



CALAO

Livre du professeur Mathématiques

Enseignement commun

Fakhreddine Ghommid

Cédric Climent

Lycée Blaise Cendrars, Sevrans

Marie-Sophie Cuttaz

Lycée François Mauriac, Bordeaux

Christophe Jolibert

Lycée Albert Claveille, Périgueux

Olivier Pinçon

Lycée Alfred Kastler, Talence

Nathalie Teulié

Lycée Alfred Kastler, Talence

Grégory Viateau

Lycée Louis de Foix, Bayonne

Relecteurs pédagogiques : **Damien Sollier** et **Alain Vidal**.

Sommaire

Chapitre 1 • Suites numériques	3
Chapitre 2 • Fonctions exponentielles	11
Chapitre 3 • Fonction logarithme décimal	21
Chapitre 4 • Fonction inverse	31
Chapitre 5 • Séries statistiques à deux variables quantitatives	41
Chapitre 6 • Probabilités conditionnelles	49
Chapitre 7 • Variables aléatoires discrètes finies	59
Thèmes d'étude	67

Chapitre 1 • Suites numériques

Activités du cours

1 Suites arithmétiques

A. Exprimer un montant au bout de n versements

Objectif : conjecturer une relation fonctionnelle pour une suite arithmétique.

1. La suite est définie par $u_{n+1} = u_n + 40$, pour tout entier naturel n : c'est donc une suite arithmétique de raison 40.
 $u_1 = u_0 + 40 = 50 + 40 = 90$; $u_2 = u_1 + 40 = 90 + 40 = 130$;
 $u_3 = u_2 + 40 = 130 + 40 = 170$.

2.a. On ajoute 40 à chaque étape : il semble donc que $u_n = 50 + 40 \times n$.

b. $u_{20} = 50 + 40 \times 20 = 850$: Delphine doit attendre 20 semaines.

B. Mettre en évidence les liens entre trois termes consécutifs et la moyenne arithmétique

Objectif : faire le lien entre moyenne arithmétique et termes consécutifs d'une suite arithmétique.

1. Raison : 2,5.

n	10	11	12	13	14	15	16
u_n	13	15,5	18	20,5	23	25,5	28

2. $u_{n+2} = u_{n+1} + r = (u_n + r) + r = u_n + 2r$
 donc $r = \frac{u_{n+2} - u_n}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}$.

C. Calculer la somme des premiers entiers

Objectif : déterminer une expression de la somme des n premiers entiers.

1.

S_n	=	0	+	1	+	2	+	...	$n-2$	+	$n-1$	+	n
S_n	=	n	+	$n-1$	+	$n-2$	+	...	2	+	1	+	0
$S_n + S_n = 2S_n$	=	n	+	n	+	n	+	...	n	+	n	+	n

2. Donc $2S_n = n(n+1)$ et $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

À votre tour !

1.a. Pour $n \geq 1$, $u_n = u_0 + nr = 5 + 3n$

et $v_n = v_1 + (n-1)r = \frac{1}{3} + (-1)(n-1) = \frac{4}{3} - n$

b. $u_{120} = 5 + 3 \times 120 = 365$ et $u_{150} = 5 + 3 \times 150 = 455$

2.a. $w_1 = \frac{w_0 + w_2}{2} = \frac{-11 + 3}{2} = -4$;

$r = w_1 - w_0 = -4 - (-11) = 7$

b. $w_n = w_0 + nr = -11 + 7n$ donc $w_{15} = -11 + 7 \times 15 = 94$

2 Suites géométriques à termes positifs

A. Modéliser l'évolution d'une population par une suite géométrique

Objectifs : modéliser une situation par une suite géométrique ; conjecturer une relation fonctionnelle pour une suite géométrique ; faire le lien entre moyenne géométrique et termes positifs consécutifs d'une suite géométrique.

1. Les valeurs diminuent puis augmentent donc ce ne peut pas être un modèle géométrique.

2.a. $u_1 = 1000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1100$;

$u_2 = 1100 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1210$;

$u_3 = 1210 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1331$.

b. Cette suite est géométrique car $u_{n+1} = 1,1 \times u_n$.
 Conjecture : $u_n = 1000 \times 1,1^n$ pour n entier naturel.

3. $\sqrt{u_0 u_2} = 1100 = u_1$; $\sqrt{u_1 u_3} = 1210 = u_2$.

B. Exprimer en fonction de n la somme des premières puissances

Objectif : déterminer une expression de la somme des premières puissances.

1.

S_n	=	1	+	q	+	q^2	+	...	q^{n-1}	+	q^n		
qS_n	=			q	+	q^2	+	...	q^{n-1}	+	q^n	+	q^{n+1}
$S_n - qS_n$	=	1	+	0	+	0	+	...	0	+	0	+	$-q^{n+1}$

2. $S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$.

En factorisant, on obtient $S_n(1 - q) = 1 - q^{n+1}$ ou encore

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

À votre tour !

1.a. Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = u_0 \times q^n = 5 \times 5^n = 5^{n+1}$.

b. $u_{12} = 5^{13} = 1220\,703\,125$

2.a. $w_1 = \sqrt{w_0 w_2} = 108$ donc $q = \frac{w_1}{w_0} = \frac{108}{81} = \frac{4}{3}$.

b. $w_n = w_0 \times q^n = 81 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$

donc $w_{15} = 81 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{15} \approx 6\,061,3$.

Chapitre 1 • Suites numériques

Exercices - Échauffement

1 Réponses dans le manuel.

2 a. La moyenne arithmétique est $\frac{5+15}{2} = 10$.

b. La moyenne arithmétique est $\frac{\frac{1}{3} + \frac{-3}{7}}{2} = \frac{\frac{7}{21} - \frac{9}{21}}{2} = -\frac{1}{21}$.

c. La moyenne arithmétique est $\frac{105-205}{2} = -50$.

3 a. $u_1 = u_0 + 3 = 5$; $u_2 = u_1 + 3 = 8$; $u_3 = u_2 + 3 = 11$;
 $u_4 = u_3 + 3 = 14$; $u_5 = u_4 + 3 = 17$; $u_6 = u_5 + 3 = 20$.

b. $v_1 = v_0 - 8 = 20$; $v_2 = v_1 - 8 = 12$; $v_3 = v_2 - 8 = 4$;
 $v_4 = v_3 - 8 = -4$; $v_5 = v_4 - 8 = -12$; $v_6 = v_5 - 8 = -20$.

c. $w_1 = w_0 + 3 = \frac{22}{7}$; $w_2 = w_1 + 3 = \frac{43}{7}$; $w_3 = w_2 + 3 = \frac{64}{7}$;
 $w_4 = w_3 + 3 = \frac{85}{7}$; $w_5 = w_4 + 3 = \frac{106}{7}$; $w_6 = w_5 + 3 = \frac{127}{7}$.

4 Réponses dans le manuel.

5 a. Pour tout entier naturel n , $u_n = 2(n-5) + 3n = 5n - 10$ donc la suite est arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_0 = -10$.

b. La suite n'est pas arithmétique. En effet, $v_0 = -1$, $v_1 = 1$ et $v_2 = 5$ ne sont pas en progression arithmétique.

c. Pour tout entier naturel n , $w_n = -4 + 3n$ donc la suite est arithmétique de raison 3 et de premier terme $w_0 = -4$.

6 a. Pour tout entier naturel n , $t_n = -1 + 2n$.

b. $t_{35} = -1 + 2 \times 35 = 69$; $t_{64} = -1 + 2 \times 64 = 127$.

7 a. Pour tout entier naturel n , $w_n = \frac{15}{3} + \frac{2}{3}n$.

b. $w_{20} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} \times 20 = \frac{55}{3}$ et $w_{30} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} \times 30 = \frac{75}{3} = 25$.

8 Pour tout entier naturel n , $z_n = 15 - 4n$.

Donc $z_{55} = 15 - 4 \times 55 = -205$

et $z_{100} = 15 - 4 \times 100 = -385$.

9 a. $1 + 2 + 3 + \dots + 500 = \frac{500 \times 501}{2} = 125\,250$

b. $35 + 36 + 37 + \dots + 150 = \frac{35+150}{2} \times 116 = 10\,730$

10 Réponses dans le manuel.

11 a. Pour tout entier naturel n , $v_n = 4 - 2n$;
 alors $v_{40} = 4 - 2 \times 40 = -76$.

b. $S = \frac{v_0 + v_{40}}{2} \times 41 = -\frac{72}{2} \times 41 = -1\,476$

12 a. $14 - 3 + 1 = 12$: il y a 12 termes.

b. $S = \frac{u_3 + u_{14}}{2} \times 12 = 22 \times 12 = 264$

13 a. $t_1 = 5$ et $t_2 = 10$.

b. Pour tout entier naturel n , $t_{n+1} = t_n + 5$ donc la suite est arithmétique de raison 5.

c. Pour tout entier naturel n , $t_n = 0 + 5n = 5n$.

d. $t_{30} = 150$

e. $\sum_{k=1}^{30} t_k = 2\,325$

14 Réponses dans le manuel.

15 a. $\sqrt{1,5 \times 2} \approx 1,732$

b. $\sqrt{1,06 \times 0,98} \approx 1,019$

c. $\sqrt{1,5 \times 3} \approx 2,121$

16 a. $u_1 = 3 \times 2 = 6$; $u_2 = 6 \times 2 = 12$; $u_3 = 12 \times 2 = 24$;
 $u_4 = 24 \times 2 = 48$; $u_5 = 48 \times 2 = 96$; $u_6 = 96 \times 2 = 192$.

b. $v_1 = 5 \times (-1) = -5$; $v_2 = -5 \times (-1) = 5$; $v_3 = 5 \times (-1) = -5$;
 $v_4 = -5 \times (-1) = 5$; $v_5 = 5 \times (-1) = -5$; $v_6 = -5 \times (-1) = 5$

c. $w_1 = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $w_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; $w_3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$;
 $w_4 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$; $w_5 = \frac{1}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$; $w_6 = \frac{1}{32} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$.

17 Réponses dans le manuel.

18 a. Pour tout entier naturel n ,
 $u_n = 3 \times 2^{n+1} = 3 \times 2 \times 2^n = 6 \times 2^n$ donc la suite est géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 6$.

b. Cette suite n'est pas géométrique.

En effet, $v_0 = 0$, $v_1 = 5$ et $v_2 = 10$ ne sont pas en progression géométrique.

c. Pour tout entier naturel n ,

$w_n = \frac{1}{2^n} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc la suite est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = 1$.

19 a. Pour tout entier naturel n , $t_n = -1 \times 2^n$.

b. $t_{12} = -1 \times 2^{12} = -4\,096$; $t_{20} = -1 \times 2^{20} = -1\,048\,576$.

20 a. Pour tout entier naturel n , $w_n = \frac{15}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b. $w_{10} = \frac{15}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \frac{5\,120}{59\,049}$;

$w_{20} = \frac{15}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{20} = \frac{5\,242\,880}{3\,486\,784\,401}$.

21 $z_{10} = 5 \times (-4)^{10} = 5\,242\,880$

22 Réponses dans le manuel.

23 a. Pour tout entier naturel n ,

$v_n = v_0 \times q^n = 4 \times (-2)^n$; $v_{10} = 4 \times (-2)^{10} = 4\,096$.

b. $S = \frac{1 - (-2)^{11}}{1 - (-2)} \times 4 = 2\,732$

24 a. $14 - 3 + 1 = 12$

b. Pour tout entier naturel n , $u_n = u_3 \times q^{n-3} = 5 \times 1,15^{n-3}$
 et $u_{14} = 5 \times 1,15^{11} = 885\,735$.

c. $S = 5 \times \frac{1 - 1,15^{12}}{1 - 1,15} \approx 145$

- 25** a. $u_1 = 20\,000 \times 1,02 = 20\,400$; $u_2 = 20\,400 \times 1,02 = 20\,808$.
 b. Augmenter de 2 % revient à multiplier par $1 + \frac{2}{100} = 1,02$.
 Donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n \times 1,02$ donc la suite est géométrique de raison 1,02 et de premier terme $u_0 = 20\,000$.
 c. Pour tout entier naturel n , $u_n = 20\,000 \times 1,02^n$.
 d. $u_{10} = 20\,000 \times 1,02^{10} \approx 24\,380$ euros au bout de 10 ans.

Exercices - Entraînement

- 26** $\frac{1,491 + 1,515}{2} = 1,503$, donc les trois prix sont en progression arithmétique. Cette situation peut être modélisée par la suite arithmétique de raison $1,503 - 1,491 = 0,012$ et de premier terme 1,491.

27 $\frac{10\,000 + 8\,200}{2} = 9\,100 \neq 9\,250$

Ces trois effectifs ne sont pas en progression arithmétique : la situation ne peut pas être modélisée par une suite arithmétique.

- 28** a. $S = \frac{202 \times (202 + 1)}{2} = 20\,503$
 b. Les termes de cette somme sont les termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 2$.
 Pour tout entier naturel n , $u_n = 2 + 2n$ donc $u_{100} = 202$.

$$S = 101 \times \frac{2 + 202}{2} = 10\,302$$

c. De même $S = 101 \times \frac{1 + 201}{2} = 10\,201$.

- 29** 1. $607 - 8 + 1 = 600$; il y a donc 600 termes dans la somme.

2. $S = \frac{78 + 3\,935}{2} \times 600 = 1\,203\,900$.

- 30** 1. Pour tout entier naturel n ,
 $S_n = \frac{u_2 + u_n}{2} \times (n - 1) = \frac{-2 - 2 + 4(n - 2)}{2} \times (n - 1)$

$$S_n = \frac{-4 + 4n - 8}{2} \times (n - 1) = \frac{-12 + 4n}{2} \times (n - 1)$$

$$S_n = (-6 + 2n) \times (n - 1) = 2n^2 - 8n + 6$$

2. Oui, $n = 11$ car $S_{11} = 160$.

- 31** 1. $10\,000 \times \frac{2}{100} = 200$ euros d'intérêts annuels.

2. $C_1 = C_0 + 200 = 10\,200$ et $C_2 = C_1 + 200 = 10\,400$.

3. Au bout de n années, $C_{n+1} = C_n + 200$ donc la suite (C_n) est arithmétique de raison 200 et de premier terme $C_0 = 1\,000$.

4. Pour tout entier naturel n , $C_n = 10\,000 + 200n$.

5. $C_{10} = 10\,000 + 200 \times 10 = 12\,000$ euros au bout de 10 ans.

- 32** 1. $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 4$.

2. La suite $(u_n)_{1 \leq n \leq 24}$ est arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.

3. En une journée : $1 + 2 + \dots + 24 = \frac{24 \times 25}{2} = 300$ tintements dans une journée.

- 33** 1.a. $u_1 = 15$; $u_2 = 16,5$; $u_3 = 18$; $u_4 = 19,5$.

b. Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = u_n + 1,5$ donc la suite est arithmétique de raison 1,5 et de premier terme 15.

2. $u_{16} = u_1 + (16 - 1) \times 1,5 = 37,5$ km ce qui est inférieur aux 42,195 km d'un marathon !

3. On calcule :

$$\sum_{i=1}^{16} u_i = u_1 + u_2 + \dots + u_{16} = 16 \times \frac{u_1 + u_{16}}{2} = 420 \text{ km au total.}$$

- 34** Réponses dans le manuel.

- 35** $\sqrt{3,2 \times 3,55} \approx 3,37 \neq 3,36$ donc la situation ne peut pas être modélisée par une suite géométrique.

- 36** $\sqrt{1\,000 \times 1\,322,5} = 1\,150$ donc ces trois masses peuvent être modélisées par une suite géométrique de raison $\frac{1\,150}{1\,000} = 1,15$.

- 37** Réponses dans le manuel.

- 38** 1. $CM_1 = 1 - \frac{30}{100} = 0,7$ et $CM_2 = 1 - \frac{25}{100} = 0,75$.

2. $\sqrt{0,7 \times 0,75} \approx 0,725$

3. $0,725 = 1 - \frac{27,5}{100}$ donc l'évolution moyenne est une baisse d'environ 27,5 %.

- 39** a. $S = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{11} = \frac{1 - 2^{12}}{1 - 2} = 4\,095$

b. $S = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{13}$
 $2^{13} = 8\,192$ donc $S = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{14}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{49\,149}{8\,192}$.

c. $S = 2 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + \dots + 2 \times 3^8$

$$S = 2 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + \dots + 2 \times 3^8 = 2 \times \frac{1 - 3^9}{1 - 3} = 19\,682$$

- 40** 1. $C_1 = 10\,000 \times 1,03 = 10\,300$;
 $C_2 = 10\,300 \times 1,03 = 10\,609$.

2. Pour tout entier naturel n , $C_{n+1} = C_n \times 1,03$ donc la suite est géométrique de raison 1,03 et de premier terme $C_0 = 10\,000$.

3. Pour tout entier naturel n , $C_n = 10\,000 \times 1,03^n$.

4. $C_{10} = 10\,000 \times 1,03^{10} \approx 13\,439$ euros au bout de 10 ans.

- 41** 1. $d_0 = 12\,500$; $d_1 = 12\,500 \times 0,945 = 11\,812,5$;
 $d_2 = 11\,812,5 \times 0,945 = 11\,162,8125$.

2. Pour tout entier naturel n , $d_{n+1} = d_n \times 0,945$ donc la suite est géométrique de raison 0,945 et de premier terme 12 500.

3. $d_n = 12\,500 \times 0,945^n$

4. $d_3 \approx 10\,549$ et $d_4 \approx 9\,969$ donc l'entreprise dépense moins de 10 000 euros en 2022.

- 42** 1. $24 \times 250 = 6\,000$: c'est donc insuffisant.
 2.a. $u_1 = 250 \times 1,05 = 262,5$ et $u_2 = 262,5 \times 1,05 = 275,625$.
 b. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n \times 1,05$ donc la suite est géométrique de raison 1,05 et de premier terme 250.
 c. Pour tout entier naturel n , $u_n = 250 \times 1,05^n$.
 3. $\sum_{k=0}^{23} u_k = 250 \times \frac{1-1,05^{24}}{1-1,05} \approx 11\,125$ paires de lunettes.
 Donc la commande sera honorée.

- 43** a. $\sum_{k=1}^{13} k^2$ b. $\sum_{k=3}^{103} k^2$
 c. $\sum_{i=1}^{101} \frac{i}{i+1}$ d. $\sum_{k=1}^{25} k^3$
 e. $\sum_{k=1}^{25} k(k+1)$ f. $\sum_{j=0}^{11} (3+4j)$
 g. $\sum_{k=0}^{10} 3 \times 2^k$

- 44** a. $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{15^2}$
 b. $-3 + (-1) + 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 27$
 c. $1 + (-2) + 3 + (-4) + 5 + \dots + (-28)$
 d. $2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + 2 \times 3^4 + \dots + 2 \times 3^{10}$

- 45** 1. $10\,000 \times 0,015 = 150$.
 $C_1 = 10\,000 + 150 = 10\,150$; $C_2 = 10\,150 + 150 = 10\,300$.
 2. Pour tout entier naturel n , $C_{n+1} = C_n + 150$, donc la suite est arithmétique de raison 150.
 3. Pour tout entier naturel n , $C_n = 10\,000 + 150n$.
 4. $C_7 = 10\,000 + 150 \times 7 = 11\,050$ euros au bout de 7 ans.

- 46** 1. $C_1 = 20\,000 \times 1,011 = 20\,220$;
 $C_2 = 20\,220 \times 1,011 \approx 20\,442$.
 2. Pour tout entier naturel n , $C_{n+1} = C_n \times 1,011$ donc la suite est géométrique de raison 1,011 et de premier terme 20 000.
 3. Pour tout entier naturel n , $C_n = 20\,000 \times 1,011^n$.
 4. $C_{15} = 20\,000 \times 1,011^{15} \approx 23\,567$ euros au bout de 15 ans.

- 47** 1. $u_1 = 1\,000 \times 0,99 = 990$; $u_2 = 990 \times 0,99 = 980,1$.
 2. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n \times 0,99$.
 3. On en déduit que la suite est géométrique de raison 0,99 et de premier terme $u_0 = 1\,000$.
 4. Pour tout entier naturel n , $u_n = 1\,000 \times 0,99^n$.
 5. $u_{48} = 1\,000 \times 0,99^{48} \approx 617$ hectopascals.

- 48** 1. $a_1 = 1\,500 \times 0,88 = 1\,320$; $a_2 = 1\,320 \times 0,88 = 1\,161,6$.
 2. Pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = a_n \times 0,88$.
 3. Donc la suite est géométrique de raison 0,88 et de premier terme $a_0 = 1\,500$.
 4. Pour tout entier naturel n , $a_n = 1\,500 \times 0,88^n$.
 5. $a_{21} \approx 102$; $a_{22} \approx 90$. C'est donc à partir de la 22^e année que la valeur devient inférieure à 100 euros.

49 Réponses dans le manuel.

- 50** 1. $u_1 = 2 \times 3 - 0 + 2 = 8$; $u_2 = 2 \times 8 - 1 + 2 = 17$;
 $u_3 = 2 \times 17 - 2 + 2 = 34$.
 2. $\frac{8+34}{2} = 21 \neq 17$ donc cette suite n'est pas arithmétique.
 $\sqrt{8 \times 34} = \sqrt{272} \neq 17$ donc cette suite n'est pas géométrique.
 3. $u_{25} = 134\,217\,752$

- 51** 1. $v_1 = 1 \times 6 - 0 + 1 = 7$; $v_2 = 2 \times 7 - 1 + 1 = 14$;
 $v_3 = 3 \times 14 - 2 + 1 = 41$.
 2. $\frac{7+41}{2} = 24 \neq 14$ donc cette suite n'est pas arithmétique.
 3. $\sqrt{7 \times 41} \approx 16,9 \neq 14$ donc cette suite n'est pas géométrique.

```
def terme(n):
    v = 6
    for i in range(n):
        v = (i + 1) * v - i + 1
    return v
```

52 Partie A

1. $\frac{11\,010 - 7\,420}{7\,420} \approx 48\%$ de hausse entre 2016 et 2017.
 $\frac{15\,350 - 11\,010}{11\,010} \approx 39\%$ de hausse entre 2017 et 2018.

2. $\sqrt{1,48 \times 1,39} \approx 1,434$.

3. On en déduit que le taux annuel moyen entre 2016 et 2018 est +43,4 % environ.

Partie B

- 1.a. $u_0 = 15\,350$
 b. $u_1 = 15\,350 \times 1,43 = 21\,950,5$;
 $u_2 = 21\,950,5 \times 1,43 = 31\,389,215$.
 2.a. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n \times 1,43$. Donc la suite est géométrique de raison 1,43 et de premier terme 15 350.
 b. Pour n entier naturel, $u_n = 15\,350 \times 1,43^n$.
 3. $u_5 = 15\,350 \times 1,43^5 \approx 91\,789$ véhicules hybrides vendus en 2023.

53 Partie A

1. $\frac{13\,550 - 11\,755}{11\,755} \approx 15\%$ de hausse entre 2016 et 2017.
 $\frac{15\,000 - 13\,550}{13\,550} \approx 11\%$ de hausse entre 2017 et 2018.

2. $\sqrt{1,15 \times 1,11} \approx 1,13$.

3. On en déduit que le taux d'évolution annuel moyen entre 2016 et 2018 est +13 % environ.

Partie B

1. $u_0 = 15\,000$
 2. $u_1 = 15\,000 \times 1,13 = 16\,950$;
 $u_2 = 16\,950 \times 1,13 \approx 19\,153,5$.

3. Pour n entier naturel, $u_{n+1} = u_n \times 1,13$, donc la suite est géométrique de raison 1,13 et de premier terme 15 000.
 4. Pour n entier naturel, $u_n = 15\,000 \times 1,13^n$.
 5. $u_5 = 15\,000 \times 1,13^5 \approx 27\,637$ MW en 2023. Donc l'objectif est atteint.

54 1. Contrat 1

- a. $u_1 = 21\,000$; $u_2 = 21\,000 + 1\,000 = 22\,000$;
 $u_3 = 22\,000 + 1\,000 = 23\,000$.
 b. Pour n entier naturel $u_{n+1} = u_n + 1\,000$.
 c. La suite est arithmétique de raison 1 000 et de premier terme 20 000.
 d. Pour n entier naturel,
 $u_n = 20\,000 + 1\,000(n-1) = 19\,000 + 1\,000n$.
 e. $u_{15} = 19\,000 + 1\,000 \times 15 = 34\,000$

2. Contrat 2

- a. $v_1 = 18\,000$; $v_2 = 18\,000 \times 1,08 = 19\,440$;
 $v_3 = 19\,440 \times 1,08 = 20\,995,2$.
 b. Pour n entier naturel, $v_{n+1} = v_n \times 1,08$.
 c. Cette suite est géométrique de raison 1,08 et de premier terme 18 000.
 d. Alors, pour n entier naturel, $v_n = 18\,000 \times 1,08^{n-1}$.
 e. $v_{15} = 18\,000 \times 1,08^{14} \approx 52\,869$.

3.a. Le salaire du contrat 1 croît de façon linéaire tandis que celui du contrat 2 croît de manière géométrique avec une raison strictement supérieure à 1. Donc à long terme, le salaire annuel du contrat 2 deviendra supérieur à celui du contrat 1.

b. Voir le fichier C01_Ex.54_Cor.

```
def contrat():
    n = 0
    u = 21000
    v = 18000
    while u > v:
        n = n + 1
        u = u + 1000
        v = v * 1.08
    return n
```

- c. C'est à la 6^e année.
 d. On calcule les salaires cumulés sur 15 ans :

• avec le contrat 1 :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{15} u_i = u_1 + u_2 + \dots + u_{15} = 15 \times \frac{u_1 + u_{15}}{2} = 412\,500 ;$$

- avec le contrat 2 :

$$S_2 = \sum_{i=1}^{15} v_i = v_1 + v_2 + \dots + v_{15} = 18\,000 \times \frac{1 - 1,08^{15}}{1 - 1,08} \approx 488\,738.$$

Là encore, le contrat 2 demeure le plus intéressant.

- 55 Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n \times 0,9$ donc la suite est géométrique de raison 0,9 et de premier terme 100. Alors :
 $u_n = 100 \times 0,9^n$.
 On cherche un entier n tel que $u_n \leq 1$: à la calculatrice, on obtient que 44 couches sont nécessaires.

- 56 1. On multiplie par 2 le nombre de grains de la case précédente : il s'agit bien d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 1$.

2. Pour tout entier naturel n , $u_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

3. $u_{64} = 2^{64-1} = 2^{63} = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$.

4. Total des grains :

$$\sum_{k=1}^{64} u_k = 1 \times \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616.$$

Ce nombre est supérieur à la production réalisée depuis le début de l'agriculture.

- 57 1.a. $u_1 = 75 \times 0,95 = 71,25$ et $u_2 = 71,25 \times 0,95 = 67,6875$.

b. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n \times 0,95$. Cette suite est géométrique de raison 0,95 et de premier terme 75.

c. Pour n entier naturel, $u_n = 75 \times 0,95^n$.

2. $u_7 = 75 \times 0,95^7 \approx 52,4$.

3. $u_{21} \approx 25,5$.

$u_{22} \approx 24,2$.

Au bout de 22 jours, la bouteille compte moins de 25 cl.

- 58 1. $u_1 = 10^6 \times 0,917 = 917\,000$

et $u_2 = 917\,000 \times 0,917 = 840\,889$

2. Pour n entier naturel, $u_{n+1} = u_n \times 0,917$, suite géométrique de raison 0,917.

3. Pour n entier naturel, $u_n = 10^6 \times 0,917^n$.

4. $u_7 \approx 545\,237$; $u_8 \approx 499\,982$.

Au bout de 8 jours, la population a diminué d'au moins la moitié.

5. Voir le fichier C01_Ex.58_Cor.

```
def demi_vie(a):
    n = 0
    u = a
    while u > a/2:
        n = n + 1
        u = u * 0.917
    return n
```

On pourra exécuter la fonction **demi_vie** avec plusieurs valeurs du paramètre **a** et faire constater que la demi-vie ne dépend pas du nombre de noyaux initiaux.

Exercices - Perfectionnement

- 59 1. $u_1 = 35\,000$; $u_2 = 35\,000 \times 0,8 + 500 = 28\,500$

et $u_2 = 28\,500 \times 0,8 + 500 = 23\,300$.

2. La suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

3. Pour $n \geq 1$, entier naturel, $u_{n+1} = u_n \times 0,8 + 500$.

4.a. Dans cet exercice, il faut poser $v_n = u_n - 2\,500$ et non $v_n = u_n - 500$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = u_n \times 0,8 + 500 - 2\,500$$

$$v_{n+1} = 0,8 \left(u_n - \frac{2\,000}{0,8} \right) = 0,8(u_n - 2\,500) = 0,8v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_1 = u_1 - 2\,500 = 32\,500$.

b. Pour $n \geq 1$, on a $v_n = 32\,500 \times 0,8^{n-1}$
donc $u_n = 2\,500 + 32\,500 \times 0,8^{n-1}$.

5. $u_{12} = 2\,500 + 32\,500 \times 0,8^{12} \approx 4\,733$.

60 1. En 2020 : $u_1 = 10\,000 \times 1,015 - 1\,500 = 8\,650$;
en 2021 : $u_1 = 8\,650 \times 1,015 - 1\,500 = 7\,279,75$.

2. $\frac{10\,000 + 7\,279,75}{2} \neq 8\,650$ donc la suite n'est pas arithmétique.

$\sqrt{10\,000 \times 7\,279,75} \neq 8\,650$ donc la suite n'est pas géométrique.

3. L'année suivante ($n+1$), le capital est obtenu en ajoutant les intérêts ($\times \left(1 + \frac{1,5}{100}\right)$) et en retirant les 1 500 euros utilisés pour les vacances.

4.a. Pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 100\,000 = 1,015u_n - 1\,500 - 100\,000$$

$$v_{n+1} = 1,015u_n - 101\,500 = 1,015\left(u_n - \frac{101\,500}{1,015}\right)$$

$$v_{n+1} = 1,015(u_n - 100\,000)$$

$$v_{n+1} = 1,015v_n.$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 1,015 et de premier terme $v_0 = u_0 - 100\,000 = -90\,000$.

b. On en déduit que, pour tout entier naturel n ,
 $v_n = -90\,000 \times 1,015^n$. Et comme $v_n = u_n - 100\,000$, alors
 $u_n = v_n + 100\,000$ donc $u_n = -90\,000 \times 1,015^n + 100\,000$.

5. $2\,024 = 2\,019 + 5$ donc on calcule :

$$u_5 = -90\,000 \times 1,015^5 + 100\,000 \approx 3\,044 \text{ euros.}$$

6.a. L5 : $n = n + 1$.

L6 : $u = u \times 1,015 - 1\,500$.

b.

u	10 000	8 650	7 280	5 889	4 477	3 044	1 590	114	-1 384
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8

c. Le compte sera débiteur en 2027.

61 1.a. $c_0 = 3$; $c_1 = 12$; $c_2 = 48$.

b. Chaque côté en devient 4 à chaque étape donc, pour tout entier naturel n , $c_{n+1} = c_n \times 4$.

c. On en déduit que cette suite est géométrique de raison 4 et de premier terme $c_0 = 3$; alors, pour tout entier naturel n , $c_n = 3 \times 4^n$.

2.a. $c_{10} = 3 \times 4^{10} = 3\,145\,728$; $c_{50} = 3 \times 4^{50} \approx 3,8 \times 10^{30}$;
 $c_{100} = 3 \times 4^{100} \approx 4,8 \times 10^{60}$.

b. Il semble donc que le nombre de côtés devienne immensément grand.

3.a. Pour tout entier naturel n , $l_{n+1} = \frac{1}{3}l_n$ et on en déduit que la suite est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $l_0 = 1$.

b. Pour tout entier naturel n , $l_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

4.a. Pour tout entier naturel n ,

$$p_n = l_n \times c_n = 3 \times 4^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

b. Cette suite est donc géométrique de raison $\frac{4}{3}$ et de premier terme $p_0 = 3$.

5.a. Dans B3 : $=B2*4$; dans D3 : $=D2/3$; dans F3 : $=B3*D3$.

b. On retrouve le fait que le nombre de côtés devient immensément grand.

c. La longueur l_n devient de plus en plus petite et même infiniment petite tandis que le périmètre devient immensément grand, ce qui semble *a priori* paradoxal.

62 1. (Q_n) is a geometrical sequence because,

$$\text{for all } n \in \mathbb{N}, Q_{n+1} = Q_n \times \left(1 - \frac{1,24}{100}\right) = Q_n \times 0,9876.$$

2. For all $n \in \mathbb{N}, Q_n = Q_0 \times 0,9876^n$.

3. After 1,000 years (10 centuries) :

$$\frac{Q_{10}}{Q_0} \times 100 = 0,9876^{10} \approx 88,3 \, \%$$

After 2,000 years (20 centuries) :

$$\frac{Q_{20}}{Q_0} \times 100 = 0,9876^{20} \approx 77,9 \, \%$$

After 10,000 years (100 centuries) :

$$\frac{Q_{100}}{Q_0} \times 100 = 0,9876^{100} \approx 28,7 \, \%$$

4. $0,9876^n = 0,1$: $n \approx 184$: 18,400 years.

5. $0,9876^n = 0,05$: $n \approx 240$: 24,000 years.

Ateliers algorithmiques et numériques

Atelier 1 : Un programme Python sur les sommes à corriger

Objectif : écrire une fonction calculant la somme des n premiers carrés et des n premiers cubes.

1.a. `somme_carre(3)` affiche 5.

b. $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$.

2. Il faut modifier la boucle « pour » en : `for i in range(1,n+1)`.

3.a. Voir le fichier C01_Atelier1.Cor.

```
def somme_cube(n):
    s = 0
    for i in range(1,n+1):
        s = s + i**3
    return s
```

b. `somme_cube(12)` donne 6 084.

Atelier 2 : Termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

Objectif : automatiser le test permettant de vérifier si trois nombres sont les termes d'une suite arithmétique en utilisant la moyenne arithmétique.

1. En utilisant la méthode de la moyenne arithmétique ou des différences de termes successifs, on prouve que (3 ; 6 ; 9), (2 098 ; 2 162 ; 2 226) et (1,1 ; 1,2 ; 1,3) sont des triplets de termes pouvant appartenir à une suite arithmétique. (130 ; 146 ; 157) n'est pas un triplet de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

2.a. et b. On obtient que le triplet (1,1 ; 1,2 ; 1,3) n'est pas constitué de termes en progression arithmétique. Ce qui n'est pas cohérent avec la question 1.

3.a. et b. Avec le script comme par le calcul, on obtient cette fois que les triplets (1,1 ; 1,2 ; 1,3) et (12,5 ; 112,51 ; 212,52) sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Atelier 3 : Choix du meilleur placement d'argent

Objectif : utiliser une feuille de calcul pour déterminer l'évolution d'un placement et utiliser un programme comparant deux évolutions.

1.a. En A3 : =A2+1 ; en B3 : =B2*1.02.

b. Voir le fichier C01_Atelier3(1)_Cor.

c. C'est en 2055 que Marouane atteindra son objectif.

2.a. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n \times 1,02$ donc la suite est bien géométrique de raison 1,02.

b. Alors, pour tout entier naturel n , $u_n = 5\,000 \times 1,02^n$.

3.a. $15 \times 12 = 180$ euros par an.

b. En B3, il suffit d'entrer la formule : =B2+180 car sur un an : $15 \times 12 = 180$.

c. Le placement à intérêts composés constitue un modèle géométrique et donc une croissance exponentielle forcément plus forte que celle du modèle arithmétique du compte courant. Le placement à intérêts composés est donc forcément plus intéressant.

4. Voir le fichier C01_Atelier3(2)_Cor.

```
def capital():
    n = 2019
    u = 5000
    v = 5000
    while u < v :
        n = n + 1
        u = u * 1.02
        v = v + 180
    return n
```

C'est au bout de 56 ans, soit en 2075 que le placement à intérêts composés deviendra plus intéressant.

Atelier 4 : Fibonacci et les couples de lapins

Objectif : découvrir la suite de Fibonacci et étudier son comportement pour des valeurs très grandes.

1. $F_2 = 0 + 1 = 1$; $F_3 = 1 + 1 = 2$; $F_4 = 2 + 1 = 3$.

Ni la moyenne arithmétique de F_1 et F_3 ni leur moyenne géométrique ne donne F_2 . Cette suite n'est donc ni arithmétique ni géométrique.

2.a. $F_5 = 5$; $F_{10} = 55$; $F_{30} = 832\,040$; $F_{50} = 12\,586\,269\,025$.

Remarque : cette version de script ne fonctionne que pour $n \geq 2$.

b.

```
def Fibo_liste(n):
    f = [0,1]
    for i in range(n-1):
        f.append(f[i] + f[i+1])
    return f
```

On obtient 17. Cela signifie que c'est à partir du rang 17 que les termes de la suite dépassent 1 000.

c.

```
def seuil(s):
    i = 2
    while Fibo(i) < s:
        i = i + 1
    return i
```

C'est à partir du 31^e rang.

Être prêt pour le bac

63 Q1. Oui : la différence entre deux nombres vaut -4 .

Q2. Oui : on passe d'un nombre à l'autre en multipliant par $\frac{1}{3}$.

$$Q3. u_{25} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times 25 = \frac{16}{3}$$

$$Q4. v_{15} = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = 2^6 \times \frac{1}{2^{15}} = \frac{1}{2^9}$$

$$Q5. 3 + 6 + 9 + \dots + 30 = 10 \times \frac{3+30}{2} = 165$$

$$Q6. \text{La moyenne arithmétique est } \frac{125+245}{2} = 185.$$

$$Q7. \text{La moyenne géométrique est } \sqrt{4 \times 9} = 6.$$

Q8. 9 est la raison de la suite.

Q9. On peut modéliser cette situation par une suite arithmétique de raison 100 et de premier terme 1 000.

Q10. Cette situation ne peut pas être modélisée ni par une suite arithmétique ni par une suite géométrique.

64 Partie A

1. $u_1 = 1\,240 \times 0,85 = 1\,054$ renards en 2020.

2.a. $u_2 = 1\,054 \times 0,85 = 895,9$

b. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n \times 0,85$.

c. On en déduit que la suite est géométrique de raison 0,85 et de premier terme $u_0 = 1\,240$.

3. $u_5 = 1\,240 \times 0,85^5 \approx 550$ renards en 2024.

4. $u_{15} = 1\,240 \times 0,85^{15} \approx 108$ et $u_{16} = 1\,240 \times 0,85^{16} \approx 92$.

À la calculatrice, on obtient que l'espèce sera en extinction en $2019 + 16 = 2035$.

Les termes de la suite sont de plus en plus proches de 0. Cela signifie que les renards devraient disparaître du parc à long terme.

Partie B

1. $v_1 = 1\,240 \times 0,85 + 30 = 1\,084$

2. =B3*0.85+30

3. $u_{26} \approx 215$. Il semble que les termes se rapprochent cette fois de 200. Cela signifie qu'à long terme, le nombre de renards devrait s'approcher des 200 individus.

65 Partie A

1. $\frac{180 - 172}{172} \approx 0,0465$ donc le taux d'évolution du nombre de ventes de modèles M1 entre 2018 et 2019 est une hausse de 4,65 %.

2. $\frac{331 - 344}{344} \approx -0,037$ donc le taux d'évolution du nombre de ventes de modèles M2 entre 2018 et 2019 est une baisse de 3,77 %.

3. $\frac{(180 + 331) - (172 + 344)}{172 + 344} \approx -0,009$

L'affirmation est fausse car les ventes baissent de 0,1 %.

Partie B

1. $u_0 = 180$ et $u_1 = 180 \times 1,045 \approx 188$.

$v_0 = 331$ et $u_1 = 331 \times 0,962 \approx 318$.

2. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques de raisons respectives 1,045 et 0,962.

3. $u_n = 180 \times 1,045^n$ et $v_n = 331 \times 0,962^n$.

4. $u_7 \approx 245$ et $v_7 \approx 252$.

$u_8 \approx 256$ et $v_7 \approx 243$.

Pour $n = 8$ donc en 2027, les ventes de modèle M1 vont dépasser celles du modèle M2.

66 Partie A

1. $\frac{19 - 18,3}{18,3} \approx 3,8\%$ entre 2017 et 2018 ; $\frac{20 - 19}{19} \approx 5,3\%$ entre 2018 et 2019.

2. $\sqrt{1,038 \times 1,053} \approx 1,045$

3. Environ 4,5 % de hausse en moyenne par an entre 2017 et 2019.

Partie B

1.a. $u_1 = 20 \times 1,045 = 20,9$

b. Pour n entier naturel, $u_{n+1} = u_n \times 1,045$; donc la suite est géométrique de raison 1,045 et de premier terme 20.

c. Pour n entier naturel, $u_n = 20 \times 1,045^n$.

d. $u_6 = 20 \times 1,045^6 \approx 26,045$ enfants atteints en 2025.

2.a. $u = 20$

$n = 0$

while $u < A$:

$u = u * 1.045$

$n = n + 1$

return n

b. suite(25) affiche 6 ; cela signifie que c'est en 2025 (2019 + 6) que le nombre d'enfants atteints dépassera les 25 000.

Chapitre 2 • Fonctions exponentielles

Activités du cours

1 Définition de la fonction exponentielle de base a

Objectifs : introduire la fonction exponentielle de base a à partir des suites géométriques et travailler la compétence « modéliser ».

1.a. La suite (u_n) est géométrique de raison 2. Pour tout entier naturel n , on a $u_n = 1 \times 2^n = 2^n$.

b. $u_1 = 2^1 = 2$; $u_3 = 2^3 = 8$. Il y a 200 loups le 1^{er} janvier 2010, et 800 loups le 1^{er} janvier 2030.

2.a. Quinze ans correspondent à 1,5 décennie et $2^{1,5} \approx 2,83$, soit 283 loups.

b. On a déjà calculé le nombre de loups en 2030 dans la question 1.b. mais ici, on nous demande de le déduire du résultat précédent. De 2015 à 2030, le nombre de loups est multiplié par $2^{1,5}$.

$283 \times 2^{1,5} \approx 800$. Le résultat est cohérent puisqu'on a trouvé 800 loups dans le 1.b.

c. $f(x) = 2^x$.

d. Au 1^{er} janvier 2012, après 1,2 décennie, on a $2^{1,2} \approx 2,3$ donc 230 loups.

Entre le 1^{er} janvier 2000 et le 1^{er} juillet 2025 se sont écoulés 25,5 ans, soit 2,55 décennies.

Or $2^{2,55} \approx 5,86$. D'où, au 1^{er} juillet 2025, le nombre de loups est égal à 586.

3. Le modèle n'est pas pertinent pour plusieurs raisons. La croissance ne peut pas se poursuivre de manière exponentielle (les loups vont manquer de nourriture ou d'espace quand leur nombre va augmenter). La saison des amours n'a lieu qu'une fois par an, et la population de loups augmente par paliers, et pas de manière régulière comme la fonction exponentielle utilisée.

2 Sens de variation et représentation graphique

Objectifs : conjecturer le sens de variation de la fonction exponentielle de base a et travailler la compétence « chercher ».

On constate que la fonction $x \mapsto a^x$ est croissante si $a > 1$ et décroissante si $0 < a < 1$.

À votre tour !

1.a. $0 < 0,75 < 1$ donc $x \mapsto 0,75^x$ est décroissante, et $x \mapsto 2 \times 0,75^x$ est aussi décroissante.

b. $2,8 > 1$ donc $x \mapsto 2,8^x$ est croissante, et $x \mapsto -1,5 \times 2,8^x$ est décroissante.

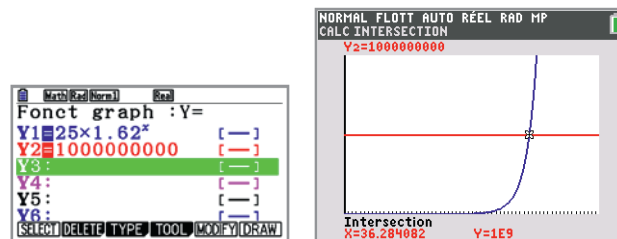
2.a. $t \mapsto -0,1 \times 1,25^t$ est décroissante.

b. $t \mapsto -12 \times 0,56^t$ est croissante.

3.a. $1,62 > 1$ donc $t \mapsto 1,62^t$ est croissante. De même, f est croissante sur $[0; 50]$.

b. On entre la fonction sur la calculatrice graphique, et une fonction constante égale à 1 000 000 000. On ajuste la fenêtre graphique avec x entre 0 et 50 et y entre 0 et

2 000 000 000 par exemple. On obtient alors l'affichage ci-dessous, la calculatrice permettant de déterminer l'intersection des deux courbes.



Le nombre de bactéries dépassera le milliard au bout de 36,284 heures, soit 36 heures et 17 minutes.

3 Propriétés algébriques des fonctions exponentielles

Objectifs : généraliser les formules connues sur les exposants entiers aux fonctions exponentielles de base a et travailler la compétence « calculer ».

1. $a^4 \times a^3 = a^7$; $a^2 \times a^{-3} = a^{-1}$; $\frac{a^5}{a^8} = a^{-3}$; $(a^4)^3 = a^{12}$.

2. Les résultats des trois calculs sont de l'ordre de 10^{-11} ou 10^{-13} . On peut penser que Python effectue des erreurs d'arrondis et que ces résultats sont nuls, ce qui donne :

$$6^{2,1} \times 6^{1,7} = 6^{3,8}; \frac{5^{6,2}}{5^{2,8}} = 5^{3,4}; (2^{3,4})^5 = 2^{17}.$$

On retrouve les formules déjà connues sur les puissances entières, que les élèves pourront présenter soit avec des exemples, soit en expliquant la démarche, soit sous forme de formules, et qui sont données dans la propriété qui suit.

4 Application au calcul du taux moyen

Objectifs : découvrir le calcul du taux moyen et travailler les compétences « raisonner, calculer et communiquer ».

$$1. \frac{(16 + 15 + 20)}{3} = 17$$

Les trois augmentations ne sont pas équivalentes à trois hausses de 17 %. On peut prendre un contre-exemple : si l'inscription coûte 100 €, elle va passer à 116 €, puis 133,40 €, puis 160,08 € suite aux trois augmentations. Après trois hausses de 17 %, elle passerait à $100 \times 1,17^3 \approx 160,16$ €.

2. Augmenter de 16 %, puis 15 %, puis 20 %, c'est multiplier par $1,16 \times 1,15 \times 1,20 = 1,6008$.

$$3. x^3 = 1,60008 \Leftrightarrow x^3 = \left(1,60008^{\frac{1}{3}}\right)^3 \Leftrightarrow x = 1,60008^{\frac{1}{3}}$$

(puisque la fonction cube est strictement croissante)

On pourrait élever les deux membres de l'équation à l'exposant

$\frac{1}{3}$ mais la formule $(x^3)^{\frac{1}{3}} = x^1$ n'est pas connue des élèves.

La formule $(x^a)^n = x^{an}$ est connue seulement avec n entier.

4. D'après la calculatrice, $1,60008^{\frac{1}{3}} \approx 1,1696$.

Le taux annuel moyen correspondant est donc de 16,96 %.

Chapitre 2 • Fonctions exponentielles

À votre tour !

1. Le coefficient multiplicateur moyen vérifie $x^3 = 1,08 \times 1,14 \times 1,1$, soit $x^3 = 1,35432$.

Donc $x = 1,35432^{\frac{1}{3}} \approx 1,106$. Le taux moyen d'augmentation du nombre d'adhérents est 10,6 % environ.

2. $x^4 = \frac{1846}{1650} \Leftrightarrow x = \left(\frac{1846}{1650}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 1,028$

Le taux d'évolution annuel moyen de ce tarif est égal à 2,8 %.

3. $x^{12} = 1,0075 \Leftrightarrow x = 1,60008^{\frac{1}{12}} \approx 1,0006$, ce qui correspond à un rendement mensuel de 0,06 %.

4. $x^4 = 1,0006 \times 1,0051 \times 1,0105 \times 1,017$

$\Leftrightarrow x = 1,033539412^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x \approx 1,0082$.

Le taux d'évolution annuel moyen de cet indice est de 0,82 %.

Exercices – Échauffement

1 Réponses en fin de manuel.

2 1.a. La suite géométrique (u_n) a pour raison 1,004.

b. $u_n = 66,9 \times 1,004^n$

2.a. $f(x) = 66,9 \times 1,004^x$

b. Au 1^{er} janvier 2022, le nombre d'habitants est $f(3) = u_3 = 66,9 \times 1,004^3 \approx 67,7$ millions.

Au 1^{er} juillet 2023, le nombre d'habitants est $f(4,5) = 66,9 \times 1,004^{4,5} \approx 68,1$ millions.

Au 1^{er} octobre 2025, le nombre d'habitants est $f(6,75) = 66,9 \times 1,004^{6,75} \approx 68,7$ millions.

3 Réponses en fin de manuel.

4 a. $x^{2,25} = 19\,683$ donne $x = 81$, en cherchant un antécédent de 19 683 par $x \mapsto x^{2,25}$ avec la calculatrice graphique par exemple.

b. $4^x = 128$ donne $x = 3,5$.

5 Réponses en fin de manuel.

6 a. décroissante. b. décroissante. c. croissante.

7 a. décroissante. b. croissante. c. décroissante.

8 Réponses en fin de manuel.

9 Réponses en fin de manuel.

10 Réponses en fin de manuel.

11 $a = \frac{3^{4,6}}{(3^{1,3})^2} \times \frac{3^{0,8}}{3^5} = \frac{3^{4,6}}{3^{2,6}} \times \frac{3^{0,8}}{3^5} = 3^2 \times 3^{-4,2} = 3^{-2,2}$;

$b = 3^{1,5} \times 9^{2,2} \times 27^{0,4} = 3^{1,5} \times (3^2)^{2,2} \times (3^3)^{0,4}$
 $= 3^{1,5} \times 3^{4,4} \times 3^{1,2} = 3^{7,1}$.

12 $a = 5^{1,7} \times 5^{1,3} = 5^3 = 125$

$b = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^6 = 2^{-\frac{6}{3}} = \frac{1}{4} = 0,25$

$$c = 4^{-0,7} \times \frac{1}{4^{0,3}} = 4^{-1} = 0,25$$

$$d = \frac{6^{4,5} \times 6^{2,3}}{(6^{1,6})^3} = \frac{6^{6,8}}{6^{4,8}} = 6^2 = 36$$

$$13 \quad A = \left(\frac{a^3}{a^{1,5}}\right)^2 = (a^{1,5})^2 = a^3$$

$$B = (x^{1,2} \times x)^2 = (x^{2,2})^2 = x^{4,4}$$

$$C = t^{4,2} \times \frac{(t^{2,8})^2}{t^{8,1}} = t^{4,2} \times \frac{t^{5,6}}{t^{8,1}} = t^{4,2} \times t^{-2,5} = t^{1,7}$$

$$D = \frac{a^2 \times (a^{-1})^3}{a^{-2,5} \times a^6} = \frac{a^2 \times a^{-3}}{a^{3,5}} = \frac{a^{-1}}{a^{3,5}} = a^{-4,5}$$

14 Réponses en fin de manuel.

15 a. Une multiplication par 4,096 est équivalente à 3 multiplications par 1,6.

b. Une multiplication par 2,073 6 est équivalente à 4 multiplications par 1,2.

c. Une multiplication par 0,168 07 est équivalente à 5 multiplications par 0,7.

$$16 \quad a. x^2 = 0,518\,4 \Leftrightarrow x = 0,518\,4^{\frac{1}{2}} = 0,72$$

$$b. x^4 = 0,008\,1 \Leftrightarrow x = 0,008\,1^{\frac{1}{4}} = 0,3$$

$$c. x^3 = 6,859 \Leftrightarrow x = 6,859^{\frac{1}{3}} = 1,9$$

$$d. x^5 = 7,593\,75 \Leftrightarrow x = 7,593\,75^{\frac{1}{5}} = 1,5$$

$$17 \quad a. (1+t)^3 = 1,092\,727 \Leftrightarrow 1+t = 1,092\,727^{\frac{1}{3}} \\ \Leftrightarrow 1+t = 1,03 \Leftrightarrow t = 0,03 = 3 \%$$

$$b. (1+t)^2 = 0,960\,4 \Leftrightarrow 1+t = 0,960\,4^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 1+t = 0,98 \\ \Leftrightarrow t = -0,02 = -2 \%$$

$$c. (1+t)^4 = 0,062\,5 \Leftrightarrow 1+t = 0,062\,5^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 1+t = 0,5 \\ \Leftrightarrow t = -0,5 = -50 \%$$

$$d. (1+t)^3 = 2,352\,637 \Leftrightarrow 1+t = 2,352\,637^{\frac{1}{3}} \\ \Leftrightarrow 1+t = 1,33 \Leftrightarrow t = 0,33 = 33 \%$$

18 Réponses en fin de manuel.

$$19 \quad x^5 = 1,212\,6 \Leftrightarrow x = 1,212\,6^{\frac{1}{5}} \approx 1,039$$

L'augmentation annuelle moyenne est de 3,9 %.

Exercices – Entraînement

20 1.a. $q(0) = 20$ b. -15 %

2.a. $q(0) = 18,5$ b. 62 %

21 Cette fonction peut modéliser une population, avec une population initiale égale à 24 et un accroissement de 15 % par unité de temps, donc la croissance de la population est proportionnelle à la population existante. Il s'agit bien d'une croissance exponentielle.

- 22 1.a. La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,99 et de premier terme $u_0 = 1917\,512$.

$$u_n = 1917\,512 \times 0,99^n$$

b. $u_{31} = 1917\,512 \times 0,99^{31} \approx 1404\,200$ habitants en 2050.

2.a. $k = 1917\,512$ et $a = 0,99$

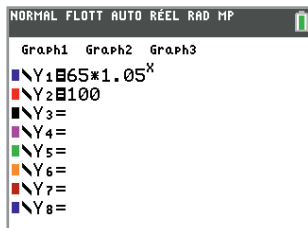
b. Au 1^{er} septembre 2020, le nombre d'habitants est :

$$f\left(1 + \frac{8}{12}\right) = 1917\,512 \times 0,99^{\frac{5}{3}} \approx 1885\,660.$$

c. $f(8,25) \approx 1764\,934$, donc il y a 1 764 934 habitants au 1^{er} avril 2027.

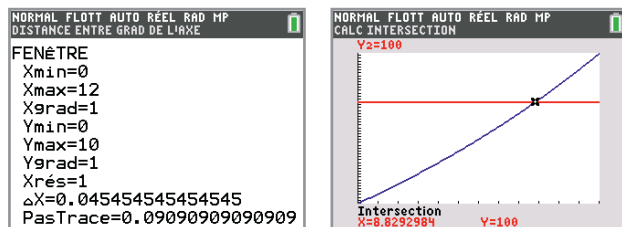
d. $f(-1,5) = 1946\,638$ donc il y avait 1 946 638 habitants au 1^{er} juillet 2017.

23 (1)



(2) On règle les valeurs de Xmin et Xmax dans la fenêtre graphique, puis on utilise le zoom automatique (AjustZoom sur TI, Zoom Auto sur Casio) pour régler automatiquement les valeurs de Ymin et Ymax.

(3) On recherche l'intersection avec l'outil de résolution numérique.



D'après la calculatrice, on atteint 100 millions de joueurs pour $x = 8,829$, soit environ 8 mois et 25 jours (plus ou moins un jour selon le nombre de jours pris dans un mois et l'arrondi).

- 24 1.a. Premier terme : $u_0 = 80\,000$, raison : 0,8.

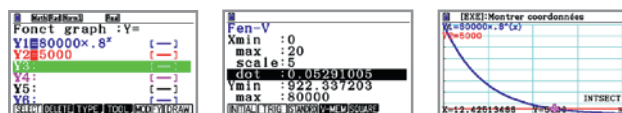
b. $= 80\,000 \times 0,8$

2.a. $k = 80\,000$; $a = 0,8$.

b. $f(3,25) = 80\,000 \times 0,8^{3,25} \approx 38\,737,576$.

Donc, le nombre d'utilisateurs du réseau social au 1^{er} mars 2012 est de 38 737 576.

c. Le réseau social comptera moins de 5 millions d'utilisateurs pour $x \approx 12,4251$, soit au bout de 12 ans et 155 jours, donc le 5 mai 2021. Le professeur pourra obtenir cette date facilement en affichant les dates sur un tableur jusqu'à la ligne 155.



(valeurs de Y réglées par le zoom auto)

Cet exercice est inspiré de l'histoire du réseau social MySpace.

- 25 1. $k = 1013$ et $a = 0,88$.

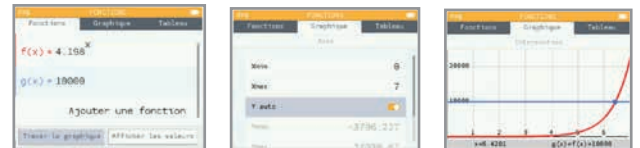
2. $P(5,5) = 1013 \times 0,88^{5,5} \approx 501$ hPa.

- 26 1. • Superficie occupée par l'algue tueuse le 1^{er} juillet 1984 : $f(0) = 1$ m² ;

• le 1^{er} juillet 1996 : $f(12) = 4,198^{12} \approx 29\,957\,751$ m², soit 30 km² environ ;

• le 1^{er} janvier 1991 : $f(6,5) = 4,198^{6,5} \approx 11\,214$ m² $\approx 1,1$ ha.

2. La superficie atteint un hectare pour $x \approx 6,4201$, soit au bout de 6 ans et 153 jours, donc le 1^{er} décembre 1990.



3. Selon ce modèle, en 2021, l'algue occuperait une superficie égale à $f(37) \approx 1,13 \times 10^{23}$ m², soit $1,13 \times 10^{17}$ km², ce qui est beaucoup plus grand que la surface de la Terre ! Ce modèle n'est donc bien sûr plus valable en 2021.

- 27 1.a. Le nombre de cellules cancéreuses au bout de 720 jours est $f(720) = 2^{\frac{720}{90}} = 256$.

Au bout de 5 ans : $f(5 \times 365) = 2^{\frac{1825}{90}} \approx 1271216$.

b. Le temps de doublement de cette tumeur est de 90 jours.

2.a. La variable tdt représente le temps de doublement.

b. On peut stocker le temps au bout duquel le cancer est détectable, calculer le temps au bout duquel il est irréversible, et renvoyer la différence entre les deux.

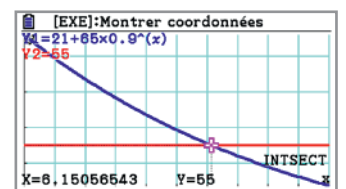
```
def detectable(tdt):
    t = 0
    n = 1
    while n < 10**9:
        t = t + 1
        n = 2**(t/tdt)
    t1 = t
    while n < 10**12:
        t = t + 1
        n = 2**(t/tdt)
    return t - t1
```

3. En exécutant ces fonctions, on obtient que le cancer est détectable au bout de 2 691 jours, et irréversible 897 jours plus tard.

- 28 1. Température à la sortie du four : $T(0) = 86$ °C. Température au bout de 5 minutes : $T(5) \approx 59$ °C.

2. Un consommateur qui aime son café à 55 °C doit attendre 6,15 minutes, soit 6 minutes et 9 secondes.

3. La température de la pièce semble être 21 °C, car au bout de deux heures, la température du café est à 21 °C.



- 29 Cet exercice porte sur la formule $a - x = \frac{1}{a^x}$ vue dans la définition des fonctions exponentielles.

Chapitre 2 • Fonctions exponentielles

1.

x	-0,5	-0,25	0,25	0,5
a^x	0,25	0,5	2	4

x	-2,6	0	2,6
b^x	$\frac{1}{8\,192}$	1	8\,192

2. $a = 16$ et $b \approx 64$ (à l'aide d'une recherche d'antécédent à la calculatrice par exemple).

- 30** 1. La suite u est géométrique de raison 1,011.
 $u(n) = 7,7 \times 1,011^n$.
 2. $k = 7,7$; $a = 1,011$.
 3. • Population mondiale au 1^{er} juillet 1990 :
 $u(-29) \approx 5,6$ milliards ;
 • au 1^{er} janvier 2011 : $u(-8,5) \approx 7$ milliards.
 4.a. Tant que $7,7 \times 1,011^t < 10$, faire :
 b. 23.893150684927186 représente 23 ans et 326 jours, ce qui correspond au 22 mai 2043.

31 $k = 2$ et $a = 1,5$.

32 Réponses en fin de manuel.

33 (1) $x \mapsto 0,8^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ car $0 < 0,8 < 1$.
 (2) $0,8^x > 0,8^3 \Leftrightarrow x < 3 \quad S =]-\infty; 3[$.

34 1. $1,01 > 1$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 2. $1,01^x > 1,01^{3,5} \Leftrightarrow x > 3,5 \quad S =]3,5; +\infty[$.

35 Réponses en fin de manuel.

36 1. $4 > 1$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 2. $f(3,5) = 43,5 = 128$.
 3. $4^x \geq 128 \Leftrightarrow 4^x \geq 43,5 \Leftrightarrow x \geq 3,5 \quad S = [3,5; +\infty[$

37 a. $0,68^{3x} \geq 0,68^6 \Leftrightarrow 3x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 2 \quad S =]-\infty; 2]$.
 b. $1,4^{5x+1} < 1,4^{16} \Leftrightarrow 5x+1 < 16 \Leftrightarrow 5x < 15 \Leftrightarrow x < 3 \quad S =]-\infty; 3[$.
 c. $\left(\frac{6}{7}\right)^{-4x} \leq \left(\frac{6}{7}\right)^{-8} \Leftrightarrow -4x \geq -8 \Leftrightarrow x \leq 2 \quad S =]-\infty; 2]$.
 d. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3x+1} > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-x} \Leftrightarrow 3x+1 > -x \Leftrightarrow 4x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4} \quad S =]-\frac{1}{4}; +\infty[$.

38 1. La courbe représentative de f est la verte car il s'agit de la fonction croissante.
 2. $f(x) = 4$ pour $x \approx 1,30$.
 3. $g(x) = 4$ pour $x \approx -1,32$.
 L'ensemble des réels x tels que $f(x) \leq 4$ et $g(x) \leq 4$ est environ l'intervalle $[-1,32; 1,30]$.

39 1. $c(0) = 50 \text{ mmol.L}^{-1}$.
 2. La fonction c est décroissante car $0 < 0,82 < 1$.

3. Le plus simple est d'utiliser la calculatrice graphique comme d'habitude, mais on peut aussi profiter de cet exercice pour proposer une solution en Python.

```

from math import *
def c(t):
    return 50*0.82**t

def seuil():
    t=0
    while c(t)>25:
        t=t+0.001
    return t

```

```

>>> from squares import *
>>> from mandelbrot import *
>>> from polynomial import *
>>> from seuil import *
>>> seuil()
3.492999999999726
>>> |

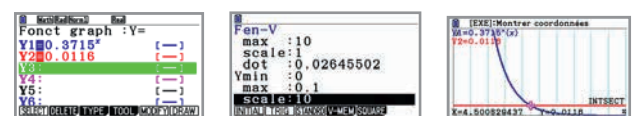
```

On obtient $t \approx 3,493$, donc 3 minutes et 30 secondes.

- 40** 1. $o(2) = 1,3^2 - 1 = 0,69$; $d(2) = 10 \times 0,8^2 = 6,4$.
 À un prix de vente de 2 €, l'offre est de 690 unités et la demande de 6 400.
 2. o est croissante et d est décroissante.
 3.a. Le montant de l'offre correspondant à un prix de vente de 5 € est environ 2,7 milliers d'unités.
 b. On obtient un prix d'équilibre égal à 5,30 € environ.
 4. On trouve 5,33 €.

- 41** 1. La fonction q est strictement décroissante car $0 < 0,68 < 1$.
 2.a. La quantité d'anti-inflammatoire présente dans le sang au bout de 2 heures est environ 18,5 mg.
 b. On peut procéder à une deuxième injection au bout de 8 heures.
 3. On obtient 18,496 mg au bout de 2 heures et on peut procéder à une deuxième injection au bout de 7,768 heures, soit 7 h 46 min.
 4. T semble passer par les points de coordonnées (2 ; 10) et (6 ; 4) par exemple, ce qui donne un coefficient directeur égal à $\frac{4-10}{6-2} = -1,5$. Au bout de 6 heures, la vitesse d'élimination de l'anti-inflammatoire dans le sang est de 1,5 mg par heure.

- 42** 1. $t \mapsto 0,3715^t$ est décroissante donc f est croissante. De même, g est aussi croissante.
 2. $f(0,7) \approx 0,5$.
 Au bout de 700 millions d'années, la moitié de l'uranium 235 s'est transformée en plomb.
 3. On peut utiliser au choix l'uranium 235 et ou l'uranium 238. L'idéal est bien sûr d'effectuer les deux calculs pour vérifier que les résultats concordent.
 Avec l'uranium 235, on cherche t tel que $1 - 0,3715^t = 0,9884$, ce qui revient à $0,3715^t = 0,0116$.



On obtient $t \approx 4,5$. L'âge de la Terre est donc de 4,5 milliards d'années environ.

Le professeur peut expliquer la démarche avec l'uranium 235 et laisser les élèves le refaire avec l'uranium 238.

43 Réponses en fin de manuel.

44 Réponses en fin de manuel.

45 $A = (a^{2,1}b)^3 \times \left(\frac{a^{1,1}}{b^{0,2}}\right)^2 = a^{6,3}b^3 \frac{a^{2,2}}{b^{0,4}} = a^{8,5}b^{2,6}$

$B = \frac{a^{2,8} \times (b^{1,3})^4}{(a^{1,1}b^{2,2})^2} = \frac{a^{2,8} \times b^{5,2}}{a^{2,2}b^{4,4}} = a^{0,6}b^{0,8}$

$C = (a^{0,8} + b^{0,2})^2 + (a^{0,8} - b^{0,2})^2$
 $= a^{1,6} + 2a^{0,8}b^{0,2} + b^{0,4} + a^{1,6} - 2a^{0,8}b^{0,2} + b^{0,4} = 2a^{1,6} + 2b^{0,4}$

46 1. $f(x) = x^{2,5} \times x - x^{2,5} \times 1 = x^{2,5}(x - 1)$.

2.

x	0	1	$+\infty$
f(x)	-	0	+

47 (1) $0,2 \times 5 = 1$ ou, à la calculatrice, $\frac{1}{0,2} = 5$, donc on prend $n = 5$.

(2) $x^{0,2} = 2 \Leftrightarrow (x^{0,2})^5 = 2^5 \Leftrightarrow x = 2^5 = 32$.

48 a. $x^{0,25} = 4 \Leftrightarrow x = 4^4 = 256$

b. $x^{0,1} = 3 \Leftrightarrow x = 3^{10} = 59\,049$

c. $x^{0,5} = 2,5 \Leftrightarrow x = 2,5^2 = 6,25$

d. $x^{\frac{1}{3}} = 10 \Leftrightarrow x = 10^3 = 1\,000$

49 a. $x^{-0,2} = 3 \Leftrightarrow x = 3^{-5} = \frac{1}{243}$

b. $x^{-\frac{1}{6}} = 2 \Leftrightarrow x = 2^{-6} = \frac{1}{64}$

c. $x^{-0,25} = 5 \Leftrightarrow x = 5^{-4} = \frac{1}{625}$

d. $x^{-\frac{1}{4}} = 1,5 \Leftrightarrow x = 1,5^{-4} = \frac{1}{5,0625} = \frac{16}{81}$

50 a. $x^{0,5} < 5 \Leftrightarrow x < 25$ $S =]0; 25[$

b. $x^{0,2} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 32$ $S = [32; +\infty[$

c. $x^{\frac{1}{5}} \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 243$ $S =]0; 243]$

d. $x^{\frac{2}{3}} < 4 \Leftrightarrow x < 8$ $S =]0; 8[$

51 Le tableau se complète comme indiqué sans calculer la valeur de a , en appliquant les formules algébriques.

x	-2	0	2	3	4	5
a^x	0,694 4	1	1,44	1,728	2,073 6	2,488 3

52 1. $16^{0,5} = 4$.

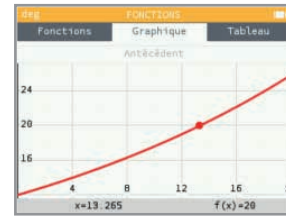
2. $(x^{0,5})^2 = x$.

3. $x^{0,5} = \sqrt{x}$.

53 1. $p(0) = 12$ donc la population en 2010 était de 12 000 habitants.

$p(10) \approx 17,637$ donc la population en 2020 était de 17 637 habitants.

2. La population devrait dépasser 20 000 habitants pour $x = 13,265$, donc en 2024 (il y aura moins de 20 000 habitants en 2023).



3. $p(x+18) = 12 \times 2^{\frac{x+18}{18}} = 12 \times 2^{\frac{x}{18}+1} = 12 \times 2^{\frac{x}{18}} \times 2 = 2 \times p(x)$.

La population double tous les 18 ans.

54 Réponses en fin de manuel.

55 $1,012\,5^{\frac{1}{12}} \approx 1,0010$

Le rendement mensuel de ce placement est égal à 0,10 % environ.

56 1. Taux d'évolution de ces dépenses de 2012 à 2017 :

$$\frac{202\,404 - 181\,424}{181\,424} \approx 0,115\,64 \approx 11,56 \%$$

2. $1,115\,64^{\frac{1}{5}} \approx 1,022\,1$, ce qui correspond à un taux d'augmentation annuel moyen de 2,21 %.

57 1. Taux d'évolution du chômage :

$$\frac{6\,562,1 - 5\,948,1}{5\,948,1} \approx 0,103\,2 \approx 10,3 \%$$

2. $1,103\,2^{\frac{1}{4}} \approx 1,024\,9$, soit un taux d'évolution annuel moyen de 2,5 %.

58 (1) Coefficients multiplicateurs : 1,025 ; 1,041 ; 1,038.

Coefficient multiplicateur global

$$CM = 1,025 \times 1,041 \times 1,038 \approx 1,107\,6$$

(2) $x^3 = 1,107\,6 \Leftrightarrow x = 1,107\,6^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x \approx 1,035$.

(3) Le taux annuel moyen est 3,5 % environ.

59 1. $0,8 \times 0,2 = 0,16$, ce qui revient à un coefficient multiplicateur annuel moyen de 0,4, donc un pourcentage de baisse annuel moyen égal à 60 %.

2. $1,6 \times 0,4 = 0,64$, et $0,64^{\frac{1}{2}} = 0,8$, donc le taux d'évolution moyen correspondant est égal à -20 %.

60

n	t_1	t_2	t_3	t_4	t_M
4	+5 %	-3 %	+4 %	-2 %	+0,9 %
3	+8 %	-10 %	+6 %		+1,0 %
2	+6 %	+4 %			+5 %
4	+12 %	-15 %	+6 %	+9 %	+2,4 %
4	-2 %	-6 %	+4 %	-1 %	-1,3 %
3	+50 %	-35 %	+50 %		+13,5 %
3	+8 %	+5 %	-3,9 %		+2,9 %
4	+15 %	-9 %	+6 %	-13,1 %	-0,9 %

Chapitre 2 • Fonctions exponentielles

Pour les deux derniers :

$$1,08 \times 1,05 \times x = 1,029^3 \Leftrightarrow x = \frac{1,029^3}{1,08 \times 1,05} \approx 0,961$$

$$1,15 \times 0,91 \times 1,06 \times x = 0,991^4 \Leftrightarrow x = \frac{0,991^4}{1,15 \times 0,91 \times 1,06} \approx 0,869.$$

61 1. $k = 5\,000$ et $a = 1,02$.

2. Le 8 avril 2019, il s'est écoulé 97 jours, donc $\frac{97}{365}$ an.

La somme d'argent disponible est $s\left(\frac{97}{365}\right) \approx 5\,026,38$ €.

Le 15 novembre 2022, il s'est écoulé 3 ans et 318 jours.

La somme d'argent disponible est $s\left(3 + \frac{318}{365}\right) \approx 5\,398,38$ €.

3. $1,02^{\frac{1}{12}} \approx 1,0017$, ce qui correspond à un taux mensuel de 0,17 %.

4. En utilisant la fonction $s : s(0,5) \approx 5\,049,75$ €.

En utilisant le taux mensuel : $5\,000 \times 1,0017^6 \approx 5\,051,22$ €.

Le résultat le plus fiable s'obtient à l'aide de la fonction s car le taux mensuel a été arrondi, mais il faudrait connaître la méthode de calcul de l'organisme bancaire.

62 Réponses en fin de manuel.

63 1. La liste **cm** contient : [1.036, 1.03, 0.99, 1.059].

2. La valeur de **p** est $p = 1.1187373428$. C'est le produit des éléments de la liste **cm**.

3. La fonction renvoie $1,118\,737^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 0,028\,4 \approx 2,8$ %. C'est le taux moyen d'évolution de la température à Paris au cours des dernières décennies.

64 1. Coefficient multiplicateur sur la semaine :

$$\left(1 - \frac{9,04}{100}\right) \times \left(1 + \frac{0,55}{100}\right) \times \left(1 - \frac{6,31}{100}\right) \times \left(1 - \frac{1,55}{100}\right) \times \left(1 - \frac{7,73}{100}\right) \approx 0,778\,4.$$

Taux d'évolution global : $0,778\,4 - 1 \approx -0,221\,6 \approx -22,16$ %.

Le CAC 40 a bien perdu 22,16 % cette semaine.

2. $0,778\,4^{\frac{1}{5}} \approx 0,9511$, qui correspond à une baisse moyenne de 4,89 % par jour.

3. Le lundi 13 octobre, le CAC 40 a été multiplié par $\frac{3\,531,50}{3\,176,49} \approx 1,1118$, ce qui correspond à une hausse de 11,18 %.

Le coefficient multiplicateur sur les 6 jours est environ $0,778\,4 \times 1,1118 \approx 0,865\,4$.

$0,865\,4^{\frac{1}{6}} \approx 0,976\,2$, ce qui correspond à un taux moyen d'évolution par jour de -2,38 %.

65 Avec les chiffres publiés en 2019, on obtient un taux annuel moyen de 1 % environ sur les dix dernières années et de 1,76 % sur les dix années précédentes. L'inflation est donc beaucoup moins forte sur les dix dernières années.

	A	B	C	D	E	F
1	Taux d'inflation en 2018					
2						
3	en %					
4	Année	Taux d'inflation	CM			
5	2018	1,8	=1+B5/100		CM global :	=PRODUIT(C5:C14)
6	2017	1	=1+B6/100		CM moyen :	=F5/(1/10)
7	2016	0,2	=1+B7/100		Taux annuel moyen :	=(F6-1)*100
8	2015	0	=1+B8/100			
9	2014	0,5	=1+B9/100			
10	2013	0,9	=1+B10/100			
11	2012	2	=1+B11/100			
12	2011	2,1	=1+B12/100			
13	2010	1,5	=1+B13/100			
14	2009	0,1	=1+B14/100			
15	2008	2,8				

On recopie ensuite les cellules de la plage C5:F14 dix lignes plus bas pour effectuer les calculs sur les dix années précédentes.

	A	B	C	D	E	F
1	Taux d'inflation en 2018					
2						
3	en %					
4	Année	Taux d'inflation	CM			
5	2018	1,8	1,018		CM global :	1,105402
6	2017	1,0	1,01		CM moyen :	1,010071
7	2016	0,2	1,002		Taux annuel moyen :	1,007126
8	2015	0	1			
9	2014	0,5	1,005			
10	2013	0,9	1,009			
11	2012	2,0	1,02			
12	2011	2,1	1,021			
13	2010	1,5	1,015			
14	2009	0,1	1,001			
15	2008	2,8	1,028		CM global :	1,19044
16	2007	1,5	1,015		CM moyen :	1,017585
17	2006	1,7	1,017		Taux annuel moyen :	1,017585
18	2005	1,7	1,017			
19	2004	2,1	1,021			
20	2003	2,1	1,021			
21	2002	1,9	1,019			
22	2001	1,6	1,016			
23	2000	1,7	1,017			
24	1999	0,5	1,005			

On peut faire remarquer que les cellules contenant les taux ne sont pas au format pourcentage. Si c'était le cas, on se dispenserait des multiplications et divisions par 100.

66 Corrigé réalisé avec les chiffres publiés en 2019.

1. Les élèves calculeront peut-être les coefficients multiplicateurs chaque année avant de calculer le coefficient multiplicateur moyen, puis le taux moyen. On leur fera ensuite remarquer qu'il suffit d'utiliser les valeurs initiales et finales. On obtient pour la France 2,34 %.

						CM moyen	Taux moyen
France	1,024	1,041	1,001	1,022	1,030	1,02340064	2,34%
Allemagne	1,051	1,045	1,016	1,026	1,029	1,03326353	3,33%

Le PIB de l'Allemagne a subi une augmentation annuelle moyenne de 3,33 % lors des cinq dernières années.

Le PIB de l'Allemagne a augmenté davantage que celui de la France sur les cinq dernières années.

2.a. On entre par exemple :

• dans la cellule K5 : =J5/E5 pour calculer le coefficient multiplicateur sur 5 ans.

• dans la cellule L5 : =K5^(1/5) pour calculer le coefficient multiplicateur moyen

• dans la cellule M5 : =L5-1 pour calculer le taux annuel moyen, et on met cette cellule au format pourcentage.

On obtient :

	Pays	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	CM 5 ans	CM moyen	Taux moyen
1	Allemagne	2 452,5	2 585,8	2 647,9	2 679,7	2 817,0	2 844,8	2 990,8	3 068,5	3 156,1	1,1777647	1,03326353	3,33%
2	Autriche	265,9	281,4	296,0	298,5	307,4	323,9	328,3	334,7	347,9	1,16512169	1,03103702	3,10%
3	Belgique	334,0	343,8	356,2	357,5	368,5	366,2	389,2	396,9	407,5	1,13865569	1,02648962	2,68%
4	Chypre	27,6	27,3	26,8	19,4	19,1	20,1	20,9	21,9	23,3	1,20047965	1,03722019	3,72%
5	Espagne	1 137,9	1 130,9	1 130,8	1 116,6	1 155,0	1 222,4	(p) 1 241,6	(p) 1 284,3	(p) 1 320,9	1,18294015	1,03417147	3,42%
6	Estonie	22,0	24,6	26,0	26,6	28,1	28,9	29,6	31,1	32,2	1,24574695	1,04492704	4,49%
7	Finlande	189,0	164,6	166,2	165,0	167,0	173,8	174,6	180,3	187,3	1,13533118	1,02570362	2,57%
8	France	1 786,5	1 845,7	1 889,8	1 916,3	1 962,3	2 043,2	2 045,2	(p) 2 089,8	(p) 2 151,2	1,12208077	1,02340064	2,34%
9	Grèce	239,6	(p) 219,0	(p) 211,1	(p) 210,2	(p) 215,5	(p) 216,7	(p) 213,8	(p) 217,0	(p) 224,8	1,06951018	1,01333087	1,30%
10	Irlande	151,1	150,0	160,8	162,7	175,3	244,0	244,0	263,4	286,0	1,17576468	1,11843144	11,94%
11	Italie	1 588,1	1 628,3	1 630,8	1 598,8	1 616,3	1 680,9	1 722,2	1 751,8	1 781,8	1,1144931	1,02191665	2,19%
12	Lettonie	28,2	30,7	32,7	33,5	35,0	36,7	36,8	38,9	41,9	1,24907913	1,04548544	4,55%
13	Lituanie	47,6	52,2	55,7	57,9	60,9	63,1	63,2	66,4	68,8	1,20543154	1,03874544	3,81%
14	Luxembourg	33,2	36,0	36,8	38,2	41,5	44,0	44,5	45,3	47,8	1,25330548	1,04619188	4,62%
15	Malte	6,8	9,0	9,3	9,7	10,7	12,1	12,7	13,7	14,6	1,49998458	1,04469554	4,62%
16	Pays-Bas	572,7	580,9	598,8	607,9	612,1	640,3	636,1	659,3	(p) 687,4	1,13097177	1,02460278	2,49%
17	Portugal	221,0	213,3	210,2	214,3	220,4	231,0	233,2	(p) 236,8	(p) 240,6	1,12921512	1,02340287	2,34%
18	Roumanie	103,0	105,2	108,9	110,9	115,6	121,0	122,1	124,3	130,8	1,17941752	1,03355482	3,38%
19	Slovaquie	43,5	44,6	44,9	45,1	46,9	49,1	49,9	52,8	55,9	1,24074871	1,04408719	4,41%
20	Zone euro à 19	9 218,5	9 479,8	9 613,3	9 668,9	9 974,4	10 484,3	10 599,2	10 877,5	11 209,4	1,15032488	1,03200903	3,00%

b. Le pays de la zone euro dont l'économie s'est le plus développée ces cinq dernières années est l'Irlande.

Exercices - Perfectionnement

67 1.a. Le nombre de lapins double tous les 4 mois, donc 3 fois par an. En un an, il est donc multiplié par $2 \times 2 \times 2 = 8$. Ainsi, $k = 24$ et $a = 8$.

b. $f(1) = 24 \times 8^1 = 192$ donc il y a 192 lapins un an après leur introduction selon ce modèle.

De même, $f(6,5) \approx 17\,794\,925$. Il y a 17 794 925 lapins six ans et demi après leur introduction selon ce modèle.

2.a. Dans l'expression de la fonction f , le temps t est en années, mais ici, on demande un suivi mois par mois. On doit donc entrer les temps en douzièmes d'années. On entre en **C1** : $=B1+1/12$

b. On entre en **B2** : $=24*8^B1$

3. On obtient le résultat dans la cellule **AK** : 2,916 666 67, soit au bout de 2 ans et 11 mois.

Les lapins atteindront les 10 000 individus 35 mois après leur introduction.

Les élèves n'ayant pas accès au tableur ou s'entraînant pour une épreuve papier pourront bien sûr déterminer ce résultat à l'aide de la calculatrice.

68 1. Coefficient multiplicateur sur deux ans : $\frac{51\,156}{46\,400} = 1,102\,5$.

Coefficient multiplicateur annuel moyen : $\sqrt[2]{1,102\,5} = 1,05$. Le taux de croissance annuel moyen du nombre d'abonnés est de 5 %.

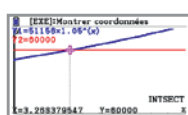
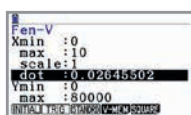
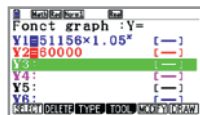
2.a. $k = 51\,156$ et $a = 1,05$.

b. $f(-2)$ est le nombre d'abonnés deux ans avant le 1^{er} septembre 2020, donc au 1^{er} septembre 2018, avant les deux augmentations annuelles de 5 %. D'où $f(-2) = 46\,400$.

c. Du 1^{er} septembre 2020 au 25 décembre 2020 s'écoulent 115 jours.

Le nombre d'abonnés prévu le 25 septembre 2020 est $f\left(\frac{115}{365}\right) \approx 51\,948$.

d. On obtient un nombre d'années égal à 3,268 4, soit 3 ans et 98 jours, ce qui correspond au 8 décembre 2023.



69 1.a. L'instruction « if $a > 1$: » permet de déterminer si la fonction est croissante ou décroissante, pour choisir le sens de l'inégalité du **while**.

b. On souhaite résoudre $2^x = 10$ sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

2. **resoudre**(2,10,3,3,4)

3.a. **resoudrebis** appelle la fonction **resoudre** en boucle en utilisant après chaque appel le résultat renvoyé comme nouvel intervalle de recherche. L'intervalle est ainsi de plus en plus petit et on approche de mieux en mieux la solution. Les appels se poursuivent jusqu'à ce que l'amplitude de l'intervalle devienne inférieure à 10^{-10} , ce qui fournit une valeur approchée de la solution à 10^{-10} près (sauf erreurs d'arrondis de l'ordinateur).

b. Cette question est un peu difficile puisque les fonctions puissances ne sont pas au programme. L'élève risque de confondre $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto x^a$. Il faut comprendre que $x \mapsto x^a$ est croissante si $a > 0$ et décroissante si $a < 0$. On pourra prendre les exemples de x et de x^{-1} .

```
def resoudre(a, b, x1, x2):
    h = (x2 - x1)/100
    x = x1
    if a > 0:
        while x**a < b:
            x = x + h
    else:
        while x**a > b:
            x = x + h
    return x - h, x
```

70 1. $k = 152$; $a = 0,89$.

2. $c(2,5) = 152 \times 0,89^{2,5} \approx 113,6$ mg

After 2 hours and a half, 113,6 mg of caffeine are left in the body.

3. We have to solve the equation : $152 \times 0,89^x = 76$.

Using the calculator, we find 5,948 03, so 5 hours and 57 minutes.

71 Modélisons la population des États-Unis par une fonction f et celle d'Indonésie par une fonction g .

On prend $f(x) = 327\,163\,096 \times 1,008^x$

et $g(x) = 264\,905\,894 \times 1,013^x$.

On utilise ensuite l'outil **intersection** de la calculatrice graphique, un tableur ou un programme Python. Par exemple, en Python :

```
def f(x):
    return 327163096*1.008**x

def g(x):
    return 264905894*1.013**x

def seuil():
    x = 0
    while f(x)>g(x):
        x = x + 1
    return 2016+x
```

En exécutant la fonction **seuil**, on obtient :

```
>>> seuil()
2059
```

C'est donc en 2059 que la population indonésienne dépassera celle des États-Unis.

72 1.a. f est croissante car $0,008 > 0$ et $2,8 > 1$.

b. La définition de x n'est pas donnée explicitement, mais l'énoncé indique clairement que la phase de croissance exponentielle se produit au bout de 12 heures et dure 12 heures, et x est défini sur $[12 ; 24]$. On en déduit que x représente le nombre d'heures écoulées depuis le début de la culture.

Chapitre 2 • Fonctions exponentielles

Au bout de 2,5 heures de croissance exponentielle, la concentration de bactéries est :

$$f(14,5) \approx 24\,371 \text{ bactéries par mL de sang.}$$

À la fin de la phase de culture :

$$f(24) \approx 431\,402\,581 \text{ bactéries/mL.}$$

2.a. g est dérivable sur $[24; 42]$ et pour tout $x \in [24; 42]$, on a : $g'(x) = -3\,226x + 82\,633$.

$$-3\,226x + 82\,633 = 0 \Leftrightarrow x \approx 25,615.$$

La fonction g est croissante puis décroissante. Le sommet de la parabole est atteint pour $x \approx 25,615$, donc 1,615 heure après l'introduction de l'antibiotique. La population de bactéries commence à diminuer 97 minutes après l'introduction de l'antibiotique.

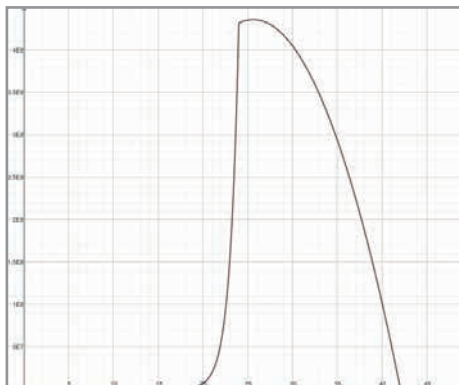
b. Au bout de 18 heures, on a $x = 42$ et $g(42) \approx 2\,552$ et $g(24) = 431\,402$.

Or, $\frac{2\,552}{431\,402} \approx 0,006 \approx 0,6\%$. L'antibiotique a éliminé 99,4 % des bactéries. Il est donc bien dosé.

c. Le niveau initial de bactéries est égal à $f(12) \approx 1858$, pendant les 12 premières heures.

Sur Geogebra, on obtient la courbe avec

$$f(x) = \text{Si}(0 \leq x \leq 12, 1858, 12 < x \leq 24, 0,008 \cdot 2,8^x), 24 < x \leq 42, -1613000x^2 + 82633000x - 622702000)$$



73 Une solution algorithmique

```
def population(p0, n):
    p = p0
    for i in range(n):
        if p < p0*2:
            p = p*1.05**(1/365)
        else:
            p = p*1.02**(1/365)
    return p
```

Une solution plus mathématique

La population double au bout de x années avec $1,05^x = 2$.

On obtient, à l'aide d'un outil numérique ou en utilisant le logarithme : $x \approx 14,2067$, ce qui correspond, en comptant 365 jours par an, à 5 186 jours.

```
def population2(p0,n):
    if n<=5186:
        return p0*1.05**(n/365)
    else:
        p = p0*2
        return p*1.02**((n-5186)/365)
```

74 On note $s(x)$ le nombre de souris x années après le débarquement.

Les souris se reproduisent de manière exponentielle, donc suivant une formule du type $s(x) = ka^x$, où k et a sont des réels à déterminer.

k est le nombre initial de souris donc $k = 4$ et $s(1) = 4a = 34$ donc $a = 8,5$.

Deux ans et demi après le débarquement, le nombre de souris sera égal à :

$$s(2,5) = 4 \times 8,5^{2,5} \approx 843.$$

Ateliers algorithmiques et numériques

Atelier 1 : Évolution du SMIC

Objectifs : calculer un taux moyen et organiser une feuille de calcul.

1. Le 1,52 % écrit dans la cellule B2 signifie que de 2010 à 2011, le SMIC a augmenté de 1,52 %.

Le 2 % écrit dans la cellule C5 signifie qu'en 2012, l'inflation a été de 2 %.

2.a. On entre en B3 la formule $=1+B2$. En effet, 1,52 % sur la feuille de calcul est égal à 0,015 2.

b. En C4, on entre $=\text{PRODUIT}(B3:I3)$. En E4, on entre $=C4^(1/\$J\$2)-1$.

c. En E7, on obtient $=C7^(1/\$J\$2)-1$. Il faudra peut-être modifier la formule entrée en C4 si on n'avait pas bloqué la cellule J2 (ce qui n'était a priori pas obligatoire dans la question 2.b.).

3. En E4 s'affiche 1,363 7 % et en E7 s'affiche 1,059 6 %. Ainsi, le SMIC augmente en moyenne de 1,36 % par an et l'inflation de 1,06 % par an. Le SMIC augmente donc plus que l'inflation.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	Nbr années
2	Taux SMIC	1,52%	1,23%	0,93%	0,62%	0,84%	1,06%	2,28%	2,44%	8
3	CM SMIC	1,0152	1,0123	1,0093	1,0062	1,0084	1,0106	1,0228	1,0244	
4	SMIC	CM global	1,11444444	Taux moyen	1,3637%					
5	Taux inflation	2,10%	2%	0,90%	0,50%	0%	0,20%	1%	1,60%	
6	CM inflation	1,0210	1,0200	1,0090	1,0050	1,0000	1,0020	1,0100	1,0160	
7	Inflation	CM global	1,08797775	Taux moyen	1,0596%					

Atelier 2 : Concentration d'acide en chimie

Objectifs : écrire une fonction simple en Python et interpréter un algorithme.

1. La concentration d'acide initiale est $c = 5 \times 0,80 = 5 \text{ mmol.L}^{-1}$.

2.

```
def c(t):
    return 5*0.8**t
```

3.a. La boucle **while** s'exécute tant que $c(t)$ est supérieur à 2,5. Elle s'interrompt donc dès que $c(t)$ devient inférieur ou égal à 2,5 et renvoie alors la valeur de t . Le temps de demi-réaction est donc le temps au bout duquel la concentration devient inférieure ou égale à $2,5 \text{ mmol.L}^{-1}$, soit la moitié de la concentration initiale.

b. On exécute ces fonctions sur un ordinateur ou on utilise la calculatrice graphique pour déterminer la valeur de t telle que $c(t) = 2,5$.

L'appel de `demireaction(0.001)` renvoie
3.106999999999769.

Le temps de demi-réaction est donc de 3 minutes et 6 secondes.

4.a.

```
def plusdangereuse():
    t = 0
    while c(t) > 0.04:
        t = t + 0.01
    return t
```

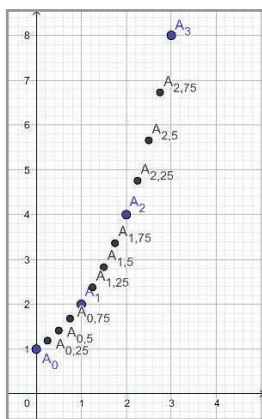
b. L'appel de `plusdangereuse()` renvoie
21.640000000000583, soit 21 minutes et 38 secondes.

Atelier 3 : Construction de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto a^x$

Objectifs : construire la courbe d'une fonction exponentielle à partir de la représentation graphique d'une suite géométrique et compléter un programme informatique.

Questions 1 et 2

On pourra laisser les élèves travailler sur papier, et construire seuls les points $A_{0,5}$, $A_{1,5}$ et $A_{2,5}$. Les plus rapides intercaleront les six points suivants eux-mêmes, le professeur pourra présenter une solution sur Geogebra, tableur ou Python pour gagner du temps sur cette tâche répétitive une fois que les élèves auront compris le mécanisme.



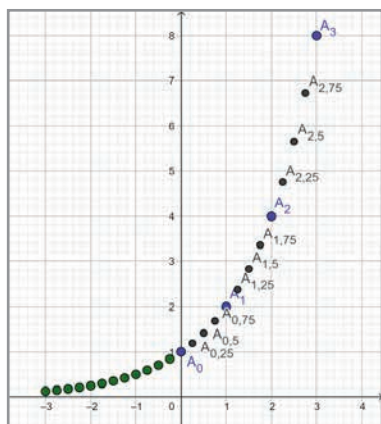
Sur Geogebra, la commande

`Execute(("((x(%1)+x(%2))/2,sqrt(y(%1)*y(%2))))"), A_{0}, A_{1})` permet d'intercaler un point entre A_0 et A_1 .

On obtient comme coordonnées approximatives :

$A_{0,5}(0,5 ; 1,41)$ $A_{1,5}(1,5 ; 2,83)$ $A_{2,5}(2,5 ; 5,66)$
 $A_{0,25}(0,25 ; 1,19)$ $A_{0,75}(0,75 ; 1,68)$ $A_{1,25}(1,25 ; 2,38)$
 $A_{1,75}(1,75 ; 3,36)$ $A_{2,25}(2,25 ; 4,76)$ $A_{2,75}(2,75 ; 6,73)$

3. On obtient sur Geogebra par exemple :



Les deux commandes suivantes permettent de construire les points à abscisses négatives.

`list = {A_{0}, A_{0,25}, A_{0,5}, A_{0,75}, A_{1}, A_{1,25}, A_{1,5}, A_{1,75}, A_{2}, A_{2,25}, A_{2,5}, A_{2,75}, A_{3}}`
`sequence((-x(element(list,i)), (1)/(y(element(list,i))))), i, 1, 13)`

4.a.

```
from math import sqrt

def moyenneArithmetique(a, b):
    return (a+b)/2

def moyenneGeometrique(a, b):
    return sqrt(a*b)
```

b. ligne 9 : $x = \text{moyenneArithmetique}(\text{absc}[i], \text{absc}[i+1])$
 ligne 12 : $y = \text{moyenneGeometrique}(\text{ordo}[i], \text{ordo}[i+1])$
 ligne 19 : `absc = list(range(n+1))`
 ligne 20 : `ordo = [a**n for n in absc]`

```
def intercale(absc, ordo):
    n = len(absc)
    nouvelabs = [absc[0]]
    nouvelord = [ordo[0]]
    for i in range(n-1):
        x = moyenneArithmetique(absc[i], absc[i+1])
        nouvelabs.append(x)
        nouvelabs.append(absc[i+1])
        y = moyenneGeometrique(ordo[i], ordo[i+1])
        nouvelord.append(y)
        nouvelord.append(ordo[i+1])
    return nouvelabs, nouvelord
```

```
def trace(a):
    n = 10
    absc = list(range(n+1))
    ordo = [a**n for n in absc]
    for i in range(10):
        absc, ordo = intercale(absc, ordo)
    plt.scatter(absc, ordo)
    plt.show()
```

5. La ligne 22 modifie les listes `absc` et `ordo` en intercalant des nouveaux points entre les anciens.

Comme cette ligne s'exécute en boucle (10 fois), on rajoute de nombreux points. La grande quantité de points donne ainsi l'impression d'une ligne continue.

Plus précisément, la liste de départ contient 11 points.

Lors de la première exécution de la boucle, on rajoute 10 points. On a donc 21 points.

Lors de la deuxième exécution, on rajoute 20 points, pour un total de 41 points.

Lors de la troisième exécution, on rajoute 40 points, pour un total de 81 points.

Lors de la quatrième exécution, on rajoute 80 points, pour un total de 161 points.

Lors de la dixième exécution, on rajoute

$2^9 \times 10 = 5\,120$ points, pour un total de 10 241 points.

Être prêt pour le bac

75 Q1. $(5^{0,5})^4 = 5^2 = 25$.

Q2. $2^{1,2} \times 2^{2,8} = 2^4 = 16$.

Q3. $\frac{x^2}{x^{4,5} \times x^{-6,5}} = \frac{x^2}{x^{-2}} = x^4$.

Q4. $(t^{1,25})^4 \times t^{-6} = t^5 \times t^{-6} = \frac{1}{t}$.

Q5. Fonction croissante car $1,02 > 1$ et $0,2 > 0$.

Chapitre 2 • Fonctions exponentielles

Q6. Fonction décroissante car $t \mapsto \left(\frac{8}{5}\right)^t$ est croissante mais $-\frac{7}{5} < 0$.

Q7. $x^{0,25} = 3 \Leftrightarrow x = 3^4 = 81$.

Q8. $x^{0,5} = 7 \Leftrightarrow x = 49$.

Q9. 44 % car $1,2 \times 1,2 = 1,44$.

Q10. 20 % car $1,8 \times 0,8 = 1,44 = 1,2^2$

76 Partie A

1. $f'(x) = -0,48x^2 + 4,44x - 3,7848$

2. $(x - 8,3)(-0,48x + 0,456)$
 $= -0,48x^2 + 0,456x + 3,984x - 3,7848 = f'(x)$

3.

x	0	0,95	8,3	15
$x - 8,3$	—	—	0	+
$-0,48x + 0,456$	+	0	—	—
$f'(x)$	—	0	+	0
$f(x)$	30	28,270 81	60,036 04	-67,272

4. Le maximum sur $[0 ; 15]$ est 60, atteint en 8,3.

Partie B

1.a. La quantité d'antigènes présents dans le sang 6,5 jours après la contamination est :

$f(6,5) \approx 55$.

La quantité d'anticorps est alors : $g(6,5) \approx 5$.

b. D'après la partie A, la quantité d'antigènes est maximale au bout de 8,3 jours. Elle est alors égale à 60.

2.a.

```
def antigene(x):
    return - 0.16*x**3 + 2.22*x**2 - 3.7848*x + 30

def anticorps(x):
    return 0.009*1.89**x
```

b.

```
def estgueri(h):
    x = 3
    while antigene(x) > anticorps(x):
        x = x + h
    return x
```

c. $h = \frac{1}{24}$

d. On obtient, en Python, ou avec l'outil d'intersection de la calculatrice graphique 12 jours et 7 heures.

77 Partie A

1. $u_1 = 42 \times 1,14 = 47,88$; $u_2 = u_1 \times 1,14 \approx 54,583$.

Le nombre d'objets connectés est de 47,88 milliards au 1^{er} décembre 2016 et 54,58 milliards au 1^{er} décembre 2017.

2. La suite (u_n) est géométrique puisqu'augmenter de 14 % revient à multiplier par 1,14. Sa raison est 1,14.

3. $u_n = 42 \times 1,14^n$.

En 2025, on a $n = 10$ et $u_{10} \approx 155,7$. On peut estimer un nombre d'objets connectés égal à 155,7 milliards en 2025.

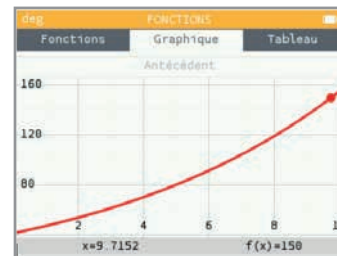
4. En 2050, selon ce modèle, on aurait $u_{35} \approx 4\,120$ milliards d'objets connectés, soit plus de 400 objets connectés par habitants ! Ces chiffres ne semblent pas réalistes. Ce modèle ne peut vraisemblablement pas se prolonger jusqu'en 2050.

Partie B

1.a. On lit environ 76 milliards d'objets connectés au bout de 4 ans et demi.

b. Le nombre d'objets connectés dépasse les 100 milliards au bout de 6,6 ans environ, soit 6 ans et 7 mois.

2. On cherche l'antécédent de 150 sur la calculatrice.



On obtient $x \approx 9,715$, soit 9 ans et 8,5 mois.

Le nombre d'objets connectés atteint 150 milliards en août 2025.

78 Partie A

1. $= (C2 - B2) / C2$

2. $\frac{7,5 - 5,84}{5,84} \approx 0,28$.

La valeur affichée dans la cellule E3 est 28 %.

3. $CM = \frac{7,5}{3,56} \approx 2,1067$.

$x^3 = 2,1067 \Leftrightarrow x = 2,1067^{\frac{1}{3}} \approx 1,282$.

Le taux de croissance annuel moyen du nombre d'abonnements de 2015 à 2018 est 28,2 %.

Partie B

1. Le 1^{er} septembre 2018 correspond à $x = 3,5$.

Le nombre d'abonnements au 1^{er} septembre 2018 est $f(3,5) \approx 8,493$ millions d'abonnements.

2. On doit résoudre l'équation $3,56 \times 1,282^x = 10$.

On obtient $x \approx 4,15755$, qui correspond à 4 ans et 58 jours, soit au 28 avril 2019.

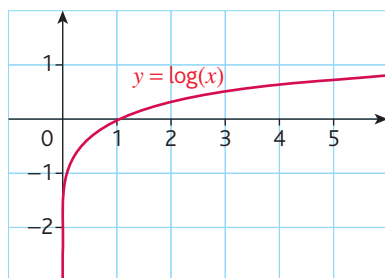
Chapitre 3 • Fonction logarithme décimal

Activités du cours

1 Définition du logarithme décimal

Objectif : découvrir la définition de la fonction logarithme décimal.

1.



2.a. $x = 10$ b. $x = 10^{10}$ c. $x = -1$

3.a. $x = \log(40\,000) \approx 4,6h$

b. Non.

2 Sens de variation de la fonction logarithme décimal

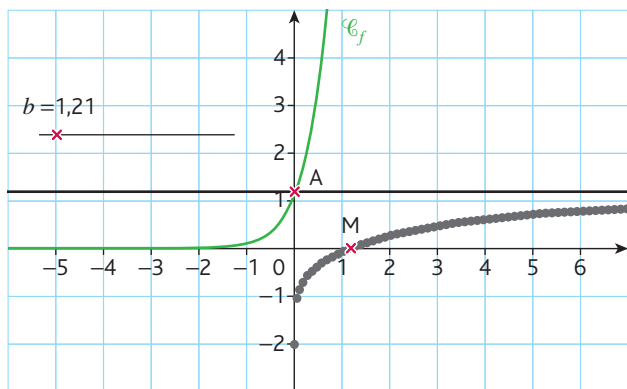
Objectif : faire une construction point par point de la représentation graphique de la fonction logarithme décimal afin de conjecturer ses variations. La démonstration est faite dans le chapitre 12 sur la composition de fonctions.

1.a. $\log(a) = \log(0,01) = -2$ et $\log(b) = \log(0,1) = -1$ donc $\log(a) < \log(b)$.

b. $\log(a) = \log(1) = 0$ et $\log(b) = \log(10) = 1$ donc $\log(a) < \log(b)$.

c. $\log(a) = \log(100) = 2$ et $\log(b) = \log(10\,000) = 4$.

2.a.



b. La fonction log semble être strictement croissante.

3.a. Puisque la fonction log est strictement croissante, on en déduit que : $\log(b) \leq \log(1) \Leftrightarrow \log(b) \leq 0$.

b. $\log(b) > 0$ si et seulement si $b > 1$.

À votre tour !

1.a. $x = \log(6)$ b. $t = 10^{-4}$ c. $x = 10^{\frac{2}{3}}$

2.a. $x \leq \frac{5}{\log(2,3)}$ b. $t < -\frac{2,3}{\log(0,56)}$ c. $x \leq 10^{-6}$

3. $20 \log(d) \geq 60$ soit $d \geq 1\,000$ m.

3 Propriétés algébriques du logarithme décimal

A. Calculer avec des logarithmes et des puissances de dix

Objectif : découvrir la propriété fondamentale des logarithmes.

1.a.

x	100	1 000	10 000	10^6	0,01	10^{-3}	10^{-7}
$\log(x)$	2	3	4	6	-2	-3	-7

b. $\log(10^n) = n$

2.a.

a	10	100	1 000	0,01	10^9	10^{-5}
b	100	10 000	10^{-5}	10^6	0,001	10^{-3}
$\log(a) + \log(b)$	3	6	-2	4	6	2
$\log(a \times b)$	3	6	-2	4	6	2

b. $\log(a) + \log(b) = \log(a \times b)$

B. Utiliser la propriété fondamentale pour découvrir d'autres propriétés

Objectif : démontrer les propriétés algébriques du logarithme qui découlent de la propriété fondamentale des logarithmes. La puissance nième n'est démontrée que pour de petites valeurs de n .

1.a. $\log(a^2) = \log(a \times a) = \log(a) + \log(a) = 2 \log(a)$

b. $\log(a^3) = \log(a^2 \times a) = \log(a^2) + \log(a) = 3 \log(a)$

c. $\log(a^4) = \log(a^3 \times a) = \log(a^3) + \log(a) = 4 \log(a)$

d. $\log(a^5) = \log(a^4 \times a) = \log(a^4) + \log(a) = 5 \log(a)$

Conjecture : $\log(a^n) = n \log(a)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $a > 0$.

2. $\log(1) = \log\left(b \times \frac{1}{b}\right)$

$\Leftrightarrow 0 = \log(b) + \log\left(\frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)$

3. $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log\left(a \times \frac{1}{b}\right)$
 $= \log(a) + \log\left(\frac{1}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

À votre tour !

1.a. $\log\left(\frac{5}{3}\right)$ b. $\log(1\,029)$ c. $-\log(9)$

2.a. $x < \frac{\log(10)}{\log(2)}$ b. $n = 11$

3. $18\,500 \times 0,8^n < 500$ soit $n \geq 17$.

Exercices - Échauffement

1 Réponses dans le manuel.

2 a. $x = \log(0,675)$ b. $x = \log(1,28)$ c. $x = \log(5,575)$

3 a. $x = \log(13,5)$ b. $x = \log(0,68)$ c. $x = \log(0,8)$

4 $\log(x) = y \Leftrightarrow x = 10^y$

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP	
10 ^{1.079181246}	12.
10 ^{0.6989700043}	5
10 ^{1.892094603}	78.00000006
10 ^{-0.638272164}	0.23

- 5 a. Jus de citron : $\text{pH} = -\log([H_3O^+]) = -\log(0,005) \approx 2,30$.
 b. Lait : $\text{pH} = -\log([H_3O^+]) = -\log(3,16 \times 10^{-7}) \approx 6,44$.
 c. Sang humain :
 $\text{pH} = -\log([H_3O^+]) = -\log(4,42 \times 10^{-8}) \approx 7,35$.

6 Réponses dans le manuel.

- 7 a. $2,5 > 1$ donc $\log(2,5) > 0$.
 b. $0,25 < 1$ donc $\log(0,25) < 0$.
 c. $\frac{7}{10} < 1$ donc $\log\left(\frac{7}{10}\right) < 0$.

8 Réponses dans le manuel.

- 9 Comme la fonction $\log$ est strictement croissante et que :
 $10^{-2} < 2,5 \times 10^{-2} < 0,05 < 0,203 < 0,21 < 2,7$ alors :
 $\log(10^{-2}) < \log(2,5 \times 10^{-2}) < \log(0,05) < \log(0,203)$
 $< \log(0,21) < \log(2,7)$.

- 10 La fonction f_1 correspond à $\mathcal{C}_3$ car f_1 est une fonction affine avec $\log(3,4)$ comme coefficient directeur de sa représentation graphique. $\log(3,4) > \log(2,3)$ donc f_1 est représenté par la droite qui correspond à une fonction affine croissante, avec le coefficient directeur le plus grand.
 f_3 a pour représentation graphique $\mathcal{C}_2$.
 f_2 a pour représentation graphique $\mathcal{C}_1$ (unique fonction affine décroissante, $\log(0,5) < 0$).

11 Réponses dans le manuel.

- 12 a. $\log(5) + 2 \log(3)$ b. $\log(5) - 2 \log(3)$ c. $3 \log(5)$

13 Réponses dans le manuel.

- 14 $\log(a^3) = 3 \log(a)$; $\log(a^{-5}) = -5 \log(a)$;
 $\log\left(\frac{a^2}{b^3}\right) = 2 \log(a) - 3 \log(b)$;
 $\log(a^6 b^3) = 6 \log(a) + 3 \log(b)$.

- 15 a. $2,2 \log(x) = \log(2\,048) \Leftrightarrow \log(x) = \frac{\log(2\,048)}{2,2}$
 $x = 10^{\frac{\log(2\,048)}{2,2}} = 32$
 b. $\frac{5}{12} \log(x) = \log(7,2) \Leftrightarrow \log(x) = \frac{12 \log(7,2)}{5}$
 $x = 10^{\frac{12 \log(7,2)}{5}} \approx 114,18$
 c. $x \log(5,5) = \log(12) \Leftrightarrow x = \frac{\log(12)}{\log(5,5)}$ donc $x \approx 1,46$.

- 16 1. À $t = 0$, il y a $10^0 = 1$ million de bactéries.

2. Le tableau est complété par lecture approchée du nuage de points, en prenant en compte l'échelle semi-log.

Temps (en h)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Nombre de bactéries (en million)	1	1,5	3	6	11	20	37

- 17 1. L'axe des abscisses.

2. $A(10^{-10}; 20)$ et $B(10^{-2}; 100)$.

3. Non, la caractéristique est une droite mais dans un repère semi-log.

4. On a : $L = a \log(I) + b$

$$\begin{cases} -10a + b = 20 \\ -2a + b = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 120 \end{cases}$$

Réponse a.

- 18 Il y a une erreur dans l'édition 01 du manuel, à l'avant-dernière ligne du programme, lire : $S = S + \log_{10}(2)$.

1. somme(32) = 32 log(2)

2. $n = 32$

while somme(n) <= 5000 :

n = n + 1

print(n)

3. $\text{somme}(n) \geq 5\,000 \Leftrightarrow n \log(2) \geq 5\,000 \Leftrightarrow n \geq \frac{5\,000}{\log(2)}$
 $n = 16\,610$

- 19 a. $n \log(0,99) \leq \log(0,75) \Leftrightarrow n \geq \frac{\log(0,75)}{\log(0,99)}$
 $n = 29$

b. $n \log(2,3) \geq \log(5\,000) \Leftrightarrow n \geq \frac{\log(5\,000)}{\log(2,3)}$
 $n = 11$

c. $-\left(\frac{121}{125}\right)^n \geq -0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{121}{125}\right)^n \leq 0,01$
 $\Leftrightarrow n \log\left(\frac{121}{125}\right) \leq \log(0,01) \Leftrightarrow n \geq \frac{\log(0,01)}{\log\left(\frac{121}{125}\right)}$
 $n = 142$

Exercices - Entraînement

- 20 1.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	0,301	0,176	0,125	0,097	0,079	0,067	0,058	0,051	0,046

2. Il y a une erreur dans l'édition 01 du manuel. Le bon tableau (obtenu avec le programme Python proposé) est :

1 ^{er} chiffre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre d'apparitions	602	354	248	194	160	134	114	105	89

Calcul des fréquences d'apparition des différents chiffres dans les 2 000 premières puissances de 2 :

1 ^{er} chiffre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre d'apparitions	0,301	0,177	0,124	0,097	0,08	0,067	0,057	0,0525	0,0445

Les fréquences d'apparitions des différents chiffres, différents de 0 comme premier chiffre dans les 2 000 premières puissances de 2 suivent la loi de Benford.

3.a. Permet de transformer l'entier 2^i en une chaîne de caractères.

b. Permet de transformer le 1^{er} caractère du nombre 2^i (c'est-à-dire son premier chiffre) en un nombre.

c. Elle compte le nombre d'occurrence de chaque chiffre non nul dans l'écriture décimale des différentes puissances de 2.

d. Cette fonction transforme les différentes puissances de 2 allant de 2^0 à 2^{n-1} en chaîne de caractères puis compte le nombre de fois où les chiffres de 1 à 9 apparaissent comme premier chiffre de 2^i .

e.

```
>>> prem_chiffre(2000)
[602, 354, 248, 194, 160, 134, 114, 105, 89]
```

21 1. $10^x \leq 10^y \Leftrightarrow x \leq y$ car la fonction $x \mapsto 10^x$ est croissante.

2. $10^x = a \Leftrightarrow x = \log(a)$

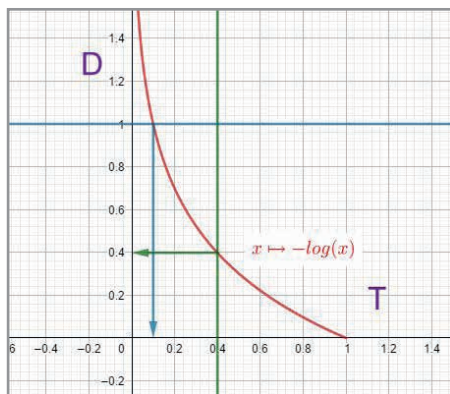
3. a est un réel strictement positif, donc il existe un réel x tel que $a = 10^x$, on a $x = \log(a)$.

De la même façon, il existe un réel y tel que : $y = \log(b)$.

D'où $a \leq b \Leftrightarrow 10^x \leq 10^y \Leftrightarrow x \leq y \Leftrightarrow \log(a) \leq \log(b)$.

Donc la fonction $\log$ est croissante.

22 1.a.b.



2.

x	0	1
f		

3.a. Graphiquement, on trouve que si le facteur de transmission est 0,4, alors la densité optique est 0,4.

b. Graphiquement, on trouve que si la densité optique est de 1 alors le facteur de transmission est de 0,1.

4. $D = -\log(0,4) \approx 0,398$

$1 = -\log(T) \Leftrightarrow \log(T) = -1 \Leftrightarrow T = 10^{-1} \Leftrightarrow T = 0,1$

23 1. $10^x \times 10^y = 10^{x+y}$

2. $10^x = a \Leftrightarrow x = \log(a)$

3. $10^{\log(a)} \times 10^{\log(b)} = 10^{\log(a)+\log(b)}$

et $10^{\log(a)} \times 10^{\log(b)} = a \times b$

4. $a \times b = 10^{\log(a)+\log(b)} \Leftrightarrow \log(ab) = \log(10^{\log(a)+\log(b)})$
 $\Leftrightarrow \log(ab) = \log(a) + \log(b)$

24 Réponses dans le manuel.

25 a. $\log\left(\frac{a}{b^2}\right)$ b. $\log\left(\frac{b}{a}\right)$ c. $\log(a^3b^7)$

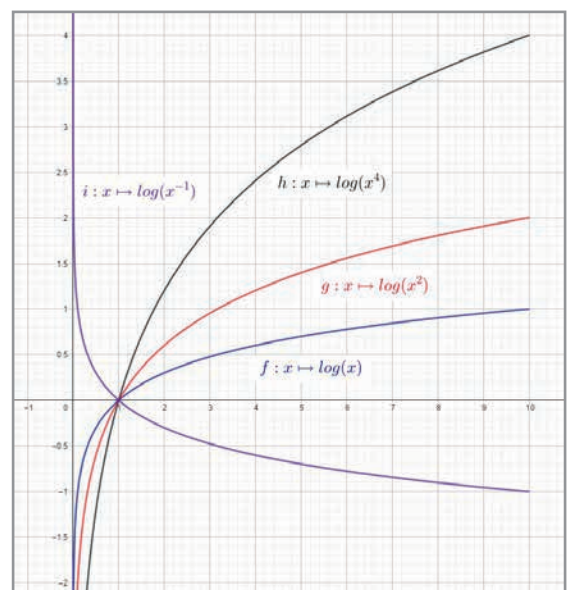
26 $u_6 = u_0q^6$ et $u_{11} = u_0q^{11}$
 $32u_6 = 243u_{11} \Leftrightarrow \frac{u_{11}}{u_6} = \frac{32}{243} \Leftrightarrow q^5 = \frac{32}{243} \Leftrightarrow q = \frac{2}{3}$

27 1. Courbe $\mathcal{C}_1 : h$; courbe $\mathcal{C}_2 : k$; courbe $\mathcal{C}_3 : f$; courbe $\mathcal{C}_4 : g$.

2. Une translation de vecteur vertical.

3. $g(x) = 1 + f(x)$; $h(x) = 3 + f(x)$; $k(x) = f(x) - 2$.

28 1.

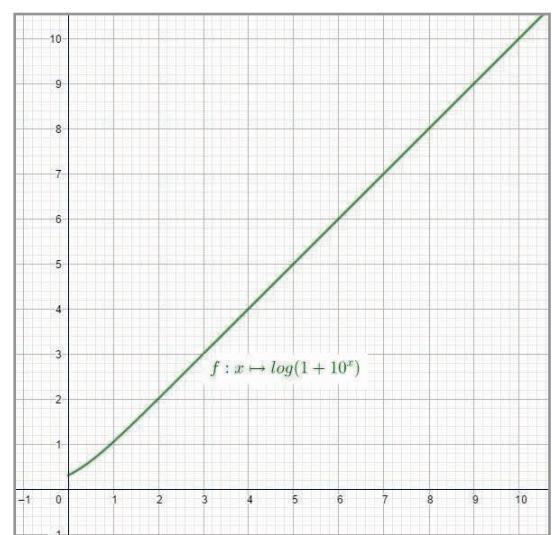


2. $g(x) = 2f(x)$; $h(x) = 4f(x)$; $i(x) = -f(x)$.

29 1.

x	0	0,5	1	2	5	10	15	20
$f(x)$	0,301	0,6193	1,0414	2,0043	5	10	15	20

2.



3. $f(x) \approx x$

4. $f(x) - x \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \log(1 + 10^x) - \log(10^x) \leq 10^{-2}$

$\Leftrightarrow \log\left(\frac{1 + 10^x}{10^x}\right) \leq 10^{-2} \Leftrightarrow 10^{-x} + 1 \leq 10^{0,01}$

$\Leftrightarrow 10^{-x} \leq 10^{0,01} - 1 \Leftrightarrow x \geq -\log(10^{0,01} - 1)$

$[-\log(10^{0,01} - 1); +\infty[$ (soit environ $[1,633; +\infty[$).

30 1. 9 ans.

2. 15 ans.

31 Le calcul permet de trouver 11,2 années.

32 1.

$S \leftarrow 24000$

$N \leftarrow 0$

Tant que $S < 40208,37$:

$S \leftarrow S \times 1,035$

$N \leftarrow N + 1$

Fin Tant que

2. $N = \frac{\log\left(\frac{40\,208,37}{24\,000}\right)}{\log(1,035)} \approx 15$

3.

```
S=24000
N=0
while S<40208.37:
    S=S*1.035
    N=N+1
print(N)
```

15

33 1. $10\,000 \times 1,008^3 \approx 10\,241,93 \text{ €}$

2. $10\,000 \times 1,008^{\frac{1}{12}} \approx 10\,006,64 \text{ €}$

3. $10\,000 \times 1,008^{\frac{5+1}{3}} \approx 10\,434,13 \text{ €}$

34 1. $12\,000 \times 1,05^{\frac{5,5}{12}} \approx 16\,444,81 \text{ €}$

2. 4 444,81 €

3. 3 ans 5 mois et 15 jours

35 1. On veut que : $C(1+t) = C(1+t')^{12}$ d'où le résultat en simplifiant par C : $t' \approx 0,7 \%$.

2. On veut que :

$(1+0,1) = (1+t'')^{24}$ ce qui donne $t'' \approx 0,4 \%$.

36 Réponses dans le manuel.

37 $S \times 1,065^{4,5} = S \times q^{5,75} \Leftrightarrow \log(q) = \frac{\log(1,065^{4,5})}{5,75}$

donc $q = 10^{\frac{\log(1,065^{4,5})}{5,75}} \approx 1,05$.

Le capital est placé à 5 %.

38 $n = \frac{\log\left(\frac{21\,049,94}{15\,500}\right)}{\log(1,012)} \approx 25,66$ ans

soit 25 ans 7 mois et 27 jours.

39 1. 18 663,71 € au 1^{er} janvier 2022
et 19 164,21 € au 15 juillet 2025.

2. Environ 30,7 ans soit au 1^{er} septembre 2049.

40 1. $150 \times 0,7^3 \approx 51,45 \text{ m}$

2. $150 \times 0,7^n = 4 \Leftrightarrow 0,7^n = \frac{4}{150} \Leftrightarrow n = \frac{\log\left(\frac{4}{150}\right)}{\log(0,7)}$

$\approx 10,16$ donc après 10 rebonds

(elle sera inférieure à 4 m après le 11^e rebond).

3.a. $\frac{\log\left(\frac{10^{-3}}{150}\right)}{\log(0,7)} \approx 19,37$

donc 20 rebonds avant d'être considérée comme immobile.

b. Distance parcourue :

$d = 150 + 2 \times 150 \times 0,7 + \dots + 2 \times 150 \times 0,7^{20}$

$d = 150 + 210(1 + 0,7 + 0,7^2 + \dots + 0,7^{19})$

$d = 150 + 210 \times \frac{1 - 0,7^{20}}{1 - 0,7} \approx 849,441 \text{ m}$

4.a.

```
def trajet(d):
    u=150
    n=0
    S=150
    while S<d:
        u=u*0.7
        S=S+2*u
        n=n+1
    return n
```

b. Distance (en m) parcourue après le premier rebond :
 $150 + 2 \times 105 \times 0,7 = 297$.

Distance (en m) parcourue après le second rebond :
 $297 + 2 \times 150 \times 0,7^2 = 444$.

Distance (en m) parcourue après le troisième rebond :
 $444 + 2 \times 150 \times 0,7^3 = 546,9$
trajet(495) va renvoyer 2.

41 1. 7 stops

2. 1 024 stops

3. $2^{5,5} \approx 45$ intensités lumineuses.

4. 65 536 intensités différentes.

5. $n = \frac{8}{\log(2)} \approx 27$

42 1.a. $10^4 < N < 10^5$ donc $4 < \log(N) < 5$.

b. $\log(N) \approx 5$ (par excès, ce qui correspond au nombre de chiffres de 10 203).

2. $10^{22} < N < 10^{23}$ donc $22 < \log(N) < 23$

b. $\log(N) \approx 23$ (par excès, ce qui correspond au nombre de chiffres de N).

3. On cherche la valeur arrondie par excès à l'unité de $\log(N)$.

4.a. 42 chiffres.

b. 102 chiffres.

c. 6 677 chiffres.

5. 24 862 047 chiffres.

43 1.a. $10 < x < 100$

L'ordre de grandeur de x est 10 car 23,54 est plus proche de 10 que de 100.

$$100 < y < 1000$$

L'ordre de grandeur de y est 1 000 car 569,47 est plus proche de 1 000 que de 100.

$$\text{b. } \log(x) \approx 1,37$$

L'ordre de grandeur de x est 10 élevé à la puissance, l'arrondi à l'unité de $\log(x)$.

$$\log(y) \approx 2,755$$

L'ordre de grandeur de y est 10 élevé à la puissance, l'arrondi à l'unité de $\log(y)$.

2.a. L'ordre de grandeur de 5,4517 est 10.

$$\log(5,4517) \approx 0,74$$

b. Elle est vérifiée pour cette valeur.

3.a. Si $1 \leq a < 5$, l'ordre de grandeur de x est 10^n et si $5 \leq a < 10$, l'ordre de grandeur de x est 10^{n+1} .

$$\text{b. } x = a \times 10^n \text{ donc } \log(x) = \log(a \times 10^n) = \log(a) + n.$$

Comme $1 \leq a < 10$ alors $a < 10$.

Ligne 5 signifie : si $\log(a) < \log(5)$ c'est-à-dire traduit le fait que $a < 5$.

$$4. \log(x) = \log(a) + n$$

Pour déterminer l'ordre de grandeur d'un nombre, on calcul son logarithme décimal. On ne conserve que sa partie décimale. Si celle-ci est inférieure à $\log(5)$ l'ordre de grandeur de x est n , sinon c'est $n + 1$.

$$5.a. \log(2,26^{102}) = 102 \log(2,26) \approx 36,12, \quad 0,12 < \log(5)$$

donc l'ordre de grandeur de $2,26^{102}$ est 10^{36} .

$$\text{b. } \log(365,256^{2019}) = 2019 \log(365,256) \approx 5\,173,88$$

$0,88 > \log(5)$ donc l'ordre de grandeur de $365,256^{2019}$ est 5 174.

44 1. C'est le premier.

$$2. 10^x \geq 32,27 \Leftrightarrow x \geq \log(32,27)$$

45 1.a. $E = 2,8 \times 10^{18} \text{ J}$

b. L'énergie dégagée à Sumatra a été environ 44 444 fois plus importante que celle de Little Boy.

2. Katmandou-Haïti-Montendre.

3. « multipliée par 10^6 ».

46 1.a. $21 = 2,1 \times 10^1$ et $76 = 7,6 \times 10^1$

$$\text{b. } \log(7,6) \approx 0,88081.$$

On en déduit que $\log(21) = 1 + 0,32222 = 1,32222$

car $\log(21) = \log(2,1) + \log(10^1)$ et $\log(76) = 1,88081$

$$\text{c. } \log(21 \times 76) = \log(21) + \log(76) = 3,20303$$

donc $21 \times 76 = 10^{3,20303}$

$$\text{d. } 21 \times 76 = 10^{3+0,20303} = 1000 \times 1,596 = 1596$$

$$2. 15 \times 24 = 1,5 \times 10^1 \times 2,4 \times 10^1$$

On cherche les mantisses de $\log(15)$ et de $\log(24)$ qui sont respectivement 0,17609 et 0,38021.

$$\text{Donc } 15 \times 24 = 10^{2+0,17609+0,38021} = 10^2 \times 10^{0,5563}$$

$$= 100 \times 10^{\log(3,60)} = 360.$$

47 1. En français : Calculer le taux auquel un capital de 3 000 euros devrait être placé pour doubler après 10 ans.

$$3\,000 \times t^{10} = 6\,000 \Leftrightarrow t^{10} = 2 \Leftrightarrow 10 \log(t) = \log(2)$$

$$\Leftrightarrow \log(t) = \frac{\log(2)}{10} \Leftrightarrow t = 10^{\frac{\log(2)}{10}}$$

$$t \approx 1,072$$

Le capital devrait être placé à 7,2 %.

2. En français : Avec le taux précédent, déterminer le nombre d'années nécessaires pour que le capital initial triple.

$$3\,000 \times 1,072^n = 9\,000 \Leftrightarrow 1,072^n = 3$$

$$\Leftrightarrow n \log(1,072) = \log(3) \Leftrightarrow n = \frac{\log(3)}{\log(1,072)}$$

$$\frac{\log(3)}{\log(1,072)} \approx 15,80$$

Le capital aura doublé après 16 ans.

Exercices - Perfectionnement**48** 1. Taux mensuel : 0,1 %.

2.a. Capital restant dû :

$$175\,000 \times \left(1 + \frac{0,1}{100}\right) - 675 = 174\,500 \text{ €}.$$

b. Capital restant dû :

$$174\,500 \times \left(1 + \frac{0,1}{100}\right) - 675 = 173\,999,50 \text{ €}.$$

$$3. n = 300 \text{ mois}.$$

$$4. 300 \times 675 - 175\,000 = 27\,500 \text{ €}.$$

49 1.a. $f_3 = 440 \text{ Hz}$

$$f_4 = 2 \times f_3 = 880 \text{ Hz}$$

Multiplier la fréquence d'une note par 2 permet d'obtenir une note de même nom une octave plus haut.

$$\text{b. } f_{n+1} = 2f_n$$

On reconnaît une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $f_3 = 400 \text{ Hz}$.

$$f_n = f_3 2^{n-3} = 440 \times 2^{n-3}$$

$$\text{c. } f_n \leq 20\,000 \Leftrightarrow 440 \times 2^{n-3} \leq 20\,000 \Leftrightarrow 2^{n-3} \leq \frac{500}{11}$$

$$\Leftrightarrow (n-3) \log(2) \leq \log\left(\frac{500}{11}\right) \Leftrightarrow n \leq \frac{\log\left(\frac{500}{11}\right)}{\log(2)} + 3$$

$$\frac{\log\left(\frac{500}{11}\right)}{\log(2)} + 3 \approx 8,51$$

L'oreille humaine n'entend pas de La au-delà de la 8^e octave.

2.a. On sait que $f_{n+1} = 2f_n$. Dans la gamme tempérée, une octave est égale à 12 demi-tons égaux.

$$\text{Donc } f_{n+1} = r^{12} f_n \text{ d'où } r^{12} = 2,$$

$$\text{d'où } 12 \log(r) = \log(2) \Leftrightarrow \log(r) = \frac{1}{12} \log(2).$$

b. La fréquence du La est de 440 Hz, le Si est 2 demi-tons au-dessus donc la fréquence du Si est :

$$440 \times r^2 = 440 \times 10^{\frac{2}{12} \log(2)} \approx 493,88 \text{ Hz}.$$

3.a. Pour une octave, on a : $F_2 = 2F_1$ donc le nombre de savarts contenus dans une octave est : $1000 \log(2) \approx 301$ savarts.

Chapitre 3 • Fonction logarithme décimal

Pour deux demi-tons : $F_2 = rF_1$ donc entre deux demi-tons, il y a : $1000 \log\left(10^{\frac{1}{12} \log(2)}\right) \approx 25$ savarts.

b. Un Do et un Mi d'une même octave sont séparés de 4 demi-tons, donc le nombre de savarts qui les séparent est :

$$1000 \log(r^4) = 1000 \log\left(10^{\frac{1}{3} \log(2)}\right) \approx 100.$$

50 1. $k = -2,5$

2.a. $k' = 2,5 \log(E_0)$

b. $m = 2,5 \log\left(\frac{E_0}{E}\right)$

3.a. Soleil : $E = 10^{10,68} \times E_0$

Lune : $E = 10^{5,08} \times E_0$

b. Elle a une énergie : $E > E_0$.

4. $m = -1,48$

5. $\frac{E}{E_0} = 10^{-12}$

6.a. 100 fois plus brillant.

b. $m < m' \Leftrightarrow -2,5 \log(E) + k' < -2,5 \log(E') + k' \Leftrightarrow \log(E) > \log(E') \Leftrightarrow E > E'$

51 $S_n = 0 - \log(2) - \log(3) - \dots - \log(n)$ donc $10^S = P_n$.

52 1.a. $B^3 = \frac{90^2}{9} = 900$ donc

$$3 \log(B) = \log(900) \Leftrightarrow \log(B) = \frac{1}{3} \log(900)$$

$$\Leftrightarrow B = 10^{\frac{1}{3} \log(900)}$$

$$10^{\frac{1}{3} \log(900)} \approx 9,65. \text{ Donc } B = 10 \text{ degrés Beaufort.}$$

b. $10^3 = \frac{v^2}{9} \Leftrightarrow v^2 = 9000 \Leftrightarrow v = 30\sqrt{10}$

soit environ 95 km.h⁻¹.

2. $B^3 = \frac{v^2}{9} \Leftrightarrow 3 \log(B) = \log\left(\frac{v^2}{9}\right)$

$$\Leftrightarrow 3 \log(B) = 2 \log(v) - \log(9)$$

$$\Leftrightarrow \log(v) = \frac{3}{2} \log(B) + \frac{1}{2} \log(9)$$

$$\Leftrightarrow \log(v) = \frac{3}{2} \log(b) + \log(3)$$

Comme $\log(3) \approx 0,477$ on en déduit :

$$\log(v) = \frac{3}{2} \log(B) + 0,477.$$

3. Une droite

4.a.

L1	L2	L3	L4	L5	4
1	0	0.477			
2	0.301	0.9285			
3	0.4771	1.1927			
4	0.6021	1.3801			
5	0.699	1.5255			
6	0.7782	1.6442			
7	0.8451	1.7446			
8	0.9031	1.8316			
9	0.9542	1.9084			
10	1	1.977			
11	1.0414	2.0391			
12	1.0792	2.0958			

b.

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP					
10 ^{L3} →L4					
{2.999162519 8.48291262 1}					
↵					

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP					
L1	L2	L3	L4	L5	5
1	0	0.477	2.9992		
2	0.301	0.9285	8.4829		
3	0.4771	1.1927	15.584		
4	0.6021	1.3801	23.993		
5	0.699	1.5255	33.532		
6	0.7782	1.6442	44.079		
7	0.8451	1.7446	55.545		
8	0.9031	1.8316	67.863		
9	0.9542	1.9084	80.977		
10	1	1.977	94.842		
11	1.0414	2.0391	109.42		
12	1.0792	2.0958	124.67		
Ls(1)=					

5.

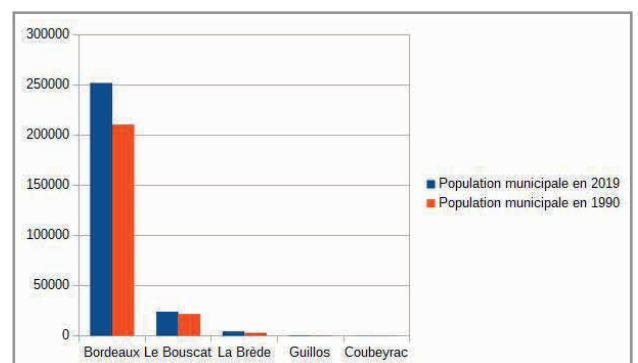
Degré Beaufort	Terme générique	v (km.h ⁻¹)	Observation
6	Vent Frais	39 à 49	Des lames se forment ; crêtes d'écume blanches plus étendues
3	Petite brise	9 à 23	Très petites vagues, écume d'aspect vitreux
10	Tempête	88 à 102	Très grosses lames à longues crêtes en panache ; déferlement en rouleaux intense et brutal
5	Bonne brise	24 à 44	Vagues modérées, allongées ; moutons nombreux.

Ateliers algorithmiques et numériques

Atelier 1 : Des petites et des grandes valeurs sur un même graphique

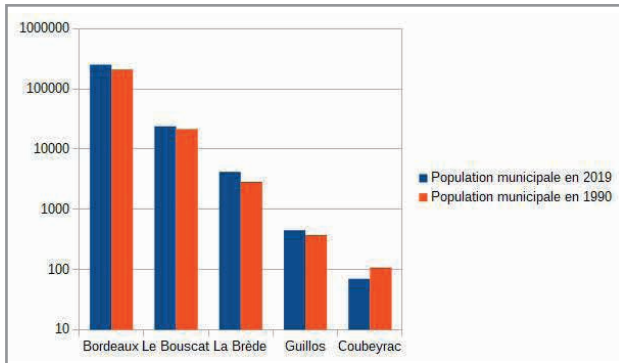
Objectif : découvrir l'utilité d'une échelle logarithmique dans le cadre d'une étude de population.

1.a. Voir le fichier C03_Atelier1_cor.



b. La population de Bordeaux est trop importante pour être visuellement comparable avec celles de Guillos et Coubeyrac.

2.a. Voir le fichier C03_Atelier1_cor.



b. Cette nouvelle échelle est mieux adaptée, on peut visualiser les 5 communes ainsi que l'évolution de leurs populations pendant 29 ans.

c. Le second graphique illustre mieux l'article car on constate que les populations des 4 premières villes ont augmenté alors que celle de Coubeyrac a diminué.

3.a. Pour passer d'une graduation à une autre on multiplie par 10.

b. En faisant le rapport de toutes les graduations visibles, on obtient :

$$\frac{100}{10} = \frac{1\,000}{100} = \frac{10\,000}{1\,000} = \frac{100\,000}{10\,000} = \frac{1\,000\,000}{100\,000} = 10.$$

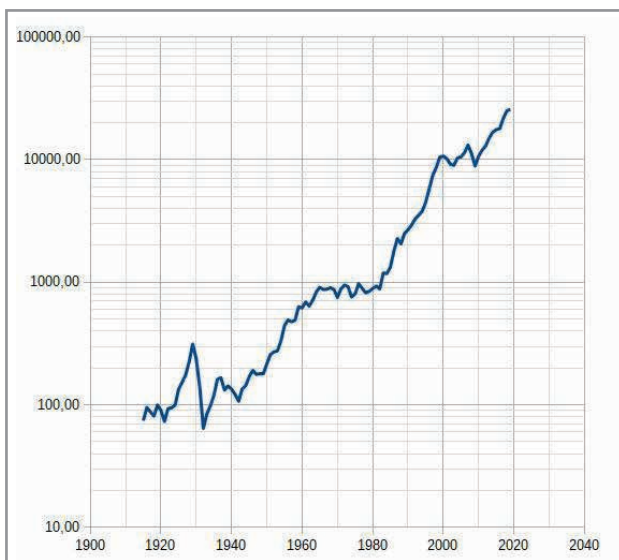
L'affirmation semble vraie pour les graduations de l'axe avec une échelle logarithmique.

Atelier 2 : Comparer des données économiques

Objectif : découvrir l'utilité d'une échelle logarithmique dans un cadre économique.

Le graphique de cette activité peut être mis en parallèle avec des graphiques boursiers.

1. Voir le fichier C03_Atelier1_cor.



En prenant une échelle logarithmique sur l'axe des ordonnées, on constate que la crise de 1929 a été plus grave que celle de 2008, l'évolution des valeurs boursières ayant beaucoup plus diminué de 1929 à 1931 que de 2008 à 2010.

2. On peut identifier deux autres périodes, celle de 1970 à 1980 (les deux chocs pétroliers de 1973 et 1979) et celle de 2000 avec l'éclatement de la bulle internet dans les pays de l'OCDE.

Atelier 3 : Construire une échelle logarithmique

Objectifs : construire une échelle logarithmique et lire des valeurs sur une échelle logarithmique.

1.a. Mise en place d'une situation de proportionnalité

$$\log(\text{distance réelle}) \times \frac{200}{\log(500)}$$

$$= \text{distance sur graphique semi-log}$$

$$\text{D'où } \log(300) \times \frac{200}{\log(500)} \approx 183,56 \text{ mm.}$$

b.

```
from math import log10
def echelle_log(x):
    return round(log10(x)*200/log10(500),2)
```

c. Il peut être intéressant de faire le travail en une seule fois au lieu d'appeler plusieurs fois la fonction echelle_log ; pour cela, on utilise une liste.

```
L=[1,2,10,20,50,150,200,250]
for i in L : print(echelle_log(i))
```

```
0.0
22.31
74.1
96.41
125.9
161.25
170.51
177.69
```

Distance réelle	1	5	10	20	50	150	200	250	300	500
Distance sur graphique semi-log	0	22,31	74,10	96,41	125,90	161,25	170,51	177,69	183,56	200

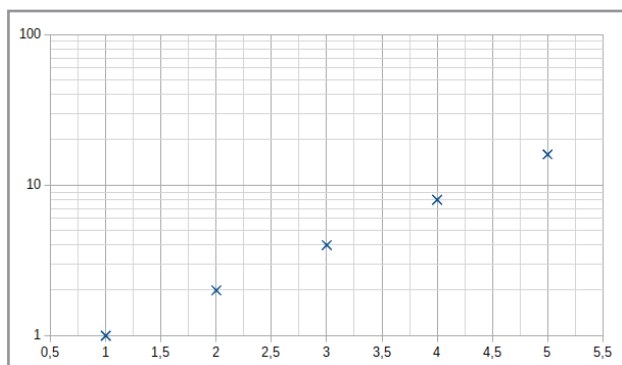


2.

Nom du point	P	N	M
Distance réelle	6 m	12 m	60 m

3.a.

n	0	1	2	3	4
u_n	1	2	4	8	16



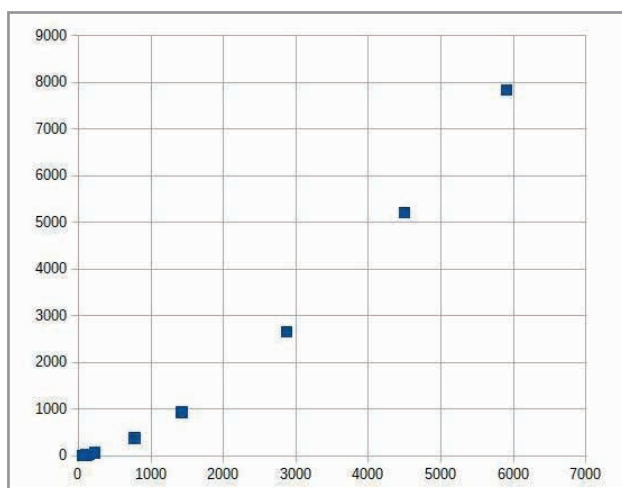
Dans un repère semi-logarithmique, où l'échelle logarithmique est placée en ordonnées, les points du nuage de points $(n; u_n)$ forment une droite.

Explications : $u_n = 2^n$ donc $\log(u_n) = \log(2^n) = n \log(2)$. $\log(u_n)$ est une fonction linéaire de n .

Atelier 4 : Troisième loi de Kepler

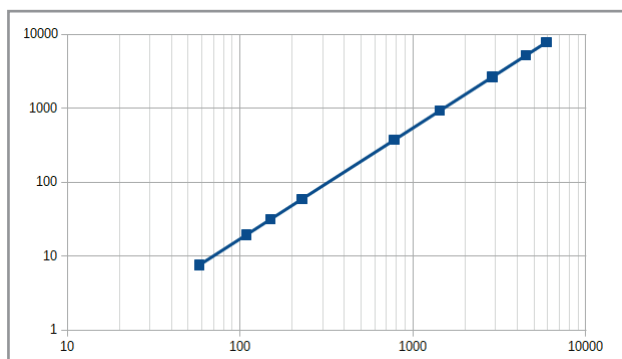
Objectif : découvrir et utiliser un graphique avec deux échelles logarithmiques.

1.a.



On ne peut pas conjecturer de lien clair, entre les deux grandeurs.

b.



Les points sont alignés dans un repère log-log (les deux échelles sont logarithmiques). On en déduit que $\log(P)$ est une fonction affine de $\log(L)$: $\log(P) = a \log(L) + b$.

c. Afin de déterminer les valeurs de a et b , il suffit de prendre deux points de la caractéristique, par exemple $(108,2; 19,41)$ et $(1\,198,4; 5\,203,43)$.

$$\text{Dans ce cas, on obtient : } a = \frac{\log\left(\frac{19,41}{5\,203,43}\right)}{\log\left(\frac{108,2}{1\,198,4}\right)} \approx 1,50$$

$$\text{et } b = \log(19,41) - a \log(108,2) \approx -1,76.$$

$$\text{Donc } \log(P) = 1,50 \log(L) - 1,76.$$

$$2. \log(P) = 1,50 \log(L) - 1,76 \Leftrightarrow P = L^{1,5} \times 10^{-1,76}.$$

Donc $P^2 = L^3 \times 10^{-3,52}$. On retrouve bien la troisième loi de Kepler puisque P^2 est proportionnel à L^3 .

Atelier 5 : La première table de logarithmes

Objectif : relier les propriétés algébriques du logarithme décimal avec un volet important de l'histoire des mathématiques.

1.a. Euler cherche à calculer $\log(5)$. « &proposons-nous de trouver le logarithme approché de 5 ».

b. « Comme ce nombre est renfermé entre les limites 1 & 10, dont les logarithmes sont 0 & 1... »

Euler sait que $1 < 5 < 10$ donc

$$\log(1) < \log(5) < \log(10) \Leftrightarrow 0 < \log(5) < 1.$$

$$2. \log(a) = \log(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = 2 \log(\sqrt{a}) \text{ d'où}$$

$$\log(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \log(a).$$

$$\log(\sqrt{ab}) = \log(\sqrt{a}) + \log(\sqrt{b}) = \frac{1}{2} \log(a) + \frac{1}{2} \log(b)$$

3.a. $\sqrt{1 \times 10} = \sqrt{10} \approx 3,1622777$, on en déduit que : $\sqrt{10} < 5 < 10$.

$$\text{D'où } \log(\sqrt{10}) < \log(5) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log(10) < \log(5) < 1.$$

Avec les lettres de l'énoncé, on peut écrire : $\sqrt{AB} < 5 < B$ d'où $\frac{\log(A) + \log(B)}{2} < \log(5) < \log(B)$, écriture qui peut paraître lourde mais qui va permettre aux élèves d'enclencher le processus.

b. $C = \sqrt{AB} = \sqrt{10}$ donc $\sqrt{C \times B} \approx 5,623413$ donc $C < 5 < \sqrt{CB}$ d'où $\log(C) < \log(5) < \log(\sqrt{CB})$.

Comme $C = \sqrt{AB}$, on sait que

$$\log(C) = \frac{\log(A) + \log(B)}{2} = \frac{1}{2}$$

(moyenne arithmétique de $\log(A)$ et $\log(B)$)

$$\log(\sqrt{CB}) = \frac{\log(C) + \log(B)}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4} = 0,75$$

c. On retrouve ces valeurs dans les premières lignes du tableau d'Euler.

Ainsi $1A$ signifie $\log(A)$, $1B$ signifie $\log(B)$ et ainsi de suite.

$A = 1$	$\log(A) = 0$	
$B = 10$	$\log(B) = 1$	$C = \sqrt{AB}$
$C = 3,1622777$ (3°a)	$\log(C) = 0,5$	$D = \sqrt{CB}$
$D = 5,623413$ (3°b)	$\log(D) = 0,75$	...

4.a. Elle permet de déterminer le nouvel encadrement de 5. On a $A2 < 5 < B2$ puis on calcule $\sqrt{A2B2}$ (qui se trouve dans la cellule E2). Si ce résultat est plus petit que 5, il remplacera le contenu de A2, c'est-à-dire se trouvera dans la cellule A3. D'où l'instruction de la cellule A3.

Si $\sqrt{A2B2} < 5$, alors le nouvel encadrement de 5 est $A3 < 5 < B2$.

b. Elle permet de remplacer le logarithme de la nouvelle valeur qui définit l'encadrement de log(5).

Comme A2 a été remplacé par $A3 = \sqrt{A2B2}$ lorsque $A3 < 5$ alors il faut remplacer log(A3) par

$\log(\sqrt{A2B2}) = \frac{\log(A2) + \log(B2)}{2}$ c'est-à-dire la moyenne arithmétique de log(A2) et log(B2).

c. $B3 := \text{Si}(E2 > 5; E2; B2)$ et $D3 := \text{Si}(E2 > 5; F2; D2)$

d. Voir le fichier **C03_Atelier5_cor**.

Les valeurs sont identiques à celles proposées par Euler.

e. À 10^{-7} près, on retrouve la valeur approchée d'Euler : 0,698970 (cellule C26 ou D26). À l'époque, Euler ne disposait pas d'outil pour calculer la racine carrée d'un nombre, il devait extraire celle-ci à la main.

5. La traduction algorithmique (langage naturel) de l'algorithme précédemment utilisé est :

$A \leftarrow 1$

$B \leftarrow 10$

$IA \leftarrow 0$

$LB \leftarrow 1$

Tant que $LB - IA > 10^{-7}$:

Si $\sqrt{AB} > 5$:

$B \leftarrow \sqrt{AB}$

$LB \leftarrow \frac{IA + LB}{2}$

Sinon :

$A \leftarrow \sqrt{AB}$

$IA \leftarrow \frac{IA + LB}{2}$

Fin si

Fin tant que

En Python, il est intéressant de garder toutes les valeurs approchées successives, il faudra créer deux listes, l'une pour les valeurs de A, l'autre pour les valeurs de B.

VERSION 1 (sans les listes, en utilisant une simple traduction de l'algorithme en langage naturel)

```
from math import sqrt
A=1
B=10
IA=0
LB=1
while LB-IA > 10**(-7):
    if sqrt(A*B)>5:
        B=sqrt(A*B)
        LB=(IA+LB)/2
    else:
        A=sqrt(A*B)
        IA=(IA+LB)/2
```

L'appel de IA ou LB permet d'obtenir une valeur approchée à 10^{-7} près de log(5).

VERSION 2 (en utilisant les listes pour conserver les valeurs successives de A, B, log(A) et log(B))

```
from math import sqrt
a,b,la,lb=1,10,0,1
A,B,IA,IB=[1],[10],[0],[1]
while lb-la > 10**(-7):
    if sqrt(a*b)>5:
        b=sqrt(a*b)
        B.append(b)
        lb=(la+lb)/2
        IB.append(lb)
    else:
        a=sqrt(a*b)
        A.append(a)
        la=(la+lb)/2
        IA.append(la)
```

L'appel de A, B, IA ou IB permet de retourner les listes des valeurs de A, B, log(A) et log(B) respectivement.

Être prêt pour le bac

53 Q1. $\log\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right) = \log\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \log(2)$

Plusieurs réponses sont envisageables.

Q2. $x = 10^5$

Q3. $\log(7,2)$

Q4. $P = -\log(0,2)$

Q5. $f(10^3) = 9$

Q6. $G = 10^{\frac{L}{20}}$

Q7. $f(2 \log(3)) = 18$

Q8. $c = \frac{5}{9}$

Q9. $x \geq \frac{\log(0,5)}{\log(0,8)}$

Q10. $c = \frac{a^3}{b}$

54 1. $150 + 150 \times 1,0072 = 301,08 \text{ €}$

2. $150 + 301,08 \times 1,0072 = 453,25 \text{ €}$

3. $c = c \times 1,0072 + 150$

4. Chaque année, les 150 € initiaux rapportent 0,72 %, d'où le $150 \times 1,0072^n$ (sur n années).

Les 150 € placés l'année suivante rapportent 0,72 % sur $(n-1)$ années, d'où le produit $150 \times 1,0072^{n-1}$.

Et ainsi de suite jusqu'aux derniers 150 € versés à la date d'anniversaire.

5. C'est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison 1,0072 et de premier terme 150 donc $C_n = 150 \times \frac{1 - 1,0072^{n+1}}{1 - 1,0072}$

6. On peut appliquer la formule précédente avec $n = 18$ et trouver $3\,042,44 > 1\,800$ donc oui Lalie aura assez d'argent.

Chapitre 3 • Fonction logarithme décimal

Remarque : $150 \times 18 = 2\,700 > 1\,800$ donc même sans intérêt, le financement était réalisable !

7. $150 \times \frac{1 - 1,0072^{n+1}}{1 - 1,0072} > 4\,000$ soit $1 - 1,0072^{n+1} < -0,192$

On trouve $n > 23,48$ donc Lalie aura 24 ans.

55 1.a. 10 375 €

b. $10\,000 \times 1,0375^2 = 10\,764,06$ €

c. $B_3 = B_2 \times 1,0375$

d. $C_n = 10\,000 \times 1,0375^n$

e. Dans environ 22 ans (il aura alors 22 477 €) ; et s'il attend un an de plus, il aura 23 319,89 €.

2. Non, car $0,31 \times 12 = 3,72$ et $3,72 < 3,75$.

56 1.

x	0,002 3	123,45	0,24	3 500
$\log(x)$	-2,638 3	2,091 5	-0,619 8	3,544 1
Écriture scientifique de x	$2,3 \times 10^{-3}$	$1,234\,5 \times 10^2$	$2,4 \times 10^{-1}$	$3,5 \times 10^3$
$\lfloor \log(x) \rfloor$	-3	2	-1	3

2. On peut conjecturer que $\lfloor \log(x) \rfloor$ est égal à l'exposant dans l'écriture scientifique de x .

3.a. $n = \log\left(\frac{x}{a}\right)$

b. $10^n \leq x < 10^{n+1}$

$\lfloor \log(x) \rfloor = n$

L'exposant dans l'écriture scientifique d'un réel est donné par la partie entière de son logarithme décimal.

c. $\lfloor \log(7,12^{50}) \rfloor = 42$ donc $7,12^{50} = a \times 10^{42}$ où $a \in [1; 10[$

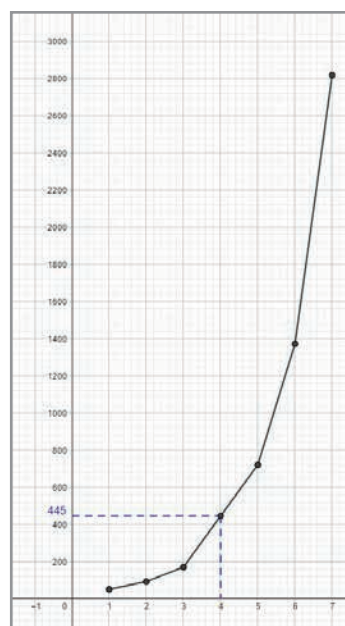
$\lfloor \log(82,35^{2\,019}) \rfloor = \lfloor 2\,019 \log(82,35) \rfloor = 3\,867$ donc

$82,35^{2\,019} = b \times 10^{3\,867}$ où $b \in [1; 10[$.

57 1.

n	1	2	3	5	6	7
$d_n - d_0$	50,29	91,69	169,99	720,39	1 371,1	2 817,1

2.a.



Graphiquement on lit $d_4 - d_0 = 445$ donc $d_4 = 502,91$.

3.a. Le nuage de point semble être rectiligne, on peut en déduire que $\log(d_n - d_0)$ est une fonction affine de n .

b. Coordonnées du point de rang 1 : $(1; \log(50,29))$ et rang 7 : $(7; \log(2\,817,10))$.

Comme les points semblent alignés, on en déduit qu'il existe deux réels a et b tels que $n = a \log(d_n - d_0) + b$

$$a = -\frac{6}{\log\left(\frac{50,29}{2\,817,10}\right)} \approx 3,43$$

$$b = 1 - a \log(50,29) \approx -4,84$$

c. $n = a \log(d_n - d_0) + b \Leftrightarrow 10^{\frac{n}{a}} \times 10^{\frac{-b}{a}} + d_0 = d_n$ d'où $d_n = 25,7 \times 10^{0,29n} + 57,91$

4.a. Pour $n = 4$, on trouve :

$$d_4 = 25,7 \times 10^{1,16} + 57,91 \approx 429,39$$

b. 4 %.

c. $x = \frac{1}{0,29} \log\left(\frac{4\,504 - 57,91}{25,7}\right) \approx 7,72$

d. On fait une erreur de 3,5 %.

Chapitre 4 • Fonction inverse

Activités du cours

1 Fonction inverse, sa dérivée et ses variations

Objectifs : découvrir la fonction inverse et déterminer sa dérivée en utilisant le taux de variations.

1.a. $a \times f(a) = OA \times OC = 1$ car il s'agit de l'aire du rectangle OABC.

b. Si $a = 0$, $a \times f(a) = 0 \neq 1$. L'égalité n'est pas vérifiée pour $a = 0$.

c. Pour $a \neq 0$, $a \times f(a) = 1$ donc $f(a) = \frac{1}{a}$ pour tout $a \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

2.a. Pour $a \neq 0$, $h \neq 0$ et $a + h \neq 0$:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{1}{a+h} \times \frac{a}{a} - \frac{1}{a} \times \frac{a+h}{a+h}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{a - (a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{a(a+h)h} = -\frac{1}{a(a+h)}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$$

b. Lorsque h tend vers 0, $a + h$ tend vers a .

Donc $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers $-\frac{1}{a^2}$.

3. Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

À votre tour !

1.a. Pour tout $x \neq 0$:

$$f'(x) = -\frac{1}{4} + \frac{36}{x^2} = \frac{-(x^2 - 144)}{4x^2} = \frac{-(x+12)(x-12)}{4x^2}$$

b. Le sens de variation de f est donné par le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-12	0	12	$+\infty$
$x-12$	-	-	-	0	+
$x+12$	-	0	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+	+	0
f					

2.a. Pour tout $x \in [1; 10]$,

$$C'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$$

x	0	3	10
$C'(x)$	-	0	+
C			

b. Le coût moyen minimal est de 10 000 euros. Il est atteint pour 300 litres.

2 Comportement aux bornes de l'ensemble de définition

Objectif : découvrir le comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition.

1.a.

x	1	5	10	100	1 000	10^6
$f(x)$	1	0,2	0,1	0,01	0,001	0,000001

b. Il semble que $f(x)$ prenne des valeurs de plus en plus proches de 0 lorsque x devient très grand.

2.a.

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
$f(x)$	1	2	5	10	100	1 000

b. Il semble que $f(x)$ prenne des valeurs de plus en plus grandes lorsque x s'approche de 0 tout en restant positif.

3. On peut conjecturer que $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus grandes, mais négatives, lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 0 tout en restant négatif.

À votre tour !

En observant les valeurs prises par ces fonctions, on obtient :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$
et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$
et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$
et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$
et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$
et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

Exercices - Échauffement

1 Réponses en fin de manuel.

2 Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

a. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

b. $f'(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$

Chapitre 4 • Fonction inverse

c. $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$

d. $f'(x) = 6x - 5 - \frac{1}{x^2}$

e. $f'(x) = -6x^2 + 8x - \frac{1}{x^2}$

3 Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

a. $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$

b. $f'(x) = 2 - \frac{3}{x^2}$

c. $f'(x) = -6x + \frac{2}{x^2}$

d. $f'(x) = 14x - 2 - \frac{4}{x^2}$

e. $f'(x) = 3x^2 - 10x + 1 + \frac{1}{x^2}$

4 1. $f(1) = -5, f(5) = -1, f'(1) = 5, f'(5) = \frac{1}{5}$

2. $T_1 : y = 5(x-1) - 5$ donc $T_1 : y = 5x - 10$

et $T_5 : y = \frac{1}{5}(x-5) - 1$ donc $T_5 : y = \frac{1}{5}x - 2$.

5 1. $f(-2) = -1, f(1) = 5, f(4) = 2, f'(-2) = -1, f'(1) = -4$
et $f'(4) = -\frac{1}{4}$.

2. $T_{-2} : y = -1(x+2) - 1$ donc $T_{-2} : y = -x - 3$,

$T_1 : y = -4(x-1) + 5$ donc $T_1 : y = -4x + 9$

et $T_4 : y = -\frac{1}{4}(x-4) + 2$ donc $T_4 : y = -\frac{1}{4}x + 3$.

6 $f(-1) = -1$ et $f'(-1) = -1$ donc $T_{-1} : y = -x - 2$.

$f(2) = \frac{1}{2}$ et $f'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$ donc $T_2 : y = -\frac{1}{4}x + 1$.

7 a. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f(1) = 4$ et $f'(1) = -1$.

$T_1 : y = -x + 5$

b. $f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$

$f(-1) = -3$ et $f'(-1) = 1$.

$T_{-1} : y = x - 2$

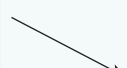
c. $f'(x) = 8x - 2 - \frac{1}{x^2}$

$f(2) = \frac{25}{2}$ et $f'(2) = \frac{55}{4}$.

$T_2 : y = \frac{55}{4}x - 15$

8 a. Pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$ et $f'(x) < 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
f			

b. Pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$, $g'(x) = \frac{1}{x^2}$.

Pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$ et $f'(x) > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+		+
g			

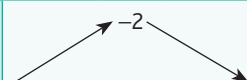
9 1. Pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

2. $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

3. Pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$.

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$x-1$	$-$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f						

10 Réponses en fin de manuel.

11 a. 5 b. 3 c. 1 d. 2 e. 4

12 1. $D_f = \mathbb{R}^*$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

13 $f \rightarrow \mathbb{C}_2$; $g \rightarrow \mathbb{C}_1$; $h \rightarrow \mathbb{C}_4$ et $k \rightarrow \mathbb{C}_3$.

14 1.a.

x	-1000	-500	-200	-100	-50	50	100	200	500	1000
$g(x)$	3,002	3,004	3,01	3,02	3,04	2,96	2,98	2,99	2,996	2,998

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 3$.

2.a.

x	-1	-0,5	-0,1	-0,01	0,01	0,1	0,5	1
$g(x)$	5	7	23	203	-197	-17	-1	1

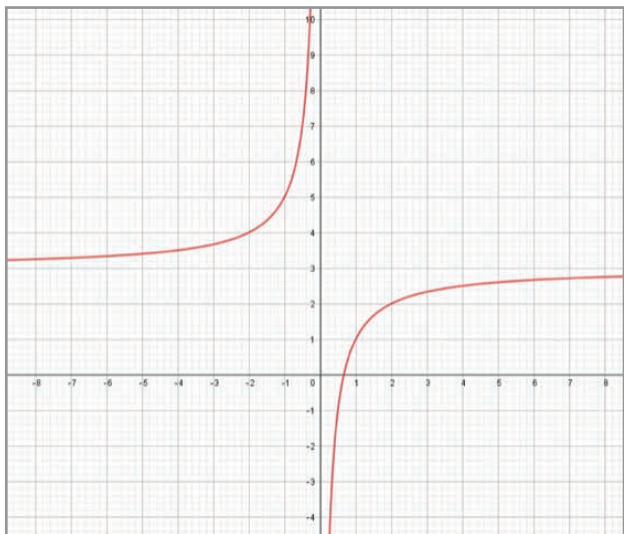
b. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$.

Les droites d'équation $y = 3$ et $x = 0$ sont asymptotes respectivement horizontale et verticale.

3.

x	-8	-4	-2	-1	-0,5	0,5	1	2	4	8
$g(x)$	3,25	3,5	4	5	7	-1	1	2	2,5	2,75

4.



Exercices - Entraînement

15 a. $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$; $f(-1) = 1$ et $f'(-1) = -4$
donc $T_{-1} : y = -4x - 3$.

b. $f'(x) = \frac{5}{x^2}$; $f(2) = -\frac{11}{2}$ et $f'(2) = \frac{5}{4}$
donc $T_2 : y = \frac{5}{4}x - 8$.

c. $f'(x) = -2 - \frac{4}{x^2}$; $f(1) = 5$ et $f'(1) = -6$
donc $T_1 : y = -6x + 11$.

d. $f'(x) = 3 + \frac{2}{x^2}$; $f(3) = \frac{46}{3}$ et $f'(3) = \frac{29}{9}$
donc $T_3 : y = \frac{29}{9}x + \frac{17}{3}$.

16 a. $f'(x) = -4x + 3 + \frac{2}{x^2}$; $f(-2) = -13$ et $f'(-2) = \frac{23}{2}$
donc $T_{-2} : y = \frac{23}{2}x + 10$.

b. $f'(x) = \frac{8}{3}x - \frac{2}{3} - \frac{2}{x^2}$; $f(-1) = 0$ et $f'(-1) = -\frac{16}{3}$
donc $T_{-1} : y = -\frac{16}{3}x - \frac{16}{3}$.

c. $f'(x) = \frac{12}{7}x^2 - \frac{2}{7} - \frac{2}{x^2}$; $f(1) = \frac{16}{7}$ et $f'(1) = -\frac{4}{7}$
donc $T_1 : y = -\frac{4}{7}x + \frac{20}{7}$.

17 1. $f(4) = -7$; $f(12) = -3$; $f'(4) = 2$; $f'(12) = 0$.

2. $T_4 : y = 2x - 15$ et $T_{12} : y = -3$.

18 1. $f(-3) = -2$; $f(0) = 4$; $f(2) = 3$; $f'(-3) = -4$;
 $f'(0) = -1$ et $f'(2) = -\frac{1}{4}$.

2. $T_{-3} : y = -4x - 14$, $T_0 : y = -x + 4$ et $T_2 : y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

19 1. $f'(x) = 2x$ donc l'équation réduite de la tangente T en a est $T : y = 2ax - a^2 + 3$.

2. $g'(x) = -\frac{2}{x^2}$ donc l'équation réduite de la tangente T' en a est $T' : y = -\frac{2}{a^2}x + \frac{4}{a}$.

3.a. T et T' étant parallèles, les deux coefficients directeurs sont égaux :

$$2a = -\frac{2}{a^2} \Leftrightarrow a^3 = -1$$

b. $a^3 = -1 \Leftrightarrow a = -1$

4. $T : y = -2x + 2$ et $T' : y = -2x - 4$

20 Réponses en fin de manuel.

21 1. Pour tout réel x non nul, $g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$.

2. Pour tout réel x non nul, $x^2 > 0$ et $x^2 + 1 > 1 > 0$ donc $g'(x) > 0$.

3. La fonction g est croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

22 1. Pour tout réel x non nul,

$$h'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2} = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x^2}.$$

2. et 3. $x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ et $x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$.

Les variations de la fonction h sont données par le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$x-\sqrt{2}$	-	-	-	0	+	
$x+\sqrt{2}$	-	0	+	+	+	
$h'(x)$	+	0	-	-	0	+
h	$\nearrow h(-\sqrt{2}) \searrow$			$\searrow h(\sqrt{2}) \nearrow$		

23 1. Pour tout $\neq 0$,

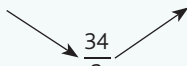
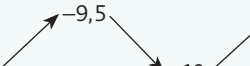
$$f'(x) = \frac{3}{2} \times 2x - 7 \times 1 - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3x - 7 + \frac{4}{x^2}.$$

2. $f'(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 4}{x^2}$

$$(x-2)(x-1)(3x+2) = (x^2 - 3x + 2)(3x+2) = 3x^3 + 2x^2 - 9x^2 - 6x + 6x + 4 = 3x^3 - 7x^2 + 4$$

Donc $f'(x) = \frac{(x-2)(x-1)(3x+2)}{x^2}$.

3. Les variations sont données par le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	0	1	2	$+\infty$
$x-1$	-	-	-	0	+	+
$x-2$	-	-	-	-	0	+
$3x+2$	-	0	+	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+	+	0	+
f						

Chapitre 4 • Fonction inverse

24 1. $2x^3 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \approx 1,14$

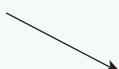
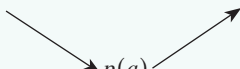
donc $a = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \approx 1,14$.

2.a. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$$l'(x) = 12x - \frac{18}{x^2} = \frac{12x^3 - 18}{x^2} = \frac{6(2x^3 - 3)}{x^2}.$$

b. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$.

Pour $x > \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$, $2x^3 - 3 > 0$ car la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	a	$+\infty$
$p'(x)$	-		0	+
p				
			$p(a)$	

25 1.a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = 4x + 1$.

$$4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$\frac{7}{8}$		

b. D'après le tableau de variations, $\frac{7}{8}$ est le minimum de g sur $\mathbb{R}$.

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) \geq \frac{7}{8} > 0$.

2.a. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $h'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2}$.

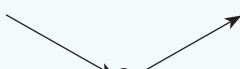
b. Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$(x-1)g(x) = (x-1)(2x^2 + x + 1) = 2x^3 - x^2 - 1.$$

Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $h'(x) = \frac{(x-1)g(x)}{x^2}$.

c. $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-		0	+
h				
			2	

26 Réponses en fin de manuel.

27 1. $(x-1)(x+1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1) = x^4-1$

2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

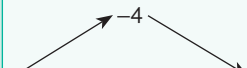
$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+
x^4-1	+	0	-	+

3.a. et b. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^4 - 3}{x^2} = \frac{3(x^4 - 1)}{x^2}.$$

c.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f						
	-4			4		

28 1. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $(x-3)(x+3) = x^2 - 9$.

$$(x-5)(x+5) = x^2 - 25$$

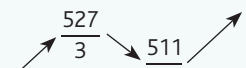
2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $(x^2 - 9)(x^2 - 25) = x^4 - 34x^2 + 225$.

3.a. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = x^2 - 34 + \frac{225}{x^2} = \frac{x^4 - 34x^2 + 225}{x^2} = \frac{(x^2 - 9)(x^2 - 25)}{x^2}$$

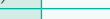
$$f'(x) = \frac{(x-3)(x+3)(x-5)(x+5)}{x^2}$$

b. et c.

x	$-\infty$	-5	-3	0	3	5	$+\infty$
$x-3$	-	-	-	-	0	+	+
$x+3$	-	-	0	+	+	+	+
$x-5$	-	-	-	-	-	0	+
$x+5$	-	0	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+	+	+
f							
				$\frac{527}{3}$			$\frac{-497}{3}$

29 1.a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = 2x + 1$.

$$2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-0,5$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g			
		$0,75$	

b. 0,75 est le minimum de g sur $\mathbb{R}$ donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) \geq 0,75 > 0$.

2. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $h'(x) = 2x - 1$.

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	0,5	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
h			

0,75 est le minimum de h sur $\mathbb{R}$ donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $h(x) \geq 0,75 > 0$.

3.a. Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}$.

b. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) \times h(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
 $g(x) \times h(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1$
 $= x^4 + x^2 + 1$

Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{g(x) \times h(x)}{x^2}$.

c. Or, pour tout x de $\mathbb{R}$, $h(x) > 0$, $g(x) > 0$ et $x^2 > 0$ donc pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f'(x) > 0$.

Donc la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$ et sur $]-\infty; 0[$.

30 1. $p(1) = 92 - \frac{80}{1} = 12\%$ of the target population after one week.

$p(5) = 92 - \frac{80}{5} = 76\%$ of the target population after five weeks.

2. $p'(x) = \frac{80}{x^2}$

3. $p'(x) > 0$ therefore p increases on $]0; +\infty[$. The target population becoming aware is increasing week after week.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 92 < 95$. This goal can't be reached.

31 Partie A

1.a. Le coût de production pour 25 fours est égal à 29 600 € et pour 70 fours, il est de 37 000 €.

b. Les productions correspondant à un coût unitaire de 32 500 € sont 20 fours et 61 fours.

c. Le coût unitaire minimum de production est 28 000 € pour 35 fours.

2.a. Les productions assurant un bénéfice supérieur à 350 000 € sont dans l'intervalle $]30; 70[$.

b. Le bénéfice maximum est égal à 510 000 € pour une production de 50 fours.

c. Le bénéfice obtenu pour 35 fours est égal à 420 000 €.

Partie B

1.a. et b. Pour tout x de $[20; 80]$,

$$C'(x) = 400 - \frac{490\,000}{x^2} = \frac{400x^2 - 490\,000}{x^2}$$

$$= \frac{400}{x^2}(x^2 - 1225) = \frac{400}{x^2}(x - 35)(x + 35)$$

c. Pour tout x de $[20; 80]$, $x + 35 > 0$.

$x - 35 = 0 \Leftrightarrow x = 35$

x	20	35	80
$C'(x)$	-	0	+
C	32 500	28 000	38 125

d. Le coût unitaire minimum de production est 28 000 € pour 35 fours.

2. $C_T(x) = x \times C(x) = 400x^2 + 490\,000$.

3. Pour tout x de $[20; 80]$, $R(x) = 40\,000x$.

4.a. Pour tout x de $[20; 80]$,

$$B(x) = R(x) - C_T(x) = 40\,000x - 400x^2 - 490\,000$$

$$= -400x^2 + 40\,000x - 490\,000.$$

b. Pour tout x de $[20; 80]$, $B'(x) = -800x + 40\,000$.
 $-800x + 40\,000 = 0 \Leftrightarrow x = 50$

x	20	50	80
$B'(x)$	+	0	-
B	150 000	510 000	150 000

c. Résultats cohérents avec la partie A.

32 Partie A

1. Pour tout x de $[1; 30]$,

$$f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2 + 60x + 121}{x} = x + 60 + \frac{121}{x}.$$

2.a. et b. Pour tout x de $[1; 30]$,

$$f'(x) = 1 - \frac{121}{x^2} = \frac{x^2 - 121}{x^2} = \frac{(x - 11)(x + 11)}{x^2}.$$

3. Pour tout x de $[1; 30]$, $x + 11 > 0$.

$x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = 11$

x	1	11	30
$f'(x)$	-	0	+
f	182	82	2 821 / 30

4. Le coût moyen minimal de production est 82 € pour 11 m³ de détergent produit.

Partie B

1. Pour tout x de $[1; 30]$,

$$B(x) = 110x - (x^2 + 60x + 121) = -x^2 + 50x - 121.$$

2. Pour tout x de $[1; 30]$, $B'(x) = -2x + 50$.

$-2x + 50 = 0 \Leftrightarrow x = 25$

x	1	25	30
$B'(x)$	+	0	-
B	-72	504	479

3. Le bénéfice maximum est égal à 504 € pour 25 m³ de détergent produit.

33 1. $V = 2xy = 500$ donc $y = \frac{250}{x}$ pour $x > 0$.

$$2. S(x) = 2xy + 4x + 4y = 2x \times \frac{250}{x} + 4x + 4 \times \frac{250}{x}$$

$$= 500 + 4x + \frac{1\,000}{x}.$$

$$3. S'(x) = 4 - \frac{1\,000}{x^2} = \frac{4x^2 - 1\,000}{x^2}$$

$$= \frac{4(x - \sqrt{250})(x + \sqrt{250})}{x^2}.$$

Chapitre 4 • Fonction inverse

4. Pour tout x de $]0; +\infty[$, $x + \sqrt{250} > 0$.

x	0	$\sqrt{250}$	$+\infty$
$S'(x)$	-	0	+
S			

5. Les dimensions de la boîte qui minimisent l'aire sont : 11,2 ; 22,3 et 2.

34 1. $f(1) = 20$ et $f(9) = 20$. Le coût total de fabrication pour 1 tonne et 9 tonnes de produit est égal à 20 milliers d'euros.

2. Pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = 2 - \frac{18}{x^2} = \frac{2x^2 - 18}{x^2} = \frac{2(x-3)(x+3)}{x^2}.$$

3.a. Pour tout x de $]0; +\infty[$, $x + 3 > 0$.

x	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f			

b. La seconde courbe représente la fonction f .

4.a. Par lecture graphique, on doit produire moins de 1 tonne ou plus de 9 tonnes de produit pour que le coût dépasse 20 000 €.

b. Le coût total est minimal pour 3 tonnes de produit et il est de 12 000 €.

35 1. La durée du trajet est égale à $\frac{1000}{v}$.

2. La consommation en L de carburant est égale à :

$$\left(\frac{256}{30} + \frac{v^2}{750}\right)\left(\frac{1000}{v}\right) = \frac{25600}{3v} + \frac{4}{3}v.$$

$$P(v) = 1,5 \times \left(\frac{25600}{3v} + \frac{4}{3}v\right) = \frac{12800}{v} + 2v$$

3.a. $P'(v) = 2 - \frac{12800}{v^2} = \frac{2v^2 - 12800}{v^2} = \frac{2(v-80)(v+80)}{v^2}$

b.

x	0	80	120
$P'(x)$	-	0	+
P			

c. La vitesse moyenne de conduite pour diminuer le coût est égale à 80 km · h⁻¹.

36 1. $6\,000 \times 5 = 30\,000$ m² au minimum.

2. $xy = 30\,000$ d'où $y = \frac{30\,000}{x}$.

3. $l(x) = 2x + \frac{30\,000}{x}$

$$l'(x) = 2 - \frac{30\,000}{x^2} = \frac{2x^2 - 30\,000}{x^2} = \frac{2(x^2 - 15\,000)}{x^2}$$

$$= \frac{2(x^2 - \sqrt{15\,000}^2)}{x^2} = \frac{2(x - \sqrt{15\,000})(x + \sqrt{15\,000})}{x^2}$$

4.

x	0	$\sqrt{15\,000}$	$+\infty$
$l'(x)$	-	0	+
l			

5. $x = \sqrt{15\,000} \approx 122,5$ m et $y = \frac{30\,000}{\sqrt{15\,000}} \approx 244,9$ m.

37 1. $g(1) = 80$ donc le prix d'un litre d'huile essentielle est de 80 €.

2.a. g est une fonction linéaire et est donc représentée par une droite, c'est-à-dire D . C représente f .

b. Sur environ $[72; 127]$.

c. Avec la précision permise par le graphique : pour $x = 100$.

3.a. $C(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - 120x + 9\,216}{x} = x - 120 + \frac{9\,216}{x}$

alors : $C'(x) = 1 - \frac{9\,216}{x^2} = \frac{x^2 - 9\,216}{x^2} = \frac{x^2 - 96^2}{x^2}$

$$= \frac{(x-96)(x+96)}{x^2}.$$

b.

x	60	96	140
$C'(x)$	-	0	+
C			

c. Le coût moyen est minimal pour 96 litres d'huile essentielle.

38 Réponses en fin de manuel.

39 Le résultat est obtenu en mettant en rapport le signe de l'une des fonctions et les variations de l'autre.

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
$f_1(x)$	+	0	-	-	0	+

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f_2(x)$					

$\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction dérivée de la fonction et $\mathcal{C}_2$ est la courbe représentative de la fonction.

40 a. $D_g =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

41 a. $D_h =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

42 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = +\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} j(x) = 10$

5. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} k(x) = -\infty$

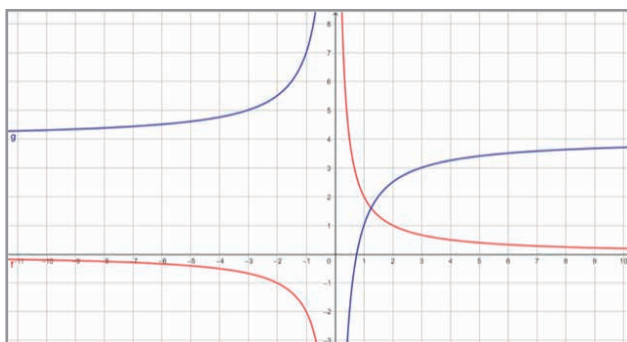
43 $f \rightarrow \mathbb{C}_3; g \rightarrow \mathbb{C}_2; h \rightarrow \mathbb{C}_1$.

44 1.

x	-5	-4	-2	-1	-0,5	-0,2	0,2	0,5	1	2	4	5
f(x)	-0,4	-0,5	-1	-2	-4	-10	10	4	2	1	0,5	0,4

2.

x	-10	-6	-3	-1	-0,5	-0,2	0,2	0,5	1	3	6	10
g(x)	4,3	4,5	5	7	10	19	-11	-2	1	3	3,5	3,7



45 Réponses en fin de manuel.

Exercices - Perfectionnement

46 Partie A

1. Pour tout $q \in [10; 100]$:

$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{3q^2 + 40q + 2700}{q} = \frac{3q^2}{q} + \frac{40q}{q} + \frac{2700}{q} = 3q + 40 + \frac{2700}{q}.$$

Pour tout $q \in [10; 100]$: $C'_M(q) = 3 - \frac{2700}{q^2}$.

2.a. et b. En mettant au même dénominateur, on obtient :

$$C'_M(q) = \frac{3q^2 - 2700}{q^2} = \frac{3(q^2 - 900)}{q^2} = \frac{3(q^2 - 30^2)}{q^2} = \frac{3(q - 30)(q + 30)}{q^2}.$$

3.

q	10	30	100
$C'_M(q)$	-	0	+
C_M	340	220	367

4. Le coût moyen minimum est de 220 € ; il est atteint pour une production de 30 tonnes de produit.

Partie B

1. $C_m(20) = C(21) - C(20) = 163$; lorsque l'on fabrique 20 tonnes de produit, le surcoût pour une tonne supplémentaire s'élève à 163 €.

2.

$$\begin{aligned} C_m(q) &= C(q+1) - C(q) \\ &= 3(q+1)^2 + 40(q+1) + 2700 - (3q^2 + 40q + 2700) \\ &= 3(q^2 + 2q + 1) + 40q + 40 + 2700 - 3q^2 - 40q - 2700 \\ &= 6q + 43 \end{aligned}$$

3. $C'(q) = 6q + 40$. Les deux expressions sont très proches : on prend d'ailleurs très souvent C' comme approximation du coût marginal.

Partie C

Oui. L'intersection des deux courbes a pour abscisse $x = 30$, qui correspond à la quantité pour laquelle le coût moyen est minimal.

47 Partie A

1.a. $C(0) = 400$ les frais fixes de l'artisan s'élèvent donc à 400 €.

b. $C(20) = 20^2 + 30 \times 20 + 400 = 1400$ € de coût pour 20 vases fabriqués.

c. $\frac{1400}{20} = 70$ € par vase.

2. Pour tout $x \geq 1$, $f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2 + 30x + 400}{x}$.

3.a. Pour tout $x \geq 1$, $f'(x) = 1 - \frac{400}{x^2}$.

b. Pour tout $x \geq 1$,

$$f'(x) = \frac{x^2 - 400}{x^2} = \frac{x^2 - 20^2}{x^2} = \frac{(x - 20)(x + 20)}{x^2}.$$

c.

x	1	20	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	431	70	

d. Il faut produire 20 vases pour que le coût moyen unitaire soit minimal ; ce coût s'élève alors à 70 €.

4.a.

x	5	10	15	20	30	40	50	100	200	500	1 000	10 000
f(x)	115	80	72	70	73	80	88	134	232	531	1 030	10 030

b. Les valeurs prises par $f(x)$ deviennent de plus en plus grandes lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes. Le coût moyen unitaire devient de plus en plus grand.

Partie B

1. $f(64) = 100,25$

2. Il faut remplacer « return x » par « return x-1 ».

3. Il faut produire 63 vases.

48

1.a. $S(3; 2) = 3 \times 2 = 6$

b. $S(1; 4) = 4$

2. Cédric sera plus satisfait avec la première situation.

Chapitre 4 • Fonction inverse

3. $S(x; y) = xy = yx = S(y; x)$: cela signifie que Cédric sera aussi satisfait de lire x livres et d'aller y fois au cinéma que de lire y livres et d'aller x fois au cinéma.

4.a. La courbe d'indifférence de niveau 5 est telle que $S(x; y) = xy = 5$, ce qui équivaut à $y = \frac{5}{x}$. Cette courbe est une hyperbole.

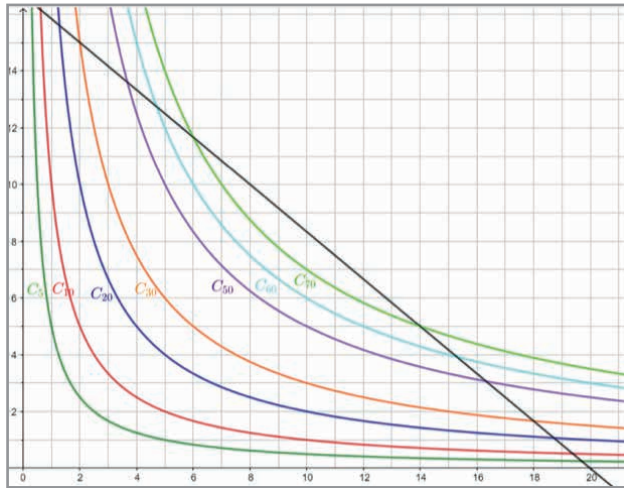
5.a. $6 \times 5 + 8 \times 6 = 78$: cela ne dépasse son budget, donc c'est possible.

b. x livres à 5 € coûtent $5x$ euros et y sorties cinéma à 6 € coûtent $6y$ euros. En tout, cela revient à $5x + 6y$; pour un budget de 100 €, cela équivaut à $5x + 6y = 100$.

c. $5x + 6y = 100$ équivaut à $6y = -5x + 100$

$$\text{puis } y = -\frac{5}{6}x + \frac{100}{6}.$$

6.



7. On regarde si la droite coupe les courbes d'indifférence en des points de coordonnées entières.

Pour 30 : $x = 2$ et $y = 15$.

Pour 70 : $x = 14$ et $y = 5$.

Ateliers algorithmiques et numériques

Atelier 1

Objectif : déterminer une valeur approchée de la solution d'une équation par balayage.

1. Les courbes des deux fonctions ne se coupent qu'une fois : $1 \leq \alpha \leq 2$.

2.a. Voir le fichier C04_Atelier1_Cor.

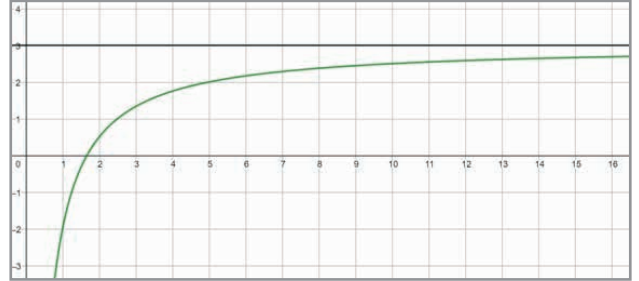
```
def balayage(p):
    x=1
    while g(x)-f(x)>0:
        x=x+p
    return x
```

b. On obtient que $\alpha \approx 1,56509$ à 10^{-5} près.

Atelier 2

Objectif : réaliser un script de recherche par balayage de valeurs seuils.

1.



Il semble que la fonction tende vers 3 en $+\infty$.

2.

x	10	100	500	1 000	5 000	10 000	100 000	1 000 000
$f(x)$	2,5	2,95	2,99	2,995	2,999	2,9995	2,99995	2,999995

Le tableau confirme l'observation précédente : les valeurs de $f(x)$ s'approchent de 3.

3.a. Le programme renvoie 500 ; cela signifie qu'à partir de $x = 500$, l'écart entre $f(x)$ et sa limite est inférieur ou égal à 0,01.

b. Voir le fichier C04_Atelier2_Cor.

```
def f(x):
    return(3-5/x)

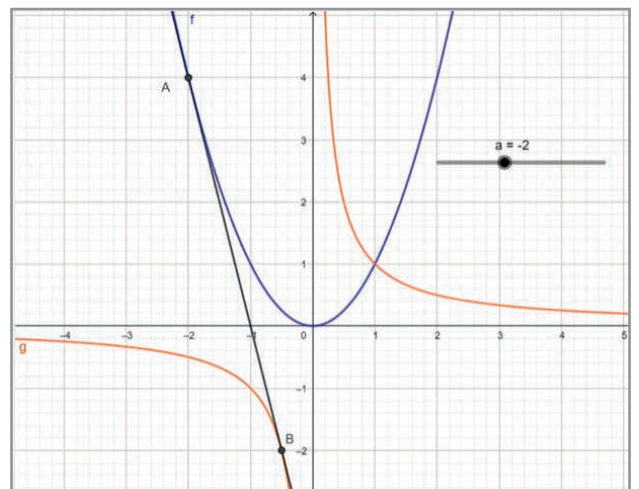
def limite(s):
    x=1
    while 3-f(x)>s:
        x=x+1
    return x
```

c. C'est à partir de $x = 50\,001$.

Atelier 3

Objectif : rechercher les tangentes communes éventuelles aux courbes représentatives des fonctions inverse et carré.

1. Voir le fichier C04_Atelier3_Cor.



Équation de la tangente :

$$y = -4x - 4 ; A(-2; 4) ; B(-0,5; -2).$$

2.a. On note f la fonction carré et g la fonction inverse.

Tangente en A à la courbe de f :

$$y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2).$$

$$f'(x) = 2x \text{ donc } f'(-2) = -4 ; \text{ de plus } f(-2) = 4.$$

Notre équation est donc : $y = -4(x + 2) + 4 = -4x - 8 + 4$
c'est-à-dire : $y = -4x - 4$.

b. Tangente en B à la courbe de g :

$$y = g'(-0,5)(x - (-0,5)) + g(-0,5) ;$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ donc } g'(-0,5) = -4 ; \text{ de plus } g(-0,5) = -2.$$

Notre équation est donc : $y = -4(x + 0,5) - 2 = -4x - 2 - 2$,
c'est-à-dire : $y = -4x - 4$.

3. Les deux équations trouvées sont identiques et correspondent bien à celles identifiées dans la partie précédente.

Atelier 4

Objectif : étudier le comportement d'une fonction aux bornes de son ensemble de définition à l'aide d'un tableur.

1.a.

x	10	100	500	1 000	2 000	5 000	10 000
f(x)	784,3	979 894	$1,2 \cdot 10^8$	10^9	$8 \cdot 10^9$	$1,25 \cdot 10^{11}$	10^{12}

x	-10	-100	-500	-1 000	-2 000	-5 000	-10 000
f(x)	-1196,3	-1019 906	$-1,25 \cdot 10^8$	-10^9	$-8 \cdot 10^9$	$-1,25 \cdot 10^{11}$	-10^{12}

b. Il semble donc que la fonction prenne des valeurs de plus en plus grandes lorsque x devient très grand (aussi bien positivement que négativement). Ce qui peut être aussi traduit en termes de limite.

2. Voir le fichier C04_Atelier4_Cor.

a. En A3 : =A2/10 ;

En B2 : =A2^3-2*A2^2-A2-6+3/A2.

b. Il semble que les valeurs prises par la fonction sont immensément grandes lorsque x s'approche de 0 tout en lui restant supérieur. Ce qui peut être aussi traduit en termes de limite.

c. Voir le fichier C04_Atelier4_Cor.

Il semble que les valeurs prises par la fonction sont immensément petites lorsque x s'approche de 0 tout en lui restant inférieur. Ce qui peut être aussi traduit en termes de limite.

	A	B
1	x	f(x)
2	-0,1	-35,921
3	-0,01	-305,9902
4	-0,001	-3005,999
5	-0,0001	-30006
6	-0,00001	-300006
7	-0,000001	-3000006
8	-0,0000001	-30000006
9	-1E-08	-300000006
10	-1E-09	-3E+09
11	-1E-10	-3E+10
12	-1E-11	-3E+11
13	-1E-12	-3E+12
14	-1E-13	-3E+13
15	-1E-14	-3E+14
16	-1E-15	-3E+15
17	-1E-16	-3E+16
18	-1E-17	-3E+17
19	-1E-18	-3E+18
20	-1E-19	-3E+19
21	-1E-20	-3E+20
22	-1E-21	-3E+21
23	-1E-22	-3E+22
24	-1E-23	-3E+23
25	-1E-24	-3E+24
26	-1E-25	-3E+25

Être prêt pour le bac

49 Q1. $T : y = \frac{1}{3}x$

Q2. $g'(x) = \frac{1}{x^2}$

Pour tout réel x non nul, $g'(x) > 0$.

Donc la fonction g est croissante sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

Q3. $h'(x) = -2x^2 + 10x - 4$.

Q4. $g'(x) = \frac{1}{x^2}$ et $g'(1) = 1$, coefficient directeur de la tangente en 1.

Q5.

x	$-\infty$	-5	0	4	$+\infty$
-3x	+	+	0	-	-
2x-8	-	-	-	0	+
x+5	-	0	+	+	+
A(x)	+	0	-	0	-

Q6. $m'(x) = 4x + 5 + \frac{1}{x^2}$

Q7. $f(x)$ se rapproche de 2.

Q8. $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus petites.

Q9. $h'(x) = -\frac{5}{2} - \frac{1}{3x^2}$

Pour tout réel x non nul, $h'(x) < 0$.

Donc la fonction h est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

Q10. $g'(x) = 2x^2 - 3x - \frac{1}{x^2}$ donc $g'(1) = -2$ et $g(1) = \frac{1}{6}$

donc $T : y = -2(x - 1) + \frac{1}{6} = -2x + \frac{13}{6}$.

50 Partie A

1.

x	2	5	10
Coût de fabrication	60	150	300
Coût d'étude	520	250	200
Coût total	580	400	500

2. Les coûts sont identiques pour $x \approx 7,1$ centaines d'ordinateurs.

3. On doit produire plus de 710 ordinateurs pour que le coût d'étude devienne inférieur à celui de fabrication.

Partie B

1. $f'(x) = 40 - \frac{1000}{x^2} = \frac{40x^2 - 1000}{x^2} = \frac{40(x^2 - 25)}{x^2}$
 $= \frac{40(x-5)(x+5)}{x^2}$

2. $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$

Pour $x \in [1; 10]$, $x + 5 > 0$ et $x^2 > 0$.

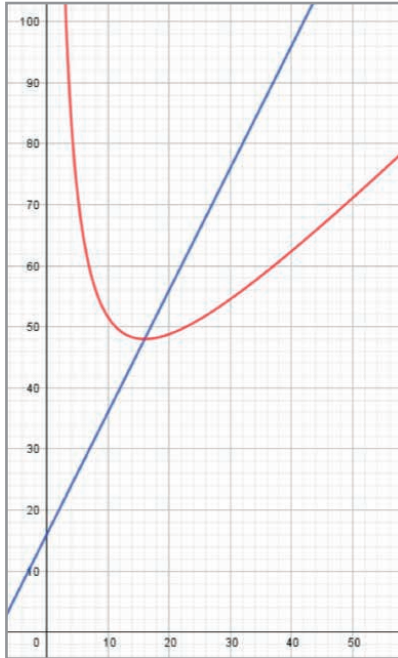
x	1	5	10
f'(x)	-	0	+
f	1 040	400	500

Chapitre 4 • Fonction inverse

3. Le coût unitaire minimal est de 4 000 € et il est atteint pour 500 ordinateurs.

51 Partie A

1. $C'(x) = 2x + 16$



2.
$$f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2 + 16x + 256}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{16x}{x} + \frac{256}{x}$$
$$= x + 16 + \frac{256}{x}$$

3.
$$f'(x) = 1 - \frac{256}{x^2} = \frac{x^2 - 256}{x^2} = \frac{x^2 - 16^2}{x^2}$$
$$= \frac{(x - 16)(x + 16)}{x^2}$$

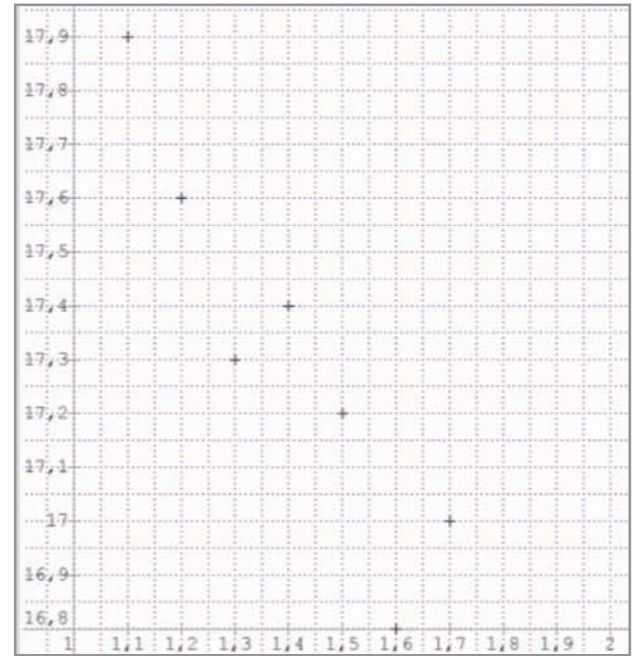
4.

x	5	16	50
$x + 16$	+		+
$x - 16$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
f	72,2	48	71,12

Partie B

1. L'entreprise doit produire 16 paires de chaussures.
2. On retrouve le résultat par lecture graphique.

52 1. et 2.a.



b. Si le prix de vente est fixé à 2 €, la quantité achetée est égale à : $-1,6 \times 2 + 19,6 = 16,4$.

3.a. $U(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{4}{q} + 1 + \frac{q}{4}$

b. $U'(q) = -\frac{4}{q^2} + \frac{1}{4} = 6 = \frac{-4 + q^2}{4q^2} = \frac{(q - 2)(q + 2)}{4q^2}$

c. Pour $q \in [1; 20]$, $4q^2 > 0$ et $q + 2 > 0$
 $q - 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2$

q	1	2	20
$U'(q)$	-	0	+
U	5,25	3,5	6,2

d. Le coût unitaire minimal est de 3 500 € et il est atteint pour 2 000 tonnes de produit.

Chapitre 5 • Séries statistiques à deux variables quantitatives

Activités du cours

1 Nuage de points d'une série statistique à deux variables

Objectifs : exploiter la compétence « représenter » et exploiter un nuage de points, tout en dégagant les idées de modélisation et d'extrapolation.

1. Le prix de vente à la sortie est d'environ 60 €.
2. Son prix le plus haut est d'environ 63 € et le plus bas d'environ 39 €.
3. Toute valeur cohérente (entre 30 € et 35 €) est admissible.

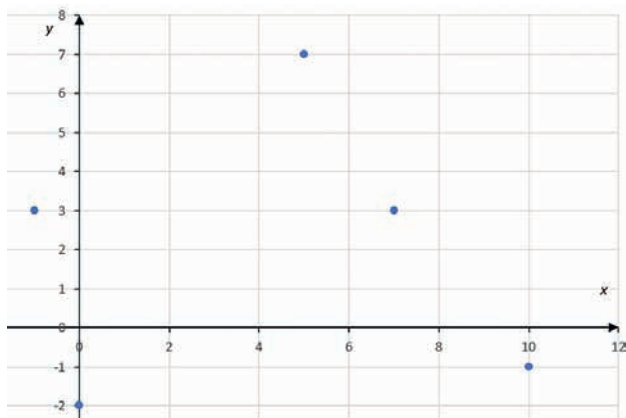
2 Ajustement affine d'un nuage de points

1. Toute équation du type $y = ax + b$ ou $d = av + b$ avec a proche de 1,15 et b proche de -32 convient (valeurs obtenues par la méthode des moindres carrés).
2. À voir en cohérence avec l'équation obtenue à la question précédente. On obtient environ 60 m à 80 km/h et environ 118 m à 130 km/h.

Remarque : dans ce type de situation, on rencontre souvent des approximations quadratiques et non linéaires. Cela est en lien avec l'énergie cinétique du véhicule avant freinage ($E_c = \frac{1}{2}mv^2$). Mais entre approximations de mesures, état et types de pneumatiques ou de chaussées, systèmes d'assistance au freinage et autres dispositifs de sécurité, les allures de nuages de points peuvent être assez diverses.

À votre tour !

1.



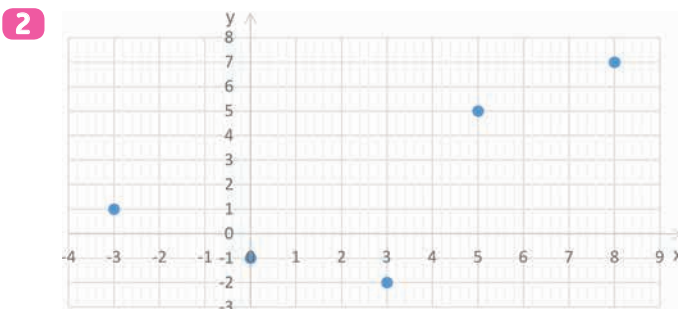
2. Toute équation avec des coefficients proches de ceux de l'équation $y = x + 3$ convient (par la méthode des moindres carrés, on obtient $y = 0,82x + 2,86$).

$$3. \begin{cases} t = 2x + 1 \\ t = \frac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = 2x + 1 \\ t = \frac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2x+1} \\ t = \frac{1}{y} \end{cases}$$

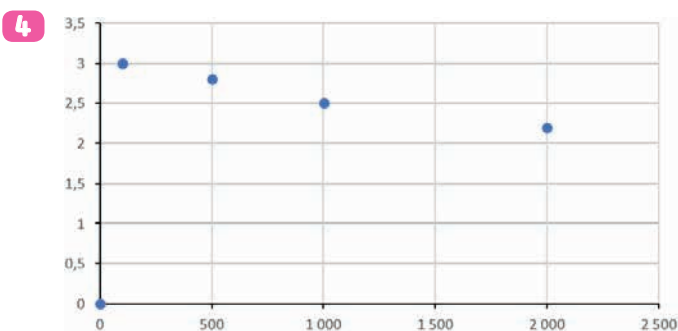
On a alors $y = \frac{1}{2x+1}$.

Exercices – Échauffement

- 1 Réponses en fin de manuel.



- 3 Réponses en fin de manuel.



Il ne s'agit pas d'une situation de proportionnalité puisque les points du nuage ne sont pas alignés avec l'origine du repère.

Remarque : on peut montrer que le tableau n'est pas un tableau de proportionnalité par différentes méthodes vues dès le cycle 4.

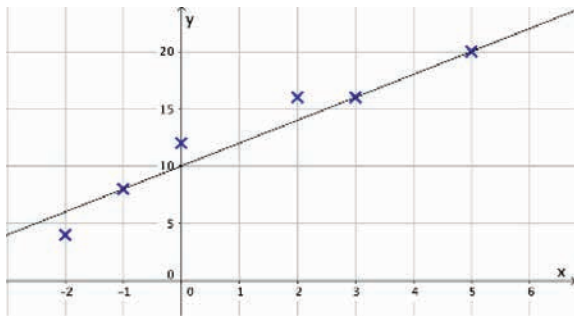
- 5
 1. *Iris setosa*.
 2. *Iris virginica*.
 3. Oui, si la largeur est comprise (environ) entre 2,3 et 3,8 cm et si la longueur est comprise entre 4,8 et 7 cm.
- Remarque : ces techniques de « discrimination » sont utilisées dans des algorithmes d'intelligence artificielle, par exemple pour l'analyse médicale (recherche de pathologies) ou la reconnaissance d'image.

- 6 Plus il y a de meutes de loups, moins il y a de cigarettes de vendues...
Il n'y a bien sûr pas de relation de cause à effet (alors même que ces données, réelles, sont corrélées).

- 7 Réponses en fin de manuel.

- 8 Réponses en fin de manuel.

9 1.



2. La droite d'équation $y = 2x + 10$ figure dans le repère précédent. Toute autre droite cohérente convient.

3. En prenant $x = 1$, on obtient une ordonnée de 12.

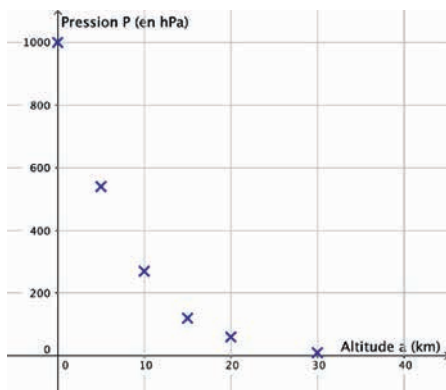
En prenant $x = 10$, on obtient une ordonnée de 30.

En prenant $y = 7$:

$$7 = 2x + 10 \Leftrightarrow -3 = 2x \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = x \Leftrightarrow x = -1,5.$$

Si une autre équation de droite était retenue, les valeurs différeraient légèrement.

10 1.

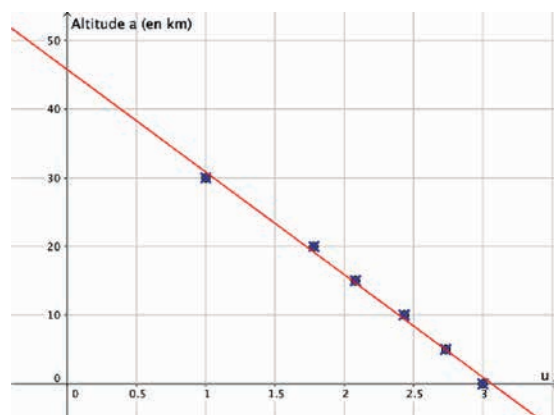


Compte tenu de la forme du nuage, un ajustement affine ne semble pas pertinent.

2.

Altitude a_i (en km)	Pression P_i (en hPa)	$u_i = \log(P_i)$
0	1 000	3
5	540	2,73
10	270	2,43
15	120	2,08
20	60	1,78
30	10	1

3.



4. À l'aide de la calculatrice, on obtient $a = -14,93u + 45,77$ en arrondissant les coefficients à 10^{-2} .

$$5. \begin{cases} a = -15u + 46 \\ u = \log(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -15\log(P) + 46 \\ u = \log(P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log(P) = \frac{46-a}{15} \\ u = \log(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 10^{\frac{46-a}{15}} \\ u = \log(P) \end{cases}$$

L'altitude a en fonction de P est donnée par :

$$a = -15\log(P) + 46.$$

La pression P en fonction de l'altitude a est donnée par :

$$P = 10^{\frac{46-a}{15}}.$$

Exercices – Entraînement

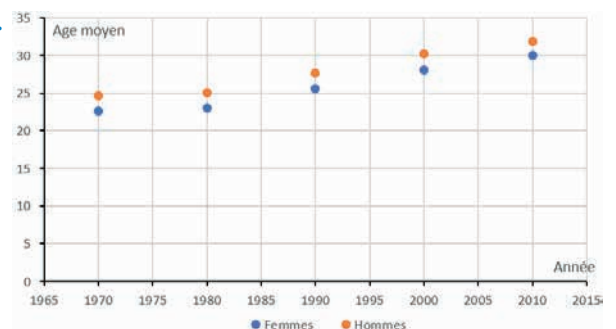
11

1. Le Japon. L'Inde.

2. Le Luxembourg. L'Inde.

3. L'affirmation est fausse (contre-exemples : Grèce et États-Unis).

12 1.



2. Les âges moyens au premier mariage des hommes et des femmes augmentent, mais ne semblent pas se rapprocher.

13

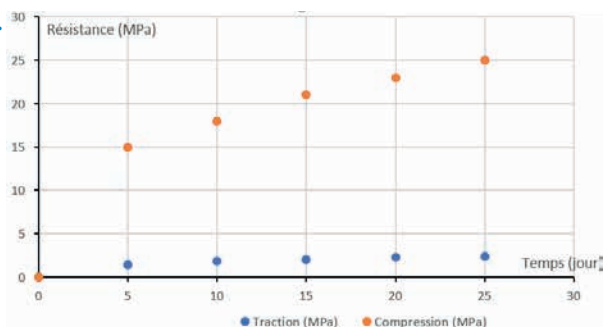
Réponses en fin de manuel.

14

1. La valeur maximale est d'environ 165 battements/min et la valeur minimale d'environ 70 battements/min.

2. On peut estimer la phase d'échauffement à environ 5 minutes, la phase d'effort à environ 6,5 minutes et la phase de récupération à environ 2,5 minutes.

15 1.



Ces résistances augmentent en fonction du temps de séchage.

2. Ce n'est pas exactement le cas, mais c'est une très bonne approximation.

- 16 1.a. Sur les nationales.
b. Sur les départementales.
2.a. Environ $400 + 700 + 1150 + 1400 = 3\,650$ accidents.
b. Environ $300 + 700 + 750 + 1050 = 2\,800$ accidents.
3. L'évolution est alors d'environ $(2\,800 - 3\,650) / 3\,650 \approx -0,23$, soit une évolution de -23% .

- 17 1. Sur cet ordinateur, le calcul de $u(500)$ a nécessité environ 0,0005 secondes.
2. Non. Les points du nuage ne sont pas alignés avec l'origine du repère.
3.

```
# Définition du terme u(n) de la suite u
def u(n):
    u = 1
    for i in range(n):
        u = u * 3

import time
# Calcul du temps d'exécution du terme u(n) de la suite u
def temps_u(n):
    deb = time.time()
    u(n)
    return time.time() - deb

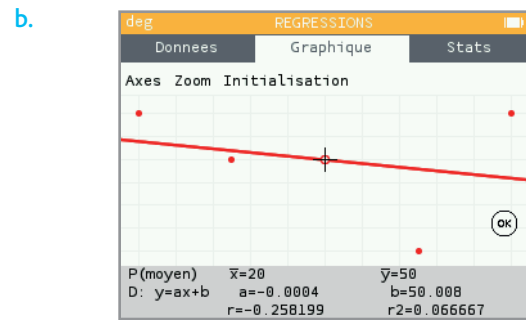
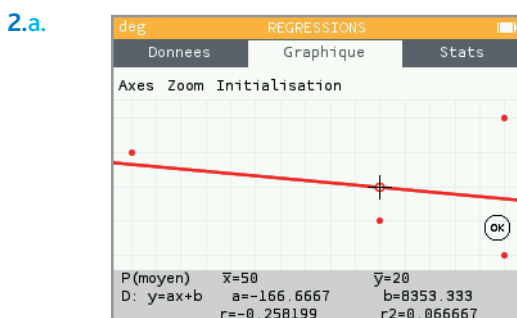
# Représentation graphique du temps d'exécution
import matplotlib.pyplot as plt

Liste_abs = [n for n in range(1,1001,100)]
Liste_ord = [temps_u(n) for n in range(1,1001,100)]
plt.plot(Liste_abs, Liste_ord, '+')
plt.show()
```

Voir le fichier C05_Ex17_Cor.py.

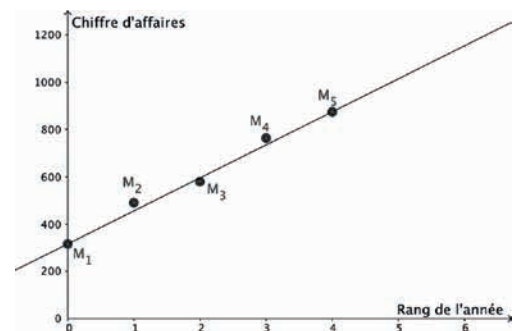
- 18 1. Il suffit ici de proposer une équation de droite, par la méthode de son choix, qui convienne. On peut prendre $U = -0,11I + 1,6$ par exemple.
2. Par lecture graphique ou en utilisant la relation obtenue à la question 1., on trouve environ 1,5 V.
3. En utilisant la relation trouvée à la question 1., on a : $0 = -0,11I + 1,6 \Leftrightarrow I = \frac{1,6}{0,11}$.
Soit pour une intensité d'environ 14,5 mA.

- 19 1. Ce matériau ne semble pas sensible aux températures comprises entre 10 °C et 30 °C.



3. En notant L la longueur et T la température, on obtient :
• dans le premier cas : $L = -0,004T + 50,008$;
• dans le second cas : $T = -166,67L + 8\,353,33$.

- 20 1.

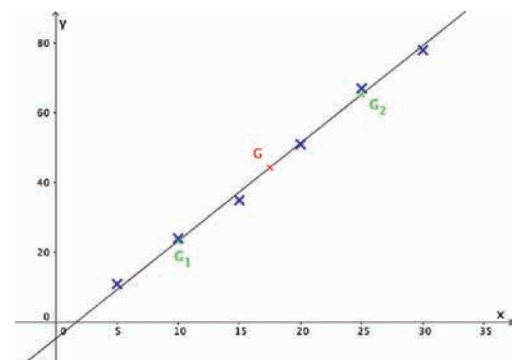


2. Nous avons ici une équation du type $y = mx + p$ avec $p = 315,6$ et $m = \frac{874,5 - 315,6}{4 - 0} \approx 139,7$.
3.a. Pour 2024, le rang vaut $x = 8$. D'où un chiffre d'affaires d'environ $139,7 \times 8 + 315,6 \approx 1433$ milliers d'euros.
b. $y \geq 2\,000 \Leftrightarrow 139,7x + 315,6 \geq 2\,000$
 $\Leftrightarrow x \geq \frac{2\,000 - 315,6}{139,7} > 12$.
À la fin de l'année 2029.

- 21 Réponses en fin de manuel.

- 22 1. $X[0]$ contient 1, $Y[0]$ contient 21, $X[5]$ contient 20 et $Y[5]$ contient 15.
2. $m = (Y[5] - Y[0]) / (X[5] - X[0])$
 $p = Y[5] - m * X[5]$
Remarque : pour le calcul de p , l'indice 5 peut indifféremment être remplacé par tout autre entier entre 0 et 4.

- 23 1.



2. Le point moyen $G\left(17,5; \frac{133}{3}\right)$ est placé sur le graphique.

3. On a $G_1\left(10; \frac{70}{3}\right)$ et $G_2\left(25; \frac{196}{3}\right)$,

placés sur le graphique.

4. La droite (G_1G_2) a pour équation $y = mx + p$

$$\text{avec } m = \frac{\frac{196}{3} - \frac{70}{3}}{25 - 10} = \frac{14}{5} = 2,8$$

$$\text{et } p = y_{G_1} - mx_{G_1} = \frac{70}{3} - 2,8 \times 10 = -\frac{14}{3}.$$

$$\text{Soit } y = 2,8x - \frac{14}{3}.$$

Avec $x = x_G = 17,5$,

$$\text{on a } y = 2,8 \times 17,5 - \frac{14}{3} = 49 - \frac{14}{3} = \frac{133}{3} = y_G$$

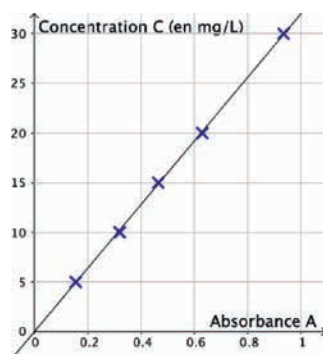
donc le point moyen G appartient à la droite (G_1G_2) : cette droite passe bien par le point moyen G .

24 1. Réponse c.

2. Réponse b.

3. Réponse b.

25 1.



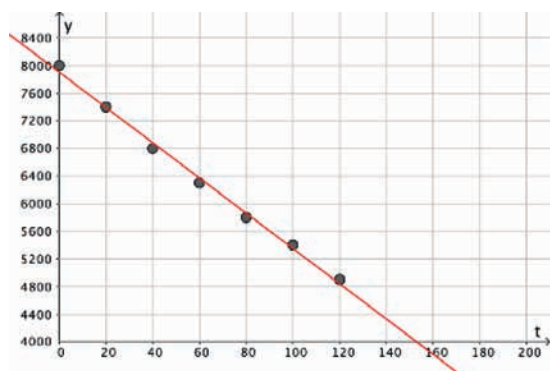
2. Les points semblent à peu près alignés donc un ajustement affine semble ici pertinent.

La droite d'équation $y = 32x$ semble être un bon ajustement du nuage, d'où la relation : $C = 32A$.

3. $C = 32 \times 0,5 = 16$ mg/L.

26 1. On ne peut pas injecter ce produit au cours de deux premières heures, puisqu'il y a plus de 2 600 milliards de noyaux radioactifs.

2.



3. Toute équation de droite, cohérente, est admissible.

Par la méthode des moindres carrés,

on obtient $y = -25,54x + 7\,903,57$.

$$4.a. y \leq 2\,600 \Leftrightarrow -26t + 7\,900 \leq 2\,600$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{2\,600 - 7\,900}{-26}.$$

Il faut donc attendre 204 minutes.

b. Oui, puisque d'après le modèle proposé, il y aurait dû y avoir moins de 2 800 milliards de noyaux radioactifs.

27 1. Vrai, puisqu'on a une relation affine entre u_n et n ($u_n = u_0 + rn$).

2. Faux. À la calculatrice, on obtient pour chacun de ces nuages la droite d'équation $y = -0,5x + 2$.

3. Vrai. Puisqu'on aurait une relation du type $y = mx^2 + p$, qui est une équation de parabole.

4. Faux. Cette droite coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(-\frac{15}{2,3}; 0\right)$.

28 1.a. Le nombre d'attaques de pirates a globalement diminué entre 2012 et 2017.

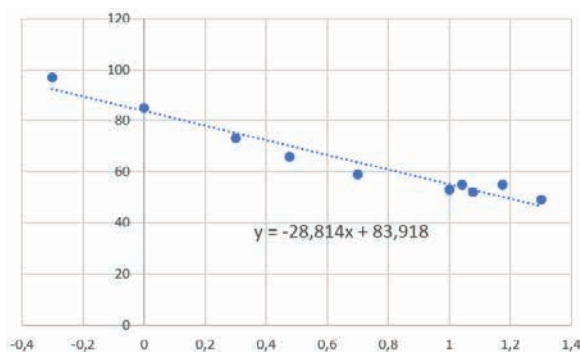
b. Le nombre de naissances de garçons se prénommant Kévin a globalement diminué entre 2012 et 2017.

2. Ce graphique semble indiquer un lien (quantitatif) entre les valeurs x_i et y_i (sans qu'il y ait de relation de causalité).

29 1.

$u_i = \log(x_i)$	-0,301	0	0,301	0,477	0,699	1	1,041	1,079	1,176	1,301
Intensité sonore s_i (en dB)	97	85	73	66	59	53	55	52	55	49

2.



Voir le fichier C05_Ex.29_Cor.

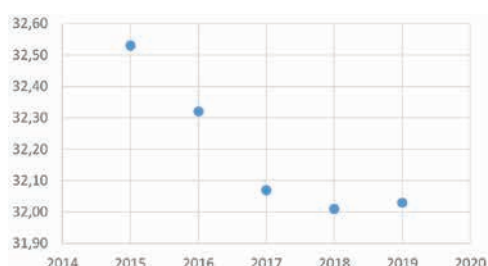
$$3. \begin{cases} s = -28,8u + 83,9 \\ u = \log(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = -28,8\log(x) + 83,9 \\ u = \log(x) \end{cases}$$

L'intensité sonore s en fonction de la distance x s'exprime par $s = -28,8\log(x) + 83,9$.

4. Pour $x = 8$, on obtient $s = -28,8\log(8) + 83,9 \approx 58$ dB.

Pour $x = 30$, on obtient $s = -28,8\log(30) + 83,9 \approx 41$ dB.

30 1.



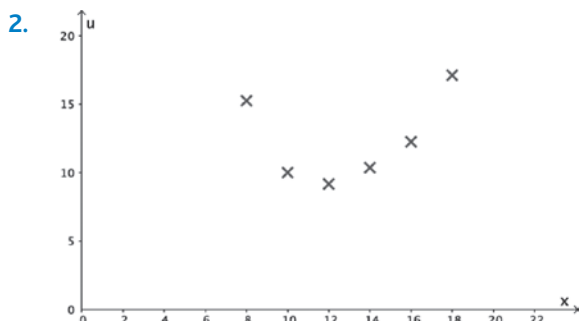
L'allure du nuage ne suggère pas qu'un ajustement par une droite soit pertinent.

2. Par lecture graphique, en utilisant la symétrie de la parabole, on obtient environ 32,1 pour 2020. La seconde réponse est 2021 (toujours par lecture graphique).

Remarque : il s'agit ici d'un exemple-type dans lequel les coefficients donnés par les tableaux ne fournissent pas une précision suffisante pour exploiter l'approche algébrique.

31 1.

x_i	8	10	12	14	16	18
y_i	122	100	110	145	196	308
$u_i = \frac{y_i}{x_i}$	15,25	10,00	9,17	10,36	12,25	17,11



Attention : l'échelle demandée n'est pas respectée.

Un ajustement affine ne semble pas, compte tenu de l'allure du nuage de points, pertinent.

3.a. Le rôle de ces deux lignes est d'effectuer les changements de variables $u_i = \frac{y_i}{x_i}$ et $t_i = u_i - 0,2x_i^2$.

b. Le rôle de ces deux lignes est de représenter les nuages de points $(x_i; u_i)$ et $(x_i; t_i)$.

c. L'équation réduite cherchée est $t = -\frac{29}{6}x + \frac{115}{3}$.

$$\begin{cases} t = u - 0,2x^2 \\ t = -\frac{29}{6}x + \frac{115}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = t + 0,2x^2 \\ t = -\frac{29}{6}x + \frac{115}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = -\frac{29}{6}x + \frac{115}{3} + 0,2x^2 \\ t = -\frac{29}{6}x + \frac{115}{3} \end{cases}$$

L'expression cherchée est $u = -\frac{29}{6}x + \frac{115}{3} + 0,2x^2$.

32 1. Faux. Ce script calcule la somme de chacune des coordonnées, sans diviser par le nombre de valeurs. Il manque donc à la fin les deux lignes :

$x_G = x_G / \text{len}(X)$
 $y_G = y_G / \text{len}(Y)$

2. Vrai. La plus petite ordonnée est bien 3 qui est la valeur de $X[9]$.

3. Faux. Les valeurs contenues dans X et Y ne sont pas proportionnelles.

Exercices - Perfectionnement

33 1. À partir de 2015.

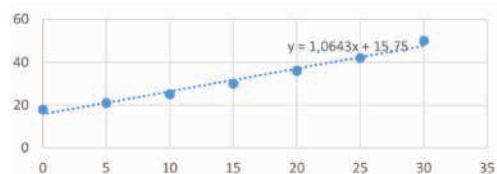
2.a. Dans cette modélisation, le taux d'accroissement annuel est donné par le coefficient directeur de chaque droite. C'est donc l'Union européenne qui a le plus fort taux d'accroissement et les États-Unis le plus bas.

b. Le taux d'accroissement de la Chine étant moindre que celui de l'Union européenne, cela ne se produira pas selon ce modèle. On peut aussi chercher à résoudre l'inéquation $18,74x - 37\,363 \geq 19,51x - 38\,651$ qui conduit à $x \leq 1672$.

c. Les modèles d'ajustement, en prenant $x = 2\,016$, donnent :
 • pour l'UE : $19,51 \times 2\,016 - 38\,651 \approx 681$, soit environ 680 000 publications ;
 • pour les É.-U. : $8,2 \times 2\,016 - 16\,071 \approx 460$, soit environ 460 000 publications ;
 • pour la Chine : $18,74 \times 2\,016 - 37\,363 \approx 417$, soit environ 420 000 publications.

Ces valeurs sont du même ordre de grandeur que les valeurs réelles. Les tendances sont bien confirmées.

34 1.



2. L'année 2023 correspond au rang $x = 38$.

$$1,0643 \times 38 + 15,75 \approx 56.$$

La population est ainsi estimée à environ 56 milliers d'habitants en 2023.

$$3. \begin{cases} f(0) = 18 \\ f(30) = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a10^0 = 18 \\ a10^{30b} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ 18,10^{30b} = 50 \end{cases}$$

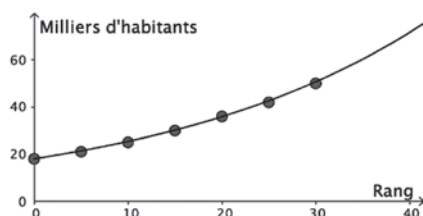
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ b = \frac{1}{30} \log\left(\frac{50}{18}\right) \end{cases}$$

D'où $f(x) = 18 \times 10^{0,015x}$.

4. L'année 2018 correspond au rang $x = 33$

et $f(33) = 18 \times 10^{0,015 \times 33} \approx 56$, soit une estimation de la population d'environ 56 000 habitants.

5.



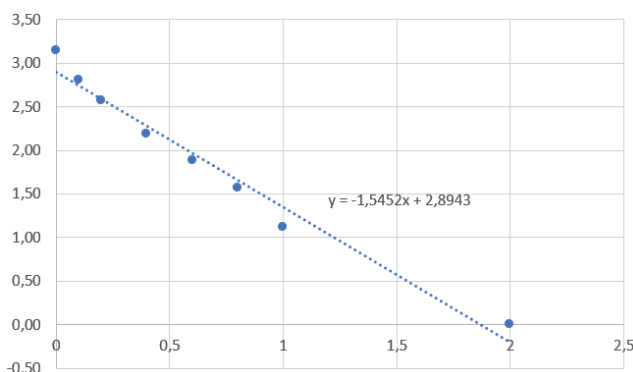
6. $1,0643 \times 33 + 15,75 \approx 51$.

Le premier ajustement donne une estimation pour 2018 d'environ 51 000 habitants et le second ajustement d'environ 56 000 habitants. La seconde valeur étant plus proche, l'ajustement par la fonction f est ici plus pertinent.

- 35** 1.a. Le taux d'évolution cherché est

$$T = \frac{9,69 - 9,92}{9,92} \approx -0,0232 \text{ soit environ } -2,32 \%$$
- b. Le taux moyen cherché t vérifie $(1+t)^{20} = 1+T$,
 soit $t = (1+T)^{\frac{1}{20}} - 1 \approx -0,00117$ soit une baisse moyenne
 d'environ 0,117 %.
- 2.a. $y = -0,0095x + 9,9075$.
- b. L'année 2009 correspond au rang $x = 21$.
 $-0,01 \times 21 + 9,91 \approx 9,7$
 Ce modèle estime à environ 9,7 secondes le record du monde en 2009.
- c. L'erreur commise est de $9,7 - 9,58 = 0,12$ s.
 $\frac{0,12}{9,58} \approx 0,012$ soit une erreur d'environ 1,2 %. Cette erreur
 est très faible, mais ne signifie pas que les records suivront
 cette tendance.

- 36** 1. Un ajustement affine de ce nuage ne semble pas pertinent.
 2. La formule 2.
 3.



4. Toute équation cohérente convient. En utilisant celle
 donnée par le tableur ou la calculatrice, il vient :
 $y = -1,5452e + 2,8943$.

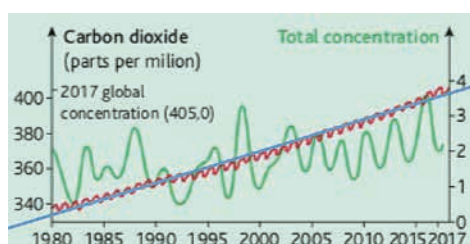
$$\begin{cases} y = -1,5452e + 2,8943 \\ y = \log(n - 118) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log(n - 118) = -1,5452e + 2,8943 \\ y = \log(n - 118) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 10^{-1,5452e + 2,8943} + 118 \\ y = \log(n - 118) \end{cases}$$

On obtient la relation $n = 10^{-1,5452e + 2,8943} + 118$.

37 1.



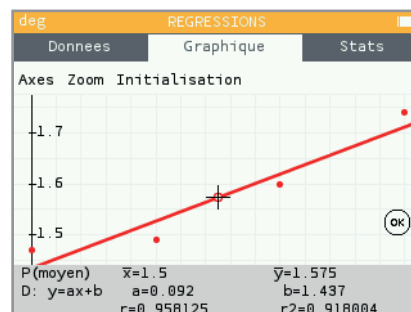
2. The average of increase is about $\frac{405 - 330}{2017 - 1980} \approx 2,03$ parts
 per milion every year.

Ateliers algorithmiques et numériques

Atelier 1 : Fréquentation d'un parc de loisirs

Objectif : déterminer et exploiter des ajustements affines à l'aide de la calculatrice.

1.



Le nuage de points a une allure assez proche, visuellement,
 de celle d'une droite. Un ajustement affine semble donc ici
 pertinent. (On pourrait aussi penser à d'autres types d'ajus-
 tements, surtout avec aussi peu de points.)

2. La calculatrice propose un ajustement par la droite
 d'équation $y = 0,092x + 1,437$.

3.a. En prenant $x = 10$: $0,092 \times 10 + 1,437 = 2,257$.

Le nombre de visiteurs est alors estimé à environ 2,26 mil-
 lions.

b. $0,092x + 1,437 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3 - 1,437}{0,092}$.

On en déduit $x \geq 17$, soit à partir de 2032.

Remarque : la résolution de cette inéquation résulte de la
 modélisation retenue. Dans un cadre plus général, il aurait
 fallu déterminer la droite de régression de x en y , en échan-
 geant les colonnes dans le tableur. La nouvelle régression
 peut alors conduire à un résultat différent, qui tient à la qua-
 lité du coefficient de corrélation r . Mais le programme de la
 voie technologique en fera abstraction.

Atelier 2 : Comparer la qualité de deux ajustements affines

1.a. Il n'y a ici aucune « bonne » réponse attendue. Il s'agit
 juste d'engager des échanges avec la classe afin de dégager
 l'idée d'un « bon » ajustement.

b. Même remarque qu'à la question précédente.

2.a. L'écart des ordonnées de ces points vaut $|y_i - (ax_i + b)|$,
 dont le carré s'exprime par :

$$(|y_i - (ax_i + b)|)^2 = (y_i - (ax_i + b))^2.$$

b. Ce script définit une fonction qui renvoie la somme
 $\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$ lorsque deux paramètres a et b sont
 donnés.

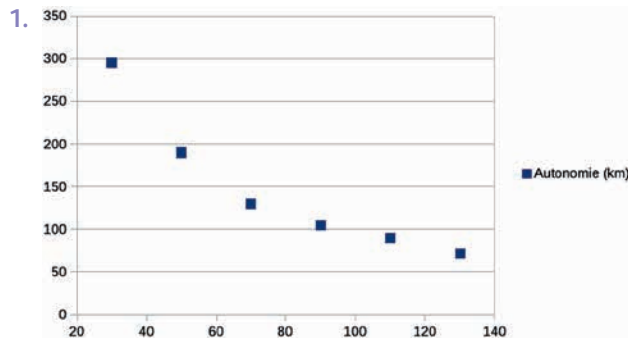
c. La droite qui donne le meilleur ajustement est celle dont
 la fonction renvoie la plus petite valeur.

Les valeurs **qualite(0,4,1)**, **qualite(0,5,0,75)** et **qualite(0,6,0)**
 renvoyées sont respectivement : 5.14, 4.25 et 5.84.

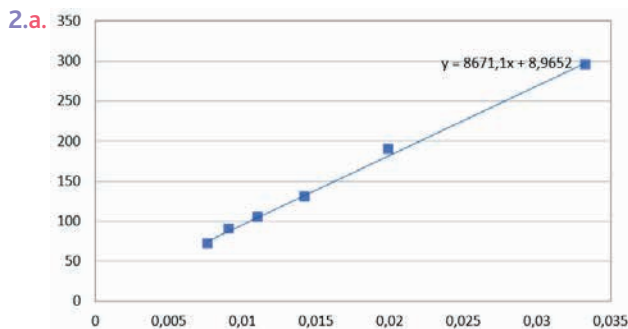
Selon ce critère, la droite donnant le meilleur ajustement
 est la droite d'équation $y = 0,5x + 0,75$ ou bien celle dont
 l'équation réduite est donnée en 1.b.

On peut montrer que la valeur minimale renvoyée est, arrondie au dix-millième, de 0,4192.

Atelier 3 : Autonomie d'un prototype de véhicule électrique



Non, l'allure du graphique ne suggère pas qu'un ajustement affine soit pertinent.



Voir fichier C05_Atelier3_Cor.

b. La formule =1/B2

c. En arrondissant à l'unité, nous obtenons la relation $y = 8\,671u + 9$ avec $u = \frac{1}{v}$, d'où $y = \frac{8\,671}{v} + 9$.

3.a. Avec $v = 80$: $\frac{8\,671}{80} + 9 \approx 117,4$.

Soit une autonomie estimée à environ 117 km.

b. $500 = \frac{8\,671}{v} + 9 \Leftrightarrow v = \frac{8\,671}{500-9} \approx 17,66$.

Soit une vitesse estimée à environ 18 km.h⁻¹.

Atelier 4 : Le meilleur prix

1. Voir fichier C05_Atelier4_Cor.ggb

2.a. $p = \frac{100-q}{0,08}$.

En prenant $q = 80$, on a $p = \frac{100-80}{0,08} = 250$.

Soit un prix unitaire de 250 €.

b. Le produit de la vente de q objets par jour par le prix de vente unitaire est égal à :

$$V(q) = p \times q = \frac{100-q}{0,08} \times q = \frac{100}{0,08}q - \frac{1}{0,08}q^2 \\ = 1250q - 12,5q^2.$$

3. Voir fichier C05_Atelier4_Cor.ggb

Le bénéfice est maximal pour $q \approx 41,83$. Si la quantité est discrète, on prendra la valeur donnant le plus grand bénéfice entre les valeurs 41 et 42 (ici, ce sera 42).

Le prix unitaire à fixer est alors de $p = \frac{100-42}{0,08} = 725$ € dans le cas discret, et d'environ 727,13 € pour le cas continu.

Être prêt pour le bac

38

Q1. $-\frac{5}{6}$

Q2. $y = -3x + 1$

Q3. $\left(-\frac{5}{2}; 0\right)$

Q4.

x	1	3	5
f	0	4	0

Q5. $f'(x) = -2x + 6$

Q6. 0

Q7. $]-\infty; \frac{2}{5}[$

Q8.

x	-1	$\frac{1}{5}$
Signe de $(1-5x)(2+2x)$	-	+

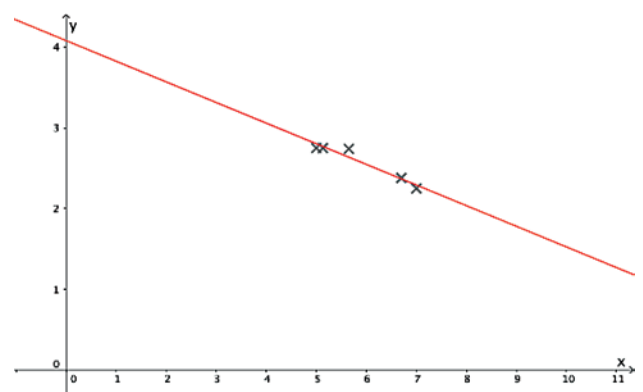
Q9. 21 %

Q10. $\frac{4}{5}$ et $-\frac{4}{5}$

39

1. $\frac{2,25-2,75}{2,75} \approx -0,1818$. La baisse est d'environ 18,2 %.

2 et 3.



4.a. Voir le graphique précédent.

b. $-0,255 \times 10 + 4,08 = 1,53$. L'estimation est alors de 1,53 milliards de paquets qui seraient vendus en 2020.

c. $-0,255x + 4,08 \leq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1-4,08}{-0,255}$.

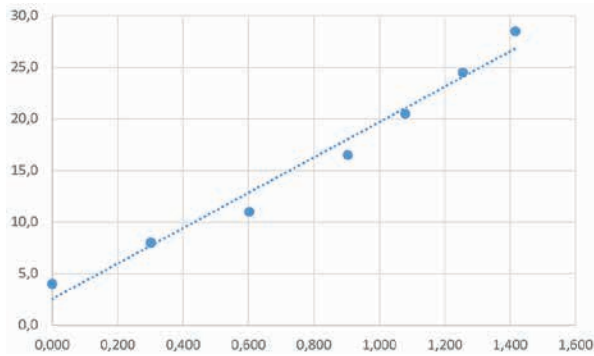
Le prix minimum serait d'environ 12,10 €.

Une lecture graphique peut être également envisagée.

40 1.

$x_i = \log(t_i)$	0,000	0,301	0,602	0,903	1,079	1,255	1,415
Épaisseur de la glace y_i (en cm)	4,0	8,0	11,0	16,5	20,5	24,5	28,5

2. Représentation :



3. $y = 17,14x + 2,54$

4.a. Voir le graphique précédent.

b. $32 = 17,1x + 2,5 \Leftrightarrow x = \frac{32 - 2,5}{17,1}$. Soit $x \approx 1,73$.

Or $x = \log(t)$ d'où $t = 10^x$.

Ce qui donne un temps $t \approx 10^{1,73} \approx 53,7$, soit environ 54 heures selon ce modèle.

41

1. Avec $x = 4$: $58,3 \times 4 + 87,6 = 320,8 \approx 321$.

L'estimation est cohérente.

2. `def clients(n):`
`return (58.3*n+87.6)*1000`

3. $400 = 58,3x + 87,6 \Leftrightarrow x = \frac{400 - 87,6}{58,3} \approx 5,358$,

soit une estimation d'environ 5 360 €.

`def frais(prix):`

`return (prix - 87.6)/58.3*1000`

4. Selon le modèle choisi, l'estimation était d'environ 379 000 clients. Le modèle n'est donc pas pertinent pour des sommes dépassant les 4 000 €.

Chapitre 6 • Probabilités conditionnelles

Activités du cours

1 Formule des probabilités totales

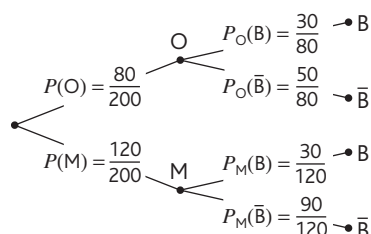
Objectifs : introduire la propriété $P(A \cap B) = P_A(B)P(A)$ et construire un arbre pondéré de probabilités en utilisant la définition d'une probabilité conditionnelle vue en 1^{re}.

1.a. $P(O) = \frac{80}{200}$ et $P(O \cap B) = \frac{30}{200}$.

b. $P_O(B) = \frac{30}{80}$

c. $P(O) \times P_O(B) = \frac{80}{200} \times \frac{30}{80} = \frac{30}{200} = P(O \cap B)$

2.a.



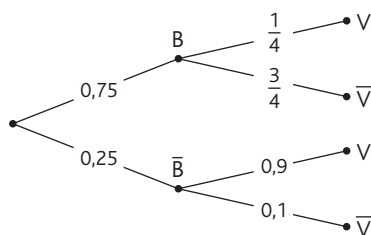
b. $P(B) = \frac{60}{200}$

$$P(O) \times P_O(B) + P(M) \times P_M(B) = \frac{80}{200} \times \frac{30}{80} + \frac{120}{200} \times \frac{30}{120} = \frac{60}{200} = P(B)$$

Dans cette activité, il pourrait être intéressant de construire l'arbre pondéré de probabilités où les premières branches seraient B et B-bar.

À votre tour !

a.



b. $P(V) = P(B) \times P_B(V) + P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(V)$
 $= 0,75 \times \frac{1}{4} + 0,25 \times 0,9 = 0,4125$

2 Indépendance de deux événements

Objectif : découvrir la notion d'indépendance en probabilités ainsi que ses propriétés.

1. $P(V) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

$P_H(V) = \frac{22}{55} = \frac{2}{5}$

donc $P(V) = P_H(V)$.

2.a. $P(V \cap H) = \frac{22}{100} = \frac{11}{50}$

$P(V) \times P(H) = \frac{2}{5} \times \frac{55}{100} = \frac{11}{50}$

donc $P(V \cap H) = P(V) \times P(H)$.

b. $P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(A)P(B)$

3.a. $P_H(V) = \frac{18}{45} = \frac{2}{5} = P(V)$

On peut en déduire que V est indépendant de l'événement H-bar.

b. $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A} \cap B)$
 $= P(A)P(B) + P(\bar{A} \cap B)$ donc

$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = (1 - P(A))P(B) = P(\bar{A})P(B)$

$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P_A(B)$ et $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P(B)$.

Comme $P(A) \neq 0$, alors : $P(B) = P_A(B)$.

À votre tour !

1. Soit E l'événement « Le véhicule a un défaut d'éclairage » et F l'événement « Le véhicule a un défaut de freinage ».
 $P(E) = 0,1$ et $P(F) = 0,05$.

E et F sont des événements indépendants donc :

$P(E \cap F) = P(E)P(F) = 0,1 \times 0,05 = 0,005$.

$A = E \cup F$ donc $P(A) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0,145$.

2.a. $P(A) = 0,1 + 0,1 + 0,05 = 0,25$

$P(B) = 0,4 + 0,1 + 0,15 + 0,1 = 0,75$

$P(A \cap B) = 0,1 + 0,1 = 0,2$

$P(A)P(B) = 0,1875 \neq 0,2$

Donc $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$: les événements A et B ne sont pas indépendants.

b. Dans le cas d'un dé équilibré :

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ donc A et B sont indépendants.

Exercices - Échauffement

1 Réponses en fin de manuel.

2 $P(A) = 0,6$; $P_A(B) = 0,2$; $P_A(\bar{B}) = 0,8$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,5$.

3 $P(A) = 0,1$; $P(B) = 0,4$; $P(C) = 0,5$; $P_A(E) = 0,5$ et $P_B(\bar{E}) = 0,7$.

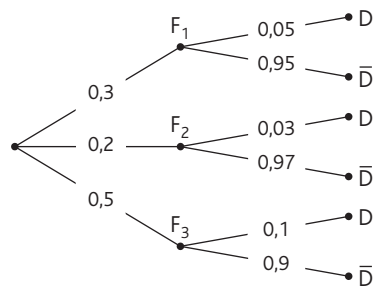
4 1.



Chapitre 6 • Probabilités conditionnelles

2. $P(A) = 0,12$; $P_A(B) = 0,635$; $P_A(\bar{B}) = 0,365$
et $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P_A(\bar{B}) = 0,88 \times 0,993 = 0,87384$.

5 1.



2. $P(D) = P(F_1)P_{F_1}(D) + P(F_2)P_{F_2}(D) + P(F_3)P_{F_3}(D)$
 $= 0,071$

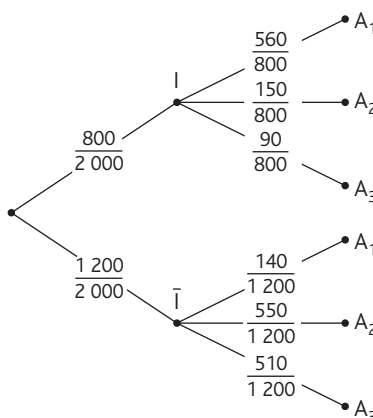
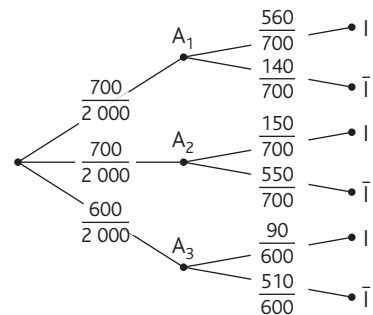
3. $P_D(F_3) = \frac{P(F_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{P(F_3)P_{F_3}(D)}{P(D)} = \frac{0,5 \times 0,1}{0,071} = \frac{50}{71}$
 $\approx 0,704$

6 Réponses en fin de manuel.

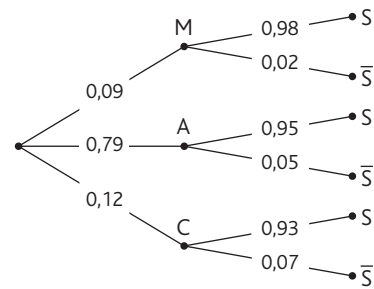
7 1.

Intéressé par Internet ?	Oui	Non	Total
Moins de 30 ans	560	140	700
De 30 à 60 ans	150	550	700
Plus de 60 ans	90	510	600
Total	800	1 200	2 000

2.



8 1.



2. $P(\bar{S}) = P(M)P_M(\bar{S}) + P(A)P_A(\bar{S}) + P(C)P_C(\bar{S})$
 $= 0,0497$.

9 Réponses en fin de manuel.

10 a. A et B sont indépendants donc :

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,15$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,5 - 0,15 = 0,65$

b. A et B sont incompatibles donc $P(A \cap B) = 0$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0,8$

11 Réponses en fin de manuel.

12 A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{1}{2}$

13 1. A et B sont deux événements indépendants donc

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,02 \times 0,01 = 0,0002$.

La probabilité que la montre présente les deux défauts est égale à 0,0002.

2. A et B sont deux événements indépendants donc $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont également indépendants.

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = 0,98 \times 0,99$
 $= 0,9702$

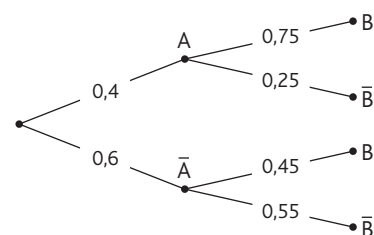
La probabilité que la montre n'ait aucun défaut est égale à 0,9702.

Exercices - Entraînement

14 $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,2$; $P(C) = 0,5$; $P_A(D) = 0,2$;
 $P_A(E) = 0,3$; $P_A(F) = 0,5$; $P_B(D) = 0,1$; $P_B(E) = 0,45$;
 $P_B(F) = 0,45$; $P_C(D) = 0,3$ et $P_C(E) = 0,7$.

15 Réponses en fin de manuel.

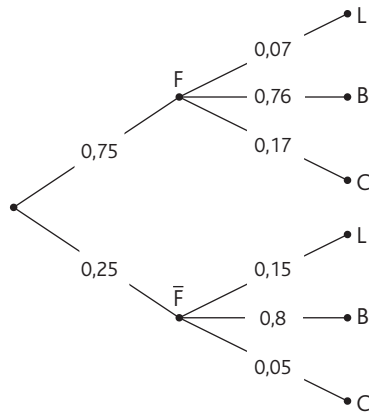
16 1.



$$\begin{aligned}
 2. P(A \cap B) &= P(A) \times P_A(B) = 0,4 \times 0,75 = 0,3 \\
 P(A \cap \bar{B}) &= P(A) \times P_A(\bar{B}) = 0,4 \times 0,25 = 0,1 \\
 P(\bar{B}) &= P(A) \times P_A(\bar{B}) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B}) \\
 &= 0,4 \times 0,25 + 0,6 \times 0,55 = 0,43
 \end{aligned}$$

- 17 a. $P(C \cap D) = P(C)P_C(D) = 0,12 \times 0,36 = 0,0432$
 b. $P(\bar{C} \cap D) = P(\bar{C})P_{\bar{C}}(D) = 0,88 \times 0,91 = 0,8008$
 c. $P(D) = 0,844$

18 1.



2. $\bar{F} \cap B$: « Les clients ne sont pas une famille et payent en carte bancaire ».

$$P(\bar{F} \cap B) = P(\bar{F})P_{\bar{F}}(B) = 0,25 \times 0,8 = 0,2$$

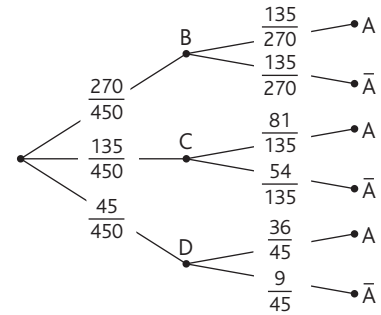
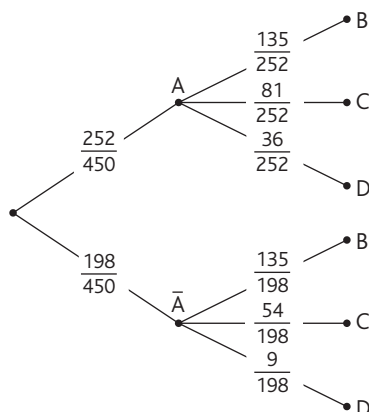
$$\begin{aligned}
 3. P(C) &= P(F)P_F(C) + P(\bar{F})P_{\bar{F}}(C) \\
 &= 0,75 \times 0,17 + 0,25 \times 0,05 = 0,14
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. P_C(F) &= \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{P(F)P_F(C)}{P(C)} = \frac{0,75 \times 0,17}{0,14} = \frac{51}{56} \\
 &\approx 0,91
 \end{aligned}$$

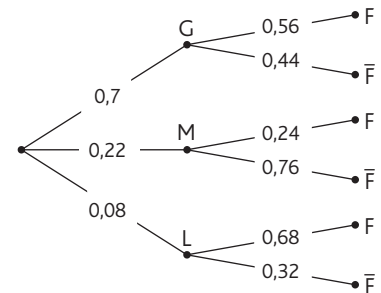
19 1.

	Chiens	Chats	Autres	Total
Adoptés	$135 = 270 \times \frac{50}{100}$	$81 = 135 \times \frac{60}{100}$	$36 = 45 \times \frac{80}{100}$	252
Non adoptés	135	54	9	198
Total	$270 = 450 \times \frac{60}{100}$	$135 = 450 \times \frac{30}{100}$	45	450

2.



20 1.

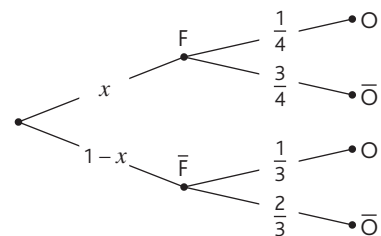


$$2. P(F) = P(G)P_G(F) + P(M)P_M(F) + P(L)P_L(F) = 0,4992$$

$$3. P_F(G) = \frac{P(F \cap G)}{P(F)} = \frac{0,7 \times 0,56}{0,4992} \approx 0,785$$

21 Réponses en fin de manuel.

22



$$1. P(O) = P(F)P_F(O) + P(\bar{F})P_{\bar{F}}(O)$$

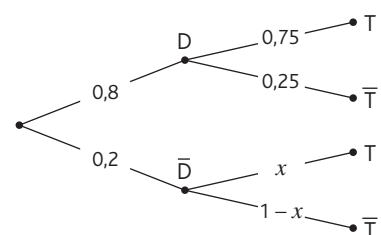
$$\Leftrightarrow 0,3 = x \times \frac{1}{4} + (1-x) \times \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 0,4$$

$$2. P_O(F) = \frac{P(O \cap F)}{P(O)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

23 1. $P(\text{« 2 garçons »}) = 0,51^2 = 0,2601$
 et $P(\text{« 2 filles »}) = 0,49^2 = 0,2401$

$$2. P(\text{« 3 garçons »}) = 0,51^3 \approx 0,133$$

24



Chapitre 6 • Probabilités conditionnelles

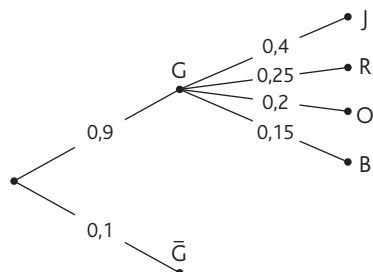
1. $P(T) = P(D)P_D(T) + P(\bar{D})P_{\bar{D}}(T)$

$\Leftrightarrow 0,7 = 0,8 \times 0,75 + 0,2x \Leftrightarrow x = 0,5$

donc $P_{\bar{D}}(T) = 0,5$.

2. $P_T(D) = \frac{P(T \cap D)}{P(T)} = \frac{0,8 \times 0,75}{0,7} = \frac{6}{7}$

25 1.

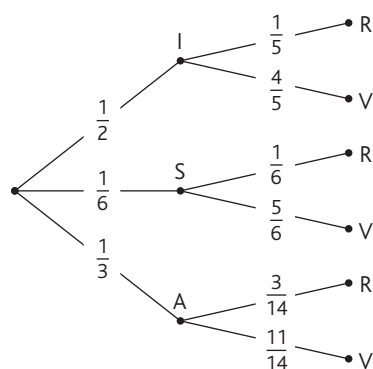


2. $P(R) = P(G)P_G(R) = 0,225$

3. $\frac{50}{0,225} \approx 222,2$

En plantant 223 bulbes, le jardinier obtiendra probablement 50 fleurs rouges.

26 1.



2. D'après la formule des probabilités totales :

$P(R) = P(I \cap R) + P(S \cap R) + P(A \cap R)$

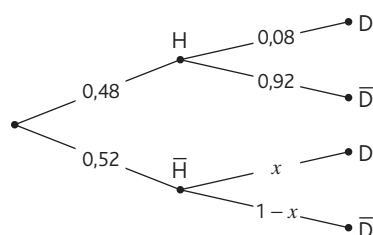
$P(R) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{14} = \frac{1}{10} + \frac{1}{36} + \frac{1}{14}$

$P(R) = \frac{504}{5\,040} + \frac{140}{5\,040} + \frac{360}{5\,040} = \frac{1004}{5\,040} = \frac{251}{1260} \approx 0,1992$

3. $P_R(S) = \frac{P(S \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{251}{1260}} = \frac{35}{251} \approx 0,139$

27 Réponses en fin de manuel.

28

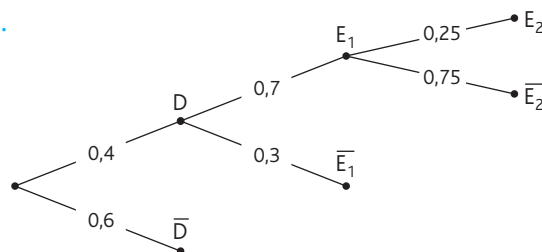


$P(D) = P(H) \times P_H(D) + P(\bar{H}) \times P_{\bar{H}}(D)$

$\Leftrightarrow 0,04 = 0,48 \times 0,08 + 0,52 \times x \Leftrightarrow x \approx 0,003$

La probabilité qu'une femme soit daltonienne est faible mais n'est pas nulle.

29 1.a.

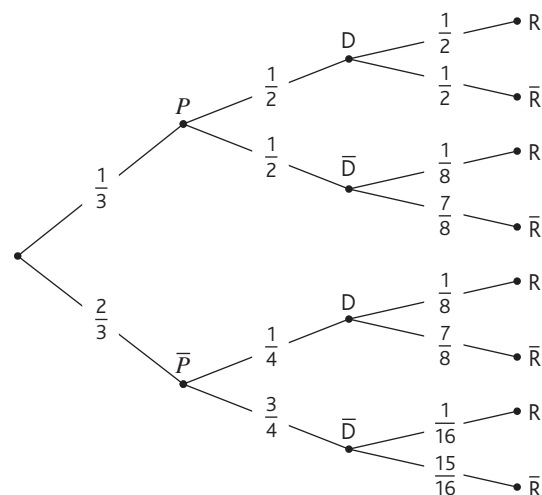


b. $P(F) = 1 - P(\bar{F}) = 1 - 0,4 \times 0,7 \times 0,25 = 0,93$.

2. La probabilité cherchée est égale à : $1 - 0,93^5$.

3. On cherche n tel que $1 - 0,93^n > 0,999$ donc $n = 96$, nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999.

30 1.

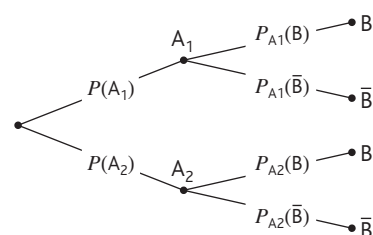


2. La probabilité que j'arrive en retard est égale à :

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{5}{32}$.

3. $P_R(P) = \frac{P(R \cap P)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{8}}{\frac{5}{32}} = \frac{2}{3}$.

31



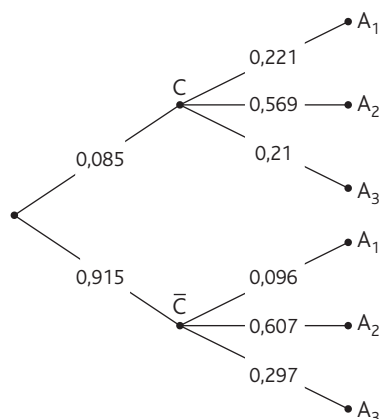
Comme $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$

et que $(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \emptyset$, alors :

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$.

$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B)$, ce qui démontre la formule des probabilités totales pour $n = 2$.

32 1.



2. $P(C \cap A_2) = 0,085 \times 0,569 = 0,048365$.

3. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_1) = P(C \cap A_1) + P(\bar{C} \cap A_1) = 0,085 \times 0,221 + 0,915 \times 0,096 = 0,106625$$

Environ 10,7 % des Français en âge de travailler ont entre 15 et 24 ans.

4. $P_{A_1}(C) = \frac{P(C \cap A_1)}{P(A_1)} \approx 0,176$

5. $P(A_1) \neq P_C(A_1)$ ce qui signifie que les événements C et A_1 ne sont pas indépendants. Le fait d'être au chômage et l'âge ne sont donc pas indépendants.

33 a. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

donc $P(A \cap B) = 0,4$.

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,8 \neq P(A)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

b. Avec le même raisonnement, $P(A \cap B) = 0,28$.

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0,4 = P(B)$ donc A et B sont indépendants.

c. $P(A \cap B) = 0,2$ et $P(A)P(B) = 0,2$ donc A et B sont indépendants.

34 A et B sont indépendants avec $P(B) \neq 0$ donc

$P(A) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. De plus, $P(B) \neq 1$ donc FAUX.

35 1. A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} = \frac{7}{12}$

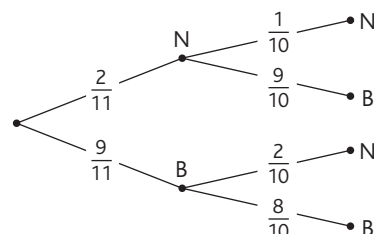
$P(\overline{A \cup C}) = 1 - P(A \cup C) = 1 - (P(A) + P(C) - P(A \cap C)) = \frac{1}{5}$.

2. $P(A)P(C) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{10}$ donc A et C ne sont pas indépendants.

$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{7}{24}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{12} = P(B)$ donc B et C sont indépendants.

36 Réponses en fin de manuel.

37 1.a.

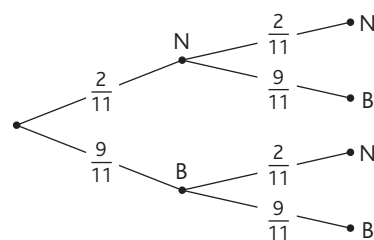


b. $P(\text{« 2 boules de même couleur »})$

$= P(N \cap N) + P(B \cap B) = \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} + \frac{9}{11} \times \frac{8}{10} = \frac{37}{55}$.

2.a. A et B sont indépendants car le tirage est réalisé avec remise.

b.



c. $P(\text{« 2 boules de même couleur »})$

$= P(N \cap N) + P(B \cap B) = \frac{2}{11} \times \frac{2}{11} + \frac{9}{11} \times \frac{9}{11} = \frac{85}{121}$.

38 Réponses à la fin du manuel.

39 Lors d'une grossesse, la probabilité d'avoir des jumeaux est égale à 0,01 et les grossesses sont indépendantes donc la probabilité d'avoir deux fois des jumeaux est égale à 0,0001.

40 Posons A : « Gagner à domicile » et B : « Gagner à l'extérieur ».

	À domicile	À l'extérieur	Total
Défaites	5	12	17
Nuls	6	5	11
Victoires	8	2	10
Total	19	19	38

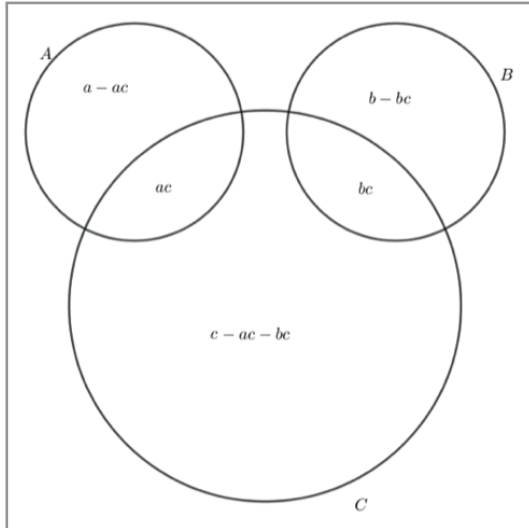
D'après le tableau : $P(A) = \frac{8}{38}$; $P(B) = \frac{2}{38}$ et $P(A \cap B) = 0$.

Donc ces deux événements ne sont pas indépendants, ils sont incompatibles.

Il pourrait être intéressant d'étudier l'indépendance éventuelle entre les événements « Gagner » et « Gagner à domicile ».

Exercices - Perfectionnement

- 41** 1. A et C indépendants donc $P(A \cap C) = ac$.
B et C indépendants donc $P(B \cap C) = bc$.



$$2. P(A \cup B \cup C) = \frac{11}{12}$$

$$\Leftrightarrow a - ac + ac + b - bc + bc + c - ac - bc = \frac{11}{12}$$

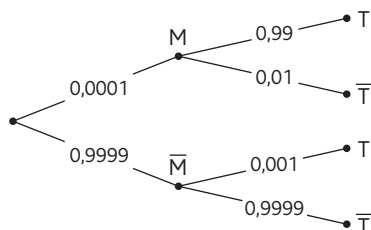
$$\Leftrightarrow a + b + c - ac - bc = \frac{11}{12}$$

$$\begin{cases} a + b + c - ac - bc = \frac{11}{12} \\ a + c - ac - bc = \frac{2}{3} \\ b + c - ac - bc = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{4} \\ c = \frac{6}{7} \end{cases}$$

3. $P(A) = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{1}{4}$ et $P(C) = \frac{6}{7}$.

- 42** Si elle jouait la première, la probabilité de perdre serait $\frac{1}{4}$.
Si elle joue la dernière, la probabilité qu'elle perde est $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Donc Line a tort d'être mécontente.

43



M : « La personne choisie est malade »

T : « La personne choisie est positive au test »

On calcule d'abord $P(T)$ grâce à la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T)$$

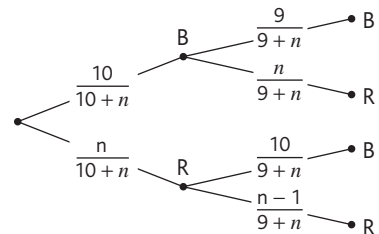
$$= 0,0001 \times 0,99 + 0,9999 \times 0,001 = 0,0010989.$$

$$\text{Puis : } P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0001 \times 0,99}{0,0010989} = 0,09009009$$

qui est très inférieur à 0,95.

Ce test n'est donc pas efficace.

44 1.



2.

Valeurs de X	4	-1	-6
Probabilités	$\frac{10}{10+n} \times \frac{9}{9+n}$ $= \frac{90}{(10+n)(9+n)}$	$\frac{20n}{(10+n)(9+n)}$	$\frac{n(n-1)}{(10+n)(9+n)}$

$$3. E(n) = 4 \times \frac{90}{(10+n)(9+n)} + (-1) \times \frac{20n}{(10+n)(9+n)} + (-6) \times \frac{n(n-1)}{(10+n)(9+n)}$$

$$= \frac{360 - 20n - 6n(n-1)}{(10+n)(9+n)}$$

$$E(n) = \frac{360 - 20n - 6n^2 + 6n}{(10+n)(9+n)} = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(10+n)(9+n)}.$$

$$\text{Or } (n+9)(-6n+40) = -6n^2 + 40n - 54n + 360$$

$$= -6n^2 - 14n + 360, \text{ soit :}$$

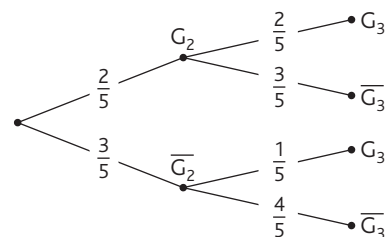
$$E(n) = \frac{(n+9)(-6n+40)}{(n+10)(n+9)} = \frac{-6n+40}{(n+10)}.$$

4. Comme n est un entier naturel, $n+10$ est strictement positif. Le signe de $E(n)$ ne dépend donc que de celui de $-6n+40$.

Or $-6n+40 > 0$ si et seulement si $-6n > -40$ ou encore si et seulement si $n < \frac{40}{6}$.

Or $\frac{40}{6} \approx 6,67$ donc l'espérance est strictement positive pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ou 6 .

45 1.

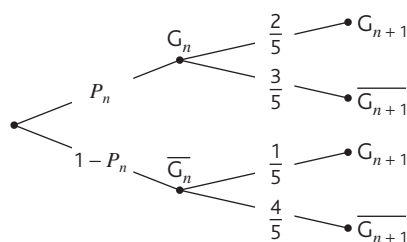


$$P_3 = P(G_3) = P(G_2 \cap G_3) + P(\bar{G}_2 \cap G_3) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{4}{25} + \frac{3}{25} = \frac{7}{25},$$

d'après la formule des probabilités totales.

2.



3. D'après la formule des probabilités totales :

$$P_{n+1} = P(G_{n+1}) = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G_n} \cap G_{n+1})$$

$$= P_n \times \frac{2}{5} + (1 - P_n) \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}P_n + \frac{1}{5}$$

4.a. Pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = P_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}P_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}P_n - \frac{1}{20}$$

$$= \frac{1}{5}\left(P_n - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5}u_n$$

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = P_1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

b. On en déduit que, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

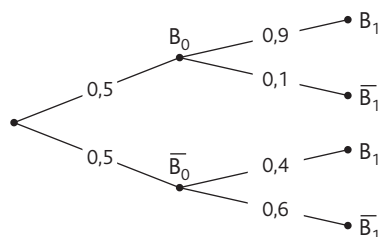
Et comme $u_n = P_n - \frac{1}{4}$ alors $P_n = u_n + \frac{1}{4}$

$$\text{et } P_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}.$$

c. Quand n prend des valeurs de plus en plus grandes, P_n se rapproche de $\frac{1}{4}$.

46 1. $b_0 = 0,5$ (Autant de chances d'être déficitaire que de réaliser des bénéfices.)

2.a.



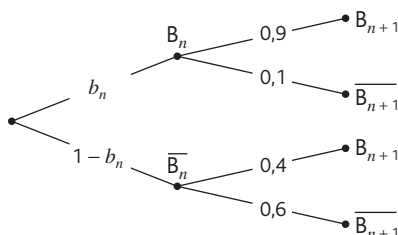
b. D'après la formule des probabilités totales :

$$b_1 = p(B_1) = p(B_0 \cap B_1) + p(\overline{B_0} \cap B_1)$$

$$= 0,5 \times 0,9 + 0,5 \times 0,4 = 0,65.$$

En 2020, la probabilité que l'entreprise réalise des bénéfices est 0,65.

3.a.



b. D'après la formule des probabilités totales :

$$b_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(B_n \cap B_{n+1}) + P(\overline{B_n} \cap B_{n+1})$$

$$b_{n+1} = b_n \times 0,9 + (1 - b_n) \times 0,4 = 0,9b_n + 0,4 - 0,4b_n$$

$$= 0,5b_n + 0,4$$

4.a. " $=0,5 \times B_2 + 0,4$ "

b. La suite semble croissante et les termes semblent se rapprocher de 0,8, ce qui signifie qu'avec le temps, la probabilité pour l'entreprise de réaliser des bénéfices sera de plus en plus grande, et que celle-ci s'approchera de 0,8 à très long terme.

5.a. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = b_{n+1} - 0,8 = 0,5b_n + 0,4 - 0,8 = 0,5b_n - 0,4$$

$$= 0,5\left(b_n - \frac{0,4}{0,5}\right) = 0,5(b_n - 0,8) = 0,5u_n.$$

Donc (u_n) est bien une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_0 = b_0 - 0,8 = 0,5 - 0,8 = -0,3$.

b. On en déduit que, pour tout entier naturel :

$$u_n = -0,3 \times (0,5)^n.$$

Comme $u_n = b_n - 0,8$, alors $b_n = u_n + 0,8$

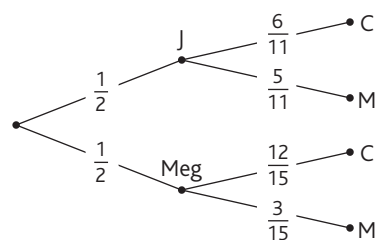
et $b_n = -0,3 \times (0,5)^n + 0,8$.

c. $b_{15} = -0,3 \times (0,5)^{15} + 0,8 = 0,7999908$

Cela signifie qu'en $2019 + 15 = 2034$, la probabilité pour l'entreprise de réaliser des bénéfices sera très proche de 0,8.

6. La fonction, pour une précision donnée par l'utilisateur, donne le rang à partir duquel les termes sont suffisamment proches de 0,8. Ici, par exemple, on retrouve le fait que c'est à partir de b_5 que l'écart entre les termes et 0,8 est inférieur à 0,01. Ce résultat était déjà observable dans la feuille de calcul donnée précédemment.

47



$$P(M) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{11} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{15} = \frac{18}{55}$$

Ateliers algorithmiques et numériques

Atelier 1

Objectif : réaliser un script modélisant un jeu faisant intervenir le lancer de deux dés.

1.a. `randint(1,6)` permet de modéliser le lancer d'un dé.

b. `randint(1,6) + randint(1,6)` modélise la somme de deux dés.

`randint(2,12)` ne modélise pas la somme de deux dés car les sommes obtenues lors du lancer de deux dés ne sont pas équiprobables.

Chapitre 6 • Probabilités conditionnelles

2. Voir le fichier C06_Atelier1(1)_Cor.

```
from random import randint

def joueur1():
    s = 0
    for i in range(5):
        D = randint(1,6) + randint(1,6)
        if D==7:
            return "Perdu"
        else:
            s = s + D
    return s
```

3.a. Voir le fichier C06_Atelier1(2)_Cor.

```
def comparaison(a,b):
    if a<b:
        return str(a)+'<'+str(b)
    elif a>b:
        return str(a)+'>'+str(b)
    else:
        return str(a)+'='+str(b)
```

b. Voir le fichier C06_Atelier1(3)_Cor.

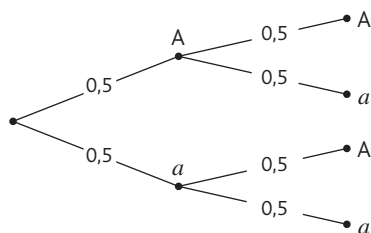
```
def jeu():
    # Simulation du jeu du joueur 1
    S1 = 0
    for i in range(5):
        D = randint(1,6) + randint(1,6)
        if D==7:
            return "Le joueur 1 a perdu"
        else:
            S1 = S1 + D
    # Simulation du jeu du joueur 2
    S2 = 0
    for i in range(5):
        D = randint(1,6) + randint(1,6)
        if D==7:
            return "Le joueur 2 a perdu"
        else:
            S2 = S2 + D
    if S1<S2:
        return "Le joueur 2 a gagné"
    elif S1>S2:
        return "Le joueur 1 a gagné"
    else:
        return "Match nul"
```

Atelier 2

Objectifs : conjecturer une propriété sur les proportions de différents génotypes et découvrir la loi de Hardy-Weinberg.

Partie A

1.a.



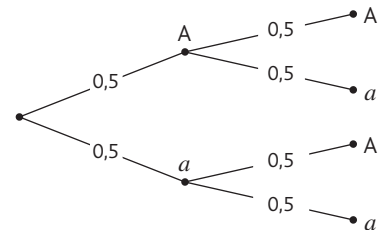
b. Les différents génotypes sont AA, Aa et aa.

c. $P(AA) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$; $P(aa) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$; $P(Aa) = 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 = 0,5$.

2.a. Chaque parent ne pouvant transmettre que l'allèle A, l'enfant aura pour génotype AA.

b. De même, l'enfant aura pour génotype aa.

3. Dressons l'arbre de probabilités traduisant la situation :

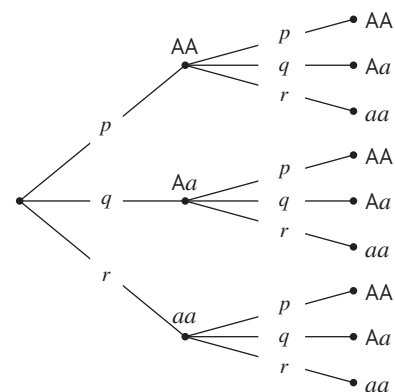


Les génotypes sont AA, Aa.

$P(AA) = (Aa) = 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 = 0,5$

Partie B

1.



2.a. La probabilité qu'un enfant ait deux parents ayant pour génotype AA est $p \times p = p^2$.

b. La probabilité qu'un enfant ait deux parents ayant pour génotype aa est r^2 .

c. La probabilité qu'un enfant ait deux parents ayant pour génotype Aa est q^2 .

3.a. La probabilité qu'un enfant ait un parent ayant pour génotype AA et l'autre aa est $p \times r + r \times p = 2pr$.

b. La probabilité qu'un enfant ait un parent ayant pour génotype Aa et l'autre AA est $p \times q + q \times p = 2pq$.

4.

Génotypes parents		Probabilités des génotypes parents	Probabilités conditionnelles du génotype de l'enfant		
			AA	Aa	aa
AA	AA	p^2	1	0	0
AA	Aa	$2pq$	0,5	0,5	0
AA	aa	$2pr$	0	1	0
Aa	Aa	q^2	0,25	0,5	0,25
Aa	aa	$2qr$	0	0,5	0,5
Aa	aa	r^2	0	0	1

5. Il suffit d'utiliser le tableau précédent comme si c'était un arbre : le génotype du couple des parents constituerait le premier niveau de celui-ci (5 branches) et le deuxième niveau représenterait le génotype de leur enfant.

a. Ainsi :

$$p_1 = p^2 \times 1 + 2pq \times 0,5 + 2pr \times 0 + q^2 \times 0,25 + 2qr \times 0 + r^2 \times 0 \\ = p^2 + pq + \frac{1}{4}q^2 = \left(p + \frac{1}{2}q\right)^2.$$

b. De même :

$$q_1 = 2pq \times 0,5 + 2pr \times 1 + q^2 \times 0,5 + 2qr \times 0,5 \\ = 0,5\left(b_n - \frac{0,4}{0,5}\right) = 0,5(b_n - 0,8) = 0,5u_n$$

et par ailleurs

$$2\left(p + \frac{1}{2}q\right)\left(\frac{1}{2}q + r\right) = pq + 2pr + 0,5q^2 + qr.$$

c. Enfin :

$$r_1 = 0,25 \times q^2 + 0,5 \times 2qr + r^2 = 0,25q^2 + qr + r^2 = \left(\frac{1}{2}q + r\right)^2.$$

d. Avec $p = 0,2$, $q = 0,5$ et $r = 0,3$ on obtient : $p_1 = 0,2025$, $q_1 = 0,495$ et $r_1 = 0,3025$.

Partie C

1. Voir le fichier C06_Atelier2.cor

	A	B	C	D
1	Génération	p=0,2	q=0,5	r=0,3
2	0	0,2	0,5	0,3
3	1	0,2025	0,495	0,3025
4	2	0,2025	0,495	0,3025
5	3	0,2025	0,495	0,3025
6	4	0,2025	0,495	0,3025
7	5	0,2025	0,495	0,3025
8	6	0,2025	0,495	0,3025
9	7	0,2025	0,495	0,3025
10	8	0,2025	0,495	0,3025
11	9	0,2025	0,495	0,3025
12	10	0,2025	0,495	0,3025
13	11	0,2025	0,495	0,3025

2. Il semble que les probabilités des différents génotypes sont identiques quelle que soit la génération.

Être prêt pour le bac

48 Q1. $0,4 \times 0,7 + 0,6 \times 0,3 = 0,46$

Q2. $P_B(A) = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{7}{9}}{\frac{1}{5} \times \frac{7}{9} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{6}} = \frac{7}{37}$

Q3. $P(R) = \frac{1}{10} \times \frac{35}{100} + \frac{4}{10} \times \frac{55}{100} + \frac{5}{10} \times \frac{20}{100} = \frac{355}{1000}$

Q4. $P(D) = P(C \cap D) + P(\bar{C} \cap D) = \frac{1}{2} + \frac{5}{13} = \frac{23}{26}$

Q5. $P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{11}{15}$

Q6. $P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

Q7. $P(M \cap N) = P(M) \times P_M(N) = 0,01 \times 0,4 = 0,004$

Q8. $P(S) = \frac{20}{100} \times \frac{1}{2} + \frac{80}{100} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{30}$

Q9. $P(F \cap P) = P(F)P_F(P) = \frac{60}{100} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{25}$

Q10. $P(A)P(B) = 0,42$

$P(A \cap B) = 0,5$ donc A et B ne sont pas indépendants.

49 1. $\frac{150\,000}{65\,000\,000} \approx 0,0023$ soit 0,23 %.

2. Test salivaire :



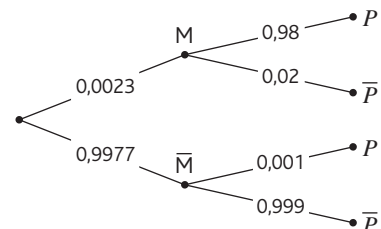
3.a. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(P) = P(M \cap P) + P(\bar{M} \cap P) \\ = 0,0023 \times 0,92 + 0,9977 \times 0,02 = 0,0032517.$$

b. La probabilité que le test se trompe est donnée par :

$$P(M \cap \bar{P}) + P(\bar{M} \cap P) = 0,0023 \times 0,08 + 0,9977 \times 0,02 \\ = 0,020138.$$

4. On refait un arbre traduisant la situation du test sanguin :



On fait le calcul avec les nouvelles valeurs :

$$P(M \cap \bar{P}) + P(\bar{M} \cap P) = 0,0023 \times 0,02 + 0,9977 \times 0,001 \\ = 0,0010437.$$

5. La probabilité d'erreur du test salivaire (plus de 2 % d'erreur tout de même) est bien plus élevée que celle du test sanguin, ce qui explique le choix de ne commercialiser que le test sanguin.

50 1. Les deux feux n'étant pas synchronisés, on peut les considérer comme indépendants.

2. La probabilité que le deuxième feu soit vert est :

$$P(F_2) = \frac{45}{110}.$$

3. La probabilité que les deux feux soient verts est :

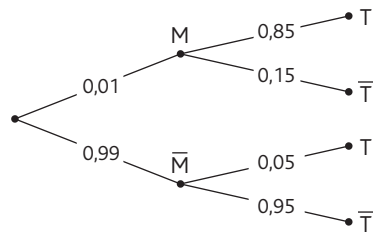
$$P(F_1 \cap F_2) = 0,4 \times \frac{45}{110} = \frac{9}{55}.$$

4. Comme les événements F_1 et F_2 sont indépendants, il en va de même pour $\bar{F}_1$ et $\bar{F}_2$, soit :

$$P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2) = P(\bar{F}_1) \times P(\bar{F}_2) = 0,6 \times \frac{55}{110} = \frac{3}{10}.$$

Chapitre 6 • Probabilités conditionnelles

51 1.



2. D'après la formule des probabilités totales :

$$p(T) = p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T) = 0,01 \times 0,85 + 0,99 \times 0,05 = 0,058.$$

3.a.

Valeurs de X	$250 - 100 = 150$	-1 000	250
Probabilités	0,058	0,0015	0,9405

b. $E(X) = 150 \times 0,058 - 1\,000 \times 0,0015 + 250 \times 0,9405 = 242,325$

Cela signifie que le gain moyen pour un animal est de 242,325 €.

c. $242,325 \times 200 = 48\,465$

L'éleveur peut espérer une recette de 48 465 €.

Chapitre 7 • Variables aléatoires discrètes finies

Activités du cours

1 Espérance d'une variable aléatoire discrète

Objectif : revoir la notion de première sur l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

1. Il y a effectivement davantage de gagnants que de perdants. La probabilité de gagner est de $\frac{2}{3}$ et celle de perdre est de $\frac{1}{3}$.

2. $P(G = 1) = \frac{1}{2}$; $P(G = -5) = \frac{1}{3}$.

3. Gain total :

$$10 \times (-5) + 10 \times (-5) + 10 \times 1 + 10 \times 1 + 10 \times 1 + 10 \times 5 = -20.$$

Gain moyen : $\frac{-20}{60} = \frac{-1}{3}$.

4. $E(G) = 5 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + (-5) \times \frac{1}{3} = \frac{-1}{3}$.

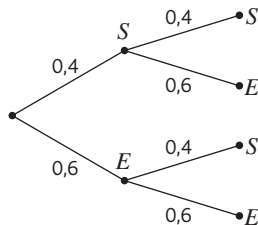
On retrouve bien le résultat précédent.

2 Loi binomiale

Objectif : à partir d'une épreuve de Bernoulli, découvrir le schéma de Bernoulli puis la notion de loi binomiale.

1. $p = 0,4$.

2.a.



b.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,36	0,48	0,16

c. $E(X) = 0 \times 0,36 + 1 \times 0,48 + 2 \times 0,16 = 0,8$.

d. $n \times p = 2 \times 0,4 = 0,8$. On retrouve le même résultat que précédemment.

À votre tour !

1. Espérance de gain : $(-6) \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{5}{6} = \frac{19}{6}$.

2.a. $n = 3$ et $p = 0,3$.

b. $P(X = 1) = 0,441$. La probabilité qu'une seule personne achète des chouquettes est de 0,441.

3 Loi binomiale et coefficients binomiaux

Objectif : dénombrer le nombre de chemin à k succès parmi n . Notation et définition des coefficients binomiaux.

1. $\binom{4}{2} = 6$

2. $P(X = 2) = 0,3456$

3. $\binom{4}{0} = 1$; $\binom{4}{1} = 4$; $\binom{4}{3} = 4$; $\binom{4}{4} = 1$

4 Triangle de Pascal

Objectif : découverte du triangle de Pascal.

1. $\binom{2}{1} = 2$; $\binom{3}{2} = 3$

2.a. Il reste à réaliser 3 épreuves et un seul succès.

b. Il y a $\binom{3}{2}$ chemins qui commencent par un échec.

c. $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6$

d. À compléter

À votre tour !

1.a. tous les feux soient verts : 0,004.

b. au moins 5 feux soient verts : 0,041.

c. aucun feu ne soit vert : 0,047.

2.a. $P(X = 3) = 0,3087$

b. $P(X \geq 4) = 0,52822$

Exercices – Échauffement

1 Réponses dans le manuel.

2 Réponses dans le manuel.

3 1. X prend les valeurs 1,5 ; 2 ; 3.

2.

x_i	1,5	2	3
$P(X = x_i)$	0,15	0,05	0,8

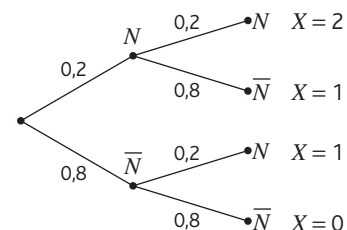
3. $E(X) = 1,5 \times 0,15 + 2 \times 0,05 + 3 \times 0,8 = 2,725$

On peut espérer, sur un grand nombre de brioches, un prix de vente moyen de 2,725 €.

4 Réponses dans le manuel.

5 1. $n = 2$; $p = 0,2$.

2.



3. $P(X = 0) = 0,8^2 = 0,64$

$P(X = 1) = 2 \times 0,2 \times 0,8 = 0,32$

$P(X = 2) = 0,2^2 = 0,04$

6 1.a. $P(X = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

b. $P(X = 1) = 3 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

c. $P(X = 2) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

2. $E(X) = np = 3 \times \frac{1}{3} = 1$

7 Réponses dans le manuel.

8 Réponses dans le manuel.

9 Réponses dans le manuel.

10 $0,95^8 \approx 0,663$
La probabilité que les 8 pièces soient conformes est de 0,663 environ.

11 Réponses dans le manuel.

12 Réponses dans le manuel.

13 1. $n = 5$ et $p = 0,5$.

2.

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

3. $P(F = 3) = \binom{5}{3} \times 0,5^3 \times 0,5^2 = 10 \times 0,5^5 = 0,3125$

La probabilité d'obtenir exactement trois fois « Face » est de 0,3125.

4. $P(F \geq 3) = P(F = 3) + P(F = 4) + P(F = 5)$
 $= 0,3125 + 5 \times 0,5^4 \times 0,5^1 + 0,5^5 = 0,5$

La probabilité d'obtenir au moins trois fois « Face » est de 0,5.

Exercices – Entraînement

14 Réponses dans le manuel.

15 $E(Y) = -3 \times \frac{3}{9} - 1 \times \frac{2}{9} + 0 \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{1}{9} + 5 \times \frac{1}{9} = -\frac{5}{9}$

16 1.

d_i	-3	2	5
$P(D = d_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

2. $E(D) = -3 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{6} = 0$

L'espérance est égale à 0, en moyenne, sur un grand nombre d'utilisations. Cette carte « chance » ne réalisera aucun déplacement.

17 Réponses dans le manuel.

18 1.

Gain g_i	0	10	20	50	100
$P(G = g_i)$	0,955	0,025	0,0125	0,005	0,0025

2. $E(G) = 0 \times 0,955 + 10 \times 0,025 + 20 \times 0,0125 + 50 \times 0,005 + 100 \times 0,0025 = 1$

3. Le gain espéré par billet est de 1 €.

4. Les élèves devront fixer un prix minimum égal à 1 € pour ne pas perdre d'argent.

19 1. La ligne 2 teste si les deux listes sont de dimensions différentes. Dans ce cas, on retourne un message d'erreur.

2. for i in range(len(liste1)):
 esp=esp+liste1[i]*liste2[i]

3. Le résultat affiché est 17.

20 1.

x_i	0	20	40	60	100
$P(X = x_i)$	0,8	0,1	0,05	0,02	0,03

2.a. $\{X > 0\}$ (le coût de réparation est strictement positif), signifie que le client fait intervenir sa garantie.

b. $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,8 = 0,2$

3.a. $E(X) = 0 \times 0,8 + 20 \times 0,1 + 40 \times 0,05 + 60 \times 0,02 + 100 \times 0,03 = 8,2$

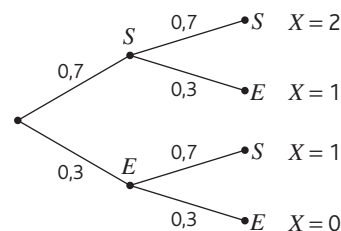
L'entreprise espère un coût de réparation de 8,20 € par téléphone vendu.

b. $250 - 200 - 8,2 = 41,8$

Le bénéfice espéré par téléphone vendu est de 41,80 €.

21 1.a. $q = 1 - 0,7 = 0,3$

b.



2.a. Voir l'arbre ci-dessus.

b. X prend les valeurs 0 ; 1 ; 2.

c. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 0,7$.

3.a. $P(X = 1) = 2 \times 0,7 \times 0,3 = 0,42$

La probabilité d'avoir exactement un succès est 0,42.

b. $P(X = 2) = 0,7^2 = 0,49$

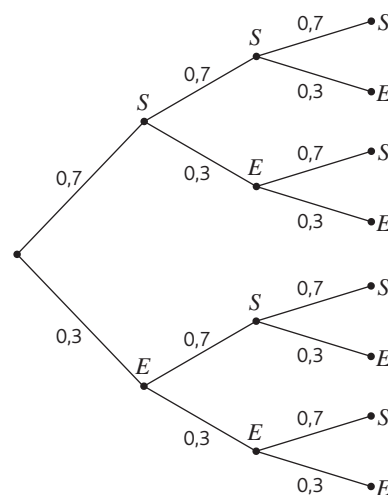
La probabilité d'avoir exactement deux succès est 0,49.

c. $P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,42 + 0,49 = 0,91$

La probabilité d'avoir au moins un succès est 0,91.

22 Réponses dans le manuel.

23 1.



2.a. Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,7$. On effectue 3 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes. X représente le nombre de succès, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,7$.

b. $\{X = 0\}$: Le tireur ne réussit aucun de ses tirs.

$\{X = 2\}$: Le tireur réussit exactement deux tirs.

$\{X \geq 2\}$: Le tireur réussit au moins deux tirs.

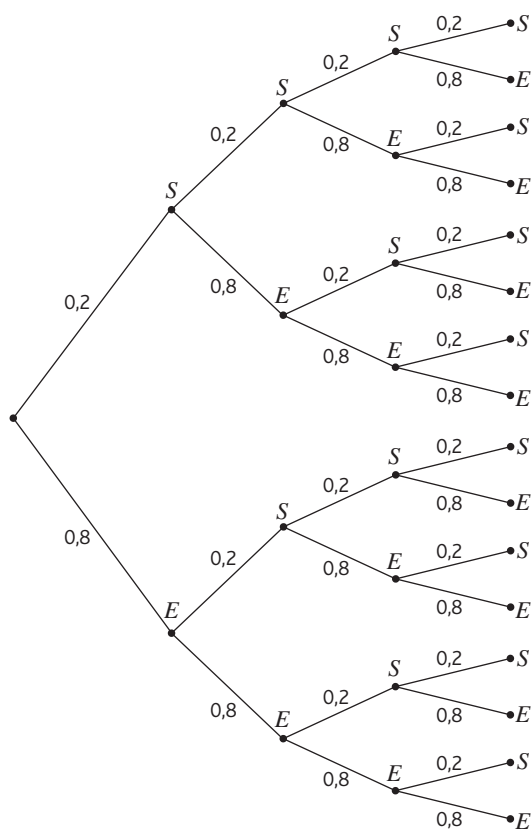
$\{X \leq 2\}$: Le tireur réussit au plus deux tirs.

c. $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3)$
 $= 3 \times 0,7^2 \times 0,3 + 0,7^3 = 0,784$

La probabilité que l'équipe reprenne l'avantage est de 0,784.

- 24 1. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,2$.

2.a.



b. $P(X = 0) = 0,8^4 = 0,4096$. La probabilité que tous les appareils aient une panne légère est de 0,4096.

c. $P(X = 1) = 4 \times 0,2 \times 0,8^3 = 0,4096$. La probabilité qu'un seul appareil ait une panne lourde est de 0,4096.

d. $\{X \leq 2\}$: Le nombre de pannes lourdes est inférieur ou égal à deux.

$P(X \leq 2) = 1 - P(X \geq 3) = 1 - P(X = 3) - P(X = 4)$
 $= 1 - 4 \times 0,2^3 \times 0,8 - 0,2^4 = 0,9728$

3. $E(X) = np = 4 \times 0,2 = 0,8$

On peut espérer avoir en moyenne 0,8 pannes « lourdes » dans un grand nombre de lots de quatre appareils.

- 25 1.a. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,488$.

b. X prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 ; 3.

2.a. $\{X = 0\}$: Le pédiatre n'a aucune fille en consultation.

b. $\{X = 3\}$: Le pédiatre n'a que des filles en consultation.

c. $\{X \geq 1\}$: Le pédiatre a au moins une fille en consultation.

3.a. $P(X = 2) = 3 \times 0,488^2 \times 0,512 \approx 0,366$.

La probabilité que ce pédiatre ait exactement 2 filles en consultation est de 0,366 environ.

b. $P(X = 0) = 0,512^3 \approx 0,134$.

La probabilité que ce pédiatre n'ait que des garçons en consultation est 0,134 environ.

26 Réponses dans le manuel.

- 27 1.a. Il y a 6 chemins à 2 succès. b. $\binom{4}{2} = 6$
 2. $\binom{4}{0} = 1$; $\binom{4}{1} = 4$; $\binom{4}{2} = 6$; $\binom{4}{3} = 4$; $\binom{4}{4} = 1$.

28 Réponses dans le manuel.

29 a. $P(X = 2) = \binom{7}{2} \times 0,2^2 \times 0,8^5 = 21 \times 0,2^2 \times 0,8^5$
 $= 0,2752512 \approx 0,2753$

b. $P(X = 3) = \binom{7}{3} \times 0,2^3 \times 0,8^4 = 35 \times 0,2^3 \times 0,8^4$
 $= 0,114688 \approx 0,1147$

- 30 1.a. 0 succès : 1 chemin.

1 succès : 6 chemins.

5 succès : 6 chemins.

6 succès : 1 chemin.

b. $\binom{6}{0} = 1$; $\binom{6}{1} = 6$; $\binom{6}{5} = 6$; $\binom{6}{6} = 1$

2. La variable aléatoire R suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,3$.

3.a. $P(R = 0) = 0,7^6 \approx 0,12$. La probabilité de n'obtenir aucune boule rouge est de 0,12 environ.

b. $P(R = 1) = \binom{6}{1} \times 0,3 \times 0,7^5 = 6 \times 0,3 \times 0,7^5 \approx 0,30$

- 31 1. $\{F \geq 2\}$: Le joueur obtient au moins deux fois le côté face.

2.a. $P(F = 0) = 0,5^4 \times 0,063$

b. $P(F = 1) = 4 \times 0,5 \times 0,5^4 = 0,25$

3.a. $P(F = 0) = 0,5^n$

$P(F = 1) = \binom{n}{1} \times 0,5 \times 0,5^{n-1} = n \times 0,5^n$

b. $P(F \leq 1) = P(F = 0) + P(F = 1) = 0,5^n + n \times 0,5^n$
 $= (1 + n)0,5^n$

4.a. $P(F \geq 2) \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - P(F \leq 1) \geq 0,999$

$\Leftrightarrow -P(F \leq 1) \geq -0,001 \Leftrightarrow P(F \leq 1) \leq 0,001$

b. Exemple de programme en Python :

```
n=1
while (1+n)*0.5**n>0.001:
    n=n+1
print(n)
```

Le résultat affiché est : 14.

Il faut au moins 14 lancers pour que la probabilité qu'il obtienne au moins deux fois le côté face soit égale soit supérieure ou égale à 0,999.

32 1.a. $p = \frac{1}{6}$ b. $\binom{3}{0} = 1$

c. $\{X = 0\}$: Le joueur n'a obtenu aucun 6 dans sa série de lancers.

d. $P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$

2.a. $\binom{n}{0} = 1$ b. $P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$

3.

```
def proba(n):
    return (5/6)**n
```

4.a. Ce programme permet de trouver n le nombre de lancers, pour que la probabilité de l'évènement « obtenir aucun 6 » soit inférieure à x .

b. Il faut 17 lancers pour que la probabilité de l'évènement « obtenir aucun 6 » soit inférieure à 0,05.

33 $P(X = 1) = \binom{8}{1} \times 0,4 \times 0,6^7 = 8 \times 0,4 \times 0,6^7 \approx 0,09$

Par élimination, le seul graphique est le graphique 3.

34 1. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,98$.

2. $\binom{10}{9} = 10$; $\binom{10}{10} = 1$

3.a. $P(X = 9) = \binom{10}{9} \times 0,98^9 \times 0,02$

$= 10 \times 0,98^9 \times 0,02 \approx 0,167$

b. $P(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0,98^{10} = 0,98^{10} \approx 0,817$

c. La probabilité que 9 ampoules durent plus de 20 000 heures, dans un lot de 10, est de 0,167 environ.

La probabilité que toutes les ampoules, dans un lot de 10, durent plus de 20 000 heures est de 0,817 environ.

4. $P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) \approx 0,984$

La probabilité qu'au moins 9 ampoules durent plus de 20 000 heures, dans un lot de 10, est de 0,984 environ.

35 1. $\{X = 4\}$ means: "Kate listens to 4 favorite songs."

2. $P(X = 4) = \left(\frac{20}{80}\right)^4 = 0,25^4 \approx 0,0039$

36

		$k (k \leq n)$										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	0	1										
	1	1	1									
	2	1	2	1								
	3	1	3	3	1							
	4	1	4	6	4	1						
	5	1	5	10	10	5	1					
	6	1	6	15	20	15	6	1				
	7	1	7	21	35	35	21	7	1			
	8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
	9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
	10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

37 Réponses dans le manuel.

38 1. $n = 7$ et $p = 0,75$.

2. $P(A) = P(X = 7) = 0,75^7 \approx 0,1335$

$P(B) = P(X \leq 6) = 1 - P(X = 7) = 1 - 0,75^7 \approx 0,8665$

3.a.

1	7	21	35	35	21	7	1
---	---	----	----	----	----	---	---

$\binom{7}{5} = 21$

b. $P(C) = P(X = 5) = \binom{7}{5} \times 0,75^5 \times 0,25^2$

$= 21 \times 0,75^5 \times 0,25^2 \approx 0,3115$

La probabilité que 2 colis exactement n'arriveront pas le lendemain est de 0,3115.

4.a. $\{X = 4\}$: 4 colis exactement sont livrés le lendemain.

b. $P(X = 4) = \binom{7}{4} \times 0,75^4 \times 0,25^3$

$= 35 \times 0,75^4 \times 0,25^3 \approx 0,1730$

39 On pose X le nombre d'élèves décidés à travailler sur ordinateur. On a $X \sim B(35; 0,6)$.

1.a. $P(X \leq 19) \approx 0,300$.

La probabilité que moins de 20 élèves souhaitent travailler sur un ordinateur est de 0,300 environ.

b. $P(X \geq 25) \approx 0,112$.

La probabilité qu'au moins 25 élèves souhaitent travailler sur un ordinateur, est de 0,112 environ.

c. $P(X = 21) \approx 0,137$.

La probabilité qu'exactly 21 élèves souhaitent travailler sur un ordinateur est de 0,137 environ.

2. $P(X \leq 18) \approx 0,193$.

La probabilité que le documentaliste satisfasse toutes les demandes est de 0,193 environ.

40 1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0,025$.

2. $P(X = 0) = (1 - 0,025)^{150} = 0,975^{150} \approx 0,0224$

La probabilité qu'il n'y ait aucun composant défectueux dans le lot est de 0,0224 environ.

3.a. $P(X = 4) \approx 0,1964$

La probabilité qu'il y ait exactement 4 composants défectueux dans le lot est de 0,1964 environ.

b. $P(X \leq 5) \approx 0,8252$

La probabilité qu'il y ait au plus 5 composants défectueux dans le lot est de 0,8252 environ.

Exercices - Perfectionnement

41 1. $0,36 + 0,06 = 0,42$

La probabilité qu'une personne soit du groupe O est de 0,42.

2.a. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0,42$.

b.

1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
---	---	----	----	-----	-----	----	----	---	---

$$3.a. P(X=4) = \binom{9}{4} \times 0,42^4 \times 0,58^5$$

$$= 126 \times 0,42^4 \times 0,58^5 \approx 0,257$$

La probabilité d'avoir exactement 4 personnes du groupe O est égale à 0,257 environ.

$$b. P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3)$$

$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3)$$

$$= 1 - 0,58^9 - \binom{9}{1} \times 0,42^1 \times 0,58^8 - \binom{9}{2} \times 0,42^2 \times 0,58^7 - \binom{9}{3} \times 0,42^3 \times 0,58^6$$

$$= 1 - 0,58^9 - 9 \times 0,42^1 \times 0,58^8 - 36 \times 0,42^2 \times 0,58^7 - 84 \times 0,42^3 \times 0,58^6$$

$$\approx 0,567$$

La probabilité d'avoir au moins 4 personnes du groupe O est égale à 0,567 environ.

4.a. Y suit une loi binomiale de paramètres $n=9$ et $p=0,06$.

$$b. P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - 0,94^9 \approx 0,427$$

La probabilité que le médecin obtienne satisfaction est égale à 0,427 environ.

42 Partie A

1.

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

2. S prend les valeurs 2, 3, 4, 5, 6, 7, et 8.

$$3. P(S=4) = \frac{\text{Nb cas favorables}}{\text{Nb issues possibles}} = \frac{3}{16}$$

4.

s_i	2	3	4	5	6	7	8
$P(S=s_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$5.a. P(A) = P(S=5) = \frac{4}{16} = 0,25$$

$$b. P(B) = P(S \leq 7) = 1 - P(S=8) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375$$

$$c. P(C) = P(S \geq 6) = P(S=6) + P(S=7) + P(S=8)$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0,375$$

$$d. P(D) = 0$$

$$6. E(S) = 2 \times \frac{1}{16} + 3 \times \frac{2}{16} + 4 \times \frac{3}{16} + 5 \times \frac{4}{16} + 6 \times \frac{3}{16} + 7 \times \frac{2}{16} + 8 \times \frac{1}{16} = 5$$

Sur un grand nombre de lancers, on peut espérer une moyenne de la somme des faces égale à 5.

Partie B

1.a. N suit une loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=0,25$, donc $E(N) = np = 4 \times 0,25 = 1$

b. Fanny peut espérer gagner une fois.

$$2.a. P(N=0) = 0,75^4 \approx 0,3164$$

La probabilité que Fanny perde toutes ses parties est égale à 0,3164 environ.

$$b. P(N \geq 1) = 1 - P(N=0) = 1 - 0,75^4 \approx 0,6836$$

La probabilité que Fanny gagne au moins une fois est égale à 0,6836 environ.

43 QCM

1. Réponse c.

3. Réponse d.

5. Réponse c.

2. Réponse a.

4. Réponse c.

44

1. X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,127$.

$$2.a. P(X=0) = (1-0,127)^{10} = 0,873^{10} \approx 0,2571$$

La probabilité pour qu'il n'y ait aucun gaucher dans cette classe est égale à 0,2571 environ.

$$b. 1 - 0,2571 = 0,7429$$

La probabilité qu'il y ait un problème lors de l'attribution (présence d'au moins un gaucher) est égale à 0,7429 environ.

$$3.a. P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= 0,873^{10} + 10 \times 0,127 \times 0,873^9 \approx 0,6312$$

$$b. 1 - 0,6312 = 0,3688$$

La probabilité qu'il y ait un problème lors de l'attribution (présence d'au moins deux gauchers) est égale à 0,3688 environ.

45

1. N suit une loi binomiale de paramètres $n=7$ et $p=0,95$.

$$2.a. \binom{7}{5} = 21$$

$$b. P(N=5) = \binom{7}{5} \times 0,95^5 \times 0,05^2$$

$$= 21 \times 0,95^5 \times 0,05^2 \approx 0,0406$$

La probabilité qu'exactly 5 factures soient correctes est égale à 0,0406 environ.

$$3.a. P(N=6) = \binom{7}{6} \times 0,95^6 \times 0,05$$

$$= 7 \times 0,95^6 \times 0,05 \approx 0,2573$$

$$b. P(N=7) = 0,95^7 \approx 0,6983$$

4.a. $\{N \geq 6\}$ est l'évènement : « Le nombre de factures correctes est au moins égal à 6. »

$$b. P(N \geq 6) = P(N=6) + P(N=7)$$

$$P(N \geq 6) \approx 0,2573 + 0,6983$$

$$P(N \geq 6) \approx 0,9556$$

Ateliers algorithmiques et numériques

Atelier 1 : Simulation d'un schéma de Bernoulli

1.a. L'instruction `random()` retourne un nombre compris entre 0 et 1.

b. La probabilité de l'évènement `random() < p` est égale à p .

c. On effectue une simulation de 4 épreuves de Bernoulli avec une probabilité de succès égale à 0,3.

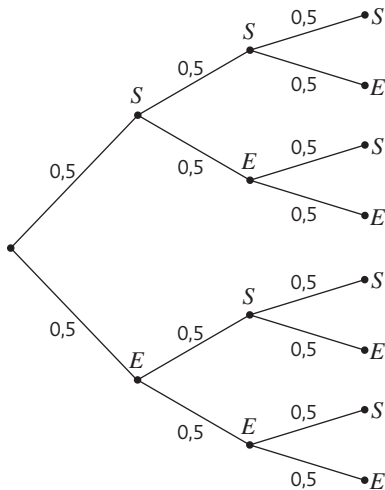
Le résultat de cette simulation est S-S-E-E.

2.a. Il faut écrire `ber(3,0.5)`.

Le nombre de succès (variable) sera compris entre 0 et 3.

b. À ce niveau, il y aura des écarts importants. Toutefois, un grand nombre de résultats se situeront entre 0,2 et 0,6. Le but est de faire une expérience sur un échantillon de petite taille, avant de le faire en Python sur un échantillon de grande taille.

c.



$p = 3 \times 0,5^3 = 0,375$. La probabilité d'obtenir exactement 2 succès est égale à 0,375.

3.a. La taille de l'échantillon est de 10^4 .

b. L'instruction `sum(ber(n,p))` de la ligne 15 retourne le nombre de succès lors d'une simulation de n épreuves de Bernoulli de paramètre p .

c. Dans la majorité des cas, l'écart avec le résultat du 2.c. est inférieur à 0,01.

4. Il faut écrire `proba(10,1/6,2)`. La probabilité de cet événement est égale à 0,291 à 0,001 près. Dans la majorité des cas, les résultats affichés seront compris entre 0,28 et 0,30.

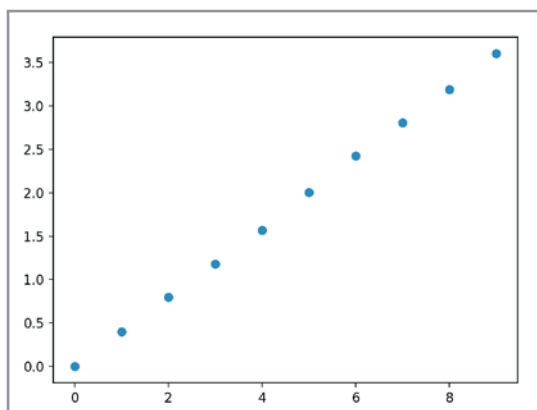
Atelier 2 : Espérance d'une loi binomiale

1.a.

```
19 def esp(n,p):
20     somme=0
21     for i in range(n+1):
22         somme=somme+i*proba(n,p,i)
23     return somme
```

b. Tout résultat « proche » de 3. Généralement compris entre 2,95 et 3,05.

2.a. On obtient des points alignés avec l'origine du repère. Par exemple avec `graph1(0.4)` :



b. Pour une valeur p fixée, l'espérance de X et le nombre d'épreuves sont proportionnels.

Atelier 3 : Triangle de Pascal

1.

	k =				
	0	1	2	3	4
n = 0	1				
n = 1	1	1			
n = 2	1	2	1		
n = 3	1	3	3	1	
n = 4	1	4	6	4	1

2.a. On obtient [1,3,3,1] la ligne $n = 3$ du triangle de Pascal.

b. Il faut effectuer `lignesuivante([1,3,3,1])`

3.a. `res=([1])` initialise la liste (de listes) `res`. Son premier élément est la liste [1].

b. `liste` prend la valeur de la liste de rang i , de la liste de listes `res`.

$$\binom{6}{3} = 20$$

4.a. N suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,7$.

b. En utilisant l'instruction `pascal(5)`, on a $\binom{5}{3} = 10$.

$$P(N = 3) = \binom{5}{3} \times 0,7^3 \times 0,3^2 = 10 \times 0,7^3 \times 0,3^2 = 0,3087$$

La probabilité que la cible soit atteinte exactement 3 fois est égale à 0,3087.

Atelier 4 : Simulation de la probabilité d'un achat

1. Le résultat est une liste de longueur 20. Cette liste contient des 0 et 1 :

1 si la personne achète une glace, 0 dans le cas contraire.

2.a.b. Lors de cette simulation, la fréquence de personnes ayant acheté une glace est de 0,05.

3. Il faut écrire l'instruction : `liste_frequences(20,0.1,700)`.

4.a. Les deux graphiques ont la « même forme ».

b. Dans le graphique proposé, il y a eu un seul achat (fréquence achat 0,05) pour 175 groupes environ (lecture sur la seconde barre).

c. À l'aide du graphique « loi binomiale », on estime la probabilité de n'avoir qu'un seul achat à 0,27.

d. $\frac{175}{700} = 0,25$ (le résultat de la question b.) est proche de 0,27 (le résultat de la question c.).

Atelier 5 : Simulation de la probabilité d'un achat

$$1.a. E(X) = 0 \times 0,1 + 1 \times 0,1 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,2 + 4 \times 0,15 + 5 \times 0,05 = 2,35$$

b. En moyenne, elle fera 2,35 ventes par jour.

2.a. Il faut saisir en B4, la formule :

`=LOI.BINOMIALE(A4;A$2;B$2;FAUX)`

b.c. On saisit : `=SOMMEPROD(A4:A24;B4:B24)`.

Le résultat affiché est 2.

Ce résultat était prévisible, il s'agit de l'espérance de X , elle est égale à $n \times p = 20 \times 0,1 = 2$.

d.e. En utilisant le tableau et à 0,001 près :

$P(Y \leq 0) = P(Y = 0) = 0,122$. La probabilité de n'avoir aucune journée sans vente est de 0,122.

$P(Y \leq 1) = 0,122 + 0,270 = 0,392$. La probabilité d'avoir au plus une journée sans vente est de 0,392.

$P(Y \leq 2) = 0,392 + 0,285 = 0,677$. La probabilité d'avoir, au plus, deux journées sans vente est de 0,677.

3.a. Il faut saisir en B4 la formule :

=LOI.BINOMIALE(A4;A\$2;B\$2;VRAI)

b. En C24, le résultat est 1. C'est la somme de toutes les probabilités.

Être prêt pour le bac

46 Q1. $E(X) = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 3 + \frac{1}{4} \times 4 = \frac{10}{4} = 2,5$

Q2. $E(X) = -0,7$

$\Leftrightarrow -5 \times 0,1 - 2 \times 0,4 + 0 \times 0,3 + x \times 0,2 = -0,7$

$\Leftrightarrow -1,3 + 0,2x = -0,7$

$\Leftrightarrow 0,2x = 0,6 \Leftrightarrow x = 3$

Q3. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{3}$.

Q4. $P(X = 1) = 3 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

Q5. $E(X) = np = 3 \times \frac{1}{3} = 1$, L'espérance de X est égale à 1.

Q6. $P(Y = 3) = 0,1^3 = 0,001$

Q7. $\binom{5}{2} = 10$; $\binom{4}{2} = 6$

Q8. $\binom{9}{0} = 1$; $\binom{9}{1} = 9$; $\binom{9}{8} = 9$; $\binom{9}{9} = 1$.

Q9. $E(Z) = np = 8 \times \frac{3}{4} = 6$

Q10. $3 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$. La probabilité d'obtenir exactement une fois « face » est égale à $\frac{3}{8}$.

47 Partie A

1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{8}$.

2. $P(X = 0) = \left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{343}{512} \approx 0,670$

La probabilité d'obtenir aucun logo du magasin est de 0,670 environ.

3.a. $P(X = 2) = \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 \times \frac{7}{8} = 3 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 \times \frac{7}{8} = \frac{21}{512} \approx 0,041$

La probabilité de gagner 10 € est de 0,041 environ.

b. $P(X = 3) = \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512} \approx 0,002$

La probabilité de gagner 100 € est de 0,002 environ.

c. $1 - \frac{21}{512} - \frac{1}{512} = \frac{245}{512} \approx 0,957$. En effet, la probabilité de ne rien gagner est égale à 0,957, donc supérieure à 0,95.

4. $E(X) = np = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0,375$

Partie B

1. $P(Y = 10) = 1 - 0,7 - 0,1 - 0,1 - 0,05 = 0,05$

2. $P(Y \leq 2) = 0,7 + 0,1 + 0,1 = 0,9$

La probabilité de gagner au plus 2 € est de 0,9.

3. $E(Y) = 0 \times 0,7 + 1 \times 0,1 + 2 \times 0,1 + 5 \times 0,05$

$+ 10 \times 0,05 = 1,05$.

Le gain moyen par ticket de caisse est de 1,05 €.

48 1.a. La variable S contient une simulation du nombre de volontaires après une demande auprès de n membres.

b. Il y a eu 3 réponses positives après avoir fait une demande auprès de 5 membres.

c. Non, il n'y aura pas forcément le même résultat. Les réponses possibles sont les entiers de 0 à 5.

2.a. La variable S contient le nombre de fois où il y a eu au moins trois réponses positives après 1 000 simulations.

b. On peut penser que la probabilité d'obtenir au moins trois réponses positives auprès des 5 membres restants est proche de 0,76.

3.a.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

b. $\binom{5}{3} = 10$; $\binom{5}{4} = 5$; $\binom{5}{5} = 1$.

c. $P(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0,65^3 \times 0,35^2$
 $= 10 \times 0,65^3 \times 0,35^2 \approx 0,3364$

$P(X = 4) = \binom{5}{4} \times 0,65^4 \times 0,35 = 5 \times 0,65^4 \times 0,35 \approx 0,3124$

$P(X = 5) = 0,65^5 \approx 0,1160$

d. $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

$P(X \geq 3) \approx 0,3364 + 0,3124 + 0,1160$

$P(X \geq 3) \approx 0,7648$

La probabilité d'obtenir au moins trois réponses positives auprès des 5 membres restants est égale à 0,7648 environ.

49 1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,1$.

2. $E(X) = np = 10 \times 0,1 = 1$.

L'espérance est de 1 ticket gagnant.

3.a. $\binom{10}{0} = 1$

b. $P(X = 0) = \binom{10}{0} \times 0,1^0 \times 0,9^{10} = 0,9^{10} \approx 0,349$

c. La probabilité de n'obtenir aucun ticket gagnant est de 0,349 environ.

d. C'est faux, la probabilité précédente montre que ce joueur peut n'avoir que des tickets perdants (avec une probabilité de 0,349).

4.a. $\{X \geq 1\}$: Le joueur obtient au moins un ticket gagnant.

b. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,9^{10}$

Donc $P(X \geq 1) \approx 0,651$.

5.a.

```
n=0
while 1-0.9**n<0.99:
    n=n+1
print(n)
```

b. Le résultat affiché est 44. Il faudra prendre au moins 44 tickets pour avoir une probabilité d'obtenir au moins un ticket gagnant supérieure ou égale à 0,99.

Thèmes d'étude

Thème 1

À votre tour !

À l'aide des boucles imbriquées « FOR », le script teste chaque couple possible ($x; y$) pour x et y allant de 1 à 7. Chaque bénéfice correspondant à un couple « qui marche » est comparé au précédent. La variable « benef_max » contient le bénéfice le plus grand calculé, la variable « meilleur_couple » contient alors le couple correspondant à ce bénéfice maximal.

Le script ne fournit qu'une solution puisqu'une variable ne peut contenir qu'une seule valeur (ou un seul couple de valeur pour meilleur_couple) à la fois.

Thème 2

Partie A

- Liberté pédagogique de l'enseignant : laisser réfléchir les élèves sur « papier » puis en faisant saisir « à la main » l'algorithme ou passer directement au b.
- Voir le fichier Theme02(1)_cor.

```
from random import *
def f(x):
    return(x**2) # fonction carré
def monte_carlo(N):
    S = 0
    for i in range(N):
        x = random()
        y = random()
        if y < f(x) :
            S = S + 1
    return S/N
```

```
>>> monte_carlo(1000000)
0.332554
```

N	1 000	10 000	1 000 000
monte_carlo(N)	0.323	0.3296	0.332554

- Voir le fichier Theme02(1)_cor2.

```
from random import *
def f(x):
    return(x**2) # fonction carré
def monte_carlo(N):
    S = 0
    for i in range(N):
        x = random()
        y = random()
        if y < f(x) :
            S = S + 1
    return abs(S/N-1/3)
```

- On a déjà quelques résultats, on peut en expérimenter d'autres :

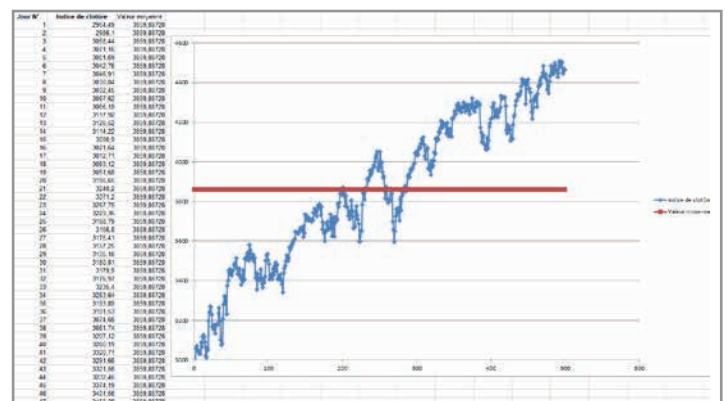
```
>>> monte_carlo(10)
0.06666666666666667
>>> monte_carlo(1000)
0.013666666666666666
>>> monte_carlo(100000)
0.0019666666666666672
>>> monte_carlo(100)
0.046666666666666669
>>> monte_carlo(10000)
0.0013666666666666687
>>> monte_carlo(1000000)
0.0005033333333333001
```

L'affirmation « Multiplier la taille de l'échantillon par 100 permet de diviser l'erreur par 10 » ne semble donc pas toujours vraie...

Partie B

- Plusieurs possibilités s'offrent à l'enseignant :

- demande à l'élève de faire un relevé « à la main » et « au hasard » d'une dizaine de valeurs sur le graphique pour en faire une moyenne puis mise en commun avec la classe pour comparaison/discussion (en utilisant le fichier tableur ou pas) ;



- utiliser un tableur avec la fonction « index » (fichier Monte Carlo_Valeur actif) ;

E2	A	B	C	D	E	F
	Jour N°	Indice de clôture	Nombre de valeurs:	500 valeurs	10 valeurs aléatoires:	
1	1	2954.49			4218.11	128323.517
2	2	2966.1			3066.19	629956.372
3	3	3058.44			4505.02	416196.226
4	4	3071.16			3649.82	44128.2621
5	5	3051.69			4299.89	193602.394
6	6	3042.76			3726.04	17915.0944
7	7	3046.91			4271.96	169803.927
8	8	3030.04			3960.46	10114.872
9	9	3032.45			3406.79	206204.34
10	10	3087.62			3839.34	422.190715
11	11	3066.19				
12	12	3117.92	Moyenne:	3859.88728	3894.262	

- écrire un algorithme en langage Python pour donner les positions aléatoires des 10 valeurs à relever sur le graphique ou sur la feuille de calcul du tableur :

```
>>> from random import randint
>>> randint(1,500)
129
>>> L=[randint(1,500) for i in range(10)]
>>> L
[165, 72, 51, 30, 418, 335, 194, 417, 78, 261]
```

Thèmes d'étude

2. Voir le fichier Monte Carlo_Valeur actif_cor.

Nombre de valeurs:	500 valeurs	10 valeurs aléatoires:	
		4218,11	128323,517
		3066,19	629955,372
		4505,02	416196,226
		3649,82	44128,2621
		4299,89	193602,394
		3726,04	17915,0944
		4271,96	169803,927
		3960,46	10114,872
		3405,79	206204,34
		3839,34	422,190715
Moyenne:	3859,88728	3894,262	
erreur absolue sur la moyenne:		34,37472	
erreur relative (en %)		0,890562794	

On s'aperçoit qu'en choisissant seulement dix valeurs, on obtient bien souvent une assez bonne approximation, avec la méthode de Monte-Carlo, de la valeur moyenne exacte d'où l'intérêt de la méthode.

3.

Nombre de valeurs:	500 valeurs	10 valeurs aléatoires:	
		4218,11	128323,517
		3066,19	629955,372
		4505,02	416196,226
		3649,82	44128,2621
		4299,89	193602,394
		3726,04	17915,0944
		4271,96	169803,927
		3960,46	10114,872
		3405,79	206204,34
		3839,34	422,190715
Moyenne:	3859,88728	3894,262	
erreur absolue sur la moyenne:		34,37472	
erreur relative (en %)		0,890562794	
Ecart type:	389,5850939	426,2236731	
erreur absolue écart type		36,63857921	
erreur relative (en %)		9,404512591	

On notera une plus grande fluctuation des résultats pour l'écart type.

Partie C

Tout d'abord il convient de remarquer que le nombre de répétitions de l'algorithme tel que précisé dans l'énoncé est égal à la somme des nombres d'arrivées en A et B :

$$\frac{80 \times \text{nombre d'arrivées en A} + 20 \times \text{nombre d'arrivées en B}}{\text{nombre de répétitions}} = \frac{80 \times \text{nombre d'arrivées en A} + 20 \times \text{nombre d'arrivées en B}}{\text{nombre total d'arrivées}}$$

1. Voir le fichier equation de la chaleur1.

```
from random import randint
def deplacement_tige():
    L=0
    i=randint(1,2)
    if i==1:#déplacement vers droite
        L=1
    if i==2:#déplacement vers gauche
        L=-1
    return L

def arrivée(pos_init):
    position=pos_init
    nbre=[0,0]
    i=0
    while ((position!=0 and position!=10) or i==0):
        position=position+deplacement_tige()
        if position==0:
            nbre[0]=nbre[0]+1
        if position==10:
            nbre[1]=nbre[1]+1
        i=i+1
    return (nbre)

def temperature(n,pos_init):
    s=0
    total_arrivées=[0,0]
    for k in range(n):
        nbre=arrivée(pos_init)
        total_arrivées[0]=total_arrivées[0]+nbre[0]
        total_arrivées[1]=total_arrivées[1]+nbre[1]
    return((total_arrivées[0]*80+total_arrivées[1]*20)/sum(total_arrivées))
```

Et quelques résultats :

```
>>> temperature(100,10)
24.2
>>> temperature(100,0)
75.2
>>> temperature(1000,0)
77.12
>>> temperature(100,5)
46.4
>>> temperature(1000,5)
52.82
```

2. Voir le fichier equation de la chaleur2.

```
from random import randint
def deplacement_plaque():
    L=[0,0]
    i=randint(1,4)
    if i==1:#déplacement vers droite
        L=[1,0]
    if i==2:#déplacement vers gauche
        L=[-1,0]
    if i==3:#déplacement vers haut
        L=[0,1]
    if i==4:#déplacement vers bas
        L=[0,-1]
    return L

def arrivée(pos_init_x,pos_init_y,longueur,largeur):
    position=[pos_init_x,pos_init_y]
    nbre=[0,0,0,0]
    i=0
    while ((position[0]==0 and position[1]==longueur and position[2]==0 and position[3]==longueur) or i==0):
        L=deplacement_plaque()
        position[0]=position[0]+L[0]
        position[1]=position[1]+L[1]
        if position[0]==0 and position[1]==0:
            nbre[0]=nbre[0]+1
        if position[0]==longueur and position[1]==0:
            nbre[1]=nbre[1]+1
        if position[0]==0 and position[1]==largeur:
            nbre[2]=nbre[2]+1
        if position[0]==longueur and position[1]==largeur:
            nbre[3]=nbre[3]+1
        i=i+1
        if i>100:
            break
    return (nbre)

def temperature(n,pos_init_x,pos_init_y,t1,t2,t3,t4,longueur,largeur):
    s=0
    total_arrivées=[0,0,0,0]
    for k in range(n):
        nbre=arrivée(pos_init_x,pos_init_y,longueur,largeur)
        total_arrivées[0]=total_arrivées[0]+nbre[0]
        total_arrivées[1]=total_arrivées[1]+nbre[1]
        total_arrivées[2]=total_arrivées[2]+nbre[2]
        total_arrivées[3]=total_arrivées[3]+nbre[3]
    print(total_arrivées)
    return ((total_arrivées[0]*t1+total_arrivées[1]*t2+total_arrivées[2]*t3+total_arrivées[3]*t4)/sum(total_arrivées))
```

Voici quelques résultats :

```
>>> temperature(10,5,5,80,20,20,20,10,10)
[2, 1, 2, 5]
32.0
>>> temperature(10,5,5,80,20,20,20,10,10)
[3, 1, 5, 1]
38.0
>>> temperature(10,5,5,80,20,20,20,10,10)
[1, 2, 4, 3]
26.0
>>> temperature(10,0,10,80,20,20,20,10,10)
[2, 1, 7, 0]
32.0
```

```
>>> temperature(20,2,2,80,20,20,20,4,4)
[4, 3, 5, 3]
36.0
>>> temperature(100,0,4,80,20,20,20,4,4)
[10, 2, 58, 5]
28.0
```

Pour en savoir davantage sur les marches aléatoires, rendez-vous dans le thème d'étude 3.

À votre tour !

Voir le fichier `monte_carlo_a_votre_tour`.

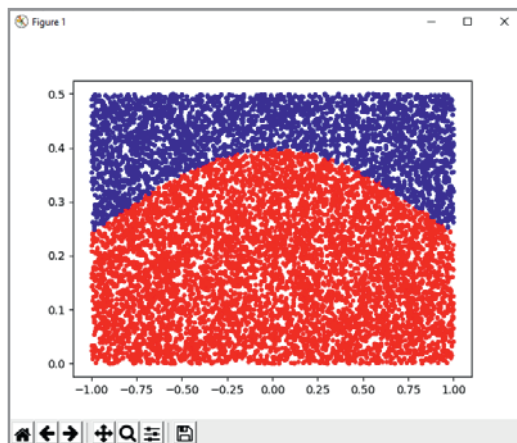
```
from math import pi,sqrt
from random import uniform

def f(x):
    return 1/sqrt(2*pi)*2.7**(-x**2/2)

def monte_carlo(n):
    N=0
    for i in range(n):
        x=uniform(-1,1)
        y=uniform(0,0.5)
        if y<=f(x):
            N=N+1
    return N/n

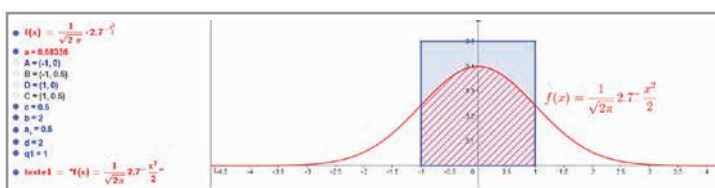
import matplotlib.pyplot as plt
def monte_carlo_graphe(n):
    N=0
    abs1=[]
    abs2=[]
    ord1=[]
    ord2=[]
    for i in range(n):
        x=uniform(-1,1)
        y=uniform(0,0.5)
        if y<=f(x):
            N=N+1
            abs1.append(x)
            ord1.append(y)
        else:
            abs2.append(x)
            ord2.append(y)
    plt.plot(abs1,ord1,'r.')
    plt.plot(abs2,ord2,'b.')

    plt.show()
    return N/n
```



```
>>> monte_carlo(100000)
0.68138
```

On pourra vérifier la qualité du résultat obtenu avec un logiciel de géométrie et le fichier `Theme_monte_carlo_votre_tour` :



Thème 3

Partie A

1. `random()` donne un flottant au hasard dans l'intervalle $[0; 1[$.

Ainsi la probabilité que `random()` soit strictement supérieur à 0,5 est égale à 0,5. Les résultats 1 et -1 sont donc équiprobables.

2.

```
def trajet(n):
    x=0
    L=[0]
    for i in range(n):
        x=x+deplacement()
        L.append(x)
    return L
```

3. Script à recopier.

4.a. La variable aléatoire N suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,5$.

b. Si $N = 3$, alors le mobile effectue 3 déplacements vers la droite et 7 déplacements vers la gauche. Son abscisse est : $X = 3 \times 1 + 7 \times (-1) = -4$.

N est le nombre de déplacement vers la droite, et $10 - N$ est le nombre de déplacements vers la gauche. L'abscisse X du mobile vérifie :

$$X = N \times 1 + (10 - N) \times (-1) = N - 10 + N = 2N - 10.$$

c. $P(E) = P(X = 0) = P(N = 5)$

$$P(E) = \binom{10}{5} \times 0,5^5 \times 0,5^5 = 252 \times 0,5^{10} \approx 0,246$$

5.a.

```
def deplacement(p):
    if random()<p:
        d=1
    else:
        d=-1
    return d
```

b.

```
def trajet(n,p):
    x=0
    L=[0]
    for i in range(n):
        x=x+deplacement(p)
        L.append(x)
    return L

import matplotlib.pyplot as plt
def graph(n,p):
    x=[i for i in range(n+1)]
    plt.plot(x,trajet(n,p))
    plt.grid()
    plt.show()
```

d. $E(A) = 500 \times 0,4 = 200$

On peut espérer avoir 200 achats ce jour-là.

$$500 - 200 = 300$$

On peut espérer avoir 300 ventes ce jour-là.

$$5\,853 + 200 \times 3 - 300 \times 3 = 5\,553.$$

On peut espérer avoir un indice égal à 5 553, après 500 opérations.

Thèmes d'étude

Partie B

- Les résultats renvoyés par cette fonction sont les suivants.
 $[1; 0]$: Le déplacement est d'une unité vers la droite.
 $[-1; 0]$: Le déplacement est d'une unité vers la gauche.
 $[0; 1]$: Le déplacement est d'une unité vers le haut.
 $[0; -1]$: Le déplacement est d'une unité vers le bas.

3.a.

```
def trajet2D_bis(n):
    lx, ly = [0], [0]
    for i in range(n):
        ld = deplacement2D()
        while lx[i+ld[0]] == lx[i-1] and ly[i+ld[1]] == ly[i-1] and i >= 1:
            ld = deplacement2D()
        lx.append(lx[i]+ld[0])
        ly.append(ly[i]+ld[1])
    plt.plot(lx, ly)
    plt.grid()
    plt.show()
```

b.

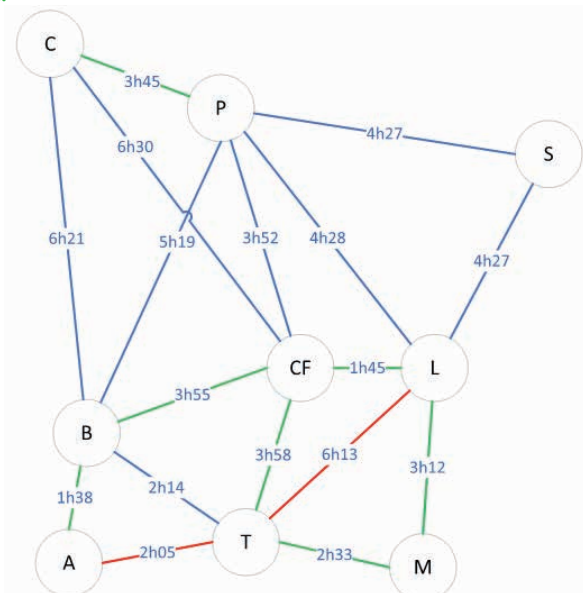
```
from random import randint
def deplacement2D():
    n = randint(1, 10)
    if n <= 5:
        l = [1, 0]
    elif n == 6:
        l = [-1, 0]
    elif n <= 8:
        l = [0, 1]
    else:
        l = [0, -1]
    return l
```

Thème 4

Partie A

- Le chemin le plus court entre Montpellier et Cherbourg-en-Cotentin est Montpellier – Lyon – Paris – Cherbourg-en-Cotentin avec 1 152 km.
 Le chemin le plus court entre Aire-sur-Adour et Strasbourg est Aire-sur-Adour – Toulouse – Lyon – Strasbourg avec 1 113 km.

2.



- Le trajet le plus rapide entre Montpellier et Cherbourg-en-Cotentin est Montpellier – Toulouse – Bordeaux – Cherbourg-en-Cotentin avec un temps de 11 h 08.
 Le trajet le plus court entre Aire-sur-Adour et Strasbourg est Aire-sur-Adour – Bordeaux – Paris – Strasbourg avec un temps de 11 h 24.

À votre tour !

- Algorithme de Dijkstra.

On trouve plusieurs présentations possibles de cet algorithme, par exemple :

A	B	C	D	E	F	G	H	I
0	300 A	310 A	280 A					
X	300 A	310 A	280 A		390 D			
X	300 A	310 A	X		390 D			
X	X	310 A	X	460 C	390 D			
X	X	X	X	450 F	390 D	460 F	650 F	
X	X	X	X	450 F	X	460 F	640 E	
X	X	X	X	X	X	460 F	510 G	560 G
X	X	X	X	X	X	X	510 G	550 H
X	X	X	X	X	X	X	X	550 H

Le chemin le plus court entre les sommets A et I est A-D-F-G-H-I.

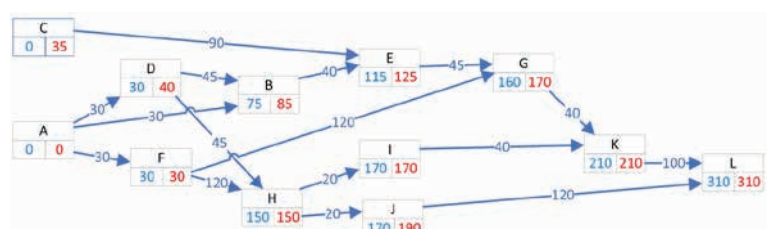
- Cette activité peut donner lieu à un exposé constituant un entraînement pour le grand oral, ou compléter le travail de préparation du grand oral si le professeur de spécialité le trouve pertinent.

Partie B

- Les deux « 20 » en bleu indiquent que les tâches sanitaire et électricité commenceront au plus tôt au bout de 20 semaines.
- La phase de réinstallation, qui est la phase finale du projet, pourra commencer au bout de 31 semaines.
- Le 20 en rouge sous le sommet S signifie que la tâche sanitaire doit commencer au plus tard au bout de 20 semaines pour que le projet global ne prenne pas de retard. De même, la tâche électricité doit commencer au plus tard au bout de 28 semaines.
- Le chemin critique, sur lequel on n'a aucune marge, est C-G-S-F-R. En effet, pour ces tâches, la date au plus tôt est toujours égale à la date au plus tard.

À votre tour !

1.



2. Chemin critique : A-F-H-I-K-L

Longueur du chemin critique : 310 jours auxquels on rajoute les 20 jours nécessaires aux premières ventes, ce qui donne 330 jours.

3. Non. La tâche C peut prendre 35 jours de retard sans que les premières ventes soient repoussées.

4. La tâche B peut prendre 10 jours de retard.

5. La marge totale d'une tâche est le retard que l'on peut prendre sur cette tâche sans modifier la durée optimale du projet. C'est la différence entre ses dates de début au plus tard et au plus tôt.

La marge libre d'une tâche est le retard que l'on peut prendre sur cette tâche sans modifier les dates de début au plus tôt des tâches postérieures.

La marge totale de la tâche C est de 35 jours. En effet, si la tâche C prend 35 jours de retard et que les autres tâches ne prennent pas de retard, le projet se terminera en 310 jours comme prévu.

La marge libre de la tâche C est de 25 jours. Si la tâche C prend 25 jours de retard, la tâche E pourra bien commencer au bout de $25 + 90 = 115$ jours comme prévu.

