôler ce phénomène, et de parvenir à une meilleure distribution des ressources. ●

Gilles Bœuf, biologiste, professeur à l'université Pierre-et-Marie-Curie, ex-président du Muséum national d'histoire naturelle.

Hervé Le Bras, démographe, directeur d'études à l'EHESS et directeur de recherche émérite à l'INED.

Propos recueillis par Catherine Vincent et Stéphane Foucart,
Le Monde daté du 09.12.2017

Dérivation

Le concept de dérivée est apparu il y a environ trois siècles. Il est lié, en mathématiques, à la notion de tangente à une courbe, et en sciences physiques à celle de vitesse instantanée d'un mobile.

Qu'est ce qu'une fonction dérivable en un point ?

Une fonction f est dérivable en un réel a de son ensemble de définition si le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie quand x tend vers a . Dans ce cas, ce réel est appelé « le nombre dérivé de f en a » et est noté $f'(a)$.

$$\text{On a } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout réel a appartenant à I . On appelle « fonction dérivée de f » la fonction qui, à tout réel x appartenant à I , associe le réel $f'(x)$.

Que faut-il retenir de la classe de Première ?

fonction f	fonction f'	Conditions
$x \mapsto ax + b, a \text{ et } b \text{ réels}$	$x \mapsto a$	\mathbb{R}
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	\mathbb{R}
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	\mathbb{R} si $n \geq 0$ \mathbb{R}^* si $n < 0$
$u + v$	$u' + v'$	
$ku, k \text{ réel}$	ku'	
$u \times v$	$u'v + uv'$	
u^n	$n u' u^{n-1}$	si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $u \neq 0$ sur I .
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I .
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$v \neq 0$ sur I .
$x \mapsto u(ax + b)$	$x \mapsto a \times u'(ax + b)$	Si $x \in I, u$ est dérivable en $y = ax + b$

MOTS CLÉS

FONCTION DÉRIVABLE EN UN SEUL POINT

• Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I .

La fonction f est **dérivable** en a si et seulement s'il existe un réel m tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = m.$$

• Le nombre réel m s'appelle le **nombre dérivé** de f en a et on le note $f'(a) = m$.

FONCTION DÉRIVÉE

• Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I .

• Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . La fonction qui, à tout réel $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x , est appelée fonction dérivée de f . Elle est notée f' .

Les nouvelles fonctions étudiées en classe de Terminale

La dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$ est la fonction $x \mapsto e^x$.

Pour toute fonction u dérivable sur un intervalle $I, (e^u)' = u' e^u$ sur I .

Pour tout réel $x > 0$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et pour toute fonction u dérivable strictement positive sur un intervalle $I, (\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Pour tout réel $x, \cos'(x) = -\sin(x)$ et $\cos'(ax + b) = -a \sin(ax + b)$.

Pour tout réel $x, \sin'(x) = \cos(x)$ et $\sin'(ax + b) = a \cos(ax + b)$.

Équation de la tangente à une courbe en un point où la fonction est dérivable

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors le nombre dérivé de f en a appartenant à I , noté $f'(a)$, est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f de f au point d'abscisse a . Une équation de T est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On note f' sa dérivée sur I :

- si $f' = 0$ sur I , alors f est constante sur I ;
- si $f' > 0$ (respectivement $f' < 0$) sur I alors f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I .
- si une fonction f admet un extremum en a alors $f'(a) = 0$.

DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

• Sa fonction dérivée f' s'appelle dérivée première ou dérivée du premier ordre de f .

• Lorsque la fonction f' est dérivable sur I , sa dérivée, notée f'' ou $f^{(2)}$, est appelée dérivée seconde de la fonction f .

• On peut ainsi définir, pour tout naturel n tel que $n > 1$, la dérivée n -ième (ou dérivée d'ordre n) de la fonction f , comme étant la dérivée de la dérivée d'ordre $(n-1)$ de f .

TANGENTE À UNE COURBE

• La tangente à une courbe \mathcal{C} en un point A est la position limite, quand elle existe, de la sécante (AM) lorsque le point M de la courbe tend vers le point A .

• Si une fonction f est dérivable en a , alors sa courbe représentative admet, au point A d'abscisse a , une tangente passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.

• Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse a (et d'ordonnée $f(a)$) est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Sujet inédit

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte.

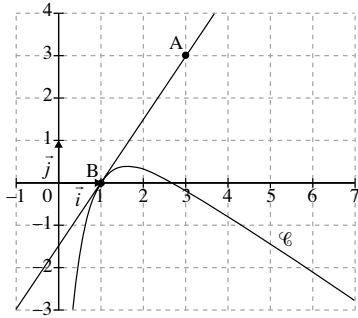
1. Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 est :

- a) $y = x + 1$ b) $y = ex$ c) $y = e^x$

2. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 3 \ln x - 2x + 5$. Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse 1 admet pour équation :

- a) $y = x + 2$ b) $y = -x + 4$ c) $y = 3x + 1$ d) $y = x + 3$

3. La courbe \mathcal{C} donnée ci-après est la représentation graphique d'une fonction h définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. La droite (AB), tracée sur le graphique, est tangente à la courbe \mathcal{C} au point B d'abscisse 1.



On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

- a) $h'(1) = 0$ b) $h'(1) = 1,5$ c) $h'(1) = -\frac{2}{3}$

4. Soit f une fonction définie sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 2x + 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$. On admet que la fonction f' est dérivable sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Le tableau de variations de la fonction f est donné ci-dessous.

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
Variation de f	↗ ↘		↘ ↗		
	$-\infty$		$-\infty$	$2 \ln 2 + 3$	$+\infty$

La tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse $\ln(1,5)$ admet un coefficient directeur :

- a) strictement positif b) strictement négatif c) nul

5. La fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} par $f(x) = e^{-2x+1}$.

On note f' sa fonction dérivée.

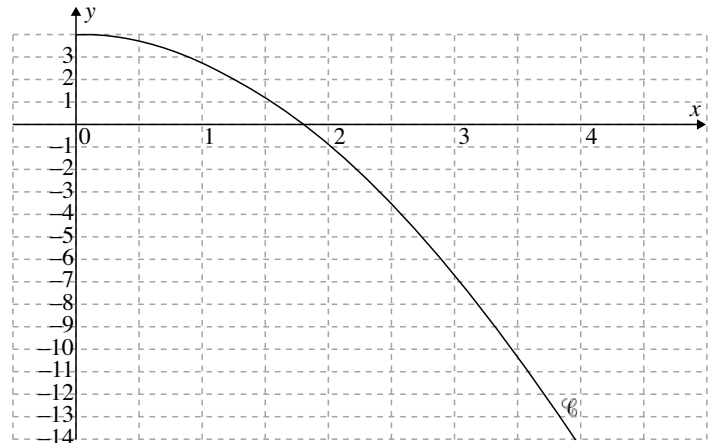
- a) Pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = e^{-2}$.
 b) Pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = e^{-2x+1}$.
 c) Pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = -2e^{-2x+1}$.

6. On donne la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln x$. La dérivée de f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

- a) $f'(x) = 1$ b) $f'(x) = \ln x$
 c) $f'(x) = \frac{1}{x}$ d) $f'(x) = \ln(x) + 1$

7. Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; 4[$ par $f(x) = -x^2 - x + 4 + \ln(x + 1)$.

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le repère orthogonal ci-dessous et f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0 ; 4[$.



- a) Calculer $f'(x)$.
 b) Justifier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; 4[$.

La bonne méthode

- et 2. Une équation de la tangente à la courbe d'une fonction f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en a (f dérivable en a) est $f'(a)$.
- Il faut penser à utiliser le tableau de variations.
- La fonction f est de la forme e^u .
- La fonction f est de la forme $u \times v$.
- a) On a $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
 b) Montrer que $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $]0 ; 4[$.

Fonctions sinus et cosinus

Parmi l'ensemble des fonctions étudiées, les fonctions sinus et cosinus présentent des particularités spécifiques, notamment la périodicité. L'étude de ces fonctions sur leur période (un intervalle) va permettre d'obtenir la représentation graphique de toute la fonction.

Définition, dérivation

La fonction cosinus, notée \cos , est la fonction qui à tout réel x associe le nombre réel $\cos x$.

La fonction sinus, notée \sin , est la fonction qui à tout réel x associe le nombre réel $\sin x$.

Propriétés : les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur l'ensemble des réels, donc continues.

Pour tout réel x :

• $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\cos'(ax + b) = -a\sin(ax + b)$.

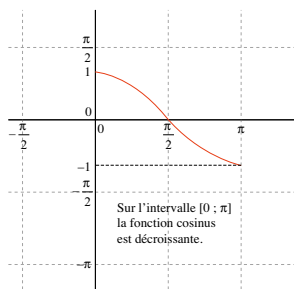
• $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\sin'(ax + b) = a\cos(ax + b)$.

Exemple : la dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3\cos(4x + 5)$ est la fonction f' définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = -12\sin(4x + 5)$.

Fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $[0 ; \pi]$

La fonction cosinus

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	-	0
\cos	1	(0)	-1



DEUX ARTICLES DU MONDE À CONSULTER

- **Un ordinateur dans votre poche p. 20** (Jean-Marc Chabanas, *Le Monde* daté du 15.09.1973)
- **Le grand saut quantique p. 21** (David Larousserie, *Le Monde Science et médecine* daté du 05.07.2017)

MOTS CLÉS

CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Une unité de longueur a été fixée. On appelle cercle trigonométrique tout cercle de rayon 1, muni d'un point origine et d'un sens de rotation (appelé sens direct).

FONCTIONS \cos , \sin

Soit \mathcal{C} un cercle trigonométrique d'origine O et A et B les points de \mathcal{C} tel que le repère $(O ; \overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$ soit orthonormal de sens direct. Soit x un réel et M le point de \mathcal{C} associé à x :

- le cosinus de x , noté $\cos x$, est l'abscisse du point M dans le repère $(O ; \overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$;
- le sinus de x , noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M dans le repère $(O ; \overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$.

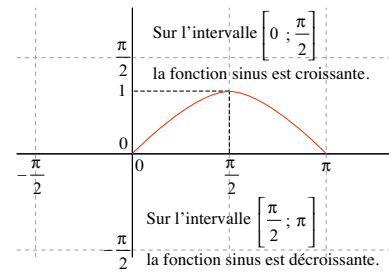
FONCTION PAIRE

Une fonction f est paire si et seulement si :

- quel que soit le réel $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$;
- C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans un repère orthogonal.

La fonction sinus

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin'(x) = \cos(x)$	+	0	-
\sin	0	1	0

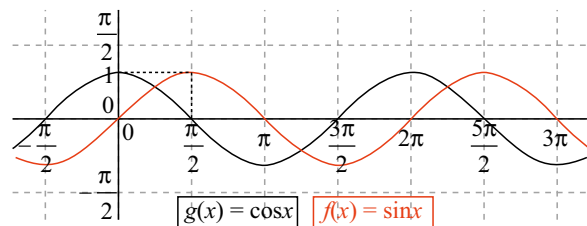


Parité, périodicité des courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus

Pour tout réel x , on a $\cos(-x) = \cos(x)$, donc la fonction cosinus est **paire** et sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Pour tout réel x , on a $\sin(-x) = -\sin x$, donc la fonction sinus est **impaire** et sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Pour tout réel x , on a $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, donc les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques de période 2π** .



FONCTION IMPAIRE

Une fonction f est impaire si et seulement si :

- quel que soit le réel $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$;
- C_f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

AXE DE SYMÉTRIE

Une droite \mathcal{D} est l'axe de symétrie d'une figure F si et seulement si le symétrique par rapport à \mathcal{D} de tout point M de la figure F est aussi un point de F .

CENTRE DE SYMÉTRIE

Un point I est le centre de symétrie d'une figure F si et seulement si le symétrique par rapport à I de tout point M de la figure F est aussi un point de F .

FONCTION PÉRIODIQUE

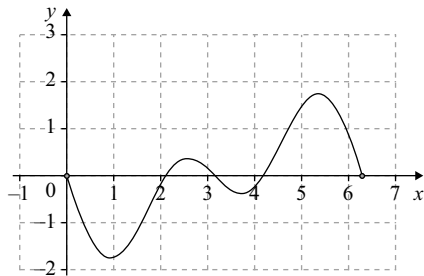
Une fonction f définie sur \mathbb{R} est périodique de période T si et seulement s'il existe un réel $T > 0$ tel que, pour tout réel x :

$$f(x + T) = f(x).$$

Sujet inédit

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ par : $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x) + 1$.

La courbe préconstruite ci-dessous est la représentation graphique de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.



1. **a)** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f .
- b)** En utilisant la relation $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$, montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 2\pi]$: $f'(x) = -\sin(x) [1 + 2\cos(x)]$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, l'équation produit : $\sin(x) [1 + 2\cos(x)] = 0$.
3. **a)** En s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction dérivée f' ci-dessus, dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

b) Dédire des questions 2. et 3. **a)** le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

Préciser les ordonnées des points dont l'abscisse x vérifie $f'(x) = 0$.

4. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ dans le repère précédent (où f' est déjà représentée).

La bonne méthode

1. **a)** Pour tout réel x :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \text{ et } \cos'(ax + b) = -a\sin(ax + b).$$

b) Mettre $-\sin x$ en facteur dans l'expression de f' .

2. Pour résoudre une équation produit, il faut utiliser la propriété suivante : « un produit de facteurs est nul lorsque l'un des facteurs est nul ».

3. **a)** Placer les valeurs où f' s'annule, puis les intervalles où elle est positive et négative.

b) Si $f' \geq 0$ sur un intervalle I , f est croissante sur I .

Si $f' \leq 0$ sur un intervalle I , f est décroissante sur I .

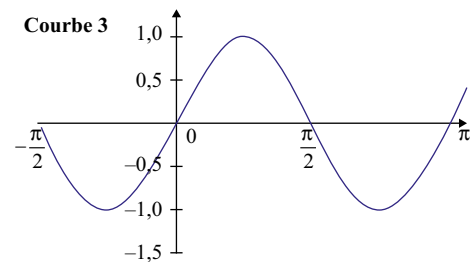
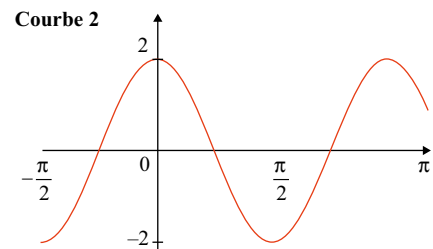
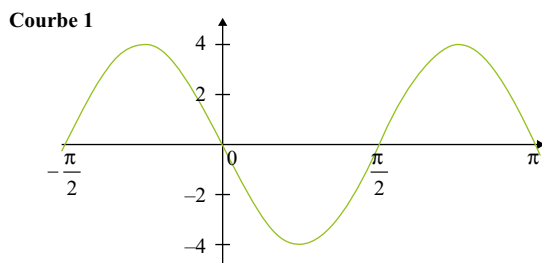
4. Pour représenter graphiquement la fonction, on peut s'aider d'un tableau de valeurs.

Nouvelle-Calédonie (mars 2013)

Pour l'énoncé suivant, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

On considère une fonction f , sa dérivée f' et son unique primitive F s'annulant en $x = 0$. Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont données (dans le désordre) par les courbes ci-dessous.

Proposition : « La courbe 3 est la représentation graphique de f . »



La bonne méthode

Si la courbe représentative de f est la courbe 3, quelle courbe est la représentation de F ?

Un ordinateur dans votre poche

Est-ce sous la forme de l'ordinateur individuel que l'informatique entrera dans la vie de tous les jours ? On connaît l'essor des « calculatrices » de poche, équivalent sous forme réduite des calculatrices de bureau, effectuant les quatre opérations arithmétiques fondamentales : addition, soustraction, multiplication et division. Dans leur sillage, certains constructeurs d'ordinateurs classiques proposent maintenant des « calculateurs » de poche. Ils traitent des fonctions plus complexes : inverses, logarithmes, lignes trigonométriques, intérêts composés, taux d'amortissement. Si l'on ose ainsi passer du sexe faible au sexe fort, on ne prononce encore que timidement le mot d'« ordinateur » de poche. Et pourtant, on retrouve bien là, sous une forme simple, les principes et la structure des ordinateurs, à un prix dérisoire. Mais l'est-il vraiment pour le service rendu ?

Le calculateur de poche, comme le livre du même nom, suppose en fait une grande poche. Il pèse dans les 200 grammes et mesure environ 8 centimètres sur 15, pour 2 bons centimètres d'épaisseur.

Que fait-il ? Sinus, cosinus, puissances, bref une dizaine de fonctions complexes s'ajoutant aux fonctions arithmétiques classiques. C'est en somme, le concurrent de la règle à calcul. Mais quel concurrent ! Mesurés sur quelques problèmes typiques, les temps nécessaires à la résolution complète tombent de quelques minutes à quelques dizaines de secondes, un gain moyen dans un rapport cinq à dix. La précision obtenue est de l'ordre de dix chiffres significatifs contre trois, quatre au maximum, pour la règle à calcul.

Sa structure s'apparente bien à celle d'un ordinateur. Les données d'entrée sont traitées par un programme, c'est-à-dire des instructions qui s'enchaînent. Celles-ci sont décodées par un organe de commande. Elles sont exécutées par un organe de calcul. Les résultats sont enfin visualisés de façon claire.

À y regarder de près, ces éléments sont bien sûr assez rustiques, et c'est la notion de « programme » qui peut le plus être controversée. Dans un ordinateur d'architecture moderne, on trouve des « instructions » enregistrées en mémoire à deux niveaux. À un premier niveau se trouve le programme proprement dit. C'est un enchaînement d'instructions dont l'ordre est choisi par l'utilisateur pour résoudre un problème déterminé. Elles sont inscrites en mémoire au moment de traiter ce problème, ou un peu avant, et sont ensuite effacées au moment de l'inscription du programme suivant. Chacune de ces instructions fait appel, lors de son décodage, à une séquence d'instructions plus élémentaires, dont l'ordre a été fixé par le constructeur. Celles-ci sont enregistrées à un second niveau de mémoire, de façon généralement indélébile. C'est la technique de la microprogrammation.

Dans l'ordinateur de poche, c'est seulement le second niveau que l'on retrouve. Le programme proprement dit n'est pas enregistré à un premier niveau avant son exécution. Les instructions sont exécutées au fur et à mesure de leur composition. La programmation est en quelque sorte extérieure à l'ordinateur (Chaque instruction est plus complexe que celle d'un ordinateur habituel. C'est une véritable fonction qui correspond mieux – ô sublime clarté du vocabulaire informatique – aux notions de « sous-programme » ou de « macro-instruction »).

De même, la notion de mémoire de données n'existe pratiquement pas. Les données sont entrées au fur et à mesure du calcul. Il suffit de pouvoir enregistrer temporairement des résultats intermédiaires, dans les registres de l'organe de calcul pour avoir déjà une souplesse d'utilisation fort appréciable.

POURQUOI CET ARTICLE ?

Cet article mentionne les **premières calculatrices**, qui permettent de faire rapidement des calculs, dont on ne connaissait auparavant le résultat qu'en consultant des tables : tables des logarithmes, des cosinus, des sinus, etc. L'invention des calculatrices a ainsi profondément modifié l'enseignement des mathématiques...

Comment ces éléments entrent-ils dans un aussi petit volume ? C'est, bien sûr, grâce aux circuits intégrés. Il faut constater d'abord que l'alimentation du calculateur – des batteries rechargeables – occupe pratiquement le tiers du volume. Le clavier nécessaire à l'entrée des données, aussi plat que possible, offre sur la surface disponible trente à quarante touches (les dix chiffres usuels et des « touches de fonction », telles qu'addition ou soustraction, correspondant aux différents types d'opérations du calculateur). La visualisation des résultats se limite à une rangée de chiffres lumineux, comparable à ceux des appareils de mesure électronique.

Le reste, c'est en quelque sorte l'« unité centrale » avec ses trois parties essentielles : l'organe de commande, l'organe de calcul et la mémoire (cette dernière est donc, ici, uniquement une mémoire inaltérable contenant les micro-instructions). Une carte de circuits intégrés à grande échelle suffit pour chacune de ces trois parties. La simplicité de structure est accentuée par le choix d'une organisation dite « en série ». Qu'est-ce à dire ? Soit, par exemple, à effectuer l'addition de deux nombres : 123 et 254. Dans un ordinateur classique, un « additionneur » ajoute les unités 3 et 4, un autre additionneur les dizaines 2 et 5, un troisième les centaines 1 et 2. Ces trois additions se déroulent « en parallèle » dans le même intervalle de temps (légèrement majoré en réalité pour tenir compte d'éventuelles retenues). Dans un ordinateur simplifié, organisé « en série », un seul et même additionneur ajoute d'abord les unités 4 et 3, puis est utilisé à nouveau pour faire la somme des dizaines, des centaines, etc.

Il en résulte que le temps d'addition total est proportionnel aux nombres manipulés. La conséquence est que, malgré l'emploi de circuits intégrés comparables à ceux des ordinateurs puissants, les temps de calcul pratiques sont de l'ordre du dixième de seconde pour chaque opération élémentaire. Mais c'est bien largement suffisant pour donner l'impression d'instantanéité, qui est le caractère le plus frappant de ces calculateurs de poche.

Et il est de fait que ces appareils apportent, à qui les manipule pour la première fois, un véritable sentiment d'enthousiasme, qui est sans doute pour beaucoup dans leur succès commercial.

Est-ce à dire que la règle à calcul est définitivement détrônée ? Le prix d'un ordinateur de poche est aujourd'hui de l'ordre de 1 000 à 3 000 F. Celui d'une bonne règle à calcul de 50 à 100 F. Quels que soient les progrès, toujours spectaculaires, des prix de l'électronique, il est douteux que l'écart puisse diminuer dans des proportions aussi considérables.

S'il hésite peu actuellement à faire acquérir à son patron un calculateur de poche à des fins professionnelles, le particulier balancera certainement lorsqu'il lui faudra l'acheter sur ses fonds personnels. Quels sont les arguments ? Vitesse et précision. Mais est-on vraiment à quelques minutes près ? A-t-on besoin souvent de dix chiffres significatifs ? Alors, on fait appel à d'autres arguments de vente qui sont de nature plus sentimentale. Il est symptomatique de lire, textuellement, dans une notice de présentation et sous la plume du constructeur, qu'il s'agit là d'un instrument incomparable « pour connaître le nombre de jours qu'il vous reste pour acheter un cadeau avant l'anniversaire de votre femme ». Gageons que celle-ci accepterait volontiers une erreur de quelques jours si l'argent destiné à l'achat de l'ordinateur de poche s'ajoutait au cadeau, ou aboutissait en fin de compte... dans sa propre poche. ●

Le grand saut quantique

« *C'est du sérieux !* », s'enthousiasme Lieven Vandersypen, du laboratoire QuTech à l'université de Delft (Pays-Bas), en brandissant un gros disque de la taille d'un 33-tours. C'est une plaquette de silicium, fabriquée par Intel, qui ressemble à celle des microprocesseurs, gravée de milliards de transistors, qui dopent nos ordinateurs et autres mobiles. Sauf qu'elle contient les premières briques de ce qui pourrait constituer le cœur d'une machine d'un nouveau genre : un ordinateur quantique. Ce concept, imaginé dans les années 1980, est longtemps resté une arlésienne, comparable à la fusion nucléaire dans le domaine de l'énergie. Autrement dit, une approche révolutionnaire, promettant de battre les meilleurs supercalculateurs actuels, mais faisant face à de sérieux obstacles pour sa réalisation concrète. Elle tire profit de la théorie quantique, qui décrit la matière au niveau atomique, et surtout de ses propriétés radicalement différentes de la physique classique.

« *La donne concernant l'informatique quantique est en train de changer*, constate Leo Dicarlo, également à QuTech. *Le moment devient plus excitant avec l'implication des industriels.* » Ces derniers mois lui donnent raison. Les géants Google, IBM, Microsoft ou encore Intel ont annoncé plusieurs percées dans le domaine. Depuis le printemps, n'importe qui peut se connecter à un service d'IBM donnant accès à un ordinateur quantique, doté de trois fois plus de composants que celui mis à disposition en 2016. Une version améliorée de cette machine peut même être achetée pour ceux qui ne voudraient pas partager leurs calculs.

« *Même si cela reste de la R&D, nous avons progressé et avons confiance : dans la prochaine décennie un ordinateur quantique universel sera développé*, indique Xavier Vasques, directeur technique chez IBM France. *L'ouverture de ce système permet d'explorer les collaborations et de créer un écosystème pour accélérer son adoption.* » Près de 300 000 expériences quantiques ont déjà tourné sur ces ordinateurs pour 40 000 utilisateurs, communique IBM.

Google revendique, lui, depuis mai, d'avoir fabriqué le plus gros de ces ordinateurs nouvelle génération. Il est environ un tiers plus gros que celui d'IBM, et son successeur, attendu dans les prochains mois, sera deux fois plus performant. Il pourrait être le premier à montrer la supériorité du quantique sur le monde du calcul classique. Ces progrès sont notamment dus au recrutement en 2014 d'une des vedettes académiques du domaine, John Martinis, de l'université de Californie, à Santa Barbara. Chez Microsoft ou chez la française Atos, des machines classiques, capables de simuler le comportement des ordinateurs quantiques, sont désormais en vente. Là encore, pour préparer le monde à la révolution annoncée. QuTech même est le symbole du nouveau souffle quantique. Le laboratoire a été lancé en 2014, à partir d'une équipe de recherche fondamentale de l'université de Delft. En 2015, il reçoit le label « icône nationale » et plus de 135 millions de dollars (119 millions d'euros) sur dix ans. Leo Kouwenhoven, le fondateur, a depuis été recruté par Microsoft, qui ouvre un site sur le campus pour ses propres activités et des collaborations avec QuTech.

« *Les entreprises partenaires, comme Intel ou Microsoft, ont été impressionnées par nos divers atouts en science, en ingénierie, en théorie... Ils nous ont dit ne pas avoir trouvé une telle concentration ailleurs, y compris aux Etats-Unis* », explique Kemo Agovic, le directeur administratif de ce laboratoire. « *Ce n'est plus de la pure physique quantique, mais déjà de l'ingénierie en électronique, en informatique, en optique, en logiciels...* », estime Garrelt Alberts, de l'Institut néerlandais de recherche appliquée (TNO), partenaire de QuTech, devenu le plus gros laboratoire d'Europe dans le domaine.

La cinquantaine de chercheurs du départ a déjà presque triplé et pourrait atteindre 250 d'ici à 2020. En 2016, c'est de ce campus qu'est partie l'initiative européenne destinée à financer, à hauteur de 1 milliard d'euros sur dix ans, des activités autour de l'information quantique. Les premiers appels d'offres sont attendus pour 2018. A l'intérieur, l'aménagement ressemble plus à celui d'une start-up qu'à celui d'une université. Les bureaux sont en open space. Les expériences nécessitent des systèmes de refroidissement à l'hélium liquide, assez bruyants, qui sont regroupés sur un étage, séparé des ordinateurs permettant de les contrôler, pour plus de tranquillité. Le nombre de ces frigos dépasse la trentaine, deux fois plus qu'en 2014. C'est en leur sein que battent les futurs cœurs des ordinateurs quantiques. Ils n'ont plus rien à voir avec les transistors et processeurs actuels. Dans ces derniers, l'information est codée avec des 0 et des 1 (les bits d'information) et traitées par des transistors, sorte d'interrupteurs à courant électrique. L'assemblage de plusieurs de ces transistors permet de trier les bits, de les

ajouter, de les retrancher... Mais alors qu'un interrupteur est soit ouvert (codant pour 1), soit fermé (codant pour 0), son équivalent quantique peut être ouvert et fermé à la fois, et donc valoir 0 et 1 dans le même temps. Ce qubit, pour bit quantique, est techniquement une superposition de 0 et 1, une sorte de mélange des deux. Comme un peintre qui passerait du noir et blanc au niveau de gris, voire à la couleur, l'ingénieur peut alors faire déborder son imagination.

Contrôler sans détruire

Quantitativement, le gain est énorme. Un qubit peut encoder deux bits ; deux qubits peuvent encoder quatre bits, ou plus généralement N qubits équivalent à 2^N bits. Petit détail qui complique néanmoins les choses : si mesurer un bit ne change pas sa valeur, mesurer un qubit le fait se précipiter avec une certaine probabilité soit vers la valeur 0, soit vers la valeur 1. Tel le carrosse se transformant en citrouille, la magie est rompue. Tout l'art des ingénieurs consiste donc à contrôler ces qubits, sans les détruire. En outre, la superposition et cette capacité à être dans deux états à la fois n'est pas la seule bizarrerie quantique profitable pour les calculs. Il y a aussi l'intrication, c'est-à-dire l'art d'assembler deux qubits – ou plus – de manière à ce qu'il ne fasse qu'un. Ces deux propriétés confèrent une sorte de parallélisme intrinsèque à l'ordinateur quantique et apportent de la liberté aux concepteurs de programmes, afin de faire mieux que des équivalents classiques. En 1994 et 1996, deux algorithmes ont ainsi été proposés, dont l'efficacité est supérieure aux ordinateurs classiques. L'un permet de rechercher un mot dans un dictionnaire. L'autre trouve les diviseurs d'un entier. Plus le dictionnaire est gros ou plus l'entier est gros, plus les calculs sont longs, mais le protocole quantique demande moins de temps que son homologue classique.

La recherche s'adapte aussi aux modes actuelles, comme l'apprentissage machine, une technique très à la mode d'intelligence artificielle. En mars 2017, Ioanidis Kerenidis, directeur de recherche CNRS à l'Institut de recherche en informatique fondamentale (université Paris-Diderot), a ainsi présenté un algorithme de recommandation de films, de livres ou de rencontres, « *exponentiellement plus efficace que les méthodes actuelles* ». Reste à fabriquer ces fameux qubits. Les idées et réalisations foisonnent, avec chacune leurs avantages et leurs inconvénients. Leur point commun est d'utiliser des objets capables d'être dans deux états à la fois, souvent équivalents à l'aiguille d'une boussole pointant vers le haut, le bas (l'équivalent des 0 et 1 classiques) ou toute position intermédiaire. A partir de là, le choix est grand : atomes, électrons, photons... qui « tournent » avec des lasers, des microondes, des tensions électriques. « *Toutes ces bizarreries quantiques, superposition, intrication... sont devenues pour nous du quotidien* », résume Leo Dicarlo.

Un des dispositifs les plus populaires chez les industriels est un circuit électronique dans lequel les charges peuvent être à deux endroits à la fois. Il est plutôt simple à fabriquer, et surtout à répliquer et multiplier. C'est l'option choisie par IBM et Google pour leurs machines de respectivement 17 et 22 qubits. ●

David Larousserie, *Le Monde Science et médecine* daté du 05.07.2017

POURQUOI CET ARTICLE ?

Cet article montre très bien l'importance de la programmation et de l'algorithmique dans le développement d'ordinateurs de nouvelles générations, en l'occurrence les « ordinateurs quantiques ». Non seulement la physique quantique n'aurait pas pu se développer sans s'appuyer sur les progrès faits en mathématiques, mais depuis plusieurs années, aussi bien au collège qu'au lycée, les cours de mathématiques incluent l'étude de différents langages de programmation, tels que Scratch au collège et Algorbox ou Python au lycée et en classes préparatoires.

Cet article donne donc un exemple d'application des mathématiques et de l'algorithmique dans l'industrie d'aujourd'hui et de demain.

Fonction exponentielle

C'est en recherchant des fonctions dérivables sur \mathbb{R} dont la dérivée est proportionnelle à la fonction que l'on est conduit à l'étude de la fonction exponentielle. Celle-ci joue un rôle capital en mathématiques car c'est une fonction de référence qui intervient dans de nombreuses lois de probabilité.

Comment la fonction exponentielle est-elle définie ?

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels vérifiant les deux conditions suivantes :

- Pour tout réel x , $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.
- Pour tout réel x , on a : $e^x \times e^{-x} = 1$.

Conséquences : $e^0 = 1$; $e^1 = e \approx 2,718$; $e^{-1} = \frac{1}{e}$ et $e^{0,5} = \sqrt{e}$.

Comment varie la fonction exponentielle ?

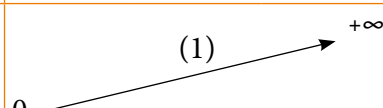
La fonction exponentielle est égale à sa dérivée.

Pour tout nombre réel x , en posant $f(x) = e^x$, on a $f'(x) = f(x)$.

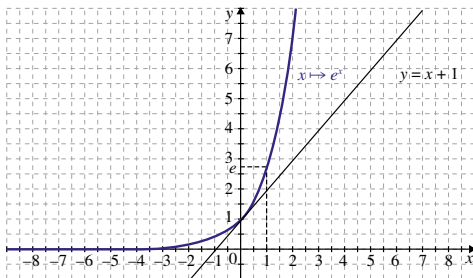
$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Pour tout nombre réel x , $e^x > 0$, la fonction exponentielle est donc strictement croissante.

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x) = e^x$		+	
$f(x) = e^x$		(1) 	
	0		$+\infty$

Courbe représentative de la fonction exponentielle



MOTS CLÉS

FONCTION EXPONENTIELLE

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur \mathbb{R} vérifiant les deux conditions suivantes :

- $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout nombre réel x ;
- $\exp(0) = 1$.

En posant $f : x \mapsto \exp(x) = e^x$, f est l'unique fonction vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

La fonction exponentielle de base e est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

NOMBRE e

- L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e .
- Le nombre e est un nombre irrationnel, voisin de 2,718.
- On dit aussi que le nombre e est la base du logarithme népérien puisque $\ln e = 1$.

LOGARITHME NÉPÉRIEN

- La fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction inverse sur $]0 ; +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1.

Quelles sont les propriétés de la fonction exponentielle ?

- Relation fonctionnelle : quels que soient les réels x et y , on a : $e^x \times e^y = e^{x+y}$.
- Quels que soient les réels x et y , on a $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.
- Pour tout nombre réel x , on a : $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$.
- Pour tout nombre réel x , on a : $\frac{e^x}{e^2} = \sqrt{e^x}$.
- Pour tout nombre réel x et pour tout entier n , on a : $(e^x)^n = e^{nx}$.

Quelle est la dérivée de la fonction e^u ?

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I , alors pour tout réel x appartenant à I , on a : $(e^u)' = u'e^u$.

Équation et inéquation avec la fonction exponentielle

Soit a et b deux nombres réels.

- $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$.
- $e^a < e^b$ si et seulement si $a < b$ (l'équivalence est vraie aussi si les inégalités ne sont pas strictes).
- $e^a > e^b$ si et seulement si $a > b$ (l'équivalence est vraie aussi si les inégalités ne sont pas strictes).
- Si, de plus, $b \in \mathbb{R}_+^*$: $e^a = b$ si et seulement si $a = \ln b$.

Quelles sont les limites usuelles de la fonction exponentielle ?

Aux bornes de l'ensemble de définition : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Nombre dérivé en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^0 = 1$.

Croissances comparées de fonctions $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

- Pour ne pas fondre, le cœur des puces se fragmente p. 25 (Le Monde daté du 02.03.2005)

- Pour tout réel a strictement positif, il existe un unique réel x tel que $e^x = a$. Ce nombre s'appelle le logarithme népérien de a et on le note $x = \ln a$.
- Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln'(1) = 0$.

CROISSANCES COMPARÉES

- Il s'agit de comparer la croissance de la fonction exponentielle et de la fonction $x \mapsto x$ dans le but de lever certaines indéterminations qui peuvent se présenter lors du calcul de limites.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

- On peut retenir la règle opératoire suivante : à l'infini, l'exponentielle de x « l'emporte » sur la fonction $x \mapsto x$.

CROISSANCE EXPONENTIELLE

Lorsqu'on passe d'un terme d'une suite au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre, la suite est géométrique. On parle alors de croissance exponentielle.

Liban (mai 2013)

Étant donné un nombre réel k , on considère la fonction f_k définie sur \mathbb{R} par $f_k(x) = \frac{1}{1 + e^{-kx}}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$.

On a donc, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

La représentation graphique \mathcal{C}_1 de la fonction f_1 dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est donnée en annexe.

- Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- Démontrer que, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.
- On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur \mathbb{R} . Calculer, pour tout réel x , $f_1'(x)$.

En déduire les variations de la fonction f_1 sur \mathbb{R} .

- On définit le nombre $I = \int_0^1 f_1(x) dx$.
Montrer que $I = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

Donner une interprétation graphique de I .

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe \mathcal{C}_{-1} représentant la fonction f_{-1} .

Pour tout réel x , on appelle P le point de \mathcal{C}_1 d'abscisse x et M le point de \mathcal{C}_{-1} d'abscisse x .

On note K le milieu du segment $[MP]$.

- Montrer que, pour tout réel x , $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
- En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.
- Tracer la courbe \mathcal{C}_{-1} sur l'annexe, à rendre avec la copie.
- En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes \mathcal{C}_{-1} , \mathcal{C}_1 , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

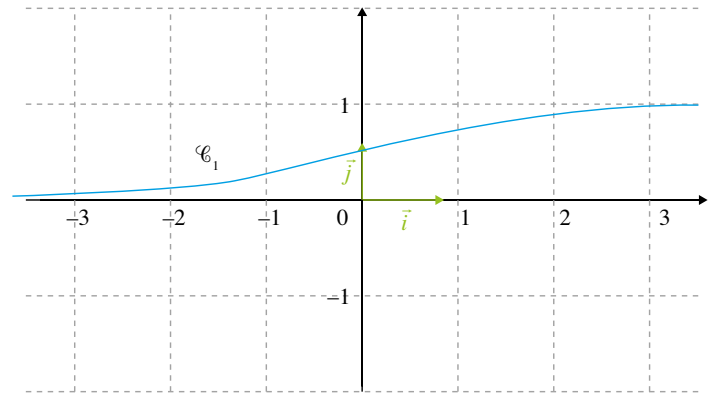
Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k .

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

- Quelle que soit la valeur du nombre réel k , la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
- Quelle que soit la valeur du réel k , la fonction f_k est strictement croissante.
- Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0,99$.

Annexe

Représentation graphique \mathcal{C}_1 de la fonction f_1



La bonne méthode

Partie A

- Pour la recherche des limites, penser à les ramener à des limites usuelles. Quant à l'interprétation graphique, penser aux asymptotes.
- Deux méthodes possibles : soit remplacer e^{-x} par $\frac{1}{e^x}$, soit multiplier la fraction par e^x , au numérateur et au dénominateur.
- Deux méthodes : soit on prend la première forme de f_1 , en utilisant la formule donnant la dérivée de $\frac{1}{u}$, soit la seconde forme de f_1 , en utilisant la formule donnant la dérivée de $\frac{u}{v}$.
- Utiliser la forme de f_1 de la question 2., en remarquant qu'elle peut s'écrire sous la forme $\frac{u'}{u}$ pour déterminer une primitive de f_1 .

Partie B

- Prendre la seconde forme de f_1 pour effectuer le calcul plus facilement.
- Calculer l'ordonnée du point K .
- Constaté que les deux courbes sont symétriques afin de tracer \mathcal{C}_{-1} .
- Utiliser la symétrie de la question précédente et la valeur de I calculée précédemment.

Partie C

- Établir une double inégalité stricte.
- Dériver f_k et conclure.
- Partir de l'inéquation $k \geq 10$, puis par inégalités successives, conclure.

Inde (avril 2013)

Partie A

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps.



Le graphique en annexe représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps, en jours.

On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type : $h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0,04t}}$ où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres. On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure 0,1 m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m. Déterminer les constantes a et b que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie B

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0 ; 250]$ par $f(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}$.

1. Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f).

En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 250]$.

2. Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1,5 m.

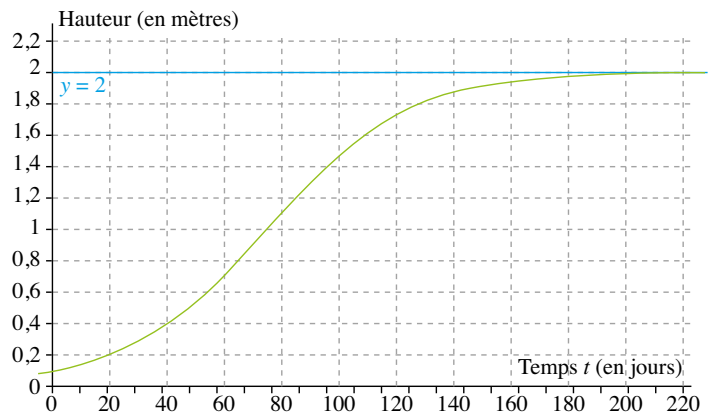
3. a) Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; 250]$ on a $f(t) = \frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19}$.

Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; 250]$ par $F(t) = 50 \ln(e^{0,04t} + 19)$ est une primitive de la fonction f .

b) Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[50 ; 100]$. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.

4. On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f . La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t . En utilisant le graphique donné en annexe, déterminer une valeur approchée de celle-ci. Estimer alors la hauteur du plant.

Annexe



La bonne méthode

Partie A

Interpréter la limite de la fonction f en $+\infty$ par rapport à la situation concrète, ce qui permettra, avec la valeur en 0 de déduire les coefficients a et b .

Partie B

1. Vérifier que la fonction proposée est la même que celle déterminée précédemment, puis utiliser les formules sur les dérivées.

2. Traduire l'énoncé sous la forme d'une inéquation, puis utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme pour résoudre cette inéquation et répondre au problème.

3. a) Multiplier le numérateur et le dénominateur de l'expression initiale de $f(t)$ par $e^{0,04t}$. Dériver F et conclure.

b) Utiliser la formule de la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a ; b]$.

Utiliser la primitive déterminée à la question **3. a)** pour calculer l'intégrale.

4. En utilisant le fait que la pente de la tangente en un point M de la courbe représentative de f est égale au nombre dérivé en ce point, lire sur le graphique le point en lequel la pente semble être maximale.

Pour ne pas fondre, le cœur des puces se fragmente

La loi de Moore, énoncée puis aménagée.

Le 19 avril 1965, dans la revue *Electronics*, Gordon Moore énonçait ce qui allait passer à la postérité sous le nom de « loi de Moore ». Le directeur de la R & D de Fairchild Technologies – cofondateur, en 1968, de la société Intel – assurait que le nombre de transistors intégrés sur une même surface de silicium allait, à l'avenir, doubler environ tous les ans. M. Moore se fondait sur les progrès réalisés au cours des toutes premières années de production des puces de silicium. Depuis qu'elle a été formulée, Intel a quelque peu aménagé le fameux principe pour le faire correspondre à la réalité industrielle. La société annonce ainsi sur son site Internet que ses processeurs ont toujours évolué selon le principe d'un doublement du nombre de composants par unité de surface tous les dix-huit à vingt-quatre mois et

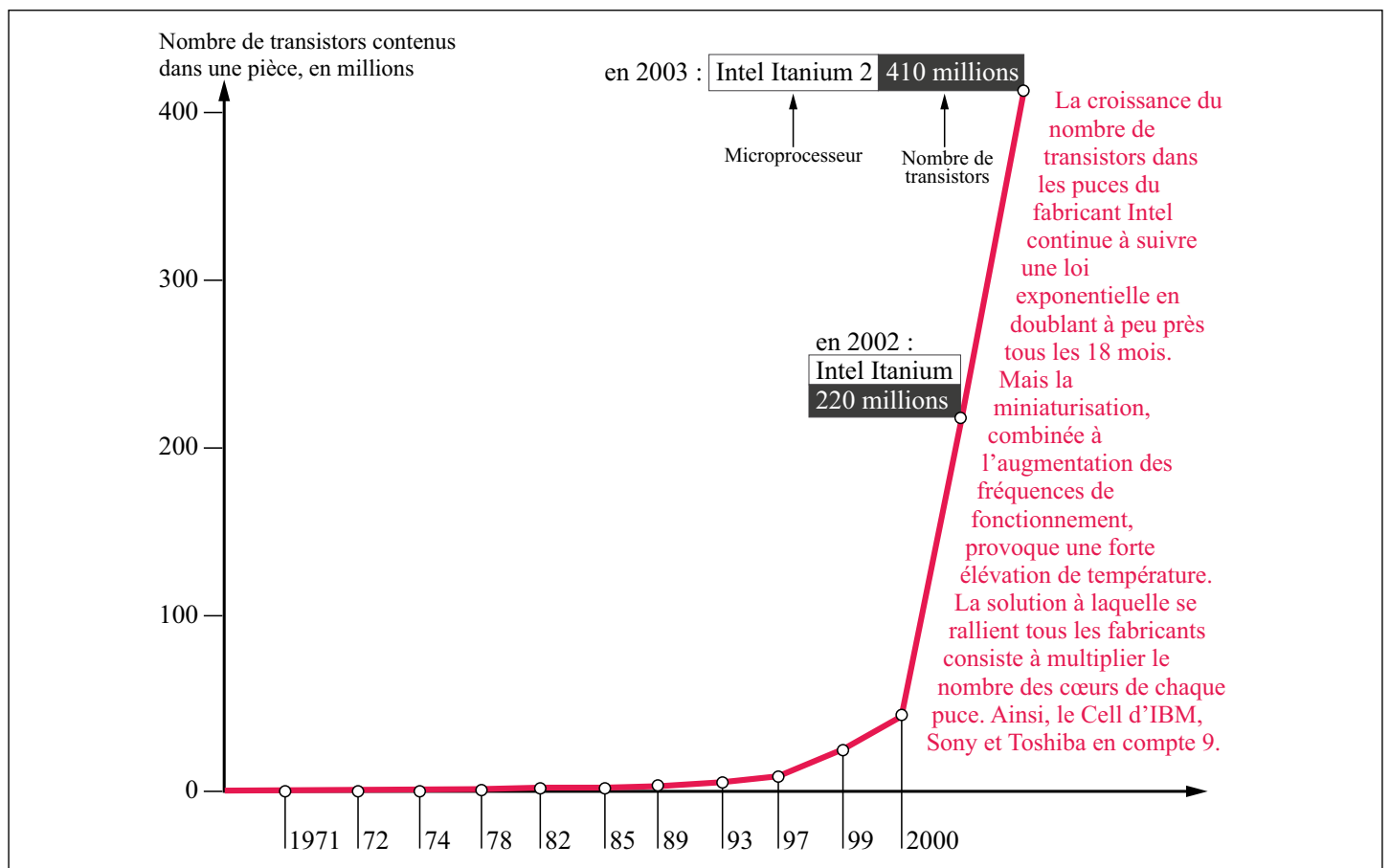
non tous les ans. Cependant, l'idée essentielle de M. Moore, celle d'une augmentation exponentielle du nombre de composants intégrés, demeure juste. ●

Le Monde daté du 02.03.2005

POURQUOI CET ARTICLE ?

Un exemple, parmi d'autres, de **quantités dont la croissance en fonction du temps est exponentielle** : le nombre de transistors dans les puces du fabricant Intel.

D'après les conjectures de Moore (« loi de Moore »), la croissance des performances des appareils électroniques est exponentielle.



La miniaturisation face au mur de la chaleur

Fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien est très utile pour simplifier certaines expressions mathématiques. Elle permet de convertir une multiplication en addition, une division en soustraction, une puissance en multiplication, une racine en division et de résoudre des équations et des inéquations contenant des exponentielles.

Elle est utilisée pour définir le pH d'une solution en chimie et l'intensité d'un bruit en physique. On utilise également une échelle logarithmique pour l'échelle de Richter qui mesure la magnitude d'un tremblement de terre.

Comment la fonction logarithme népérien est-elle définie ?

La fonction logarithme népérien, notée \ln , est la seule fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$, qui, à tout réel strictement positif x , associe l'unique solution réelle de l'équation d'inconnue y : $e^y = x$. On note cette solution $y = \ln x$.



John Napier (1550-1617), mathématicien écossais à l'origine des premières tables logarithmiques.

Le logarithme népérien a été baptisé ainsi en son hommage.

MOTS CLÉS

LOGARITHME NÉPÉRIEN

• Pour tout réel x strictement positif, il existe un unique réel y tel que $e^y = x$. Ce nombre s'appelle le logarithme népérien de x et on le note $y = \ln x$.

• La fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1. On a donc $\ln 1 = 0$ et pour tout réel strictement positif, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

PRIMITIVE

On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F dérivable sur I et dont la dérivée sur I est la fonction f .

FONCTION EXPONENTIELLE
La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Elle est l'unique fonction dérivable sur \mathbb{R} vérifiant les deux conditions suivantes :

- $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout nombre réel x ;
- $\exp(0) = 1$.

Conséquences : quel que soit le nombre réel x strictement positif, on a :

- pour tout réel y : $e^y = x$ si et seulement si $y = \ln x$;
- $e^{\ln x} = x$;
- pour tout nombre réel y : $\ln(e^y) = y$;
- $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$ et $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

Comment la fonction logarithme népérien varie-t-elle ?

On a donc $\ln 1 = 0$ et pour tout réel strictement positif, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Remarque : la fonction logarithme népérien est aussi définie comme l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Pour tout réel x strictement positif, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$, donc la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Tableau de variation

x	0	1	$+\infty$
\ln	$-\infty$	(0)	$+\infty$

NOMBRE e

- L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e .
- Le nombre e est un nombre irrationnel, voisin de 2,718.
- On dit aussi que le nombre e est la base du logarithme népérien puisque $\ln e = 1$.

PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DE LA FONCTION \ln

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et tout nombre entier n :

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ (relation fonctionnelle).

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a.$$

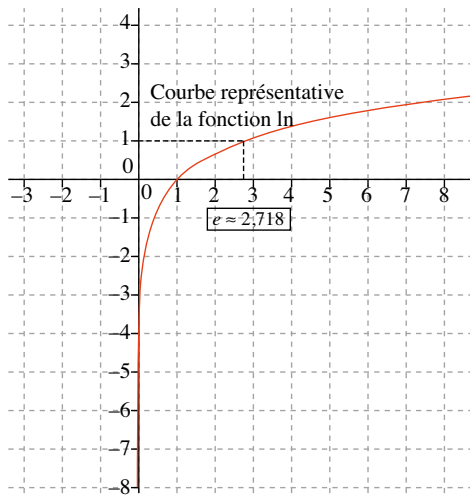
$$\ln(a^n) = n \ln a.$$

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a.$$

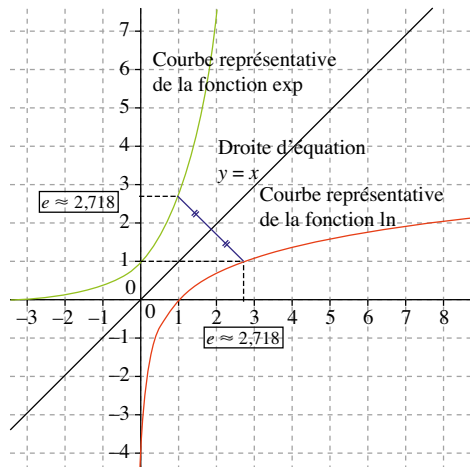
DÉRIVÉE DE $\ln u$

Pour une fonction u dérivable et strictement positive sur un intervalle I , on a : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ sur l'intervalle I .

Courbe représentative de la fonction logarithme népérien



Les courbes représentatives des fonctions \ln et \exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



Quelles sont les propriétés algébriques de la fonction \ln ?

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs, et n un nombre entier.

- Relation fonctionnelle : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- logarithme népérien d'un quotient : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$;

MOTS CLÉS

LIMITES USUELLES

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

CROISSANCES COMPARÉES

Il s'agit de comparer la croissance des fonctions logarithme népérien et $x \mapsto x$ dans le but de lever certaines indéterminations qui peuvent se présenter lors du calcul de limites.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

• On peut retenir la règle opératoire suivante : à l'infini, la fonction $x \mapsto x$ « l'emporte » sur le logarithme népérien.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

- **Les barreaux irréguliers de l'échelle de Richter** p. 29 (Jonathan Parienté, *Le Monde* daté du 04.03.2010)

- logarithme népérien d'un inverse : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$;
 - logarithme népérien d'une puissance entière : $\ln(a^n) = n \ln a$;
 - logarithme népérien d'une racine carrée : $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.
- Exemple** : $\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$; $\ln 3 + \ln 4 + \ln \frac{1}{12} = \ln(3 \times 4) - \ln 12 = \ln 12 - \ln 12 = 0$.

Équation et inéquation avec la fonction logarithme népérien

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

- $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$;
- $\ln a < \ln b$ si et seulement si $a < b$ (l'équivalence est vraie aussi si les inégalités ne sont pas strictes) ;
- $\ln a > \ln b$ si et seulement si $a > b$ (l'équivalence est vraie aussi si les inégalités ne sont pas strictes).

Exemple :

$$\ln(3x+1) > 2 \ln 2 \Leftrightarrow \ln(3x+1) > \ln 4 \Leftrightarrow 3x+1 > 4 \Leftrightarrow 3x > 3 \Leftrightarrow x > 1$$

Quelles sont les limites usuelles de la fonction logarithme népérien ?

Aux bornes de l'ensemble de définition :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Nombre dérivé en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ (ou en 1 de la fonction \ln) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Croissances comparées de fonctions

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Logarithme décimal

Le logarithme décimal est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

Remarque : $\ln 10 > 0$ donc la fonction \log est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et $\log 1 = 0$.

Les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal sont les mêmes que celles de la fonction logarithme népérien.

ZOOM SUR...

LE LOGARITHME DÉCIMAL

• La fonction logarithme décimal est la fonction notée \log et définie sur $]0; +\infty[$ par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

• Très utilisée pour les calculs numériques avant l'introduction des calculatrices, la fonction logarithme décimal a aussi de nombreuses applications, notamment en chimie et en physique.

LES PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DE LA FONCTION \log

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et tout nombre entier n :

- $\log(ab) = \log a + \log b$ (relation fonctionnelle) ;
- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$;
- $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log a$;
- $\log(a^n) = n \log a$;
- $\log\sqrt{a} = \frac{1}{2} \log a$.

En particulier pour $a = 10$, on a : $\log 10^n = n \log 10 = n$ car $\log 10 = 1$. La fonction inverse du logarithme décimal est la fonction qui, à un réel x , associe le nombre strictement positif $10^x = e^{x \ln 10}$ qui est l'exponentielle de base 10.

Sujet inédit

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 10]$ par $f(x) = -x \ln x + 2x$.

1. Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 10]$ par : $f'(x) = -\ln x + 1$.
2. **a)** Étudier le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[1; 10]$.
b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1; 10]$.
3. On appelle \mathcal{C} la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé du plan (unités : 1 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées). Représenter graphiquement \mathcal{C} dans ce repère.
4. On considère l'équation (E) : $f(x) = 0$, sur l'intervalle $[1; 10]$.
a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E).
b) Pour chacune des solutions trouvées, donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

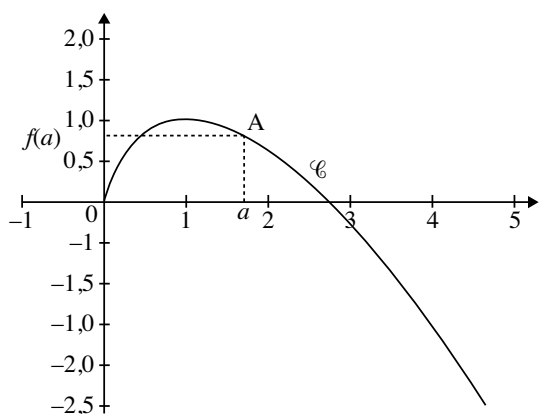
La bonne méthode

1. Un terme de l'expression de f est un produit.
2. **a)** Résoudre $-\ln x + 1 > 0$; $-\ln x + 1 < 0$; $-\ln x + 1 = 0$.
b) Il faut déduire le tableau de variation de la question précédente.
3. Pour représenter graphiquement la fonction f , on peut s'aider d'un tableau de valeurs.
4. **a)** Pour déterminer le nombre de solutions, il faut observer la courbe.
b) Pour donner une valeur approchée de la ou des solutions, il faut obtenir un tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice, en changeant le pas de l'intervalle.

Métropole (sept. 2010)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x(1 - \ln x)$.

La courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f est donnée ci-dessous.

Partie A. Étude de la fonction f

1. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x .
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition. On admettra que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.
3. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
4. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_a) au point A de la courbe \mathcal{C} d'abscisse a .
a) Déterminer, en fonction du nombre réel a , les coordonnées du point A', point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées.

b) Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_a) . Sur la figure, construire la tangente (T_a) au point A placé sur la figure.

Partie B. Aire sous une courbe

Soit a un nombre réel strictement positif. On note $\mathcal{A}(a)$ la mesure, en unités d'aire, de l'aire de la région du plan limitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = e$. Justifier que $\mathcal{A}(a) = \int_a^e f(x) dx$, en distinguant le cas $a < e$ et le cas $a > e$.

La bonne méthode

Partie A

1. Étudier le signe de chaque facteur du produit de l'expression de $f(x)$.
2. Utiliser les opérations sur les limites et les croissances comparées de fonctions.
3. La fonction f est de la forme $u \times v$ donc : $f' = (u \times v)'$
4. **a)** Déterminer l'équation de la tangente (T_a) au point A d'abscisse a . L'abscisse du point A' est 0.
b) Pour un point A d'abscisse a donné, il faut trouver une méthode pour placer le point A'. On a $(T_a) = (AA')$.

Partie B

Il faut distinguer les deux cas et montrer que l'égalité est vraie dans les deux cas.

Les barreaux irréguliers de l'échelle de Richter

Un géophysicien nous le disait ici-même, le séisme survenu en Haïti en janvier et celui qui a frappé le Chili « *sont sans commune mesure* ».

Sans commune mesure dans le bilan, bien sûr. Mais aussi dans leur ampleur. Leurs magnitudes paraissent relativement proches – respectivement 7 et 8,8 sur l'échelle de Richter –, mais cette apparente proximité masque une grosse différence entre les événements.

Des séismes, il s'en produit tous les jours dans tous les coins du globe. Des gros, des petits, des indétectables et des majeurs. Un séisme comparable à celui du Chili n'arrive en moyenne qu'une fois par an.

Pour classer des phénomènes qui peuvent libérer des quantités d'énergie ridicules ou colossales, il est malaisé d'utiliser une échelle linéaire qui partirait dans les valeurs très grandes et/ou très faibles. On utilise donc une échelle appropriée dite logarithmique. C'est la fameuse échelle de Richter, une échelle dont les barreaux successifs ne sont pas espacés régulièrement...

Comment est calculée la magnitude d'un séisme ? L'énergie libérée par le mouvement des plaques tectoniques est mesurée par des sismographes qui enregistrent les ondes sismiques¹. C'est à partir de cette mesure que l'on détermine la magnitude d'un séisme sur l'échelle de Richter. Cette dernière est égale au logarithme – base dix – de l'amplitude maximale d'une onde sismique (mesuré à 100 kilomètres du foyer de la catastrophe) moins une constante de référence.

Soit :

$$M = \log(A_{\max}) + c$$

Un rapide calcul permet ainsi de calculer l'ordre de grandeur qui sépare deux séismes. (Pour ceux qui se rappellent de leurs cours de terminale, rappelons que si $\log(x) = y$ alors $x = 10^y$, pour $x > 0$).

Le rapport des amplitudes maximales des séismes de magnitude 7

et 8,8 vaut $10^{(8,8-7)}$. Soit environ 63. L'amplitude des ondes sismiques est donc 63 fois plus importante au Chili qu'en Haïti. Bien plus que ne le laissent présager les données brutes de magnitude.

Bien que reposant sur des faits scientifiques, l'échelle de Richter ne rend pas compte d'un grand nombre de facteurs humains ou environnementaux qui font qu'un séisme est plus ou moins dévastateur. C'est bien ce qu'on peut lui reprocher en ce début d'année. D'autres échelles existent pour estimer la force d'un séisme. Pour n'en citer qu'une, l'échelle de Mercalli est basée sur l'étendue des dégâts, de la petite fissure au chaos total. Elle ne repose sur aucune mesure scientifique et est parfaitement subjective. C'est pour ça que l'on préfère utiliser l'échelle de Richter, même imparfaite.

Jonathan Parienté, blog *Le Monde*

« En quête de science » daté du 04.03.2010

POURQUOI CET ARTICLE ?

On dit que \log_b est la fonction logarithme de base b ($b > 0$) si et seulement si : $\log_b(x) = y$ est équivalent à $x = b^y$.

Le cas particulier étudié en terminale S est celui de $b = e$, c'est-à-dire le cas où la base du logarithme est la constante e . On l'appelle alors logarithme népérien. En effet, la fonction dérivée est connue et possède une expression simple.

Le cas particulier où $b = 10$ est utilisé régulièrement dans des applications concrètes (pH, son...).

On l'appelle alors logarithme décimal. La fonction dérivée est connue mais l'expression est un peu plus longue. Pourtant l'utilisation d'échelle logarithmique est fort utile pour représenter sur un même axe des valeurs fortement éloignées.

Ainsi les magnitudes sur l'échelle de Richter vont de 0 à 10. Un séisme dont la magnitude est supérieure à 9 est très rare (un à cinq par siècle).

1. Il s'agit des ondes de volume de type P et S, nous ne rentrerons pas dans les détails.

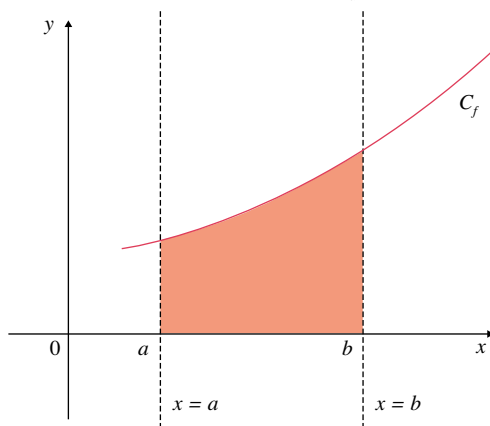
Intégration

Pour calculer l'aire de la surface comprise entre une courbe et l'axe des abscisses, on peut approcher cette surface par une série de bandes rectangulaires de largeur infinitésimale. L'intégrale de la fonction représentée par cette courbe est, au signe près, égale à la somme de leurs aires.

L'intégration est donc un outil précieux pour calculer l'aire de surfaces délimitées par des courbes dont on connaît les équations (mais aussi de volumes dont on connaît les éléments du solide). Cette branche des mathématiques a de nombreuses utilisations en physique et en économie.

Qu'est-ce qu'une intégrale ?

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$. Soit C_f sa courbe représentative. L'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire du domaine situé entre C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ en unités d'aire. On la note $\int_a^b f(x) dx$.



Dans un repère orthogonal $(O, \vec{O}_1, \vec{O}_2)$, on considère le point K de coordonnées $(1 ; 1)$.

Une unité d'aire représente l'aire du rectangle OIKJ.

MOTS CLÉS

FONCTION CONTINUE

• Une fonction f , définie sur un intervalle ouvert contenant un réel a , est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

• Une fonction f , définie sur un intervalle I ouvert, est continue sur I lorsque f est continue en tout réel a , appartenant à I .

• Une fonction f , définie sur un intervalle $[a ; b]$, est « continue sur $[a ; b]$ » lorsque :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur }]a ; b[\\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b) \end{array} \right.$$

INTÉGRALE

Pour f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels dans I , $\int_a^b f(x) dx$ est le réel $F(b) - F(a)$, où F est une primitive quelconque de f sur I .

Qu'est-ce qu'une primitive ?

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

On dit qu'une fonction F est une primitive de la fonction f sur I lorsque F est dérivable sur I et que sa dérivée est égale à f sur cet intervalle.

Lorsqu'une fonction admet une primitive, on peut en trouver une infinité. En effet, si on ajoute n'importe quel nombre réel à la primitive trouvée, les dérivées des primitives ainsi obtenues donneront la même fonction, car la « dérivée d'un nombre réel est nulle ».

Exemple : $F(x) = x^2$; $G(x) = x^2 + 15$; $K(x) = x^2 - 1$... $K(x) = x^2 + k$ avec k appartenant à l'ensemble des réels.

Toutes ces fonctions sont dérivables sur l'ensemble des réels.

Si on dérive toutes ces fonctions, on obtient une seule fonction définie par $f(x) = 2x$.

Comment calculer une primitive, une intégrale ?

Une primitive, lorsqu'elle existe, est une fonction.

Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .

Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et c est un nombre réel, alors cF est une primitive de cf sur I .

Exemple : la fonction définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive sur l'ensemble des nombres réels de la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et la

AIRE SOUS UNE COURBE

Lorsqu'une fonction f est continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$, l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ correspond à « l'aire sous la courbe » :

elle est égale à l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et la courbe représentative de f , exprimée en unités d'aire.

UNITÉ D'AIRE (U.A.)

Dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, une unité d'aire est l'aire

du rectangle formé avec les vecteurs \vec{i} et \vec{j} .

PRIMITIVE

On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F dérivable sur I et dont la dérivée sur I est la fonction f .

FONCTION DÉRIVÉE

• Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I .
• Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . La fonction qui, à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x , est appelée fonction dérivée de f . Elle est notée f' .

fonction définie par $G(x) = 3x$ est une primitive de la fonction définie par $g(x) = 3$ sur \mathbb{R} .

Une primitive de la fonction $f + g$ sur \mathbb{R} est donc la fonction $F + G$ définie par $F(x) + G(x) = \frac{x^3}{3} + 3x$ sur \mathbb{R} .

Les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent, par « lecture inverse », le tableau des primitives suivant où c est une constante.

$f(x)$	$F(x)$	D_f
k avec $k \in \mathbb{R}$	$kx + c$	\mathbb{R}
x^n avec $n \neq 1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x^n}$ avec $n \neq 1$	$-\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + c$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$]0; +\infty[$
e^x	$e^x + c$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$

Une intégrale, lorsqu'elle existe, est une valeur réelle.

Si une fonction f est continue sur un intervalle $[a; b]$, alors elle admet une primitive F telle que $F'(x) = f(x)$.

On a alors : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple : $\int_1^2 2x dx = [x^2]_1^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$.

Comment calcule-t-on la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle ?

La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a; b]$ est égale au réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $(a, b, c) \in I^3$.

On a : $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$.

MOTS CLÉS

LINÉARITÉ DE L'INTÉGRALE

• Soient α et β deux nombres réels et f et g deux fonctions continues

$$\text{sur } [a; b] : \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

• Cette propriété est utilisée pour simplifier les écritures des intégrales.

RELATION DE CHASLES

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois

réels appartenant à I , alors :

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

VALEUR MOYENNE

Soient a et b deux réels distincts et f une fonction continue sur $[a; b]$.

La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ est égale au réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

INÉGALITÉ DE LA MOYENNE

• Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, telle que pour

Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , $(a, b) \in I^2$ et $k \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a : } \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \text{ et } \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

Positivité de l'intégrale

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $(a, b) \in I^2$.

Si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a; b]$ on a : $f(x) > 0$, alors $\int_a^b f(x) dx > 0$.

En corollaire : si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a; b]$, on a $f(x) > g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$.

Intégration par parties*

Le choix de la technique d'intégration par parties se rencontre souvent (mais pas nécessairement) lorsque la fonction à intégrer se présente sous la forme d'un produit.

Soient u et v deux fonctions dérivables, de dérivées u' et v' sur l'intervalle $[a; b]$.

On a $\int_a^b (uv)'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b$, car une primitive de la fonction $(uv)'$ est la fonction uv .

$$\text{Mais aussi } \int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) + u(x)v'(x) dx$$

$= \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$ en calculant la dérivée de la fonction $(uv)'$ et en utilisant la linéarité de l'intégrale.

D'où $[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$, puis : $\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$. (Théorème de l'intégration par parties)

Exemple : la primitive de la fonction logarithme qui s'annule en 1 est la fonction F (de variable t), définie sur $]0; +\infty[$, par $F(t) = \int_1^t \ln(x) dx$.

On procède alors au calcul de cette intégrale avec la formule de l'intégration par parties, en posant $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln x$, soit $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$: $F(t) = \int_1^t x \ln(x) dx = [x \ln x]_1^t - \int_1^t x \times \frac{1}{x} dx = [x \ln x]_1^t - \int_1^t 1 dx = t \ln t - \ln 1 - [x]_1^t = t \ln t - t + 1$.

Ainsi, les fonctions de la forme $t \mapsto t \ln t - t + k$, $k \in \mathbb{R}$ sont les primitives de la fonction \ln sur $]0; +\infty[$.

* Non exigible au baccalauréat mais important à connaître.

tout x de $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$.

D'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

• L'inégalité de la moyenne fournit un encadrement de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ dans le cas où la fonction considérée est bornée sur l'intervalle $[a; b]$.

INTÉGRATION PAR PARTIES

• Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$ telles que les

fonctions u' et v' soient continues

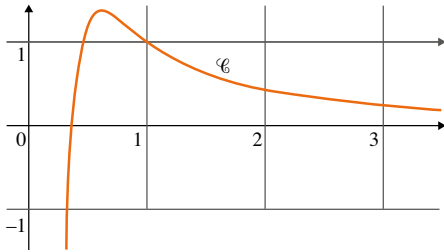
sur $[a; b]$, alors : $\int_a^b u'(x)v(x) dx$

$$= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

• Si l'on choisit judicieusement les fonctions u et v , le théorème d'intégration par parties permet de remplacer un calcul d'intégrale par le calcul d'une autre intégrale plus simple. Il permet aussi d'établir des relations de récurrence entre les termes d'une suite d'intégrales.

Amérique du Nord (mai 2013)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$ et soit \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe \mathcal{C} est donnée ci-dessous :



1. **a)** Étudier la limite de f en 0.
 - b)** Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - c)** En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe \mathcal{C} .
 2. **a)** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}$.
 - b)** Résoudre sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2 \ln x > 0$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - c)** Dresser le tableau de variation de la fonction f .
 3. **a)** Démontrer que la courbe \mathcal{C} a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
 - b)** En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$.
 - a)** Démontrer que $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$.
- On admet que la fonction F définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = \frac{-2 - \ln x}{x}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle.

- b)** Calculer I_n en fonction de n .
- c)** Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

La bonne méthode

1. **a)** Utiliser la limite de la fonction logarithme népérien en 0^+ .
- b)** Utiliser les propriétés des limites, en particulier les sommes et produits de limites.
- c)** Interpréter graphiquement chacune des deux limites.
2. **a)** Utiliser la formule de la dérivée d'un quotient.
- b)** Montrer que le signe de f' est celui de $-1 - 2 \ln x$, puis résoudre l'inéquation demandée. Conclure.
- c)** En dressant le tableau de variation, ne pas oublier de placer les bornes et les limites.
3. **a)** Un point appartient à l'intersection de deux ensembles si et seulement si ses coordonnées vérifient simultanément les équations de ces deux ensembles.
- b)** Utiliser le tableau de variation précédent et le point d'intersection trouvé.
4. **a)** Interpréter l'aire à l'aide d'une intégrale et utiliser la primitive donnée dans l'énoncé.
- b)** Utiliser la primitive donnée dans l'énoncé.
- c)** Utiliser les limites usuelles des fonctions $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ quand x tend vers $+\infty$.

Liban (juin 2010)

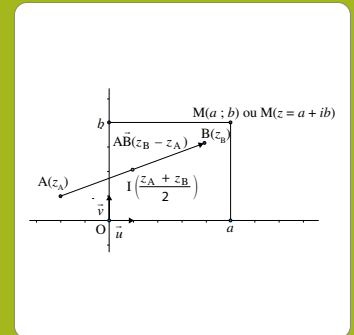
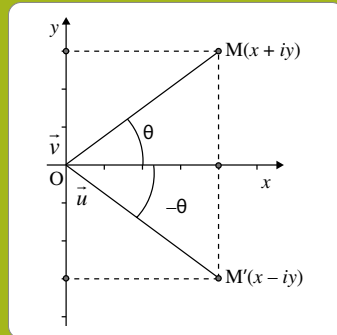
On considère la suite u_n définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx$.

1. **a)** Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.
- b)** Calculer u_1 . En déduire u_0 .
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.
3. **a)** Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$.
- b)** En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

La bonne méthode

1. **a)** Utiliser la définition de la suite puis la linéarité de l'intégrale.
- b)** Remarquer que, pour une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ où u est une fonction à valeur strictement positive, une primitive est la fonction $\ln(u)$.
2. Déterminer le signe de la fonction intégrée dans la définition de u_n .
3. **a)** Méthode analogue à celle utilisée au 1. **a)**.
- b)** Utiliser l'inégalité trouvée précédemment pour obtenir la majoration demandée.
4. Utiliser la majoration précédente et le théorème des gendarmes, conclure.

GÉOMÉTRIE



Nombres complexes

Au ^{XVI}^e siècle, les mathématiciens italiens Cardan et Bombelli introduisirent des nombres « imaginaires », ayant un carré négatif, pour résoudre des équations du troisième degré. Deux siècles plus tard, Euler et d'Alembert parachevèrent la création des nombres complexes et fixèrent les notations actuelles, en particulier celle du nombre i . Aujourd'hui, les nombres complexes sont utilisés non seulement dans toutes les branches des mathématiques, en particulier en trigonométrie et en géométrie, mais aussi dans d'autres sciences, comme la physique.

Dans cette leçon, le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

i est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.
L'ensemble des nombres complexes est noté \mathbb{C} .

Quelles sont les différentes formes sous lesquelles peut se présenter un nombre complexe non nul ?

Un nombre complexe z , non nul, admet trois types d'écriture :

- une écriture **algébrique** :

$z = x + iy$, où x et y sont deux nombres réels ; $x = \text{Re}(z)$ est la partie réelle de z et $y = \text{Im}(z)$, sa partie imaginaire ;

- une écriture **trigonométrique** :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, où r désigne le **module** de z et θ un **argument** de z ;

- une écriture **exponentielle** : $z = re^{i\theta}$.

Selon le cas, on privilégie une écriture parmi les trois.



Le mathématicien Leonhard Euler (1707-1783).

MOTS CLÉS

NOMBRE COMPLEXE

• Un nombre complexe est un nombre de la forme $z = x + iy$, pour lequel x et y sont deux nombres réels, et i est un nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.

• L'ensemble des nombres complexes est noté \mathbb{C} .

PARTIE RÉELLE, PARTIE IMAGINAIRE

Tout nombre complexe z admet une unique écriture algébrique $z = x + iy$:

• x s'appelle la partie réelle de z ; on la note $\text{Re}(z)$.

• y s'appelle la partie imaginaire de z ; on la note $\text{Im}(z)$.

IMAGINAIRE PUR

Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle. Par exemple, le nombre complexe $5i$ est imaginaire pur.

NOMBRE COMPLEXE CONJUGUÉ

• Le conjugué du nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$.

• Un nombre complexe et son

Comment calculer le module et un argument d'un nombre complexe z non nul ?

Si le nombre complexe z est donné sous sa forme algébrique $z = x + iy$, on commence par calculer le module r à l'aide de la formule :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Puis on détermine un argument θ de z en calculant : $\cos\theta = \frac{x}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{y}{|z|}$.

Soient deux nombres complexes z et z' . Dans le cas où $Z = zz'$, le module de Z est égal au produit des modules de z et de z' . Et l'argument de Z est égal à la somme des arguments de z et de z' , modulo 2π .

Cela signifie que :

$$\arg Z = \arg z + \arg z' [2\pi]$$

$$|Z| = |zz'| = |z| \times |z'|$$

Dans le cas où $Z = \frac{z}{z'}$ ($z' \neq 0$), le module de Z s'obtient en divisant le module de z par le module de z' . Et l'argument de Z est égal à la différence des arguments de z et de z' , modulo 2π .

Cela signifie que :

$$\arg Z = \arg z - \arg z' [2\pi]$$

$$|Z| = \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

conjugué ont la même partie réelle et des parties imaginaires opposées.

MODULE

Le module du nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, est le réel positif noté $|z|$, défini par $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ARGUMENT

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, pour le nombre complexe $z \neq 0$ d'image M , on appelle argument de z ($\arg z$) toute me-

sure en radians de l'angle orienté $(\vec{u} ; \text{OM})$.

MODULO 2π

L'écriture « $[2\pi]$ » (modulo 2π) est synonyme de « à $2k\pi$ près pour une valeur entière de k ».

IDENTITÉ REMARQUABLE

Les identités remarquables sont également valables dans \mathbb{C} .

Pour deux nombres complexes a et b , on a :

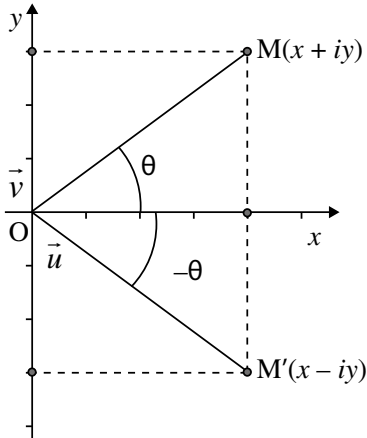
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 ;$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Qu'est-ce qu'un nombre complexe conjugué ?

Le nombre complexe conjugué de $z = x + iy$ est le complexe $\bar{z} = x - iy$. Dans le plan complexe, si le point M a pour affixe z et M' pour affixe \bar{z} , alors M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



Le produit d'un nombre complexe par son conjugué est un nombre réel égal au carré de leur module commun :

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

Le **conjugué de la somme** est égal à la **somme des conjugués** :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' = (x + x') - i(y + y').$$

Le **conjugué du produit** est égal au **produit des conjugués** :

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}' = (xx' - yy') - i(xy' + x'y').$$

Comment résoudre une équation dans l'ensemble des nombres complexes ?

On rencontre essentiellement trois types d'équations dans l'ensemble \mathbb{C} . Dans le cas d'une **équation du premier degré** de la forme $az + b = c$, avec $a \neq 0$, les méthodes de résolution sont les mêmes que dans \mathbb{R} .

Dans le cas d'une **équation du second degré** à coefficients réels de la forme $az^2 + bz + c = 0$, où a est un réel non nul, on calcule le **discriminant** de l'équation : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une **racine double réelle** : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux **racines réelles** : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux **racines complexes conjuguées** :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Dans le cas d'une équation faisant intervenir \bar{z} , le conjugué de z , ou son module $|z|$, on pose $z = x + iy$, puis on fait appel au théorème suivant : deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même **partie réelle** et même **partie imaginaire**.

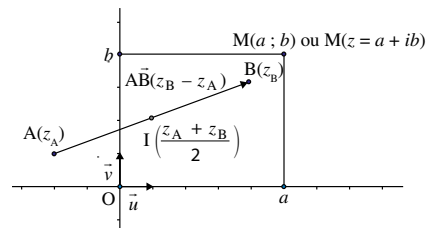
Quel lien y a-t-il entre la géométrie plane et les nombres complexes ?

Les nombres complexes constituent un outil privilégié pour résoudre de manière simple de nombreux problèmes de géométrie.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct, l'**image du nombre complexe $z = a + ib$** est le **point M de coordonnées (a, b)** . On dit alors que z est l'**affiche du point M**.

L'affiche du vecteur \overline{AB} est le nombre complexe $z_B - z_A$.

L'affiche du milieu I du segment $[AB]$ est la demi-somme des affixes des points A et B.



Il est impératif de connaître aussi :

- le lien entre les **distances** et les **modules** : $AB = |z_B - z_A|$;
- le lien entre les **angles** et les **arguments** : $(\vec{u}; \overline{AB}) = \arg(z_B - z_A) [2\pi]$.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

- **Kantorovitch, le planificateur révolutionnaire** p. 37 (Cédric Villani, *Le Monde Science et techno* daté du 22.09.2012)

MOTS CLÉS

FORME CANONIQUE

Soit $P(z) = az^2 + bz + c$ ($a \neq 0$), un trinôme du second degré dans \mathbb{C} .

$$P(z) = a \left[\left(z - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

est la forme canonique du trinôme.

DISCRIMINANT

Pour l'équation du second degré dans \mathbb{C} $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$, le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de l'équation.

ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$, les solutions de l'équation du second degré à coefficients réels $az^2 + bz + c = 0$ où $a \neq 0$ sont :

• Si $\Delta > 0$, **deux racines réelles**
 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• Si $\Delta = 0$, **une racine réelle double**
 $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

• Si $\Delta < 0$, **deux racines complexes conjuguées** :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

IMAGE

L'image du nombre complexe $z = x + iy$ est le point de coordonnées $M(x; y)$.

AFFIXE

• L'affiche du point $M(x; y)$ du plan complexe est le nombre complexe $z = x + iy$.

• L'affiche du vecteur \overline{AB} est le nombre complexe $z_B - z_A$.

ZOOM SUR...

L'EXPRESSION CONJUGUÉE

• L'**expression conjuguée** du nombre complexe $a + ib$ (a et b deux réels) est $a - ib$.

• On a la relation $z\bar{z} = |z|^2$ pour tout nombre complexe z .

• On utilise l'**expression conjuguée** d'une expression pour rendre réel le dénominateur d'un nombre complexe écrit sous la forme d'une fraction :

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2 - i^2}$$

$$= \frac{1-i}{1+1} = \frac{1-i}{2}$$

Pondichéry (avril 2013)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. On considère le point A d'affixe $Z_A = 1$ et le point B d'affixe $Z_B = i$. À tout point M d'affixe $Z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $Z_{M'} = -iZ_M$. On désigne par I le milieu du segment [AM]. Le but de l'exercice est de montrer que, pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que $BM' = 2 \text{OI}$ (propriété 2).

- 1.** Dans cette question, et uniquement dans cette question, on prend $Z_M = 2e^{-\frac{\pi}{3}}$.
- a)** Déterminer la forme algébrique de $Z_{M'}$.
- b)** Montrer que $Z_{M'} = -\sqrt{3} - i$. Déterminer le module et un argument de $Z_{M'}$.
- c)** Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) en prenant 2 cm pour unité graphique.
Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

- 2.** On revient au cas général en prenant $Z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.
- a)** Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y .
- b)** Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y .
- c)** Écrire les coordonnées des points I, B et M'.
- d)** Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.
- e)** Montrer que $BM' = 2 \text{OI}$.

La bonne méthode

- 1. a)** On a $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
- b)** Dédurre le premier résultat de la question **1. a)**.
- c)** Calculer Z_I à l'aide de Z_A et de Z_M .
- 2. a)** Calculer Z_I à l'aide de Z_A et de $Z_M = x + iy$.
- b)** Utiliser la définition de $Z_{M'}$.
- c)** Le nombre complexe $z = x + iy$ a pour coordonnées $(x; y)$.
- d)** Calculer $\overline{\text{OI}} \cdot \overline{\text{BM}'}$ pour conclure.
- e)** Comparer les quantités BM'^2 et $(2 \text{OI})^2$.

Asie (juin 2013)

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2 + 2i; \quad b = -\sqrt{3} + i; \quad c = 1 + i\sqrt{3}; \quad d = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{et} \\ e = -1 + (2 + \sqrt{3})i.$$

- 1. Affirmation 1 :** les points A, B et C sont alignés.
- 2. Affirmation 2 :** les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.

La bonne méthode

- 1.** Utiliser la colinéarité des vecteurs.
- 2.** Calculer et comparer les valeurs BE^2 , CE^2 et DE^2 .

Polynésie (juin 2013)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte.

1. Soit $z_1 = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $i\frac{z_1}{z_2}$ est :

a) $\sqrt{3}e^{i\frac{19\pi}{12}}$ **b)** $\sqrt{12}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ **c)** $\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ **d)** $\sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}$

2. L'équation $-z = \bar{z}$, d'inconnue complexe z , admet :

- a)** une solution **b)** deux solutions
- c)** une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.
- d)** une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

La bonne méthode

- 1.** Pour deux nombres réels θ et θ' , $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ et $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$. Penser à écrire i sous la forme exponentielle.
- 2.** Poser $z = x + iy$ avec x et y deux nombres réels et se rappeler que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales, ainsi que leurs parties imaginaires.

Kantorovitch, le planificateur révolutionnaire

Il y a cent ans s'éteignait Henri Poincaré, symbole de l'unité des sciences et du génie créatif ; la même année naissait Alan Turing, figure tutélaire de l'informatique. Ce double anniversaire lié à des scientifiques d'exception ne doit pas en faire oublier un troisième : celui de la naissance, à Saint-Petersbourg, de Leonid Kantorovitch (1912-1986), qui révolutionna l'économie mathématique.

Couvrant un spectre allant du plus abstrait au plus concret, Kantorovitch se passionna pour des sujets aussi divers que les espaces topologiques partiellement ordonnés, la bombe atomique, le calcul scientifique, l'optimisation linéaire, la tarification des taxis ou l'évacuation de Leningrad assiégée par les armées allemandes.

En 1938, le destin frappe à sa porte : une entreprise de contreplaqué vient lui demander de l'aide pour améliorer sa production ; il s'agit de trouver le meilleur algorithme de distribution du bois brut vers les machines qui le transformeront. En reformulant de manière simple et abstraite ce problème de recherche opérationnelle, Kantorovitch exploite cette opportunité au-delà de l'imaginable : pour obtenir la solution, il développe, en même temps que Dantzig et Koopmans, la théorie de la programmation linéaire, qui s'applique à tous les problèmes où la quantité que l'on souhaite maximiser est une combinaison linéaire des inconnues.

En 1942, il découvre que sa théorie comprend le problème du transport optimal, formulé par Gaspard Monge en 1781 : déterminer le meilleur appariement entre des sites de production et de consommation afin de minimiser le coût du transport des marchandises. L'étude de ce problème le mène à jeter les bases d'une théorie mathématique des prix – un acte de courage politique autant que scientifique, quand on sait toute l'idéologie dont la notion de prix était chargée en Russie soviétique. Les travaux de Kantorovitch furent frappés par la censure d'Etat ; il en fallait plus pour le décourager, conscient qu'il était de l'importance vitale de ses travaux pour la patrie.

Ses méthodes mathématiques appliquées à l'économie, décrites dans son chef-d'œuvre « *La meilleure allocation des ressources* » (1959), sont aujourd'hui plus présentes que jamais, à une heure où la programmation linéaire, en centaines ou en milliers de variables, est utilisée routinièrement par d'innombrables entreprises dans le monde. En 1975, Kantorovitch devenait, avec Koopmans, le premier mathématicien à recevoir le prix Nobel d'économie.

POURQUOI CET ARTICLE ?

Les nombres complexes, notion algébrique, permettent de résoudre des problèmes de géométrie et d'analyse. Avec Kantorovitch, le décloisonnement entre les différents domaines des mathématiques s'accélère. Espaces topologiques partiellement ordonnés, bombe atomique, calcul scientifique, optimisation linéaire, tarification des taxis, évacuation de Leningrad assiégée par les armées allemandes, applications à l'économie et à la géométrie, en passant par la théorie des probabilités non commutatives et la physique statistique, les travaux du mathématicien s'appliquent à de nombreux sujets. Cet éclectisme de bon aloi a été couronné par un prix Nobel d'économie en 1975.

Ce n'était pas la fin de l'histoire, loin de là ; dans les trois années qui suivirent le décès de Kantorovitch, en France, en Angleterre, aux Etats-Unis, on découvrait de manière inattendue et simultanée des applications du transport optimal en mécanique des fluides, en météorologie et en théorie des systèmes dynamiques.

C'était le début d'une nouvelle révolution qui ferait de la théorie de Kantorovitch l'un des domaines les plus multi-formes et dynamiques des sciences mathématiques actuelles, allant de l'économie à la géométrie en passant par la théorie des probabilités non commutatives et la physique statistique. ●

Cédric Villani,

Le Monde Science et techno daté du 22.09.2012

Géométrie dans l'espace

L'étude des objets de l'espace déjà abordée dans les classes antérieures se poursuit en terminale : on apprend à caractériser droites et plans par des relations vectorielles, à déterminer une équation cartésienne d'un plan, à définir une représentation paramétrique d'une droite. On étudie la position relative de droites et de plans de l'espace et on étend le produit scalaire à l'espace.

L'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Quelles sont les deux manières de caractériser une droite ?

Soit \mathcal{D} une droite de l'espace contenant un point A de coordonnées $(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur \vec{u} de coordonnées $(a ; b ; c)$. On peut caractériser cette droite de deux manières.

Caractérisation vectorielle :

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overline{AM} = k\vec{u} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Caractérisation par un système d'équations paramétriques (représentation paramétrique) :

$$\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Quelles sont les deux manières de caractériser un plan ?

Soit \mathcal{P} un plan de repère $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ et \vec{n} , de coordonnées $(a ; b ; c)$, un vecteur normal au plan \mathcal{P} . On peut caractériser ce plan de deux manières.

Caractérisation vectorielle :

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overline{AM} = k\vec{u} + k'\vec{v} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \text{ et } k' \in \mathbb{R}.$$

Caractérisation par une équation cartésienne :

le plan \mathcal{P} admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Comment caractériser un segment ?

Caractérisation vectorielle :

$$M \in [AB] \Leftrightarrow \overline{AM} = k\overline{AB} \text{ avec } k \in [0 ; 1].$$

MOTS CLÉS

VECTEUR DIRECTEUR

$\vec{u} = \overline{AB}$ est un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} si et seulement si \vec{u} est non nul et si la droite \mathcal{D} est parallèle à la droite (AB) .

REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE DROITE

L'espace est rapporté au repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. Soit \mathcal{D} une droite de l'espace, $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de \mathcal{D} et $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur directeur de \mathcal{D} . La droite \mathcal{D} est caractérisée par le système :

$$\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

VECTEUR NORMAL

On appelle vecteur normal à un plan \mathcal{P} , tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à \mathcal{P} .

Équation cartésienne d'un plan
Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, un plan admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Comment étudier la position relative de deux droites de l'espace ?

On souhaite étudier la position relative de deux droites de l'espace : la droite \mathcal{D} passant par A, de vecteur directeur \vec{u} , et la droite \mathcal{D}' passant par A', de vecteur directeur \vec{u}' . Pour cela, il suffit d'étudier leurs **vecteurs directeurs**.

Si \vec{u} et \vec{u}' sont **colinéaires**, alors les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles.

Deux cas sont alors possibles :

- si A appartient à \mathcal{D}' , alors les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont confondues ;
- si A n'appartient pas à \mathcal{D}' , alors les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont strictement parallèles, leur intersection est vide.

Si \vec{u} et \vec{u}' **ne sont pas colinéaires**, alors les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont soit sécantes (leur intersection est un point), soit non coplanaires (leur intersection est vide).

Comment étudier la position relative d'une droite et d'un plan ?

On souhaite étudier la position relative d'une droite \mathcal{D} passant par A, de vecteur directeur \vec{u} et d'un plan \mathcal{P} de vecteur normal \vec{n} . On s'intéresse alors aux vecteurs \vec{u} et \vec{n} .

Si \vec{u} et \vec{n} sont **orthogonaux**, alors la droite \mathcal{D} est parallèle au plan \mathcal{P} .

Si, en outre, le point A appartient au plan \mathcal{P} , alors la droite \mathcal{D} est incluse dans le plan \mathcal{P} .

Sinon, la droite \mathcal{D} est strictement parallèle au plan \mathcal{P} et leur intersection est vide.

Si \vec{u} et \vec{n} **ne sont pas orthogonaux**, alors \mathcal{D} et \mathcal{P} sont sécants ; leur intersection est un point. Si, par ailleurs, \vec{u} et \vec{n} sont **colinéaires**, alors la droite \mathcal{D} est orthogonale au plan \mathcal{P} .

VECTEURS COLINÉAIRES

\vec{v} est colinéaire à $\vec{u} \neq \vec{0}$ quand il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

DROITES COPLANAIRES

Deux droites sont coplanaires si elles appartiennent à un même plan. Deux droites distinctes coplanaires sont soit sécantes, soit strictement parallèles.

VECTEURS ORTHOGONAUX

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

PARALLÉLISME DANS L'ESPACE

• Deux droites de l'espace sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

• Une droite est parallèle à un plan de l'espace si ses vecteurs directeurs sont orthogonaux aux vecteurs normaux du plan.

• Deux plans sont parallèles si les vecteurs normaux de l'un sont colinéaires aux vecteurs normaux de l'autre.

Comment étudier les positions relatives de deux plans ?

On considère deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' de vecteurs normaux respectifs \vec{n} et \vec{n}' .

Point de vue géométrique : \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont **parallèles** si et seulement si \vec{n} et \vec{n}' sont **colinéaires**. Deux cas sont alors possibles : soit \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont confondus et leur intersection est un plan ; soit \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont strictement parallèles et leur intersection est vide.

Sinon \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont **sécants** et leur intersection est une droite.

Point de vue algébrique : soient $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ les équations cartésiennes respectives des plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' . Pour étudier l'intersection de ces deux plans, on résout le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Soit ce système n'a pas de solutions, soit il en a une infinité.

Ainsi, une **droite de l'espace** peut être représentée par un **système de deux équations linéaires**, composé des équations cartésiennes de deux plans sécants selon cette droite (on remarque que ce système n'est pas unique).

Quelles sont les différentes manières de calculer un produit scalaire ?

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'espace est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right].$$

Si α est une mesure de l'angle géométrique associé à \vec{u} et à \vec{v} , on a aussi : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha$.

Dans un repère orthonormal, si \vec{u} et \vec{v} ont pour coordonnées respectives $(x ; y ; z)$ et $(x' ; y' ; z')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Quand on calcule un produit scalaire en géométrie non analytique, on utilise la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs et se ramener ainsi à des calculs de produits scalaires sur des vecteurs orthogonaux ou colinéaires.

Quels sont les cas particuliers à connaître et leurs utilisations ?

Si l'un des deux vecteurs est nul, leur produit scalaire est nul.

Deux **vecteurs** de l'espace sont **orthogonaux** si et seulement si leur **produit scalaire** est nul.

Si deux vecteurs non nuls de l'espace sont colinéaires, alors $\|\vec{u} \cdot \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Pour démontrer que deux droites de l'espace \mathcal{D} et \mathcal{D}' , de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{v} , sont orthogonales, on montre que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$.

Quelles sont les propriétés du produit scalaire ?

Pour effectuer des **calculs vectoriels** avec des produits scalaires, on utilise les propriétés suivantes :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- Pour tout réel k , $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
- Le carré scalaire de \vec{u} est : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.



Icosaèdre en trois dimensions vu de face.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

- **Le big data, entre nombres et lumières** p. 41-42 (Antoine Reverchon, *Le Monde* daté du 31.10.2015)

MOTS CLÉS

ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

- Soit une droite \mathcal{D} coupant un plan \mathcal{P} en un point I, on dit que la droite \mathcal{D} et le plan \mathcal{P} sont orthogonaux si \mathcal{D} est perpendiculaire à deux droites de \mathcal{P} passant par I.
- Deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' (non nécessairement coplanaires) sont orthogonales si les parallèles à \mathcal{D} et \mathcal{D}' passant par un point M quelconque sont perpendiculaires.
- Deux plans sont orthogonaux si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

REPÈRE ORTHONORMAL

Un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ de l'espace est dit orthonormal lorsque les vecteurs \vec{i} et \vec{j} , \vec{i} et \vec{k} , et \vec{j} et \vec{k} sont orthogonaux et ont la même norme.

PRODUIT SCALAIRE

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right]$$

Si α est une mesure de l'angle géométrique associé à \vec{u} et \vec{v} : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha$

- Dans un repère orthonormal, si $\vec{u}(x ; y ; z)$ et $\vec{v}(x' ; y' ; z')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

RELATION DE CHASLES

Quels que soient les points A, B et C de l'espace : $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

CARRÉ SCALAIRE

Le carré scalaire du vecteur \vec{u} est le nombre réel $\|\vec{u}\|^2$, noté \vec{u}^2 . Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ si $\vec{u}(x ; y ; z)$, $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

NORME

La norme d'un vecteur $\vec{u} = \overline{AB}$ est

le nombre réel positif noté $\|\vec{u}\|$ tel que $\|\vec{u}\| = AB$.

PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE RÉEL

Soient \vec{u} un vecteur et k un réel. Le produit du vecteur \vec{u} par le réel k est le vecteur $k\vec{u}$ tel que :

- $k\vec{u}$ a la même direction que \vec{u} ;
- $k\vec{u}$ a la même sens que \vec{u} si $k > 0$;
- $k\vec{u}$ est de sens opposé à \vec{u} si $k < 0$;
- la longueur de $k\vec{u}$ est celle de \vec{u} multipliée par $|k|$ (valeur absolue de k).

Amérique du Nord (mai 2013)

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points $A(0; 4; 1)$, $B(1; 3; 0)$, $C(2; -1; -2)$ et $D(7; -1; 4)$.

- Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
- Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$.
 - Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC) .
 - En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
 - Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .
 - Déterminer les coordonnées du point H , intersection de la droite Δ et du plan (ABC) .
- Soit \mathcal{P}_1 le plan d'équation $x + y + z = 0$ et \mathcal{P}_2 le plan d'équation $x + 4y + 2z = 0$.
 - Démontrer que les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants.
 - Vérifier que la droite d , intersection des plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 , a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
 - La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

La bonne méthode

- Vérifier que deux vecteurs, judicieusement choisis, sont non colinéaires.
- a)** Montrer qu'un vecteur directeur de la droite est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.
b) Un vecteur directeur de la droite est donc un vecteur normal du plan.
c) Vous connaissez les coordonnées d'un point de la droite et de l'un de ses vecteurs directeurs.
d) Les coordonnées $(x; y; z)$ du point d'intersection H de Δ et (ABC) vérifient simultanément leurs deux équations.
- a)** Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires. Deux plans sécants étant deux plans non parallèles, que peut-on en déduire quant à leurs vecteurs normaux ?
b) Vérifier que les points de cette droite appartiennent aux deux plans.
c) Comparer un vecteur directeur de d et un vecteur normal de (ABC) .

Métropole (sept. 2010)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
Soit \mathcal{P} le plan d'équation $3x + y - z - 1 = 0$ et \mathcal{D} la droite dont

une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases}$$

où t désigne un nombre réel.

- a)** Le point $C(1; 3; 2)$ appartient-il au plan \mathcal{P} ? Justifier.
b) Démontrer que la droite \mathcal{D} est incluse dans le plan \mathcal{P} .
- Soit \mathcal{Q} le plan passant par le point C et orthogonal à la droite \mathcal{D} .
 - Déterminer une équation cartésienne du plan \mathcal{Q} .
 - Calculer les coordonnées du point I , point d'intersection du plan \mathcal{Q} et de la droite \mathcal{D} .
 - Montrer que $CI = \sqrt{3}$.
- Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite \mathcal{D} de coordonnées $(-t + 1; 2t; -t + 2)$.
 - Vérifier que, pour tout nombre réel t , $CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.
 - Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

La bonne méthode

- a)** Montrer que les coordonnées du point C vérifient l'équation du plan.
b) Montrer qu'un point de \mathcal{D} appartient toujours à \mathcal{P} .
- a)** Déterminer un vecteur normal à \mathcal{P} . On a $C \in \mathcal{Q}$.
b) Le point I vérifie les équations de \mathcal{D} et de \mathcal{Q} .
c) Déterminer les coordonnées du vecteur \vec{CI} .
- a)** Déterminer les coordonnées du vecteur \vec{CM}_t .
On a $CM_t^2 = \vec{CM}_t \cdot \vec{CM}_t$.
b) Étudier la fonction $t \mapsto CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.

Le big data, entre nombres et lumières

Ultraconnectée, l'humanité produit toujours plus de données numériques. Les enseignements qu'on peut tirer de ces volumes vertigineux d'informations brutes restent incertains : les mathématiques peinent encore à les interpréter.

Les chiffres sont impressionnants. Pendant la seule année 2011, le volume de l'information qui a été numérisée dans le monde a atteint 10 puissance 21 octets. Pour les plus fâchés avec les maths, cela signifie un 1 avec 21 zéros derrière : ça s'appelle des « zettaoctets », et cela représente... autant que toute l'information numérisée jusque-là. En 2013, ce volume a été 4,4 fois supérieur ! A ce rythme, en 2020, l'humanité stockerait 44 zettaoctets de données dans ses ordinateurs, téléphones, tablettes – mais aussi dans ses montres, lunettes, réfrigérateurs, automobiles, puces sous-cutanées, objets de plus en plus bardés de capteurs connectés à Internet. Soit 44 000 milliards de gigaoctets...

Cet univers du big data, ou « données massives » en français, ne servirait pas à grand-chose si celles-ci ne pouvaient être stockées (dans des serveurs de plus en plus grands), transmises (par un débit Internet de plus en plus élevé) et surtout traitées (par des ordinateurs de plus en plus puissants) – bref : si l'on ne pouvait pas en « extraire de la valeur ». Là encore, les chiffres sont énormes : selon l'institut américain Data Driven Marketing, 156 milliards de dollars ont été tirés de l'exploitation des données personnelles dans le monde en 2012. Un chiffre qui, d'après le cabinet de conseil McKinsey, serait porté à 600 milliards de dollars par an si les entreprises exploitaient toutes les données dont elles disposent.

Garder la tête froide devant une telle manne ? Impossible. Des dizaines de rapports, études et séminaires se sont penchés avec gourmandise sur cette « Nouvelle frontière pour l'innovation, la concurrence et la productivité » (titre du rapport McKinsey de juin 2011, devenu le livre de chevet des thuriféraires du big data). Les médias publient des « suppléments big data » payés par la publicité des éditeurs de « solutions logicielles ». Les pouvoirs publics sont sommés de « Faire de la France un champion de la révolution numérique » (titre d'un rapport de l'Institut de l'entreprise, d'avril 2015)... Face à cette vague, la critique s'organise, qui dénonce les intrusions des entreprises (par la publicité) et des Etats (par la surveillance) dans la vie privée. Mais quelques mathématiciens et informaticiens experts du sujet, pour certains travaillant eux-mêmes avec les entreprises, soulignent d'autres limites, inhérentes à la nature même du big data.

Ces limites sont apparues clairement en 2013, lorsque le programme Google Flu Trends (GFT) s'est avéré incapable de prédire le pic d'une épidémie de grippe aux Etats-Unis. Avec force publicités, Google avait créé, en 2008, un moteur de recherche capable de capter les données personnelles fournies par les internautes sur leur état de santé, assorti d'algorithmes pouvant prédire l'arrivée d'une épidémie plusieurs semaines à l'avance. Après cet échec, Google a abandonné le programme.

Mais ses causes – médiocre qualité et mauvaise interprétation des données collectées – ont passionné les chercheurs. Les enseignements qu'on en a tirés confirment que l'utilisation optimale du big data n'est pas encore pour demain.

Exploiter les données disponibles sur les clients, usagers, citoyens ou électeurs est aussi vieux que le commerce et la politique. Toute la science du marketing et de la gestion publique consiste à les collecter et à les chiffrer, pour pouvoir en faire des statistiques que des algorithmes organiseront de façon logique et que des modèles mathématiques cartographieront afin d'en faire des outils d'aide à la décision. Quelle couleur de « packaging » va plaire à la ménagère de moins de 50 ans ? A qui envoyer des messages pour lancer le buzz sur le prochain épisode de *Star Wars*... ou sur un candidat à l'élection

présidentielle ? A quelles conditions météorologiques devra résister cette aile d'avion ? Après de quel type de malades ce nouveau médicament sera-t-il le plus efficace ? A quel quartier d'une ville consacrer le plus de moyens pour ramasser les ordures ? Les objectifs sont toujours les mêmes, mais la possibilité d'exploiter les données massives a renouvelé la façon de faire.

Dans la gestion traditionnelle des données, on isole et on agrège les données « pertinentes » : celles que l'on estime, intuitivement ou empiriquement, liées à l'hypothèse à vérifier, à la question posée. Il s'agit ensuite de comprendre la nature des rapports liant ces données entre elles, puis de modéliser la structure de ces rapports. Le big data, lui, implique « de traiter d'immenses quantités de données hétérogènes, faisant apparaître des liens inattendus, des structures cachées, explique Frank Pacard, mathématicien et directeur des études et de la recherche à l'Ecole polytechnique. Au lieu d'utiliser des données pour interroger une hypothèse préalable, la découverte de structures nouvelles permet de formuler de nouvelles hypothèses, qui peuvent et doivent ensuite être testées ». Une promesse de nouveaux continents qui intéresse au plus haut point les entreprises et les investisseurs – les premières rêvant du logiciel qui ciblera leurs campagnes de pub sur leurs seuls futurs acheteurs, les seconds de l'algorithme qui leur fera gagner en Bourse à coup sûr.

Transformer des données brutes en « or informationnel », tel est donc l'enjeu. Les chercheurs sont d'autant plus prêts à y participer que la rarefaction des budgets publics les incite à quêter le soutien du secteur privé, comme le note Michael Jordan, professeur d'informatique à l'université de Berkeley (Californie), qui a formé des bataillons de *data scientists* (spécialistes des données) pour Google, Facebook, Amazon, les assureurs et les banques. Mais en réalité, la plupart des entreprises sont loin d'atteindre ce but. « Elles en sont encore à résoudre des questions d'accessibilité à leurs propres données, tant les restructurations permanentes de leur périmètre entravent la mise en place

POURQUOI CET ARTICLE ?

Afin de représenter graphiquement les données massives, il faudrait imaginer un nuage de points possédant pour coordonnées cent nombres réels. Un cas simple serait que ces points M appartiennent à une même droite passant par $A(a_1, \dots, a_{100})$ et de vecteur directeur $\vec{u}(u_1, \dots, u_{100})$ d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} m_1 = a_1 + k \times u_1 \\ \dots \\ m_{100} = a_{100} + k \times u_{100} \end{cases} \text{ avec } k \text{ un réel.}$$

Cela est rarement le cas. On pourrait essayer de trouver l'expression d'une fonction à plusieurs variables dont la représentation graphique passerait par le plus de points possibles, mais il y aurait de très nombreuses possibilités. Il serait par exemple possible de considérer une fonction définie de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^{98} qui à un couple de réels (a, b) associe un 98-uplet de réels (x_1, \dots, x_{98}) . Afin d'étudier les variations d'une telle fonction, il faudrait avoir recours à la dérivation partielle et calculer des gradients. Malheureusement, **aucun moyen visuel simple de représentation graphique pour ce type de fonction n'a encore été découvert.**

d'un système d'information unique », observe Julien Laugel, de MFG Labs, une start-up récemment rachetée par Havas Media et qui vend aux entreprises des systèmes d'exploitation de données. Elles sont peu nombreuses à avoir franchi la seconde étape, celle de la sécurisation des données (indispensable pour conserver leur avantage concurrentiel). Elles le sont encore moins à utiliser ces données pour guider leurs décisions... Et elles ne sont qu'une poignée à en retirer de la valeur. Ce qui ne les empêche pas, pourtant, de se ruier sur les solutions vendues par les prestataires de services.

« Il y a une sorte de "pensée magique" associée aux chiffres, dont l'exactitude paraît synonyme d'efficacité ; les volumes évoqués déclenchent des fantasmes d'omnipotence et d'omniscience », reconnaît Julien Laugel. Les promesses du big data font ainsi oublier que les données massives sont... des données, qui obéissent aux lois statistiques de marges d'erreur, d'intervalles de confiance et de fausses interprétations. Complication supplémentaire : l'apparition de structures de corrélations fortuites au sein de nuages de données massives accroît la tentation d'y déceler des causalités inexistantes. « Avec tant de points de mesure et donc tant de liens potentiels entre ces mesures, nos outils d'analyse statistique produisent des résultats dénués de sens », observe Alex Pentland, professeur de sciences des médias au Massachusetts Institute of Technology (MIT). A Berkeley, son alter ego Michael Jordan souligne un autre biais : à mesure que les individus prennent conscience de la valeur de leurs données, ils vont livrer des informations aux capteurs et aux réseaux avec un degré de sincérité de plus en plus sélectif.

Les internautes seront par exemple plus enclins à communiquer leurs données de santé à leur médecin que leurs goûts culinaires ou artistiques à Facebook. Déjà, ils cliquent ainsi régulièrement sur la page de désabonnement des sites des opérateurs téléphoniques, car ils savent que l'algorithme va automatiquement leur proposer une offre promotionnelle. Or, explique Michael Jordan, nous ne savons pas évaluer l'impact de l'insincérité des données sur les résultats offerts par le big data, précisément parce que le big data traite par définition toutes les données, même les fausses ! Le chercheur a également observé que la mise en parallèle d'ordinateurs de plus en plus nombreux et puissants pour traiter et modéliser l'information engendre un type spécifique d'erreurs. « Le big data reste pour l'instant l'apanage de gens qui inventent et vendent des systèmes informatiques, mais qui n'affrontent pas les problèmes spécifiques posés par le traitement de données massives, observe-t-il. Nous n'avons pas encore de théorie bien affirmée pour penser les modèles construits à partir de ces données. Parfois, ça marchera, parfois non. »

Deux autres écueils, d'une nature cette fois purement mathématique, sont mis en avant par les experts. Le premier concerne ce qu'on appelle la « discrétisation » : il s'agit d'intégrer de la discontinuité dans des modèles mathématiques continus, ceux-là mêmes qu'utilisent les ordinateurs pour élaborer des modèles. Les effets dévastateurs de cette différence entre continuité supposée et discontinuité réelle ont été observés dans la finance à haute fréquence : la succession d'achats et de ventes de titres à la nanoseconde près selon un modèle continu a, dans la réalité discontinue, ruiné quelques investisseurs insouciant... Certes, les mathématiciens savent réintégrer de la discontinuité dans leurs modèles (c'est la « discrétisation »). Mais cette opération est délicate et parfois source de nouvelles erreurs.

L'autre problème mathématique tient au volume même des données. A l'école, on apprend à répartir des « objets » dans un espace construit selon deux paramètres, donc sur deux axes : l'abscisse et l'ordonnée. Les élèves des sections scientifiques planchent sur des espaces « vectoriels » à trois dimensions. Les cadors des mathématiques, eux, savent construire des espaces à dix, vingt, trente, cinquante dimensions, permettant de cartographier les relations entre des objets en fonction d'autant de paramètres. Mais avec les données massives, les objets se répartissent dans des espaces à 60, 70, 100 dimensions, voire plus. Il devient alors difficile d'identifier

des structures entre des objets très « éloignés » les uns des autres, et d'en obtenir une visualisation perceptible à l'œil humain, a fortiori lorsque cet œil est managérial ou politique.

Ces craintes épistémologiques doubleront-elles l'enthousiasme d'entreprises et d'administrations qui pensent avoir trouvé la pierre philosophale ? Pas certain. « Le traitement des données massives peut engendrer des erreurs massives, et donc de mauvaises décisions d'une ampleur catastrophique », affirme Michael Jordan. Le mathématicien redoute le triomphe de ce qu'il appelle « la pensée informatique » sur « la pensée intuitive ». Car la première, dit-il, ne sait pas prendre en compte la notion de risque. C'est pourquoi la présence de l'expert aux côtés de l'informaticien est indispensable.

Contrairement à ce que l'on lit dans de nombreux rapports, les entreprises n'ont pas besoin de recruter en masse des « data scientists », renchérit Frank Pacard. Il leur faut plutôt « des experts de leur secteur d'activité ayant une compétence en informatique et en mathématiques qui soient capables d'expliquer quels sont les enjeux et les réalités de leur métier, de formuler les bonnes questions et éventuellement d'interpréter les structures qui apparaissent dans les « nuages » de données massives ». Si les informaticiens et les financiers de l'entreprise deviennent les seuls interlocuteurs des prestataires du big data, les risques de dérapage seront multipliés.

Julien Laugel dit la même chose, mais autrement. Les données massives, remarque-t-il, ont « un faible ratio signal/bruit », c'est-à-dire que chacune d'entre elles offre une faible probabilité de présenter un intérêt pour l'utilisateur, et une forte probabilité de n'avoir aucun sens. Même le fameux « like » de Facebook, qui permet à la firme américaine de gagner des millions auprès d'annonceurs fascinés, présente un défaut d'asymétrie d'information sous son apparente simplicité binaire. Si cliquer sur le pouce dressé (le 1) délivre un message clair (la personne aime), ne pas cliquer (le 0) est ambigu : n'aime-t-elle pas, ou n'a-t-elle pas vu, ou a-t-elle sciemment omis de donner son avis ? « C'est typiquement le genre de situations où faire des extrapolations à partir de corrélations est extrêmement tentant... et dangereux. »

La facilité pour les utilisateurs est alors de se réfugier derrière l'automatisation du traitement des données, c'est-à-dire de renoncer à exercer un choix humain parmi les données proposées. Or, cette automatisation oblige à « simplifier » les objets mathématiques pour faciliter leur mise en algorithme, et donc à privilégier leur similitude plutôt que leur différenciation. Au risque de renoncer à l'apport principal du big data : nous faire découvrir des réalités que nous ne soupçonnions pas.

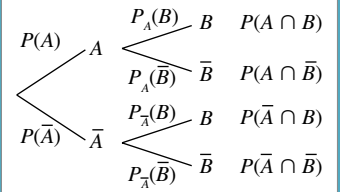
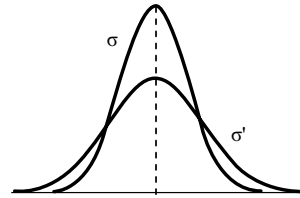
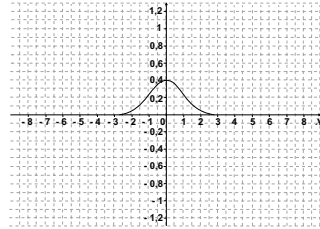
Julien Laugel n'en reste pas moins convaincu : le big data ne sera pas une bulle et changera radicalement la gestion des affaires et de la décision publique. Mais il reste un long chemin à parcourir pour en dépasser les erreurs de jeunesse. « Après le Far West des mathématiciens modélisateurs, la victoire reviendra, tôt ou tard, à celui qui aura le plus de données, prévoit-il. Nos clients les plus importants, les assureurs par exemple, ont des équipes de data scientists capables de comprendre les limites de leurs propres modèles. Nous savons aussi réintroduire dans nos modèles des données agrégées, ou des données extrêmes, qui rétablissent la robustesse de nos modèles. » La science des algorithmes progresse implacablement, dissipant les fantasmes tout en révélant l'ampleur de ce qui reste à accomplir.

En attendant, mieux vaut rester vigilant. A Trente, en Italie, les équipes du professeur du MIT Alex Pentland ont mené, avec les entreprises de la ville et la municipalité, une expérience de « nouveau contrat social sur les données ». Les habitants ont été invités, sur la base d'un « consentement éclairé », à livrer des données personnelles afin de participer à l'amélioration des politiques publiques : seules les informations nécessaires à ces politiques étaient demandées. Une façon élégante de ne pas céder à l'illusion lyrique du big data, ainsi résumée par Michael Jordan : « Le problème, c'est qu'on ne sait pas de combien de données il faut disposer pour résoudre un problème. » ●

Antoine Reverchon, *Le Monde* daté du 31.10.2015

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$



Probabilités conditionnelles

Les probabilités conditionnelles prennent en compte les informations concernant l'issue d'une expérience qui modifient la probabilité des événements liés à cette expérience. On parle de probabilités conditionnelles lorsque deux événements d'une expérience aléatoire se réalisent l'un après l'autre. On regarde alors l'influence du premier sur le second.

Qu'est-ce qu'une probabilité ?

On part d'une expérience aléatoire E , on détermine l'univers Ω (l'ensemble de toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire) ; on a $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Définir une probabilité, c'est associer à chaque issue e_i un nombre p_i de façon que les deux propriétés suivantes soient vérifiées : $0 \leq p_i \leq 1$ et $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Généralement, pour déterminer les probabilités (les nombres p_i), on a deux possibilités :

- soit on fait une **hypothèse d'équiprobabilité** et on associe à toutes les issues la même probabilité $p_i = \frac{1}{n}$;
- soit on fait une **étude statistique** et on définit alors p_i comme la fréquence de l'issue e_i au cours d'un grand nombre de répétitions.

La **probabilité d'un événement A** dans le cas équiprobable est :

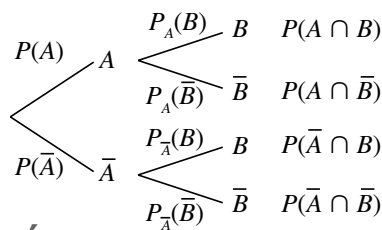
$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$$

Ce qu'on énonce parfois sous la forme :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Comment calculer une probabilité conditionnelle ?

On considère une expérience aléatoire et deux événements A et B quelconques de probabilités non nulles. L'événement A est réalisé puis l'événement B . On peut visualiser la situation en utilisant un arbre pondéré :



MOTS CLÉS

EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

Une expérience aléatoire est une expérience dont l'issue (le résultat) dépend du hasard.

UNIVERS

Soit E une expérience aléatoire. On appelle univers l'ensemble constitué de toutes les issues possibles de cette expérience.

ÉVÉNEMENT

• Soit E une expérience aléatoire et $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, l'univers associé à E . On appelle événement de l'expérience aléatoire E tout sous-ensemble de Ω .

• On appelle événement élémentaire, un événement constitué d'un seul élément de Ω , c'est-à-dire constitué d'une seule issue $\{e_i\}$.

• La probabilité $P(A)$ d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui le constituent.

ISSUES ÉQUIPROBABLES

Soit $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire E . Si toutes les issues ont la même probabilité $p_i = \frac{1}{n}$, on dit que l'on est dans une situation d'équiprobabilité.

La « probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé », notée $P_A(B)$, peut se calculer en utilisant un arbre.

En effet, on a : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, donc $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (si $P(A) \neq 0$).

Par analogie, on en déduit que la « probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé », notée $P_B(A)$, sera égale à : $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (si $P(B) \neq 0$).

Propriétés : $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$;

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)} ;$$

$$P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C).$$

Exemple : dans une population lycéenne, 40 % des élèves aiment les mathématiques, 25 % aiment la physique et 10 % aiment à la fois les mathématiques et la physique. On prend un élève au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'il aime la physique, sachant qu'il aime les mathématiques ? Soit A l'événement « l'élève aime les mathématiques » et B l'événement « l'élève aime la physique ». L'énoncé donne $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,25$ et $P(A \cap B) = 0,1$. On cherche la probabilité pour que l'élève aime la physique sachant qu'il aime les mathématiques, c'est-à-dire la probabilité de B sachant A : $P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$.

Comment montrer que deux événements sont indépendants ?

Intuitivement, deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un de ces événements n'influe pas sur la probabilité de l'autre. On doit donc avoir : $P_A(B) = P(B)$.

A et B sont donc indépendants si et seulement si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Attention à ne pas confondre incompatibles et indépendants :

- A et B sont donc **incompatibles** si et seulement si : $P(A \cap B) = 0$;
- A et B sont donc **indépendants** si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

CARDINAL (D'UN ENSEMBLE)

Soit E un ensemble fini. Le cardinal de E est le nombre d'éléments de cet ensemble. On le note $\text{card } E$.

PARTITION

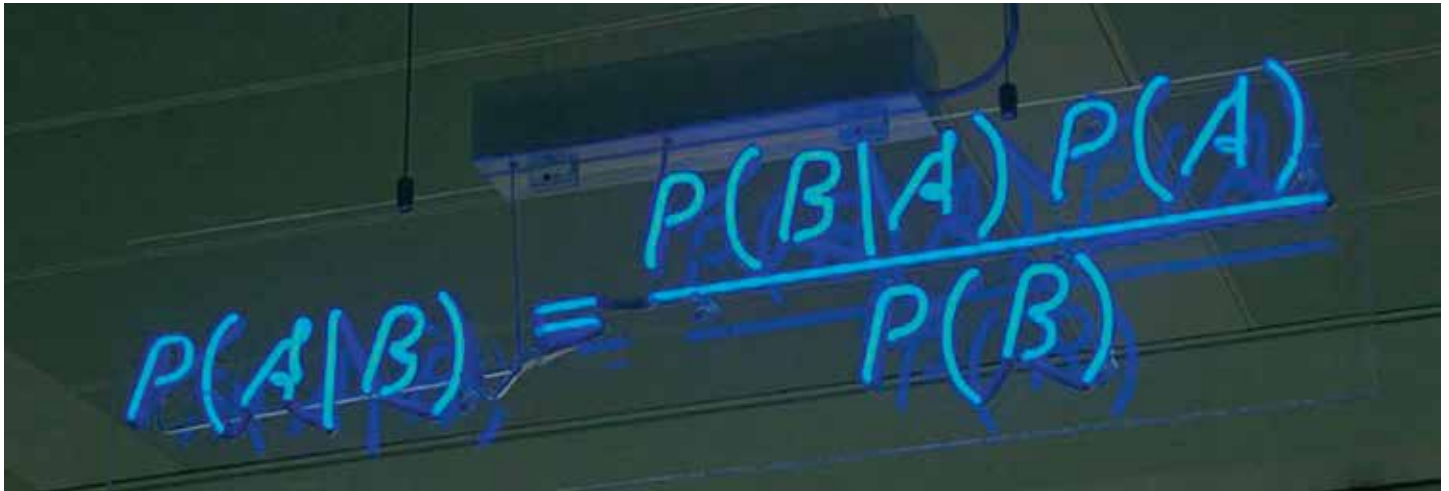
• Une partition est un ensemble d'événements qui séparent en « paquets distincts » toutes les issues d'une expérience (c'est-à-dire l'univers). Les événements A_1, A_2, \dots, A_n réalisent une partition de l'univers Ω si : $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$;

$A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$.

• On considère souvent la partition élémentaire A, \bar{A} .

VARIABLE ALÉATOIRE

Soient E une expérience aléatoire et Ω l'univers associé. Une variable aléatoire X est simplement une application qui, à chaque issue de l'univers, associe un nombre réel. Autrement dit, en langage fonctionnel, c'est une fonction de l'univers dans l'ensemble des nombres réels, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.



Formule de Bayes

Comment utiliser la formule des probabilités totales ?

Ayant une partition A_1, A_2, \dots, A_n , on considère un événement B quelconque. En écrivant que les issues qui constituent B se séparent en celles qui appartiennent à A_i , celles qui appartiennent à A_2 , ..., celles qui appartiennent à A_n , on obtient : $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$. Sachant que $P(B \cap A_i) = P(A_i)P_{A_i}(B)$, on peut aussi écrire :

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B).$$

Dans le cas de la partition élémentaire avec A et \bar{A} , pour tout événement B , on a : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.

Qu'est-ce qu'une loi de probabilité ?

Est une expérience aléatoire et Ω l'univers associé. Soit une variable aléatoire X définie sur Ω . $X(\Omega)$ étant l'ensemble des valeurs prises par X , on a $X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; n\}$.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

- **Maladie de Lyme, une énigme coriace** p. 47-49 (Pascale Santi, *Le Monde* daté du 04.07.2018)

MOTS CLÉS

ÉVÉNEMENTS DISJOINTS

On dit que deux événements A et B sont disjoints ou incompatibles lorsqu'ils n'ont aucune issue (ou événement élémentaire) en commun. Dans ce cas, on a :

- $P(A \cap B) = \emptyset$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

ESPÉRANCE

• Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est $p_i = P(X = x_i)$ pour $1 \leq i \leq n$. Autrement dit, la loi de X est :

X	x_1	x_2	...	x_n	total
P	p_1	p_2	...	p_n	1

L'espérance de X est le nombre réel, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n.$$

• L'espérance est la « moyenne » des valeurs prises par X lors d'un grand nombre de répétitions de l'expérience.

La **loi de probabilité de X** attribue à chaque valeur x_i la probabilité p_i de l'événement $(X = x_i)$ constitué de les événements élémentaires dont l'image par X est x_i .

On la présente généralement sous la forme d'un tableau à double entrée :

X	x_1	x_2	...	x_n	total
P	p_1	p_2	...	p_n	1

On a alors $0 \leq p_i \leq 1$, avec $p_i = P(X = x_i)$, et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Qu'est-ce qu'une loi binomiale ?

On considère une expérience aléatoire E , un événement A lié à E de probabilité non nulle, avec $P(A) = p$. On appelle « succès » la réalisation de A et « échec » celle de \bar{A} .

On **répète** n fois l'expérience E dans des **conditions identiques** et de manière indépendante. Soit X la variable aléatoire comptant le **nombre de succès** au cours des n répétitions. X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p , notée $B(n, p)$.

$$\text{On a alors : } \begin{cases} X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; n\} \\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ avec } q = 1 - p. \end{cases}$$

VARIANCE

• Soit X une variable aléatoire sur une population de taille n :

X	x_1	x_2	...	x_p	total
Effectif	n_1	n_2	...	n_p	n

n_i est l'effectif de x_i (nombre de fois où l'on prend la valeur x_i).

• Soit \bar{X} la moyenne de X . La variance de X est le nombre noté $V(X)$ et défini par :

$$V(X) = \frac{1}{n} [n_1(x_1 - \bar{X})^2 + n_2(x_2 - \bar{X})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{X})^2].$$

• On a aussi : $V(X) = \frac{1}{n} [n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \dots + n_p x_p^2] - \bar{X}^2$.

• La variance est un paramètre de dispersion de la série. Elle mesure la façon dont les valeurs de X se dispersent autour de la moyenne.

ÉCART TYPE

• L'écart type d'une série statistique simple ou d'une variable aléatoire X est le nombre $s(X)$ égal à la racine carrée de la variance : $s(X) = \sqrt{V(X)}$.

• L'écart type mesure la façon dont les valeurs de X se dispersent autour de la moyenne.

Métropole (juin 2013)

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1 , 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3 . Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des feuillus. La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères, alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

On envisage les événements suivants :

H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 » ;

H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 » ;

H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 » ;

C : « l'arbre choisi est un conifère » ;

F : « l'arbre choisi est un feuillu ».

a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3 .

c) Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à 0,525.

d) L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? (On arrondira à 10^{-3} .)

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ? (On arrondira à 10^{-3} .)

c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins 2 feuillus ? (On arrondira à 10^{-3} .)

La bonne méthode

1. a) Interpréter les données de l'exercice et les placer dans l'arbre pondéré.

b) Appliquer la formule des probabilités composées.

c) Mettre en évidence une partition, puis appliquer la formule des probabilités totales.

d) Appliquer la formule des probabilités conditionnelles.

2. a) Vérifier les conditions permettant de prouver que X suit bien une loi binomiale.

b) Utiliser la formule de la loi binomiale.

c) Utiliser la notion d'événement contraire et la formule de la loi binomiale.

Métropole (juin 2011)

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

– la probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test) ;

– la probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'événement : « la personne est contaminée par le virus », et T l'événement : « le test est positif ». V et T désignent respectivement les événements contraires de V et T .

1. a) Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_v(T)$ et $P_{\bar{v}}(\bar{T})$.

Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b) En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.

2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

3. a) Justifier par un calcul la phrase : « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de "chances" que la personne soit contaminée ».

b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

(Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4} .)

La bonne méthode

1. a) Utiliser les données de l'énoncé.

b) Appliquer la formule des probabilités composées.

2. Utiliser la formule des probabilités totales.

3. a) Utiliser la formule des probabilités conditionnelles.

b) Utiliser de nouveau la formule des probabilités conditionnelles, ainsi que la probabilité de l'événement complémentaire.

Maladie de Lyme, une énigme coriace

Provoquée par une bactérie transmise par la tique, la maladie de Lyme divise les médecins. Incidence, symptômes, tests diagnostics, traitements... Tout est sujet à débat. Pendant que les spécialistes se déchirent, les patients souffrent, et l'acarien profite du réchauffement pour étendre sa zone de nuisance

Le terrain est miné. Les positions s'affrontent. Longtemps méconnue, la maladie de Lyme occupe aujourd'hui une large place dans le débat public. Au cours d'une conférence de presse tendue, mercredi 20 juin, et après dix-huit mois de travaux, la Haute Autorité de santé (HAS) a rendu publiques ses recommandations sur cette affection et sur les autres maladies vectorielles à tiques (MVT), élaborées avec de nombreux acteurs de diverses spécialités et des associations de patients. Mais, fait rarissime, la Société de pathologie infectieuse de langue française (Spilf), qui a coprésidé le groupe de travail, n'a pas signé ce texte. La société savante doit se réunir début juillet pour rendre sa décision. Soit le texte est validé, et ce travail constituera le nouveau Programme national de diagnostic et de soins (PNDS), soit il restera au stade de recommandations.

Ce document doit définir les modalités de prise en charge des patients, remplaçant un protocole de 2006, lui aussi déjà fortement contesté. « *La maladie de Lyme, et plus généralement les maladies vectorielles à tiques, constitue un problème de santé publique* », indique-t-on à la Direction générale de la santé, qui a mis en place un plan national de prévention et de lutte contre ces maladies en 2017. C'est sur l'existence ou non d'une forme chronique de la maladie que les experts et les associations de malades se déchirent - mais aussi à propos de la qualité des tests diagnostics et des traitements.

Caractérisée dans les années 1970 aux Etats-Unis dans la ville de Lyme (Connecticut), cette maladie reste largement énigmatique. Elle est transmise à l'homme par une piqûre de tique *Ixodes* infectée par une bactérie appelée *Borrelia burgdorferi*, de la famille des spirochètes. Pas moins de 900 espèces de tiques sont recensées dans le monde. Cet arthropode, principalement présent dans les zones dont le niveau d'humidité est d'au moins 80 %, notamment en forêt, se nourrit du sang de ses hôtes (oiseaux, chevreuils, bovins, chats, etc.).

Comme aux Etats-Unis, où l'on compte environ 300 000 nouveaux cas de malades de Lyme, l'incidence augmente en France. « *Différents facteurs, comme l'augmentation des surfaces forestières, la réduction de la biodiversité et l'augmentation des températures sont impliqués dans la recrudescence des tiques* », note l'Institut national de la recherche agronomique (INRA). Selon les dernières estimations publiées dans le *Bulletin épidémiologique hebdomadaire (BEH)* de Santé publique France du 19 juin, le réseau de médecins généralistes Sentinelles a recensé 84 nouveaux cas pour 100 000 habitants en 2016, contre 55 nouveaux cas pour 100 000 habitants estimés en 2009. Soit environ 50 000 nouveaux cas en 2016. Avec une hausse de 65 % entre 2015 et 2016. Une augmentation qui reflète sans doute « *la médiatisation croissante de la maladie auprès du grand public et des professionnels de*

santé », note le *BEH*. Le professeur Benoît Jaulhac, directeur du Centre national de référence (CNR) des *Borrelia*, à Strasbourg, tempore : « *La borreliose est une maladie zoonotique, donc fluctuante en incidence selon les années. D'après les dernières estimations de Sentinelles, le nombre de cas a diminué en 2017, avec environ 44 700 cas.* »

En revanche, pour certaines associations de patients, ces chiffres sont largement sous-estimés. Alsace, Limousin, Franche-Comté, Rhône-Alpes sont les régions les plus touchées. Et deux populations sont les plus concernées : les enfants (surtout les 5-9 ans) et les 60-64 ans, plus adeptes de la randonnée en forêt.

Au total, 5 % à 10 % des tiques sont porteuses, et le risque qu'elles transmettent la bactérie se situe en moyenne entre 3 % et 15 %, selon la HAS. Cédric Grouchka, de la HAS, considère qu'il « *faut faire preuve de vigilance (...), et si vous êtes piqué par une tique, il y a 1 % de chance de développer cette maladie* », a-t-il indiqué le 20 juin. En cas d'infection, cela se manifeste dans 95 % des cas par une éruption cutanée circulaire (érythème migrant), tache rouge indolore, qui apparaît sous trois à trente jours, et qui peut s'étendre. Cette grosse rougeur s'accompagne, ou pas, de fièvre, de douleurs, de fatigue... La personne doit dans ce cas prendre un traitement antibiotique qui, la plupart du temps, est efficace. Non traitée, l'infection peut se propager dans d'autres tissus et organes.

Dans des cas plus rares (environ 5 %), des formes disséminées de la borreliose de Lyme, plus complexes, surviennent des semaines, voire des mois après la piqûre. Et c'est là le principal point d'achoppement du rapport de la HAS, qui reconnaît une forme chronique de la maladie de Lyme. Plus exactement, l'instance définit une symptomatologie ou syndrome persistant polymorphe après une possible piqûre de tique (SPPT). Cette appellation recouvre des personnes ayant pu être exposées aux tiques, avec ou sans un érythème migrant, présentant « *une triade de symptômes se manifestant plusieurs fois par semaine, depuis plus de six mois : des douleurs musculaires et/ou d'allure neuropathique et/ou céphalées, associées à une fatigue persistante avec réduction des capacités physiques et des plaintes cognitives (troubles de l'attention, de la mémoire...)* ». Des signes qui peuvent, selon la HAS, être dus à une borreliose de Lyme, ou à d'autres agents transmis par les tiques, ou à d'autres maladies ou syndromes. Le champ est large. Une partie de la difficulté tient au fait que, la plupart du temps, la piqûre est indolore, et la personne ne sait pas qu'elle a été piquée, ou alors elle n'a pas prêté attention à la piqûre ou la rougeur. Ainsi, Anne Colin, enseignante en maternelle, a été piquée sans le savoir. A 53 ans, la présidente de l'association Lympact est aujourd'hui retraitée pour invalidité, a des séquelles cognitives fortes, avec un

niveau en mathématiques et en français très bas, selon des bilans orthophoniques, et une grande fatigue. Elle a aussi une babésiose, une autre infection transmise par les tiques.

Une controverse loin d'être terminée

Si l'objectif de la HAS est de mettre fin à la controverse, on en est loin. Des associations, dont France Lyme, appellent à un rassemblement mercredi 4 juillet devant le ministère de la santé pour montrer « leur désaccord sur certains aspects des recommandations de la HAS ».

De leur côté, de nombreux infectiologues estiment qu'il n'existe pas de forme chronique de cette maladie. Pour le professeur Eric Caumes, membre du groupe de travail de la HAS pour la Spilf et chef du service de maladies infectieuses à la Pitié-Salpêtrière, le débat est tranché, « *le Lyme chronique n'existe pas, ni le SPPT* ». Il se fonde sur la littérature et sur une étude qu'il a réalisée auprès de 301 de ses patients ayant une suspicion de borréliose de Lyme, venus consulter de début 2014 à fin 2017. Seulement 29 (9,6 %) avaient un Lyme certain (défini sur quatre critères, épidémiologiques, cliniques, biologiques et évolutifs). Vingt-huit pour cent avaient des problèmes psychologiques, 18 % des troubles musculo-squelettiques, et 14 % des affections neurologiques. Beaucoup avaient « *de vraies maladies organiques, comme des maladies neurologiques, par exemple, l'une avait une maladie de Parkinson et prenait depuis six mois des antibiotiques sans effet. D'autres avaient des troubles psychologiques liés aux événements de la vie : syndrome de stress post-traumatique, d'épuisement professionnel...* », décrit-il. Pour Eric Caumes, ce sont des troubles « somatoformes » indifférenciés, ou selon ses termes « *syndrome de non-Lyme* ».

François Bourdillon et Jean-François Desenclos de Santé publique France pointent aussi dans l'éditorial du BEH « *les dérives et les dangers de prises en charge médicales alternatives, avec des tests sérologiques répétés et de multiples cures prolongées d'antibiotiques dont la logique de prescription n'est fondée sur aucune donnée probante* », ou des offres de soins à des prix exorbitants, notamment en Allemagne. A l'unisson, Eric Caumes parle de malades arrivant à sa consultation avec des traitements « *abracadabrantésques* », pouvant comporter jusqu'à 23 médicaments et dénonce les erreurs de diagnostic. Il refuse en l'état de signer le texte de la HAS. Lundi 2 juillet, l'Académie de médecine a elle aussi fait part de sa « *profonde déception* », regrettant que la HAS reconnaisse implicitement la notion de Lyme chronique « *sans la moindre preuve* ».

De son côté, la HAS assume cette publication. Même s'il y a des « *incertitudes scientifiques* », elle ne veut pas « *jeter à la poubelle le fruit de dix-huit mois de travaux collectifs* ». « *On ne peut pas laisser des patients sans diagnostic* », insiste Cédric Grouchka, de la HAS. Pour l'immunologiste Alain Trautmann, directeur de recherches au CNRS, chercheur émérite à l'Institut Cochin, les pouvoirs publics doivent prendre la mesure du problème : « *Si le pouvoir politique persiste à ne pas prendre les décisions qui s'imposent, il y a bien un risque de scandale sanitaire à venir.* »

De fait, nombreux sont les patients qui racontent les errances diagnostiques. Telle une jeune fille depuis cinq ans en fauteuil roulant, sans diagnostic, qui a retrouvé une vie normale grâce à un an et demi de

traitement. Une enfant de 8 ans, diagnostiquée pour une sclérose en plaques, souffrait en réalité de Lyme... Ces deux personnes vont bien, au prix d'un parcours du combattant, indique Anne Colin, présidente et fondatrice de Lympact.

Le diagnostic est parfois difficile à poser. « *Les tests ne suffisent pas à eux seuls pour affirmer ou infirmer le diagnostic* », note la HAS. Une lacune déjà soulignée dans un rapport de 2016 du Centre européen de prévention et de surveillance des maladies. A l'instar de tout test sérologique, le test Elisa ne détecte pas la bactérie, mais les anticorps produits par le malade pour s'en défendre. Ils n'apparaissent que quatre à six semaines après la morsure de tiques, mais pas systématiquement. Si Elisa est positif, un second test, dit Western Blot, est effectué, plus précis. Et une personne qui a des anticorps anti-*Borrelia* peut rester séropositive, même si la bactérie est éliminée, d'où des faux positifs.

Des tests qui sèment le trouble

Inversement, « *le pourcentage de faux négatifs avec les tests sérologiques (malades avérés qui apparaissent séronégatifs) est beaucoup trop élevé, comme le montre l'étude britannique de Cook et Puri (2016), avec un taux de faux négatifs de 40 %* », souligne Alain Trautmann. « *Les tests ne s'interprètent pas seuls, mais dans un contexte clinique, c'est notre travail quotidien en maladies infectieuses* », explique le Catherine Chirouze, chef du service de maladies infectieuses au CHRU de Besançon. Ainsi, pour Anne Colin, les tests, Elisa ou Western Blot, étaient tantôt positifs, tantôt négatifs.

« *Le très faible nombre de personnes pour lesquelles aucun diagnostic n'a pu être posé doivent entrer dans un protocole de recherche* », estime Cédric Grouchka, de la HAS. La ministre de la santé Agnès Buzyn a annoncé à l'Assemblée nationale le 19 juin la mise en place de centres spécialisés pour lutter contre l'errance médicale des patients, également axés sur la recherche. Pour le docteur Raouf Ghazzi, président de la Fédération française contre les maladies vectorielles à tiques (FFMVT), « *au minimum, on peut estimer à environ 10 000 les patients souffrant d'une maladie de Lyme chronique* », au vu du nombre d'adhérents des associations de patients atteints de cette maladie.

La prise en charge est aussi l'objet de débats. Certains estiment qu'un traitement antibiotique suffit, d'autres en proposent plusieurs. Une efficacité qui peut être améliorée par une pratique du sport modérée et une meilleure hygiène de vie. « *Oui, on guérit de la maladie de Lyme, assure le docteur Chirouze, mais on peut aussi en garder des séquelles comme pour d'autres maladies infectieuses.* »

Cerner Lyme est d'autant plus compliqué qu'il peut aussi y avoir des co-infections. Ainsi, le projet de l'INRA piloté par Muriel Vaysier-Taussat, chef du département santé animale à l'INRA, OHTICKS, vise à mieux connaître les agents pathogènes transmis par les tiques. Une soixantaine d'entre eux ont été identifiés. La plupart ne sont pas détectés par les tests actuels. Une étude pilote financée par l'ANR va permettre d'examiner une centaine de patients qui ont été piqués par une tique et sont séronégatifs. « *Elle permettra d'identifier quels sont les agents pathogènes autres que Borrelia impliqués dans des maladies à tiques en France et dans le cas de maladie de Lyme avérée, et si d'autres*

microbes que ceux connus pour être à l'origine de la maladie de Lyme sont cotransmis en même temps que Borrelia et pourraient être à l'origine de co-infections », précise Mme Vayssier-Taussat.

Des phénomènes de co-infection avaient déjà été observés en 2017 lors d'une collecte de 267 tiques *Ixodes ricinus* venant des Ardennes françaises, la moitié étaient porteuses d'agents pathogènes, avaient constaté l'INRA. « *Un autre agent infectieux pourrait expliquer des signes cliniques objectifs qui n'ont pas complètement disparu, comme de l'arthrite, une tenosynovite [inflammation de la gaine des tendons]...* », détaille Catherine Chirouze (CHRU de Besançon).

En attendant de nouvelles données, les incertitudes laissent la place à la polémique. « *Le texte de la HAS propose une lecture à plusieurs niveaux, et ce manque de clarté déboussole tout le monde, les patients ne sont pas sereins, les médecins non plus* », résume le docteur Chirouze. Faute de réponses claires, la défiance monte. Certaines associations multiplient les poursuites à l'encontre de l'Etat, des fabricants de tests, du Centre national de référence, à Strasbourg. L'association Le droit de guérir a indiqué qu'elle devrait déposer une plainte pour non-assistance à personne en danger dans les prochains jours auprès du pôle santé du parquet de Paris. Le même jour, sa pétition « Sauvez les malades du Lyme » approchait des 70 000 signatures.

Des plaintes ont également été déposées pour dénoncer des liens d'intérêts entre les laboratoires et les autorités sanitaires. *Science et avenir* avait évoqué le 20 décembre 2017 une plaquette publicitaire commune au CNR et au laboratoire Biomérieux qui fabrique le test Elisa. Interrogé, le professeur Jaulhac répond « *n'avoir aucun conflit d'intérêts avec aucun laboratoire* ». Cette plaquette a été rédigée par une équipe de plusieurs chercheurs, rappelle-t-il. « *Il n'a pas été, il n'est pas, et il ne sera jamais question pour ma part de participer à une quelconque action commerciale en faveur d'un laboratoire quel qu'il soit* », affirme-t-il.

Comme d'autres membres du groupe de travail, Eric Caumes indique être depuis des mois harcelé de mails ou autres cartes postales de menaces, telle cette carte de vœux « *Je vous souhaite une année de m... et une borreliose de Lyme* », relate-t-il.

Comment sortir de ces débats passionnés ? « *En développant la recherche* », résume Anne Colin. Par exemple, sur des tests plus fiables, en cherchant *Borrelia* ailleurs que dans le sang, où elle est peu présente. L'équipe du CNR de Strasbourg travaille sur un prélèvement de peau sur le patient. Autre voie, l'inféctiologue Louis Teulière, également cofondateur et président de la société biomédicale Phelix, coordonne une étude clinique auprès de 120 patients avec le Laboratoire de microbio-

logie de Leicester (Angleterre), pour comparer les tests Elisa et d'autres approches visant à rechercher des bactériophages. Côté traitements, « *une piste de recherche consiste à trouver des molécules bactéricides qui attaqueraient Borrelia, car celle-ci peut créer des biofilms qui sont résistants aux antibiotiques* », explique Alain Trautmann.

En attendant que ces travaux aboutissent, la prévention doit être une priorité. D'autant plus que seule 28 % de la population se sent bien informée, et que 35 % n'avait même jamais entendu parler de la maladie de Lyme, selon une enquête de Santé publique France publiée dans le *BEH* du 19 juin. Rappelons donc quelques règles avant de partir dans les bois, jardins et prairies où les tiques sont à l'affût : porter des vêtements longs et clairs, se couvrir (le cou, les chevilles...), utiliser des répulsifs homologués contre les tiques. S'examiner après chaque balade ou jardinage... Et enlever l'intrus le plus tôt possible, à l'aide d'un tire-tiques. Désinfecter une fois la tique enlevée. Surveiller si un érythème migrant apparaît durant le mois suivant. Dans ce cas, ou en cas de doute, consulter votre médecin.

Au total, 5 % à 10 % des tiques sont porteuses de la bactérie responsable de la maladie de Lyme. ●

Pascale Santi, *Le Monde* daté du 04.07.2018

POURQUOI CET ARTICLE ?

Deux situations faisant référence aux probabilités conditionnelles sont ici présentées.

On rencontre une tique au hasard en France. En posant T l'événement « la tique est porteuse » et B l'événement « la tique transmet la bactérie », on a : $0,05 \leq P(T) \leq 0,10$ et $0,03 \leq P_T(B) \leq 0,15$.

$$\text{Or } P(T \cap B) = P(T) \times P_T(B).$$

$$\text{Donc } 0,05 \times 0,03 \leq P(T) \times P_T(B) \leq 0,10 \times 0,15.$$

$$\text{Ainsi on a : } 0,0015 \leq P(T \cap B) \leq 0,015.$$

Par conséquent, la probabilité de rencontrer une tique porteuse et qui transmet la bactérie est comprise entre 0,15 % et 1,5 %.

On choisit une personne en France. En posant M l'événement « la personne est malade de Lyme » et E « le test Elisa est positif », on a d'après l'étude de Cook et Puri : $P(M \cap \bar{E}) \approx 0,4$ (les faux négatifs). Mais surtout la probabilité de l'événement $\bar{M} \cap E$ n'est pas nulle (les faux positifs). Le théorème de Bayes est utile pour évaluer la fiabilité d'un test clinique.

Lois à densité

Après avoir étudié dans le précédent chapitre les probabilités sur des cas discrets (des nombres particuliers), on va ici les considérer sur un intervalle (toutes les valeurs possibles entre deux nombres).

On verra ainsi comment déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire, mais aussi comment calculer ses paramètres : espérance, variance et écart type.

Qu'est-ce qu'une loi à densité sur un intervalle I ?

La fonction f est une fonction de densité sur l'intervalle $[a ; b]$ ($a < b$), si :

- la fonction f est continue sur $[a ; b]$;
- la fonction f est positive sur $[a ; b]$;
- $\int_a^b f(x) dx = 1$.

La variable aléatoire X suit la loi à densité (ou loi continue) de fonction de densité f , si $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$.

Remarque : $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$.

Qu'est-ce que l'espérance mathématique d'une variable aléatoire de densité ?

Soit X une variable aléatoire de densité f sur l'intervalle $[a ; b]$.

L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \int_a^b xf(x) dx$.

Loi uniforme

Définition : une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a ; b]$ ($a < b$), lorsqu'elle admet comme densité de probabilité la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{b-a}$ sur l'intervalle $[a ; b]$, avec $f(x) = 0$ en dehors de l'intervalle $[a ; b]$.

La représentation graphique d'une fonction f ainsi définie est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Espérance de la loi uniforme : si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a ; b]$, alors

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

Propriété : si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a ; b]$ ($a < b$), pour tout intervalle $[c ; d] \subset [a ; b]$, on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}.$$

Loi exponentielle

Définition : une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sur l'ensemble des réels, lorsqu'elle admet comme

densité de probabilité la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

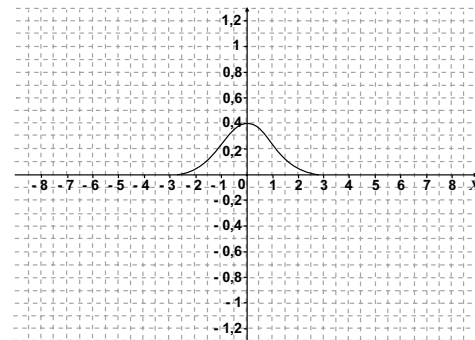
Pour tout $t > 0$, la probabilité de l'événement $\{X \leq t\}$ est donnée par

$$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Espérance de la loi exponentielle : si la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ , alors $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Loi normale centrée réduite

Définition : une variable aléatoire de densité f suit la loi normale centrée réduite, notée $N(0 ; 1)$, lorsque $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ sur \mathbb{R} .



Représentation graphique de f

MOTS CLÉS

FONCTION DE DENSITÉ (CAS GÉNÉRAL)

f est une fonction de densité sur l'intervalle $[a ; b]$ ($a < b$), si :

- f est continue sur $[a ; b]$;
- f est positive sur $[a ; b]$;

- $\int_a^b f(x) dx = 1$.

La variable aléatoire X suit la loi à densité (ou loi continue) de fonction de densité f , si

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

ESPÉRANCE (CAS GÉNÉRAL)

Soit X une variable aléatoire de densité f sur l'intervalle $[a ; b]$. L'espérance mathématique de X

est : $E(X) = \int_a^b xf(x) dx$.

FONCTION DE DENSITÉ (LOI UNIFORME)

La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a ; b]$ ($a < b$), lorsqu'elle admet comme densité de probabilité la fonction f définie

par : $f(x) = \frac{1}{b-a}$ sur $[a ; b]$ et

$f(x) = 0$ en dehors de $[a ; b]$.

ESPÉRANCE (LOI UNIFORME)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[a ; b]$. L'espérance mathématique de X

est $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

FONCTION DE DENSITÉ (LOI EXPONENTIELLE)

La variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sur \mathbb{R} , lorsqu'elle admet comme densité de probabilité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

ESPÉRANCE (LOI EXPONENTIELLE)

Soit X la variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. L'espérance mathématique de X est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

FONCTION DE DENSITÉ DE $N(0 ; 1)$

Une variable aléatoire de densité f suit la loi normale centrée réduite, notée $N(0 ; 1)$, lorsque

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

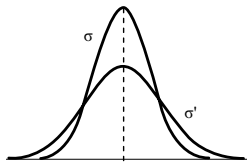
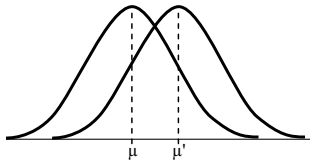
Espérance, variance et écart type de la loi $N(0; 1)$: si X suit la loi $N(0; 1)$, on a $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.

L'écart type est $\sqrt{V(X)} = 1$.

Valeurs remarquables : $P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95$;

$P(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99$.

Loi normale de paramètres μ et σ^2 : $N(\mu; \sigma^2)$



Définition : une variable aléatoire X suit la loi normale $N(\mu; \sigma^2)$ lorsque $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi $N(0; 1)$.

Influence des paramètres : la courbe est symétrique par rapport à la droite $x = \mu$, qui caractérise donc la tendance centrale. Quant à σ , il caractérise la dispersion de la distribution. Plus il est grand, plus la distribution est « étalée » de part et d'autre de μ . Les abscisses des points d'inflexion sont égales à $\mu - \sigma$ et $+\sigma$.

Espérance, variance et écart type : si X suit la loi $N(\mu; \sigma^2)$, on a $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$.

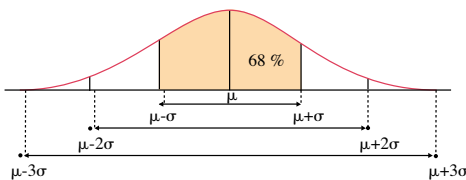
L'écart type est $\sqrt{V(X)} = \sigma$.

Les intervalles un, deux, trois sigmas :

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$ au centième près.

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$ au centième près.

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$ au millième près.



Exemples de calcul de probabilités à la calculatrice dans le cadre de la loi normale

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(100; 5^2)$.

● On calcule $P(93 \leq X \leq 103) \approx 0,64$ au centième près en utilisant les méthodes suivantes.

Avec une CASIO

Dans les menus « STAT », puis « DIST », puis « NORM », puis « ncd », entrer :

Normal	C.D.
Lower : 93	
Upper : 103	
σ : 5	
μ : 100	

Avec une T.I.

En utilisant le menu « DISTR », entrer :

normalcdf(93,103,	
100,5)	0.644991

● On cherche la valeur de x tel que $P(X \leq x) = 0,7$ en utilisant les méthodes suivantes.

Avec une CASIO

Dans les menus « STAT », puis « DIST », puis « NORM », puis « InvN », entrer :

Inverse Normal	
Trail : Left	
Area : 103	
σ : 5	
μ : 100	

$x \approx 102,6$ au dixième près.

Avec une T.I.

En utilisant le menu « DISTR », entrer :

invNorm(0,7,100,	
5)	102.622

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

• **Les sondages de l'élection présidentielle se copient-ils entre eux ?** p. 54-55
(Gary Dagorn, Laura Motet et Maxime Ferrer, *Le Monde* daté du 21.04.2017)

MOTS CLÉS

ESPÉRANCE DE $N(0; 1)$

Si la variable aléatoire X suit la loi $N(0; 1)$, $E(X) = 0$.

VARIANCE DE $N(0; 1)$

Si la variable aléatoire X suit la loi $N(0; 1)$, $V(X) = 1$.

ÉCART TYPE DE $N(0; 1)$

Si la variable aléatoire X suit la loi $N(0; 1)$, l'écart type de X est $\sqrt{V(X)} = 1$.

$U_{0,05}$

$P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95$

$U_{0,01}$

$P(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99$

LOI NORMALE $N(\mu; \sigma^2)$

La variable aléatoire X suit la loi normale $N(\mu; \sigma^2)$, lorsque la variable aléatoire $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi $N(0; 1)$.

ESPÉRANCE DE $N(\mu; \sigma^2)$

Si la variable aléatoire X suit la loi $N(\mu; \sigma^2)$, $E(X) = \mu$.

VARIANCE DE $N(\mu; \sigma^2)$

Si la variable aléatoire X suit la loi $N(\mu; \sigma^2)$, $V(X) = \sigma^2$.

ÉCART TYPE DE $N(\mu; \sigma^2)$

Si la variable aléatoire X suit la loi $N(\mu; \sigma^2)$, l'écart type de X est $\sqrt{V(X)} = \sigma$.

INTERVALLES $\sigma, 2\sigma$ ET 3σ

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$

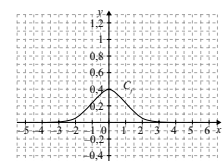
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

ZOOM SUR...

LA LOI $N(0; 1)$

La fonction de densité f d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale centrée réduite $N(0; 1)$

est : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ sur \mathbb{R} .



f est continue et f est paire.

Liban (mai 2013)

L'entreprise Fructidoux fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ». La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme. L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2 .

(Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.)

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1 . Elle est cependant moins rapide.

Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2 .

La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.

On prélève au hasard un petit pot dans la production totale.

On considère les événements :

- E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2 . » ;
- C : « Le petit pot est conforme. »

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. Calculer la probabilité de l'événement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1 . »
3. Déterminer la probabilité de l'événement C .
4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement E sachant que l'événement C est réalisé.

Partie B

1. On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1 , associe sa teneur en sucre.

On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart type $\sigma_1 = 0,006$.

Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

α	β	$P(\alpha \leq X \leq \beta)$
0,13	0,15	0,000 4
0,14	0,16	0,047 8
0,15	0,17	0,499 6
0,16	0,18	0,904 4
0,17	0,19	0,499 6
0,18	0,20	0,047 8
0,19	0,21	0,000 4

2. On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2 , associe sa teneur en sucre.

On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart type σ_2 .

On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à 0,99.

Soit Z la variable aléatoire définie par : $Z = \frac{Y - m_2}{\sigma_2}$.

β	$P(-\beta \leq Z \leq \beta)$
2,432 4	0,985
2,457 3	0,986
2,483 8	0,987
2,512 1	0,988
2,542 7	0,989
2,575 8	0,990
2,612 1	0,991
2,652 1	0,992
2,696 8	0,993

a) Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?

b) Déterminer, en fonction de σ_2 , l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle $[0,16 ; 0,18]$.

c) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2 . On pourra utiliser le tableau donné ci-contre, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart type 1.

La bonne méthode

Partie A

1. Traduire les données de l'exercice en probabilités et les placer dans l'arbre en commençant par le choix de la chaîne de fabrication.
2. Appliquer la formule des probabilités conditionnelles.
3. Appliquer la formule des probabilités totales en trouvant une partition de C .
4. Traduire la probabilité recherchée à l'aide des événements préalablement définis puis appliquer la formule des probabilités conditionnelles.

Partie B

1. Traduire la probabilité recherchée à l'aide de la variable aléatoire définie, puis utiliser le tableau donné.
2. a) Appliquer le cours sur la loi normale.
b) Déduire l'encadrement recherché à partir de l'encadrement donné.
- c) Chercher dans le tableau la valeur de β qui correspond à une probabilité de 0,99. Puis résoudre une équation pour obtenir σ_2 .

Sujet inédit

Une fabrique de desserts dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des pots de crème glacée.

La masse en grammes de crème glacée contenue dans chacun des pots peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 100 d'écart type 0,43.

Afin de contrôler le remplissage des pots, le responsable qualité souhaite disposer de certaines probabilités.

Le tableau ci-dessous présente le calcul, effectué à l'aide d'un tableur, des probabilités de quelques événements pour une loi normale de moyenne 100 et d'écart type 0,43.

a	$p(X \leq a)$
98	0,00000165
98,5	0,00024299
99	0,01002045
99,5	0,12245722
100	0,50000000
100,5	0,87754278
101	0,98997955
101,5	0,99975701
102	0,99999835

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

Pour les calculs de probabilités, on utilisera éventuellement le tableau précédent ou la calculatrice.

- 1. a)** Déterminer la probabilité de l'événement « $X > 99$ ».
- b)** Déterminer la probabilité de l'événement « $99 \leq X \leq 101$ ».

c) Le pot est jugé conforme lorsque la masse de crème glacée est comprise entre 99 grammes et 101 grammes.

Déterminer la probabilité pour qu'un pot prélevé aléatoirement soit non conforme.

2. Dans le cadre d'un fonctionnement correct de la chaîne de production, on admet que la proportion p de pots conformes dans la production est 98 %.

a) L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des pots conformes sur un échantillon de taille n est :

$$I = \left[p - 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

Déterminer les bornes de l'intervalle I pour un échantillon de taille 120.

b) On contrôle régulièrement la chaîne de production en prélevant des échantillons de 120 pots de manière aléatoire. Au cours d'un de ces contrôles, un technicien compte 113 pots conformes.

En utilisant l'intervalle de fluctuation précédent, prendra-t-on la décision d'effectuer des réglages sur la chaîne de production ?

La bonne méthode

- 1. a)** Il faut penser à utiliser l'événement complémentaire.
- b)** Pour tout a et b réels tels que $a < b$,
 $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$.
- c)** Il faut utiliser la question **1. b)**.
- 2. a)** Il faut remplacer p et n par leurs valeurs dans l'expression de I .
- b)** Il faut déterminer si 113 appartient ou non à l'intervalle trouvé à la question **2. a)**.

Sujet inédit

Un grossiste spécialisé dans le jardinage reçoit des sachets de graines d'aubergines « bio » (c'est-à-dire issues de l'agriculture biologique) en grande quantité. On s'intéresse à la masse d'un sachet.

La variable aléatoire qui, à chaque sachet, associe sa masse en grammes est notée Y .

On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart type 8.

- 1.** Calculer $P(Y \geq 104)$.

2. Un sachet dont la masse en grammes n'est pas dans l'intervalle $[104 ; 136]$ est rejeté. Calculer la probabilité qu'un sachet soit rejeté.

La bonne méthode

- 1.** Il faut se ramener à la loi normale centrée réduite.
- 2.** Pour tout a réel, $P(-a \leq Z \leq a) = 2P(Z \leq a) - 1$.

Les sondages de l'élection présidentielle se copient-ils entre eux ?

A quelques jours du premier tour, plusieurs statisticiens accusent les sondeurs français de s'inspirer des résultats de leurs concurrents. Un phénomène appelé le « herding ». Qu'en est-il ?

Brexit, Trump, la surprise Le Pen en 2002 : trois chocs pour l'opinion publique, trois occasions où les résultats ont déjoué les pronostics et nourri la défiance à l'égard des sondeurs. A quelques jours du premier tour de l'élection présidentielle, les sondeurs voient une nouvelle fois leurs estimations remises en cause. La critique arrive tout droit des Etats-Unis avec ce qu'ils appellent le « herding ».

Le *herding* (que l'on peut traduire par « suivisme » en français) désigne un phénomène que l'on peut observer lors d'une campagne électorale lorsque les sondeurs publient des résultats volontairement proches des autres sondages publiés par crainte d'apparaître dans l'erreur et d'être discrédités une fois les résultats connus.

Et c'est très exactement ce qui se passerait avec les sondages français selon le journaliste statisticien américain Nate Silver, qui avait correctement prédit les résultats de la présidentielle américaine en 2008 et 2012. Ce dernier s'inquiète ouvertement de la convergence globale des sondages français. Une analyse reprise dans la foulée, dans un article sur la partie blog de *The Economist* qui interroge : « Les sondeurs français trichent-ils ? » Les arguments de Nate Silver ont été également repris par un étudiant-chercheur assistant au MIT Media Lab, Léopold Mebazaa, qui tente de démontrer que la convergence des sondages est trop importante pour ne pas jeter un doute sur les méthodes des sondeurs.

Des méthodes différentes en France et aux Etats-Unis

Pour comprendre le débat qui est posé, il faut s'intéresser aux techniques de sondages pratiquées en France et aux Etats-Unis. Côté américain, c'est la méthode dite « probabiliste » qui est la plus répandue. Les sondeurs tirent au hasard un échantillon au sein de la population, puis en étudient les propriétés (intention de vote, opinion sur un sujet, etc.). Certains sondeurs opèrent ensuite des redressements sur les résultats pour essayer de coller au maximum à la structure de la population américaine.

Côté français, tous les sondeurs utilisent la méthode dite « non-probabiliste », à savoir la méthode des quotas : on crée un échantillon selon des variables (âge, sexe, profession, lieu d'habitation, c'est ce qu'on appelle des variables sociodémographiques) afin que celui-ci soit représentatif de la population étudiée (la population française par exemple). Si les personnes sont bien choisies au hasard, leurs caractéristiques ne le sont pas. Dans le cas précis des estimations des intentions de vote, deux autres variables agissent directement sur les résultats : le vote de la personne interrogée à la présidentielle de 2012 et aux dernières élections régionales. Ces variables servent à redresser les résultats obtenus pour que la structure de l'échantillon corresponde, en plus des caractéristiques sociodémographiques, à celle des résultats de ces deux élections.

La méthode de Nate Silver appliquée au cas français

Calquée sur la méthode de Nate Silver, la démonstration de Léopold Mebazaa est séduisante, mais la conclusion qu'elle amène et qu'il résume

dans un titre péremptoire – « Oui les sondages présidentiels sont caviardés » – s'avère moins subtile.

A partir d'un jeu de données rassemblant les sondages français sur les intentions de vote depuis début décembre 2016, l'étudiant-chercheur retourne les armes des sondeurs contre eux. Son postulat est en effet que les sondages, comme les intentions de vote d'une élection, sont distribués selon la « loi normale ». Pour faire simple, cette loi permet d'analyser un ensemble à partir d'une fraction de cet ensemble, en lui associant un niveau de confiance et des marges d'erreurs. Il existe trois paliers pour ce seuil de confiance : 68 %, 95 %, 99 %. Plus l'exigence est élevée, plus les marges d'erreurs sont importantes.

Exemple : un sondage basé sur un échantillon de mille personnes pourra prédire que des intentions de vote estimées à 20 % devraient in fine se situer entre 16,75 % et 23,25 % pour un niveau de confiance de 99 %, entre 17,5 % et 22,5 % avec 95 % de certitude ou encore entre 18,75 % et 21,25 % avec un intervalle de confiance de 68 %.

Avec la multiplication des sondages ces derniers mois, le chercheur dispose d'une « population » de sondages qu'il entend soumettre aux mêmes lois statistiques. Il propose donc de tester si les intentions de vote de chacun des quatre « gros » candidats (Marine Le Pen, Emmanuel Macron, Jean-Luc Mélenchon et François Fillon) correspondent effectivement aux principes de la loi normale.

En prenant un niveau de confiance de 68 % sa logique est simple : dans 68 % des cas les estimations des sondages devraient se situer dans l'intervalle de la marge d'erreur (plus ou moins 1,35 %), en dehors dans 32 % des cas. Ses tests concluent qu'un nombre anormal de sondages se situe en effet à l'intérieur de cet intervalle (en moyenne plus de 80 %). Et pour enfoncer le clou, il propose de démontrer une convergence des sondages après le 25 février (date clé selon lui, car elle correspond à des « gros changements de score », au ralliement de François Bayrou à Emmanuel Macron et se situe avant la mise en examen de François Fillon). Et, là encore, ses conclusions sont accablantes :

- La probabilité que les scores d'Emmanuel Macron aient été aussi réguliers ces six dernières semaines soit dû au hasard est de 0,001 %.
 - La probabilité que les scores de François Fillon aient été aussi réguliers ces six dernières semaines soit dû au hasard est de 0,0003 %.
 - La probabilité que les scores de Jean-Luc Mélenchon aient été aussi réguliers ces six dernières semaines soit dû au hasard est de 0,0006 %.
 - La probabilité que les chiffres de Marine Le Pen aient été aussi réguliers ces six dernières semaines soit dû au hasard est de 0,0000000002 %.
- (Extrait des conclusions de Léopold Mebazaa sur le site Medium.com.)

Une démonstration basée sur des hypothèses incertaines

Le choix de la date du 25 février peut poser question. Nous avons pris soin de réaliser les mêmes calculs que le chercheur, avec des dates allant de

mi-décembre à début avril. Il en ressort que ses conclusions auraient été tout aussi valides s'il avait supposé une convergence des résultats dès la mi-janvier ou courant mars. Ensuite, en calquant l'analyse de Nate Silver sur le cas français, Léopold Mebazaa semble omettre la méthodologie française (les quotas) évoquée plus haut.

« J'ai "l'intuition" – que j'espère pouvoir tester bientôt – que le mode de sélection par quotas et le redressement (qui ne sont en fait pas aléatoires) peuvent eux-mêmes conduire à une corrélation des erreurs d'échantillonnage entre les instituts, explique Antoine Rebecq, administrateur de l'Insee dont les données servent de référence aux instituts de sondages. Cela peut donner l'impression que les sondeurs se copient, car les variables utilisées pour créer et redresser leurs échantillons sont exactement les mêmes. »

Cette observation fait planer le doute sur l'analyse du chercheur du MIT. Ses conclusions basées sur des probabilités se fondent sur un test appelé le « *Khi-deux* ».

Antoine Rebecq, qui met en doute le *herding* dans un post publié le 20 avril sur un blog collaboratif, précise : « *Le test du Khi-deux est un test qui s'intéresse à la corrélation. Il est assez logique qu'il tombe sur une corrélation du fait de la méthode des quotas.* » Concrètement, ce test suppose une indépendance entre les variables. Avec la méthode des quotas, il y a donc fort à parier que les sondages français ne soient pas indépendants car tous soumis aux mêmes caractéristiques, ce qui invaliderait de facto le test réalisé.

« Cette hypothèse me paraît valable, reconnaît Léopold Mebazaa. Mais il y a deux choses que je ne m'explique pas. La première est qu'à l'issue des scrutins, les erreurs observées ont souvent été supérieures aux erreurs théoriques qui étaient présentées dans les sondages. La seconde, c'est qu'on observe systématiquement un redressement très sévère soixante jours avant l'élection. »

Des pratiques qui peuvent parfois poser question

Une source travaillant dans un institut de sondage nous a confirmé, sous couvert d'anonymat, qu'il pouvait exister des « *pressions sur les personnes en charge des enquêtes d'opinion, mais sans que ce soit systématique* ». Concernant le redressement des sondages sur les intentions de vote, une autre source précise que le sondeur « *essaie plusieurs redressements différents, (...) puis fait un choix complètement arbitraire entre ces redressements. Il se base sur ses intuitions, sur les sondages de ses petits camarades.* »

Parmi les sondeurs que nous avons contactés, François Kraus, directeur des études politique actualité au sein de l'IFOP, rejette l'idée que les sondeurs se copient entre eux.

« On ne regarde pas ce que font les autres sondeurs – nous ne sommes pas aveugles, certes, mais notre objectif est d'avoir l'estimation la plus juste. Le fait que les intentions de vote se rapprochent au fur et à mesure de la campagne signifie aussi que, progressivement, nous avons acquis plus d'expérience pour mesurer certains phénomènes nouveaux (comme le vote Macron). »

François Kraus n'hésite pas à retourner la rhétorique du chercheur du MIT contre lui : « *Si on [les instituts de sondage] voit tous la même chose, c'est qu'il se passe quelque chose dans l'opinion.* » Verdict dimanche soir.

Malgré la convergence des sondages, des inconnues subsistent

Au soir du premier tour, les Français ne sont pourtant pas à l'abri d'une surprise. Le 21 avril 2002, vers 19 h 30, David Pujadas annonce des « *surprises* ». Quelques minutes plus tard, les téléspectateurs apprennent la qualification au second tour de Jean-Marie Le Pen. « *Une telle*

sous-estimation du vote FN est moins à craindre aujourd'hui. Avec l'usage des questionnaires auto-administrés sur Internet, le biais de désirabilité sociale est considérablement réduit », explique François Kraus. En effet, en 2002, les instituts de sondages avaient effectué leurs entretiens par téléphone ou en face-à-face. Des méthodes qui entraînent une sous-déclaration des votes dits « *honteux* », le sondé craignant le jugement du sondeur.

Ce problème de mesure réglé, il n'en reste pas moins que la fiabilité des sondages peut aussi être questionnée au regard de l'échantillon de population choisi. Si les sondeurs présentent volontiers leur travail comme une « *photographie de l'opinion publique française à un instant T* », aucun n'inclut dans son sondage les intentions de vote des inscrits dans les DOM-TOM, alors que plus de 2,8 millions des inscrits y résidaient en 2012. Cette absence de 6,2 % du corps électoral pourrait être à l'origine de surprises au soir du premier tour. Elle s'explique en partie par la méthode des quotas utilisés par les sondeurs : l'enquête emploi de l'Insee, à partir de laquelle ils redressent leurs échantillons pour les rendre représentatifs, n'inclut pas les territoires d'outre-mer (TOM).

Une explication pourtant insuffisante. Depuis 2014, les départements d'outre-mer (DOM), à l'exception de Mayotte, ont intégré cette enquête. Interrogé sur le sujet, Kantar Public explique que si le nombre d'inscrits est important, la forte abstention dans les DOM-TOM explique leur faible poids sur le résultat final. Mis à part en Réunion (27,14 %), le taux d'abstention s'élevait effectivement autour de 50 % dans les DOM-TOM lors de l'élection présidentielle de 2012.

Une absence de mesure qui pourrait être à l'origine de surprises au soir des résultats, à l'heure où quatre candidats se disputent l'accès au second tour. Au 21 avril 2002, seules 194 600 voix séparaient Lionel Jospin de Jean-Marie Le Pen. Si l'outre-mer a jusqu'à présent relativement moins voté pour le Front national que la France métropolitaine, le soutien de l'ancien président de la Polynésie française autonome, Gaston Flosse, à Marine Le Pen pourrait apporter plusieurs dizaines de milliers de voix à la candidate.

En Polynésie française, les électeurs suivent traditionnellement les consignes de vote des principaux chefs de partis locaux. En 2012, Gaston Flosse avait accordé son soutien à Nicolas Sarkozy, qui avait recueilli plus de 45 % des voix dès le premier tour (contre 27,18 % dans toute la France). ●

Gary Dagorn, Laura Motet et Maxime Ferrer,
Le Monde daté du 21.04.2017

POURQUOI CET ARTICLE ?

On retrouve dans cet article ce qui est souvent appelé la règle des trois sigmas (on parle aussi de la règle 68-95-99,7). En effet, lorsque est une variable aléatoire continue qui suit une loi normale d'espérance et d'écart-type, alors on peut prouver que la probabilité que appartienne à l'intervalle est environ égale à 0,6827. Autrement dit, la proportion des résultats éloignés de la valeur moyenne d'au plus est d'environ 68,27 %. De la même manière, la proportion des résultats éloignés de la valeur moyenne d'au plus est d'environ 99,73 %. Dans les carnets de santé en France, on donne aux parents une courbe de référence concernant l'évolution de la masse et de la taille d'un enfant français moyen. D'autres courbes sont également présentes et elles illustrent la règle des trois sigmas. La courbe « la plus haute » représente un éloignement de trois fois l'écart-type par rapport à la valeur moyenne. Cela signifie qu'elle concernera uniquement environ 0,13 % des enfants. On calcule .

Échantillonnage

La presse présente très régulièrement des sondages accompagnés de pourcentages et de commentaires. Ces sondages sont-ils fiables ? Quelles notions sous-tendent-ils ?

Qu'est-ce qu'un intervalle de confiance, quel lien avec la fluctuation ?

Prenons le cas d'une population dont on veut connaître les intentions de vote, avant une élection. Il est de fait malaisé d'interroger l'ensemble des personnes concernées. On constitue alors un échantillon représentatif (le mot « représentatif » signifie que l'on va respecter les répartitions définies dans la population, comme, par exemple, le pourcentage d'hommes et de femmes, les tranches d'âge, etc.). On va ensuite étendre les résultats obtenus à partir de l'échantillon à toute la population.

L'expérience montre que, lorsque l'on choisit un autre échantillon représentatif, on obtient des résultats assez proches mais pas exactement les mêmes. Aussi, pour avoir une meilleure approximation du résultat, va-t-on donner un intervalle plutôt qu'un nombre. Si on reprend l'exemple de l'élection, supposons qu'à partir du sondage réalisé sur l'échantillon, un candidat obtienne 45 % des intentions de vote. À partir de ce résultat, dans quel intervalle se situent les intentions de vote de la population ?

Cet intervalle s'appelle « intervalle de confiance », afin de limiter les effets de la fluctuation d'échantillonnage.

Que signifie le terme « au seuil de 95 % de la fréquence » ?

Le pourcentage de 95 % détermine la marge d'erreur. Ici, le risque est de 5 %. La phrase « au seuil de 95 % en fréquence » signifie donc « avec une marge d'erreur inférieure à 5 % ». Le seuil de 5 % est le plus utilisé, mais on peut très bien définir un autre seuil.

Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n; p)$ avec $0 < p < 1$, $n \geq 30$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$.

On appelle **intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence** l'intervalle :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Contrairement à la fréquence f de l'intervalle de confiance, la proportion p est ici déjà connue.

On utilise la **loi binomiale** $B(n; p)$ car on renouvelle n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p .

Intervalle de confiance

Il s'agit de savoir comment estimer la proportion p d'individus d'une population ayant une propriété, à partir de la fréquence f observée sur un échantillon : on utilise un intervalle de confiance.

Définition : en utilisant les notations du point précédent, on appelle **intervalle de confiance de la proportion p avec un niveau de confiance de 95 %**, l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ où n est la taille de l'échantillon.

Méthode : on considère une population et un échantillon de taille n de cette population. À partir de l'échantillon, on calcule la fréquence f des individus ayant une propriété. La proportion p des individus de la population ayant la propriété appartient à l'intervalle de confiance, avec un niveau de confiance de 95 %, qui est : $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

- Avec la méthode française, la marge d'erreur ne peut pas être calculée mathématiquement p. 58 (Pierre Le Hir, *Le Monde* daté du 17.03.2002)

MOTS CLÉS

ÉCHANTILLON

En statistique, la population est l'ensemble sur lequel on étudie une série statistique. Un échantillon est une partie (un sous-ensemble) de la population.

FRÉQUENCE

En statistique, la fréquence d'une valeur est le quotient :

$$\frac{\text{effectif de la valeur}}{\text{taille de la population}}$$

On l'exprime sous la forme d'un pourcentage ou d'un nombre décimal.

SIMULATION

• Simuler une expérience aléatoire consiste à produire une liste de n résultats (à l'aide de la touche RANDOM de la calculatrice par exemple) que l'on peut assimiler (ou faire correspondre) à n résultats de l'expérience. On a ainsi produit un échantillon de taille n de l'expérience.

• Entre deux simulations, ou entre deux échantillons, les distributions de fréquences varient, c'est ce que l'on appelle la fluctuation d'échantillonnage.

INTERVALLE DE FLUCTUATION

Pour une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B(n; p)$ avec $0 < p < 1$, $n \geq 30$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$, on appelle intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence l'intervalle :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

INTERVALLE DE CONFIANCE

• Si f est la fréquence obtenue avec un échantillon de taille n , un intervalle de confiance à un niveau de confiance de 0,95 est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

• Pour un échantillon de taille n , l'amplitude de cet intervalle de confiance est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

Amérique du Nord (mai 2013)

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes.

Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes.

Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non commercialisable ; un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche. (Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.)



Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400
$P(X \leq x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5

x	405	410	415	420
$P(X \leq x)$	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $P(390 \leq X \leq 410)$.

2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.

3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ .

Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? (On arrondira le résultat au dixième.)

On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart type 1, on a $P(Z \leq -1,751) \approx 0,040$.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.

Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.

2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables. Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1., peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

La bonne méthode

Partie A

1. Utiliser le tableau et le fait que si X est une variable aléatoire suivant une loi continue :

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a).$$

2. Traduire à l'aide d'une variable aléatoire et d'une probabilité le fait qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.

3. Traduire l'énoncé à l'aide d'une variable aléatoire et d'une probabilité, puis centrer et réduire. Utiliser la valeur donnée dans l'énoncé.

Partie B

1. Utiliser les données de l'énoncé pour déterminer les bornes de l'intervalle de fluctuation.

2. Calculer la fréquence observable de l'échantillon et vérifier si elle appartient ou non à l'intervalle de fluctuation précédemment déterminé.

Avec la méthode française, la marge d'erreur ne peut pas être calculée mathématiquement

Au deuxième tour de l'élection présidentielle, 2 % à 3 % sépareront Lionel Jospin et Jacques Chirac, selon les derniers sondages. Devant un score aussi serré, la prudence est de rigueur, car l'écart entre les deux candidats est inférieur aux marges d'erreur inhérentes à ces estimations. Des marges qui ne sont au demeurant que putatives, aucune méthode ne permettant de les calculer de façon scientifique. Les étudiants en statistiques connaissent pourtant bien la loi de Gauss, dite loi normale, illustrée par une courbe en cloche : celle-ci représente la manière dont se distribue de façon symétrique, autour d'une moyenne, une grandeur dont les variations sont régies par un très grand nombre de facteurs indépendants. Cette loi s'applique parfaitement aux sondages réalisés selon la méthode aléatoire en vigueur aux États-Unis notamment : avec ce système, les personnes interrogées sont choisies par tirage au sort. Les tables de Gauss établissent alors que pour un échantillon de 1 000 sondés, la marge d'erreur, appelée « intervalle de confiance », est au maximum de 3,2 %, dans un sens ou dans l'autre. Elle est d'autant plus élevée que le résultat est proche de 50 % – ce qui est le cas pour le duel annoncé Chirac-Jospin – et que l'échantillon est plus réduit. Avec un panel de 500 sondés seulement, elle peut atteindre 4,5 %, en plus ou en moins.

En France, la méthode de sondage aléatoire n'est quasiment pas utilisée. Pour les enquêtes d'opinion, les instituts ont recours à la technique des quotas pour constituer un échantillon, généralement de 1 000 personnes, représentatif de la composition (sexe, âge, catégorie socioprofessionnelle, type de commune, région...) de la population. Or « avec la méthode des quotas, il n'existe pas de loi mathématique permettant de déterminer la marge d'erreur d'un sondage », explique Jean-François Doridot, directeur du département opinion d'Ipsos. En pratique, toutefois, « on considère que la marge d'erreur des sondages par quotas est égale, voire inférieure à celle des sondages aléatoires ». Les instituts extrapolent donc, sans pouvoir les vérifier, les valeurs données par la loi de Gauss. Encore faut-il que l'échantillon constitué par le système des quotas reflète fidèlement les caractéristiques de l'ensemble de la population. Depuis quelques semaines, les instituts disposent de toutes les données du recensement de 1999, ce qui leur permet d'affiner leur procédure. Mais, en théorie, des biais sont toujours possibles : la difficulté d'accès à certains quartiers, éloignés ou « sensibles », peut conduire les enquêteurs à les laisser de côté ; de même, des professions aux horaires atypiques risquent d'être négligées. Pour éviter ces travers, la plupart des sondages sont aujourd'hui réalisés, en France, par téléphone. Ce qui « permet d'assurer une plus grande dispersion géographique de l'échantillon », souligne Ipsos, en même temps que de « réduire les risques de "bidonnage" », le travail des enquêteurs étant plus facile à contrôler.

POURQUOI CET ARTICLE ?

Cet article traite **des sondages et de leurs marges d'erreur**.

Comme chacun sait, le duel Jospin-Chirac n'a justement jamais eu lieu le 21 avril 2002 même s'il avait été annoncé par les sondages.

Les marges d'erreur sont calculées à l'aide de l'intervalle de confiance : on teste la fréquence des votes pour un candidat sur un échantillon et on peut ensuite donner un encadrement de cette fréquence dans les autres échantillons (à un niveau de confiance de 95 %) à l'aide de cet intervalle.

Par exemple, ici lorsque $n = 1\ 000$, si la fréquence de vote pour un candidat est f sur un échantillon, l'intervalle de

confiance sera $[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$. La marge d'erreur sera donc de $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0,032 \approx 3,2\%$ (dans un sens ou dans l'autre).

Si l'échantillon est de taille $n = 500$, la marge d'erreur sera donc

de $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{500}} \approx 0,045 \approx 4,5\%$.

L'article précise que les sondages n'utilisent plus des échantillons choisis strictement au hasard comme en mathématiques, mais la méthode des quotas où l'échantillon est représentatif de la composition de la population.

La marge d'erreur des sondages utilisant la méthode des quotas est supposée être plus fiable que celle utilisant les sondages aléatoires, ils sont donc censés être plus précis.

Reste encore le problème des biais affectant, non pas l'échantillon, mais les réponses des sondés. Il est ainsi établi que les abstentionnistes répugnent souvent à avouer qu'ils n'ont pas l'intention de voter. Les instituts peuvent alors utiliser des « filtres » et ne retenir que les opinions des électeurs « tout à fait certains » d'aller voter. Il est bien connu aussi que les personnes ayant un niveau d'études élevé répondent plus volontiers que les autres aux sondages, ou que les sympathisants des partis extrêmes hésitent à afficher leurs opinions. D'où les « redressements » effectués à partir de la reconstitution des votes antérieurs. « *Le problème*, indique Jean-François Doridot, est que les gens oublient souvent leurs votes passés et les reconstituent en fonction de leurs choix présents. » Près de 15 % des sondés affirment aujourd'hui, en toute bonne foi, avoir apporté aux élections législatives de 1997 leurs suffrages à des candidats écologistes, alors que ceux-ci avaient totalisé un score bien inférieur. ●

Pierre Le Hir, *Le Monde* daté du 17.03.2002

ALGORITHMIQUE / LOGIQUE

n

\in

x^2

Σ

Algorithmique

Un algorithme est la décomposition d'une action en instructions élémentaires. L'énoncé en français doit être traduit en langage « machine » pour effectuer un traitement sur une calculatrice ou un ordinateur.

Qu'est-ce qu'un algorithme ?

Un algorithme est une liste d'instructions à suivre pas à pas, qui permettent d'obtenir des résultats à partir de données.

Un algorithme est donc caractérisé par trois blocs : les données, le traitement et les résultats.

Quelles sont les étapes pour écrire un programme informatique ?

Il y a trois étapes principales : analyser le problème posé ; écrire un algorithme ne dépendant pas d'un langage ; traduire l'algorithme dans un langage de programmation.

Quelles sont les instructions élémentaires à connaître ?

Il s'agit essentiellement des instructions relatives aux variables : entrées, sorties et affectations.

Les entrées : ces instructions jouent un double rôle ; créer la variable et lui affecter une valeur.

On les note : Saisir A ; Demander A ; Lire A ; « $A =$ » ; Input A ...

Les sorties : ces instructions permettent d'afficher un résultat. On les note : Afficher (A) ; Disp A ...

Les affectations : ces instructions permettent l'attribution d'une valeur (ou d'un texte...) à une variable.

Il existe plusieurs procédés : littéral « A prend la valeur $A + 1$ » ; symbolique « $A : = A + 1$ » ou encore « $A \leftarrow A + 1$ ».

Quels sont les différents types de données ?

Il existe trois principales catégories de données : les nombres (entiers, décimaux, réels) ; les caractères et chaînes de caractères ; les tableaux contenant des nombres, des caractères ou des chaînes de caractères.

EXEMPLES

BOUCLE « TANT QUE »

Entrées

Saisir a (réel strictement positif)
Saisir q (réel strictement compris entre 0 et 1)

Initialisation

n prend la valeur 0

Traitement

Tant que $q^n \geq a$
 n prend la valeur $n + 1$
Fin de tant que

Sortie

Afficher n

BOUCLE « POUR I VARIANT DE 1 À N »

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

L'algorithme suivant permet de calculer les valeurs u_n .

Entrées

Saisir n (entier strictement positif)

Initialisation

i prend la valeur 1
 u prend la valeur 0

Qu'est-ce qu'un itérateur ?

Un itérateur est une variable entière qui permet de pouvoir répéter plusieurs fois la même suite d'instructions, on dit aussi compteur.

Pour faire le lien avec les mathématiques, on peut dire que l'itérateur joue le même rôle que l'indice pour les suites.

Qu'est-ce qu'une boucle ?

La répétition de la même suite d'instructions un certain nombre de fois s'appelle une boucle ou une structure itérative. La question importante est « comment arrêter la boucle » ?

En fait, il y a deux méthodes à choisir en fonction du problème : soit on connaît un test d'arrêt, soit on connaît le nombre de fois que doit s'effectuer la répétition.

Lorsque l'on connaît le nombre de répétitions on utilise la boucle : Pour...FinPour.

Lorsque l'on connaît un test d'arrêt (*condition*) on peut utiliser deux boucles : Répéter... Jusqu'à *condition* ou Tant que *condition*... FinTantque.

La structure alternative : « si...alors...sinon... »

La structure est définie par :

Si *condition* alors

Suite d'instructions 1

Sinon

Suite d'instructions 2

FinSi

DEUX ARTICLES DU MONDE À CONSULTER

- **Un nouvel algorithme fait avancer les moutons** p. 63

(David Larousserie, *Le Monde* daté du 17.07.2019)

- **Les algorithmes devraient-ils livrer leurs secrets ?** p. 63-64

(Étienne Ghys, *Le Monde* daté du 18.04.2018)

Traitement

Pour i variant de 1 à n
 u prend la valeur $u + \frac{1}{i}$
Fin Pour

Sortie

Afficher u

BOUCLE « SI ... ALORS ... SINON ... »

Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme ci-dessous, la variable aléatoire X prenant la valeur C affichée suit

la loi binomiale $B\left(9; \frac{2}{7}\right)$.

Initialisation

A prend la valeur 0
 C prend la valeur 0

Traitement

Répéter 9 fois
 A prend une valeur aléatoire entre 1 et 7

Si $A > 5$ alors

C prend la valeur $C + 1$

Fin Si

Fin Répéter

Sortie

Afficher C

Éléments du raisonnement mathématique

La logique étudie la formulation des raisonnements. C'est une branche des mathématiques, au même titre que l'algèbre ou la géométrie.

Quelle est la différence entre les quantificateurs « Quel que soit » et « Il existe » ?

L'égalité $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$ est vraie quel que soit le nombre réel x . C'est-à-dire qu'en remplaçant x par n'importe quel nombre réel dans le membre de gauche et dans le membre de droite, on obtient le même résultat. Pour le prouver, on développe le membre de gauche. « Quel que soit » est un **quantificateur universel**.

L'égalité $x^2 = 2x$ n'est pas vraie pour $x = 4$, mais elle est vraie pour $x = 2$. On peut donc affirmer qu'il existe un nombre réel x tel que l'égalité soit vraie.

« Il existe » est un **quantificateur existentiel**.

Ces quantificateurs sont souvent sous-entendus dans le langage courant.

Quelle est la différence entre « condition nécessaire » et « condition suffisante » ?

Dans la déduction « Si le quadrilatère est un rectangle alors il possède deux angles droits », la proposition « il possède deux angles droits » (Q) est une condition nécessaire pour la proposition « le quadrilatère est un rectangle ».

Elle n'est pas suffisante car un quadrilatère qui a deux angles droits peut être seulement un trapèze rectangle.

Pour que la condition soit suffisante il faut, par exemple, la proposition « il possède quatre angles droits ».

Comment distinguer « proposition réciproque » et « contraposée » ?

La proposition « Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » permet de calculer la mesure d'un côté d'un triangle rectangle connaissant la mesure des deux autres.

Sa réciproque « Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est un triangle rectangle en A » fournit un outil pour prouver qu'un triangle est rectangle.

Sa contraposée « Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors ABC n'est pas un triangle rectangle en A » permet d'établir, par un calcul, qu'un triangle n'est pas rectangle.

L'énoncé réciproque de la propriété « Si P alors Q » est « Si Q alors P ». Sa contraposée est « Si non Q alors non P ».

Lorsque l'énoncé direct et l'énoncé réciproque sont vrais, on dit que les propositions sont équivalentes.

Comment infirmer à l'aide d'un contre-exemple ?

L'énoncé « Pour entier naturel n on a $(n + 2)^2 = n^2 + 4$ » est faux. On peut le prouver en remplaçant n par 1 :

$$(1 + 2)^2 = 3^2 = 9 \text{ et } 1^2 + 4 = 5.$$

Pour montrer qu'une propriété n'est pas toujours vraie, on montre à l'aide d'un contre-exemple qu'elle est fautive dans l'un des cas.

Qu'est-ce qu'un raisonnement par l'absurde ?

La négation de la proposition P « le nombre n est impair » est la proposition non P « le nombre n est pair ».

Pour établir qu'un nombre est impair, on peut raisonner par l'absurde en montrant qu'il est impossible que n soit divisible par 2.

Plus généralement, pour montrer qu'une proposition P est fautive, on peut prouver que supposer non P vraie conduit à une impossibilité.

MOTS CLÉS

CONDITION

Lorsqu'une proposition P implique une proposition Q , on dit que :

- P est une condition suffisante pour Q s'il suffit que P soit vraie pour que Q le soit ;
- P est une condition nécessaire pour Q s'il faut que P soit vraie pour que Q le soit.

IMPLICATION

Dire que la proposition P implique la proposition Q signifie que si P est vraie alors Q est vraie ou que Q est la conséquence de P .

PROPRIÉTÉ RÉCIPROQUE

Soit P et Q deux propositions, la réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$.

CONTRAPOSÉE

La contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$.

ÉQUIVALENCE

- On dit que deux propositions P et Q sont équivalentes lorsque P implique Q et Q implique P .
- On dit aussi que Q (respectivement P) est une condition néces-

saire et suffisante pour P (respectivement Q), ou que P est vraie si et seulement si Q est vraie.

DISJONCTION DES CAS

Pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tout élément d'un ensemble E , on peut démontrer que cette propriété est vraie pour les éléments de sous-ensembles disjoints de E , dont la réunion est E : on a raisonné par disjonction des cas.

CONTRE-EXEMPLE

Pour prouver qu'une propriété est fautive, il suffit d'exhiber un seul élément pour lequel cette propriété n'est pas vraie. On dit alors qu'on a démontré que la propriété est fautive en donnant un contre-exemple. Un contre-exemple suffit pour prouver qu'un énoncé est faux.

CONJECTURE

Une conjecture est une propriété suggérée par l'intuition ou par l'observation d'exemples, mais qui n'est pas encore démontrée.

Amérique du Nord (mai 2013)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n : Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$ Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b) Que permet de calculer cet algorithme ?

c) Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n .

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,414 2	1,957 1	1,998 6	1,999 9	1,999 9

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 2$.

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n , puis de u_n en fonction de n .

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

d) Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

La bonne méthode

1. a) Faites fonctionner l'algorithme par étapes successives jusqu'à $n = 3$.

b) Généraliser le cas précédent.

c) Étudiez le signe, les variations et l'évolution des valeurs de u_n données.

2. a) La démonstration par récurrence est facilitée en étudiant les variations de la fonction f qui vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$

b) Utilisez à nouveau la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

c) Appliquez un théorème de convergence.

3. a) Montrez que $v_{n+1} - v_n$ est constant.

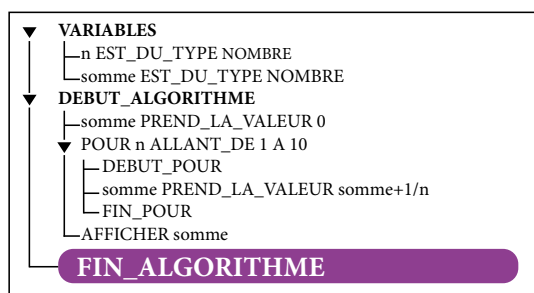
b) Utilisez la formule du cours pour exprimer v_n en fonction de n , puis en déduire l'expression de u_n .

c) Tenir compte du fait que $0 < \frac{1}{2} < 1$.

d) Mettre en place une boucle « Tant que » adaptée.

Sujet inédit

On considère l'algorithme ci-contre :



À quel calcul correspond la valeur de la variable « somme » qui est affichée à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

a) L'inverse des entiers de la somme de 1 à 10.

b) La somme des inverses des entiers de 1 à 10.

c) L'inverse de 10.

La bonne méthode

À chaque étape, pour n entier compris entre 1 et n , on rajoute la valeur « $\frac{1}{n}$ » à la variable « somme ».

Un nouvel algorithme fait avancer les moutons

Un logiciel permet de faire se mouvoir des troupeaux virtuels de manière réaliste avec très peu de données.

En France, quand on n'a pas de données, on a des idées. C'est ce que vient d'appliquer un doctorant du laboratoire d'informatique de l'Ecole polytechnique, Pierre Ecomier-Nocca, pour animer des troupeaux d'animaux de façon réaliste. Jusque-là, il fallait pour y parvenir énormément de vidéos de déplacements en appliquant des méthodes d'apprentissage machine. La technique présentée le 1^{er} juillet à la Conférence internationale sur l'animation et les agents sociaux est plus parcimonieuse.

On choisit une photographie d'un troupeau comme point de départ. Puis une seconde comme point d'arrivée, avec éventuellement un nombre différent d'animaux et en provenance d'une autre source. Enfin, on trace sur un paysage virtuel le chemin que la troupe doit prendre, y compris avec des obstacles. Alors, en quelques secondes, la meute se met en branle en les évitant. Le « dessinateur » peut ajouter d'autres images intermédiaires dont la simulation tiendra compte. « *Cela donne plus de libertés créatrices à un artiste* », note M. Ecomier-Nocca, dont la thèse est dirigée par Pooran Memari et Marie-Paule Cani.

La première étape est une analyse des photos de référence, qui transforme les individus en petite ellipse allongée et fournit la densité et la position des animaux. Elle permet aussi de calculer un paramètre, dit « descripteur », qu'il s'agit de conserver durant la simulation, comme le nombre de voisins en fonction de la distance.

Mouvement naturel

Une seconde étape apparie au mieux les individus présents dans les deux images en les superposant. Outre que l'éventuel animal de tête est identifié, une fonction de déformation qui assure au mieux le passage d'une image à l'autre est calculée. « *Cela définit comme une laisse sur laquelle on va tirer pour passer de la première image à la dernière* », résume le chercheur, qui s'est associé à Julien Pettré à l'Inria de Rennes.

POURQUOI CET ARTICLE ?

L'algorithmique manipule des variables. Lors de l'exécution d'un algorithme, une valeur va être affectée à une variable, puis cette valeur pourra être modifiée un certain nombre de fois. La position d'un mouton est une variable comme une autre, on lui affecte un couple de nombres et ces derniers vont évoluer et ainsi faire avancer le mouton. En fait, la position et le mouvement d'un mouton sont sûrement paramétrés par une très grande quantité de variables.

Une image numérique est composée de pixels, à chaque pixel on attribue une couleur à l'aide, par exemple, du codage RVB (rouge, vert, bleu). Selon la définition de l'image (nombre total de pixels), un mouton est composé de quelques pixels à plusieurs milliers. La rédaction de l'algorithme doit alors être réfléchie afin de ne pas avoir à renseigner les couleurs des pixels une par une, car une vidéo d'une minute est composée d'environ 1 500 images.

Mais ce n'est pas tout. Ce seul tirage par la laisse forcerait trop les animaux dont le mouvement n'aurait rien de naturel. Les chercheurs recourent donc en plus à des méthodes dites « d'agents autonomes », qui font que chaque individu obéit, pour avancer, à des lois simples comme rester à une certaine distance de son voisin ou garder un cap... La méthode, née à la fin des années 1980, rend bien compte des envolées de nuées d'oiseaux par exemple. Mais si elle est appliquée seule, ce qui est souvent le cas au cinéma, elle donne des animations trop uniformes. Ici, la « laisse », et surtout le descripteur mathématique de contrainte, rendent possible plus de fantaisie. Les animaux peuvent circuler en petits groupes ou bien alignés, ou encore à la queue leu leu. « *Il n'y a que pour les configurations rigides, comme une armée en ordre de marche, que ce n'est pas adapté* », constate M. Ecomier-Nocca, qui envisage la suite : permettre aux animaux de sauter, comme des kangourous, ou modéliser des configurations plus « fluides », comme les essaims. Mais pour cela il ne serait pas contre plus de données... ●

David Larousserie, *Le Monde* daté du 17.07.2019

Les algorithmes devraient-ils livrer leurs secrets ?

Ces derniers temps, on voit fleurir le mot algorithme un peu partout dans la presse, souvent avec des orthographes fantaisistes. Son étymologie est un mélange intéressant. « Algo » vient d'Al-Khwarizmi, le nom arabe d'un mathématicien qui travaillait à Bagdad au IX^e siècle. « Rithme » vient quant à lui du grec *arithmos*

– « nombre » –, qu'on retrouve bien sûr dans « arithmétique ». Il n'a pas fallu attendre l'intelligence artificielle pour qu'on invente des algorithmes, souvent sans le savoir.

Un algorithme n'est rien d'autre qu'une liste d'instructions destinées à réaliser une opération. Cela peut être par exemple une

recette de cuisine qui permet de transformer des ingrédients en un plat savoureux, ou la notice de montage d'une étagère suédoise. L'addition qu'on apprend à l'école primaire est un autre exemple. Quand je calcule $38 + 14$, je chantonne « 8 et 4 font 12, je pose 2 et je retiens 1 », etc. : j'applique un algorithme qui me donne à coup sûr la réponse 52.

On parle beaucoup en ce moment de l'algorithme « Parcoursup », qui remplace « APB » (Admission post bac). Les bacheliers se portent candidats dans un certain nombre de formations universitaires qui affichent leurs fameux « attendus ». Comment faire pour décider des affectations des étudiants ? La question n'est pas facile et il y a certainement beaucoup de méthodes possibles. Prenez l'exemple de deux employeurs, A et B, qui veulent recruter

deux personnes, 1 et 2. Supposez que A préfère 1 et B préfère 2 mais que 1 préférerait travailler pour B et 2 pour A. Faut-il satisfaire les employeurs ou les employés ? S'il y a déjà un problème pour deux personnes, on peut concevoir la complexité pour 900 000 étudiants. L'algorithme Parcoursup va-t-il, par exemple, privilégier les étudiants ou les universités ?

Noms inappropriés

Le problème des « mariages stables » est proche de celui des affectations d'étudiants. Imaginez un certain nombre de filles et un nombre égal de garçons qui veulent se marier. Chaque fille a ses préférences parmi les garçons et chaque garçon a ses préférences parmi les filles. Comment les marier de façon « stable » ? Les informaticiens entendent par là qu'il faut éviter qu'un homme et une femme non mariés ensemble se préfèrent mutuellement à leurs conjoints car cela entraînerait un divorce. Gale et Shapeley ont trouvé une solution simple et efficace à ce problème en 1962 (bien expliquée sur Wikipédia par exemple). Il est regrettable que cet « algorithme des mariages » porte un nom aussi stupide, car personne ne souhaite évidemment l'utiliser pour de véritables mariages. Ce n'est pas un cas isolé et d'autres algorithmes très sérieux portent des noms inappropriés qui ne permettent pas de comprendre leurs véritables usages.

Quelle est la différence entre Parcoursup et APB ? On peut penser que les principes généraux sont très proches de l'algorithme des mariages, car il s'agit au fond de marier des étudiants avec des universités, mais qu'en est-il des détails ? Dans Parcoursup, les étudiants ne classent pas leurs vœux et les établissements classent en revanche leurs candidats en fonction de leurs attendus, en utilisant des « algorithmes locaux » dont on ne sait pas grand-chose mais qu'on aimerait connaître.

Nous nous résignons souvent à utiliser des algorithmes dont le fonctionnement contient des secrets de fabrication, comme Google. En revanche, les détails des algorithmes de l'administration devraient être librement accessibles à tous. Les étudiants n'ont pas le choix du logiciel qui détermine leur avenir : ils ont droit à la transparence. [...] ●

Étienne Ghys, *Le Monde* daté du 18.04.2018

POURQUOI CET ARTICLE ?

Avec APB, le jour de la publication des résultats les élèves obtenaient une affectation unique parmi leurs vœux ordonnés initialement. L'algorithme était donc exécuté une fois.

Avec Parcoursup, au premier jour de la publication les élèves reçoivent des OUI, OUI SI, NON et EN ATTENTE. Un élève ne pouvant garder qu'un seul OUI pendant un temps donné, les résultats EN ATTENTE des élèves évoluent chaque jour. L'algorithme est donc exécuté chaque jour.

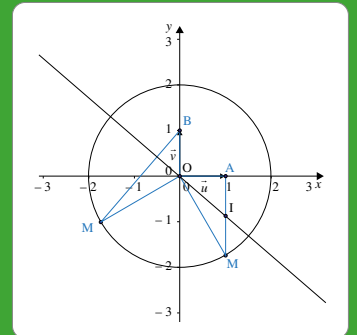
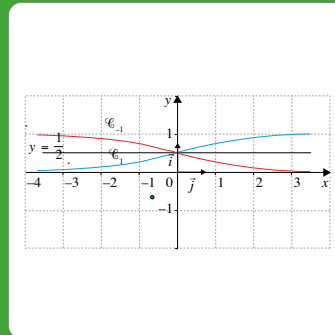
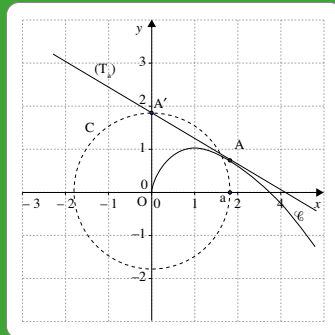
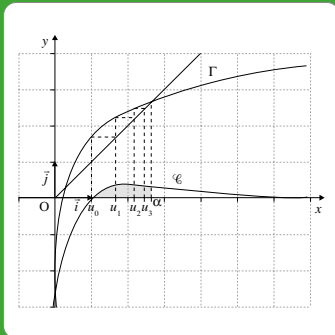
L'algorithme complet de Parcoursup est disponible pour le public depuis mai 2018 en langage Java. Voici un extrait du fichier `VoeuClasse.java` qui présente les quatre types d'élèves :

```
public enum TypeCandidat {
    BoursierResident,
    BoursierNonResident,
    NonBoursierResident,
    NonBoursierNonResident
};
```

Les filières n'ont pas encore toutes révélé leur algorithme local. La filière nationale STAPS a récemment publié le sien. Il prend en compte : les moyennes de certaines matières (60 points), les compétences sportives (30 points), les compétences d'encadrement civique et citoyenne (30 points) et la fiche avenir (30 points). Les postulants sont donc notés sur 150 et sont classés dans l'ordre croissant. L'algorithme de Parcoursup reçoit le classement et le modifie si besoin en imposant ses conditions concernant les résidents et les boursiers.

Certaines entreprises utilisent déjà des algorithmes de « recrutement prédictif » capable de déchiffrer un CV afin de recruter le meilleur candidat possible en un temps record.

CORRIGÉS DES EXERCICES



Suites p. 8

Corrigé Métropole (juin 2013)

1. a) On remplace n par 0 dans la relation de récurrence de l'énoncé et on obtient :

$$u_1 = \frac{2}{3} \times u_0 + \frac{1}{3} \times 0 + 1 = \frac{7}{3} \approx 2,33.$$

De même :

$$u_2 = \frac{2}{3} \times \frac{7}{3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{26}{9} \approx 2,89$$

$$u_3 = \frac{2}{3} \times \frac{26}{9} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{97}{27} \approx 3,59$$

$$u_4 = \frac{2}{3} \times \frac{97}{27} + \frac{3}{3} + 1 = \frac{356}{81} \approx 4,40.$$

b) La suite semble être croissante.

2. a) On veut montrer par récurrence, pour tout entier naturel n , la propriété $P_n : u_n \leq n + 3$.

Initialisation : puisque $u_0 = 2$ et $0 + 3 = 3$, P_0 est bien vraie.

Hérédité : pour un entier naturel k donné, on suppose la propriété P_k vraie.

$$\text{On a } u_{k+1} = \frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1.$$

Par hypothèse de récurrence : $u_k \leq k + 3$, d'où :

$$\frac{2}{3}u_k \leq \frac{2}{3}k + 2$$

$$\frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1 \leq \frac{2}{3}k + 2 + \frac{1}{3}k + 1.$$

Et finalement, $u_{k+1} \leq k + 3 \leq k + 4$.

La propriété P_{k+1} est donc vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel

n , on a bien $u_n \leq n + 3$.

$$\mathbf{b)} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{3}{3}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3} \times (-u_n + n + 3)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3} \times (n + 3 - u_n)$$

c) Pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq n + 3$, soit $n + 3 - u_n \geq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est bien croissante.

3. a) Exprimons, pour un entier n naturel quelconque, v_{n+1} en fonction de u_n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1)$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n - n).$$

D'où $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$. Ceci prouve que la suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.

b) D'après le cours on en déduit que : $v_n = v_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Puisque $v_n = u_n - n$, on en déduit que $u_n = v_n + n$ pour tout entier naturel n , et on aboutit à l'expression demandée : $u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$, pour tout entier naturel n .

c) On a $-1 < q < 1$. On en déduit que la limite de la suite (v_n) est 0 et la limite de la suite (u_n) est donc $+\infty$.

4. a) $S_n = X_n + Y_n$ avec $X_n = \sum_{k=0}^n v_k$ et $Y_n = \sum_{k=0}^n k$.

$$X_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$X_n = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$X_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$Y_n = \frac{0 + n}{2} \times (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Finalement, on a :

$$S_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n + 1)}{2}.$$

$$\mathbf{b)} \quad T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n + 1)}{2}}{n^2}$$

$$T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{n^2 + n}{2n^2}$$

$$T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

On a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$, donc on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 6$.

Étant donné que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, par produit, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} = 0$.

Enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{1}{2}$.

Corrigé Antilles-Guyane (sept. 2010)

1. On a $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times (-1) = \frac{3}{4}$.

On a $u_2 - u_1 = \frac{1}{4}$ et $u_1 - u_0 = \frac{3}{2}$, d'où $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.

Donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

On a $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{2}$ et $\frac{u_1}{u_0} = -\frac{1}{2}$, d'où $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$.

Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2. a) $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = 1$.

b) Pour tout entier naturel n , on a : $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}$.

Or on sait que $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$, d'où

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

Soit $v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = \frac{1}{2}v_n$.

c) Pour tout entier naturel n , on a : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

d) D'après la définition d'une suite géométrique, on a pour tout entier

naturel n : $v_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

3. a) $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = -1$.

b) Pour tout entier naturel n , on a $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$.

Or on sait que $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.

D'où $w_{n+1} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}$, soit $w_{n+1} = \frac{2v_n + u_n}{\frac{v_n}{2}} = \frac{2v_n + u_n}{v_n}$.

c) D'après la question précédente, on sait que pour tout entier naturel n , on a : $w_{n+1} = \frac{2v_n + u_n}{v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n} = 2 + w_n$.

d) D'après la question précédente, la suite (w_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $w_0 = -1$. Par définition, on a : $w_n = -1 + 2n$.

4. On sait que pour tout entier naturel n , on a : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ donc $u_n = w_n \times v_n$.

Or $w_n = -1 + 2n$ et $v_n = \frac{1}{2^n}$, donc $u_n = (2n - 1) \times \frac{1}{2^n} = \frac{2n - 1}{2^n}$.

5. Pour tout entier naturel n , on a : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

On veut montrer par récurrence que $S_n = 2 - \frac{2n + 3}{2^n}$.

Initialisation : on a $S_0 = u_0 = -1$ et $2 - \frac{2 \times 0 + 3}{2^0} = -1$.

La formule est donc vraie pour $n = 0$.

Soit n un nombre entier naturel, on suppose que la formule est vraie

au rang n , c'est-à-dire que $S_n = 2 - \frac{2n + 3}{2^n}$.

Au rang $n + 1$, on a : $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$.

Or $u_n = \frac{2n - 1}{2^n}$, soit $u_{n+1} = \frac{2(n + 1) - 1}{2^{n+1}} = \frac{2n + 1}{2^{n+1}}$.

D'où $S_{n+1} = 2 - \frac{2n + 3}{2^n} + \frac{2n + 1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2(2n + 3) - 2n - 1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n + 5}{2^{n+1}}$.

Finalement : $S_{n+1} = 2 - \frac{2(n + 1) + 3}{2^{n+1}}$.

La formule est donc vraie au rang $n + 1$.

Elle est donc vraie pour tout entier naturel n .

Limites de fonctions, continuité et théorème des valeurs intermédiaires p. 14

Corrigé Métropole (juin 2013)

1. a) Le point B étant le point de la courbe d'abscisse 1 et d'ordonnée 2, $f(1) = 2$. Par ailleurs, la tangente en B à la courbe est horizontale, donc le coefficient directeur de cette tangente est égal à 0 et $f'(1) = 0$.

b) La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$, en tant que quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle.

Par ailleurs :

$$f'(x) = \frac{\left(0 + b \times \frac{1}{x}\right) \times x - (a + b \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{b - (a + b \ln x)}{x^2}$$

Et finalement : $f'(x) = \frac{(b - a) - b \ln x}{x^2}$.

c) $f(1) = \frac{a + b \ln 1}{1} = a$, or d'après le **1. a)**, $f(1) = 2$, d'où $a = 2$.

On a $f'(1) = \frac{(b - 2) - b \ln 1}{1^2} = b - 2$, or d'après le **1. a)**, $f'(1) = 0$, donc $b = 2$.

2. a) On remplace a et b par 2, dans l'expression de f' et on obtient :

$$f'(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} = \frac{2}{x^2} \times (-\ln x).$$

Puisque pour tout $x > 0$, $\frac{2}{x^2} > 0$, le signe de f' est le même que celui de $-\ln x$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

b) Quand x tend vers 0^+ , $\ln x$ tend vers $-\infty$ d'où par opérations sur les limites : $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 + 2 \ln x = -\infty$.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, donc par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

CORRIGÉS

On remarque que $f(x) = \frac{2}{x} + 2\frac{\ln x}{x}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$,

d'après la propriété des croissances comparées.

Donc par produit et somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c) $-\ln x > 0$ est équivalent à $\ln x < 0$, soit $x < 1$.

f est donc croissante sur $]0; 1]$ et décroissante sur $]1; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	2	0

3. a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0; 1]$ et $1 \in]-\infty; f(1)[$, on peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur $]0; 1]$, et en déduire l'existence et l'unicité d'une solution α à l'équation $f(x) = 1$.

b) Grâce à la calculatrice et la technique dite de balayage, on prouve que l'unique solution β de l'équation $f(x) = 1$ sur $]1; +\infty[$ appartient à l'intervalle $]5; 6[$. Donc que l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$ est $n = 5$.

Corrigé Polynésie (juin 2010)

1. a) La fonction $x \mapsto 2x$ est dérivable et strictement positive sur $]1; +\infty[$.

L'image de cet intervalle par $x \mapsto 2x$ est compris dans l'intervalle $]2; +\infty[$.

Sur cet intervalle, la fonction \ln est dérivable.

Donc la fonction $x \mapsto \ln(2x)$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ en tant que composée de deux fonctions dérivables.

De plus, la fonction $x \mapsto 1 - x$ est dérivable sur $]1; +\infty[$.

Par conséquent, la fonction g est dérivable sur $]1; +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in]1; +\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{2}{2x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

Sur $]1; +\infty[$, on a $x \geq 1$ et $1 - x \leq 0$, donc $g'(x) \leq 0$.

La fonction g est donc décroissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Enfin $g(1) = \ln 2 + 1 - 1 = \ln 2 > 0$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $2x$ tend vers $+\infty$ et $\ln(2x)$ tend vers $+\infty$.

On a donc une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».

Sur l'intervalle $]1; +\infty[$, on a : $g(x) = \ln(2x) + 1 - x = x \left(\frac{\ln(2x)}{x} + \frac{1}{x} - 1 \right)$.

Soit $g(x) = \ln(2x) + 1 - x = x \left(2 \frac{\ln(2x)}{2x} + \frac{1}{x} - 1 \right)$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln(2x)}{2x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln(2x)}{2x} + \frac{1}{x} - 1 = -1$.

En utilisant la règle des signes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

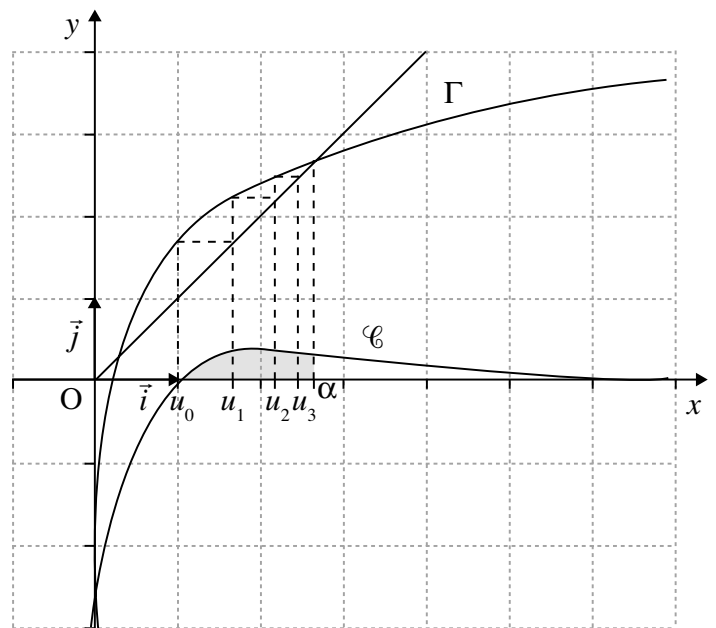
Donc la fonction g est dérivable, continue sur $]1; +\infty[$ à valeurs dans $] -\infty; \ln 2]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, puisque $0 \in]-\infty; \ln 2]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

b) D'après la question précédente, on sait que $g(\alpha) = 0$.

Donc, $\ln(2\alpha) + 1 - \alpha = 0$, soit $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. a)



b) On va démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3.$$

Initialisation : on a $u_0 = 1$ et $u_1 = \ln 2 + 1 \approx 1,69$.

Donc $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$.

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : pour $k \in \mathbb{N}$, on suppose que jusqu'au rang k , on a $1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 3$.

On a donc $2 \leq 2u_n \leq 2u_{n+1} \leq 2 \times 3$,

soit $\ln 2 \leq \ln(2u_n) \leq \ln(2u_{n+1}) \leq \ln 6$,

puis $\ln(2) + 1 \leq \ln(2u_n) + 1 \leq \ln(2u_{n+1}) + 1 \leq \ln 6 + 1$, avec $\ln 6 + 1 \approx 2,8$, soit $\ln 6 + 1 < 3$.

On a donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$.

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

c) D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par 3.

Donc elle est convergente vers une limite l qui vérifie $\alpha = \ln(2l) + 1$, d'où $l = \alpha$.

Dérivation p. 17

Corrigé sujet inédit

1. La bonne réponse est : $y = x + 1$.

Une équation de la tangente à la courbe d'une fonction f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Ici $a = 0$, donc la tangente a pour équation : $y = f'(0)x + f(0)$.

De plus $f(x) = e^x$, d'où $f(0) = e^0 = 1$, et $f'(x) = e^x$, d'où $f'(0) = e^0 = 1$.

La tangente à la courbe de la fonction exponentielle en 0 admet pour équation $y = x + 1$.

2. La bonne réponse est : $y = x + 2$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.
 $f(1) = 3 \ln 1 - 2 \times 1 + 5 = 3$.

Pour tout $x > 0$: $f'(x) = 3 \times \frac{1}{x} - 2$ donc $f'(1) = 3 \times \frac{1}{1} - 2 = 1$.

Une équation de la tangente est donc : $y = 1 \times (x - 1) + 3$, soit $y = x + 2$.

3. La bonne réponse est : $h'(1) = 1,5$.

On sait que la droite (AB) est la tangente à la courbe représentative de la fonction h au point B d'abscisse 1 .

Le coefficient directeur de la tangente en un point est égal au nombre dérivé de la fonction en ce point.

$$\text{Donc } h'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 3}{1 - 3} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

4. La bonne réponse est : strictement négatif.

On a $0 < \ln(1,5) < \ln(2)$.

D'après le tableau de variations, sur l'intervalle $]0 ; \ln(2)[$ la fonction f est strictement décroissante.

Donc sur cet intervalle la dérivée f' de la fonction f est strictement négative, par conséquent $f'(\ln(1,5)) < 0$.

Or $f'(\ln(1,5))$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f au point d'abscisse $\ln(1,5)$.

Donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f au point d'abscisse $\ln(1,5)$ est strictement négatif.

5. La bonne réponse est : pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = -2e^{-2x+1}$.

La fonction f définie sur l'ensemble des réels est de la forme e^u , sa dérivée sera donc de la forme $u'e^u$.

Pour tout réel x , on a $u(x) = -2x + 1$ donc $u'(x) = -2$.

Donc pour tout réel x on a : $f'(x) = -2e^{-2x+1}$.

6. La bonne réponse est : $f'(x) = \ln(x) + 1$.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

En posant $u(x) = x$ et $v(x) = \ln x$, on a :

$$u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Pour tout, $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = (uv)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$ donc :

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

7.a) On considère la fonction f définie sur $]0 ; 4[$ par $f(x) = -x^2 - x + 4 + \ln(x + 1)$.

La dérivée f' de la fonction f est définie sur $]0 ; 4[$ par

$$f'(x) = -2x - 1 + \frac{1}{x + 1}.$$

b) Pour étudier le sens de variations de la fonction f , il faut étudier le signe de la dérivée f' .

Pour $x \in]0 ; 4[$, on a : $f'(x) = -2x - 1 + \frac{1}{x + 1}$.

On réduit au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{(-2x - 1)(x + 1) + 1}{x + 1} = \frac{-2x^2 - 3x}{x + 1}.$$

On développe et on réduit le numérateur :

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x - x - 1 + 1}{x + 1} = \frac{-2x^2 - 3x}{x + 1}.$$

On factorise le numérateur :

$$f'(x) = \frac{x(-2x - 3)}{x + 1}.$$

On a $-2x - 3 = 0$ lorsque $x = -\frac{3}{2}$.

Donc lorsque $x > -\frac{3}{2}$, on a $-2x - 3 < 0$.

Lorsque $x > -1$, on a $x + 1 > 0$.

Donc sur l'intervalle $]0 ; 4[$ on a :

$x > 0$, $-2x - 3 < 0$ et $x + 1 > 0$.

En appliquant la règle des signes, on en déduit que sur l'intervalle $]0 ; 4[$, $f'(x) < 0$.

Donc sur l'intervalle $]0 ; 4[$, la fonction f est strictement décroissante.

Fonctions sinus et cosinus p. 21

Corrigé sujet inédit

$$\begin{aligned} \mathbf{1. a)} \text{ On a : } f'(x) &= -\sin(x) - \frac{1}{2} \times 2\sin(2x) \\ &= -\sin(x) - \sin(2x) \end{aligned}$$

pour tout $x \in]0 ; 2\pi[$.

b) En utilisant la relation $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, on a pour tout $x \in]0 ; 2\pi[$:

$$f'(x) = -\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x)$$

$$f'(x) = -\sin(x) [1 + 2\cos(x)].$$

2. Un produit de facteurs est nul lorsque l'un des facteurs est nul.

Donc $\sin(x) [1 + 2\cos(x)] = 0$ équivaut à : $\sin(x) = 0$ ou $1 + 2\cos(x) = 0$.

Sur l'intervalle $]0 ; 2\pi[$, les solutions de la première équation sont : $0 ; \pi$ et 2π .

La seconde équation équivaut à $\cos(x) = -\frac{1}{2}$.

Sur $]0 ; 2\pi[$, ses solutions sont $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

$$\text{D'où } S = \left\{ 0 ; \frac{2\pi}{3} ; \pi ; \frac{4\pi}{3} ; 2\pi \right\}.$$

3. a) La dérivée est positive lorsque sa représentation graphique est au-dessus de l'axe des abscisses et négative lorsqu'elle est au-dessous. D'où le tableau de signes de $f'(x)$:

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	2π				
Signe de $f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0

b) Les ordonnées des points dont l'abscisse x vérifie $f'(x) = 0$ sont :

$$f(0) = \cos 0 + \frac{1}{2} \cos 0 + 1 = 1 + \frac{1}{2} + 1 = 2,5;$$

$$f(\pi) = \cos \pi + \frac{1}{2} \cos(2\pi) + 1 = -1 + \frac{1}{2} + 1 = 0,5;$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$\text{soit } f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \frac{3}{4} = 0,25.$$

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) + 1$$

$$\text{soit } f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0,25.$$

$$f(2\pi) = \cos(2\pi) + \frac{1}{2} \cos(4\pi) + 1 = 1 + \frac{1}{2} + 1 = 2,5.$$

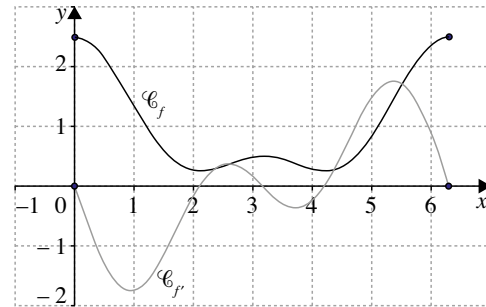
On en déduit le tableau de variations de f :

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	2π				
$f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$f(x)$	2,5		0,25		0,5		0,25		2,5

4. Tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2,5	1,3	0,3	0,5	0,3	0,9	2,4

Représentation graphique :



Corrigé Nouvelle-Calédonie (mars 2013)

La proposition « La courbe représentative de f est la courbe 3. » est fautive. Sachant que la primitive F de f s'annule en $x = 0$, sa courbe représentative est la courbe 1.

Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $F'(x) = f(x)$.

Or, f est positive sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc la fonction F devrait être croissante sur cet intervalle.

On observe sur la courbe 1 que ce n'est pas le cas.

La courbe 1 est la représentation graphique de la fonction $x \mapsto -4\sin(2x)$.

La courbe 2 est la représentation graphique de la fonction $x \mapsto 2\cos(2x)$.

La courbe 3 est la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \sin(2x)$.

La courbe 3 est la représentation graphique de la primitive F , la courbe 2 celle de la fonction f et la courbe 1 celle de la dérivée f' .

Fonction exponentielle

Corrigé Liban (mai 2013)

Partie A

1. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$, alors par somme et passage à l'inverse

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 1.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$, alors par somme et passage à l'inverse

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 0.$$

Graphiquement, cela revient à dire que les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$ sont deux asymptotes horizontales à \mathcal{C}_v , respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. L'exponentielle ne s'annule pas sur \mathbb{R} , donc

$$f_1(x) = \frac{e^x \times 1}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

p. 25

3. La fonction f_1 est de la forme $\frac{1}{u}$ avec $u(x) = 1 + e^{-x}$. On a $f_1' = -\frac{u'}{u^2}$, soit :

$$f_1'(x) = -\frac{-e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}.$$

$f_1'(x) > 0$ sur \mathbb{R} , la fonction f_1 est donc strictement croissante sur \mathbb{R} .

4. On définit la fonction v sur \mathbb{R} par $v(x) = 1 + e^x$. v est strictement positive et dérivable sur \mathbb{R} .

$$\text{Alors, d'après le 2., } f_1(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{v'(x)}{v(x)}.$$

Une primitive de f_1 sur \mathbb{R} est la fonction $x \mapsto \ln(1 + e^x)$.

$$\text{D'où } I = \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x} dx =$$

$$= \left[\ln(1 + e^x) \right]_0^1 = \ln(1 + e) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1 + e}{2}\right).$$

l correspond à l'aire du domaine limité par \mathcal{C}_1 , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. C'est l'aire du rectangle de côté 1 et de longueur $\ln\left(\frac{1+e}{2}\right) \approx 0,62$ (u.a.).

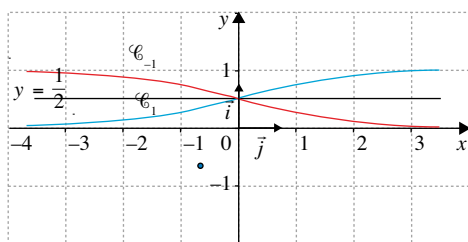
Partie B

1. Pour tout réel x , $f_1(x) + f_{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} = 1$.

2. Or K est le milieu de [MP], où P a pour coordonnées $(x; f_1(x))$ et M $(x; f_{-1}(x))$ donc : $y_K = \frac{y_M + y_P}{2} = \frac{f_1(x) + f_{-1}(x)}{2} = \frac{1}{2}$.

Le point K appartient donc à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

3. De la question précédente on déduit que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$, d'où la construction demandée.



4. Soit \mathcal{A} l'aire du domaine considéré. Par symétrie entre les deux courbes, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2 \int_0^1 \left(f_1(x) - \frac{1}{2} \right) dx = 2 \int_0^1 f_1(x) dx - \int_0^1 1 dx \\ &= 2I - 1 = 2 \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - 1 \approx 0,24. \end{aligned}$$

Partie C

1. **Vrai.** Quels que soient les réels x et k :

$$e^{-kx} > 0 \Rightarrow 1 + e^{-kx} > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1 + e^{-kx}} < 1.$$

2. **Faux.** Par exemple, pour tout réel x , $f'_{-1}(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, donc $f'_{-1}(x) < 0$. La fonction f_{-1} est donc strictement décroissante sur \mathbb{R} .

3. **Vrai.** Si $k \geq 10$ alors $-\frac{1}{2}k \leq -5$ puis $e^{-\frac{1}{2}k} \leq e^{-5}$ puisque la fonction exponentielle est strictement croissante et enfin : $1 + e^{-\frac{1}{2}k} \leq 1 + e^{-5}$. Finalement :

$$0,99 < 0,9933 \leq \frac{1}{1 + e^{-5}} \leq \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{2}k}} = f_k\left(\frac{1}{2}\right).$$

Corrigé Inde (avril 2013)

Partie A

Des données de l'énoncé on déduit que : $h(0) = 0,1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 2$.

Or, $h(0) = \frac{a}{1+b}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = a$, puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,04t} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$.

D'où $a = 2$ et $\frac{2}{1+b} = 0,1$ soit $\frac{1+b}{2} = 10$ et finalement $a = 2$ et $b = 19$.

Ainsi $h(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}$.

Partie B

1. Pour, $f(t) = \frac{k}{v(t)}$, avec $k = 2$ et $v(t) = 1 + 19e^{-0,04t}$, donc $f'(t) = -\frac{kv'(t)}{v^2(t)}$.

Mais $v'(t) = -0,76e^{-0,04t}$ puisque $(e^u)'(t) = u'(t)e^{u(t)}$ pour tout t réel.

Donc $f'(t) = -\frac{-1,52e^{-0,04t}}{(1 + 19e^{-0,04t})^2}$.

Étant donné que $e^x > 0$ pour tout x réel, on a $f'(t) > 0$ sur l'intervalle $[0; 250]$.

f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 250]$.

2. Cela revient à déterminer les valeurs de t pour lesquelles $f(t) > 1,5$.

Ce qui équivaut successivement à :

$$\frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}} > 1,5$$

$$\frac{1 + 19e^{-0,04t}}{2} < \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$$

$$3 + 57e^{-0,04t} < 4$$

$$e^{-0,04t} < \frac{1}{57}$$

$$-0,04t < -\ln(57)$$

Finalement on trouve $t > 25 \ln(57) \approx 101,1$.

Pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1,5 m, il faut que le temps t soit d'au moins 102 jours.

3. **a)** On multiplie le numérateur et le dénominateur de $f(t)$ par $e^{0,04t}$ et on obtient directement le résultat recherché.

On dérive la fonction F . En posant, pour tout $t \in [0; 250]$,

$$u(t) = e^{0,04t} + 19, \text{ alors : } F(t) = 50 \ln(u(t)).$$

Par ailleurs $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ et la dérivée de e^v est égale à $v'e^v$.

$$\text{On a donc } F'(t) = 50 \frac{u'(t)}{u(t)} = 50 \frac{0,04e^{0,04t}}{e^{0,04t} + 19} = \frac{2e^{0,04t}}{19 + e^{0,04t}} = f(t).$$

Sur $[0; 250]$, puisque $F' = f$, F est bien une primitive de f .

b) La valeur moyenne de f sur $[50; 100]$ est :

$$m = \frac{1}{50} \int_{50}^{100} f(t) dt = \frac{F(100) - F(50)}{50} = \ln\left(\frac{e^4 + 19}{e^2 + 19}\right).$$

La valeur approchée à 10^{-2} près de m est donc égale à 1,03.

Cela correspond à la taille moyenne du plant de maïs entre le 50^e et le 100^e jour.

4. Au temps t , la vitesse de croissance du plant de maïs est donnée par le nombre dérivé $f'(t)$ qui correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse t .

On lit sur le graphique la valeur de t_{\max} pour laquelle le coefficient directeur de la tangente semble maximal : une valeur approchée de t_{\max} est alors 74.

La hauteur du plant est alors d'environ 1 m, à 10 cm près.

Fonction logarithme népérien p. 30

Corrigé sujet inédit

1. Pour dériver le premier terme, on applique la formule de la dérivée d'un produit :

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x), \text{ avec } u(x) = -x \text{ et } v(x) = \ln x.$$

$$\text{Soit } f'(x) = -1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x} + 2 = -\ln x + 1.$$

2. a) On résout l'inéquation $-\ln x + 1 \leq 0$, soit $1 \leq \ln x$.

Comme la fonction exponentielle est croissante sur \mathbb{R} , l'inéquation équivaut à $e^1 \leq e^{\ln x}$, d'où $x \geq e$.

Donc, pour $x \in [1; e]$, on a $f'(x) \geq 0$.

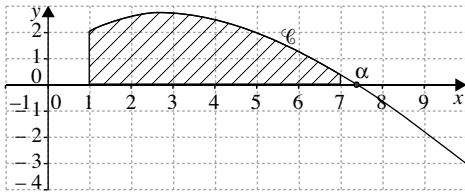
Pour $x \in [e; 10]$, on a $f'(x) \leq 0$.

b) On déduit le tableau de variation de f de la question 2. a).

x	1	e	10
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Sens de variation de f			

3. Tableau de valeurs :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	2	2,61	2,70	2,45	1,95	1,25	0,38	-0,64	-1,78	-3,03



4. a) L'équation $f(x) = 0$ a une seule solution α car la courbe coupe une seule fois l'axe des abscisses.

b) Tableau de valeurs :

x	7,38	7,39
$f(x)$	0,009 1	-0,000 9

Donc $\alpha \approx 7,39$.

Corrigé Métropole (sept. 2010)

Partie A. Étude de la fonction f

1. $f(x)$ est un produit, pour étudier son signe on étudie le signe de chaque facteur et on utilise la règle des signes de la multiplication.

Le premier facteur est égal à x , sur l'intervalle $]0; +\infty[$ on a $x > 0$.

Le second facteur est égal à $1 - \ln x$.

On a $1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$, et $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$.

Conclusion : pour $0 < x < e$, on a $f(x) > 0$, $f(e) = 0$ et pour $x > e$, on a $f(x) < 0$.

2. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\ln x$ tend vers $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$.

En utilisant la règle des signes de la multiplication on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Pour tout réel x strictement positif, on a : $f(x) = x - x \ln x$.

D'après le cours, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} (x - x \ln x) = 0$, soit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

3. La fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Pour tout réel x strictement positif, la fonction f est du type uv donc sa dérivée f' est du type $u'v + uv'$, avec $u(x) = x$, d'où $u'(x) = 1$, et $v(x) = 1 - \ln x$ donc $v'(x) = -\frac{1}{x}$.

$$\text{Donc } f'(x) = 1 \times (1 - \ln x) + x \times \left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= 1 - \ln x + 1 = -\ln x.$$

On a :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de $f(x)$			

$$f(1) = 1 \times (1 - \ln 1) = 1.$$

4. Soit a un nombre réel strictement positif.

L'équation de la tangente (T_a) au point A d'abscisse a est donnée par la formule :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

$$\mathbf{a)} \text{ On a } f'(a) = -\ln a \text{ et } f(a) = a(1 - \ln a) = a - a \ln a.$$

L'équation de (T_a) est donc $y = -\ln a(x - a) + a - a \ln a$, soit $y = -x \ln a + a$.

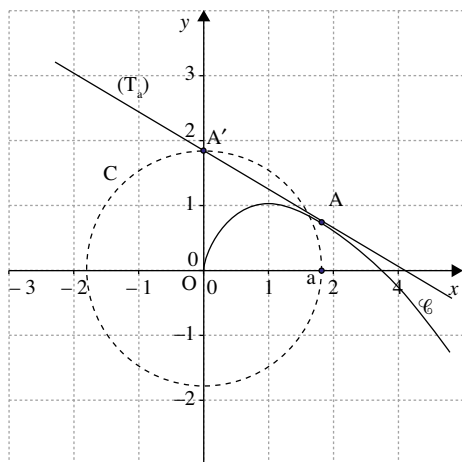
On cherche les coordonnées du point A', point d'intersection de la tangente (T_a) et de l'axe des ordonnées, c'est-à-dire lorsque $x = 0$, ou encore l'ordonnée à l'origine de la droite (T_a). On trouve lorsque $x = 0, y = a$.

Donc A' a pour coordonnées $(0; a)$.

b) Construction de la tangente au point A à la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f . Le point A d'abscisse a est donné.

On place le point A'(0; a) en traçant le cercle de centre l'origine O du repère et de rayon a , ce cercle coupe l'axe des ordonnées en deux points, A' est celui des deux points qui a une ordonnée positive.

On trace ensuite la droite (T_a) passant par les points A et A'.



Partie B. Aire sous une courbe

Premier cas : $0 < a < e$.

D'après la question 1. de la partie A, on sait que la fonction f est strictement positive sur $]0 ; e[$.

La mesure, en unités d'aire, de l'aire de la région du plan délimitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = e$ est par définition l'intégrale $\int_a^e f(x) dx$.

$$\text{Donc } \mathcal{A}(a) = \int_a^e f(x) dx.$$

Second cas : $a > e$.

Toujours d'après la question 1. de la partie A, on sait que la fonction f est strictement négative sur l'intervalle $]e ; +\infty[$.

La mesure, en unités d'aire, de l'aire de la région du plan délimitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = e$ est par définition l'intégrale : $-\int_e^a f(x) dx$.

$$\text{Donc } \mathcal{A}(a) = \int_a^e f(x) dx.$$

Conclusion : pour tout réel a strictement positif, on a $\mathcal{A}(a) = \int_a^e f(x) dx$.

Intégration p. 34

Corrigé Amérique du Nord (mai 2013)

1. a) D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ donc, $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \ln x = -\infty$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, d'où en effectuant le produit des limites,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

b) D'après le cours, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, et par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = 0$, donc en

effectuant le produit des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$.

On a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, et en ajoutant ces deux dernières limites, on obtient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c) L'axe des ordonnées est donc une asymptote verticale à la courbe \mathcal{C} . L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C} en $+\infty$.

2. a) f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times (1 + \ln x)}{x^4} \\ &= \frac{x - 2x - 2x \ln x}{x^4} \\ &= \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}. \end{aligned}$$

b) Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-1 - 2 \ln x$.

Or, $-1 - 2 \ln x > 0$ pour $x < e^{-\frac{1}{2}}$ et $-1 - 2 \ln x < 0$ pour $x > e^{-\frac{1}{2}}$, d'où le signe de f' .

$$\text{c) On a } f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e^{-1}} = \frac{e}{2} \text{ et } e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$			-
	$-\infty$	\nearrow	\searrow
		$\frac{e}{2}$	0

3. a) Un point appartient à l'intersection de deux ensembles si et seulement si ses coordonnées vérifient simultanément les équations de ces deux ensembles, ce qui revient à rechercher $x \in]0 ; +\infty[$, tel que $f(x) = 0$.

Étant donné que $x \neq 0$, cette équation équivaut à $1 + \ln x = 0$, soit $x = e^{-1}$. Cela prouve que la courbe \mathcal{C} coupe l'axe des abscisses en un unique point, le point A de coordonnées $(e^{-1} ; 0)$.

b) D'après les variations de f et comme $f(e^{-1}) = 0$, on en déduit que $f(x) < 0$ sur l'intervalle $]0 ; e^{-1}[$ et $f(x) > 0$ sur l'intervalle $]e^{-1} ; +\infty[$.

4. a) On sait que f est strictement positive sur $]e^{-1} ; +\infty[$, donc

$$I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^2 f(x) dx.$$

D'après les variations de f , on a sur $\left[\frac{1}{e} ; 2\right]$: $0 < f(x) \leq \frac{e}{2}$.

L'intégration conservant l'ordre, on en déduit $0 < I_2 \leq \int_{\frac{1}{e}}^2 \frac{e}{2} dx$ avec $\int_{\frac{1}{e}}^2 \frac{e}{2} dx = \frac{e}{2} \left(2 - \frac{1}{e}\right) = e - \frac{1}{2}$ et finalement $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$.

CORRIGÉS

b) De même, f est strictement positive sur $\left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$, et F est une

primitive de f sur le même intervalle donc :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\frac{1}{e}}^n f(x) dx = [F(x)]_{\frac{1}{e}}^n = \left[\frac{-2 - \ln x}{x} \right]_{\frac{1}{e}}^n \\ &= \frac{-2 - \ln n}{n} - \frac{-2 - \ln(e^{-1})}{e^{-1}} \\ &= \frac{-2 - \ln n}{n} - (-2 + 1)e. \end{aligned}$$

Et finalement $I_n = \frac{-2 - \ln n}{n} + e$.

c) I_n s'écrit aussi $I_n = -\frac{2}{n} - \frac{\ln n}{n} + e$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = e$.

Graphiquement cela revient à dire que l'aire du domaine délimité par

l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C} et les droites d'équations respectives

$x = \frac{1}{e}$ et $x = n$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé Liban (juin 2010)

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx.$$

a) On a :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 &= \int_0^1 \frac{e^{-0 \cdot x}}{1 + e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-1 \cdot x}}{1 + e^{-x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 + e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx. \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, on a : $u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1 + e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1$.

Donc $u_0 + u_1 = 1$.

b) On a $u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx$.

On pose, pour tout réel x , $u(x) = 1 + e^{-x}$, d'où $u'(x) = -e^{-x}$.

Par conséquent $\frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = -\frac{u'(x)}{u(x)}$.

Or une primitive de $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ est $x \mapsto \ln(u(x))$.

Donc, une primitive de $x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ est $x \mapsto -\ln(1 + e^{-x})$.

D'où $u_1 = [-\ln(1 + e^{-x})]_0^1$

$$= -\ln(1 + e^{-1}) + \ln(1 + e^0), \text{ soit}$$

$$u_1 = -\ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) + \ln 2.$$

On sait, d'après le **a)**, que $u_0 + u_1 = 1$.

Donc $u_0 = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) - \ln 2$.

2. Pour tout entier naturel n et pour tout réel x , $e^{-nx} > 0$ et $1 + e^{-x} > 0$,

donc $\frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} > 0$.

Par conséquent, $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx \geq 0$.

3. a) Pour tout entier n non nul,

on a : $u_n + u_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1 + e^{-x}} dx$.

Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} u_n + u_{n+1} &= \int_0^1 \frac{e^{-nx} + e^{-(n+1)x}}{1 + e^{-x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-nx} + e^{-nx} e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1 + e^{-x})}{1 + e^{-x}} dx \\ &= \int_0^1 e^{-nx} dx. \end{aligned}$$

D'où

$$u_n + u_{n+1} = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 = -\frac{1}{n} e^{-n} + \frac{1}{n} e^{-n \cdot 0}.$$

Conclusion : pour tout entier n non nul, $u_n + u_{n+1} = \frac{1 - e^{-n}}{n}$.

b) D'après le **2.**, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$, donc $u_{n+1} \geq 0$.

Or $u_n + u_{n+1} = \frac{1 - e^{-n}}{n}$, d'où $u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n} - u_{n+1}$.

Donc, pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}$.

4. Pour tout entier n non nul, on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}$.

$\frac{1 - e^{-n}}{n} = \frac{1}{n}(1 - e^{-n})$ donc lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a : $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ et $e^{-n} \rightarrow 0$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-n}) = 1$ et par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}(1 - e^{-n}) = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Nombres complexes p. 40

Corrigé Pondichéry (avril 2013)

1. a) On a $Z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc

$$Z_M = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ = 2 \times \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

L'écriture algébrique de Z_M est $1 - i\sqrt{3}$.

b) Par définition, $Z_{M'} = -iZ_M$, donc si

$$Z_M = 1 - i\sqrt{3}, Z_{M'} = -i(1 - i\sqrt{3}) = -\sqrt{3} - i.$$

On a donc $|Z_{M'}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$.

En notant $\theta = \arg(Z_{M'}) [2\pi]$, on a aussi :

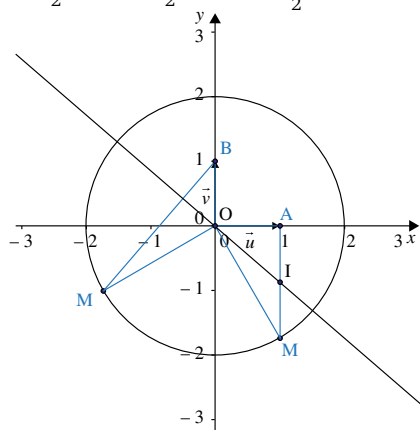
$$\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit $\theta = \arg(Z_{M'}) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} [2\pi]$ en observant le cercle trigonométrique.

c) On a $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $M(1; -\sqrt{3})$ et $M'(-\sqrt{3}; -1)$.

De plus, I est le milieu de [AM] donc

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_M}{2} = \frac{1 + 1 - i\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ et } I(1; -\frac{\sqrt{3}}{2}).$$



On peut constater sur le graphique que les propriétés 1 et 2 sont vérifiées.

2. a) On a $Z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$ donc

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_M}{2} = \frac{1 + x + iy}{2} = \frac{1+x}{2} + \frac{y}{2}i.$$

L'affixe du point I en fonction de x et y est $Z_I = \frac{1+x}{2} + \frac{y}{2}i$.

b) On a $Z_{M'} = -iZ_M = -i(x + iy) = y - ix$.

L'affixe du point M' en fonction de x et y est $Z_{M'} = y - ix$.

c) $Z_I = \frac{Z_A + Z_{M'}}{2} = \frac{1 + x + iy}{2} = \frac{1+x}{2} + \frac{y}{2}i$

d'où $I\left(\frac{1+x}{2}; \frac{y}{2}\right)$; $Z_B = i$ donc $B(0; 1)$; $Z_{M'} = y - ix$ donc $M'(y; -x)$.

d) Pour montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM' , montrons que $\overline{OI} \cdot \overline{BM'} = 0$.

D'après la question précédente,

$\overline{OI} = \left(\frac{1+x}{2}; \frac{y}{2}\right)$ et $\overline{BM'}(y; -x-1)$, donc dans le repère orthonormé $(o; \vec{u}; \vec{v})$:

$$\overline{OI} \cdot \overline{BM'} = \frac{1+x}{2} \times y + \frac{y}{2} \times (-x-1) \\ = \frac{1}{2}(y + xy - yx - y) = 0.$$

Les droites (OI) et (BM') sont donc perpendiculaires et la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM' .

On a démontré la propriété 1 : la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' .

e) Dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on a :

$BM'^2 = \overline{BM'} \cdot \overline{BM'} = y^2 + (-x-1)^2 = y^2 + (x+1)^2$ car $\overline{BM'}(y; -x-1)$ d'après la question précédente.

$$(2OI)^2 = 2\overline{OI} \cdot 2\overline{OI} = 4\overline{OI} \cdot \overline{OI} = 4 \left(\left(\frac{1+x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \right) = (1+x)^2 + y^2$$

car $\overline{OI} = \left(\frac{1+x}{2}; \frac{y}{2}\right)$ d'après la question précédente.

On a donc $BM'^2 = (2OI)^2$, d'où $BM' = 2OI$ car les distances sont des valeurs positives.

On a démontré la propriété 2 : $BM' = 2OI$.

Corrigé Asie (juin 2013)

1. La réponse est « Vrai ».

Montrons que les vecteurs \overline{AC} et \overline{AB} sont colinéaires :

$$c - a = 1 + i\sqrt{3} - (2 + 2i) = 1 + i\sqrt{3} - 2 - 2i \\ = -1 + i(\sqrt{3} - 2) \text{ et}$$

$$b - a = -\sqrt{3} + i - (2 + 2i) = -(\sqrt{3} + 2) - i.$$

$$\text{Or } (\sqrt{3} + 2)(c - a) = (\sqrt{3} + 2)(-1 + i(\sqrt{3} - 2))$$

$$= -(\sqrt{3} + 2) + (\sqrt{3} + 2) \times i(\sqrt{3} - 2)$$

$$= -(\sqrt{3} + 2) + i(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2)$$

$$= -(\sqrt{3} + 2) + i((\sqrt{3})^2 - 2^2)$$

$$= -(\sqrt{3} + 2) + i \times (3 - 4) = -(\sqrt{3} + 2) - i, \text{ donc } (\sqrt{3} + 2)(c - a) = b - a \text{ et}$$

$$(\sqrt{3} + 2)\overline{AC} = \overline{AB}.$$

Les vecteurs \overline{AC} et \overline{AB} sont colinéaires donc les points A, B et C sont alignés.

2. La réponse est « Faux ».

Montrons que les points B, C et D n'appartiennent pas à un même cercle de centre E.

CORRIGÉS

$$\begin{aligned} BE^2 &= |e - b|^2 = \left| -1 + (2 + \sqrt{3})i - (-\sqrt{3} + i) \right|^2 \\ &= \left| -1 + 2i + \sqrt{3}i + \sqrt{3} - i \right|^2 \\ &= \left| \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1) \right|^2 \\ &= (\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 \\ &= 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CE^2 &= |e - c|^2 = \left| -1 + (2 + \sqrt{3})i - (1 + i\sqrt{3}) \right|^2 \\ &= \left| -1 + 2i + \sqrt{3}i - 1 - i\sqrt{3} \right|^2 \\ &= \left| -2 + 2i \right|^2 \\ &= (-2)^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DE^2 &= |e - d|^2 = \left| -1 + (2 + \sqrt{3})i - \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right|^2 \\ &= \left| -1 + 2i + \sqrt{3}i + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right|^2 = \left| \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) i \right|^2 \\ &= \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \\ &= 4 + 2\sqrt{3} + \frac{3}{4} = \frac{19 + 8\sqrt{3}}{4} \neq 8. \end{aligned}$$

On a $BE^2 = CE^2 = 8$ puis $BE = CE = \sqrt{8}$, car les longueurs sont des valeurs positives, donc les points B et C appartiennent à un même cercle de centre E et de rayon $\sqrt{8}$.

Mais, $DE^2 \neq 8 = CE^2$ donc $DE \neq CE$ et le point D n'appartient pas au cercle de centre E et de rayon $\sqrt{8}$.

Corrigé Polynésie (juin 2013)

1. $z_1 = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc on a :

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= e^{i\frac{\pi}{2}} \times \frac{\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \times \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3} \times \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{9\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}\right)} = \sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}. \end{aligned}$$

La réponse est d).

2. On pose $z = x + iy$ avec x et y deux nombres réels.

$$-z = \bar{z} \Leftrightarrow -x - iy = x - iy.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = iy, y \in \mathbb{R}.$$

La réponse est c). : L'équation $-z = \bar{z}$, d'inconnue complexe z , admet une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite. Cette droite est la droite des nombres imaginaires purs.

Géométrie dans l'espace p. 44

Corrigé Amérique du Nord (mai 2013)

1. Pour démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, il suffit de démontrer, par exemple, que les vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} ne sont pas colinéaires.

Or on a : $\overline{AB}(1; -1; -1)$ et $\overline{AC}(2; -5; -3)$.

Puisque $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{-5}$, les coordonnées des vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} ne sont pas proportionnelles ce qui entraîne que les vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} ne sont pas colinéaires : les points ne sont donc pas alignés.

2. a) Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$.

Pour démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC), il suffit de démontrer que \vec{u} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC), par exemple les vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} :

$$\overline{AB} \cdot \vec{u} = 1 \times 2 + (-1) \times (-1) + (-1) \times 3 = 0$$

$$\overline{AC} \cdot \vec{u} = 2 \times 2 + (-5) \times (-1) + (-3) \times 3 = 0.$$

Les vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} sont orthogonaux à \vec{u} .

La droite Δ est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : elle est orthogonale au plan (ABC).

b) Les calculs précédents montrent que \vec{u} est un vecteur normal à (ABC). Une équation cartésienne de (ABC) est donc de la forme $2x - y + 3z + d = 0$.

A appartient au plan (ABC), ses coordonnées vérifient l'équation de ce plan et :

$$2 \times 0 - 4 + 3 \times 1 + d = 0 \text{ soit } d = 1.$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc : $2x - y + 3z + 1 = 0$.

c) Déterminons une représentation paramétrique de la droite Δ .

Comme la droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$ et contient le point D (7; -1; 4), une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x = 2t + 7 \\ y = -t - 1, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3t + 4 \end{cases}$$

d) Puisque le point H est l'intersection de la droite Δ et du plan (ABC), ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = 2t + 7 \\ y = -t - 1 \\ z = 3t + 4 \\ 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Le paramètre t vérifie donc : $2 \times (2t + 7) - (-t - 1) + 3 \times (3t + 4) + 1 = 0$.
Ce qui donne $t = -2$, et finalement $H(3; 1; -2)$.

3. a) Pour démontrer que les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants il suffit de démontrer qu'ils ne sont pas parallèles, c'est-à-dire que leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

Le plan \mathcal{P}_1 d'équation $x + y + z = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}_1(1; 1; 1)$.
Le plan \mathcal{P}_2 d'équation $x + 4y + 2 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}_2(1; 4; 0)$.
Les coordonnées des vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 ne sont pas proportionnelles.
Les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 ne sont donc pas colinéaires et les plans sont sécants.

b) Pour vérifier que la droite d , intersection des plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 , a pour

représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

il suffit de remplacer dans les équations cartésiennes respectives des deux plans, x , y et z par leur expression en fonction de t , on a :

$$-4t - 2 + t + 3t + 2 = 0 \text{ et } -4t - 2 + 4t + 2 = 0.$$

d est bien l'intersection de \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 .

c) On déduit de la représentation paramétrique précédente que $\vec{u}'(-4; 1; 3)$ est un vecteur directeur la droite d .

$\vec{u}(2; -1; 3)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$, les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' sont orthogonaux : la droite d et le plan (ABC) sont donc parallèles.

Corrigé Métropole (sept. 2010)

1. a) Un point appartient à un plan lorsque ses coordonnées vérifient l'équation du plan.

Le plan \mathcal{P} a pour équation $3x + y - z - 1 = 0$ et le point C a pour coordonnées $(1; 3; 2)$.

On remplace donc x par 1, y par 3 et z par 2 dans l'égalité et on vérifie si elle est vraie ou fausse.

$$\text{On a : } 3 \times 1 + 3 - 2 - 1 = 3 \neq 0.$$

Donc le point C n'appartient pas au plan \mathcal{P} .

b) Pour démontrer qu'une droite est incluse dans un plan, on peut montrer que tous les points de la droite appartiennent au plan, il suffit même de démontrer que deux points de la droite appartiennent au plan.

On considère un point $M(-t + 1; 2t; -t + 2)$ appartenant à la droite \mathcal{D} .

$$\text{On a : } M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 3(-t + 1) + 2t - (-t + 2) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3t + 3 + 2t + t - 2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0.$$

Ce qui est toujours vrai quelle que soit la valeur du réel t .

Donc la droite \mathcal{D} est incluse dans le plan \mathcal{P} .

2. a) Un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} a pour coordonnées $(-1; 2; -1)$.

Le plan Q est orthogonal à la droite \mathcal{D} , donc les vecteurs directeurs de la droite \mathcal{D} sont des vecteurs normaux au plan Q .

Une équation du plan Q est donc de la forme : $-x + 2y - z + d = 0$.

Pour finir de déterminer l'équation du plan Q , il faut déterminer la valeur de d . On sait que le point C appartient au plan Q , les coordonnées du point C doivent vérifier l'équation du plan Q . On a alors :

$$-1 + 2 \times 3 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3.$$

Une équation du plan Q est donc

$$-x + 2y - z - 3 = 0.$$

b) Les coordonnées du point I, intersection de la droite \mathcal{D} et du plan Q doivent vérifier les équations de \mathcal{D} et de Q .

$$\text{C'est-à-dire : } \begin{cases} x_1 = -t + 1 \\ y_1 = 2t \\ z_1 = -t + 2 \end{cases} \text{ et } -x_1 + 2y_1 - z_1 - 3 = 0.$$

On a donc $I \in \mathcal{D}$ et :

$$I \in Q \Leftrightarrow -(-t + 1) + 2 \times 2t - (-t + 2) - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow t - 1 + 4t + t - 2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

D'où :

$$x_1 = -1 + 1 = 0; y_1 = 2 \times 1 = 2 \text{ et } z_1 = -1 + 2 = 1.$$

Donc I a pour coordonnées $(0; 2; 1)$.

c) Les coordonnées du vecteur \vec{CI} sont $(x_1 - x_C; y_1 - y_C; z_1 - z_C)$, soit $(-1; -1; -1)$.

On sait que $CI^2 = \vec{CI} \cdot \vec{CI}$, soit

$$CI^2 = (-1) \times (-1) + (-1) \times (-1) + (-1) \times (-1) = 3$$

$$\text{Donc } CI = \sqrt{3}.$$

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite \mathcal{D} de coordonnées $(-t + 1; 2t; -t + 2)$.

a) Quel que soit le réel t , \vec{CM}_t a pour coordonnées $(x_{M_t} - x_C; y_{M_t} - y_C; z_{M_t} - z_C)$, soit $(-t; 2t - 3; -t)$.

On sait que $CM_t^2 = \vec{CM}_t \cdot \vec{CM}_t$, soit :

$$CM_t^2 = (-t) \times (-t) + (2t - 3) \times (2t - 3) + (-t) \times (-t).$$

$$\text{D'où } CM_t^2 = t^2 + 4t^2 - 12t + 9 + t^2 = 6t^2 - 12t + 9.$$

b) On définit la fonction f sur l'ensemble des réels par : $f(t) = 6t^2 - 12t + 9$.

La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur l'ensemble des réels. Sa dérivée f' est définie par $f'(t) = 12t - 12$.

$$\text{On a : } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1; f'(t) > 0 \Leftrightarrow t > 1 \text{ et } f'(t) < 0 \Leftrightarrow t < 1.$$

Quel que soit le réel t strictement inférieur à 1, la fonction f est strictement décroissante donc : $t < 1 \Leftrightarrow f(t) > f(1)$.

Quel que soit le réel t strictement supérieur à 1, la fonction f est strictement croissante donc : $t > 1 \Leftrightarrow f(t) > f(1)$.

Lorsque $t = 1$, la fonction f admet un minimum égal à $f(1)$.

Par conséquent, quelque soit la valeur de t , on a $f(t) \geq f(1)$.

Or lorsque $t = 1$, on a $CM_t = CI = \sqrt{3}$.

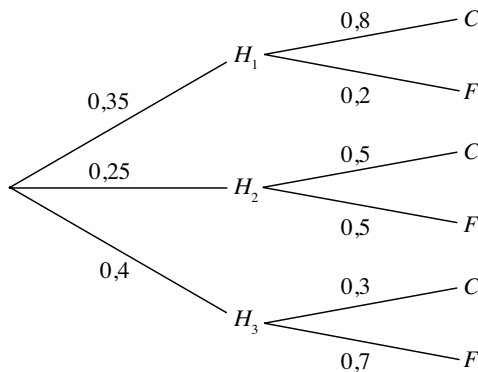
Donc CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

Probabilités conditionnelles

p. 52

Corrigé Métropole (juin 2013)

1. a)



b) Pour calculer la probabilité de l'intersection $H_3 \cap C$, on applique la formule des probabilités composées et on obtient donc :

$$P(H_3 \cap C) = P(H_3) \times P_{H_3}(C) = 0,4 \times 0,3, \text{ soit}$$

$$P(H_3 \cap C) = 0,12.$$

c) La jardinerie ne se fournissant qu'auprès des trois horticulteurs, les événements H_1, H_2 et H_3 forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(C) = P(H_1 \cap C) + P(H_2 \cap C) + P(H_3 \cap C)$$

$$= P(H_1) \times P_{H_1}(C) + P(H_2) \times P_{H_2}(C) + P(H_3) \times P_{H_3}(C)$$

$$P(C) = 0,35 \times 0,8 + 0,25 \times 0,5 + 0,4 \times 0,3$$

$$P(C) = 0,525.$$

d) D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_c(H_1) = \frac{P(H_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{0,35 \times 0,8}{0,525} \approx 0,533.$$

2. a) On a 10 fois la répétition d'un même événement, avec une probabilité de succès de 0,525, de façon indépendante, donc la variable aléatoire X suit bien une loi binomiale de paramètres 10 et 0,525.

b) Cela revient à calculer $P(X = 5)$, d'où :

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,525^5 \times (1 - 0,525)^5 \approx 0,243.$$

c) L'événement « au moins deux feuillus » est aussi l'événement « au plus 8 conifères », d'événement contraire « 9 ou 10 conifères ». Cela revient à calculer $P(X \leq 8)$, on obtient alors :

$$P(X \leq 8) = 1 - P(X = 9) - P(X = 10)$$

$$P(X \leq 8) = 1 - \binom{10}{9} \times 0,525^9 \times (1 - 0,525) - 0,525^{10} \approx 0,984.$$

Corrigé Métropole (juin 2011)

1. a) Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

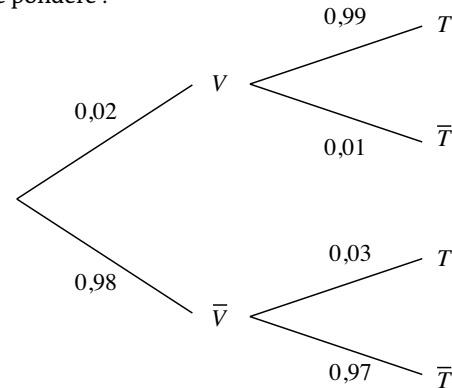
Donc $P(V) = 0,02$.

La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99.

Donc $P_V(T) = 0,99$.

La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97. Donc $P_{\bar{V}}(\bar{T}) = 0,97$.

D'où l'arbre pondéré :



b) On a $P(V \cap T) = P(V) \times P_V(T)$, d'où

$$P(V \cap T) = 0,02 \times 0,99 = 0,0198.$$

2. On cherche $p(T)$.

La formule des probabilités totales donne :

$$P(T) = P(V \cap T) + P(\bar{V} \cap T), \text{ soit}$$

$$P(T) = 0,0198 + 0,98 \times 0,03 = 0,0492.$$

3. a) On cherche à calculer $P_T(V)$.

D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :

$$P_T(V) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0198}{0,0492} \approx 0,4.$$

Il y a environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée si le test est positif.

b) On cherche $P_{\bar{T}}(\bar{V})$.

D'après la formule des probabilités conditionnelles on a :

$$P_{\bar{T}}(\bar{V}) = \frac{P(\bar{V} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{0,98 \times 0,97}{1 - 0,0492} \approx 0,999.$$

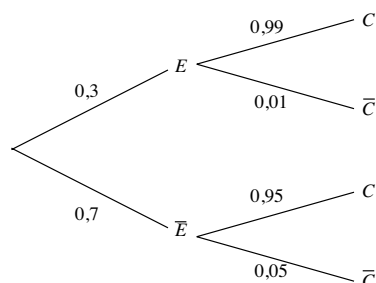
La probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif est donc d'environ 0,999.

Lois à densité p. 58

Corrigé Liban (mai 2013)

Partie A

1.



2. La probabilité recherchée est $P(C \cap \bar{E})$.

En appliquant la formule des probabilités conditionnelles, on en déduit donc que :

$$P(C \cap \bar{E}) = P_{\bar{E}}(C) \times P(\bar{E}) = 0,95 \times 0,7 = 0,665.$$

3. Les événements $C \cap E$ et $C \cap \bar{E}$ forment une partition de C .

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(C \cap \bar{E}) + P(C \cap E).$$

$$P(C) = 0,665 + 0,99 \times 0,3 = 0,962.$$

4. La probabilité recherchée est $P_c(E)$.

En appliquant la formule des probabilités conditionnelles on en déduit donc que :

$$P_c(E) = \frac{P(E \cap C)}{P(C)} = \frac{0,99 \times 0,3}{0,962} \approx 0,309 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Partie B

1. D'après l'énoncé, la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme est égale à :

$$P(0,16 \leq X \leq 0,18).$$

On lit dans le tableau :

$$P(0,16 \leq X \leq 0,18) = 0,9044.$$

2. a) D'après le cours, Y suit une loi normale centrée réduite.

b) Si $0,16 \leq Y \leq 0,18$ alors :

$$\frac{0,16 - 0,17}{\sigma_2} \leq \frac{Y - 0,17}{\sigma_2} \leq \frac{0,18 - 0,17}{\sigma_2} \text{ et } \frac{-0,01}{\sigma_2} \leq Z \leq \frac{0,01}{\sigma_2}.$$

c) On doit avoir :

$$P\left(\frac{-0,01}{\sigma_2} \leq Z \leq \frac{0,01}{\sigma_2}\right) = 0,99.$$

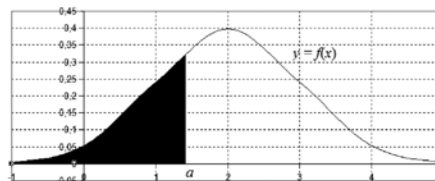
En utilisant le tableau, on lit :

$$\beta = \frac{0,01}{\sigma_2} = 2,5758 \text{ d'où } \sigma_2 = \frac{0,01}{2,5758} \approx 0,00385.$$

Finalement, à 10^{-3} près, $\sigma_2 \approx 0,004$.

Corrigé sujet inédit

Si une variable aléatoire X suit une loi normale de fonction de densité f , $P(X \leq a)$ mesure l'aire de la surface coloriée. L'aire totale de la surface comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1. On en déduit $P(X > a) + P(X \leq a) = 1$ et $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$.



Par ailleurs, pour savoir si un contrôle est conforme, à l'aide d'un intervalle de fluctuation, on vérifie si la valeur trouvée appartient à cet intervalle.

1. a) $P(X > 99) + P(X \leq 99) = 1$, donc $P(X > 99) = 1 - P(X \leq 99)$.

Ou encore $P(X > 99) = 1 - 0,01002045 = 0,98997955$.

D'où $P(X > 99) = 0,99$ au centième près.

b) $P(99 \leq X \leq 101) = P(X \leq 101) - P(X \leq 99)$.

Soit $P(99 \leq X \leq 101) = 0,98997955 - 0,01002045 = 0,9799591$.

Donc $P(99 \leq X \leq 101) = 0,98$ au centième près.

c) D'après le résultat précédent, la probabilité que le pot soit non conforme est de $1 - 0,98 = 0,02$.

2. a) Pour $p = 0,98$ et $n = 120$, on obtient :

$$I = \left[0,98 - 1,96 \sqrt{\frac{0,98 \times 0,02}{120}} ; \right.$$

$$\left. 0,98 + 1,96 \sqrt{\frac{0,98 \times 0,02}{120}} \right].$$

Soit $I \approx [0,955 ; 1,005]$.

b) $\frac{113}{120} \notin I$, donc un nouveau réglage de la chaîne de production est nécessaire.

Corrigé sujet inédit

1. On pose $Z = \frac{Y - 120}{8}$. Z suit alors la loi normale centrée réduite $N(0 ; 1)$.

$P(Y \geq 104)$ équivaut à $P(Y - 120 \geq -16)$ ou $P(Z \geq -2)$.

En utilisant les propriétés de la fonction de répartition, on peut écrire : $P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2)$.

On trouve, à l'aide d'une calculatrice, que $P(Z \leq 2) = 0,9772$.

La probabilité que le sachet pèse plus de 104 g est de 0,9772.

2. On effectue le changement de variable vu à la question précédente.

$$P(104 \leq Y \leq 136) = P(-16 \leq Y - 120 \leq 16) = P(-2 \leq Z \leq 2).$$

Les propriétés de la fonction de répartition permettent d'en déduire que :

$$P(104 \leq Y \leq 136) = 2P(Z \leq 2) - 1.$$

Soit $P(104 \leq Y \leq 136) = 2 \times 0,9772 - 1 \approx 0,9544 = 0,0456$.

Donc la probabilité que la masse du sachet ne soit pas comprise entre 104 et 136 grammes est de 0,0456.

Échantillonnage p. 63

Corrigé Amérique du Nord (mai 2013)

Partie A

1. $P(390 \leq X \leq 410) = P(X \leq 410) - P(X \leq 390) \approx 0,818 - 0,182 \approx 0,636$
au millième près.

2. Un pain choisi au hasard dans la production est commercialisable si et seulement si son poids est supérieur ou égale à 385 g.

$P(X \geq 385)$ est l'événement contraire de $P(X < 385)$ et $P(X < 385) = P(X \leq 385)$, donc :

$$P(X \geq 385) = 1 - P(X \leq 385) \approx 1 - 0,086 \approx 0,914 \text{ au millième près.}$$

3. On désigne par Y la variable aléatoire de paramètres $\mu = 400$ et d'écart type σ inconnu. On a :

$$P(Y \geq 385) = 0,96 \text{ d'où } 1 - P(Y \leq 385) = 0,96 \text{ et } P(Y \leq 385) = 0,04.$$

Or, d'après le cours, on sait que si Y suit une loi normale de paramètres $\mu = 400$ et σ , alors $Z = \frac{Y - 400}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite,

$$\text{et } P(Y \leq 385) = 0,04 \text{ entraîne } P\left(Z \leq \frac{385 - 400}{\sigma}\right) = 0,04.$$

D'après l'énoncé, nous savons que $P(Z \leq -1,751) \approx 0,040$.

$$\text{On a donc } -\frac{15}{\sigma} = -1,751 \text{ et finalement } \sigma = \frac{15}{1,751} \approx 8,6.$$

Si $\sigma = 8,6$, valeur approchée au dixième, la probabilité qu'un pain choisi au hasard soit commercialisable est de 96 %.

Partie B

1. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300 s'écrit :

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

avec $p = 0,96$ et $n = 300$.

$$p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ \approx 0,96 - 1,96\sqrt{\frac{0,96(1-0,96)}{300}} \approx 0,938$$

au millième près.

$$p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ \approx 0,96 + 1,96\sqrt{\frac{0,96(1-0,96)}{300}} \approx 0,982$$

au millième près.

On a donc $I = [0,938 ; 0,982]$ au millième près.

2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.

La fréquence observable de pains commercialisables dans cet échantillon est de $\frac{283}{300} \approx 0,9433$ soit environ 94 % de la production. Puisque $0,94 \in [0,93 ; 0,99]$, on peut décider que l'objectif a été atteint.

Algorithmique et logique p. 70

Corrigé Amérique du Nord (mai 2013)

1. a) Pour $n = 3$, l'algorithme affiche $1,8340$ à 10^{-4} près.

b) Cet algorithme affiche la valeur de u_n .

c) D'après le tableau, on peut conjecturer que la suite est croissante et convergente vers un nombre proche de 2.

2. a) Montrons par récurrence la propriété $P(n) : 0 < u_n \leq 2$.

Initialisation : on a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 \leq 2$, $P(0)$ est vraie.

On définit la fonction f sur $[0 ; 2]$ par $f(x) = \sqrt{2x}$.

On a pour tout entier n , $u_{n+1} = f(u_n)$. f est croissante sur $[0 ; 2]$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $0 < u_n \leq 2$.

$$\text{On a : } 0 < u_n \leq 2 \Leftrightarrow 0 < 2u_n \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 0 < \sqrt{2u_n} \leq \sqrt{4}$$

$$\Leftrightarrow 0 < u_{n+1} \leq 2.$$

$P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, on a pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 2$.

b) Montrons par récurrence la propriété $Q(n) : u_n \leq u_{n+1}$.

$$u_1 = \sqrt{2} \geq u_0 = 1, Q(0) \text{ est vraie.}$$

Si $u_n \leq u_{n+1}$, étant donné que f est croissante, on a $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. $Q(n+1)$ est vraie.

On en déduit donc, d'après le principe de récurrence, que $u_n \leq u_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et que (u_n) est une suite croissante.

c) On vient de prouver que, d'une part, la suite (u_n) est croissante et que, d'autre part, elle est majorée par 2. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

3. a) Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2$

or $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$, donc :

$$v_{n+1} = \ln \sqrt{2u_n} - \ln 2$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(\ln u_n + \ln 2) - \ln 2$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(\ln u_n - \ln 2) = \frac{1}{2}v_n.$$

De plus, $u_0 = \ln u_0 - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$, donc la suite (v_n) est donc la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b) On déduit de ce qui précède que pour tout entier naturel n ,

$$v_n = -\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$v_n = \ln u_n - \ln 2 \Leftrightarrow v_n = \ln \left(\frac{u_n}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_n}{2} = e^{v_n} \Leftrightarrow u_n = 2e^{v_n}$$

$$\Leftrightarrow u_n = 2e^{v_n}.$$

D'où, pour tout entier n , $u_n = 2e^{-\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

c) Étant donné que $0 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$, donc par composition des limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{v_n} = 1$ et finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

d) L'algorithme ci-dessous affiche en sortie la plus petite valeur de

n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Tant que $u \leq 1,999$
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Affecter à n la valeur $n + 1$
Sortie :	Afficher n

Corrigé sujet inédit

Étude de la variable « somme » pour chaque étape :

Au début, la valeur de la variable « somme » est égale à 0.

Première étape :

La valeur de l'itérateur « n » est 1. On ajoute donc $\frac{1}{1}$ à la valeur de « somme » qui correspond mathématiquement au calcul : $0 + \frac{1}{1}$.

Deuxième étape :

La valeur de l'itérateur « n » est de 2. On ajoute donc $\frac{1}{2}$ à la valeur de « somme » qui correspond maintenant au calcul mathématique : $0 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$.

Conclusion :

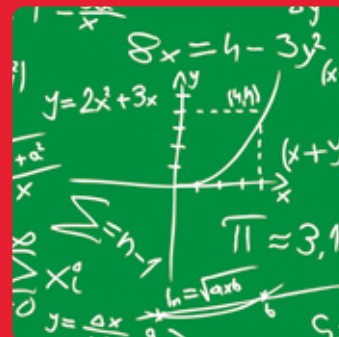
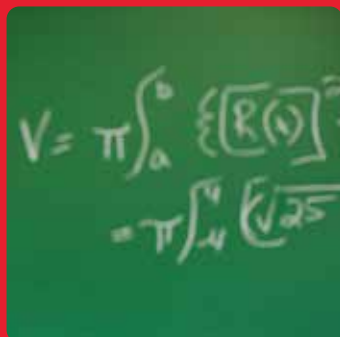
À la fin de l'exécution de l'algorithme, la valeur de la variable « somme » correspond au calcul :

$$0 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10}.$$

C'est-à-dire la somme des inverses des entiers de 1 à 10.

CULTURE SCIENTIFIQUE

MATHÉMATICIEN(NE)S CONTEMPORAIN(E)S EMBLÉMATIQUES



La géométrie algébrique, l'étincelant monde de Claire Voisin

Pour cette chercheuse sans concession, qui reçoit cette année la Médaille d'or du CNRS, rien ne peut égaler la beauté des objets mathématiques.

« *Je suis Claire Voisin et je démontre des théorèmes.* » Voici, comment, sobriement, se définit la récipiendaire de la dernière Médaille d'or du CNRS, qui lui sera remise le 14 décembre. Cette mathématicienne de 54 ans est aussi, depuis cette année, professeure au Collège de France, auprès de ses collègues Alain Connes, Pierre-Louis Lions et Gérard Berry.

« *J'étais horrifiée au début* », avoue-t-elle. Non à l'idée de rejoindre la prestigieuse institution, mais à celle de quitter le CNRS, autre lieu d'excellence, uniquement consacré à la recherche. « *Une structure protectrice* », explique la chercheuse, qui livre des confessions rares sur son travail quotidien. « *Souvent, en maths, on souffre. Trouver des idées est difficile. On a les problèmes en tête, mais on cherche le fil pour commencer. A cela s'ajoutent les difficultés techniques à contourner* », décrit Claire Voisin, qui dit même avoir déjà été « *aux trois quarts* » dans un demi-désespoir. « *Mais parfois, on a aussi un sentiment de triomphe !* »

Le « parfois » est en fait assez fréquent chez elle, comme en témoignent les récompenses reçues : prix de la Société européenne de mathématiques en 1992, prix de la fondation Clay en 2008, ainsi qu'une conférence plénière en 2010 au Congrès international quadriennal de mathématiques. Distinctions auxquelles s'ajoutent les Médailles de bronze, puis d'argent du CNRS. « *Claire est une étoile internationale en maths* », souligne Leila Schneps, amie de trente ans, chercheuse à l'Institut de mathématiques de Jussieu et traductrice en anglais d'un livre référence de sa collègue (*Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry*, 2007).

« *Elle associe une grande créativité, en sortant des sentiers battus, et une grande technique, en n'hésitant pas à mettre les mains dans le cambouis quand il faut* », résume Arnaud Beauville, professeur émérite à l'université de Nice et directeur de la thèse de cette étudiante brillante, entrée à l'École normale supérieure de Sèvres en 1981. « *Elle est généreuse dans ses idées. Elle a une grande culture mathématique et connaît beaucoup d'exemples qu'elle partage avec étudiants et collaborateurs* », apprécie l'un de ses anciens étudiants en thèse, François Charles, aujourd'hui professeur à l'université Paris-Sud. Il souligne aussi son « *exigence* », envers elle-même et ses étudiants.

Preuve par l'exemple. Lorsque nous la rencontrons dans son nouveau bureau encore vide du Collège de France, elle vient de corriger la version écrite de sa leçon inaugurale du 2 juin, car il manque « : » dans une phrase. « *Un énoncé mathématique est économique, on ne peut remplacer un mot par un autre* », tranche-t-elle. « *Comme son livre, Claire est complète, efficace et sévère* », décrit Leila Schneps. « *Ça ne fait pas de prisonniers* », complète Arnaud Beauville en reprenant les mots d'un critique anglophone de ce livre, pour souligner l'absence de concessions de l'auteure.

Claire Voisin excelle dans une branche très abstraite des mathématiques, la géométrie algébrique. Comme le nom l'indique, il s'agit d'étudier des formes (la géométrie) décrite par des opérations et des équations (l'algèbre). Ainsi, un cercle peut soit se dessiner, soit se décrire comme le lieu des points tels que $x^2 + y^2 = 1$. Selon les problèmes, se placer dans un formalisme ou dans l'autre peut simplifier la tâche. Bien sûr, très vite, cela se complique. Les équations sont des polynômes avec des puissances plus grandes que 2 et avec des coefficients qui peuvent être complexes (un « pays » où un nombre au carré peut être négatif). Les surfaces sont appelées « variétés »

et peuvent, elles aussi, s'épanouir dans de plus grandes dimensions que les deux ou trois habituelles. Les structures sont des « motifs », les outils des « cohomologies », les coïncidences des « syzygies »...

La discipline est marquée par l'un des génies des maths, Alexandre Grothendieck, disparu en 2014, et qui est aussi célèbre pour sa rupture avec sa communauté dans les années 1980. Claire Voisin n'en fait pas son unique maître et le juge d'ailleurs trop « *mégalo* » et « *misogyne* ». Elle lui préfère, pour le style, Jean-Pierre Serre, Pierre Deligne ou encore Phillip Griffiths. Son résultat favori est « *d'avoir détruit l'intuition des gens* », sourit la chercheuse. Elle a en effet démontré qu'une conjecture était fautive ! Beaucoup pensaient qu'en « *déformant* » une certaine famille de variétés, très générales, on pouvait toujours se ramener à des variétés algébriques, plus « structurées » et plus connues. Eh bien non, mais cela repose sur des subtilités à la saveur réservée aux initiés.

Alain Connes préfère, lui, mettre en avant un résultat ayant intéressé les physiciens qui se penchent sur la théorie des cordes, un domaine qui tente de dépasser les théories actuelles de physique des particules. Claire Voisin a contribué à jeter des ponts entre des concepts a priori éloignés. « *Avec les physiciens, j'avais un peu l'impression de servir à plâtrer les choses et d'être considérée comme subalterne* », témoigne la mathématicienne. « *Les physiciens traversent le décor. Ils écrivent vite et passent à autre chose, quand nous, nous creusons. On a du mal à discuter* », tranche celle qui n'hésite pas à dire qu'elle était nulle en physique à l'école et que ses erreurs « *la faisaient éclater de rire* ».

La beauté des objets mathématiques

C'était différent pour les maths, qui l'amusaient. « *On ne s'ennuie jamais quand on fait des maths !*, explique la chercheuse qui, adolescente, pouvait passer quinze jours de vacances à bûcher des problèmes d'olympiades. *Mais je ne pensais pas en faire mon métier, car cela ne me semblait pas assez intellectuel.* » Elle ajoute : « *C'est très différent aujourd'hui.* »

Elle a été « *happée* » par ces objets mathématiques complexes, se jetant intensément dans ce monde des variétés algébriques complexes. « *On a une vie tellement riche, en maths, que la vie quotidienne fait pâle figure. Notre vie est étincelante. Les objets y sont riches, lumineux, d'une beauté incroyable. On n'en finit pas de les admirer !* » Et d'enfoncer le clou : « *Un groupe*

LES DATES

- 1962 : Naissance à Saint-Leu-la-Forêt.
- 1981 : Entrée à l'ENS.
- 1983 : Agrégation.
- 1986 : Thèse sur le théorème de Torelli pour les hypersurfaces cubiques de dimension 4.
- 2010 : Membre de l'Académie des sciences.
- 2 juin 2016 : Titulaire de la chaire « géométrie algébrique », elle devient ainsi la première femme mathématicienne à entrer au Collège de France.

est un objet mathématique plus simple à comprendre qu'un composant électronique. Nous connaissons mieux nos objets que la plupart de ceux, réels, autour de nous. » « Claire Voisin connaît personnellement toutes les variétés algébriques », résume ironiquement Alain Connes, paraphrasant une boutade célèbre chez ses collègues.

La chercheuse s'épanouit donc dans ces espaces étranges. Elle tourne même autour d'un problème mis à prix à 1 million de dollars par la fondation Clay. Cette conjecture dite « de Hodge » est une proposition dont on ne sait même pas si elle est vraie. Il y est question d'une structure cachée des variétés. « Ce qui compte, c'est la profondeur d'un énoncé, pas qu'il soit vrai ou faux », note la chercheuse, qui a démontré pas mal de conjectures autour de ce haut sommet de sa discipline. « Je n'aime pas trop l'idée de mettre à prix des énoncés. Les lire est déjà intéressant en soi. On sent qu'ils appellent une théorie, qu'ils structurent les maths », indique-t-elle, décrivant là l'un des moteurs de sa discipline.

Malgré l'intensité dans le travail et la difficulté de la tâche, Claire Voisin n'est pas hors du monde. Elle a élevé cinq enfants avec son mari, Jean-Michel Coron, également mathématicien et qui a rejoint son épouse

sur les bancs de l'Académie des sciences en 2014. Elle s'est mise à la musique pour les accompagner et partage avec ses filles ses impressions de lecture. Sur sa position de femme, académicienne, professeure ou mathématicienne, elle s'énerve un peu, avec son ton direct caractéristique, comme dans un courrier au Monde en 2014 : « Je souhaite que mon statut de femme, qui me plaît beaucoup, reste du domaine privé. » Elle reconnaît tout de même qu'il faudrait agir en amont du laboratoire, dans les formations, pour corriger des déséquilibres.

Elle s'évade aussi par les conférences, l'édition et la relecture d'articles, l'encadrement de thésards... L'enseignement, en revanche, lui a toujours fait peur ; elle reconnaît même avoir « perdu » les étudiants, sans doute car trop « exigeante ». Mais pour ses cours au Collège de France, elle est moins stressée, car elle a du temps pour expliquer avec rigueur ses idées. Juste un risque à éviter, « le danger de se parer des plumes de paon en entrant dans cette institution. Ma hantise était de tomber dans les mondanités », dit-elle. Sans concession. ●

David Larousserie, *Le Monde* daté du 14.12.2016

Alan Turing : un centenaire bien vivant

Le mathématicien anglais, qui s'est suicidé à 42 ans, aurait eu 100 ans le 23 juin. Son héritage est immense : logique, informatique, cryptologie, intelligence artificielle et biologie du développement portent encore son empreinte.

Quel rapport entre une pomme, une brique de Lego, un sous-marin allemand de la seconde guerre mondiale, un ordinateur jouant aux échecs et les taches d'un guépard ? Tous ces éléments résument, en raccourci, la vie et l'œuvre de l'un des plus grands scientifiques du XX^e siècle, Alan Turing, qui aurait eu 100 ans ce 23 juin. Ce mathématicien britannique est cependant mort bien avant d'avoir atteint cet âge : il s'est suicidé à 42 ans, le 7 juin 1954.

Sa brève carrière a pourtant suffi à en faire un pionnier et un visionnaire dans plusieurs domaines scientifiques : l'informatique, l'intelligence artificielle et la biologie. L'ordinateur, les robots et le concept si florissant d'application (comme pour les téléphones portables) lui doivent donc beaucoup. Alors qu'à son époque n'existaient ni transistors électroniques, ni mémoires magnétiques, ni écrans tactiles...

Mais revenons à notre inventaire hétéroclite. La pomme est celle qu'il croqua pour se suicider après l'avoir enduite de cyanure, alors qu'il avait été condamné pour homosexualité par la même loi qui envoya Oscar Wilde aux travaux forcés au siècle précédent.

La brique de Lego est l'élément qui a permis à un groupe d'étudiants de l'ENS Lyon de rendre hommage à leur aîné en construisant une machine de Turing, sorte d'ordinateur entièrement mécanique. L'œuvre, unique au monde, sera exposée lors du colloque français organisé en hommage à Alan Turing du 2 au 4 juillet à Lyon, dont la première journée sera grand public.

Le sous-marin allemand représente la contribution d'Alan Turing à la lutte contre les ennemis de la Grande-Bretagne quand, au sein des services secrets anglais, il participa au décodage des messages chiffrés de la Wehrmacht.

L'ordinateur joueur symbolise tous ces avatars de l'intelligence artificielle qui tentent d'imiter le cerveau humain, voire de le surpasser, comme Turing l'avait imaginé.

Enfin, les taches de la peau du guépard sont l'une des dernières énigmes qu'Alan Turing tenta de résoudre : le secret de l'apparition des formes et figures dans la nature.

Voilà donc, en résumé, moins de vingt ans d'une carrière scientifique marquée par au moins trois articles scientifiques majeurs. Retour en détail sur ce parcours d'exception, plus cohérent qu'il n'y paraît...

D'une machine à ruban à un prix de 1 million de dollars

Le 28 mai 1936, Alan Turing, alors à Cambridge, n'a pas encore son doctorat de mathématiques lorsqu'il envoie à la Société mathématique anglaise un article qui paraîtra l'année suivante et qui résout l'un des problèmes majeurs de l'époque : existe-t-il une méthode effective pour déterminer si une formule est vraie ou non ? La réponse de Turing est... non ! L'arsenal mathématique, malgré sa puissance théorique, ne permet pas de tout calculer. En particulier, il n'est pas possible d'écrire un algorithme capable de décider si une fonction mathématique est calculable ou pas, ou bien si une proposition est vraie ou fausse.

Cette question on ne peut plus fondamentale est posée justement à une époque où plusieurs mathématiciens, dont des spécialistes de la logique, veulent tester les bases mêmes de leur discipline. Ces dernières sont en plein vacillement depuis que Kurt Gödel a peu ou prou montré qu'il n'est pas possible de prouver certains énoncés en restant dans le cadre théorique défini. « Alan Turing se situe au croisement de deux traditions.

L'une que l'on peut qualifier de "déterministe", incarnée par Laplace par exemple, pour qui, avec les bons axiomes et les bonnes équations, tout serait calculable. Et l'autre qui émerge avec Poincaré, avec son travail sur le chaos, et Gödel. Le premier écorne le paradigme déterministe en montrant que l'évolution de certains systèmes devient imprévisible. Le second en démontrant son théorème d'incomplétude », résume Jean Lassègue, directeur de recherche au CNRS et philosophe au Centre de recherche en épistémologie appliquée de l'Ecole polytechnique. « En montrant la non-décidabilité de certains problèmes, Turing est "non déterministe", mais sa démonstration est, en un sens, "déterministe" », poursuit le chercheur, par ailleurs auteur d'une biographie de Turing. En effet, pour résoudre ce problème de calculabilité, Turing construit par la pensée une machine, véritable modèle de calcul, dont il parvient à faire ressortir les limites. Son concept décrit un système composé d'un ruban sur lequel sont inscrites des données d'entrée, voire des instructions (qui font office de « programme » selon le vocabulaire d'aujourd'hui). Une tête peut lire et écrire sur ce ruban et décider de le faire avancer. Une mémoire ou un processeur agit en fonction des entrées et des fonctions qui lui ont été assignées. C'est exactement sur ce principe qu'une poignée d'étudiants en informatique de l'ENS Lyon ont réalisé une machine de Turing avec près de 20 000 pièces de Lego actionnées par de l'air comprimé. Cet « ordinateur » parvient à inverser les trois lettres d'un mot en quinze minutes.

« La machine de Turing n'est pas utilisée en tant que telle dans les laboratoires d'informatique. Elle est cependant omniprésente, comme peut l'être un modèle atomique pour un chimiste », explique François Morain, du Laboratoire d'informatique de l'Ecole polytechnique (LIX). La machine de Turing peut, en fait, simuler n'importe quel calcul et n'importe quel ordinateur actuel ou futur. « La physique classique et la physique quantique sont simulables par une machine de Turing », précise Pascal Koiran, informaticien de l'ENS Lyon.

Mais si cette machine permet de définir si une fonction est calculable ou non, elle ne dit rien sur l'efficacité du calcul, c'est-à-dire sur les ressources nécessaires pour effectuer ce calcul (combien de temps, de mémoire...). Cette branche s'appelle la « complexité » et fait l'objet d'intenses travaux dans les laboratoires d'informatique. Un prix de 1 million de dollars a même été proposé en 2000 par la fondation américaine Clay pour qui résoudra l'épineux problème suivant : existe-t-il des problèmes mathématiques qui ne peuvent être résolus en un temps « raisonnable » (la formulation exacte étant bien sûr moins triviale) ?

Par exemple, savoir si un nombre entier est un nombre premier (divisible seulement par un et par lui-même) est calculable en un temps « raisonnable ». En revanche, trouver le trajet le plus court pour un voyageur de commerce passant par un grand nombre de villes (plusieurs milliers) n'entre pas dans cette catégorie. La question est de savoir si quelqu'un établira un meilleur algorithme ou si cette question, comme d'autres problèmes, restera vraiment hors catégorie. On le voit, ce problème est tout à fait dans l'esprit d'un Turing cherchant à déterminer la frontière entre le calculable et le non-calculable.

Imitation et limitation

Après avoir jeté les bases de ce qui ne s'appelle pas encore l'informatique, Alan Turing ouvre un nouveau champ en 1950 dans la revue de philosophie *Mind*. Son texte commence sobrement par : « *Je propose de*

considérer la question : les machines peuvent-elles penser ? » Sa réponse est, cette fois, plutôt oui. Il propose une manière opérationnelle de s'attaquer à cette question, sous forme d'un jeu resté célèbre, le jeu de l'imitation ou « test de Turing ». Dans une version simplifiée, un interrogateur pose des questions à deux interlocuteurs sans savoir s'ils sont des hommes ou des machines. Les réponses étant manuscrites, il doit trouver qui est qui. Soixante ans après ce défi, le Prix Loebner, qui met en compétition chaque année plusieurs machines, a bien déterminé un vainqueur, le « robot » Chip Vivant, mais celui-ci n'a pas trompé les quatre examinateurs lors de la finale du 15 mai dernier. Personne n'a donc encore reçu le prix de 100 000 dollars promis.

Chip Vivant, conçu par l'Américain Mohan Embar, est en fait un agent conversationnel comme on commence à en voir de plus en plus sur le Web ou au téléphone pour répondre automatiquement à nos questions. En général, ils sont bons si l'interlocuteur ne sort pas du domaine d'excellence du robot. Sur le blog de Mohan Embar, une juge le félicite en rappelant que d'autres robots soit l'ont insultée, soit ont essayé de lui faire croire qu'ils étaient un chat, soit ont inversé les rôles en la bombardant de questions pour l'empêcher de poser les siennes. Chip Vivant a beau avoir été plus gentil, il a été démasqué.

En général, la technique consiste à puiser dans de vastes bases de données de réponses et à extraire le bon texte en fonction de plusieurs dizaines de milliers de règles logiques. La force brute et de grandes capacités de mémoire et de logique ont ainsi permis à IBM et son ordinateur Watson de gagner à un jeu télévisé aux Etats-Unis en 2011.

« Turing est une figure importante de l'intelligence artificielle. Passer de l'idée d'un calculateur à la réalisation d'interactions entre homme et machine est très visionnaire », constate Nicolas Sabouret, du Laboratoire d'informatique de Paris-VI. « Il y a une continuité entre son article de 1937 et celui de Mind. Il s'agit de fixer des limites et de travailler à repousser les limites de ce qui est faisable dans ce cadre », rappelle Jean Lassègue. Beaucoup de laboratoires cherchent donc à aller encore plus loin dans l'imitation de l'homme par les machines, même s'ils n'ont pas réussi à passer le fameux « test ».

« Il ne faut pas oublier que l'intelligence n'est pas que dans le cerveau ! », provoque Jean Lassègue. « Nous cherchons par exemple à prendre en compte l'interaction non verbale, comme les émotions. Ces dernières jouent un rôle social très important », précise Nicolas Sabouret, dont l'un des objectifs est de proposer un entraînement aux entretiens d'embauche en faisant dialoguer un chômeur avec un ordinateur. Jean Lassègue poursuit : « En réalité, Turing défend là aussi deux projets. D'une part, le rêve d'une mécanisation de la pensée, processus déterministe et prédictif, et, d'autre part, celui d'une pensée vue au contraire comme un processus non prédictif et irréversible. »

Turing n'a donc pas seulement été le premier à imaginer la possibilité, pour une machine, de simuler un esprit humain détaché de son corps matériel, il aurait aussi ouvert la voie à ceux qui aujourd'hui, en robotique, tiennent compte d'un ensemble de facteurs « extérieurs », émotions, expressions du visage, stimuli environnementaux...

Le secret des formes de la nature

Dernier article de la vingtaine publiée en moins de vingt ans de carrière, celui intitulé « Les bases chimiques de la morphogénèse », paru en 1952, n'est pas le moins important. Il se propose d'étudier

l'apparition de formes et de structures dans un système à partir d'un matériau homogène. Comment les taches viennent au léopard ? Pourquoi les graines de tournesol s'organisent-elles en spirale au centre de la fleur ? Et, plus précisément, comment l'hydre d'eau douce se multiplie-t-elle à partir de sa scission en deux ou trois morceaux ? A priori, quoi de plus naturel pour un spécialiste des codes secrets que de s'attaquer au défi du code de la nature, surtout en pleine émergence de la génétique ? Pourtant, selon Jean Lassègue, l'attraction pour ce problème n'a rien à voir avec l'ADN. « *Cela s'inscrit dans la continuité de ses articles de 1936 ou de 1950. Une fois encore, il s'agit de s'interroger sur les limites du déterminisme* », rappelle le philosophe. Il est vrai que dans la nature le déterminisme prédictif est l'exception et pas la règle. Les sarabandes ondulantes des nuées d'étourneaux, l'architecture complexe des termitières ou les circonvolutions du cerveau ne se déduisent pas d'un jeu d'équations simples à résoudre. Alan Turing imagine donc un modèle simple qui lui permet de mettre en équations l'apparition de ces formes à partir d'une situation banale. Deux molécules dites morphogènes sont mélangées. L'une est activatrice et l'autre inhibitrice. L'augmentation de la concentration de l'une contrarie celle de l'autre, ce qui contraint le système à osciller. En outre, ces molécules diffusent dans la solution. En mélangeant mathématiquement tous ces ingrédients, Turing montre que des structures ordonnées apparaissent ! Quelques taches noires se dessinent sur une feuille blanche. De là partiront les tentacules de l'hydre.

Depuis, des chimistes ont trouvé effectivement des réactions obéissant à ces règles créant, au milieu de la solution, des anneaux, des taches, des zébrures... Des biologistes, dans les années 1980, ont aussi identifié des morphogènes dans le développement de l'embryon, comme le rappelle John Reinitz, de l'université de Chicago, qui a résumé ce travail dans un numéro spécial de la revue *Nature* consacré à Alan Turing le 23 février.

Enfin, ces dernières années, grâce aux progrès de l'imagerie,

PARCOURS

- 23 juin 1912 : Naissance à Londres.
- 1936 : Début de son doctorat à Princeton auprès de John von Neumann et Alonzo Church.
- 1938-1942 : Membre des services secrets, chargé du déchiffrement des messages codés allemands.
- 1945-1948 : Recrutement à l'université de Manchester pour construire ce qui sera le deuxième ordinateur en Europe, l'Automatic Computing Engine.
- 1950 : Publication de son article sur l'intelligence et le calcul dans lequel il expose son « test ».
- 7 juin 1954 : Suicide par ingestion d'une pomme empoisonnée, à Wilmslow (Cheshire) près de Manchester.

notamment, des chercheurs réalisent qu'au niveau même des cellules il faut tenir compte non seulement des gènes mais aussi des différentes formes de la matière et de son environnement pour décrire la géométrie des tissus (*Le Monde* du 24 décembre 2011). Ces situations sont loin de se réduire à deux seules entités en présence, mais la philosophie du chercheur anglais est bien celle qui sous-tend ces travaux.

L'article d'Alan Turing publié par l'Académie royale des sciences fait aussi date pour une autre raison. Il contient la première simulation numérique d'un phénomène de la nature, selon John Reinitz. Une technique largement utilisée et développée depuis lors grâce... aux ordinateurs. La boucle est bouclée sur un parcours des plus cohérents qui a fait naître des branches toujours vertes et foisonnantes. ●

David Larousserie, *Le Monde* du 23.06.2012

Le Français Laurent Lafforgue, « Nobel » de mathématiques

À 36 ans, le chercheur de l'Institut des hautes études scientifiques (IHES) a reçu, le 20 août [2002] à Pékin, la médaille Fields, la plus haute récompense décernée dans cette discipline. Elle couronne également les travaux du Russe installé aux États-Unis Vladimir Voevodsky.

Septième Français à obtenir la récompense suprême en mathématiques depuis 1950, Laurent Lafforgue a reçu, mardi 20 août, la médaille Fields 2002, distinction qui est considérée comme l'équivalent des prix Nobel attribués aux chercheurs dans d'autres disciplines. Il partage ce prix, remis lors du Congrès international des mathématiciens, qui se tient à Pékin du 20 au 28 août, avec le Russe Vladimir Voevodsky, membre de l'Institute for Advanced Study de Princeton (New Jersey).

Professeur permanent à l'Institut des hautes études scientifiques (IHES) de Bures-sur-Yvette (Essonne) et directeur de recherche au CNRS, Laurent Lafforgue, 36 ans, s'est distingué grâce à ses travaux sur la « correspondance de Langlands ». En 1967, le mathématicien Robert Langlands lançait une série de propositions dont les vérifications alimentent de nombreux programmes de recherche.

Le nouveau lauréat français a obtenu la médaille Fields pour sa publication intitulée *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de*

Langlands, et dont le résumé précise qu'elle « *démontre la correspondance de Langlands pour GL, sur les corps de fonctions* ». À lui seul, ce libellé reflète bien le caractère hermétique des travaux de pointe en mathématiques. La complexité des notions autant que leur degré d'abstraction les mettent hors de portée du *vulgum pecus*. Néanmoins, Laurent Lafforgue ne désespère pas de faire percevoir la beauté des voies explorées par ses pairs au cours des derniers siècles. L'origine des recherches actuelles remonte à l'élaboration par Leonhard Euler (1707-1783) de la loi de réciprocité quadratique qui stipule que, étant donné deux nombres premiers p et q , il existe un entier x tel que $x^2 - p$ est divisible par q et un entier y , tel que $y^2 - q$ est divisible par p . C'est Carl Friedrich Gauss (1777-1855) qui a démontré le premier, à 19 ans, cette loi, dont la généralisation aux puissances supérieures à 2 n'a été obtenue qu'en 1927 par Emil Artin.

Auparavant, au cours de la seconde moitié du XIX^e siècle, la théorie algébrique des nombres a été progressivement élaborée, essentiellement en Allemagne. De plus en plus générale et abstraite, cette dernière s'appuie sur des notions comme les corps (ensemble d'éléments pouvant s'additionner, se soustraire, se multiplier et se diviser comme les nombres réels), leurs extensions, ainsi que les groupes tels que celui de Galois, issu de la théorie élaborée par Evariste Galois (1811-1832). Entre la fin du XIX^e siècle et 1950 apparaît la théorie des corps de classe, qui s'attaque à la partie commutative (qui rassemble les cas où $ab = ba$) du groupe de Galois. Emil Artin en tire la généralisation de la loi de réciprocité. C'est avec les travaux sur l'extension de la théorie des corps de classe aux cas où le groupe de Galois n'est pas commutatif qu'apparaît le mathématicien canadien Robert Langlands.

Un article de 240 pages

En 1967, à 31 ans, il adresse une lettre de 17 pages à André Weil (1906-1998), l'un des grands noms de la théorie des nombres, afin d'y exposer ses idées. Largement diffusées, ses hypothèses laissent entendre que « *les nombres entiers se comportent comme s'ils étaient une courbe* », explique Laurent Lafforgue. Une troublante analogie apparaissait ainsi entre des domaines jusqu'alors distincts. « *Il est alors possible d'établir un véritable dictionnaire dans lequel un nombre premier correspond à un point d'une courbe, une fraction à une fonction définie sur une courbe...* » En reliant la théorie des nombres, l'algèbre et l'analyse, Robert Langlands participe au mouvement d'unification des

mathématiques qui se développe des années 1960 aux années 1980. De telles conjectures, c'est-à-dire, en mathématiques, des affirmations non encore démontrées, révélaient un « *grand mystère des mathématiques* » totalement inconnu, mettant en correspondance des familles d'objets jusque-là indépendantes et affirmant que les relations entre leurs objets sont identiques... Peu à peu, la conjecture de Langlands paraît si lumineuse que dans le monde entier les mathématiciens tentent de la démontrer pour la transformer en théorème. Ils s'attaquent à deux corps : celui des nombres et celui des fonctions.

Dans le premier, l'un des grands résultats est obtenu par l'Anglais Andrew Wiles, qui parvient à démontrer en 1994 le fameux théorème de Fermat, élaboré par Pierre de Fermat (1601-1665) en 1637. Cet exploit ne résout qu'un cas particulier dans le corps des nombres, domaine considérablement plus difficile que celui des corps de fonctions. C'est dans ce dernier que Laurent Lafforgue va s'illustrer en démontrant la correspondance de Langlands avec un grand degré de généralité qui confère à son travail toute sa portée.

Avant lui, l'Ukrainien Vladimir Drinfeld (médaillé Fields en 1990) avait effectué, à 20 ans, le même travail pour la valeur $n = 2$. Laurent Lafforgue étend la démonstration pour tout n . En janvier, sa publication finale est éditée par la prestigieuse revue allemande *Inventiones Mathematicae*. Un article de 240 pages en français, alors que les publications habituelles ne dépassent pas les 40 pages. Au total, avec ses autres articles, Laurent Lafforgue a déjà publié 600 pages. Pour lui, « *la conjecture de Langlands compte parmi les plus belles choses proposées en mathématiques. Les énoncés sont extrêmement simples et tiennent souvent en trois lignes. Que cela puisse être vrai est éblouissant ! Mais il faut des centaines de pages pour démontrer quelques cas très particuliers* ».

Christian Peskine, directeur scientifique adjoint du département sciences physiques et mathématiques du CNRS, qualifie le travail de Laurent Lafforgue d'« *extraordinaire* ». Pourtant, ses résultats ne bénéficient pas de l'aura qui entoure ceux d'Andrew Wiles, sans doute en partie parce que ce dernier a résolu un problème vieux de plus de trois siècles, alors que les conjectures de Langlands n'ont que trente-cinq ans. Pour autant, Christian Peskine ne cache pas sa joie de voir un nouveau Français décrocher la médaille Fields et y trouve « *une confirmation de la richesse du tissu scientifique français en mathématiques.* » ●

Michel Alberganti, *Le Monde* daté du 22.08.2002

Science avec conscience

Cédric Villani, 41 ans, mathématicien. Chercheur médaillé et médiatique, il défend une discipline qui apprend à « *refuser les idées toutes faites* ».

Se méfier, toujours, des apparences. C'est la promesse que l'on se fait après deux heures passées en tête-à-tête avec Cédric Villani, Médaille Fields 2010 de mathématiques. Difficile, pourtant, de ne

pas s'arrêter au look de ce romantique, féru de musique classique et pianiste à ses rares heures creuses, qui cultive son allure de dandy à la Oscar Wilde ou à la Franz Liszt.

Cheveux de jais aux épaules, costume trois pièces rehaussé d'un foulard noué en lavallière, oignon au gousset, boutons de manchette et araignée à la boutonnière, un bijou qu'il fait confectionner par un artisan lyonnais et dont il possède toute une collection. « *Enfant, confie-t-il, j'étais un timide maladif. Pour m'en défendre, j'ai choisi d'attirer le regard.* »

La planète des mathématiciens est, il est vrai, peuplée d'excentriques à la sensibilité exacerbée. Comment, sinon, vagabonder dans les sphères éthérées de la pure abstraction ? Tout de même, à regarder la photographie affichée sur la porte de son bureau de directeur de l'Institut Henri-Poincaré, dans le Quartier latin à Paris – on l'y voit bondissant, à l'image de Nixon, Dali ou Marilyn Monroe saisis par l'objectif de Philippe Halsman –, à siroter le thé vert coréen qu'il vous sert dans un mug à son nom – lui utilise une tasse portant celui de Poincaré –, à le découvrir dans les pages mode de *L'Express*, dans *Paris Match* ou dans *Madame Figaro*, on se dit que cet homme est habité par un besoin de reconnaissance singulier. Et que la médaille Fields, la plus prestigieuse distinction de sa discipline, décernée à des mathématiciens de moins de 40 ans, n'a pas suffi à l'assouvir.

Jugement hâtif. Le chercheur révèle, dès les premiers mots, un naturel affranchi des conventions. Il est lui-même, tout simplement, Cédric, prénom anglo-saxon aux consonances aristocratiques, Villani, patronyme méditerranéen aux origines paysannes. Et cette simplicité est sa suprême élégance. S'il paye de sa personne, sur les plateaux de télévision ou dans l'émission « La Tête au carré » de *France Inter*, dont il est un chroniqueur régulier, c'est pour transmettre sa passion pour les sciences. Peu de chercheurs autant que lui, qui a donné cette année une vingtaine de conférences grand public, sont d'aussi actifs militants de la cause des mathématiques et, plus largement, de la recherche.

Sa première expérience du petit écran l'a marqué. Invité du « Grand Journal » de Canal+, il s'y est retrouvé aux côtés de Franck Dubosc. Lui qui n'a pas la télévision ignorait tout de l'humoriste. « *Le lendemain, raconte-t-il, des collègues m'ont demandé ce qui m'avait pris d'aller faire le guignol. Mais j'étais ravi. Pour ce qui est de toucher du monde, c'était le pompon ! Même les éboueurs m'arrêtaient dans la rue.* » Le même jour, il participait, plus sérieusement, aux « Mots de minuit » sur *France 2*...

Ce fils de pieds-noirs aux ascendants napolitain, génois et grec, né à Brive-la-Gaillarde (Corrèze) « *au milieu des vaches et des coquelicots* », sait ce qu'il doit à l'apprentissage des mathématiques. « *Une école d'imagination, de persévérance et de rigueur, qualités utiles dans toutes sortes de métiers et de situations* », dit-il. Il connaît aussi la dette qu'il a envers le système éducatif français, ses classes préparatoires et ses grandes écoles, qui lui ont donné « *beaucoup de bonheur* ». Il y a fait un parcours brillantissime : 18 de moyenne au baccalauréat avec la note maximale en mathématiques, maths sup et spé à Louis-le-Grand, puis l'École normale supérieure (ENS) de la rue d'Ulm. Il y découvre le cinéma et la musique, anime le club de spectacles, se laisse élire président de l'association des élèves, se consacre à la préparation du bicentenaire de l'école. Au point que son directeur de thèse, Pierre-Louis Lions, Médaille Fields en 1994, le rappelle à l'ordre d'une note manuscrite : « *Il faudrait peut-être se remettre au travail.* »

PARCOURS

- 1973 : Naissance à Brive-la-Gaillarde
- 1998 : Doctorat sur l'étude statistique des gaz
- 2009 : Directeur de l'Institut Henri-Poincaré
- 2010 : Médaille Fields de mathématiques

Sa thèse, 450 pages, sera une « *contribution à l'étude mathématique des équations de Boltzmann et de Landau en théorie cinétique des gaz et des plasmas* ». En clair, à l'étude statistique du comportement des milliards de milliards de particules qui, dans un milieu gazeux, évoluent vers un état de désordre croissant.

Ses travaux le mèneront à s'intéresser au transport optimal ou, pour faire simple, au déplacement d'objets au moindre coût énergétique, ces objets pouvant être des étoiles, des électrons, des voitures ou des produits alimentaires. La question, à la croisée des mathématiques et de la physique théorique, s'applique aussi bien à l'astrophysique qu'à la mécanique des fluides ou à la météorologie. Ses deux ouvrages majeurs sur le sujet, *Topics in Optimal Transportation* (American Mathematical Society, 2003) et *Optimal Transport* (Springer, 2008), font référence.

Dans sa vie scientifique comme dans sa vie personnelle, Cédric Villani dit s'être laissé porter par « *le hasard des rencontres* », par « *la chance* » aussi. Il en a tiré la conviction que « *les vraies découvertes, celles qui marquent une rupture, ne sont jamais planifiées* ». Et que la recherche, que les gouvernements aimeraient canaliser, devrait être « *un peu plus libre* ». Le chercheur, pense-t-il, est « *au centre de la société* », même s'il en est un acteur « *invisible* ». La science, plaide-t-il, est « *ce qui fait avancer la société, ce qui change la vie* ». Mais lui qui se prête volontiers aux sollicitations des médias aime aussi « *l'humilité* » du métier de chercheur, « *petit face aux mystères de l'Univers et à des questionnements auxquels il ne peut répondre seul* ».

Il s'inquiète des mauvais coups portés à l'enseignement des sciences. Avec les Prix Nobel de physique Claude Cohen-Tannoudji et Albert Fert et des centaines de collègues moins connus, il a signé fin 2010, à l'adresse du ministre de l'éducation, Luc Chatel, une pétition. Le texte s'alarmait de la baisse du nombre d'heures allouées aux sciences par la réforme des lycées, alors qu'à ses yeux « *il faut plus que jamais mettre le paquet sur les filières scientifiques* ».

Ces matières développent une discipline intellectuelle où, « *à la différence des idéologies* », l'esprit apprend à être critique, à « *se remettre en question* », à « *refuser les idées toutes faites* ». L'histoire, rappelle-t-il, compte « *nombre de mathématiciens engagés, contestataires, prêts à remettre en cause les régimes trop autoritaires* », tels Gaspard Monge, « *révolutionnaire enragé* », Évariste Galois, « *républicain acharné* », ou Maurice Audin, « *militant anticolonialiste* ». Sans craindre de dilapider sa notoriété, c'est ce message d'anticonformisme qu'il porte, devant ses étudiants de l'université Lyon-I comme sur les antennes. Vraiment, ne pas se fier aux apparences. ●

Pierre Le Hir, *Le Monde* daté du 06.08.2011

Artur Avila, les maths pour dynamique

Ce spécialiste franco-brésilien des systèmes dynamiques a reçu la médaille Fields. Rencontre avec ce génie en perpétuel mouvement.

« *Artur est un phénomène* », a lancé Étienne Ghys, directeur de recherche CNRS à l'École normale supérieure de Lyon, lors de son exposé louant les mérites de son collègue qui a reçu, le 13 août, au Congrès international des mathématiciens de Séoul, la récompense suprême en maths, la médaille Fields.

Quelques jours plus tôt, à Paris, le « phénomène » Artur Avila, un Franco-Brésilien de 35 ans, était à l'université Pierre-et-Marie-Curie, l'un des deux endroits, avec l'université Paris-VII, où il occupe son mi-temps « français ». L'autre, « brésilien », étant situé à Rio, à l'Institut de mathématiques pures et appliquées, pépite sud-américaine pour les maths. « *Ça ne vous dérange pas si on parle en marchant ?* » L'invitation déconcerte mais ne se refuse pas, même si la prise de notes est acrobatique. En route.

Faux départ. Le photographe d'un journal brésilien a besoin de compléter une série de photos sur les quais de la Seine. Tee-shirt et pantalon noirs, le futur lauréat sourit. Mais quand il s'est mis torse nu, les passants ont dû le prendre pour un mannequin de mode, pas pour un génie des maths.

À l'aise, la nouvelle vedette de sa discipline se rhabille et se met en marche. Son parcours brillant défile. Médaille d'or aux Olympiades internationales de mathématiques à 16 ans, thèse à 21 ans (en général on l'obtient à plus de 25 ans). Chargé de recherche au CNRS à 24 ans, puis directeur de recherche, l'échelon suivant, seulement cinq ans plus tard. Petite pause sur le chemin. Il regarde sa montre. « *C'est l'heure.* » Il ouvre son sac et grignote une barre de céréales. Avec une heure de musculation par jour, il a besoin de boissons ou d'aliments protéinés comme en-cas. Surtout à Paris, où il doit rencontrer beaucoup de monde.

Au Brésil, il est plus tranquille. « *Je travaille beaucoup dans ma tête, en marchant ou à la plage*, avoue ce natif de Rio, français depuis 2013. *J'aime le bruit de la mer.* »

Nouvelle pause, près de la place de la Bastille. Coup d'œil à sa montre. « *Je cherche un bar pour l'happy hour* », explique-t-il, s'installant en terrasse, comme il confie le faire avec plaisir, accompagné de collègues. Enfin une table pour poser le cahier et comprendre le cœur de son travail. Absorbant une gorgée de mojito, il entame avec plaisir une introduction simple à sa spécialité, les systèmes dynamiques. Un concept qui colle bien à ce premier contact mouvementé...

« *Deux planètes tournant autour d'une étoile constituent le système dynamique le plus simple à exposer. Mais c'est déjà très compliqué à résoudre. On essaie, en fait, de comprendre sur le long terme l'évolution de ces systèmes évoluant au cours du temps* », indique Artur Avila. « *D'une façon générale, deux types de comportements apparaissent. Des réguliers et des chaotiques. Nous cherchons à savoir où se trouvent les limites entre les deux* », ajoute Jean-Christophe Yoccoz, professeur au Collège de France, Médaille Fields 1994, qui a accueilli son plus jeune collègue en postdoctorat. « *Artur est très fort. Il a résolu plusieurs questions ouvertes et difficiles dans les systèmes dynamiques* », indique le chercheur.

Artur Avila met donc un peu d'ordre dans le chaos. Ce fut le cas sur des situations d'allure « simple » comme le mélange de cartes, des trajectoires de boules sur des billards non rectangulaires, ou les

voyages de particules quantiques sur des terrains accidentés... Pour montrer dans quelles conditions ces situations restaient « tranquilles » ou au contraire irrégulières, il n'était pas tout seul. « *Artur est aussi étonnant par sa capacité à collaborer avec beaucoup de monde* », constate Étienne Ghys, qui, lors du congrès, a fait défiler les photos de pas moins de 37 coauteurs ! « *Je travaille beaucoup par mail ou chat* », affirme le chercheur mondialisé.

« *Artur aime aussi rencontrer les gens, parler et écouter* », ajoute Jean-Christophe Yoccoz. « *Je lis peu avant d'attaquer un problème. Je préfère être assez ignorant au départ afin de développer ma propre intuition* », décrit Artur Avila. « *Il est doté d'une très grande intuition, en particulier géométrique. Souvent, un argument d'apparence simple lui permet d'aller au-delà de ce que l'on savait faire auparavant, même si la mise en œuvre technique peut s'avérer assez compliquée. Cela donne à ceux qui travaillent avec lui une impression de simplicité et de facilité* », témoigne un de ses collaborateurs, Raphaël Krikorian, professeur à l'université Pierre-et-Marie-Curie.

Le premier mojito est fini. Un second arrive. « *J'ai l'image d'un "résolveur" de problèmes. Mais j'ai aussi posé de nouvelles problématiques. En fait, les matheux créent leurs propres problèmes en voulant mettre de l'ordre dans les sujets* », estime Artur Avila, à l'aise visiblement dans le mouvement perpétuel. « *Trouver des solutions prend du temps. Le dé clic peut arriver pendant la nuit, parfois sur un problème qu'on avait laissé de côté. On identifie un petit truc. Des choses s'assemblent par hasard. C'est le point de départ* », décrit le chercheur. « *Ensuite, le travail est intense. Et, quand on estime avoir fini, on essaie nous-mêmes de détruire notre propre résultat pour y trouver des failles. Avant de le communiquer aux autres* », précise-t-il.

Le deuxième mojito est avalé. « *Je suis venu en France pour la grande qualité de ses maths et surtout pour la large communauté qui y travaille. J'ai élargi mes domaines d'activité* », insiste le chercheur. « *Cette concentration française attire, et l'ensemble se renforce automatiquement. Mais cela peut se perdre* », alerte-t-il, regrettant les difficultés de carrière pour les jeunes.

Quelques jours plus tard, après le congrès, il est soulagé d'en avoir, en partie, fini avec les obligations protocolaires. « *C'était assez stressant. Il y avait beaucoup de sollicitations. Les lycéens voulaient des auto-graphes, des selfies. J'étais content, mais ils étaient très nombreux !* », s'amuse celui qui n'avait pas un très bon souvenir du congrès précédent, en 2010, où son nom circulait déjà pour une médaille. « *J'étais stressé pour préparer ma conférence. Un cauchemar. Je me suis dit que plus jamais je ne me ferais aussi mal pour un exposé. Cette année, j'étais plus détendu* », confie-t-il.

La médaille Fields va-t-elle changer quelque chose pour lui ? « *Ça m'enlève un peu de pression. Je ne suis plus obligé de trouver quelque chose qui soit digne de cet honneur !* », sourit le lauréat, dont la motivation reste évidemment intacte. À Séoul, Étienne Ghys conclut son hommage par : « *Ses résultats sont fantastiques, et ce n'est que le début !* » ●

Maryam Mirzakhani : mathématicienne iranienne

En 2014, elle avait remporté la prestigieuse médaille Fields, considérée comme l'équivalent du prix Nobel en mathématiques. Première femme – après cinquante-deux hommes – à décrocher cette récompense, décernée depuis 1936, elle mettait fin à une grande injustice, avec l'espoir, dira-t-elle, d'« ouvrir la voie » à beaucoup d'autres femmes. Samedi 15 juillet, l'injustice a repris le dessus. Maryam Mirzakhani est morte d'un cancer du sein contre lequel elle luttait depuis quatre ans. Elle avait 40 ans.

Humble, discrète, Maryam Mirzakhani frappait tous ceux qui la rencontraient par « sa gentillesse et sa simplicité », raconte le mathématicien Etienne Ghys, de l'École normale supérieure de Lyon. Pourtant, rien dans sa vie ne fut tout à fait ordinaire. Née à Téhéran, le 5 mai 1977, passionnée de littérature, elle vit dans les livres et se rêve écrivaine. Jusqu'à ce que son frère aîné lui glisse dans les mains un ouvrage de mathématiques. Elle y découvre la célèbre histoire de Friedrich Gauss (1777-1855) expliquant à son maître d'école comment effectuer facilement la somme de tous les entiers de 1 à 100. Le déclic. La passion de l'adolescente devient alors de « résoudre des énigmes ».

Une étudiante exceptionnelle

Scolarisée dans un lycée pour élèves brillants, Maryam Mirzakhani présente des dons exceptionnels. En 1994, elle est – déjà – la première jeune fille sélectionnée dans l'équipe nationale pour les Olympiades internationales de mathématiques. Elle remporte la médaille d'or avec un score de 41 points sur 42. Elle revient l'année suivante, décroche une nouvelle médaille d'or, avec cette fois un sans-faute. Elle intègre la prestigieuse université technologique Sharif de Téhéran. Au retour d'une conférence en province, un accident de la route tue sept étudiants qui voyageaient avec elle. Elle échappe au « mardi noir » des mathématiques iraniennes.

La suite est une lente et inexorable ascension. « Lente », comme elle-même aimait à se définir. Pas seulement par modestie. « La beauté des mathématiques ne se dévoile qu'à ses plus patients admirateurs », disait-elle. De patience elle ne manque pas, ni d'audace. Aucun sujet ne lui semble inattaquable. « Une ambition sans peur », résume son directeur de thèse à l'université d'Harvard, Curtis McMullen, médaille Fields (1998), lui aussi. C'est en effet aux États-Unis que Maryam Mirzakhani poursuit sa formation. Sa thèse est qualifiée de « chef-d'œuvre ». Elle n'y résout pas un mais deux problèmes majeurs de géométrie, qu'elle relie au passage. « La majorité des mathématiciens ne font pas ça en une vie, a commenté son collègue Benson Farb. Elle l'avait fait en thèse. »

En 2008, elle est nommée professeure à Stanford (Californie). Elle y poursuit ses travaux de défrichage des surfaces complexes. « C'est comme être perdue

PARCOURS

- 5 mai 1977 : Naissance à Téhéran.
- 2008 : Professeure à Stanford.
- 2014 : Première femme à obtenir la médaille Fields.
- 15 juillet 2017 : Mort aux États-Unis.

dans une jungle et d'essayer d'utiliser toutes les connaissances possibles pour les mélanger à de nouvelles astuces, et avec un peu de chances vous pouvez trouver un chemin de sortie. » Si elle assure ne pas avoir de règles, elle dispose d'une méthode : elle place au sol une grande feuille, y crayonne des dessins et déroule, en marge, les éléments de ses démonstrations. Ce qui faisait dire à sa fille, Anahita, que sa mère exerçait le métier de peintre.

En 2014, l'obtention de la médaille Fields marque sa consécration. « Tout chercheur en mathématique vous dira qu'il n'y a pas de différence entre les maths faites par une femme ou un homme et, évidemment, la décision du comité est basée seulement sur les résultats de chaque candidat », rappelle alors la Belge Ingrid Debauchies, présidente de l'Union mathématique internationale. Les mathématiciens saluent donc la chercheuse, les femmes célèbrent la pionnière. Et l'Iran, qui entre dans le club des pays primés, s'enthousiasme pour l'enfant du pays.

L'annonce de sa mort, samedi, a donc trouvé un écho considérable. Dans la discipline, bien sûr : ainsi Cédric Villani – encore une médaille Fields – a salué, sur son compte Twitter, cet « esprit magnifique, âme magnifique, femme extraordinaire ». Mais bien au-delà, et particulièrement en Iran, où les responsables politiques, le président Hassan Rohani en tête, ont déploré cette « triste disparition ». Chose exceptionnelle pour une Iranienne, son visage a été reproduit à la « une » de plusieurs journaux, sans voile. Et si là encore Maryam Mirzakhani avait ouvert la voie ? ●

Nathaniel Herzberg, *Le Monde* daté du 18.07.2017

Véronique Izard fait compter les bébés

Tombée dans les mathématiques quand elle était petite, cette jeune chercheuse en psychologie cognitive part désormais en quête de leur sens.

Parfois, le bureau parle à lui tout seul. Avec Véronique Izard, c'est un peu plus compliqué que ça. Caché au 6^e étage de la faculté de médecine de la rue des Saint-Pères, à Paris, il faut déjà le trouver : sortir de l'ascenseur le plus lent de l'histoire de la recherche française, passer trois fois devant la porte

sans le voir, et enfin entrer. Quelques mètres carrés modestes, partagés avec une collègue. Les livres et la plante verte d'usage. Et enfin ses objets à elle : une collection impressionnante de boules de Noël, glanées au hasard des congrès, et deux peluches pour tout-petits. « Je ne suis pas amoureuse

des nourrissons, prévient-elle cependant. *J'ai du mal à me mettre à leur place. Je préfère les enfants de maternelle, leurs réponses abraca-dabrantes cachent toujours un sens profond.* »

Pourtant, si, à 38 ans, Véronique Izard impose le respect à ses collègues de psychologie, et plus largement de neurosciences, si le CNRS vient de lui décerner sa médaille de bronze – le prix le plus prestigieux pour un jeune chercheur –, c'est sans doute avant tout pour ses découvertes sur les nouveau-nés. « *Un travail vraiment exceptionnel, insiste son ancien directeur de thèse, professeur au Collège de France, Stanislas Dehaene. Mais ne comptez pas sur elle pour vous le dire. Elle est aussi modeste que brillante.* » Elle a en effet apporté la preuve que, dès les premiers jours, les nourrissons disposent de compétences en mathématiques. Et, plus précisément, qu'ils sont capables de discerner entre deux quantités, pour peu qu'elles soient suffisamment éloignées. « *A trois jours, ils sont sensibles à un ratio de 3 pour 1, dit-elle. Ils différencient 3 et 9, 4 et 12. A six mois, c'est 2 pour 1. A neuf mois, 3 pour 2.* »

Sa démonstration, elle l'a conduite en maternité. « *Il faut d'abord convaincre les mères, puis attendre d'avoir un bébé éveillé et de bonne humeur, ce n'est pas si souvent. On l'installe alors dans un siège de bain, face à un écran.* » Le miracle peut commencer. Au nourrisson, on soumet des sons et des images. Par exemple, on lui fait entendre quatre fois de suite une même syllabe. Puis on lui présente un tableau avec quatre points. Son temps d'attention est mesuré. La même opération est réalisée avec quatre syllabes et une image à douze points. « *La différence est flagrante, souligne la chercheuse. Sur la première image, il reste en moyenne 25 secondes, sur la seconde 10 secondes.* » Avec une succession de douze syllabes, le résultat est inversé. « *Le bébé, dès sa naissance, cherche du sens. Il associe donc ce qui lui semble similaire, à condition qu'il puisse le distinguer. Ça marche avec 6 et 18, mais pas avec 4 et 8, trop proches. Ni avec 2 et 6.* » Ce dernier résultat, également observé chez des enfants de quelques mois, a longtemps résisté à la compréhension des psychologues qui travaillaient sur l'acquisition des mathématiques. Pourquoi le ratio de 1 à 3 ne fonctionnait plus au-dessous d'un certain niveau ? Jusqu'à ce qu'Elizabeth Spelke, professeure à Harvard et grande théoricienne de l'émergence des connaissances chez les enfants, émette l'hypothèse que les bébés traitaient différemment les tout petits nombres – jusqu'à 2 – et les autres. Les premiers sont identifiés comme des objets, les seconds évalués approximativement. « *Dans un cas, le bébé regarde les arbres, dans l'autre la forêt* », résume Véronique Izard. La chercheuse a donc poursuivi sa tâche en étudiant l'appréhension du nombre exact chez des enfants de deux ans au moyen d'outils originaux.

« *Au départ, je pensais que les nouveau-nés s'accrochaient à des détails pour développer leurs connaissances, avoue-t-elle. Mais c'est l'inverse : ils disposent d'un sens très général de la quantité qui va leur servir d'appui pour tous les apprentissages.* » Cette théorie, dite des connaissances noyaux – la représentation approximative des quantités numériques y constitue un des six systèmes fondamentaux –, Véronique Izard l'a découverte chez Elizabeth Spelke, à Harvard, où elle a effectué son postdoc. De retour en France, elle l'a donc appliquée aux mathématiques.

Ah, les maths ! Une vieille histoire d'amour. Toute petite, elle se souvient d'une grande déception parce qu'une maîtresse d'école n'avait pas compris un travail un peu trop élaboré. Ça ne l'a pas dégoûtée. Elle se souvient aussi de ce jour où elle a demandé à son père de compter devant elle jusqu'à mille. « *J'attendais ce qu'il se passerait après 199. Quand il a dit 200, puis 201, j'ai compris comment ça marchait, je lui ai dit d'arrêter.* » Le reste, c'est une trajectoire rectiligne de bonne élève, « *avec une passion : la musique* ». « *Mais, dans ma famille, en faire son métier n'était pas envisageable. Une amie de mon père était chercheuse en maths et passait son temps à faire de la planche à voile. Je me suis dit : si je fais ça, j'aurai du temps pour le violoncelle.* »

C'est avec ce programme qu'elle entre en classes préparatoires puis à l'École polytechnique. « *J'aimais les maths, mais je me posais aussi des*

questions sur leur signification. Et je suis tombée sur les bouquins de Stanislas Dehaene. » L'auteur de *La Bosse des maths* (Odile Jacob, 2010), ancien mathématicien devenu figure de la recherche en psychologie, lui ouvre un monde. « *Il m'a dit : les sciences cognitives, c'est une façon de poser des questions philosophiques de manière expérimentale.* » Elle plonge.

Dans son laboratoire, à Orsay, Véronique Izard étudie, au moyen d'électroencéphalogrammes, les zones du cortex pariétal mobilisées par les bébés de trois mois lorsqu'ils observent un changement de nombre. Ce sera le sujet de sa thèse. Mais elle ne se limite pas à cette seule recherche. Avec son mentor et le linguiste Pierre Pica, elle étudie la perception des quantités chez les Indiens Mundurucu, d'Amazonie, qui ne savent pas compter. « *Quand elle a soutenu sa thèse, elle avait déjà trois publications dans Science, sourit Stanislas Dehaene. Je n'ai jamais vu ça.* »

À Harvard, elle imprime sa marque aux théories d'Elizabeth Spelke. « *Elle y a apporté un regard tout à fait original, inventant pour cela des méthodes, souligne la chercheuse américaine. Et elle ne s'est pas limitée aux nombres chez les enfants.* » Il y a les adultes, on l'a vu ; la géométrie, sur laquelle elle se penche. « *Et on ne peut pas oublier la musique* », insiste la psychologue. De ce côté, Véronique Izard tient son programme : au violoncelle, son instrument fétiche, et au piano, appris en autodidacte, elle ajoute, lors de son passage sur la Côte est américaine, le violon et l'alto. Ce parcours brillant ne l'empêche pas de devoir s'y reprendre à trois fois pour entrer au CNRS. Finalement recrutée dans l'équipe d'Arlette Streri, elle n'a cessé, depuis, d'approfondir. Elle multiplie les conférences. « *Un grand plaisir, dit-elle. Parfois, j'ai l'impression que mes expériences piétinent, qu'il y a plus d'échecs que de réussites, sans même que je parvienne à comprendre pourquoi ça ne marche pas. Alors quand j'en parle et que je vois comment ça passionne toute sorte de publics, c'est très gratifiant.* »

Elle poursuit donc sa quête. Les nourrissons, donc ; la géométrie, toujours, qui lui donne actuellement beaucoup de fil à retordre. « *On pensait que les tout-petits maîtrisaient les angles, je n'en suis plus très sûre.* » Et cette plate-forme qu'elle crée actuellement afin de tester les bébés en ligne. Fini les nombres ? « *Je voudrais aussi refaire un peu plus de modélisation. Profiter de mes compétences d'ingénieur pour modéliser l'auto-organisation de la perception des nombres.* » Et la planche à voile... pardon, la musique ? « *Une heure de violon par jour. Le reste, c'est quand j'ai le temps.* » La vie rêvée de chercheuse n'est pas loin. ●

Nathaniel Herzberg, *Le Monde* daté du 13.04.2016

PARCOURS

- 7 décembre 1977 : Naissance à Ris-Orangis.
- 1997 : Entrée à Polytechnique.
- 2006 : Thèse sur les interactions entre les représentations numériques verbales et non verbales.
- 2006-2009 : Post-doctorat à Harvard.
- Depuis 2009 : Chercheuse au CNRS.
- 2012 : Prix La Recherche.
- 2016 : Médaille de bronze du CNRS.

LE GUIDE PRATIQUE



Méthodologie et conseils



Conseils de révision

Un mois avant l'épreuve

Le temps

Pour bien réviser, il est important d'établir un planning et de le respecter. Fixez-vous des rendez-vous avec les révisions de mathématiques régulièrement, par exemple une heure tous les jours.

Le contenu

On peut dégager 7 grands axes du programme :

- les suites ;
- les fonctions ;
- l'intégration ;
- les nombres complexes ;
- la géométrie dans l'espace ;
- les probabilités conditionnelles ;
- les lois continues et l'échantillonnage.

Pour chaque axe vous pouvez fixer le nombre de plages de révision en fonction des heures dont vous disposez.

Attention : le thème des fonctions est long et il occupe une place centrale dans les épreuves. Il regroupe : le calcul de dérivées, les limites, les fonctions particulières (logarithme, exponentielle, cosinus et sinus). Pour les autres thèmes, il est préférable de ne pas faire d'impasse.

À partir de ce contenu, deux approches sont possibles :

- réviser entièrement un thème puis passer à un autre et faire des révisions spiralées ;
- découper chaque thème et construire le programme en alternant les thèmes.

La construction d'un planning avec une révision spiralée permet de reprendre tout le programme.

DÉROULEMENT DE L'ÉPREUVE

- Durée : 4 heures.
- Coefficient : 7 (ou 9 pour les candidats ayant choisi cette discipline comme enseignement de spécialité).

OBJECTIFS DE L'ÉPREUVE

L'épreuve est destinée à évaluer la façon dont les candidats ont atteint les grands objectifs de formation mathématique visés par le programme de la série S :

- acquérir des connaissances et les organiser ;
- mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;

- mener des raisonnements ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer à l'écrit.

NATURE DU SUJET

Le sujet comporte trois à cinq exercices indépendants les uns des autres, notés chacun sur 3 à 10 points ; ils abordent une grande variété de domaines du programme de mathématiques de la série S.

Le sujet proposé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité diffère de celui proposé

Une semaine avant l'épreuve

Il faut absolument éviter les nuits blanches passées à réviser intensément, vous risquez d'accumuler de la fatigue et d'être totalement épuisé pour les épreuves.

Il est préférable de faire un planning par tranches de 2 heures : alterner les phases de travail, de détente (sport, balade) et les repas.

La veille de l'épreuve

Rassurez-vous en relisant vos fiches et en revoyant certains exercices types. Sachez vous interrompre et alternez avec des pauses afin de ne pas saturer. Évitez absolument de faire une nuit blanche.

Enfin, à la veille d'une épreuve, il est normal d'avoir le sentiment de ne rien savoir, mais ce n'est qu'une impression !

Le point sur l'épreuve écrite

Gestion du temps, lecture de l'énoncé

Analyser l'énoncé

Avant de commencer, comptez le nombre de pages du sujet, il doit être conforme à ce qui est indiqué.

Effectuez deux lectures de l'énoncé : une globale pour découvrir les parties du cours utilisées, la seconde pas à pas, en décryptant l'énoncé et en notant au brouillon vos idées.

Comprendre le déroulement des questions

- Les **questions** d'un exercice ou d'un problème sont souvent **liées les unes aux autres**.

Pensez en particulier qu'une question commençant par « En déduire que... » doit s'appuyer sur le résultat de la question précédente.

- Repérez si l'une des questions ne donne pas la réponse à une question située plus haut dans le texte.

- Il arrive aussi fréquemment que, dans la partie A, on demande d'étudier une fonction f et que, dans la partie B, on demande d'étudier une fonction g en utilisant les résultats de la partie A : le signe de g' dépend de celui de f .

Résolution des exercices

Utiliser les bonnes méthodes

- Si vous n'arrivez pas à traiter une question, ne vous obstinez pas. Vous risquez de vous énerver et de faire des erreurs dans les questions qui suivent. Laissez donc un espace et continuez, en supposant le résultat acquis.

- Si, en répondant à une question, vous trouvez un résultat qui vous est demandé dans une question suivante, c'est que vous n'avez pas fait appel à la bonne méthode.

aux candidats ne l'ayant pas suivi par l'un de ces exercices, noté sur 5 points. Cet exercice peut porter sur la totalité du programme (enseignement obligatoire et de spécialité).

Le sujet portera clairement la mention « obligatoire » ou « spécialité ».

CALCULATRICES ET FORMULAIRES

La maîtrise de l'usage des calculatrices est un objectif important pour la formation des élèves. L'emploi de ce matériel est autorisé, dans les

conditions prévues par la réglementation en vigueur. Il est ainsi précisé qu'il appartient aux responsables de l'élaboration des sujets de décider si l'usage des calculatrices est autorisé ou non lors de l'épreuve. Ce point doit être précisé en tête des sujets.

Il n'est pas prévu de formulaire officiel. En revanche, les concepteurs de sujets pourront inclure certaines formules dans le corps du sujet ou en annexe en fonction de la nature des questions.

DES RÉVISIONS EFFICACES

1. Si vous avez du mal à vous y mettre...

Dites-vous que plus vous attendez, plus ce sera pénible.

2. Quand vous avez décidé de travailler...

Faites-le dans le calme. Évitez téléphone, télévision, musique à niveau sonore élevé. Le cerveau travaille difficilement sur deux choses à la fois.

3. Pour chaque séance de révision...

Fixez-vous des objectifs. Et, une fois lancé, obligez-vous à aller jusqu'au bout. Imposez-vous un temps limité. C'est la meilleure façon d'être performant.

4. Pour rester concentré...

Faites une courte pause entre deux séances de travail pour décompresser et reprendre dans de bonnes conditions.

5. Pour réviser...

Faites des fiches et refaites des exercices types sur chaque thème du programme.

6. Pour contrôler vos connaissances...

Testez-vous : posez-vous des questions, entraînez-vous sur des sujets de bac.

7. Si vous saturez...

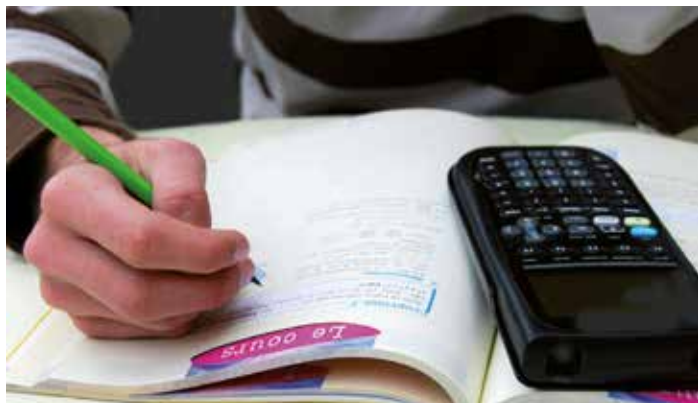
Adressez-vous à vos amis. Réviser à deux ou trois, c'est souvent plus stimulant.

8. Si vous pensez manquer de temps...

Autorisez-vous à passer plus rapidement sur les thèmes du programme qui vous semblent déjà un peu connus ou que vous jugez moins importants. Dans tous les cas, évitez les impasses et méfiez-vous des « bons tuyaux » qui vous prédisent que telle partie du programme va tomber cette année.

9. Pour tenir jusqu'au bout...

Restez positif. Et n'oubliez pas que 80 % des élèves obtiennent cet examen. Il n'y a donc pas de raison pour que vous échouiez.



Ainsi, si pour prouver que $f(x)$ est supérieur à 3, vous êtes amené à calculer $f'(x)$ alors que ceci est demandé plus loin, vous pouvez revoir votre copie.

• Vérifiez que le texte n'impose pas une méthode.

Ainsi, si on vous demande de démontrer une inégalité par récurrence, utilisez un raisonnement par récurrence, même s'il existe une méthode plus rapide.

• Quand vous appliquez un **théorème**, vérifiez que les **hypothèses** sont réunies. De même, vous devez adapter une formule en fonction des données de l'énoncé.

Effectuer les calculs

• Attention, une calculatrice, si perfectionnée soit-elle, ne vous dispense en rien de justifier vos résultats.

Sauf si c'est mentionné dans l'énoncé, un raisonnement ne peut s'appuyer sur une phrase du type : « D'après la calculatrice, on obtient... »

LES TRUCS ET ASTUCES DU PROF

Comment avoir une mémoire fonctionnelle ?

1. Prenez soin de votre **sommeil** : la fatigue est l'un des pires ennemis de la mémoire.

2. Mangez équilibré : le cerveau, siège de la mémoire, consomme beaucoup d'énergie ; une **alimentation saine** lui permet de bien fonctionner.

3. Lorsque vous sollicitez beaucoup votre mémoire (une journée de révisions, par exemple), n'oubliez pas de faire des **pauses**.

4. Entraînez votre mémoire et **stimulez votre cerveau** au quotidien (retenir un numéro de téléphone par cœur, etc.).

• Vérifiez que vos **résultats** sont **vraisemblables** : une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, une aire est un nombre positif, une fonction numérique ne peut croître vers moins l'infini, etc.

• Effectuez les calculs au brouillon mais rédigez directement sur la copie. Sinon vous risquez de manquer de temps.

Les exercices plus difficiles

• On trouve parfois dans la consigne le texte : « Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation ». Il s'agit souvent d'exercices plus difficiles, vous pouvez les faire à la fin. Même si vous ne trouvez pas le résultat mais que vous avez une piste, vous pouvez l'écrire.

Rédaction et présentation de la copie

Soigner la rédaction

• L'un des critères d'évaluation de votre copie est la **qualité de la rédaction**. N'oubliez donc pas d'expliquer clairement votre raisonnement.

• Pensez à **justifier** vos constructions.

Dans le cas d'une fonction, établissez un tableau de valeurs, précisez les asymptotes.

Soigner la présentation

• Pour améliorer la **lisibilité de votre copie**, vous avez intérêt à séparer les questions en sautant des lignes et à donner un titre, si possible, à chaque question.

• Pensez également à encadrer vos résultats. ●

ORAL DE RATRAPAGE

Durée : 20 minutes.

Temps de préparation : 20 minutes

Coefficient : 7 (ou 9 pour les candidats ayant choisi cette discipline comme enseignement de spécialité).

L'épreuve consiste en une interrogation du candidat visant à apprécier sa maîtrise des connaissances de base.

Pour préparer l'entretien, l'examineur propose au moins deux questions au candidat, portant sur des parties différentes du programme. Pour les candidats n'ayant pas choisi

les mathématiques comme enseignement de spécialité, les questions aborderont exclusivement le programme de l'enseignement obligatoire. Pour les candidats ayant choisi les mathématiques comme enseignement de spécialité, une question abordera le programme de spécialité, les autres abordant exclusivement le programme de l'enseignement obligatoire. Le candidat dispose d'un temps de préparation de vingt minutes et peut, au cours de l'entretien, s'appuyer sur les notes prises pendant la préparation.

Crédits

Couverture

Centre de données © 4X-image/iStock

Analyse

Fonctions sinus et cosinus
p. 18 Table de cosinus/sinus : DR

Fonction exponentielle

p. 24 Plans de maïs : © Fotolia
p. 25 Infographie réalisée par Lézarts Création
Fonction logarithme népérien
p. 26 John Napier : DR

Géométrie

Nombres complexes
p. 34 Euler : DR
Géométrie dans l'espace
p. 39 Icosaèdre : DR

Probabilités et statistiques

Probabilités conditionnelles
p. 45 Formules de Bayes : DR
Échantillonnage
p. 57 Boulangerie industrielle : © Thinkstock

Guide pratique

p. 93 FatCamera/iStock ; PeopleImages/iStock ; Steve Debenport/iStock ; fizkes/iStock ;
p. 94 © Purestock/ Thinkstock ; p. 95 © Istockphoto/ Thinkstock

EAN : 9782820810335

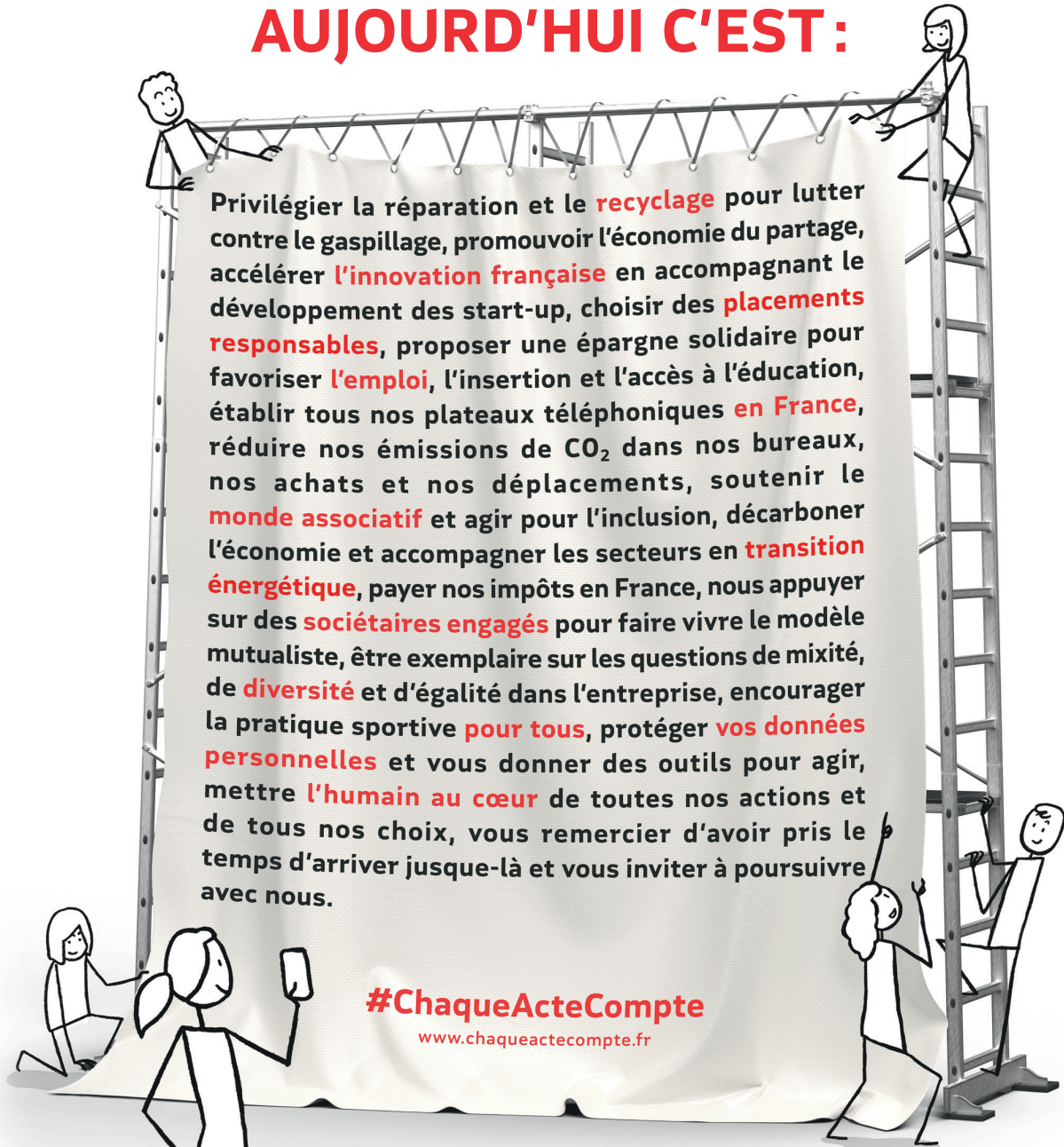
© rue des écoles – *Le Monde*, 2020

Éditions rue des écoles – 2 ter rue des Chantiers – 75005 Paris

Achévé d'imprimer en France par Aubin Imprimeur, en décembre 2019

Dépôt légal : janvier 2020

POUR FAIRE COURT, ÊTRE ASSUREUR MILITANT AUJOURD'HUI C'EST :



Privilégier la réparation et le **recyclage** pour lutter contre le gaspillage, promouvoir l'économie du partage, accélérer **l'innovation française** en accompagnant le développement des start-up, choisir des **placements responsables**, proposer une épargne solidaire pour favoriser **l'emploi**, l'insertion et l'accès à l'éducation, établir tous nos plateaux téléphoniques **en France**, réduire nos émissions de CO₂ dans nos bureaux, nos achats et nos déplacements, soutenir le **monde associatif** et agir pour l'inclusion, décarboner l'économie et accompagner les secteurs en **transition énergétique**, payer nos impôts en France, nous appuyer sur des **sociétaires engagés** pour faire vivre le modèle mutualiste, être exemplaire sur les questions de mixité, de **diversité** et d'égalité dans l'entreprise, encourager la pratique sportive **pour tous**, protéger **vos données personnelles** et vous donner des outils pour agir, mettre **l'humain au cœur** de toutes nos actions et de tous nos choix, vous remercier d'avoir pris le temps d'arriver jusque-là et vous inviter à poursuivre avec nous.

#ChaqueActeCompte

www.chaqueactecompte.fr



assureur militant

Réviser son bac
avec *Le Monde*



Testez-vous pour le bac

MATHÉMATIQUES

61 questions
corrigées et commentées

Une ou plusieurs réponses sont possibles.

Analyse

Suites

→ Le cours p. 6

Question 1

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite (u_n) définie par $u_n = n - \sqrt{n}$. Quelle est sa limite ?

- A. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
- B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Question 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite (v_n) définie par $v_n = 3 - \frac{1}{n+1}$.

- A. La suite (v_n) est croissante.
- B. La suite (v_n) est décroissante.
- C. La suite (v_n) est aussi majorée par 3, donc elle converge.
- D. La suite (v_n) est aussi minorée par 3, donc elle converge.

Question 3

Associez les calculs de limites à leur valeur.



1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times \left(\frac{5}{2}\right)^n = \dots\dots\dots$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \dots\dots\dots$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \dots\dots\dots$
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-n} = \dots\dots\dots$

Question 4

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 5$ et $w_{n+1} = -\frac{1}{2} w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- A. La suite (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = 5$.
- B. La suite (w_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = 5$.
- C. La suite (w_n) n'est ni une suite arithmétique, ni une suite géométrique.

Question 5

Lorsque $n \geq 1$ est donné, que permet de calculer cet algorithme ?

Variables : i et n sont des entiers naturels.
 u est un réel.

Entrée : Demander à l'utilisateur la valeur de n .

Initialisation : Affecter à u la valeur 0.

Traitement : Pour i variant de 1 à n
| Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{i}$.

Sortie : Afficher u .

- A. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$
- B. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$
- C. $\frac{1}{n}$

Limites de fonctions, continuité et théorème des valeurs intermédiaires

→ Le cours p. 10

Question 6

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3(-x+1)^2}{x^2+2}$.

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

Question 7

Associez les calculs de limites à leur valeur.

- $+\infty$
 $-\infty$
 0
 1
 2
 3

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 5} = \dots\dots\dots$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 5} = \dots\dots\dots$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x} - e^x = \dots\dots\dots$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x^2 + 1} = \dots\dots\dots$

Question 8

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on considère la fonction f définie par $f(x) = 5 - \frac{27}{x^2}$.

1. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \dots\dots\dots$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots\dots\dots$

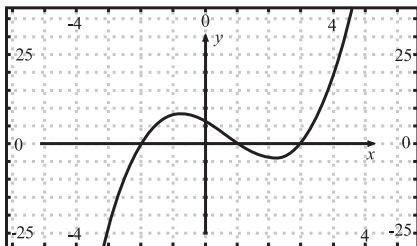
Question 9

Pour la fonction f définie par $f(x) = 5 - \frac{27}{x^2}$ sur \mathbb{R}^* , nous avons calculé la limite f en $-\infty$ dans la question précédente. D'après ce résultat, que peut-on en déduire ?

- A. La droite d'équation $y = 5$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $-\infty$.
- B. La droite d'équation $x = 5$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f en $-\infty$.
- C. Ni l'un, ni l'autre.

Question 10

La courbe représentative suivante est celle de la fonction f . Complétez la phrase suivante comme il convient.



L'équation $f(x) = 0$ admet solution(s) dans \mathbb{R} .

Question 11

On considère la fonction f définie par $f(x) = 3\ln(x) + 5$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. L'équation $f(x) = 0$ n'admet qu'une solution α sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. À l'aide de la calculatrice, donnez un encadrement à 10^{-1} près de la solution α .
 $< \alpha <$

Dérivation

→ Le cours p. 14

Question 12

On considère la fonction f définie par $f(x) = xe^{-x}$ sur \mathbb{R} . Quelle est la dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} ?

- A. la fonction f' définie par $f'(x) = -e^{-x}$
- B. la fonction f' définie par $f'(x) = (1-x)e^{-x}$
- C. la fonction f' définie par $f'(x) = (1+x)e^{-x}$

Question 13

On considère la fonction h définie par $h(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{x - 1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Quelle est la dérivée h' de la fonction h sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$?

- A. la fonction h' définie par $h'(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)^2}$.

B. la fonction h' définie par

$$h'(x) = \frac{3x^2 + 2x - 7}{(x-1)^2}$$

C. la fonction h' définie par

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 3}{(x-1)^2}$$

Question 14

En utilisant la dérivée h' de la fonction h sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ calculée à la question précédente, quelle est l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0 ?

- A. $y = 5x + 3$
 B. $y = 3$
 C. $y = 3x + 5$

Question 15

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 + 3)$ sur \mathbb{R} .

La dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} est la fonction f' définie par $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$.

- A. vrai
 B. faux

Question 16

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

- A. vrai
 B. faux

Question 17

On considère la fonction h définie par $h(x) = e^{2x} - 2e^x$ sur \mathbb{R} .

Après avoir calculé la dérivée de la fonction h , complétez la phrase avec le terme qui convient entre croissante et décroissante ?

La fonction h est strictement sur l'intervalle $]-\infty; 0]$.

Fonctions sinus et cosinus

→ Le cours p. 18

Question 18

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sin(3x + 1)$ sur \mathbb{R} .

Quelle est la dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} ?

- A. la fonction f' définie par $f'(x) = -3\cos(3x + 1)$.
 B. la fonction f' définie par $f'(x) = 3\cos(3x + 1)$.
 C. la fonction f' définie par $f'(x) = 3\sin(3x + 1)$.

Question 19

On considère la fonction g définie par $g(x) = \cos(-4x + 2)$ sur \mathbb{R} .

Quelle est la dérivée de la fonction g sur \mathbb{R} ?

- A. la fonction g' définie par $g'(x) = -4\sin(-4x + 2)$.
 B. la fonction g' définie par $g'(x) = -\sin(-4x + 2)$.
 C. la fonction g' définie par $g'(x) = 4\sin(-4x + 2)$.

Question 20

Ces phrases portent sur la parité des fonctions cosinus et sinus.

Complétez-les avec les termes qui conviennent :

impaire ; l'axe des ordonnées ; l'origine du repère ; paire ; quelconque.

- La fonction cosinus est une fonction : elle est symétrique par rapport à
- La fonction sinus est une fonction : elle est symétrique par rapport à

Question 21

Associez les calculs de cosinus et de sinus à leur valeur, en choisissant parmi les suivantes :

$$-1; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 1$$

- $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dots\dots\dots$
- $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dots\dots\dots$
- $\cos(\pi) = \dots\dots\dots$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$

Fonction exponentielle

→ Le cours p. 22

Question 22

Que peut-on dire à propos de la fonction exponentielle ?

- A. Elle n'est définie que sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- B. Elle est définie sur \mathbb{R} .
- C. Elle est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- D. Elle est strictement décroissante sur l'intervalle $] -\infty; 0[$ et strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Question 23

Quelle est la solution de l'équation $e^{2x+3} = 4$ dans \mathbb{R} ?

- A. $x = \frac{\ln \frac{4}{3}}{2}$
- B. $x = \frac{\ln 4 - 3}{2}$
- C. $x = \frac{1}{2}$

Question 24

On considère la fonction f définie par $f(x) = xe^{x^2+1}$ sur \mathbb{R} .

Quelle est la dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} ?

- A. la fonction f' définie par $f'(x) = (x+1)e^{x^2+1}$.
- B. la fonction f' définie par $f'(x) = 2xe^{x^2+1}$.
- C. la fonction f' définie par $f'(x) = (2x+1)e^{x^2+1}$.
- D. la fonction f' définie par $f'(x) = (2x^2+1)e^{x^2+1}$.

Question 25

Quelle est l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 ?

$y = \dots\dots\dots$

Fonction logarithme népérien

→ Le cours p. 26

Question 26

Que peut-on dire à propos de la fonction logarithme népérien ?

- A. Elle est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- B. Elle est définie sur \mathbb{R} .
- C. Elle est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- D. Elle est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; 1[$ et strictement croissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Question 27

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\ln(4x^2) = \ln(4) + 2\ln(x)$.

- A. vrai
- B. faux

Question 28

Quelle est la solution de l'équation $\ln(3x+1) = 1$ dans l'intervalle $]0; +\infty[$?

- A. $x = \frac{e-1}{3}$
- B. $x = \frac{e}{3}$
- C. $x = e^{\frac{1}{3}}$

Question 29

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(2x+4)$ sur $]0; +\infty[$.

Quelle est la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$?

- A. la fonction f' définie par $f'(x) = \frac{1}{2x+4}$.

B. la fonction f' définie par

$$f'(x) = \frac{1}{x+2}.$$

C. la fonction f' définie par

$$f'(x) = \frac{2x}{2x+4}.$$

Intégration

→ Le cours p. 30

Question 30

Quelle est la primitive de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 2x$?

A. la fonction F définie par

$$F(x) = x^4 - x^2 \text{ sur } \mathbb{R}$$

B. la fonction F définie par

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 \text{ sur } \mathbb{R}$$

C. la fonction F définie par

$$F(x) = 3x^2 - 2 \text{ sur } \mathbb{R}$$

Question 31

On considère la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = (x+1)e^x$.

Une primitive de la fonction h est la fonction H définie par $H(x) = (-x-2)e^x$ sur \mathbb{R} .

A. vrai

B. faux

Question 32

Calculez l'intégrale suivante.

$$\int_0^2 (2x^3 + 4x) dx = \dots\dots\dots$$

Question 33

À quelle valeur est égale $\int_{-1}^{\text{odx}} 4xe^{x^2} dx$?

A. $1 - e$

B. $2 \times (1 - e)$

C. On ne sait pas calculer cette intégrale.

Question 34

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ sur l'intervalle }]0; +\infty[.$$

Quelle est l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation

$$x = 4 \text{ et } x = 25 ?$$

A. 3 u.a.

B. 6 u.a.

C. $\frac{3}{2}$ u.a.

Question 35

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x}$.

Quelle est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 4]$?

A. $\mu = \frac{1}{2}(e^8 - 1)$

B. $\mu = \frac{1}{4}(e^8 - 1)$

C. $\mu = \frac{1}{8}(e^8 - 1)$

Géométrie

Nombres complexes

→ Le cours p. 34

Question 36

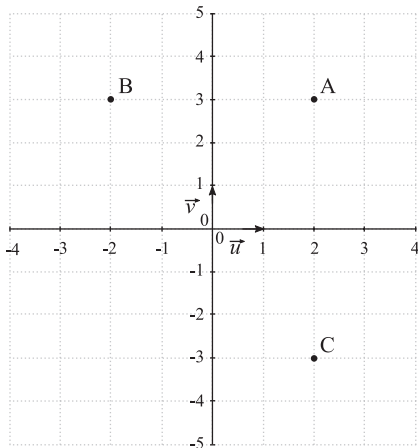
Dans \mathbb{C} , les solutions de l'équation du second degré $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ sont

$$z_1 = \sqrt{2} + i \text{ et } z_2 = \sqrt{2} - i.$$

- A. vrai
 B. faux

Question 37

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on donne les points A, B et C.



Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont exactes ?

- A. L'affixe du point A est $z_A = 2 + 3i$.
 B. L'affixe du point A est $(2 ; 3)$.
 C. L'affixe du vecteur \vec{AC} est $-6i$.
 D. L'affixe du vecteur \vec{AC} est $6i$.

Question 38

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont exactes ?

- A. Le point B est l'image du nombre complexe $z = 2 - 3i$.
 B. Le point C est l'image du nombre complexe $z = 2 - 3i$.
 C. Le point B est l'image du nombre complexe $z' = -2 + 3i$.
 D. Le point C est l'image du nombre complexe $z' = -2 + 3i$.

Question 39

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$. Quelle est son écriture avec la notation exponentielle ?

- A. $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$
 B. $2e^{i\frac{\pi}{3}}$
 C. $e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Question 40

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère le nombre complexe $z = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Son écriture algébrique est $z = 2\sqrt{3} + 2i$.

- A. vrai
 B. faux

Géométrie dans l'espace

→ Le cours p. 38

Question 41

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, on considère les points $A(1 ; 2 ; 3)$, $B(4 ; 5 ; 6)$ et $C(7 ; 8 ; 9)$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \dots\dots\dots$$

Question 42

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, on considère les points $A(0 ; 2 ; -1)$, $B(1 ; 1 ; 2)$ et $C(-2 ; 3 ; 0)$.

Les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont-ils orthogonaux ?

- A. oui
 B. non

Question 43

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, le vecteur $\vec{u}(1 ; 0 ; -2)$ est un vecteur directeur de la droite (d) et le vecteur $\vec{v}(1 ; 3 ; 0)$ est un vecteur directeur de la droite (d') .

Les droites (d) et (d') sont-elles orthogonales ?

- A. oui
 B. non

Question 44

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, le vecteur $\vec{u}(2 ; 1 ; -1)$ est un vecteur directeur de la droite (d) et le vecteur $\vec{n}(1 ; -1 ; 1)$ est un vecteur normal au plan P .

La droite (d) est-elle parallèle au plan P ?

- A. oui
 B. non

Question 45

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, le vecteur $\vec{n}(1 ; 3 ; -2)$ est un vecteur normal au plan P et le vecteur $\vec{n}'(2 ; -2 ; -2)$ est un vecteur normal au plan P' .

Les plans P et P' sont-ils parallèles ?

- A. oui
 B. non

Question 46

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, on considère les points $A(3 ; -2 ; 1)$ et $B(-1 ; -2 ; 4)$. Que vaut la distance AB ?

- A. $AB = 25$
 B. $AB = 5$
 C. $AB = 7$

Question 47

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, le vecteur $\vec{u}(2 ; 5 ; -2)$ est un vecteur directeur de la droite dont une équation paramétrique

$$\text{est } \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = t + 5 \\ z = 3t - 2 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

- A. vrai
 B. faux

Question 48

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. Quelle est l'équation cartésienne du plan P dont un vecteur normal est $\vec{n}(2 ; 0 ; -1)$ et qui passe par le point $A(1 ; 2 ; 4)$?

- A. $2x - z + 7 = 0$.
 B. $2x + y - z = 0$.
 C. $2x - z + 2 = 0$.

Question 49

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, le vecteur $\vec{u}(2 ; 1 ; -3)$ est un vecteur directeur de la droite (d) et le vecteur $\vec{v}(1 ; 4 ; 2)$ est un vecteur directeur de la droite (d') . Les droites (d) et (d') sont-elles parallèles ?

- A. oui
 B. non

Probabilités et statistiques

Probabilités conditionnelles

→ Le cours p. 44

Un magazine publie une étude comparative sur des téléphones portables proposant l'accès illimité à Internet. Toutes les personnes interrogées possèdent un téléphone portable. Parmi les personnes interrogées, 60 % ont acheté un téléphone de marque Alpha. Parmi les personnes ayant acheté un téléphone de marque Alpha, 80 % ont choisi l'accès Internet illimité. Parmi les personnes n'ayant pas acheté un téléphone de marque Alpha, 70 % ont choisi l'accès Internet illimité. On choisit une personne au hasard parmi les personnes interrogées. On appelle P la probabilité associée à cette expérience aléatoire et on note :

- A l'événement : « le téléphone de cette personne est de marque Alpha » ;
- I l'événement : « le téléphone offre un accès internet illimité » ;
- \bar{A} l'événement contraire de l'événement A .

Question 50

Déduisez de l'énoncé la probabilité suivante, en donnant le résultat sous la forme décimale.

$$P_A(I) = \dots\dots\dots$$

Question 51

Parmi les affirmations suivantes, quelles sont les réponses correctes ? Vous pourrez construire un arbre pondéré.

- A. $P(A \cap I) = 0,75$
 B. $P(A \cap I) = 0,48$

C. $P(\bar{A} \cap I) = 0,28$

D. $P(\bar{A} \cap I) = 0,57$

Question 52

On a calculé $P(A \cap I)$ et $P(\bar{A} \cap I)$ dans la question précédente.

Calculez $P(I)$ et donnez le résultat sous la forme décimale.

$$P(I) = \dots\dots\dots$$

Question 53

On a calculé $P(A \cap I)$, $P(\bar{A} \cap I)$ et $P(I)$ dans les questions précédentes.

Calculez la probabilité suivante, à 10^{-2} près.

$$P_I(A) \approx \dots\dots\dots \text{ (à } 10^{-2} \text{ près)}$$

Lois à densité

→ Le cours p. 50

Question 54

Quelle est l'espérance de la variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 4]$?

A. $E(X) = \frac{1}{4}$

B. $E(X) = 2$

C. $E(X) = 4$

Question 55

Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

On note f la densité de probabilité de la loi sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Quelle est son espérance $E(X)$?

A. $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

B. $E(X) = \lambda$

C. $E(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Question 56

On observe la durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un moteur Diesel jusqu'à ce que survienne la première panne.

Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire X définie sur $[0 ; +\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0002$. Ainsi, la probabilité que le moteur tombe en panne avant l'instant t est

$$P(X > t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Quelle est la probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures au millième près ?

- A. 0,271
- B. 0,135
- C. 0,865
- D. 0,729

Question 57

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $N(0 ; 1)$.

$$P(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99.$$

Cocher la réponse exacte.

- A. vrai
- B. faux

Question 58

X est une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(\mu ; \sigma^2)$.

Associez chaque probabilité à la valeur approchée de sa probabilité parmi les suivantes :

0,65 ; 0,68 ; 0,95 ; 0,968 ; 0,98 ; 0,995 ; 0,997.

1. $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx \dots\dots\dots$
2. $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx \dots\dots\dots$
3. $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx \dots\dots\dots$

Échantillonnage

→ Le cours p. 56

Question 59

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(100 ; 0,3)$.

Quel est l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence ?

- A. $[0,291 ; 0,309]$
- B. $[0,2588 ; 0,3412]$
- C. $[0,2102 ; 0,3898]$

Question 60

Dans un échantillon de 400 personnes représentatives des abonnés à l'internet ADSL, 316 personnes sont satisfaites de la qualité de leur connexion Internet. Avec un niveau de confiance de 0,95, à quel intervalle appartient la proportion des abonnés à l'Internet ADSL satisfaits de la qualité de leur connexion Internet ?

- A. $[0,7875 ; 0,7925]$
- B. $[0,74 ; 0,84]$
- C. $[0,785 ; 0,795]$

Question 61

Dans un échantillon de 1 000 personnes représentatives de la population française qui partiront en vacances l'été suivant, 720 personnes souhaitent partir en vacances en France. Avec un niveau de confiance de 0,95, à quel intervalle appartient la proportion des personnes qui partiront en vacances l'été suivant et qui souhaitent partir en France ?

- A. $[0,719 ; 0,721]$
- B. $[0,688 ; 0,752]$
- C. $[0,715 ; 0,725]$

Analyse

Question 1 : C.

• Il s'agit de trouver la limite d'une suite, qui est une forme indéterminée, en factorisant son expression.

• $u_n = n - \sqrt{n} = \sqrt{n} \times (\sqrt{n} - 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - 1) = +\infty$ donc, d'après les opérations sur les limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Question 2 : A ; C.

• Il s'agit de calculer $v_{n+1} - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et de déterminer son signe.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = 3 - \frac{1}{n+2} - \left(3 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2}{(n+2)(n+1)} - \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \geq 0$$

La suite (v_n) est donc croissante.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3 - \frac{1}{n+1} \leq 3$ donc la suite est aussi majorée par 3 et elle converge.

Question 3

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty$ d'après les formules des limites de suites géométriques, car $\frac{5}{2} > 1$.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ d'après les formules des limites de suites géométriques, car $0 < \frac{2}{5} < 1$.

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc, par composition des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\infty$ d'après les règles des opérations sur les limites.

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-n} = 1$ d'après les règles des opérations sur les limites.

Question 4 : B.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_{n+1} peut s'écrire sous la forme $w_{n+1} = q \times w_n$ avec $q = -\frac{1}{2}$.

• Donc la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = 5$.

Question 5 : A.

• Cet algorithme effectue n boucles : u vaut successivement : $0 + \frac{1}{1} = 1$; $1 + \frac{1}{2}$; $\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}$; ...

• Lorsque $n \geq 1$ est donné, cet algorithme permet donc de calculer la valeur $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

Question 6 : C.

• Il s'agit de trouver la limite en $+\infty$ d'une fonction rationnelle.

• Après développement, $f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 3}{x^2 + 2}$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• En observant les termes de plus haut degré du numérateur ($3x^2$) et du dénominateur (x^2), on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$.

Question 7

1. En observant les termes de plus haut degré du numérateur (x^3) et du dénominateur (x^2) de $\frac{x^3 + 1}{x^2 + 5}$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 5} = \frac{2^3 + 1}{2^2 + 5} = \frac{9}{9} = 1$ car la fonction rationnelle est définie en $x = 2$.

3. Il s'agit d'une forme indéterminée. Mettons en facteur e^x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x} - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^{2x} - 1) = +\infty$$

d'après les règles opératoires sur les limites.

4. En observant les termes de plus haut degré du numérateur ($2x$) et du dénominateur (x^2) de $\frac{2x + 1}{x^2 + 1}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

Question 8

1. f est définie en -3 , donc $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3) = 5 - \frac{27}{(-3)^2} = 5 - 3 = 2$.

2. D'après les règles des opérations sur les limites, $\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{27}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$.

Question 9 : A.

Par définition d'une asymptote horizontale, sachant que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$, la droite d'équation $y = 5$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $-\infty$.

Question 10

D'après le graphique, la courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses en trois points.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions dans $\mathbb{R} : -2, 1$ et 3 .

Question 11

À l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, ou bien en se déplaçant sur le graphique, on obtient l'encadrement à 10^{-1} près suivant : $0,1 < \alpha < 0,2$.

En effet, on a $f(0,1) \approx -1,9 < 0$ et $f(0,2) \approx 0,17 > 0$.

Question 12 : B.

• Il s'agit de trouver la dérivée d'une fonction qui s'écrit sous la forme $u \times v$.

• On a $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$ avec, ici, $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-x}$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$.

• Finalement, la dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} est définie par $f'(x) = e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$.

Question 13 : A.

• Il s'agit de trouver la dérivée d'une fonction qui s'écrit sous la forme $\frac{u}{v}$.

• On a $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$ avec, ici, $u(x) = x^2 + 2x$

-5 et $v(x) = x - 1$, donc $u'(x) = 2x + 2$ et $v'(x) = 1$.

• Finalement, la fonction h' est définie par

$$h'(x) = \frac{(x-1)(2x+2) - (x^2+2x-5)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2x-2x-2-x^2-2x+5}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$$

sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Question 14 : C.

• L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0 est : $y = h'(0)(x - 0) + h(0)$.

• D'après la question précédente, on a

$$h'(0) = \frac{3}{(-1)^2} = 3 \text{ et } h(0) = \frac{-5}{-1} = 5.$$

Donc cette équation est $y = 3x + 5$.

Question 15 : A.

• Il s'agit de trouver la dérivée d'une fonction qui s'écrit sous la forme $\ln u$.

On a $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ pour u strictement positive.

• Ici, $u(x) = x^2 + 3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$.

• Donc $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La réponse est « vrai ».

Question 16 : A.

• Il s'agit d'étudier les variations de la fonction f après avoir calculé sa dérivée.

• La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0.$$

• La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

La réponse est « vrai ».

Question 17

• Il s'agit de calculer la dérivée d'une fonction et de déterminer son signe sur un intervalle particulier.

• h est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1)$ qui est du signe de $e^x - 1$.

• Pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $e^x < 1$, donc $h'(x) < 0$.

• La fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

Question 18 : B.

• Il s'agit de trouver la dérivée d'une fonction qui s'écrit sous la forme « $\sin(ax + b)$ », avec a et b des nombres réels.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin'(ax + b) = a \times \cos(ax + b)$.

• Donc la réponse est la fonction f' définie par $f'(x) = 3\cos(3x + 1)$.

Question 19 : C.

• Il s'agit de trouver la dérivée d'une fonction qui s'écrit sous la forme « $\cos(ax + b)$ », avec a et b des nombres réels.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos'(ax + b) = -a \times \sin(ax + b)$.

• Donc la réponse est la fonction g' définie par $g'(x) = 4\sin(-4x + 2)$.

Question 20

1. La fonction cosinus est une fonction **paire** : elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$.

2. La fonction sinus est une fonction **impaire** : elle est symétrique par rapport à l'origine du repère.

En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Question 21

$$1. \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$2. \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3. \cos(\pi) = -1$$

$$4. \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Question 22 : B ; C.

La fonction exponentielle est **définie** et **strictement croissante** sur \mathbb{R} .

Question 23 : B.

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R} : e^{2x+3} = 4 \Leftrightarrow 2x + 3 = \ln 4 \Leftrightarrow 2x = \ln 4 - 3 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 4 - 3}{2}.$$

Question 24 : D.

• Il s'agit de trouver la dérivée d'une fonction qui s'écrit sous la forme $u \times v$.

• On a $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$ avec, ici, $u(x) = x$ et $v(x) = e^{x^2+1}$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2xe^{x^2+1}$.

• Finalement, $f'(x) = 1 \times e^{x^2+1} + x \times 2xe^{x^2+1} = (2x^2 + 1)e^{x^2+1}$ pour tout x dans \mathbb{R} .

Question 25

• L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle (notée f) au point d'abscisse o est $y = f'(o)(x - o) + f(o)$.

• On a $f'(o) = f(o) = e^o = 1$, donc cette équation est $y = x + 1$.

Question 26 : A ; C.

La fonction logarithme népérien est **définie** et **strictement croissante** sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Question 27 : A.

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b , $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln(a^2) = 2 \ln(a)$.
Donc pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $\ln(4x^2) = \ln(4) + \ln(x^2) = \ln(4) + 2 \ln(x)$.

La réponse est « vrai ».

Question 28 : A.

$$\text{Pour } x \in]0 ; +\infty[: \ln(3x + 1) = 1 \Leftrightarrow 3x + 1 = e^1 = e \Leftrightarrow 3x = e - 1 \Leftrightarrow x = \frac{e - 1}{3}.$$

Question 29 : B.

• Il s'agit de trouver la dérivée d'une fonction qui s'écrit sous la forme $\ln u$: on a $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ pour u strictement positive.

• Ici, $u(x) = 2x + 4 > 0$ pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ et $u'(x) = 2$.

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{2}{2x + 4} = \frac{1}{x + 2} \text{ pour tout } x \in [0 ; +\infty[.$$

Question 30 : B.

• Il s'agit de trouver une primitive d'une fonction polynôme.

Chaque monôme s'écrit sous la forme « αx^n » (n entier naturel, α nombre réel), donc la primitive de chacun est de la forme « $\frac{\alpha x^{n+1}}{n+1}$ ».

• Une primitive de la fonction f est donc la fonction F définie par $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2$ sur \mathbb{R} .

Question 31 : A.

• La fonction H est une primitive de la fonction h continue sur \mathbb{R} si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H'(x) = h(x)$.

Pour deux fonctions u et v dérivables sur \mathbb{R} , $(u \times v)' = vu' + uv'$ avec ici $u(x) = -x - 2$, donc $u'(x) = -1$ et $v(x) = e^{-x}$, donc $v'(x) = -e^{-x}$.

• La fonction H est dérivable sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H'(x) = -e^{-x} + (-1) \times (-x - 2)e^{-x} = -e^{-x} + (x + 2)e^{-x} = (x + 1)e^{-x} = h(x).$$

La réponse est « vrai ».

Question 32

Calculez l'intégrale suivante.

$$\int_0^2 (2x^3 + 4x) dx = \left[\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 \right]_0^2 = \frac{1}{2} \times 2^4 + 2 \times 2^2$$

$$= 8 + 8 = 16.$$

Question 33 : B.

• Il s'agit dans un premier temps de déterminer une primitive de la fonction définie par $f(x) = 4xe^{x^2}$ qui est continue sur l'intervalle $[-1 ; 0]$.

• Pour tout $x \in [-1 ; 0]$, $f(x) = 2 \times 2xe^{x^2} = 2 \times u'(x) \times e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2$.

Or une primitive d'une fonction qui s'écrit sous la forme « $u'e^u$ », est de la forme « e^u ».

$$\text{Donc } \int_{-1}^0 4xe^{x^2} dx = \left[2e^{x^2} \right]_{-1}^0 = 2e^0 - 2e^1 = 2 - 2e = 2 \times (1 - e).$$

Question 34 : A.

• Cette aire, en unités d'aire, est $\int_4^{25} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$
car f est positive et continue sur $[4; 25]$.

• Or une primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur l'intervalle $[4; 25]$ est la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$, donc :

$$\int_4^{25} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \left[\sqrt{x} \right]_4^{25} = \sqrt{25} - \sqrt{4} = 5 - 2 = 3.$$

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 4$ et $x = 25$ est donc de 3 u.a.

Question 35 : C.

• La valeur moyenne d'une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$) est

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

• Ici, $\mu = \frac{1}{4-0} \int_0^4 e^{2x} dx = \frac{1}{4} \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^4 = \frac{1}{4} \left(\frac{e^8}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8} (e^8 - 1).$

Géométrie

Question 36 : B.

Le discriminant de l'équation du second degré $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ est $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = 12 - 16 = -4 = (2i)^2 < 0$.

Les deux racines complexes sont

$$z_1 = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i \text{ et } z_2 = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i.$$

La réponse est « faux ».

Question 37 : A ; C.

• L'affixe d'un point ou d'un vecteur de coordonnées $(a; b)$ est le nombre complexe $z = a + bi$.

• Les coordonnées du point A sont $(2; 3)$, donc l'affixe du point A est $z_A = 2 + 3i$.

• Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AC} sont $(0; -6)$, donc l'affixe du vecteur \overrightarrow{AC} est $-6i$ (aussi égale à $z_C - z_A$).

Question 38 : B ; C.

• L'image d'un nombre complexe $z = a + bi$ (a et b réels) est le point du plan complexe de coordonnées $(a; b)$.

• Les coordonnées du point B sont $(-2; 3)$, donc le point B est l'image du nombre complexe $z' = -2 + 3i$.

• Les coordonnées du point C sont $(2; -3)$, donc le point C est l'image du nombre complexe $z = 2 - 3i$.

Question 39 : A.

• Pour déterminer l'écriture avec la notation exponentielle d'un nombre complexe, il faut déterminer son module, puis l'un de ses arguments.

$$\bullet |z| = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

En posant $\theta = \arg(z)$, on a $\cos(\theta) = \frac{\text{Re}(z)}{r}$ et

$$\sin(\theta) = \frac{\text{Im}(z)}{r}, \text{ soit } \theta = -\frac{\pi}{3} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

L'écriture exponentielle de z est $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Question 40 : B.

$$z = 4e^{-i\frac{\pi}{6}} = 4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 4i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4i \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} - 2i.$$

La réponse est « faux ».

Question 41

$\overrightarrow{AB}(4-1; 5-2; 6-3)$, soit $(3; 3; 3)$ et $\overrightarrow{AC}(7-1; 8-2; 9-3)$, soit $(6; 6; 6)$.

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 6 + 3 \times 6 + 3 \times 6 = 54$.

Question 42 : A.

• Il s'agit de calculer le produit scalaire de deux vecteurs pour savoir s'ils sont orthogonaux.

• $\overrightarrow{AB}(1-0; 1-2; 2-(-1))$, soit $(1; -1; 3)$ et $\overrightarrow{AC}(-2-0; 3-2; 0-(-1))$, soit $(-2; 1; 1)$.

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + (-1) \times 1 + 3 \times 1 = 0$.

Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont donc orthogonaux. La réponse est « oui ».

Question 43 : B.

• Deux droites de l'espace sont orthogonales si et seulement si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

Il s'agit donc de calculer le produit scalaire de deux vecteurs pour savoir s'ils sont orthogonaux.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + 0 \times 3 + (-2) \times 0 = 1.$$

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont pas orthogonaux, donc les droites (d) et (d') ne sont pas orthogonales.

La réponse est « non ».

Question 44 : A.

• Une droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à un vecteur normal à ce plan.

Il s'agit donc de calculer le produit scalaire de deux vecteurs pour savoir s'ils sont orthogonaux.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 0.$$

Les vecteurs \vec{u} et \vec{n} sont orthogonaux, donc la droite (d) est parallèle au plan P .

La réponse est « oui ».

Question 45 : B.

• Deux plans sont parallèles si et seulement si les vecteurs normaux de l'un sont colinéaires aux vecteurs normaux de l'autre.

• Ici, les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' ne sont pas colinéaires car $\frac{2}{1} \neq \frac{-2}{3} \neq \frac{-2}{-2}$.

Donc les plans P et P' ne sont pas parallèles.

• En revanche, on peut remarquer que $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$, donc que les plans P et P' sont perpendiculaires.

La réponse est « non ».

Question 46 : B.

$$\bullet \text{ On a } AB = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AB}}.$$

Il s'agit donc de calculer le carré scalaire d'un vecteur, puis sa racine carrée.

$$\bullet \overline{AB} = (-1 - 3; -2 - (-2); 4 - 1), \text{ soit } (-4; 0; 3).$$

$$\bullet \text{ On a donc } AB = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AB}} = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Question 47 : B.

Un vecteur directeur de la droite dont une

$$\text{équation paramétrique est } \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = t + 5 \\ z = 3t - 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

est $\vec{v}(-1; 1; 3)$. Le vecteur $\vec{u}(2; 5; -2)$ n'est pas colinéaire à ce vecteur, donc $\vec{u}(2; 5; -2)$ n'est pas un vecteur directeur de cette droite.

La réponse est « faux ».

Question 48 : C.

• Il s'agit de trouver une équation cartésienne d'un plan dont on connaît un point et un vecteur normal.

• $\vec{n}(2; 0; -1)$ est un vecteur normal au plan P . Donc son équation est de la forme $2x - z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

• $A \in P$, donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne du plan et $2 \times 1 - 4 + d = 0$, puis $d = 2$.

• $2x - z + 2 = 0$ est une équation cartésienne du plan P dont un vecteur normal est $\vec{n}(2; 0; -1)$ et qui passe par le point $A(1; 2; 4)$.

Question 49 : B.

• Deux droites de l'espace sont parallèles si et seulement les vecteurs directeurs de l'une sont colinéaires aux vecteurs directeurs de l'autre. Il s'agit donc de savoir si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

• Les vecteurs $\vec{u}(2; 1; -3)$ et $\vec{v}(1; 4; 2)$ ne sont pas colinéaires car $\frac{1}{2} \neq \frac{4}{1} \neq \frac{2}{-3}$, donc les

droites (d) et (d') ne sont pas parallèles.

La réponse est « non ».

Probabilités et statistiques

Question 50

• $P_A(I)$ est la probabilité que le téléphone choisi offre un accès illimité à Internet, sachant que le téléphone de cette personne est de marque Alpha.

$$\bullet \text{ D'après l'énoncé, } P_A(I) = \frac{80}{100} = 0,8.$$

Question 51 : B ; C.

• Il s'agit de calculer les probabilités d'intersection d'événements $P(A \cap I)$ et $P(\bar{A} \cap I)$.

• Par définition des probabilités conditionnelles, on a $P(A \cap I) = P_A(I) \times P(A) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$.

$$\bullet \text{ De même, } P(\bar{A} \cap I) = P_{\bar{A}}(I) \times P(\bar{A}) = 0,7 \times 0,4 = 0,28.$$

Question 52

• $P(I)$ est la probabilité que le téléphone choisi offre un accès illimité à Internet.

• $A \cap I$ et $\bar{A} \cap I$ forment une partition de l'ensemble I .

Réviser son bac avec *Le Monde*

D'après la formule des probabilités totales et la question précédente :

$$P(I) = P(A \cap I) + P(\bar{A} \cap I) = 0,48 + 0,28 = 0,76.$$

Question 53

• $P_1(A)$ est la probabilité que le téléphone choisi soit de marque Alpha, sachant qu'il offre un accès illimité à Internet.

• Par définition des probabilités conditionnelles, $P_1(A) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = \frac{0,48}{0,76} \approx 0,63$ (à 10^{-2} près).

Question 54 : B.

L'espérance de la variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur $[a ; b]$ ($a < b$) est

$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Donc, ici, $E(X) = \frac{0+4}{2} = 2$ car $a = 0$ et $b = 4$.

Question 55 : A.

L'espérance de la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Question 56 : B.

• Il s'agit de calculer $P(X > 10\ 000)$.

Remarquez tout d'abord que les événements $X \leq 10\ 000$ et $X > 10\ 000$ sont des événements contraires.

$$\begin{aligned} \bullet P(X \leq 10\ 000) &= \int_0^{10\ 000} 0,0002e^{-0,0002x} dx \\ &= [-e^{-0,0002x}]_0^{10\ 000} = 1 - e^{-0,0002 \times 10\ 000} = 1 - e^{-2}. \end{aligned}$$

• On a donc $P(X > 10\ 000) = 1 - P(X \leq 10\ 000) = 1 - (1 - e^{-2}) = e^{-2} \approx 0,135$ au millième près.

Question 57 : A.

On a $P(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99$ au centième près, donc la réponse est « vrai ».

Question 58

1. $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$ à 10^{-3} près

2. $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$ à 10^{-2} près

3. $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$ à 10^{-2} près

Question 59 : C.

• Il s'agit de calculer approximativement l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % avec $n = 100$ et $p = 0,3$.

• Remarquons tout d'abord que les conditions sont vérifiées : $0 < p = 0,3 < 1$, $n = 100 \geq 30$, $np = 100 \times 0,3 = 30 \geq 5$ et $n(1-p) = 100 \times (1-0,3) = 70 \geq 5$.

• Calculons ensuite les bornes de cet intervalle :

$$\begin{aligned} p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} &= 0,3 - 1,96 \frac{\sqrt{0,3 \times (1-0,3)}}{\sqrt{100}} \\ &\approx 0,2102. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} &= 0,3 + 1,96 \frac{\sqrt{0,3 \times (1-0,3)}}{\sqrt{100}} \\ &\approx 0,3898. \end{aligned}$$

• Ici, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence est approximativement égal à $[0,2102 ; 0,3898]$.

Question 60 : B.

• L'intervalle recherché est $[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$

avec $f = \frac{316}{400} = 0,79$ et $n = 400$.

Donc $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{400}} = \frac{1}{20} = 0,05$.

• Cet intervalle est donc $[0,74 ; 0,84]$.

Question 61 : B.

• L'intervalle recherché est $[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$

avec $f = \frac{720}{1\ 000} = 0,72$ et $n = 1\ 000$.

Donc $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1\ 000}} \approx 0,032$.

• Cet intervalle est donc $[0,688 ; 0,752]$.