Physique 3

ONDES, OPTIQUE ET PHYSIQUE MODERNE

René Lafrance

Avec la collaboration de
Jean Parent

CHENELIÈRE ÉDUCATION

Physique 3

ONDES, OPTIQUE ET PHYSIQUE MODERNE

René Lafrance

Avec la collaboration de
Jean Parent

Révision scientifique des épreuves
Maxime Verreault, Cégep de Sainte-Foy

Rédaction des capsules « Un peu d'histoire » pour les chapitres 4, 7 et 13
Jean-Louis Trudel, CIRST et Université d'Ottawa

Rédaction des exercices et des solutionnaires en ligne
Maxime Verreault, Cégep de Sainte-Foy

Rédaction des défis animés en ligne
Jean Parent, Collège de Bois-de-Boulogne

Rédaction des problèmes synthèse en ligne
Alexandre April, Cégep Garneau
Olivier Tardif-Paradis, Cégep Garneau

Achetez en ligne ou en librairie
En tout temps, simple et rapide!
www.cheneliere.ca

CHENELIÈRE ÉDUCATION

Physique 3
Ondes, optique et physique moderne

René Lafrance

© 2015 TC Média Livres Inc.

Conception éditoriale : Sophie Gagnon
Édition : Martine Rhéaume et Marie Victoire Martin
Coordination : Jean-Pascal Baillie, Célia Chalfoun et Alexandra Soyeux
Recherche iconographique : Julie Saindon
Révision linguistique : Ginette Laliberté et Marie Le Toullec
Correction d'épreuves : Marie Le Toullec
Conception graphique : Pige Communication
Illustrations : Bertrand Lachance
Conception de la couverture : Micheline Roy
Impression : TC Imprimeries Transcontinental

Coordination éditoriale du matériel complémentaire Web : Martine Rhéaume
Coordination du matériel complémentaire Web : Célia Chalfoun et Alexandra Soyeux

Catalogage avant publication de Bibliothèque et Archives nationales du Québec et Bibliothèque et Archives Canada

Lafrance, René, 1968-

Physique

Comprend un index.
Sommaire : 1. Mécanique – 2. Électricité et magnétisme – 3. Ondes, optique et physique moderne.
Pour les étudiants du niveau collégial.

ISBN 978-2-7650-3357-8 (vol. 1)
ISBN 978-2-7650-3546-6 (vol. 2)
ISBN 978-2-7650-3726-2 (vol. 3)

1. Physique – Manuels d'enseignement supérieur. I. Lafrance, René, 1968- . Mécanique. II. Lafrance, René, 1968- . Électricité et magnétisme. III. Lafrance, René, 1968- . Ondes, optique et physique moderne. I. Titre. II. Titre : Mécanique. III. Titre : Électricité et magnétisme. IV. Titre : Ondes, optique et physique moderne.

QC21.3.L33 2014 530 C2014-940299-6

5800, rue Saint-Denis, bureau 900
Montréal (Québec) H2S 3L5 Canada
Téléphone : 514 273-1066
Télécopieur : 514 276-0324 ou 1 800 814-0324
info@cheneliere.ca

TOUS DROITS RÉSERVÉS.
Toute reproduction du présent ouvrage, en totalité ou en partie, par tous les moyens présentement connus ou à être découverts, est interdite sans l'autorisation préalable de TC Média Livres Inc.
Toute utilisation non expressément autorisée constitue une contrefaçon pouvant donner lieu à une poursuite en justice contre l'individu ou l'établissement qui effectue la reproduction non autorisée.

ISBN 978-2-7650-3726-2

Dépôt légal : 1er trimestre 2015
Bibliothèque et Archives nationales du Québec
Bibliothèque et Archives Canada

Imprimé au Canada

1 2 3 4 5 ITIB 18 17 16 15 14

Nous reconnaissons l'aide financière du gouvernement du Canada par l'entremise du Fonds du livre du Canada (FLC) pour nos activités d'édition.

Gouvernement du Québec – Programme de crédit d'impôt pour l'édition de livres – Gestion SODEC.

Le matériel complémentaire mis en ligne dans notre site Web est réservé aux résidants du Canada, et ce, à des fins d'enseignement uniquement.

L'achat en ligne est réservé aux résidants du Canada.

Avant-propos

Mon but, en écrivant cette collection de manuels de physique, a été d'obtenir un texte scientifique à la fois accessible et rigoureux. J'ai donc utilisé un style simple, avec des explications concises et précises, et de nombreux schémas et encadrés pour bien faire ressortir les résultats importants. Les concepts sont expliqués un à la fois, et les exemples sont placés immédiatement après ces explications.

La physique repose sur quelques principes de base qui sont ensuite généralisés à des situations complexes. Pour cette raison, j'emploie une méthode par intégration. La théorie est bâtie graduellement à partir de notions déjà vues en utilisant une suite logique. De même, on mentionne au lecteur que des notions déjà abordées sont reprises plus loin dans le manuel. La méthode par intégration permet d'établir les liens entre les concepts, tout en revenant sur les notions déjà vues.

Le texte et les équations mathématiques suivent une formulation rigoureuse. Les explications reposent sur une notation mathématique intuitive et complète. Les quantités scalaires et les quantités vectorielles sont bien différenciées, autant dans le texte que dans les équations. Les vecteurs sont toujours exprimés à l'aide de vecteurs unitaires adaptés à la situation (vecteurs cartésiens, vecteurs polaires pour le mouvement de rotation, vecteurs textuels comme $\overrightarrow{\text{vers la droite}}$).

La physique est aussi une discipline idéale pour développer une méthode de résolution de problèmes. Je suis conscient qu'il n'existe pas une méthode universelle pour résoudre tous les problèmes. Par contre, je trouve important qu'un étudiant puisse avoir un modèle, pour ensuite développer sa propre stratégie, selon le type de problème. Bien des étudiants arrivant du secondaire ont l'impression que les problèmes de physique se résolvent « quand on connaît la bonne formule ». Pour contrer cela, je mets d'abord l'accent sur l'analyse qualitative, par l'entremise d'un schéma ou d'un diagramme. La stratégie de résolution ne se termine pas avec la réponse, mais par la validation, c'est-à-dire par un jugement critique porté sur le résultat.

Le tome 3 de cet ouvrage porte sur les ondes, l'optique et la physique moderne. Les sujets étudiés sont diversifiés, allant des ondes sur une corde aux particules élémentaires, en passant par la lumière. Le concept d'onde est le fil conducteur et l'idée maîtresse tout au long de ce tome. Les différents concepts des ondes sont énoncés lorsqu'il est question des ondes mécaniques, où il est simple de visualiser la situation. Les mêmes concepts sont de nouveau étudiés dans le cas de la lumière et en physique moderne, où la notion de dualité onde-particule est très importante. De plus, l'analyse repose sur des notions vues dans les tomes précédents, telles que la deuxième loi de Newton, la conservation de l'énergie, le moment cinétique et la notion de champ électrique.

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Jean-François Bojanowski, qui m'a invité avec un groupe de professeurs de physique à réfléchir au projet de publication d'une collection de livres de physique. Je remercie les membres de ce groupe : Yves Carbonneau, André De Bellefeuille, Alexandre Fortier, Jean Parent, ainsi que Pierre Lafleur pour sa participation. Dans ce groupe, nous avons réfléchi et échangé des idées sur ce que devrait contenir un bon manuel de physique pour l'enseignement collégial. La structure de la collection est le résultat de ces discussions. Parmi ce groupe d'enseignants, je remercie particulièrement André De Bellefeuille pour m'avoir encouragé à commencer l'écriture du livre de mécanique, et pour avoir révisé les premiers chapitres.

J'ai profité de discussions avec un grand nombre de collègues physiciens enseignants durant ma carrière, particulièrement Jacques Bridet, Tommaso Donato, Daniel Fortier, Olivier Major, Normand Painchaud, Donald Pelletier, Julie Quenneville et Vincent Stelluti. Je remercie aussi grandement mes collègues du Collège de Bois-de-Boulogne qui ont utilisé et commenté des versions préliminaires de l'ouvrage : Adama Diallo, Merlin Delaval-Lebel, Christian Gervais, Oliver Langlois, Jonathan Laverdière, Alexandre Lemerle et Martin Périard. Je remercie aussi les étudiants qui ont fait des commentaires et des suggestions sur les versions préliminaires et qui ont permis d'améliorer cette collection. De plus, je tiens à remercier particulièrement mes collègues Delphine Quievy et Marie-Josée Lim pour leurs commentaires et leurs encouragements continus. Finalement, ce travail n'aurait pas été possible sans la rétroaction constante de mon collaborateur Jean Parent, qui a été présent dès le début du projet.

Je remercie Sophie Gagnon, éditrice conceptrice chez Chenelière Éducation, qui a cru à ce projet très rapidement et qui a permis que cette collection voie le jour. Je veux la remercier pour tous ses efforts. Je remercie aussi Marie Victoire Martin qui a travaillé au début du travail d'édition et Martine Rhéaume qui a pris le relais avec brio, ainsi que toute son équipe de coordination éditoriale, dirigée par Dominique Lefort et assurée par Jean-Pascal Baillie, Alexandra Soyeux et Célia Chalfoun.

Plusieurs personnes se sont greffées à la réalisation du projet final. Je veux remercier Mohammed-Hedi Boukhatem, Yves Carbonneau, Geneviève Caron, Sophie Descoteaux, Richard Haince, Jean Lacombe et Guillaume Trudel qui ont évalué les versions préliminaires et qui ont fait des suggestions pour améliorer le texte. Merci à Jean-Louis Trudel pour la rédaction des rubriques historiques pour les chapitres 4, 7 et 13. Je remercie également Maxime Verreault pour sa collaboration dans la révision, les exercices et les solutionnaires. Je remercie aussi Alexandre April et Oliver Tardif-Paradis pour avoir collaboré à l'élaboration du matériel complémentaire.

Pour terminer, j'ai travaillé plusieurs années sur ce projet. La réalisation de ce dernier n'a été possible qu'avec le soutien de ma famille. Je tiens à dire un gros merci à mes filles Angélique, Marie, Geneviève et Charlotte, qui ont accepté d'avoir un papa qui travaille tout le temps, et qui ont donné de leur temps pour prendre des photos et faire des commentaires sur des versions préliminaires. Finalement, mon épouse Catherine Bergeron a été essentielle, pour son soutien moral et grammatical. Sans toi Catherine, il n'y aurait que du papier blanc. Merci de tout cœur.

Présentation du manuel

Ouverture de chapitre

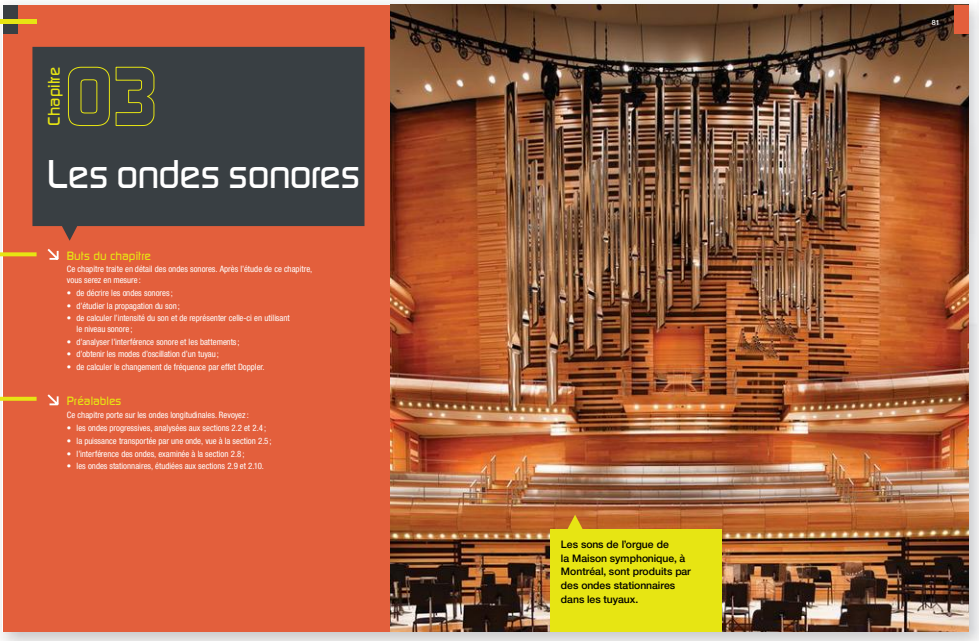
Une photographie accompagnée d'une légende illustre une situation que la matière du chapitre permet d'expliquer.

Buts du chapitre

Les buts du chapitre indiquent clairement les objectifs d'apprentissage visés. Ils facilitent le premier contact avec la matière et la révision.

Préalables

Les préalables précisent quelles notions doivent être maîtrisées ou révisées afin de pouvoir comprendre la matière et d'atteindre les objectifs d'apprentissage. Ainsi, le lecteur peut rapidement mettre à jour ses connaissances et établir des liens entre les notions.



Chapitre 03

Les ondes sonores

Buts du chapitre

Ce chapitre traite en détail des ondes sonores. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de décrire les ondes sonores ;
- d'étudier la propagation du son ;
- de calculer l'intensité du son et de représenter celle-ci en utilisant le niveau sonore ;
- d'analyser l'interférence sonore et les battements ;
- d'obtenir les modes d'oscillation d'un tuyau ;
- de calculer le changement de fréquence par effet Doppler.

Préalables

Ce chapitre porte sur les ondes longitudinales. Revoyez :

- les ondes progressives, analysées aux sections 2.2 et 2.4 ;
- la puissance transportée par une onde, vue à la section 2.5 ;
- l'interférence des ondes, examinée à la section 2.8 ;
- les ondes stationnaires, étudiées aux sections 2.9 et 2.10.

Les sons de l'orgue de la Maison symphonique, à Montréal, sont produits par des ondes stationnaires dans les tuyaux.

Rubriques

Stratégie

La rubrique Stratégie expose et précise la stratégie de résolution de problème qui est utilisée dans tous les exemples résolus. Elle présente au lecteur une approche systématique de la résolution de problème qui favorise son autonomie.

STRATÉGIE 3.1 L'effet Doppler

Illustrer la situation

Vous devez faire un schéma de la situation, en illustrant la source S et le détecteur D. Indiquez la vitesse de la source $\vec{v}_S$, la vitesse du détecteur $\vec{v}_D$ ainsi que la vitesse du son $\vec{v}$, orientée de la source vers le détecteur. Tracez l'axe des x dans la même direction que la vitesse du son $\vec{v}$ (dans le même sens ou dans le sens opposé).

Décortiquer le problème

Écrivez les composantes des vitesses : une composante est positive lorsque le vecteur a le même sens que l'axe, et la composante est négative lorsque le vecteur est dans le sens opposé à l'axe des x. Indiquez clairement les quantités connues et les quantités recherchées.

Identifier la clé

La clé est l'équation 3.38 :

$$f' = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x - v_{S,x}} f \,.$$

Résoudre le problème

Vous devez résoudre l'équation pour trouver les quantités inconnues.

Valider la réponse

La fréquence détectée doit être plus élevée lorsque la source et le détecteur se rapprochent l'un de l'autre, et elle doit être plus faible lorsqu'ils s'éloignent l'un de l'autre.

Technique

La rubrique Technique présente l'explication de certaines tâches précises, qui sont ensuite illustrées dans un exemple. Elle permet de préciser certaines étapes de la stratégie de résolution de problème dans des contextes particuliers.

TECHNIQUE 5.1 La réfraction de la lumière

1. Tracer un rayon incident pour représenter le trajet de la lumière.
2. Tracer la normale pour chaque interface que la lumière rencontre.
3. Tracer le rayon réfracté, en le faisant dévier dans la bonne direction : l'angle est plus faible dans le milieu ayant un indice de réfraction plus élevé.
4. Numéroter les angles de façon séquentielle, en les mesurant par rapport à la normale.
5. Utiliser la loi de la réfraction pour mettre en relation les angles et les indices de réfraction. Au besoin, utiliser les règles de la géométrie.

Exemple

Dans chaque exemple, présenté en détail, la stratégie de résolution de problème est utilisée. Les exemples sont souvent illustrés de façon réaliste et de façon schématique.

EXEMPLE 5.6 L'angle de polarisation

De la lumière se propageant dans l'eau rencontre une surface de verre crown verticale. La lumière réfléchie dans l'eau est polarisée.

a. Dans quelle direction le champ électrique de la lumière réfléchie oscille-t-il ?
b. Quel est l'angle d'incidence ?
c. Quel est l'angle réfracté ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 5.40 illustre la situation. Le rayon incident n'est pas polarisé, alors que le rayon réfléchi doit l'être. Le plan d'incidence correspond au plan de la page.

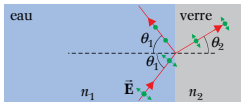


FIGURE 5.40
Le schéma de la situation pour l'exemple 5.6

Décortiquer le problème

Les indices de réfraction sont indiqués au tableau 5.1.

Connues	Inconnues
$n_1 = 1{,}333$	θ_1
$n_2 = 1{,}52$	θ_2

SOLUTION a.

Identifier la clé

La clé est que la lumière réfléchie est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.

SOLUTION b.

Identifier la clé

Comme la lumière réfléchie est polarisée, l'angle d'incidence θ_1 doit être égal à l'angle de polarisation, donné par la loi de Brewster (*voir l'équation 5.11*) :

$$\theta_1 = \theta_p = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \quad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\theta_1 = \theta_p = \arctan\left(\frac{1{,}52}{1{,}333}\right) = 48{,}75° = 48{,}8°.$$

(réponse)

SOLUTION c.

Identifier la clé

La clé est la loi de la réfraction :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2}\right). \quad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{1{,}333\sin(48{,}75°)}{1{,}52}\right) = 41{,}25° = \mathbf{41{,}3°}.$$

(réponse)

Figures réalistes et figures schématiques

Des figures réalistes permettent au lecteur d'ancrer la situation dans le concret, tandis que les figures schématiques permettent de poursuivre la résolution de problème en tenant compte de l'essentiel. Lorsque c'est nécessaire, certaines figures contiennent des annotations qui viennent compléter l'explication de la légende.

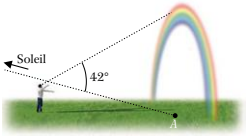


FIGURE 5.36
On observe un arc-en-ciel dans une direction de 42° par rapport à *A*, le point opposé au Soleil.

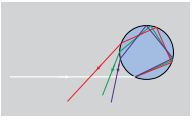


FIGURE 5.37
Un arc-en-ciel secondaire est produit par la lumière réfléchie deux fois dans une goutte d'eau.

Remarques et mises en garde

Aux endroits appropriés, des remarques sont ajoutées afin de fournir une information complémentaire, alors que des mises en garde préviennent des erreurs courantes.

REMARQUE

On a écrit la fonction d'une onde qui se déplace parallèlement à l'axe des x. Si l'onde se déplace plutôt parallèlement à l'axe des y ou à l'axe des z, on remplace la variable x par y ou z.

MISE EN GARDE

Vous devez bien faire la différence entre la vitesse de l'onde $\vec{\mathbf{v}}$, qui est constante, et la vitesse transversale v_y, qui représente la vitesse du mouvement d'oscillation d'un point de la corde.

Formules et définitions

Formules encadrées

Les équations essentielles sont encadrées afin d'attirer l'attention du lecteur.

Les deux cas étudiés sont les deux cas limites. Soit $\mathcal{R}$ le *coefficient de réflexion* d'un objet, c'est-à-dire la fraction de l'énergie lumineuse qui est réfléchie par l'objet. La pression de radiation sur un objet est

$$p_{rad} \equiv \frac{F_{rad}}{A_{éclairée}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) I. \quad (4.37)$$

Pour une surface qui absorbe complètement la lumière (un écran noir), $\mathcal{R} = 0$, alors que pour une surface parfaitement réfléchissante (un miroir parfait), $\mathcal{R} = 1$.

Définitions

Des termes en marge sont définis dans des encadrés, à l'aide de mots ou d'équations, annonçant au lecteur un terme important.

Loi de Malus

$$I = I_0 \cos^2\theta \quad \text{(lumière incidente polarisée)}. \quad (4.39)$$

C'est la loi de Malus. Elle a été découverte par le physicien français Étienne Louis Malus de Mitry (1775-1812). Cette loi est illustrée à la figure 4.34, où un polariseur est placé devant un écran à cristaux liquides (qui émet de la

Tableaux et encadrés

Tableaux

Des tableaux mettent en relation certaines données dont le lecteur pourra se servir pour résoudre les problèmes.

TABLEAU 5.1

Les valeurs approximatives de l'indice de réfraction de différentes substances à une longueur d'onde dans le vide de 589 nm. Ces valeurs varient en fonction des propriétés physiques des substances (pression, température...).

Substance	Indice	Substance	Indice
Gaz à 0° C *et* 1 atm		*Solide à* 20 °C	
Air	1,000 29	Ambre	1,55
Gaz carbonique	1,000 45	Chlorure de sodium	1,544
Hélium	1,000 036	Diamant	2,419
Hydrogène	1,000 132	Glace (0 °C)	1,31
		Plexiglass	1,51

Encadrés

Les résultats importants et les limites des modèles et des approximations sont mis en relief dans des encadrés colorés.

Le résultat important est que

L'amplitude de l'onde résultante dépend du déphasage entre les deux ondes qui se superposent.

Ceci est un résultat général que nous allons revoir au chapitre 3 lorsqu'il sera question des interférences des ondes sonores et au chapitre 7 quand sera abordée l'interférence de la lumière.

Résumé

Les résumés de fin de chapitre, sur une seule page, constituent une synthèse de la matière. Les concepts importants du chapitre y sont repris de façon succincte et sont regroupés par types ; ils s'avèrent des outils de compréhension et de révision très utiles.

34 RÉSUMÉ

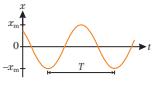
RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié les oscillations dans les systèmes mécaniques et les circuits électriques.

LES LOIS ET LES PRINCIPES

Le **mouvement harmonique simple** est un mouvement d'oscillation, c'est-à-dire un mouvement de va-et-vient autour d'une position d'équilibre. La position est

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) .$$



- L'amplitude x_m et la constante de phase ϕ dépendent des conditions initiales.
- La fréquence angulaire ω dépend des propriétés du système, et elle est reliée à la période et à la fréquence :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f .$$

- La vitesse est $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -v_m \sin(\omega t + \phi)$, où $v_m = \omega x_m$ est l'amplitude de la vitesse.
- L'accélération $\left(a_x = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)$ est proportionnelle à la position :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x .$$

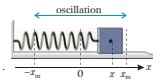
Les systèmes suivants décrivent un mouvement harmonique simple.

- Le système bloc-ressort :

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E_{méc} = K + U = \frac{1}{2} k x_m^2 .$$



- Le pendule simple (amplitude faible) :

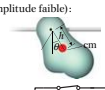
$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} .$$

- Le pendule composé (amplitude faible) :

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi)$$

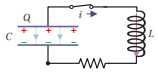
$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}} .$$



- Le circuit LC :

$$Q = Q_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} .$$



LES RÉSULTATS

Pour les **oscillations amorties**, l'amplitude et l'énergie diminuent graduellement. La fréquence angulaire des oscillations est ω_a.

- Un système bloc-ressort amorti subit une force de frottement fluide $\vec{F}_f = -b\vec{v}$:

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

$$x_m = x_{0m}\, e^{-bt/2m}$$

$$E_{méc} = \frac{1}{2} k x_{0m}^2\, e^{-bt/m} .$$

- Dans un circuit RLC, la charge oscille avec une amplitude qui diminue graduellement :

$$\omega_a = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$Q_m = Q_{0m}\, e^{-Rt/(2L)} .$$

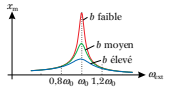
Dans une **oscillation forcée**, une force extérieure est appliquée :

$$\vec{F}_{ext} = F_m \cos(\omega_{ext} t)\hat{\imath} .$$

- Le système oscille à la fréquence angulaire ω_{ext}.
- L'amplitude est maximale à la résonance, soit lorsque

$$\omega_{ext} = \omega_r \approx \omega_0 ,$$

où ω_0 est la fréquence angulaire naturelle du système.



Un peu d'histoire

Une capsule historique est présentée au début de quatre chapitres. Elle met en évidence les contextes de certaines découvertes et souligne l'importance de la contribution de personnalités de la physique.

UN PEU D'HISTOIRE

Maxwell, le génie sans histoires

Le plus étonnant dans la vie de James Clerk Maxwell (1831-1879), c'est qu'il n'a surpris personne en ouvrant la voie à la physique moderne.

Un peu excentrique mais jamais flamboyant, le physicien écossais a suivi un parcours tracé dès l'enfance. Il n'a même pas quinze ans lorsque sa première communication scientifique est présentée à l'assemblée de savants de la Royal Society d'Édimbourg. À l'Université de Cambridge, il excelle en mathématiques et impressionne ses professeurs. L'un d'eux avouera que Maxwell semblait incapable de se tromper en physique. Les autres étudiants sont convaincus qu'il est déjà un génie.

En 1860, Maxwell accepte un poste à Londres. Après son mariage, sa femme et lui ont collaboré à une étude au sujet de la décomposition des couleurs et de la vision humaine. Maxwell a remporté un prix pour son étude des anneaux de Saturne en traitant les particules innombrables qui les constituent comme les éléments d'un fluide. Dans la foulée, il a signé un article fondamental sur la théorie cinétique des gaz en calculant la distribution du module de la vitesse des molécules d'un gaz. C'est l'entrée par la grande porte des probabilités dans la physique. Pourtant, Maxwell se distinguera dans un autre domaine.

Depuis sa jeunesse à Édimbourg, il connaît les travaux de Faraday sur l'électromagnétisme. La théorie électromagnétique demeure toutefois fragmentaire. Au XVIIIe siècle, l'électricité, le magnétisme et la lumière étaient considérés comme trois fluides distincts aux caractéristiques inexplicables. Les expériences de Coulomb ont permis d'établir un lien entre les effets électriques et magnétiques et l'action d'une force directe à distance, mais Faraday défend le rôle des lignes de force.

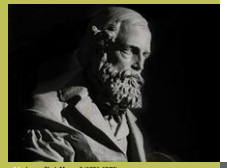
Entre 1861 et 1865, Maxwell propose une théorie générale de l'électromagnétisme. Il part des lignes de force pour imaginer un fluide qui se comporte comme s'il était constitué de tourbillons magnétiques dont la rotation entraîne des tourbillons électriques. Quand il dote cette substance d'une certaine élasticité, cette matière se prête à la propagation d'ondes transversales qui se déplacent à la vitesse de la lumière parce qu'elles sont la lumière même.

La percée est de taille. Maxwell vient d'unifier l'optique et l'électromagnétisme. En 1865, il renonce aux engrenages de tourbillons pour énoncer une série d'équations fondamentales qui gouvernent tous les phénomènes électromagnétiques. Selon le physicien, la lumière est composée de champs électriques et magnétiques en fait désormais partie.

Maxwell remet alors sa démission à l'université. En tant que propriétaire foncier, il peut se permettre de vivre sans sa rémunération de professeur. Le couple quitte Londres pour le manoir familial, et Maxwell profite de ses loisirs pour approfondir sa théorie cinétique des gaz, s'intéresser à la thermodynamique et rédiger *A Treatise on Electricity and Magnetism* (1873), qui résume sa théorie générale de l'électromagnétisme. En 1871, il accepte la direction du nouveau laboratoire de physique expérimentale à l'Université de Cambridge, et il en fait un pôle d'excellence de la science britannique. En 1879, il meurt brutalement d'un cancer de l'estomac à l'âge de quarante-huit ans.

Poète à ses heures, plaisantin pince-sans-rire et chrétien fervent, Maxwell a préparé la physique du XXe siècle. D'une part, c'est un unificateur. D'autre part, ses travaux mettent en évidence la division entre les champs et les ondes de l'électromagnétisme et les particules de la mécanique statistique. Il lègue aussi à ses successeurs un mystère, celui qui entoure l'éther.

Depuis les travaux antérieurs de Young et de Fresnel, les physiciens considéraient que les ondes lumineuses devaient se déplacer dans un milieu matériel appelé l'« éther », tout comme les ondes sonores sont transmises par l'air ou par l'eau. Même si Maxwell admet qu'il serait possible de s'en passer, son intuition de physicien l'incline à croire à sa réalité. En 1873, il conclut son traité d'électromagnétisme en soutenant que toute sa théorie exige un tel milieu. Il ne restera plus qu'à le détecter.



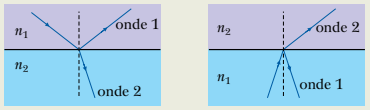
James Clerk Maxwell (1831-1879)

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 7.2

La figure ci-dessous illustre deux situations où une onde est incidente sur un dioptre. Dans chacune des situations, déterminez :

a. si l'onde 1 est inversée ou non ;

b. si l'onde 2 est inversée ou non.



Exercices de niveaux variés

Chaque chapitre contient plusieurs exercices de niveaux variés, qui couvrent l'ensemble de la matière. En voici les différents types :

Testez votre compréhension

Ces questions qualitatives simples sont insérées à des endroits opportuns dans les chapitres ; elles permettent de tester la compréhension des notions qui viennent tout juste d'être vues.

Solutions aux tests de compréhension

Les solutions aux tests de compréhension sont disponibles à la fin de chaque chapitre. Le lecteur peut donc évaluer sa compréhension lui-même et revenir sur les notions moins bien maîtrisées, au besoin.

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

7.1 La situation (iv)	Le déphasage en fonction de la longueur d'onde est $N_2 - N_1 = \frac{L}{\lambda} - \frac{Ln}{\lambda}$. Dans la situation (iv), $N_2 - N_1 = -1{,}5$, ce qui correspond à des ondes en opposition de phase.
7.2 a. L'onde 1 est inversée seulement dans la situation (i).	Dans la situation (i), le rayon réfracté s'approche de la normale, ce qui indique que $n_1 < n_2$. La réflexion est dure, donc l'onde réfléchie est inversée. Dans la situation (ii), le rayon réfracté s'éloigne de la normale, ce qui indique que $n_1 > n_2$. La réflexion est molle, ce qui fait que l'onde réfléchie n'est pas inversée.

Défi animé 5.2

Comment devez-vous placer un prisme pour obtenir la plus petite déviation uniquement par réfraction du faisceau ?

Défis animés

On trouve parfois en marge une question en lien avec la matière. Pour y répondre, l'étudiant est appelé à se rendre sur interactif pour réaliser la manipulation nécessaire. Il s'agit d'une manipulation dirigée des simulations interactives de l'Université de Boulder au Colorado.

Questions, exercices et problèmes

À la fin des chapitres, les exercices sont divisés en quatre niveaux de difficulté : les questions qualitatives (Q), les exercices simples (E), les problèmes (P) et les problèmes récapitulatifs (R). Les réponses, y compris les schémas, se trouvent en fin de manuel.

Solutions disponibles à l'étudiant

Pour certaines questions et certains exercices et problèmes, les solutions complètes et détaillées sont disponibles pour l'étudiant sur interactif. Elles reprennent la démarche de résolution de problème utilisée dans tout le manuel.

QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • E exercices simples • P problèmes • solution disponible

Section 6.2 Les miroirs plans

E1 Vous vous placez à 1,60 m devant un miroir plan pour voir votre reflet. À quelle distance de vous semblera se trouver votre image ?

E2 Une personne mesurant 174 cm se tient à 3,50 m devant un miroir plan vertical accroché au mur. Déterminez la dimension verticale minimale du miroir permettant à la personne de se voir entièrement, en supposant que le miroir est à la bonne hauteur.

E3 Dans un salon de coiffure, des miroirs plans sont placés face à face sur les murs opposés. La distance entre les miroirs est de 4,00 m. Vous êtes placé à une distance de 1,50 m d'un miroir, et vous observez les images multiples formées dans ce miroir. Quelle est la distance entre vous et les trois images de vous les plus rapprochées que vous observez dans le miroir ?

P4 Un écran est placé à une distance de 5,00 m d'un miroir mesurant la distance $d = |q|$ entre son image et le miroir. Parmi les courbes illustrées à la figure 6.62, déterminez celle qui représente la situation :

a. d'un miroir concave ;

b. d'un miroir convexe.

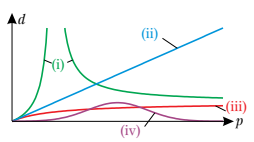


FIGURE 6.62 • Question 8

E9 La distance focale d'un miroir concave est de 25,0 cm. Un objet réel de 35 mm de hauteur se trouve à 88,0 cm devant le miroir.

Table des matières

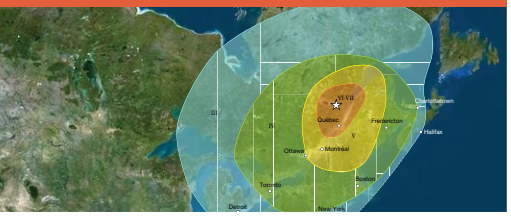
Partie 1 • Les oscillations et les ondes mécaniques

Chapitre 01

Les oscillations 2

1.1 La description du mouvement harmonique simple 4
1.2 Le système bloc-ressort 13
1.3 L'énergie dans le mouvement harmonique simple 17
1.4 Les pendules 19
1.5 Les oscillations dans les circuits LC 24
1.6 Les oscillations amorties 27
1.7 Les oscillations forcées et la résonance 31
Résumé 34
Questions, exercices et problèmes 35

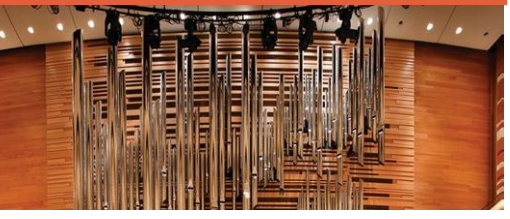
Chapitre 02



Les ondes 42

2.1 Les types d'ondes 44
2.2 Les ondes progressives à une dimension 46
2.3 La vitesse des ondes sur une corde 49
2.4 Les ondes progressives sinusoïdales 52
2.5 La puissance transportée par une onde 58
2.6 La réflexion et la transmission des ondes 62
2.7 La superposition des ondes 64
2.8 L'interférence des ondes 65
2.9 Les ondes stationnaires 67
2.10 Les modes normaux d'oscillation d'une corde 70
Résumé 73
Questions, exercices et problèmes 74

Chapitre 03



Les ondes sonores 80

3.1 La description des ondes sonores 82
3.2 La vitesse du son 87
3.3 Les ondes en deux et en trois dimensions 90
3.4 L'intensité sonore 91
3.5 L'interférence des ondes sonores 94
3.6 Les battements 98
3.7 Les ondes sonores stationnaires et les instruments de musique 100
3.8 L'effet Doppler 104
3.9 La vitesse supersonique et les ondes de choc 110
Résumé 112
Questions, exercices et problèmes 113

Partie 2 • L'optique

Chapitre 04

Les ondes électromagnétiques 120

4.1 Les propriétés des ondes électromagnétiques 123
4.2 La vitesse de la lumière et l'équation d'onde 128
4.3 Le spectre électromagnétique 133
4.4 L'énergie transportée par la lumière 135
4.5 La pression de radiation 138
4.6 La polarisation de la lumière 142
Résumé 149
Questions, exercices et problèmes 150

Chapitre 05

La propagation de la lumière 154

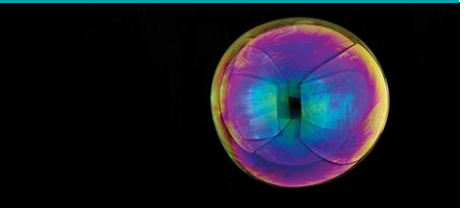
5.1 La vitesse de la lumière dans les milieux transparents 156
5.2 L'approximation de l'optique géométrique 159
5.3 La réflexion de la lumière 162
5.4 La réfraction de la lumière 165
5.5 La réflexion totale interne 169
5.6 La dispersion de la lumière 172
5.7 La polarisation par réflexion 176
5.8 La biréfringence 179
Résumé 180
Questions, exercices et problèmes 181

Chapitre 06

La formation des images 186

6.1 Les objets et les images 188
6.2 Les miroirs plans 190
6.3 Les miroirs sphériques 191
6.4 Les dioptres 199
6.5 Les lentilles minces 205
6.6 L'œil 215
6.7 Les instruments d'optique 221
Résumé 229
Questions, exercices et problèmes 230

Chapitre 07



L'interférence de la lumière 236

7.1 Les conditions d'interférence 239
7.2 L'expérience de Young 246
7.3 L'interférence produite par les pellicules minces 252
7.4 L'interféromètre de Michelson 257
Résumé 261
Questions, exercices et problèmes 262

Chapitre 08

La diffraction de la lumière 268

8.1 Les figures de diffraction 270
8.2 La diffraction par une fente étroite 271
8.3 L'irradiance de la figure de diffraction 275
8.4 La diffraction par une ouverture circulaire 277
8.5 Le pouvoir de résolution des instruments d'optique 279
8.6 La diffraction par deux fentes 283

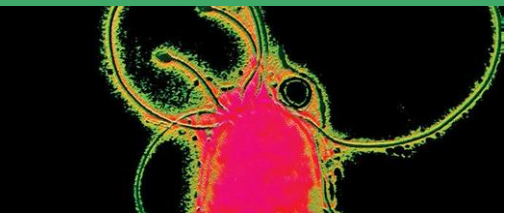
8.7 Les réseaux de diffraction ... 285
Résumé ... 290
Questions, exercices et problèmes ... 291

Partie 3 • La physique moderne

Chapitre 09

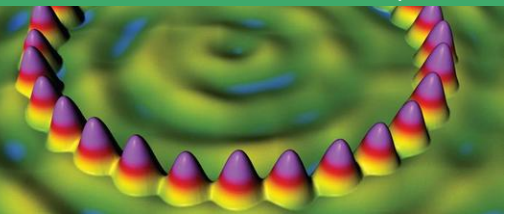
Le relativité restreinte ... 296
9.1 La relativité galiléenne ... 299
9.2 Les postulats d'Einstein ... 304
9.3 Les événements et les mesures ... 307
9.4 La relativité de la simultanéité ... 308
9.5 La dilatation du temps ... 310
9.6 La contraction des longueurs ... 317
9.7 L'effet Doppler relativiste ... 322
9.8 Les transformations de Lorentz ... 324
9.9 La transformation relativiste des vitesses ... 328
9.10 La quantité de mouvement en relativité ... 329
9.11 L'énergie en relativité ... 331
Résumé ... 339
Questions, exercices et problèmes ... 340

Chapitre 10



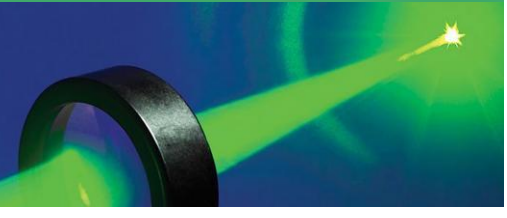
La dualité onde-particule ... 346
10.1 La notion de photon ... 348
10.2 Le rayonnement du corps noir ... 350
10.3 L'effet photoélectrique ... 354
10.4 L'effet Compton ... 359
10.5 La dualité onde-particule pour la lumière ... 364
10.6 Les ondes de matière ... 367
10.7 Le principe d'incertitude ... 370
Résumé ... 374
Questions, exercices et problèmes ... 375

Chapitre 11



La mécanique quantique ... 380
11.1 La fonction d'onde ... 382
11.2 L'équation de Schrödinger ... 387
11.3 Les états stationnaires ... 390
11.4 L'énergie d'une particule confinée à une dimension ... 390
11.5 La fonction d'onde d'une particule piégée à une dimension ... 394
11.6 Les puits de potentiel à deux dimensions et à trois dimensions ... 398
11.7 Les puits de potentiel de hauteur finie ... 402
11.8 L'effet tunnel ... 405
11.9 Le spin et le principe d'exclusion ... 409
Résumé ... 413
Questions, exercices et problèmes ... 414

Chapitre 12



La physique atomique ... 420
12.1 Les raies spectrales ... 422
12.2 Le modèle de Bohr ... 425
12.3 La théorie quantique de l'atome d'hydrogène ... 431
12.4 Les fonctions d'onde de l'atome d'hydrogène ... 438
12.5 Le spin et la structure fine ... 443
12.6 L'effet Zeeman ... 448

12.7 La structure hyperfine 450
12.8 La résonance magnétique 452
12.9 Les atomes à plusieurs électrons 453
12.10 La lumière d'un laser 458
Résumé 463
Questions, exercices et problèmes 464

Chapitre 13

La physique nucléaire 468
13.1 Les propriétés du noyau 471
13.2 L'énergie de liaison 476
13.3 La radioactivité 479
13.4 La désintégration alpha 486
13.5 La désintégration bêta 489
13.6 La mesure de la dose de rayonnements ionisants 494
13.7 La fission nucléaire 496
13.8 La fusion nucléaire 500
Résumé 504
Questions, exercices et problèmes 505

Chapitre 14

Les particules élémentaires 510
14.1 Un aperçu de la physique des particules 512
14.2 Les particules et les antiparticules 513
14.3 Les particules de matière : les fermions élémentaires 515
14.4 Les interactions : les bosons de jauge 517
14.5 Les diagrammes de Feynman 519
14.6 L'invariance de jauge 522
14.7 L'interaction électromagnétique 525
14.8 La couleur et l'interaction forte 527
14.9 Les hadrons 530
14.10 L'interaction faible 539
14.11 Le mécanisme de Brout-Englert-Higgs 543
14.12 Au-delà du modèle standard 546
Résumé 547
Questions, exercices et problèmes 548

Annexes 552
A Le système international d'unités 552
B Les constantes fondamentales 555
C Les données utiles 556
D Quelques données astronomiques 560
E Les formules mathématiques 561
F Les propriétés des éléments 565
G Tableau périodique des éléments 567

Réponses aux questions et exercices 568
Index 583

Liste des techniques et des stratégies

Techniques

5.1 La réfraction de la lumière 166
6.1 Les rayons principaux pour les miroirs sphériques 196
6.2 Les rayons principaux pour les lentilles minces 211
11.1 Le diagramme des niveaux d'énergie 400
14.1 Les diagrammes de Feynman 521

Stratégies

3.1 L'effet Doppler 107
9.1 La relativité restreinte 326

Crédits iconographiques

Page couverture : Priti Shikotra

Chapitre 1 : p. 3 : Bildagentur-online/McPhoto-Kerpa/Alamy ; **p. 4 :** © LICreate/iStockphoto ; **p. 33 :** Cedric Weber/Shutterstock.com.

Chapitre 2 : p. 43 : Image : Planet Observer. Travail : Colpron ; **p. 44 :** ILYA AKINSHIN/Shutterstock.com ; **p. 69 :** René Lafrance.

Chapitre 3 : p. 81 : ©Photographie_Panatonic_2013. Gracieuseté de l'Orchestre symphonique de Montréal ; **p. 82 :** CristinaMuraca/Shutterstock.com ; **p. 104 :** Oleg Alexandrov/Wikipedia Commons ; **p. 111 :** Wikipedia Commons.

Chapitre 4 : p. 121 : René Lafrance ; **p. 122 :** GARY DOAK/Alamy ; **p. 133 :** © Mauro Mancini/Dreamstime.com ; **p. 134 :** Elnur/Shutterstock.com ; oksana2010/Shutterstock.com ; **p. 135 :** © Designsstock/Dreamstime.com ; paintings/Shutterstock.com ; **p. 138 :** Roger Ressmeyer/Getty Images ; **p. 144 :** René Lafrance.

Chapitre 5 : p. 155 : © Dragonika/Dreamstime.com ; **p. 160 :** SCIENCE SOURCE/SCIENCE PHOTO LIBRARY ; **p. 161 :** © 2011 Richard Megna, Fundamental Photographs, NYC ; **p. 165 :** René Lafrance ; **p. 171 :** © Andy Brown/Dreamstime.com ; **p. 173 :** René Lafrance ; **p. 179 :** Photo de PierreBedard.ca, «Identification visuelle des minéraux», http://www.groupes.polymtl.ca/glq1100/mineraux/identification.html.

Chapitre 6 : p. 187 : Geneviève Lafrance ; **p. 221 :** René Lafrance ; **p. 223 :** Armin Staudt/Shutterstock.com ; **p. 226 :** NASA.

Chapitre 7 : p. 237 : JacoboAnastasi/Shutterstock.com ; **p. 238 :** Erich Lessing/Art Resource, NY ; NEW YORK PUBLIC LIBRARY/SCIENCE PHOTO LIBRARY ; **p. 239 :** suns07butterfly/Shutterstock.com ; S. Zanier, Université J. Fourier Grenoble, France, http://physique-eea.ujf-grenoble.fr ; **p. 246 :** © National Portrait Gallery, London ; **p. 252 :** René Lafrance ; **p. 254 :** © 1990 Richard Megna, Fundamental Photographs, NYC ; **p. 258 :** Courtesy of Lambda Scientific Systems, Inc. ; René Lafrance ; **p. 261 :** René Lafrance ; **p. 265 :** ANDREW LAMBERT PHOTOGRAPHY/SCIENCE PHOTO LIBRARY ; René Lafrance.

Chapitre 8 : p. 269 : © Marek Mnich/iStockphoto ; **p. 270 :** © 1968 George Resch, Fundamental Photographs, NYC ; **p. 271 :** SHEILA TERRY/SCIENCE PHOTO LIBRARY ; **p. 275, p. 278, p. 283, p. 290 :** René Lafrance.

Chapitre 9 : p. 299 : Stéphanie Colvey ; **p. 300 :** © TPX/Prisma/SuperStock ; **p. 301 :** National Institute on Aging/SCIENCE PHOTO LIBRARY ; **p. 307 :** Lucien Chavan/Wikipedia Commons ; **p. 339 :** LAWRENCE BERKELEY LABORATORY/SCIENCE PHOTO LIBRARY.

Chapitre 10 : p. 349 : P. HAWTIN, UNIVERSITY OF SOUTHAMPTON/SCIENCE PHOTO LIBRARY ; **p. 361 :** upthebanner/Shutterstock.com ; **p. 368 :** Thierry Dugnolle/Wikipedia Commons ; **p. 369 :** © 2014 Educational Development Center, Inc. Reproduit avec permission. Tous droits réservés ; © Cameca ; **p. 377 :** NASA.

Chapitre 11 : p. 383 : © Matthias Kulka/Corbis ; **p. 389 :** AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS/SCIENCE PHOTO LIBRARY ; **p. 402 :** Image originally created by IBM Corporation (1993). *Physics Today. 46*(11), 17-19 ; **p. 410 :** Don Eigler, Image originally created by IBM ; **p. 412 :** CERN/EMILIO SEGRE VISUAL ARCHIVES/AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS/SCIENCE PHOTO LIBRARY.

Chapitre 12 : p. 423 : GIPHOTOSTOCK/SCIENCE PHOTO LIBRARY ; **p. 428 :** SCIENCE SOURCE/SCIENCE PHOTO LIBRARY ; **p. 448 :** SCIENCE SOURCE/SCIENCE PHOTO LIBRARY ; **p. 455 :** Cessna152/Shutterstock.com.

Chapitre 13 : p. 471 : Triff/Shutterstock.com ; **p. 472 :** ADAM HART-DAVIS/SCIENCE PHOTO LIBRARY ; **p. 473 :** MERN, André Tremblay 2014 ; **p. 477 :** National Nuclear Data Center/Wikipedia Commons ; **p. 480 :** Wikipedia Commons ; **p. 481 :** PROF. PETER FOWLER/SCIENCE PHOTO LIBRARY ; **p. 505 :** © ITER Organization, http://www.iter.org/.

Chapitre 14 : p. 513 : ATLAS Experiment © 2012 CERN ; **p. 521 :** WEBER COLLECTION/AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS/SCIENCE PHOTO LIBRARY ; **p. 526 :** SCIENCE PHOTO LIBRARY.

Chapitre 01

Les oscillations

Buts du chapitre

Ce chapitre traite du mouvement d'oscillation, un élément essentiel pour l'étude des ondes. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de décrire le mouvement harmonique simple ;
- d'étudier des systèmes mécaniques et des systèmes électriques qui décrivent un mouvement harmonique simple ;
- d'analyser les transformations d'énergie dans un mouvement harmonique simple ;
- d'étudier le phénomène de résonance.

Préalables

Ce chapitre porte sur les systèmes mécaniques et les circuits électriques. Revoyez :

- les définitions de la cinématique, présentées aux sections 3.2 à 3.6 du tome 1 ;
- la deuxième loi de Newton, abordée à la section 5.6 du tome 1 pour la translation, et à la section 12.2 de ce même tome pour la rotation ;
- l'énergie cinétique, définie à la section 8.2 du tome 1, ainsi que l'énergie potentielle, présentée à la section 9.3 de ce même tome ;
- le circuit LC et le circuit RLC, étudiés aux sections 11.5 et 11.6 du tome 2.

Une jeune femme, assise sur une balançoire, effectue un mouvement d'oscillation.

Le mouvement d'oscillation est le troisième type de mouvement, après la translation et la rotation, que nous avons étudié dans le tome 1. Le mouvement d'oscillation se produit dans différents contextes. La photo en ouverture de chapitre montre une jeune fille assise sur une balançoire. La balançoire effectue un mouvement de va-et-vient autour de la position d'équilibre, qui correspond à la situation où les chaînes sont verticales.

FIGURE 1.1
L'oscillation d'une corde de guitare produit une onde sonore.

Lorsqu'une corde de guitare oscille, comme le montre la figure 1.1, elle fait osciller les molécules d'air, ce qui produit une onde sonore. Il existe donc un lien direct entre les oscillations et les ondes, relation que nous allons étudier dans les prochains chapitres. De même, lorsque survient un tremblement de terre, les oscillations de la terre produisent des ondes sismiques, qui se propagent.

Les oscillations se produisent en général lorsqu'un système est déplacé de sa position d'équilibre par une force extérieure. C'est le cas à la piscine lorsqu'une personne saute sur un tremplin pour plonger. En sautant, la personne exerce une force vers le bas sur le tremplin, qui effectue alors une flexion. Le bout du tremplin se déplace d'une certaine distance vers le bas, avant de remonter vers le haut, puis de continuer un mouvement de va-et-vient autour de la position d'équilibre.

On observe aussi les oscillations dans les circuits électriques. Nous avons vu dans le chapitre 11 du tome 2 que le courant oscille dans les circuits composés de condensateurs et de bobines d'induction. Ce type de circuit est utilisé entre autres dans les téléphones cellulaires, pour produire et recevoir les ondes électromagnétiques.

Dans ce chapitre, nous allons étudier le mouvement d'oscillation le plus élémentaire, qu'on appelle le mouvement harmonique simple. Nous examinerons des systèmes mécaniques, comme le système bloc-ressort et le pendule. Ces systèmes seront étudiés à l'aide de la cinématique, de la dynamique et des transferts d'énergie. Nous allons aussi explorer certains circuits électriques oscillants, en comparant les résultats aux systèmes mécaniques. De plus, nous étudierons les systèmes en oscillation lorsqu'une force est appliquée, ce qui nous permettra d'aborder le phénomène de la résonance.

1.1 La description du mouvement harmonique simple

Un objet qui décrit un mouvement d'oscillation effectue un mouvement de va-et-vient autour d'une position d'équilibre. On dit alors qu'il décrit un *mouvement harmonique*. La figure 1.2 montre des exemples de la position en fonction du temps pour des objets qui oscillent. Le mouvement d'oscillation est un mouvement périodique, c'est-à-dire qu'il se répète après un temps T, qu'on appelle la *période*. L'inverse de la période est la *fréquence* f du mouvement d'oscillation :

$$f = \frac{1}{T}. \tag{1.1}$$

La fréquence représente le nombre de cycles d'oscillations par unité de temps. Dans le système international, on mesure la fréquence en hertz ($1\ \text{Hz} = 1\ \text{s}^{-1}$), en l'honneur du physicien allemand Heinrich Hertz (1857-1894), qui a été le premier à produire et à détecter des ondes radio en laboratoire.

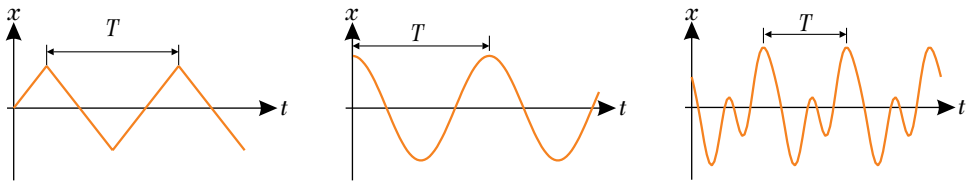


FIGURE 1.2
Trois oscillations différentes. La période T est l'intervalle de temps pour que le mouvement se répète.

Le mouvement d'oscillation le plus simple correspond à une oscillation dont la position est donnée par une fonction sinusoïdale. On l'appelle le *mouvement harmonique simple* (noté simplement MHS). C'est le mouvement d'oscillation de base et celui qui est étudié en détail dans ce chapitre. Le mouvement de plusieurs systèmes, comme les pendules ou les molécules d'un gaz, peut être décrit approximativement par un mouvement harmonique simple ou par la superposition de mouvements harmoniques simples.

Prenons par exemple un bloc qui peut se déplacer sur une surface sans frottement. On attache le bloc à un ressort, comme le montre la figure 1.3. On trace l'axe des x parallèlement au ressort, avec son origine vis-à-vis de la position d'équilibre du système, lorsque le ressort est à sa position naturelle. On tire sur le bloc, de telle sorte que le ressort est étiré, et on le laisse aller. On mesure la position en fonction du temps.

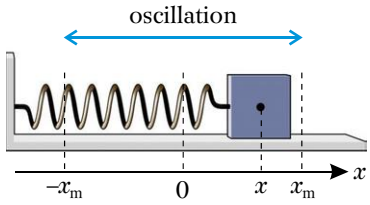


FIGURE 1.3
Un bloc glisse sur la surface sans frottement.

Le bloc effectue un mouvement d'oscillation, entre les positions $x = x_m$ et $x = -x_m$. Le module de la position maximale (x_m) est appelé l'*amplitude* du mouvement. L'amplitude est toujours une valeur positive. La position en fonction du temps est illustrée à la figure 1.4 et elle est donnée par l'expression :

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)\,. \tag{1.2}$$

Le paramètre ω est appelé la *fréquence angulaire* ou la *pulsation*. Ce paramètre est toujours positif et, dans le SI, il est mesuré en radians par seconde (rad/s). Le paramètre ϕ est appelé la *constante de phase* et il est mesuré en radians. Par convention, $-\pi < \phi \leq \pi$. L'argument complet de la fonction cosinus (mesuré en radians) est appelé la *phase* du mouvement, noté Φ (la lettre grecque phi majuscule) :

$$\Phi \equiv \omega t + \phi\,. \tag{1.3}$$

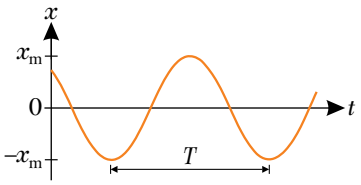


FIGURE 1.4
La position en fonction du temps pour le bloc qui oscille

REMARQUE

Il est possible de donner la position du bloc avec une fonction sinus et une constante de phase différente. Le présent choix simplifie l'analyse dans le cas où on laisse aller le bloc de la position maximale, sans vitesse, à $t = 0$. En effet, la constante de phase ϕ est alors nulle.

La fréquence angulaire est liée à la période. Pour obtenir ce lien, on utilise la propriété de périodicité du mouvement harmonique. En effet, lorsque le temps augmente d'une période, la position du système est la même. Ceci correspond à une phase augmentée de 2π, car la fonction cosinus reprend sa valeur lorsque son argument augmente de 2π. Alors,

$$\begin{aligned}\left[\omega(t+T)+\phi\right] &= \left[\omega t+\phi\right]+2\pi \\ \omega T &= 2\pi \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} = 2\pi f\,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

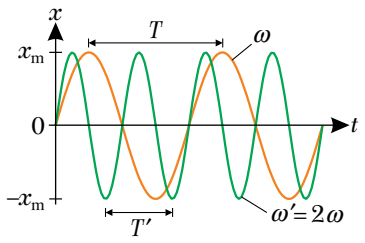


FIGURE 1.5
La courbe verte représente un mouvement harmonique simple dont la fréquence angulaire est le double de celle de la courbe orange. La période de la courbe verte est deux fois plus petite.

Donc, si la période augmente, la fréquence angulaire doit diminuer. La figure 1.5 illustre la position en fonction du temps pour deux mouvements harmoniques simples, ayant des fréquences angulaires différentes. La courbe verte représente un mouvement harmonique simple avec une fréquence angulaire plus grande que la fréquence angulaire de la courbe orange.

Pour comprendre la signification de la constante de phase, revenons au système bloc-ressort. Supposons qu'on laisse aller le bloc à $t = 0$. La position initiale du bloc correspond à sa position maximale $x = x_m$. Il se met alors en mouvement en effectuant le mouvement d'oscillation. La position du bloc en fonction du temps est donnée par une fonction $x = x_m \cos(\omega t)$, où $\phi = 0$ rad (*voir la figure 1.6a*). Par contre, si on met en marche le chronomètre après le début du mouvement, la position initiale ne correspond pas à la position maximale. La fonction cosinus est décalée vers la gauche, par rapport à la première situation (*voir la figure 1.6b*). On décrit cette courbe en ajoutant une constante de phase ϕ positive. Dans le cas où la courbe cosinus est déplacée vers la droite par rapport à la fonction cosinus $\cos(\omega t)$, alors la constante de phase est négative (*voir la figure 1.6c*). Cela se produit si on donne une poussée vers la droite au bloc à $t = 0$.

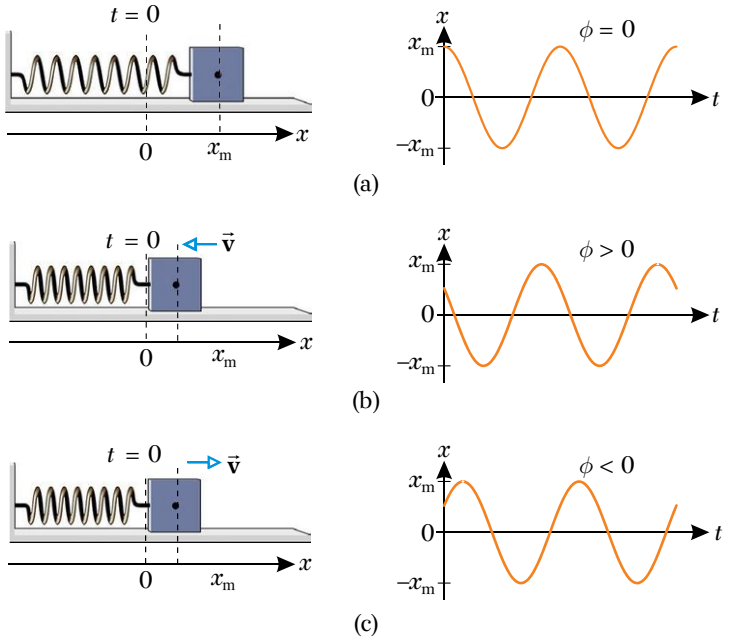


FIGURE 1.6
(a) À $t = 0$, le bloc est à sa position maximale et $\phi = 0$. (b) À $t = 0$, le bloc se déplace vers la gauche et $\phi > 0$. (c) À $t = 0$, le bloc se déplace vers la droite et $\phi < 0$.

La vitesse

On trouve la vitesse d'une particule qui effectue un mouvement harmonique simple en calculant la dérivée de la position par rapport au temps :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x_m \cos(\omega t + \phi)\right]$$

$$v_x = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) = -v_m \sin(\omega t + \phi)\,. \qquad (1.5)$$

La vitesse oscille avec la même fréquence que la position, entre $v_x = \omega x_m$ et $v_x = -\omega x_m$ (*voir la figure 1.7b*). La quantité $v_m = \omega x_m$ représente le module de la

vitesse maximale, c'est-à-dire l'amplitude de la vitesse. En comparant la courbe de la position et la courbe de la vitesse en fonction du temps, on remarque que la courbe de la vitesse est décalée d'un quart de période vers la gauche par rapport à la courbe de la position. Lorsque la position est maximale, la vitesse est nulle. De même, lorsque la vitesse est maximale, la position est nulle (c'est la position d'équilibre). On dit que la vitesse est déphasée d'un quart de période par rapport à la position.

L'accélération

Lorsqu'un objet décrit un mouvement harmonique simple, sa vitesse change en fonction du temps. On calcule l'accélération en dérivant la vitesse par rapport au temps :

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-\omega x_\mathrm{m} \sin(\omega t + \phi)\right]$$

$$a_x = -\omega^2 x_\mathrm{m} \cos(\omega t + \phi) = -a_\mathrm{m} \cos(\omega t + \phi)\,. \qquad (1.6)$$

La figure 1.7c illustre le graphique de l'accélération en fonction du temps. L'accélération oscille entre $a_x = a_\mathrm{m} = \omega^2 x_\mathrm{m}$ et $a_x = -a_\mathrm{m} = -\omega^2 x_\mathrm{m}$, avec la même fréquence que la position. Par rapport à la courbe de la vitesse en fonction du temps, on remarque que la courbe de l'accélération est décalée vers la gauche d'un quart de période.

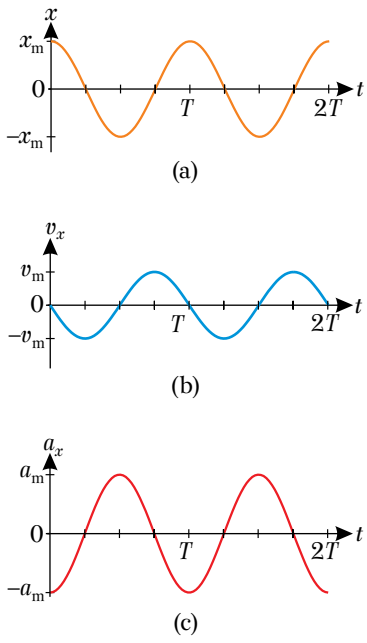


FIGURE 1.7
(a) La position d'une particule décrivant un mouvement harmonique simple. (b) La vitesse de la particule. (c) L'accélération de la particule.

Si on compare les équations 1.2 et 1.6, on voit que l'accélération est proportionnelle à la position :

$$a_x = -\omega^2 x\,. \qquad (1.7)$$

Ceci est la caractéristique du mouvement harmonique simple :

Un mouvement harmonique simple est une oscillation dont l'accélération est proportionnelle à la position. La constante de proportionnalité correspond à l'opposé de la fréquence angulaire au carré.

Comme l'accélération est la dérivée de la vitesse, elle correspond à la dérivée seconde de la position. L'équation 1.7 peut s'écrire sous la forme d'une équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x\,. \qquad (1.8)$$

Équation différentielle du mouvement harmonique simple

Cette équation est importante, car elle permet de reconnaître les mouvements harmoniques simples. La solution de cette équation différentielle est l'équation 1.2.

REMARQUE

Pour alléger le texte, les vecteurs position, vitesse et accélération sont remplacés par leurs composantes x, v_x et a_x. Donc, on parle de la vitesse v_x, même si la vitesse est plutôt $\vec{\mathbf{v}} = v_x\vec{\boldsymbol{\imath}}$. Cette façon de procéder est acceptable, puisque les vecteurs n'ont qu'une composante.

EXEMPLE 1.1 Une première oscillation

Un bloc attaché à un ressort décrit un mouvement harmonique simple. Un étudiant mesure une distance de 15,0 cm entre les points extrêmes de son mouvement et un temps de 1,60 s pour que le bloc se déplace entre ces deux points.

a. Quelle est la fréquence angulaire du mouvement ?

b. Quel est le module de la vitesse maximale du bloc ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 1.8 montre le graphique de la position du bloc en fonction du temps. La position initiale n'est pas connue et elle n'est pas importante dans ce problème. Pour cette raison, nous traçons la courbe avec une position initiale arbitraire.

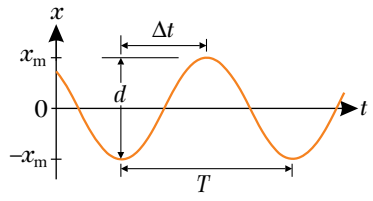


FIGURE 1.8
La position du bloc en fonction du temps

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$d = 15{,}0$ cm	ω
$\Delta t = 1{,}600$ s	v_m

Comme le montre la figure 1.8, la distance entre les deux extrémités correspond au double de l'amplitude, et le temps donné équivaut à la moitié de la période :

$$x_m = \frac{d}{2} = 7{,}50 \text{ cm} \qquad \text{(i)}$$

$$T = 2\,\Delta t = 3{,}20 \text{ s}. \qquad \text{(ii)}$$

SOLUTION a.

Identifier la clé

Nous obtenons la fréquence angulaire à partir de l'équation 1.4 :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\omega = \frac{2\pi}{3{,}20 \text{ s}} = 1{,}96 \text{ rad/s}. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

Lorsque la position est $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$, la vitesse est

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi).$$

Le module de la vitesse maximale est égal à la valeur absolue du facteur qui multiplie la fonction sinusoïdale :

$$v_m = \omega x_m. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$v_m = 1{,}96 \text{ rad/s} \times 0{,}0750 \text{ m} = 0{,}147 \text{ m/s}.$$

(réponse)

REMARQUE

L'unité rad est une unité équivalente à 1, car un angle mesuré en radians correspond à un rapport de deux longueurs (la longueur d'un arc de cercle sur le rayon de l'arc). On l'utilise pour indiquer une quantité reliée à la phase ou à un angle. Lorsque ce n'est plus le cas, comme dans le cas d'une vitesse, on ne l'utilise pas.

Valider la réponse

Nous répondons aux questions. Le module de la vitesse maximale doit être positif, car c'est un module.

EXEMPLE I.2 L'état initial d'un oscillateur

Un objet décrit un mouvement harmonique simple. À $t = 0{,}00$ s, sa position est $x = -1{,}6$ cm, sa vitesse est $v_x = -0{,}91$ m/s et son accélération, $a_x = 2{,}6$ m/s^2.

a. Quelle est la période du mouvement ?
b. Quelle est l'amplitude du mouvement ?
c. Quelle est la constante de phase ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$x(0) = -0{,}016$ m	T
$v_x(0) = -0{,}91$ m/s	x_m
$a_x(0) = 2{,}6$ m/s^2	ϕ

SOLUTION a.

Identifier les clés

Dans un mouvement harmonique simple, l'accélération est proportionnelle à la position, comme le montre l'équation 1.7 :

$$a_x = -\omega^2 x \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{-a_x}{x}}\,. \qquad \text{(i)}$$

Nous trouvons ensuite la période à l'aide de l'équation 1.4 :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs dans l'équation (i) pour obtenir la fréquence angulaire :

$$\omega = \sqrt{\frac{-2{,}6 \text{ m/s}^2}{-0{,}016 \text{ m}}} = 12{,}7 \text{ rad/s}\,. \qquad \text{(iii)}$$

La période est alors

$$T = \frac{2\pi}{12{,}7 \text{ rad/s}} = 0{,}49 \text{ s}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

Pour un mouvement harmonique simple, la position initiale et la vitesse initiale sont obtenues en remplaçant $t = 0$ dans les équations 1.2 et 1.5, respectivement :

$$x(0) = x_m \cos\phi \qquad \text{(iv)}$$

$$v_x = -\omega x_m \sin\phi\,. \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

Les équations (iv) et (v) forment un système d'équations à deux inconnues :

$$x(0) = x_m \cos\phi = -0{,}016 \text{ m} \qquad \text{(vi)}$$

$$v_x(0) = -12{,}7 x_m \sin\phi = -0{,}91 \text{ m/s}\,. \qquad \text{(vii)}$$

Pour obtenir x_m, nous divisons les deux membres de l'équation (vii) par $-12{,}7$, puis nous élevons les deux équations au carré :

$$x_m^2 \cos^2\phi = (-0{,}016)^2 = 0{,}000\,256 \qquad \text{(viii)}$$

$$x_m^2 \sin^2\phi = \left(\frac{-0{,}91}{12{,}7}\right)^2 = 0{,}005\,10\,. \qquad \text{(ix)}$$

Nous additionnons ensuite les équations (viii) et (ix), et nous utilisons l'identité trigonométrique $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$:

$$x_m^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = 0{,}005\,35$$

$$x_m = \sqrt{0{,}005\,35} = 0{,}073\,2 \text{ m} = 7{,}3 \text{ cm}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Nous ne gardons que la racine carrée positive, car l'amplitude est une quantité positive.

SOLUTION c.

Résoudre le problème

Pour trouver la constante de phase, nous remplaçons l'amplitude dans l'équation (vi) :

$$0{,}073\,2 \cos\phi = -0{,}016$$

$$\cos\phi = \frac{-0{,}016}{0{,}073\,2} = -0{,}219$$

$$\phi = \arccos(-0{,}219)\,.$$

Il y a deux solutions mathématiques possibles de la dernière équation (pour $-\pi \le \phi \le \pi$) :

$$\phi = 1{,}8 \text{ rad ou } \phi = -1{,}8 \text{ rad}\,.$$

Pour obtenir la bonne valeur, nous remplaçons les deux valeurs de ϕ dans l'équation (vii) :

$$v_x(0) = -12{,}7 \times 0{,}073\,2 \sin(1{,}8) = -0{,}91 \text{ m/s}$$

$$v_x(0) = -12{,}7 \times 0{,}073\,2 \sin(-1{,}8) = 0{,}91 \text{ m/s}\,.$$

Comme la vitesse initiale est négative, c'est la première équation qui est correcte. La constante de phase est

$$\phi = 1{,}8 \text{ rad} . \qquad \text{(réponse)}$$

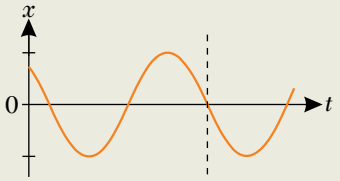
Valider la réponse

Nous répondons aux questions. La période et l'amplitude sont des valeurs positives. La constante de phase doit être comprise entre $-\pi$ et π.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 1.1

La figure suivante montre le graphique de la position en fonction du temps d'un bloc qui se déplace en décrivant un mouvement harmonique simple. L'axe des x est orienté vers la droite. Que peut-on dire de la vitesse et de l'accélération à l'instant vis-à-vis de la ligne pointillée ?

(i) La vitesse est nulle, et l'accélération est orientée vers la gauche.
(ii) La vitesse est nulle, et l'accélération est orientée vers la droite.
(iii) La vitesse est orientée vers la droite, et l'accélération est nulle.
(iv) La vitesse est orientée vers la droite, et l'accélération est vers la droite.
(v) La vitesse est orientée vers la gauche, et l'accélération est nulle.
(vi) La vitesse est orientée vers la gauche, et l'accélération est vers la droite.



Un rappel sur les réciproques des fonctions trigonométriques

Dans l'exemple précédent, nous avons eu besoin de calculer la fonction réciproque du cosinus (l'arc cosinus), c'est-à-dire que nous avons cherché la phase dont le cosinus est connu. Étant donné que la fonction cosinus est une fonction périodique (comme les autres fonctions trigonométriques), il y a une infinité de phases qui donnent le même cosinus. Il est important de pouvoir calculer les différentes valeurs d'une fonction arc cosinus et les réciproques des autres fonctions trigonométriques.

Pour illustrer la situation, prenons un objet qui décrit un mouvement harmonique simple ayant une fréquence angulaire ω. La position est

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) = x_m \cos \Phi ,$$

où $\Phi = \omega t + \phi$ est la phase du mouvement. Supposons qu'on veut connaître le temps où la position de l'objet est $x = x_m/2$. La figure 1.9 montre quatre instants différents possibles.

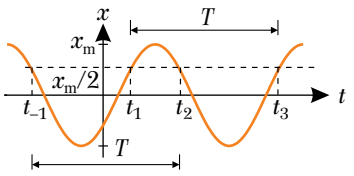


FIGURE 1.9
La position est égale à $x_m/2$ aux temps t_{-1}, t_1, t_2 et t_3.

Les instants t_{-1} et t_2 sont séparés par une période, ce qui implique que la phase a augmenté de 2π entre ces deux instants. Il est simple de calculer t_{-1} à partir de t_2. De même, les instants t_1 et t_3 sont séparés par une période. Cependant, les instants t_1 et t_2 sont des instants qui se produisent dans la même période. Selon

la pente du graphique, on remarque que le temps t_1 est celui où la vitesse est positive, et que le temps t_2 est le temps où la vitesse est négative.

Pour obtenir la phase associée à une position donnée, on doit calculer la fonction arc cosinus :

$$x = x_m \cos(\Phi) \Rightarrow \Phi = \arccos\left(\frac{x}{x_m}\right).$$

Selon le graphique de la figure 1.9, il y a deux solutions possibles dans une période. Une calculatrice scientifique est programmée pour donner la *valeur principale*. Si on veut obtenir la deuxième valeur possible, il est intéressant d'utiliser le *cercle trigonométrique*, un cercle centré à l'origine dont le rayon est égal à un. La figure 1.10 montre le cercle trigonométrique, avec un angle Φ, mesuré par rapport à l'axe des x. Comme le montre la figure, la coordonnée x du point sur le cercle correspond au cosinus de l'angle, alors que la coordonnée y correspond au sinus de l'angle. Cette méthode permet d'obtenir facilement le signe des fonctions trigonométriques : à la figure 1.10a, l'angle est dans le premier quadrant ; le cosinus et le sinus de l'angle sont positifs, car les coordonnées du point sur le cercle sont positives. À la figure 1.10b, l'angle est dans le deuxième quadrant. On voit que le cosinus est négatif, car la coordonnée x du point sur le cercle est négative.

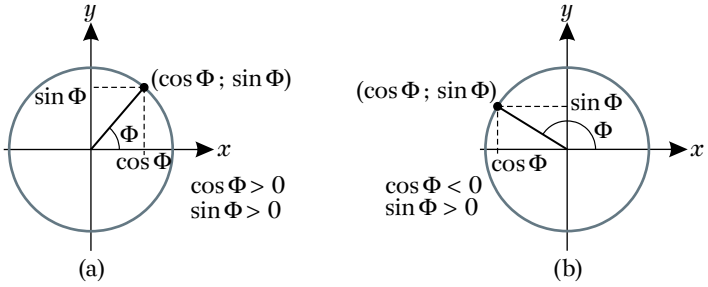


FIGURE 1.10

Le cercle trigonométrique est utilisé pour obtenir les fonctions trigonométriques des angles : (a) pour $0 < \Phi < \pi/2$; (b) pour $\pi/2 < \Phi < \pi$.

Lorsqu'on veut calculer la fonction arc cosinus d'un nombre, cela veut dire qu'on cherche un angle correspondant à un point sur le cercle trigonométrique ayant une coordonnée x donnée. Selon la figure 1.11a (*voir la page suivante*), il existe deux points sur le cercle ayant une même coordonnée x. Si on désigne Φ l'angle associé au premier point, alors l'angle $\Phi' = -\Phi = 2\pi - \Phi$ est associé au deuxième point. Donc, la valeur de la fonction arc cosinus est

$$\cos\Phi = z \Rightarrow \arccos z = \begin{cases} \Phi \\ -\Phi \end{cases}. \tag{1.9}$$

La figure 1.11b à la page suivante montre qu'il y a aussi deux points sur le cercle trigonométrique ayant la même coordonnée y, ce qui implique que deux angles ont le même sinus, un angle Φ et l'angle supplémentaire $\Phi' = \pi - \Phi$. On obtient alors les deux valeurs de l'arc sinus :

$$\sin\Phi = z \Rightarrow \arcsin(z) = \begin{cases} \Phi \\ \pi - \Phi \end{cases}. \tag{1.10}$$

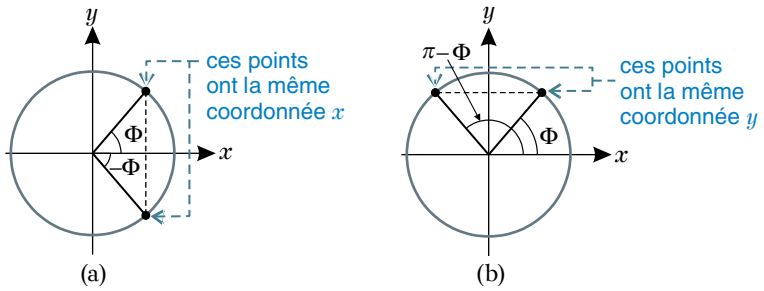


FIGURE 1.11
(a) Les angles Φ et $\Phi' = -\Phi$ ont le même cosinus. (b) Les angles Φ et $\pi - \Phi$ ont le même sinus.

La fonction tangente a, quant à elle, une période de π, c'est-à-dire que $\tan(\Phi) = \tan(\Phi + \pi)$. Ainsi,

$$\tan\Phi = z \Rightarrow \arctan(z) = \begin{cases} \Phi \\ \Phi + \pi \end{cases}.$$

EXEMPLE 1.3 Le temps à partir de la position

Un objet décrit un mouvement harmonique simple. Sa position en fonction du temps est

$$x = 0{,}100\cos(4{,}10t + 2{,}10),$$

où la position est donnée en mètres et le temps, en secondes.

a. À quel instant la position est-elle égale à 0,050 0 m pour la première fois après $t = 0$?
b. À cet instant, dans quel sens l'objet se déplace-t-il ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

L'équation générale de la position d'un mouvement harmonique simple est

$$x = x_m\cos(\omega t + \phi) = x_m\cos(\Phi),$$

où ω est reliée à la période par l'équation 1.4 :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4{,}10\text{ rad/s}} = 1{,}532\text{ s}. \qquad \text{(i)}$$

Connues		Inconnues
$x = 0{,}050\,0$ m	$t > 0$	t
$\omega = 4{,}10$ rad/s	$\phi = 2{,}10$ rad	sens

SOLUTION a.

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs dans l'équation de la position pour obtenir la phase :

$$0{,}050\,0 = 0{,}100\cos(\Phi)$$

$$\cos(\Phi) = 0{,}500$$

$$\Phi = \arccos(0{,}500) = \begin{cases} 1{,}047\text{ rad} \\ -1{,}047\text{ rad} \end{cases}.$$

Comme $\Phi = 4{,}10t + 2{,}10$, nous obtenons deux temps pour lesquels la position est $x = 0{,}050\,0$ m :

$$t_1 = \frac{1{,}047\text{ rad} - 2{,}10\text{ rad}}{4{,}10\text{ rad/s}} = -0{,}257\text{ s}$$

$$t_2 = \frac{-1{,}047\text{ rad} - 2{,}10\text{ rad}}{4{,}10\text{ rad/s}} = -0{,}768\text{ s}.$$

Ces deux temps se produisent avant $t = 0$. Nous trouvons les temps suivants en ajoutant une période :

$$t_3 = t_1 + T = -0{,}257\text{ s} + 1{,}532\text{ s} = 1{,}28\text{ s}$$

$$t_4 = t_2 + T = -0{,}768\text{ s} + 1{,}532\text{ s} = 0{,}765\text{ s}.$$

Le temps cherché est donc t_4 :

$$t = 0{,}76\text{ s}. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

Le sens du mouvement est obtenu en se basant sur le signe de la vitesse.

Identifier la clé
La vitesse est donnée par la dérivée de la position par rapport au temps :

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x_\mathrm{m}\omega \sin(\omega t_4 + \phi)\,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème
Nous remplaçons les valeurs :

$$\begin{aligned} v_x &= -0{,}100 \times 4{,}10 \sin(4{,}10 \times 0{,}765 + 2{,}10) \\ &= 0{,}355 \text{ m/s}\,. \end{aligned}$$

La vitesse est positive, ce qui implique que

le déplacement a le même sens que l'axe des x.

(réponse)

Valider la réponse
Nous répondons aux questions. Le temps t_4 n'a que deux chiffres significatifs, car un chiffre a été perdu lors de l'addition de la période au temps négatif.

1.2 Le système bloc-ressort

À la section 1.1, nous avons cité le système bloc-ressort comme un exemple de mouvement harmonique simple. Nous allons maintenant analyser la dynamique de ce système, à l'aide de la deuxième loi de Newton.

La figure 1.12a montre un bloc de masse m attaché à un ressort, dont la constante de rappel est k et la masse est négligeable. Le bloc glisse sur une surface sans frottement. Le ressort n'est pas à sa position naturelle, mais il est étiré sur une distance x. La figure 1.12b illustre le diagramme des forces du bloc. Le ressort exerce sur le bloc une force élastique $\vec{\mathbf{F}}_{\text{él}} = -kx\,\vec{\imath}$, orientée vers la position d'équilibre. Cette force est une force de rappel. Selon la deuxième loi de Newton, appliquée à la composante x :

$$\sum F_x = -kx = ma_x\,.$$

L'accélération correspond à la dérivée seconde de la position :

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x\,. \qquad (1.11)$$

En comparant l'équation 1.11 et l'équation 1.8, on voit que le système bloc-ressort décrit bel et bien un mouvement harmonique simple et que la fréquence angulaire est

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,. \qquad (1.12)$$

Fréquence angulaire du système bloc-ressort

La période du mouvement est alors

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \qquad (1.13)$$

La position du bloc en fonction du temps est donnée par l'équation 1.2 :

$$x = x_\mathrm{m}\cos(\omega t + \phi)\,.$$

Il est important de remarquer que la fréquence angulaire est une propriété du système bloc-ressort, qui ne dépend pas de l'amplitude. Pour la changer, on doit utiliser un bloc ayant une masse différente ou un ressort ayant une constante de rappel différente. La période est élevée dans le cas où la masse est importante (ce qui correspond à une inertie importante) ou lorsque la constante de rappel

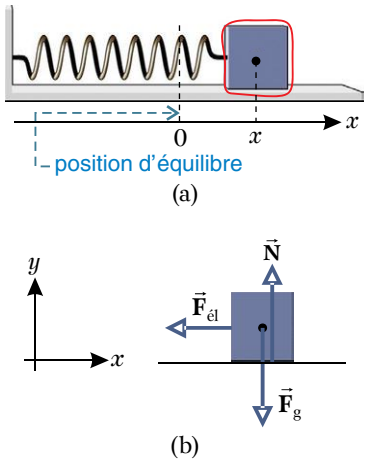


FIGURE 1.12
(a) Un bloc glisse sur une surface horizontale sans frottement. (b) Le diagramme des forces du bloc.

est faible (ce qui correspond à un ressort peu rigide). Par contre, l'amplitude et la constante de phase dépendent des conditions initiales : on peut modifier l'amplitude et la constante de phase en changeant la position initiale ou la vitesse initiale.

De façon générale, on obtient un mouvement harmonique simple lorsque la force de rappel est directement proportionnelle à la position de l'objet par rapport à la position d'équilibre.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 1.2

Un objet décrit un mouvement harmonique simple avec une amplitude x_m. Si l'amplitude est doublée,

a. comment la période du mouvement change-t-elle ?
b. comment la vitesse maximale de l'objet change-t-elle ?

EXEMPLE 1.4 Un bloc qui oscille

On attache un bloc de 450 g à un ressort dont la constante de rappel est de 34,0 N/m. La surface est horizontale et sans frottement. On déplace le bloc vers la droite de 8,00 cm par rapport à la position d'équilibre, ce qui étire le ressort, et on le laisse aller à $t = 0$.

a. Quelle est la période du mouvement ?
b. Quelle est la vitesse du bloc à $t = 1{,}20$ s ?
c. Quel est le module de l'accélération maximale ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Comme nous laissons aller le bloc à $t = 0$, la constante de phase est nulle, et l'amplitude est $x_m = 0{,}0800$ m. La position du bloc est donnée par l'expression :

$$x = x_m \cos(\omega t) . \qquad \text{(i)}$$

Connues	Inconnues
$m = 0{,}450$ kg	T
$k = 34{,}0$ N/m	$v_x(1{,}20\ \text{s})$
$x_m = 0{,}0800$ m	a_m

SOLUTION a.

Identifier la clé

Dans un système bloc-ressort, la période est donnée par l'équation 1.13 :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}450\ \text{kg}}{34{,}0\ \text{N/m}}} = 0{,}7228\ \text{s} = 0{,}723 . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est que la vitesse correspond à la dérivée de la position :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t) . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Selon l'équation (ii), la fréquence angulaire est

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{34{,}0\ \text{N/m}}{0{,}450\ \text{kg}}} = 8{,}692\ \text{rad/s} .$$

La vitesse est alors

$$v_x(1{,}20\ \text{s}) = -8{,}692 \times 0{,}0800 \sin(8{,}692 \times 1{,}20)$$
$$= 0{,}587\ \text{m/s} . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Identifier la clé

L'accélération correspond à la dérivée de la vitesse :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t) .$$

Selon cette dernière équation, le module de l'accélération maximale est

$$a_m = \omega^2 x_m . \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$a_x = (8{,}692 \text{ rad/s})^2 \; 0{,}080\,0 \text{ m} = 6{,}04 \text{ m/s}^2 .$$

(réponse)

Valider la réponse

La période et le module de l'accélération angulaire sont bien des quantités positives. La vitesse obtenue en **b.** indique que le bloc se déplace vers la droite à $t = 1{,}20$ s.

L'oscillation verticale

Il est possible d'obtenir une oscillation verticale en suspendant un bloc à un ressort. Lorsqu'il est en mouvement, le bloc subit deux forces : la force du ressort et la force gravitationnelle. Avec l'ajout de la force gravitationnelle, le bloc décrit-il un mouvement harmonique simple ?

La figure 1.13 montre un bloc de masse m suspendu à un ressort ayant une constante de rappel k. Comme le montre la figure, le ressort n'est pas à sa longueur naturelle lorsque le système est à l'équilibre. En effet, le ressort doit être étiré pour exercer une force élastique, orientée vers le haut, qui équilibre la force gravitationnelle, orientée vers le bas. Soit ΔL l'étirement du ressort à la position d'équilibre. La force élastique est alors $\vec{\mathbf{F}}_{\text{él}} = k\,\Delta L$ $\overrightarrow{\text{vers le haut}}$. Selon la première loi de Newton :

$$\sum F_y = k\,\Delta L - mg = 0$$

$$\Delta L = \frac{mg}{k} . \qquad (1.14)$$

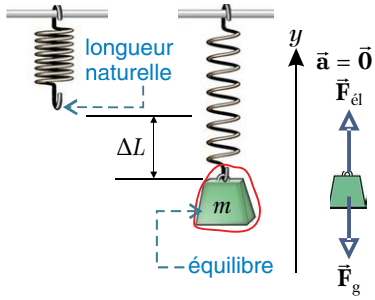


FIGURE 1.13
À la position d'équilibre, le ressort est étiré de ΔL.

Supposons maintenant qu'on soulève le bloc d'une distance $y = y_m < \Delta L$, et qu'on le laisse aller. Le bloc se met alors à osciller verticalement, autour de la position d'équilibre. Le ressort demeure étiré durant le mouvement, et il exerce une force vers le haut. Lorsque le bloc est à la coordonnée y par rapport à la position d'équilibre, l'étirement est $\Delta L - y$ (*voir la figure 1.14*). Selon la deuxième loi de Newton,

$$\sum F_y = k\,(\Delta L - y) - mg = ma_y$$

$$(k\,\Delta L - mg) - ky = ma_y .$$

Or, selon l'équation 1.14, $k\,\Delta L - mg = 0$. En exprimant l'accélération comme la dérivée seconde de la position, on obtient

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m} y . \qquad (1.15)$$

En comparant l'équation 1.15 à l'équation différentielle du mouvement harmonique simple (*voir l'équation 1.8*), on remarque que le système bloc-ressort vertical décrit bien un mouvement harmonique simple, avec la même fréquence angulaire ($\omega = \sqrt{k/m}$) que dans le cas du système bloc-ressort horizontal. L'ajout de la force gravitationnelle ne change pas le type de mouvement.

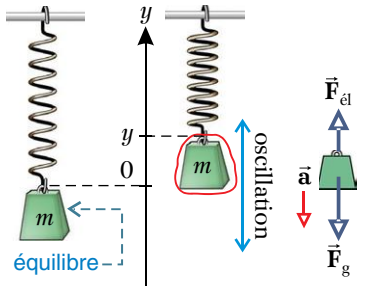


FIGURE 1.14
Le diagramme des forces lorsque le bloc est à une hauteur y par rapport à la position d'équilibre.

La position du bloc par rapport à la position d'équilibre est donnée par l'expression :

$$y = y_m \cos(\omega t + \phi) . \tag{1.16}$$

Le seul changement est lié à la position d'équilibre : au point d'équilibre, le ressort est étiré d'une distance ΔL, donnée par l'équation 1.14.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 1.3

Un bloc attaché à un ressort décrit un mouvement harmonique simple vertical. Le ressort demeure étiré durant l'oscillation. Il subit la force élastique exercée par le ressort et la force gravitationnelle exercée par la Terre. Quelle force le module le plus élevé a-t-il dans les situations suivantes ?

a. Le bloc est au-dessus de la position d'équilibre.
b. Le bloc est en dessous de la position d'équilibre.

EXEMPLE 1.5 Une oscillation verticale

On attache un bloc à un ressort vertical, ayant une longueur naturelle de 7,00 cm, et on fait osciller le système. La longueur du ressort varie entre 10,0 cm et 18,0 cm.

a. Quelle est l'amplitude du mouvement ?
b. Quelle est la période du mouvement ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 1.15 illustre le schéma de la situation, avec les deux positions extrêmes du mouvement harmonique. On trace l'axe des y orienté vers le haut, avec l'origine vis-à-vis de la position d'équilibre.

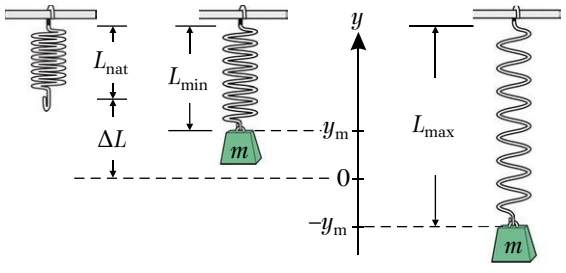


FIGURE 1.15
Le schéma de la situation pour l'exemple 1.5

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$L_{nat} = 7{,}00$ cm	y_m
$L_{max} = 18{,}0$ cm	T
$L_{min} = 10{,}0$ cm	

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est que l'oscillation s'effectue autour du point d'équilibre $y = 0$, entre la position maximale y_m et la position minimale $-y_m$, ce qui correspond à une distance de $2y_m$ entre les points extrêmes de l'oscillation :

$$| L_{max} - L_{min} | = 2y_m .$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$y_m = \frac{| 18{,}0 \text{ cm} - 10{,}0 \text{ cm} |}{2} = 4{,}00 \text{ cm} .$$

(réponse)

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

L'étirement minimal du ressort est

$$\Delta L_{min} = L_{min} - L_{nat} = 10{,}0 \text{ cm} - 7{,}00 \text{ cm} = 3{,}00 \text{ cm} .$$

La position d'équilibre se trouve à une distance de 4,00 cm sous la position où le ressort est étiré au minimum. Alors, au point d'équilibre,

$$\Delta L = \Delta L_{min} + y_m = 3{,}00 \text{ cm} + 4{,}00 \text{ cm} = 7{,}00 \text{ cm} .$$

(i)

Identifier les clés

À l'équilibre, la force élastique est équilibrée par la force gravitationnelle :

$$\sum F_y = k\,\Delta L - mg = 0 \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta L} = \omega^2\,, \qquad \text{(ii)}$$

où nous avons inséré la fréquence angulaire du système bloc-ressort $\omega = \sqrt{k/m}$. La période du mouvement est donnée par l'équation 1.13 :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons l'équation (ii) dans l'équation (iii) :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}0700\ \text{m}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}}$$

$$T = 0{,}531\ \text{s}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Les résultats sont positifs, comme il se doit. Remarquez que nous avons pu calculer la période sans connaître ni la masse du bloc ni la constante de rappel du ressort.

1.3 L'énergie dans le mouvement harmonique simple

Après avoir étudié le mouvement harmonique simple à l'aide de la dynamique, il est intéressant d'analyser le système bloc-ressort à partir de la notion d'énergie. Dans le système bloc-ressort étudié à la section 1.2, le frottement est négligeable, et la force élastique est une force conservative. Dans le chapitre 9 du tome 1, nous avons vu que l'énergie mécanique du système (la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle) doit être constante.

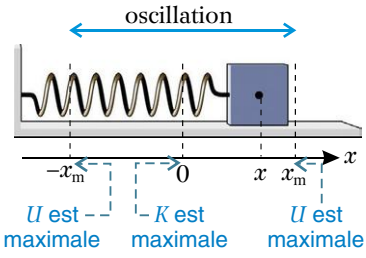


FIGURE 1.16
Dans un mouvement harmonique simple, il y a transformation entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle élastique.

Soit le système de la figure 1.16, composé d'un bloc de masse m qui est attaché à un ressort de constante de rappel k, et qui glisse sur une surface horizontale sans frottement. La position du bloc est donnée par l'expression $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ et la vitesse par $v_x = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$. Le système a de l'énergie potentielle élastique lorsque le ressort est comprimé ou étiré (*voir le chapitre 9 du tome 1*) :

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t + \phi)\,. \qquad (1.17)$$

Comme le montre la figure 1.17, l'énergie potentielle élastique du système varie en fonction du temps. Elle est maximale lorsque le bloc se trouve à la position maximale ($x = x_m$) ou à la position minimale ($x = -x_m$). L'énergie potentielle est nulle lorsque le bloc se trouve à la position d'équilibre ($x = 0$). À cet endroit, le ressort n'est ni étiré ni comprimé.

Le système a de l'énergie cinétique, car le bloc a une vitesse :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2\sin^2(\omega t + \phi)\,.$$

Comme $\omega^2 = k/m$, on peut réécrire la dernière équation de la façon suivante :

$$K = \frac{1}{2}kx_m^2\sin^2(\omega t + \phi)\,. \qquad (1.18)$$

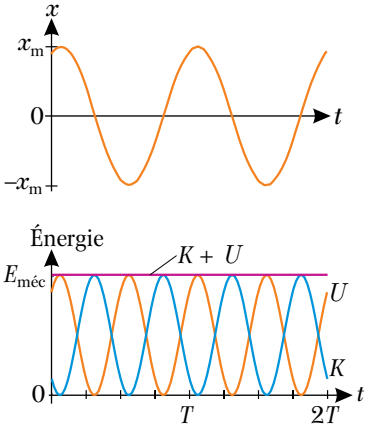


FIGURE 1.17
L'énergie cinétique (en bleu) et l'énergie potentielle (en orange) en fonction du temps. L'énergie mécanique du système ne change pas.

L'énergie cinétique varie aussi en fonction du temps, comme le montre la figure 1.17. L'énergie cinétique est maximale lorsque le bloc passe vis-à-vis de la position d'équilibre ($x = 0$), car c'est à cet endroit que le module de la vitesse est maximal. Par contre, l'énergie cinétique est nulle lorsque le bloc est à l'une des positions extrêmes ($x = \pm x_m$), car à ces endroits, le bloc est immobile.

L'énergie mécanique du système est

$$E_{\text{méc}} = K + U = \frac{1}{2}kx_{\text{m}}^2\cos^2(\omega t+\phi)+\frac{1}{2}kx_{\text{m}}^2\sin^2(\omega t+\phi)$$
$$= \frac{1}{2}kx_{\text{m}}^2\left[\cos^2(\omega t+\phi)+\sin^2(\omega t+\phi)\right].$$

Or, $\cos^2\Phi + \sin^2\Phi = 1$, pour n'importe quel angle Φ. On obtient donc

$$E_{\text{méc}} = \frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_{\text{m}}^2 . \qquad (1.19)$$

La figure 1.17 illustre bien le fait que l'énergie mécanique du système bloc-ressort est constante. L'équation 1.19 montre un résultat important, qui apparaîtra tout au long de l'étude des oscillations et des ondes.

L'énergie d'un système oscillant est proportionnelle au carré de l'amplitude du mouvement.

L'équation 1.19 est utile pour relier le module de la vitesse et la position du bloc, sans avoir besoin de calculer exactement le temps.

EXEMPLE 1.6 La conservation de l'énergie mécanique

Un bloc de 400 g est attaché à un ressort et peut glisser sur une surface sans frottement. On tire le bloc d'une distance de 70,5 cm et on le laisse aller. Le bloc revient à sa position initiale après 1,10 s. À quelles positions le module de la vitesse du bloc est-il de 2,50 m/s ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Nous laissons aller le bloc à $t = 0$ sans vitesse, ce qui implique que le bloc commence le mouvement à sa position maximale, et l'amplitude est de 0,705 m. De plus, le temps pour que le bloc revienne à sa position initiale correspond à la période, car celui-ci doit effectuer un cycle complet.

Connues		Inconnue
$m = 0{,}400$ kg	$T = 1{,}10$ s	x
$x_{\text{m}} = 0{,}705$ m	$v = 2{,}50$ m/s	

Identifier les clés

L'énergie mécanique est conservée, car le frottement est négligeable. Selon l'équation 1.19,

$$E_{\text{méc}} = \frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_{\text{m}}^2$$
$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{x_{\text{m}}^2-\frac{m}{k}v^2} . \qquad \text{(i)}$$

De plus,

$$\frac{m}{k} = \frac{1}{\omega^2} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons l'équation (ii) dans l'équation (i), puis nous insérons les valeurs :

$$x = \pm\sqrt{x_{\text{m}}^2-\left(\frac{Tv}{2\pi}\right)^2}$$
$$= \pm\sqrt{(0{,}705\text{ m})^2-\left(\frac{1{,}10\text{ s}\times 2{,}50\text{ m/s}}{2\pi}\right)^2}$$
$$x = \pm 0{,}553\text{ m} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Il y a deux réponses possibles, car nous obtenons une même vitesse lorsque le ressort est étiré et lorsqu'il est comprimé de la même distance. Les positions doivent se situer entre les positions extrêmes $x = \pm x_{\text{m}} = \pm 0{,}705$ m, ce qui est bien le cas.

1.4 Les pendules

Un *pendule* est un objet suspendu qui oscille autour d'une position d'équilibre. Le mouvement d'oscillation est produit par la force gravitationnelle qui engendre un moment de force de rappel. Nous allons analyser le pendule simple, où toute la masse est concentrée à une extrémité, et le pendule composé, où la masse est distribuée.

Le pendule simple

La figure 1.18 montre un pendule simple. Il est composé d'une masse compacte m au bout d'une corde, de longueur L et de masse négligeable. La corde est attachée à son autre extrémité. On suppose que la corde est une corde idéale, avec une masse négligeable et qui ne s'étire pas. Lors de l'oscillation, la masse décrit un arc de cercle, centré sur la verticale.

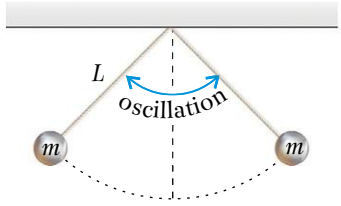


FIGURE 1.18
Un pendule simple est composé d'un objet de masse m au bout d'une corde de longueur L.

Le pendule effectue une rotation autour du point où la corde est attachée. On décrit alors l'oscillation à l'aide de la position angulaire θ par rapport à la verticale en fonction du temps. Pour analyser son mouvement, on commence par examiner le diagramme de forces illustré à la figure 1.19 lorsque la position angulaire est θ. Deux forces sont appliquées sur la masse m : la force de tension $\vec{\mathbf{T}}$, parallèle à la corde, et la force gravitationnelle $\vec{\mathbf{F}}_g$, orientée vers le bas.

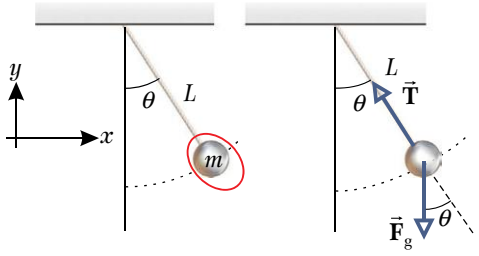


FIGURE 1.19
Le diagramme des forces pour le pendule simple

Le mouvement de rotation est produit par un moment de force résultant. Ici, la force de tension effectue un moment de force nul, car elle est parallèle au rayon du cercle. La force gravitationnelle exerce un moment de force de rappel, qui tend à ramener la masse vers la position d'équilibre $\theta = 0°$. Selon la section 12.1 du tome 1, le moment de force produit par une force $\vec{\mathbf{F}}$, qui s'exerce à une distance r d'un pivot avec un angle ϕ par rapport au vecteur $\vec{\mathbf{r}}$, est $\tau_z = \pm rF \sin \phi$. Ici, $r = L$ et $\phi = \theta$. Le moment de force gravitationnel est

$$\tau_{g,z} = -LF_g \sin\theta = -Lmg \sin\theta \, .$$

Le moment de force est négatif, car il est en sens horaire lorsque l'angle θ est en sens antihoraire. Selon la deuxième loi de Newton en rotation (*voir la section 12.2 du tome 1*),

$$\sum \tau_z = -Lmg \sin\theta = I\alpha_z \, ,$$

où I est le moment d'inertie du pendule* et α_z, l'accélération angulaire ($\alpha_z = \mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2$), qui est l'équivalent en rotation de l'accélération, c'est-à-dire la dérivée seconde de la position angulaire. On obtient alors l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{mgL}{I}\sin\theta\,. \tag{1.20}$$

L'équation 1.20 n'a pas la même forme que l'équation différentielle du mouvement harmonique simple donnée par l'équation 1.8, à cause du sinus dans le membre droit de l'équation 1.20. Le pendule ne décrit donc pas un mouvement harmonique simple. L'équation 1.20 est très difficile à résoudre de façon exacte.

Il est possible d'obtenir une solution approximative lorsque l'angle θ demeure faible pour tout le mouvement d'oscillation. En effet, lorsque l'angle est petit, l'approximation des petits angles est valide (*voir l'annexe E*) :

$$\sin\theta \approx \theta \qquad (\theta \text{ en rad})\,.$$

L'équation 1.20 devient alors

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \approx -\frac{mgL}{I}\theta\,. \tag{1.21}$$

Cette équation est l'équation différentielle du mouvement harmonique simple, où x est remplacé par θ. La solution est donnée par l'équation 1.2 :

$$\theta = \theta_\mathrm{m}\cos(\omega t + \phi)\,. \tag{1.22}$$

La constante θ_m est l'angle maximal, c'est-à-dire l'amplitude. Tout comme la constante de phase ϕ, l'amplitude dépend des conditions initiales. La fréquence angulaire est obtenue en comparant l'équation 1.21 et l'équation 1.8 :

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}\,.$$

Dans le cas d'un pendule simple, la masse est concentrée en un point, situé à une distance L du pivot. Alors, $I = mL^2$, et la fréquence angulaire est

Fréquence angulaire d'un pendule simple

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}\,. \tag{1.23}$$

La période du pendule est

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,. \tag{1.24}$$

Défi animé 1.1
Sachant que l'expression pour calculer la période d'un pendule n'est valide que pour les petits angles, jusqu'à quel angle peut-on aller avant que la valeur diverge de 1 % ?

Ce résultat est très intéressant. La fréquence angulaire (et donc la période) est indépendante de la masse de l'objet. Ce résultat a d'abord été découvert par Galilée, puis Newton l'a utilisé pour vérifier le principe d'équivalence de Newton (la masse inertielle, apparaissant dans la deuxième loi de Newton, est équivalente à la masse gravitationnelle, celle qui est utilisée pour calculer la force gravitationnelle).

Les résultats obtenus représentent une bonne approximation lorsque l'amplitude demeure faible, jusqu'à environ 10°. Pour une plus grande amplitude, la

* Pour un système de particules, $I = \sum_i m_i r_i^2$.

fréquence dépend de celle-ci, et le mouvement n'est pas un mouvement harmonique simple.

À partir de la position angulaire, on peut calculer la vitesse angulaire et l'accélération angulaire :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega\theta_m \sin(\omega t + \phi) \tag{1.25}$$

$$\alpha_z = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta_m \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2\theta\,. \tag{1.26}$$

Le pendule décrit un arc de cercle de rayon L (la longueur de la corde). On peut calculer le déplacement linéaire s, la vitesse linéaire et l'accélération tangentielle en utilisant les résultats obtenus à la section 11.3 du tome 1 :

$$s = L\theta = L\theta_m \cos(\omega t + \phi) \tag{1.27}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = L\frac{d\theta}{dt} \tag{1.28}$$

$$a_\theta = L\alpha_z = L\frac{d^2\theta}{dt^2}\,. \tag{1.29}$$

Ces équations sont valides lorsque θ est exprimé en radians.

MISE EN GARDE

Lors de l'étude de la rotation dans le tome 1, nous avons utilisé le symbole ω_z pour représenter la vitesse angulaire d'un objet en rotation. Dans le présent cas, nous écrivons la vitesse angulaire sous la forme $\frac{d\theta}{dt}$, pour éviter de confondre la vitesse angulaire et la fréquence angulaire ω, associée à la période d'oscillation du pendule.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 1.4

Dans un parc, deux enfants s'amusent dans des balançoires ayant la même longueur. L'amplitude des oscillations est faible. L'enfant A a une masse plus grande que l'enfant B. Quelle période d'oscillation des enfants est la plus courte ?

EXEMPLE 1.7 Un indicateur de secondes

On veut fabriquer un pendule simple ayant une période de 1,00 s.

a. Quelle longueur de corde doit-on utiliser ?

b. Si on fait osciller le pendule avec une amplitude de 5,0°, quel est le module de la vitesse maximale de la masse ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$T = 1{,}00$ s	L
$\theta_m = 5{,}0°$	v_m

SOLUTION a.

Identifier les clés

La première **clé** est l'équation 1.4 :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\,. \tag{i}$$

La deuxième **clé** est l'équation 1.23, qui permet de calculer la fréquence angulaire pour un pendule simple :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons l'équation (ii) dans l'équation (i), puis nous isolons L :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow L = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

$$L = \frac{9{,}81\ \text{m/s}^2\ (1{,}00\ \text{s})^2}{4\pi^2} = 0{,}248\ \text{m} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

L'amplitude θ_m doit être exprimée en radians :

$$\theta_m = 5{,}0° \times \frac{\pi\ \text{rad}}{180°} = 0{,}087\,3\ \text{rad} \,.$$

Identifier les clés

La vitesse est calculée à l'aide de l'équation 1.28 :

$$v = L\frac{d\theta}{dt} = -L\omega\theta_m \sin(\omega t + \phi) \,. \qquad \text{(iii)}$$

Le module de la vitesse maximale correspond à la valeur absolue du facteur multipliant la fonction sinus :

$$v_m = L\omega\theta_m = \frac{2\pi L\theta_m}{T} \,. \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$v_m = \frac{2\pi \times 0{,}248\ \text{m} \times 0{,}087\,3\ \text{rad}}{1{,}00\ \text{s}} = 0{,}14\ \text{m/s} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons bien aux questions. Le module de la vitesse doit être une quantité positive, car un module est toujours positif. Le module de la vitesse a été arrondi à deux chiffres significatifs, car l'amplitude connue a deux chiffres significatifs. Remarquez qu'un pendule ayant une longueur de 1,00 m a une période d'environ 2 s.

Le pendule composé

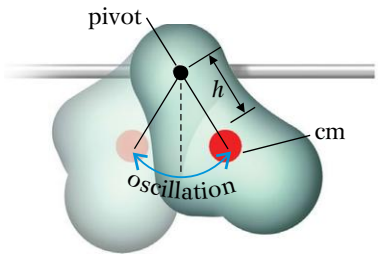


FIGURE 1.20
Un pendule composé oscille autour d'un pivot, situé à une distance h du centre de masse.

Un pendule composé est un objet quelconque, de masse m, qui oscille en effectuant une rotation autour d'un pivot. Comme le montre la figure 1.20, le pivot se trouve à une distance h du centre de masse de l'objet. La position d'équilibre $\theta = 0$ est la situation où la ligne joignant le pivot et le centre de masse est verticale.

Pour analyser le mouvement d'un pendule composé, on trace le diagramme des forces lorsque le pendule est incliné à un angle θ (*voir la figure 1.21*). Il y a deux forces exercées sur l'objet : la force gravitationnelle $\vec{F}_g$, exercée au centre de masse et orientée vers le bas, et la force $\vec{F}_p$ qui soutient l'objet au pivot. Seule la force gravitationnelle produit un moment de force, car la force $\vec{F}_p$ est exercée à une distance $r = 0$ du pivot. Selon la deuxième loi de Newton en rotation,

$$\sum \tau_z = -mgh \sin\theta = I\alpha_z \,, \qquad (1.30)$$

où I est le moment d'inertie de l'objet par rapport au pivot.

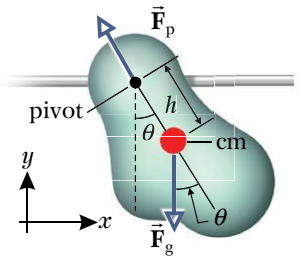


FIGURE 1.21
Le diagramme des forces du pendule composé

Le tableau C.2 de la page 473 donne le moment d'inertie pour des solides réguliers lorsque l'axe de rotation passe par le centre de masse. Lorsqu'un pendule composé oscille, l'axe n'est pas au centre de masse. Le moment d'inertie requis dans l'équation 1.30 se calcule à l'aide du théorème des axes parallèles (*voir l'équation 11.24 du tome 1*) :

$$I = I_{cm} + mh^2 \,. \qquad (1.31)$$

En remplaçant l'accélération angulaire par la dérivée seconde de la position angulaire, on obtient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgh}{I}\right)\sin\theta \,. \qquad (1.32)$$

Comme dans le cas du pendule simple, le pendule composé n'effectue pas un mouvement harmonique simple, car l'équation 1.32 n'est pas l'équation différentielle du mouvement harmonique simple. Cependant, lorsque l'amplitude angulaire est faible, on peut utiliser l'approximation des petits angles $\sin\theta \approx \theta$. L'équation 1.32 s'écrit alors

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{mgh}{I}\right)\theta\,. \tag{1.33}$$

C'est bien l'équation du mouvement harmonique simple (*voir l'équation 1.8*). Le pendule composé décrit approximativement un mouvement harmonique simple, lorsque l'amplitude est faible. La position angulaire est alors donnée par l'expression

$$\theta = \theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \phi)\,. \tag{1.34}$$

La fréquence angulaire est

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}}\,. \tag{1.35}$$

Fréquence angulaire d'un pendule composé

De nouveau, dans un mouvement harmonique simple, la fréquence angulaire ne dépend pas de l'amplitude. L'équation 1.35 semble montrer que la fréquence angulaire d'un pendule composé dépend de sa masse, ce qui n'est pas le cas, car le moment d'inertie dépend aussi directement de la masse de l'objet.

EXEMPLE 1.8 Une tige comme pendule

Une tige de 80,0 cm de longueur est fixée à l'une de ses extrémités. On incline la tige de 4,5° par rapport à la verticale, puis on la laisse aller.

a. Quelle est la période du mouvement ?
b. Quel est l'angle de la tige par rapport à la verticale après 3,50 s ?
c. Quel est le module de la vitesse angulaire maximale ?

SOLUTION

Illustrer la situation

Le schéma de la situation est présenté à la figure 1.22.

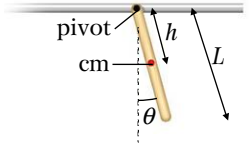


FIGURE 1.22
Le schéma de la situation pour l'exemple 1.8

Le centre de masse est au centre de la tige. La distance entre le centre de masse et le pivot est donc $h = L/2$. Étant donné que nous laissons aller la tige à $t = 0$, l'angle initial correspond à l'amplitude angulaire, et la constante de phase est nulle. Nous devons exprimer l'amplitude θ_{m} en radians :

$$\theta_{\mathrm{m}} = 4{,}5° \times \frac{\pi\ \mathrm{rad}}{180°} = 0{,}0785\ \mathrm{rad}\,.$$

Connues		Inconnues
$L = 0{,}800$ m	$h = \frac{L}{2}$	T
$\theta_{\mathrm{m}} = 0{,}0785$ rad	$\phi = 0{,}00$ rad	θ
$t = 3{,}50$ s		$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{m}}$

SOLUTION a.

Identifier les clés

La clé pour calculer la période est l'équation 1.4 :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\,. \tag{i}$$

La fréquence angulaire d'un pendule composé est l'équation 1.35 :

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}}\,, \qquad \text{(ii)}$$

où I est calculé à l'aide du tableau C.2 de l'annexe C et de l'équation 1.31 :

$$I = I_{cm} + mh^2\,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Selon le tableau C.2, le moment d'inertie d'une tige, lorsque l'axe passe par le centre de masse, est $I_{cm} = mL^2/12$. Le moment d'inertie du pendule composé est

$$I = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{3}\,. \qquad \text{(iv)}$$

En insérant ce résultat et l'équation (ii) dans l'équation (i), nous obtenons la période :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2/3}{mgL/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2\times 0{,}800\ \text{m}}{3\times 9{,}81\ \text{m/s}^2}} = 1{,}465\ \text{s}$$

$$T = 1{,}47\ \text{s}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La position angulaire d'un pendule composé est donnée par l'équation 1.34 :

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi)\,.$$

Résoudre le problème

Selon l'équation (i), la fréquence angulaire est

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1{,}465\ \text{s}} = 4{,}29\ \text{rad/s}\,. \qquad \text{(v)}$$

L'angle à $t = 3{,}50$ s est

$$\theta = 4{,}5^\circ \cos(4{,}29\times 3{,}50) = -3{,}4^\circ\,. \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Identifier la clé

La vitesse angulaire est

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega\theta_m \sin(\omega t)\,.$$

La vitesse angulaire maximale est la valeur absolue du facteur qui multiplie la fonction trigonométrique :

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_m = \omega\theta_m\,. \qquad \text{(vi)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_m = 4{,}29\ \text{rad/s}\times 0{,}0785\ \text{rad} = 0{,}34\ \text{rad/s}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous n'avons pas eu besoin de la masse de la tige pour calculer la période. En b., nous avons laissé l'amplitude angulaire en degrés pour obtenir un angle en degrés. En c., l'amplitude angulaire doit être exprimée en radians et la fréquence angulaire en rad/s. L'unité de la vitesse angulaire est le rad/s ; l'unité rad équivaut à 1, ce qui fait que $\text{rad}^2 = \text{rad}$.

1.5 Les oscillations dans les circuits *LC*

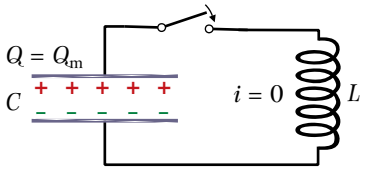


FIGURE 1.23
Le circuit *LC* avant la fermeture de l'interrupteur

Jusqu'à présent, nous avons étudié des systèmes mécaniques qui oscillent. Les oscillations se retrouvent aussi dans les circuits électriques, comme nous l'avons vu à la section 11.5 du tome 2. Le circuit le plus simple dans lequel il y a des oscillations est le circuit *LC*, constitué d'une bobine d'induction ayant une inductance L et d'un condensateur dont la capacité est C. Comme le montre la figure 1.23, le condensateur a une charge Q_m, et le courant est nul avant que l'interrupteur soit fermé.

En fermant l'interrupteur, le condensateur se décharge, ce qui produit un courant i. La bobine génère une f.é.m. d'auto-induction qui s'oppose à la variation de courant. Pour analyser la situation, on applique la loi des mailles au circuit dans un état intermédiaire, lorsque la charge sur l'armature

supérieure du condensateur est Q et que le courant dans la bobine est i (*voir la figure 1.24*) :

$$\Delta V_C + \Delta V_L = \frac{Q}{C} - L\frac{di}{dt} = 0 \,.$$

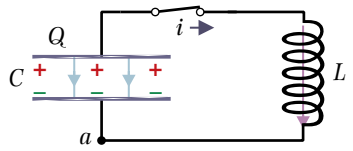


FIGURE 1.24
Le circuit LC dans un état intermédiaire

Pour résoudre cette équation différentielle, on doit remplacer le courant en fonction de la charge du condensateur. En effet, la charge du condensateur diminue, ce qui engendre le courant :

$$i = -\frac{dQ}{dt} \,. \tag{1.36}$$

Le signe négatif est présent parce que la charge diminue, et le courant est une valeur positive. On obtient alors l'équation différentielle suivante :

$$\frac{Q}{C} - L\frac{d}{dt}\left(-\frac{dQ}{dt}\right) = 0$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\left(\frac{1}{LC}\right)Q \,. \tag{1.37}$$

Cette équation a la même forme que l'équation 1.8. La charge oscille donc selon un mouvement harmonique simple :

$$Q = Q_m \cos(\omega t + \phi) \,, \tag{1.38}$$

où la fréquence angulaire est

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \,. \tag{1.39}$$

L'amplitude Q_m et la constante de phase ϕ dépendent des conditions initiales. Lorsqu'on ferme l'interrupteur à $t = 0$, la charge initiale correspond à la charge maximale, et la constante de phase est nulle.

On obtient le courant dans le circuit LC à l'aide de l'équation 1.36 :

$$i = -\frac{dQ}{dt} = \omega Q_m \sin(\omega t + \phi) = i_m \sin(\omega t + \phi) \,. \tag{1.40}$$

L'amplitude du courant est $i_m = \omega Q_m$.

La figure 1.25 illustre la charge du condensateur et le courant en fonction du temps. Remarquez que dans le présent circuit, un courant positif représente un courant en sens horaire, et un courant négatif représente un courant en sens antihoraire.

Le circuit LC est l'équivalent électrique d'un système bloc-ressort en mécanique, avec la charge du condensateur équivalant à la position du bloc et le courant équivalant à la vitesse. Le condensateur joue le rôle du ressort, où la constante de rappel k est remplacée par $1/C$. La bobine d'induction engendre de l'inertie, ce qui implique que l'inductance équivaut à la masse du bloc. En effet, la bobine empêche le courant de changer rapidement, comme la masse empêche la vitesse de changer rapidement. À la figure 1.26 (*voir la page suivante*), on montre l'équivalence entre les deux systèmes durant un cycle complet.

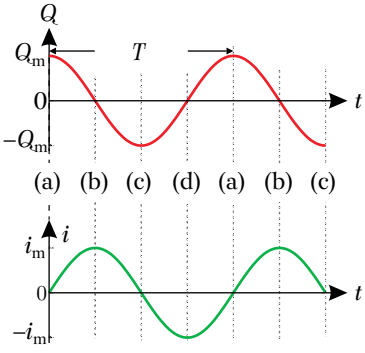


FIGURE 1.25
La charge du condensateur et le courant dans le circuit en fonction du temps. Les instants correspondant à ceux de la figure 1.26 sont illustrés en pointillé.

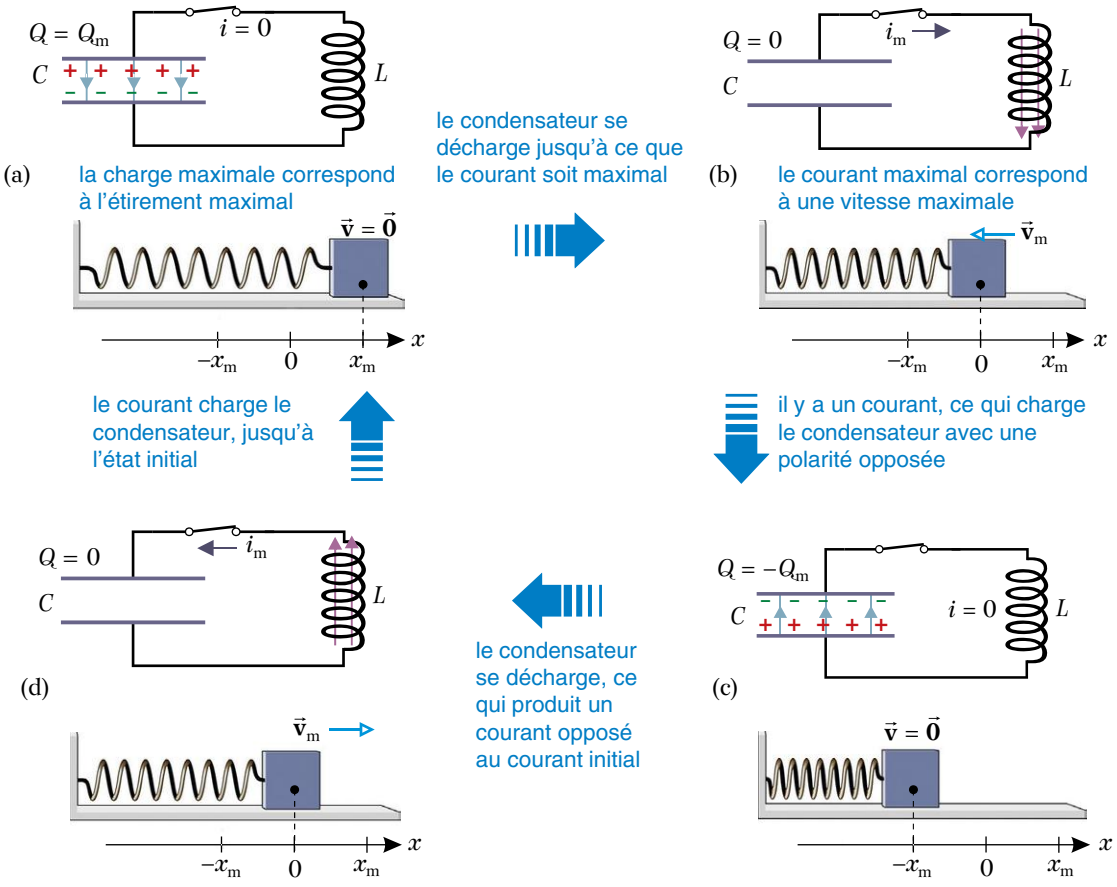


FIGURE 1.26

Le circuit LC et le système bloc-ressort. (a) La charge est maximale, et le courant est nul. (b) Le courant est maximal lorsque le condensateur est déchargé. (c) Le courant est nul lorsque le condensateur est complètement chargé. (d) Le condensateur est complètement déchargé et le courant est maximal.

EXEMPLE 1.9 Le courant dans un circuit LC

Un circuit LC est composé d'un condensateur de 3,50 µF et d'une bobine d'induction de 36,0 mH. La charge maximale sur le condensateur est de 43,0 µC. Quel est le courant dans le circuit lorsque la charge du condensateur est de 20,0 µC ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$L = 36{,}0$ mH	$C = 3{,}50$ µF	i
$Q_m = 43{,}0$ µC	$Q = 20{,}0$ µC	

La fréquence angulaire du circuit LC est

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{36{,}0\times10^{-3}\,\text{H}\times3{,}50\times10^{-6}\,\text{F}}}$$
$$= 2817\ \text{rad/s}\,. \qquad \text{(i)}$$

Identifier les clés

La charge est donnée par l'équation 1.38 :

$$Q = Q_m\cos(\omega t+\phi) = Q_m\cos(\Phi)\,, \qquad \text{(ii)}$$

et le courant est donné par l'équation 1.40 :

$$i = \omega Q_m\sin(\omega t+\phi) = \omega Q_m\sin(\Phi)\,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons d'abord les valeurs dans l'équation (ii) pour obtenir la phase :

$$20{,}0\ \text{µC} = 43{,}0\ \text{µC}\cos(\Phi)$$
$$\cos\Phi = 0{,}4651$$
$$\Phi = \arccos(0{,}4651) = \begin{cases}1{,}087\ \text{rad}\\ -1{,}087\ \text{rad}\end{cases}.$$

Il y a deux phases qui donnent la même charge. Le courant est obtenu en remplaçant ces valeurs dans l'équation (iii) :

$$i_1 = 2\,817 \text{ rad/s} \times 43{,}0 \times 10^{-6} \text{ C} \sin(1{,}087)$$
$$= 0{,}107 \text{ A}$$

$$i_2 = 2\,817 \text{ rad/s} \times 43{,}0 \times 10^{-6} \text{ C} \sin(-1{,}087)$$
$$= -0{,}107 \text{ A} .$$

Le courant est donc

$$i = \pm 0{,}107 \text{ A} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous devons trouver deux valeurs de courant, car la charge du condensateur est égale à 20,0 µC lorsque le condensateur se décharge ($i > 0$) et lorsque le condensateur se recharge ($i < 0$).

I.6 Les oscillations amorties

Lorsqu'on fait osciller un pendule réel, l'amplitude des oscillations diminue graduellement, jusqu'à une amplitude nulle à cause de la faible résistance de l'air. De même, lorsque vous faites sonner une clochette de bicyclette, le son émis diminue graduellement, car l'amplitude de l'oscillation diminue graduellement. Dans un circuit *LC*, la résistance des fils, même si elle est faible, va produire une diminution graduelle de la charge maximale sur les armatures du condensateur. Dans tous les exemples d'oscillations réelles, il y a une force dissipative qui fait diminuer l'énergie mécanique. On a alors des *oscillations amorties*.

Le système bloc-ressort amorti

Dans l'étude du système bloc-ressort à la section 1.2, nous avons supposé que la surface est sans frottement et que la résistance de l'air est négligeable. De cette façon, l'énergie mécanique du système est conservée. Nous avons vu à la section 5.9 du tome 1 que la résistance de l'air produit une force de traînée $\vec{\mathbf{f}}_T$, opposée à la vitesse, et dont le module dépend du module de la vitesse au carré. Ceci se produit dans le cas d'objets se déplaçant rapidement dans un gaz comme l'air. Pour des objets se déplaçant moins rapidement ou qui se déplacent dans un liquide, l'objet subit plutôt une force de frottement fluide, proportionnelle à la vitesse :

$$\vec{\mathbf{f}}_f = -b\vec{\mathbf{v}} . \qquad (1.41)$$

Le coefficient b est appelé le *coefficient de résistance* de l'objet. Il dépend de la forme de l'objet et de la viscosité du fluide. Il se mesure en kg/s.

On va donc étudier le mouvement d'un bloc attaché à un ressort dont la constante de rappel est k. On ajoute au bout du bloc une tige avec une ailette qui se déplace dans un liquide (*voir la figure 1.27*). La masse totale du bloc avec la tige et l'ailette est m. Les amortisseurs d'automobiles utilisent un montage réalisé avec les mêmes composantes : l'automobile repose sur des ressorts, chacun étant associé à un piston qui se déplace dans un cylindre rempli d'huile.

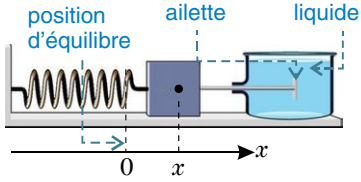


FIGURE 1.27
Un système bloc-ressort avec une force de frottement fluide exercée par le liquide sur l'ailette

On déplace le bloc de telle sorte que le ressort est étiré, et on le laisse aller. Le bloc acquiert de la vitesse, et le fluide ralentit le bloc. Le diagramme des forces est illustré à la figure 1.28 (*voir la page suivante*), lorsque le bloc se trouve à la position x par rapport à la position d'équilibre, et qu'il se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$.

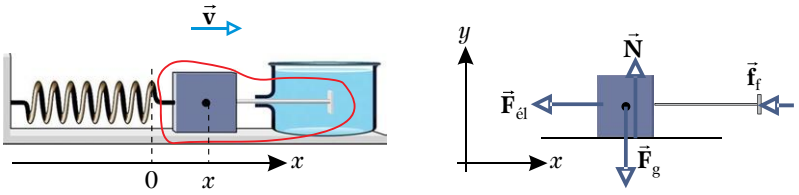


FIGURE 1.28
Le diagramme des forces pour le bloc muni d'une ailette

Selon la deuxième loi de Newton,

$$\sum F_x = -kx - bv_x = ma_x \, .$$

Comme $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, on obtient l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = 0 \, . \tag{1.42}$$

Il s'agit d'une équation différentielle du deuxième ordre, comme l'équation du mouvement harmonique simple, mais avec un terme supplémentaire. Pour un amortissement faible, la solution de cette équation est

$$x = x_{0\mathrm{m}}\, \mathrm{e}^{-bt/(2m)} \cos(\omega_\mathrm{a} t + \phi) \, , \tag{1.43}$$

où la fréquence angulaire ω_a du système amorti est

$$\omega_\mathrm{a} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}} \, , \tag{1.44}$$

où $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ est la fréquence angulaire du système non amorti. Remarquez qu'on obtient un mouvement harmonique simple si l'amortissement est nul, avec $b = 0$. Lorsque b est faible, la fréquence angulaire du système amorti est légèrement inférieure à la fréquence angulaire obtenue pour le système non amorti. Par contre, si l'amortissement b est élevé, la fréquence angulaire est plus faible. Ceci est causé par la force de frottement fluide qui réduit alors de façon significative la vitesse du bloc, et celui-ci prend plus de temps pour effectuer une oscillation complète.

La figure 1.29 illustre la position du bloc en fonction du temps. Dans l'équation 1.43, $x_{0\mathrm{m}}$ représente l'amplitude initiale, et ϕ est la constante de phase. On voit que la position du bloc oscille rapidement selon une fonction cosinus, qui est limitée par la courbe en pointillé $e^{-bt/(2m)}$, qui diminue de façon exponentielle. La courbe en pointillé est appelée l'*enveloppe*.

Comme le montre la figure 1.29, l'amplitude n'est pas constante, mais elle diminue graduellement, de façon exponentielle :

$$x_\mathrm{m} = x_{0\mathrm{m}}\, \mathrm{e}^{-bt/(2m)} \, . \tag{1.45}$$

L'énergie mécanique du système bloc-ressort diminue à chaque oscillation, car la force de frottement fluide est une force dissipative. On calcule l'énergie mécanique en remplaçant l'amplitude, donnée par l'équation 1.45, dans l'équation 1.19 de la page 18 :

$$E_\mathrm{méc} = \frac{1}{2}kx_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2}k\,(x_{0\mathrm{m}}\, \mathrm{e}^{-bt/(2m)})^2 = \frac{1}{2}kx_{0\mathrm{m}}^2\, \mathrm{e}^{-bt/m} \, . \tag{1.46}$$

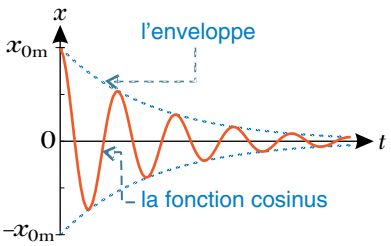


FIGURE 1.29
La position en fonction du temps dans un système harmonique amorti. L'amplitude diminue graduellement.

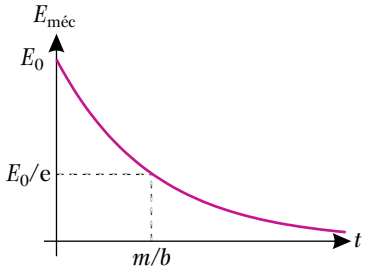


FIGURE 1.30
L'énergie mécanique du système amorti en fonction du temps. L'énergie mécanique initiale est $E_0 = kx_{0m}^2/2$.

À $t = 0$, l'énergie mécanique initiale est $E_0 = kx_{0m}^2/2$, et l'énergie diminue de façon exponentielle (*voir la figure 1.30*). On remarque qu'après $t = m/b$, l'énergie a diminué jusqu'à $E = E_0/e$.

Les résultats précédents sont valides pour un amortissement faible. Lorsque le coefficient de résistance est suffisamment élevé pour que ω_a soit nul, on parle de *régime critique*. Dans ce cas, il n'y a plus d'oscillation. Le système revient à sa position d'équilibre, sans mouvement de va-et-vient. Cela se produit lorsque $b = b_c$, où

$$b_c = \sqrt{4km}\ .$$

Si $b > b_c$, le système est en régime *surcritique*. Le système revient à la position d'équilibre, mais après un temps plus grand que dans le cas critique. En effet, la force de résistance fluide est si intense que la vitesse du bloc demeure très faible. La figure 1.31 illustre la position du bloc en fonction du temps dans le régime critique et le régime surcritique. Le régime critique correspond à la situation recherchée dans le cas d'un amortisseur d'automobile. De cette façon, l'automobile reprend sa position d'équilibre rapidement après avoir rencontré un obstacle comme un nid de poule.

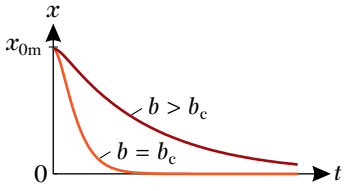


FIGURE 1.31
La position du bloc en fonction du temps dans le régime critique et le régime surcritique

EXEMPLE 1.10 Le nombre d'oscillations

Un système bloc-ressort est constitué d'un bloc de 350 g attaché à un ressort dont la constante de rappel est de 30,0 N/m. Le coefficient de résistance du bloc dans l'air est de 0,100 kg/s. On déplace le bloc pour que le ressort soit étiré de 10,0 cm, et on le laisse aller à $t = 0$.

a. Quelle est la période du mouvement ?
b. Après combien de temps l'amplitude a-t-elle diminué de moitié ?
c. À ce moment, combien d'oscillations complètes ont été effectuées ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$m = 0{,}350$ kg	T
$k = 30{,}0$ N/m	t
$b = 0{,}100$ kg/s	N
$x_{0m} = 10{,}0$ cm	
$x_m = x_{0m}/2$	

SOLUTION a.

Identifier les clés

La période du mouvement est obtenue à l'aide de l'équation 1.4 :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\ . \qquad \text{(i)}$$

Pour un mouvement harmonique amorti, la fréquence angulaire est calculée à l'aide de l'équation 1.44 :

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord la fréquence angulaire en remplaçant les valeurs dans l'équation (ii) :

$$\omega_a = \sqrt{\frac{30{,}0\ \text{N/m}}{0{,}350\ \text{kg}} - \frac{(0{,}100\ \text{kg/s})^2}{4\,(0{,}350\ \text{kg})^2}}$$
$$= 9{,}257\ \text{rad/s} \,. \qquad \text{(iii)}$$

La période est alors

$$T = \frac{2\pi}{9{,}257\ \text{rad/s}} = 0{,}6787\ \text{s} = 0{,}679\ \text{s} \,.$$
(réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 1.45 :

$$x_m = x_{0m}\, e^{-bt/(2m)} \,.$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons $x_m = x_{0m}/2$ et isolons le temps :

$$\frac{x_{0m}}{2} = x_{0m}\, e^{-bt/(2m)}$$
$$\frac{1}{2} = e^{-bt/(2m)}$$
$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{bt}{2m}$$
$$t = \frac{2\ln(2)\,m}{b}$$
$$t = \frac{2\ln(2)\times 0{,}350\ \text{kg}}{0{,}100\ \text{kg/s}} = 4{,}85\ \text{s} \,.$$
(réponse)

SOLUTION c.

Identifier la clé

La **clé** est que la période représente le temps d'une oscillation. Alors,

$$N = \frac{t}{T} \,. \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$N = \frac{4{,}85\ \text{s}}{0{,}679\ \text{s}} = 7{,}15 \,.$$

Puisque nous cherchons le nombre d'oscillations complètes,

$N = 7$ oscillations complètes. (réponse)

Valider la réponse

Nous répondons bien aux questions. Les valeurs sont positives, comme il se doit. En a., nous aurions pu calculer la fréquence angulaire du système non amorti, car la différence entre cette valeur approximative et la valeur réelle est négligeable.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 1.5

Le tableau suivant indique les paramètres de trois systèmes bloc-ressort amortis. Classez les systèmes selon un ordre croissant du temps, de sorte que l'amplitude diminue de moitié.

système	k	m	b
1	k	m	b
2	$k/2$	$2m$	b
3	$2k$	m	$2b$

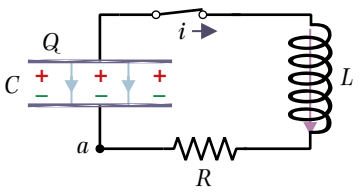


FIGURE 1.32
Le circuit *RLC* dans un état intermédiaire

Les oscillations amorties dans les circuits *RLC*

Comme nous l'avons vu à la section 11.6 du tome 2, lorsque la résistance n'est pas négligeable dans un circuit *LC*, nous obtenons un circuit *RLC*, et la charge maximale du condensateur diminue graduellement à chaque cycle. Pour analyser le circuit *RLC*, illustré à la figure 1.32, on applique la loi des mailles dans

la situation intermédiaire, lorsque la charge du condensateur est Q et que le courant dans le circuit est i. On obtient

$$\Delta V_C + \Delta V_L + \Delta V_R = \frac{Q}{C} - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - Ri = 0\,.$$

Cette équation a deux variables (Q et i). Le courant est produit par la diminution de la charge du condensateur :

$$i = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\,.$$

L'équation différentielle s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}Q\,. \tag{1.47}$$

Cette équation différentielle a la même forme que l'équation du système bloc-ressort amorti (*voir l'équation 1.42*). La résistance joue le même rôle que le coefficient de résistance b. La charge du condensateur est donc donnée par

$$Q = Q_{0\mathrm{m}}\,\mathrm{e}^{-Rt/(2L)}\cos(\omega_\mathrm{a} t + \phi)\,. \tag{1.48}$$

La fréquence angulaire des oscillations amorties est

$$\omega_\mathrm{a} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}}\,, \tag{1.49}$$

où $\omega_0 = \sqrt{1/(LC)}$ est la fréquence angulaire des oscillations non amorties. L'amplitude initiale est $Q_{0\mathrm{m}}$, et la constante de phase est ϕ. Comme dans le cas du système bloc-ressort amorti, l'amplitude diminue graduellement :

$$Q_\mathrm{m} = Q_{0\mathrm{m}}\,\mathrm{e}^{-Rt/(2L)}\,. \tag{1.50}$$

Le circuit RLC se comporte exactement comme le système bloc-ressort amorti. On peut dire que le circuit RLC est un équivalent électrique du système bloc-ressort amorti.

I.7 Les oscillations forcées et la résonance

Les systèmes comme les pendules simples et les systèmes bloc-ressort oscillent à une certaine fréquence lorsqu'ils sont déplacés de leur position d'équilibre, comme nous l'avons étudié dans ce chapitre. On appelle *fréquence naturelle* la fréquence des oscillations libres. Lorsqu'il y a présence d'un amortissement, la fréquence change, mais ce changement est petit lorsque l'amortissement est faible.

Une autre situation intéressante se produit lorsqu'on applique au système une force extérieure périodique, ayant une fréquence angulaire ω_ext. Le système va alors osciller à la fréquence angulaire de la force extérieure, ce qui produit des *oscillations forcées*. C'est le cas par exemple lorsque votre tympan est soumis à une onde sonore. L'onde produit une force sinusoïdale qui fait vibrer le tympan à la même fréquence.

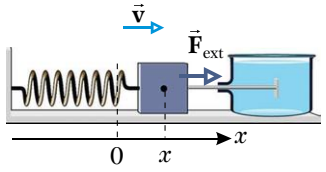


FIGURE 1.33
Une force extérieure périodique est appliquée sur le système bloc-ressort amorti.

Dans un système amorti, l'énergie mécanique du système diminue, car la force d'amortissement est une force dissipative. Lorsqu'une force extérieure est appliquée, celle-ci effectue un travail positif sur le système de telle sorte que l'énergie mécanique du système ne change pas.

Pour étudier les oscillations forcées, on analyse le système bloc-ressort amorti de la section 1.6 auquel on ajoute une force extérieure horizontale $\vec{\mathbf{F}}_{ext} = F_{ext}\vec{\imath}$ (*voir la figure 1.33*), où

$$F_{ext} = F_m \cos(\omega_{ext} t)\,. \tag{1.51}$$

Cette force est périodique, avec une période $T_{ext} = 2\pi/\omega_{ext}$. La masse du système est m, la constante de rappel du ressort est k et le coefficient de résistance de l'ailette dans le liquide est b. La deuxième loi de Newton produit une équation différentielle semblable à l'équation 1.42, avec la force extérieure en plus :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_m}{m}\cos(\omega_{ext} t)\,. \tag{1.52}$$

La solution de cette équation est complexe. Il y a d'abord un régime transitoire où le bloc oscille de façon complexe, avec une amplitude qui varie. Après un certain temps, le régime permanent est atteint, et le bloc oscille avec la même fréquence que la force extérieure :

$$x = x_m \cos(\omega_{ext} t + \phi)\,.$$

Cependant, le bloc n'est pas nécessairement en phase avec la force extérieure (on a choisi le temps pour que la constante de phase de la force extérieure soit nulle). L'amplitude du mouvement est

$$x_m = \frac{F_m}{m\sqrt{(\omega_{ext}^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\dfrac{b\omega_{ext}}{m}\right)^2}}\,, \tag{1.53}$$

où $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ est la fréquence naturelle du système lorsque l'amortissement est nul.

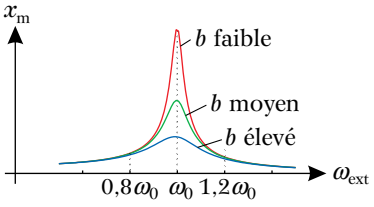


FIGURE 1.34
L'amplitude en fonction de la fréquence angulaire de la force extérieure

On remarque que l'amplitude dépend de la fréquence de la force extérieure et de la fréquence naturelle du système. Comme le montre la figure 1.34, l'amplitude est maximale lorsque la fréquence de la force extérieure est à peu près égale à la fréquence naturelle du système. C'est la *résonance*. La fréquence angulaire de la force extérieure qui produit la résonance est appelée la *fréquence angulaire de résonance* ω_r. On obtient

$$\omega_r \approx \omega_0 \qquad \text{(la condition de résonance)}\,. \tag{1.54}$$

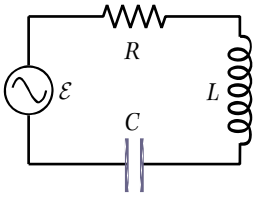


FIGURE 1.35
Le circuit RLC est résonnant lorsque $\omega_{ext} = \omega_0$.

Au chapitre 12 du tome 2, nous avons étudié un circuit oscillant avec amortissement (le circuit RLC) branché à une source de f.é.m. alternative, comme le montre la figure 1.35. Le circuit RLC montre aussi une résonance lorsque la fréquence de la source de f.é.m. ω_{ext} est égale à la fréquence angulaire naturelle $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ du circuit. À cette fréquence angulaire, l'amplitude du courant dans le circuit est maximale.

Le phénomène de résonance est important dans plusieurs domaines. Le terme *résonance* vient de l'univers de la musique ; on obtient des notes de musique en

faisant osciller un instrument à une fréquence qui correspond à une fréquence naturelle de l'instrument. Par exemple, en soufflant dans une flute, on fait osciller la flute à son oscillation naturelle, ce qui fait osciller les molécules d'air à la même fréquence et produit un son. Cette résonance est engendrée par une force constante plutôt que par une force périodique.

Défi animé 1.2
Qu'arrive-t-il lorsqu'on applique une force périodique sur un système bloc-ressort ?

Les structures comme les ponts et les édifices peuvent osciller à certaines fréquences naturelles. Lorsqu'un tremblement de terre se produit, les édifices ayant une fréquence naturelle près de la fréquence d'oscillation du sol vont osciller avec une amplitude importante et être endommagés.

Les ingénieurs doivent tenir compte de la résonance lors de la conception d'un ouvrage afin d'éviter que celui-ci se comporte comme un instrument de musique en entrant en résonance lorsque souffle un vent fort, comme cela s'est produit pour le pont de Tacoma Narrows en 1940. Plus récemment, le Millennium Bridge (*voir la figure 1.36*), un pont piétonnier à Londres, a dû être fermé quelques jours après son inauguration, car il s'est mis à osciller latéralement à cause du mouvement d'une foule. Le problème a été réglé en ajoutant des amortisseurs hydrauliques et des masses supplémentaires.

Voir les vidéos du pont de Tacoma Narrows et du pont piétonnier Millennium Bridge.

La résonance est utilisée dans les systèmes de communication. En effet, des circuits électriques peuvent être sensibles à des intervalles de fréquence étroits. C'est le cas lorsque vous écoutez la radio : le syntoniseur permet de changer la fréquence naturelle du circuit jusqu'à l'obtention d'une résonance avec une onde radio. En optique, la cavité optique est un élément essentiel dans un laser. La lumière est réfléchie un grand nombre de fois entre deux miroirs afin de n'obtenir que certaines fréquences de la lumière. Au chapitre 12, nous étudierons aussi la résonance magnétique, un phénomène qui a mené à la création d'une méthode d'imagerie très utile en médecine.

FIGURE 1.36
Le Millennium Bridge, à Londres

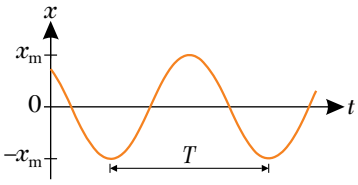
RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié les oscillations dans les systèmes mécaniques et les circuits électriques.

LES LOIS ET LES PRINCIPES

Le **mouvement harmonique simple** est un mouvement d'oscillation, c'est-à-dire un mouvement de va-et-vient autour d'une position d'équilibre. La position est

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) .$$



- L'amplitude x_m et la constante de phase ϕ dépendent des conditions initiales.
- La fréquence angulaire ω dépend des propriétés du système, et elle est reliée à la période et à la fréquence :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f .$$

- La vitesse est $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -v_m \sin(\omega t + \phi)$, où $v_m = \omega x_m$ est l'amplitude de la vitesse.
- L'accélération $\left(a_x = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)$ est proportionnelle à la position :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x .$$

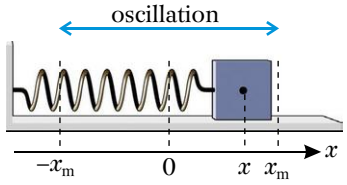
Les systèmes suivants décrivent un mouvement harmonique simple.

- Le système bloc-ressort :

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

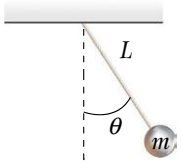
$$E_{méc} = K + U = \frac{1}{2} k x_m^2 .$$



- Le pendule simple (amplitude faible) :

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi)$$

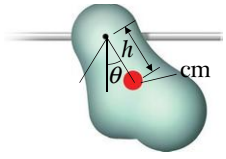
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} .$$



- Le pendule composé (amplitude faible) :

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi)$$

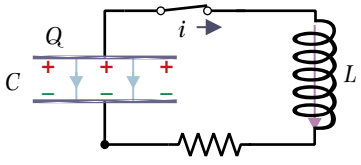
$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}} .$$



- Le circuit LC :

$$Q = Q_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} .$$



LES RÉSULTATS

Pour les **oscillations amorties**, l'amplitude et l'énergie diminuent graduellement. La fréquence angulaire des oscillations est ω_a.

- Un système bloc-ressort amorti subit une force de frottement fluide $\vec{\mathbf{f}}_f = -b\vec{\mathbf{v}}$:

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

$$x_m = x_{0m}\, \mathrm{e}^{-bt/(2m)}$$

$$E_{méc} = \frac{1}{2} k x_{0m}^2\, \mathrm{e}^{-bt/m} .$$

- Dans un circuit RLC, la charge oscille avec une amplitude qui diminue graduellement :

$$\omega_a = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$Q_m = Q_{0m}\, \mathrm{e}^{-Rt/(2L)} .$$

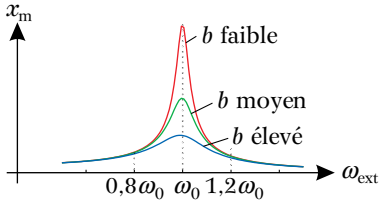
Dans une **oscillation forcée**, une force extérieure est appliquée :

$$\vec{\mathbf{F}}_{ext} = F_m \cos(\omega_{ext} t)\vec{\imath} .$$

- Le système oscille à la fréquence angulaire ω_{ext}.
- L'amplitude est maximale à la résonance, soit lorsque

$$\omega_{ext} = \omega_r \approx \omega_0 ,$$

où ω_0 est la fréquence angulaire naturelle du système.



QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

Section 1.1 La description du mouvement harmonique simple

Q1 Le graphique de la figure 1.37 illustre la position en fonction du temps d'une particule décrivant un mouvement harmonique simple $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$. Parmi les expressions suivantes, laquelle donne correctement la constante de phase ?

(i) $-\pi < \phi < -\pi/2$

(ii) $-\pi/2 < \phi < 0$

(iii) $0 < \phi < \pi/2$

(iv) $\pi/2 < \phi < \pi$

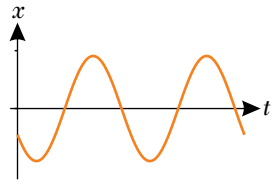


FIGURE 1.37 • Question 1

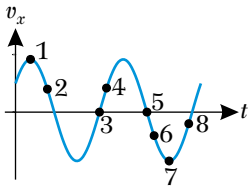


FIGURE 1.38 • Question 2

Q2 La figure 1.38 montre le graphique de la vitesse en fonction du temps d'un objet décrivant un mouvement harmonique simple horizontal autour de la position $x = 0$. L'axe des x est orienté vers la droite. Parmi les points illustrés, indiquez pour lesquels :

a. l'objet est à sa position maximale ;

b. l'objet se déplace vers la gauche, et son accélération est vers la droite ;

c. l'objet se trouve à la position d'équilibre ;

d. la position de l'objet est $0 < x < x_m$.

Q3 Une particule décrit un mouvement harmonique simple horizontal $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$. La figure 1.39 montre le graphique de l'accélération en fonction du temps.

a. Tracez le graphique de $x(t)$.

b. Dans quel sens se déplace la particule à l'instant t_1 ?

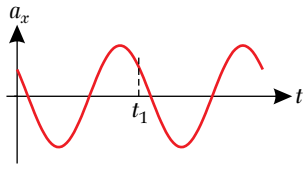


FIGURE 1.39 • Question 3

Q4 Quatre systèmes décrivent un mouvement harmonique simple :

$$x_1 = x_m \cos(2\omega t)$$

$$x_2 = 2x_m \cos(\omega t)$$

$$x_3 = 0{,}8x_m \cos(3\omega t)$$

$$x_4 = 0{,}7x_m \cos(2\omega t)\ .$$

Classez les systèmes selon un ordre croissant :

a. de l'amplitude ;

b. de la période ;

c. de l'amplitude de la vitesse.

E5 Deux objets présentant un mouvement harmonique simple ont des positions données par les équations suivantes :

$$x_2 = x_m \cos(t + \pi)$$

$$x_1 = 2x_m \cos(t + \pi/2)\ .$$

Quelle est la différence de phase entre les deux mouvements ?

E6 Dans un tremblement de terre de 1985 à Mexico, on a mesuré une accélération maximale de $0{,}20g$ et une période de 2,0 s. Quelle était l'amplitude des oscillations du sol ?

E7 Un bloc attaché à un ressort oscille selon un mouvement harmonique simple. Le bloc passe vis-à-vis de la position d'équilibre avec une vitesse dont le module est de 0,450 m/s. On mesure un temps de 0,80 s entre deux passages consécutifs vis-à-vis de la position d'équilibre.

a. Quelle est la période du mouvement ?

b. Quelle est l'amplitude du mouvement ?

c. Quel est le module de l'accélération maximale du bloc ?

E8 La position d'une particule est donnée par l'équation $x = 2{,}50 \cos(4t + \pi)$, où x est exprimé en centimètres et t, en secondes.

a. Calculez la période et la fréquence de ce mouvement.

b. Quelle distance parcourt cette particule durant un cycle complet ?

c. Tracez le graphique de sa position en fonction du temps pour deux cycles complets à partir de $t = 0$.

d. Donnez l'équation de la vitesse de la particule en fonction du temps.

e. Quelle est l'accélération de la particule à $t = 1{,}50$ s ?

E9 Un poteau soutenant un feu de circulation oscille d'est en ouest sous l'effet du vent. La position de son extrémité est donnée par $x = 30{,}0 \cos(1{,}98t)$, où x est exprimé en centimètres et t, en secondes. De plus, l'axe des x est orienté vers l'est. On considère ici le mouvement de l'extrémité du feu de circulation.

a. Quelle est la vitesse maximale ?

b. Trouvez l'accélération lorsque la position est de 15,0 cm vers l'ouest.

c. Combien de temps s'écoule entre deux instants consécutifs où l'accélération est de 2,00 m/s^2 et la vitesse est négative ?

P10 Un objet oscille selon un mouvement harmonique simple horizontal. Les extrémités de sa trajectoire sont séparées d'une distance de 25,0 cm. L'objet se déplace entre ces deux positions en 2,30 s.

a. Quelle est la période du mouvement ?

b. Quelle est l'amplitude du mouvement ?

c. Quelle est la vitesse lorsque l'objet se trouve à une distance de 5,00 cm à droite de l'une de ses positions extrêmes ?

P11 Le graphique de la figure 1.40 montre la position en fonction du temps d'un objet décrivant un mouvement harmonique simple.

a. Quelle est la période ?

b. Quelle est l'amplitude du mouvement ?

c. Quelle est la constante de phase si $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$?

d. Écrivez l'équation de la vitesse de l'objet en fonction du temps.

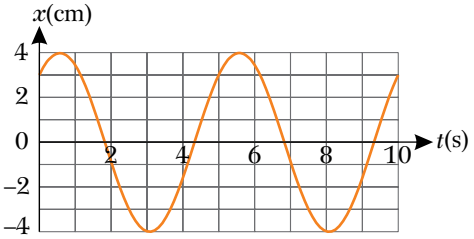


FIGURE 1.40 • Problème 11

P12 Un système bloc-ressort oscille avec une période de 2,40 s. À $t = 0$, le bloc se trouve à une distance de 18,8 cm à gauche de la position d'équilibre, et il se déplace vers la gauche à 0,677 m/s. Donnez l'équation de la position du bloc en fonction du temps.

P13 Dans un système bloc-ressort, on laisse aller le système à la position maximale à $t = 0$. À $t = 0{,}200$ s, la position de l'objet est $x_1 = 0{,}100$ m et à $t = 0{,}800$ s, l'objet se trouve à $x_2 = -0{,}100$ m.

a. Quelle est la période du mouvement ?

b. Quelle est l'amplitude ?

P14 Un insecte se tient fermement à un rayon d'une roue de bicyclette, à 20,0 cm du centre. La roue a un rayon de 35,0 cm, et le vélo se déplace à une vitesse constante de 18,0 km/h. La composante verticale du mouvement de l'insecte correspond à un mouvement harmonique simple. À $t = 0$, un chronomètre est mis en marche au moment où l'insecte se trouve à 35,0 cm du sol en descendant.

a. Quelle est la fréquence angulaire du mouvement d'oscillation de l'insecte ?

b. Écrivez l'équation de la composante verticale de sa vitesse en fonction du temps.

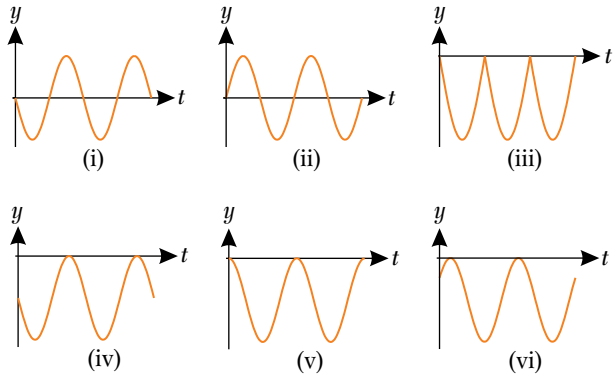
Section 1.2 Le système bloc-ressort

Q15 Deux systèmes bloc-ressort oscillent avec la même amplitude, mais le premier système oscille avec une période deux fois plus petite que le deuxième. Les deux sont composés de ressorts identiques.

a. Quel est le rapport de la masse des blocs ?

b. Quel est le rapport de la valeur des accélérations maximales des blocs ?

Q16 Un ressort de masse négligeable est suspendu au plafond. Son extrémité libre, lorsque rien n'y est accroché, est à la position $y = 0$. Lequel des graphiques suivants représente la position en fonction du temps d'un objet qu'on accroche à ce ressort et qu'on laisse tomber à partir de $y = 0$ à $t = 0$?



E17 Un bloc de 2,00 kg fixé à un ressort peut osciller horizontalement en glissant sur une surface sans frottement. Le bloc est déplacé de 20,0 cm, lorsqu'on étire le ressort, puis il est relâché à $t = 0$. Il met 0,800 s pour s'immobiliser une première fois à $x = -20{,}0$ cm.

a. Quelle est la constante de rappel du ressort utilisé ?

b. Quelle est la vitesse maximale du bloc ?

c. Écrivez l'équation décrivant la position du bloc en fonction du temps.

d. Quelle est la vitesse moyenne du bloc entre $t = 0{,}500$ s et $t = 2{,}50$ s ?

E18 Un ressort dont la constante de rappel est de 5,00 N/m s'étire de 10,0 cm lorsqu'on suspend une masse inconnue et que le système est à l'équilibre. Quelle est la période

d'oscillation d'un système composé d'un ressort ayant une constante de rappel de 10,0 N/m et de la même masse inconnue qui oscille verticalement ?

E19 Alors que vous êtes en auto, vous apercevez devant vous une vieille voiture dont les amortisseurs arrière semblent totalement inefficaces. Chaque fois que l'auto est secouée par un cahot de la route, l'arrière se met à osciller de haut en bas et effectue 4,0 oscillations en 5,0 s. Chacun des deux ressorts de la suspension arrière de ce véhicule a une constante de rappel de 10,0 kN/m. Quelle est la masse équivalente de l'arrière de la voiture ?

E20 En se plaçant au centre d'un trampoline, un enfant de 25,0 kg se met à osciller verticalement selon un mouvement harmonique simple. La constante de rappel du trampoline est de 3000 N/m. L'enfant se propulse tout juste suffisamment pour que l'extrémité supérieure de ses oscillations coïncide avec la position au repos de la toile.

a. Trouvez la distance entre la hauteur de la toile au repos et la position centrale des oscillations.

b. Déterminez le nombre d'oscillations qui s'effectuent en 5,00 s.

c. Calculez le module de la vitesse maximale du centre de masse de l'enfant.

d. Calculez le module de l'accélération maximale du centre de masse de l'enfant.

E21 On dépose un poids sur un piston qui oscille verticalement (*voir la figure 1.41*). Lorsque l'amplitude est de 5,0 cm, le poids perd tout juste contact avec le piston. Quelle est la fréquence du piston ?

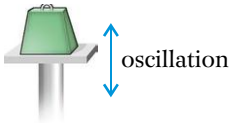


FIGURE 1.41 • Exercice 21

E22 Un chariot fixé à un ressort comprimé est libéré à $t = 0$. Le chariot effectue 7,00 oscillations complètes en 4,10 s. À $t = 3{,}25$ s, $v_x = -0{,}600$ m/s. Quelle est l'amplitude du mouvement ?

P23 Dans un système bloc-ressort, une masse de 350 g oscille à l'extrémité d'un ressort sur une surface horizontale sans frottement. À $t = 0$, on mesure $x = -4{,}89$ cm, $v_x = -1{,}42$ m/s et $a_x = 3{,}15$ m/s^2.

a. Quelle est la constante de rappel du ressort ?

b. Quelle est l'amplitude ?

c. Quelle est la constante de phase ?

P24 On accroche un objet de masse m au bout d'un ressort et on fait osciller le système. On ajoute une masse de 150 g, ce qui fait augmenter la période de 50,0 %. Quelle est la masse initiale m ?

P25 Un ressort est suspendu de façon verticale. On accroche un poids à son extrémité, en retenant le poids pour l'empêcher de tomber. Le ressort n'est donc pas étiré. On laisse aller le poids à $t = 0$, et le système oscille verticalement. La distance entre le point de hauteur minimale et le point initial est de 12,6 cm.

a. Quelle est l'amplitude du mouvement ?

b. Quelle est la période du mouvement ?

P26 Un bloc de masse m est relié à deux ressorts identiques, ayant une constante de rappel k, comme le montre la figure 1.42. Le bloc oscille sur une surface horizontale sans frottement. Montrez que le mouvement est un mouvement harmonique simple dont la période est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}\,.$$

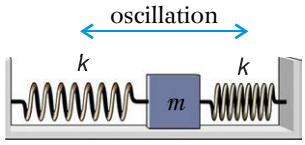


FIGURE 1.42 • Problème 26

P27 Un bloc de masse m est relié à un ressort de constante de rappel k qui est lui-même attaché à un ressort identique, comme le montre la figure 1.43. La surface est horizontale et sans frottement. Montrez que le système oscille selon un mouvement harmonique simple, dont la période est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}\,.$$

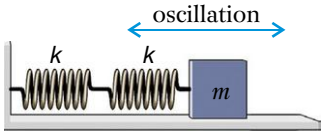


FIGURE 1.43 • Problème 27

Section 1.3 L'énergie dans le mouvement harmonique simple

Q28 La figure 1.44 montre le graphique de l'énergie potentielle en fonction de la position pour trois systèmes bloc-ressort ayant des masses identiques. Classez les systèmes selon un ordre croissant :

a. du module de la vitesse maximale ;

b. de la fréquence angulaire.

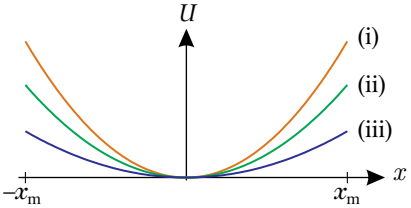


FIGURE 1.44 • Question 28

E29 On attache un bloc de 400 g à un ressort horizontal. Lorsque le bloc oscille à une fréquence de 1,20 Hz, le système possède 2,25 J d'énergie mécanique. Quelle est l'étirement maximal du ressort ?

E30 Un système bloc-ressort, dont la fréquence d'oscillation est de 5,00 Hz, possède une énergie mécanique de 50,0 J et présente une accélération maximale de 60,0 m/s^2. Quelle est la constante de rappel du ressort du système ?

E31 Un système bloc-ressort est composé d'une masse de 670 g, attachée à un ressort dont la constante de rappel est de 35,0 N/m, et qui oscille sur une surface horizontale sans frottement. L'amplitude de l'oscillation est de 32,0 cm. À quelle position le module de la vitesse est-il égal à 0,750 m/s ?

E32 Un système bloc-ressort oscille avec une amplitude x_m et une fréquence angulaire ω. À un instant, l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle.

a. Quelle est la position du bloc ?

b. Quel est le module de la vitesse du bloc ?

Section 1.4 Les pendules

Q33 On fabrique un pendule simple avec un fil d'une longueur L et une petite boule de masse m. Sa période d'oscillation est T. Qu'arrive-t-il à la période si on place un pendule identique sur la Lune, sachant que l'accélération gravitationnelle sur la Lune est six fois moindre que sur la Terre ?

Q34 Soit un pendule simple oscillant librement. Pour un cycle complet, indiquez :

a. combien de fois le pendule passe par la position centrale ;

b. combien de fois le pendule est immobile ;

c. durant quelle proportion du temps l'accélération angulaire est de sens opposé au sens de la vitesse angulaire.

Q35 La figure 1.45 illustre un pendule simple et deux pendules composés (des tiges uniformes) ayant la même longueur L qui oscillent librement. Classez les pendules selon un ordre croissant de leur période.

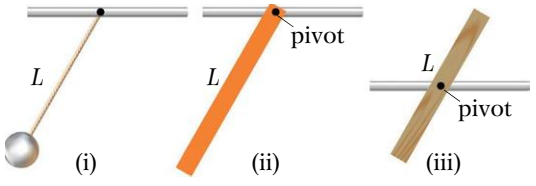


FIGURE 1.45 • Question 35

E36 Un pendule simple a une période de 1,50 s.

a. Quelle est la longueur de la corde ?

b. Calculez l'amplitude du pendule si le module de la vitesse au point le plus bas est de 0,250 m/s.

E37 Une chaudière au fond d'un puits oscille légèrement au bout d'une corde de 8,00 m de longueur. La corde forme avec la verticale un angle maximal de 0,500°.

a. Quelle est la durée d'une oscillation complète ?

b. Calculez la vitesse angulaire maximale de la chaudière.

E38 Un pendule simple a une longueur L. Montrez que sur Terre, la période d'oscillation est

$$T \approx 2{,}0\sqrt{L}\,,$$

où L est mesurée en mètres et T, en secondes.

E39 Un mètre en bois est suspendu par l'une de ses extrémités. On le fait osciller librement. Le module de la vitesse angulaire maximale est de 0,300 rad/s.

a. Quelle est la période de cette tige ?

b. Quelle est l'amplitude angulaire ? Exprimez votre réponse en degrés.

E40 Un DVD est un disque ayant un rayon de 60,00 mm, percé d'un trou central de 7,50 mm de rayon. On suspend ce disque à l'aide d'un petit clou, comme le montre la figure 1.46. On fait osciller le disque avec de petites oscillations. Quelle est la période des oscillations ?

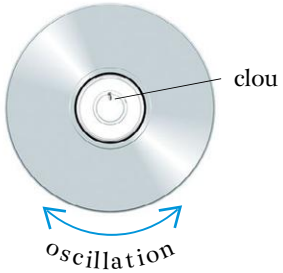


FIGURE 1.46 • Exercice 40

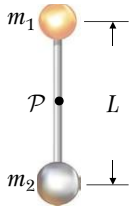


FIGURE 1.47 • Problème 41

P41 On relie une masse $m_1 = 250$ g et une masse $m_2 = 600$ g à l'aide d'une tige de masse négligeable, ayant une longueur L = 40,0 cm comme le montre la figure 1.47. La tige est trouée à son centre pour placer un pivot. On fait osciller le système. On déplace le système de 3,0° par rapport à la position d'équilibre et on le laisse aller.

a. Quelle est la période des oscillations ?

b. Quel est le module de la vitesse angulaire maximale ?

c. Quelle est l'accélération angulaire lorsque la position angulaire est de 1,2° ?

P42 Un pendule simple est fait d'une masse de 200 g au bout d'un fil de 1,000 m. Il est déplacé jusqu'à un angle de 10,0° par rapport à la verticale et lâché à partir de la position au repos. Un chronomètre est mis en marche lorsque la position angulaire du pendule est de 5,00° et que celui-ci se déplace vers la position d'équilibre.

a. Quelle est la période d'oscillation de ce pendule ?

b. Écrivez l'équation de la position angulaire du pendule en fonction du temps.

c. Quel est le module de la vitesse angulaire maximale ?

d. Quelle est la vitesse angulaire lorsque la position angulaire du pendule est de 5,00° ?

e. Quelle est l'accélération angulaire du pendule lorsque la position angulaire est de 8,00° ?

P43 On place un pendule simple ayant une longueur de 40,0 cm dans un ascenseur. Calculez la période des oscillations pour les situations suivantes :

a. L'ascenseur accélère vers le haut à 1,10 m/s^2.

b. L'ascenseur accélère vers le bas à 1,10 m/s^2.

c. L'ascenseur tombe en chute libre parce que le câble s'est rompu.

P44 Alors qu'un vélo est renversé pour procéder à son entretien, l'une de ses roues (qu'on modélise comme un cerceau de 1,10 kg et de 35,0 cm de rayon) oscille en rotation, déséquilibrée par un petit réflecteur de 14,0 g à 28,0 cm du centre. À un instant donné, la roue est immobile, et la position angulaire du réflecteur est de 8,0° par rapport à la verticale, sous le centre (*voir la figure 1.48*).

a. Quelle est la période des oscillations de la roue ?

b. Quelle est l'accélération angulaire lorsque la position angulaire du réflecteur est de 8,0° ?

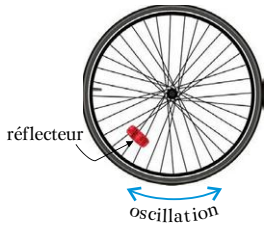


FIGURE 1.48 • Problème 44

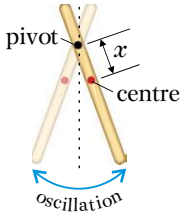


FIGURE 1.49 • Problème 45

P45 On fait osciller une tige homogène de longueur L autour d'un pivot, situé à une distance x du centre de la tige, comme le montre la figure 1.49.

a. Trouvez l'expression mathématique pour la période du mouvement en fonction de la position x.

b. Pour quelle distance x la période est-elle minimale ?

c. Dans le cas d'une tige de 1,000 m de longueur, pour quelle distance x la période est-elle minimale ?

d. Quelle est la période minimale pour une tige de 1,000 m de longueur ?

Section 1.5 Les oscillations dans les circuits *LC*

Q46 Un circuit *LC* a une période d'oscillation T_0. Déterminez la nouvelle période si :

a. on double la capacité du condensateur ;

b. on triple l'inductance de la bobine ;

c. on quadruple à la fois la capacité du condensateur et l'inductance de la bobine.

E47 Une radio émettrice AM utilise un circuit *LC* parmi ses composantes pour produire une onde radio à une fréquence de 800 kHz. Le circuit *LC* a une inductance de 1,05 mH. Quelle est la valeur de la capacité du circuit *LC* ?

E48 Ayant extrait d'un appareil défectueux une bobine dont l'inductance est inconnue, vous décidez de déterminer sa valeur en la couplant à un condensateur de 1,00 µF dans un circuit fermé. Vous chargez d'abord le condensateur en le reliant directement à une source de 6,00 V, ensuite vous le reliez de part et d'autre aux bornes de la bobine, où est déjà branchée la sonde d'un oscilloscope. L'oscilloscope affiche alors une courbe sinusoïdale dont la période est de 2,8 ms. Quelle est la valeur de l'inductance de la bobine ?

E49 Un circuit *LC* est constitué d'un condensateur de 2,70 µF et d'une bobine ayant une inductance de 25,0 mH. À $t = 0$, le courant dans le circuit est de 0,043 0 A, et la charge du condensateur est nulle.

a. Après combien de temps le courant du circuit sera-t-il nul ?

b. Quelle est la différence de potentiel maximale aux bornes du condensateur ?

E50 Un circuit *LC*, comportant un interrupteur ouvert, est constitué d'un condensateur de 10,0 µF et d'une bobine de 50,0 mH. Lorsque l'interrupteur est ouvert, la différence de potentiel aux bornes du condensateur est de 15,0 V. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

a. Déterminez l'équation décrivant la charge aux bornes du condensateur en fonction du temps.

b. Quelle est la valeur absolue du courant dans le circuit à $t = 10{,}0$ ms ?

Section 1.6 Les oscillations amorties

Q51 Un système bloc-ressort amorti horizontal a une période T_0. L'amortissement est produit par une force de frottement fluide exercée par un liquide. Indiquez l'effet de chacune des modifications suivantes sur la période d'oscillation ?

a. On remplace le ressort par un ressort ayant une constante de rappel plus grande.

b. On remplace le liquide par un liquide plus visqueux.

c. On augmente la masse du bloc.

d. On change l'orientation du système pour que l'oscillation soit verticale.

Q52 Lorsqu'on voyage en auto sur des routes normales, le confort dépend en grande partie des propriétés du système ressorts-amortisseurs sur lequel repose le véhicule. Décrivez le principal désavantage d'un amortissement trop faible ainsi que le principal désavantage d'un amortissement trop fort.

E53 Le mouvement d'oscillation d'une masse de 100 g, suspendue au plafond à l'aide d'un ressort idéal dont la constante de rappel est de 10,0 N/m, n'est amorti que par

la résistance de l'air. Après 30,0 s d'oscillation, l'amplitude du mouvement est égale à 80,0 % de l'amplitude initiale.

a. Déterminez le coefficient de résistance de l'objet dans l'air.

b. Combien d'oscillations la masse effectue-t-elle durant ces 30,0 s ?

c. Quel pourcentage de l'énergie mécanique initiale a été dissipé pour la même durée ?

E54 Un commerçant désire changer les portes battantes à l'entrée de son magasin. Ces portes peuvent s'ouvrir des deux côtés, et un système d'amortissement doit empêcher la porte de dépasser sa position centrale lorsque celle-ci se referme. Avant la modification, l'huile contenue dans le piston d'amortissement procurait tout juste un amortissement critique grâce à un coefficient de résistance de 200 kg/s. Si les nouvelles portes ont une masse 40 % plus grande, quel facteur de résistance de l'huile permettrait au même système de bénéficier à nouveau d'un amortissement critique ?

P55 L'un des panneaux solaires d'un satellite peut entrer en oscillation à la suite d'un changement d'orientation de l'engin. En laboratoire, son oscillation est amortie rapidement par l'air, de telle sorte que l'énergie mécanique du système est réduite à 3,00 % de sa valeur après 5,00 s. Pour déterminer si les oscillations seront trop persistantes dans l'espace, les concepteurs calculent la partie attribuée à l'air dans cet amortissement. On sait que le panneau se comporte comme un système bloc-ressort ayant une masse de 15,0 kg, et que la contribution de l'air au coefficient d'amortissement, pour la forme des panneaux et à pression atmosphérique, est évaluée à 8,00 kg/s. Quelle fraction de l'énergie mécanique initiale sera encore présente après 5,00 s d'oscillation dans le vide ? (Indice : Le coefficient d'amortissement en laboratoire est la somme du coefficient dû à l'air et celui qui est dû à la structure du satellite lui-même.)

E56 Un circuit *RLC* est constitué d'un condensateur de 10,2 µF, d'une résistance de 23,8 Ω et d'une bobine de 8,90 mH. La différence de potentiel initiale aux bornes du condensateur est de 9,00 V, et le courant initial est nul.

a. Quelle est la fréquence des oscillations ?

b. Quelle est la charge du condensateur après 1,20 ms ? Donnez la charge de l'armature qui est initialement chargée positivement.

P57 Durant un saut en *bungee*, Patrice (dont la masse est de 80,0 kg) se met à osciller de haut en bas au bout de l'élastique. Celui-ci a une longueur naturelle de 20,0 m, et sa constante de rappel est de 100 N/m. L'amortissement produit par l'air et les propriétés de l'élastique s'apparentent à celui qui est produit par un coefficient de résistance de 18,0 kg/s. Lorsqu'il saute, Patrice atteint son point le plus bas à 37,5 m sous le tremplin. Déterminez à quelle distance Patrice se rapprochera du tremplin lorsqu'il remontera à son deuxième rebond.

Section 1.7 Les oscillations forcées et la résonance

Q58 Déterminez, parmi les systèmes oscillants suivants, ceux qui doivent être volontairement amortis, volontairement entretenus ou laissés libre, pour qu'ils fonctionnent de manière adéquate :

a. les ressorts de suspension d'une voiture ;

b. les vagues sur l'eau d'une piscine ;

c. le pendule d'une horloge grand-père ;

d. le pont suspendu Pierre-Laporte ;

e. une chaise berçante ;

f. les cordes d'une guitare ;

g. une voiture qu'on tente de dégager de la neige en la poussant dans un mouvement de va-et-vient.

E59 Un circuit *LC* réel présente une certaine résistance du simple fait que les conducteurs qui relient les composantes ont une résistance non nulle. Un circuit *RLC* est ainsi créé, et une source de tension alternative doit donc entretenir les oscillations pour faire fonctionner cet oscillateur de façon continue. Si la bobine a une inductance de 500 mH, le condensateur une capacité de 2,50 µF et la résistance totale, une valeur de 0,800 Ω, quelle est la fréquence adéquate que la source doit appliquer sur le circuit pour entretenir l'oscillation ?

E60 Vous réalisez une expérience avec cinq pendules simples différents pris individuellement. Toutes les deux secondes et durant une demi-seconde, vous soufflez sur le pendule pour provoquer les oscillations. Les longueurs respectives des pendules sont de 15 cm, 25 cm, 50 cm, 1,00 m et 2,00 m. Lesquels sont susceptibles d'osciller de façon continue avec une amplitude constante ?

E61 Le caisson d'extrêmes graves d'un haut-parleur (communément appelé un *subwoofer*) est calibré pour optimiser la production de son à une fréquence bien particulière. Un exemplaire de ce type de haut-parleur est constitué d'un cône ayant une masse de 15,0 g. Son système de suspension et le volume d'air du caisson derrière le cône produisent, lors du mouvement, le même effet que le ressort d'une constante de rappel de 30,0 N/cm. Si la résonance se produit efficacement pour des fréquences sonores jusqu'à 10,0 % inférieures ou supérieures à la fréquence naturelle d'oscillation du cône, quelles sont les fréquences sonores les mieux reproduites par ce haut-parleur ?

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

1.1	(v)	L'accélération est nulle lorsque la position est nulle (situation d'équilibre). On obtient le signe de la vitesse à partir du signe de la pente du graphique de la position en fonction du temps. Une pente négative indique que la vitesse est vers la gauche.
1.2	**a.** La période ne change pas.	La période dépend des propriétés physiques du système et non de l'amplitude.
	b. v_m double.	La vitesse maximale est donnée par l'expression $v_m = \omega x_m$.
1.3	**a.** La force gravitationnelle **b.** La force élastique	À l'équilibre, les forces ont le même module. La force gravitationnelle est constante. Le module de la force élastique dépend de l'étirement du ressort. Au-dessus de la position d'équilibre, le ressort est moins étiré qu'à la position d'équilibre, et il exerce une plus petite force. Lorsque le bloc est en dessous de la position d'équilibre, le ressort est plus étiré et la force élastique est plus grande.
1.4	$T_A = T_B$	Lorsque l'amplitude est faible, la période $T = 2\pi/\omega$ ne dépend pas de la masse du pendule.
1.5	$t_3 < t_1 < t_2$	L'amplitude est $x_m = x_{0m}\, e^{-bt/2m}$. Plus le rapport b/m est élevé, plus l'amplitude diminue rapidement. La constante de rappel n'a pas d'influence.

Chapitre 02

Les ondes

Buts du chapitre

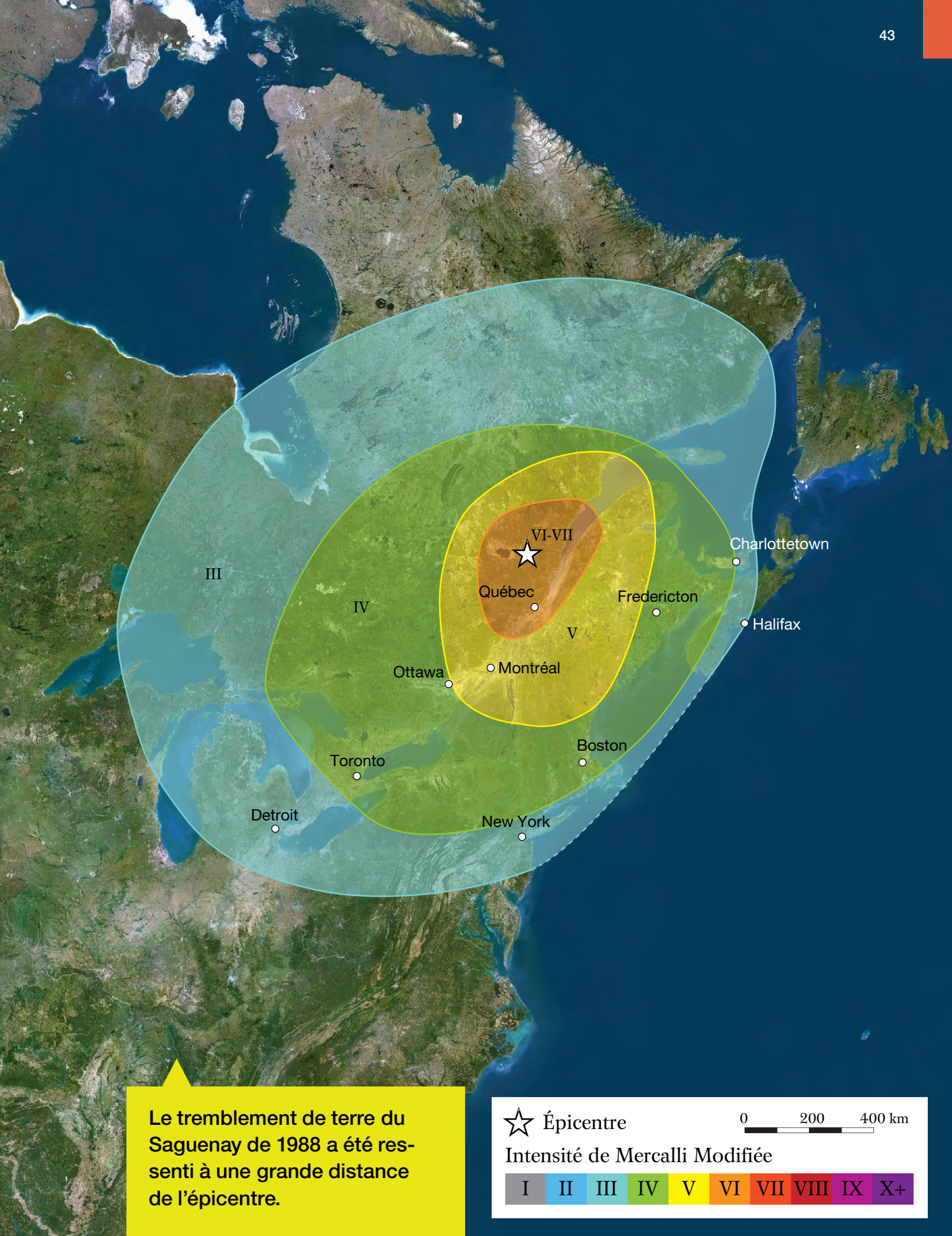
Ce chapitre porte sur le comportement général des ondes et traite en particulier des ondes sur une corde tendue. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de décrire les caractéristiques d'une onde progressive sinusoïdale ;
- de calculer la vitesse et la puissance transportée par une onde sur une corde ;
- de comprendre qualitativement la réflexion et la transmission d'une onde ;
- de saisir ce qu'est la superposition des ondes ;
- de décrire les caractéristiques des ondes stationnaires et d'obtenir les propriétés des modes normaux d'une corde.

Préalables

Ce chapitre repose sur le mouvement harmonique simple dans les systèmes mécaniques. Revoyez :

- le mouvement harmonique simple, présenté aux sections 1.1 à 1.3.



Le tremblement de terre du Saguenay de 1988 a été ressenti à une grande distance de l'épicentre.

FIGURE 2.1
Les ondes à la surface d'un verre de lait

Les phénomènes ondulatoires sont nombreux et variés. On peut observer une oscillation se déplacer lorsqu'on lance un caillou dans un lac calme ou lorsqu'une miette de biscuit tombe dans un verre de lait, comme on peut le voir à la figure 2.1. À une plus grande échelle, un séisme produit des ondes sismiques qui se déplacent ; la terre tremble sur une grande distance, comme le montre la carte de l'ouverture du chapitre dans le cas du tremblement de terre du Saguenay de 1988.

Les ondes sont aussi présentes dans des phénomènes où l'oscillation est beaucoup moins perceptible, comme le son et la lumière. En effet, le son est une onde. Lorsque vous parlez, vous faites osciller les molécules d'air. Cette oscillation se propage, ce qui correspond à l'onde sonore. De même, la lumière est l'oscillation d'un champ électrique et d'un champ magnétique qui se propagent, ce qu'on appelle aussi une onde électromagnétique. En outre, les recherches dans la première moitié du 20^{e} siècle ont montré que la matière a un comportement ondulatoire. La mécanique quantique est basée sur la notion de dualité onde-particule. Cette notion est essentielle à la compréhension du comportement des atomes et des particules subatomiques comme l'électron.

Nous commençons l'étude des ondes en analysant des ondes qui se déplacent sur une corde tendue. Ces ondes constituent une bonne introduction aux phénomènes ondulatoires, car elles sont faciles à visualiser. De plus, on peut les décrire mathématiquement à l'aide de fonctions simples parce que ces ondes ont un déplacement rectiligne, dans la direction de la corde. Ceci va nous permettre d'obtenir plusieurs caractéristiques générales des ondes. Nous pourrons appliquer ces résultats aux ondes sonores et à la lumière dans les prochains chapitres.

2.1 Les types d'ondes

Dans le tome 1, nous avons étudié le mouvement des objets en les considérant comme des particules. Une particule est localisée : elle se situe à un endroit particulier. Une onde est différente. Lorsqu'on lance un caillou dans un étang, la surface de l'eau est déformée par l'impact du caillou, et cette déformation se déplace à partir du point d'impact, formant des cercles dont le rayon augmente. L'ensemble de ces oscillations qui se déplacent est appelé une *onde*. On définit de façon générale une onde comme une déformation qui se déplace. Contrairement à une particule, l'onde n'est pas localisée à un endroit particulier, elle a une certaine étendue.

On distingue quatre types d'ondes, selon ce qui oscille.

1. Les *ondes mécaniques* se déplacent dans un milieu physique, comme le sol ou l'air. Lorsque l'onde se déplace, le milieu oscille. On peut produire une onde mécanique dans une corde tendue. Le milieu est alors la corde. Les ondes sonores, les ondes sur l'eau et les ondes sismiques sont d'autres ondes mécaniques. Nous allons étudier les ondes mécaniques dans le présent chapitre et le chapitre 3.

2. Les *ondes électromagnétiques* sont constituées d'un champ électrique et d'un champ magnétique qui oscillent. Ces ondes peuvent se déplacer dans le vide et dans un milieu matériel. La lumière est un exemple d'onde électromagnétique, comme les ondes radio, l'infrarouge, l'ultraviolet et les rayons X. Nous allons étudier la lumière dans les chapitres 4 à 8.

3. Les *ondes de matière* sont des ondes associées aux particules comme l'électron et le proton. Les découvertes en physique quantique ont montré qu'il existe une dualité onde-particule. Nous allons étudier ces ondes aux chapitres 10 à 14.

4. Les *ondes gravitationnelles* sont des ondes prédites par la relativité générale d'Einstein. Elles correspondent à une oscillation de la courbure de l'espace-temps. La figure 2.2 illustre la déformation d'un anneau circulaire lors du passage d'une onde gravitationnelle. Ces ondes n'ont pas encore été directement observées ; elles ne l'ont été que de façon indirecte.

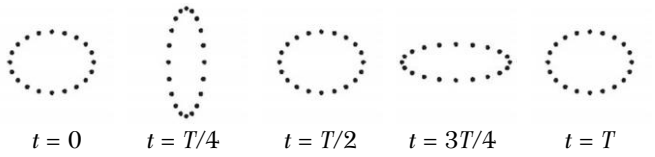


FIGURE 2.2
Un anneau circulaire se déforme lors du passage d'une onde gravitationnelle à travers la page.

Une onde mécanique se déplace dans un milieu matériel. Ce milieu doit être élastique, c'est-à-dire qu'il peut se déformer. Dans le cas d'une onde sur une corde tendue, la corde s'étire au passage de l'onde. Pour produire une onde, il faut une source, c'est-à-dire un agent extérieur qui perturbe le milieu en exerçant une force.

La figure 2.3 montre une corde tendue horizontale. Une source déplace l'extrémité de la corde de façon verticale. À cause de l'élasticité de la corde et de son inertie, la perturbation se propage vers la droite à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$. On obtient une *impulsion*. Les éléments de la corde se déplacent verticalement, alors que l'onde se déplace vers la droite. On a une *onde transversale*. Les ondes électromagnétiques sont aussi des ondes transversales, car le champ électrique et le champ magnétique oscillent perpendiculairement au déplacement de l'onde.

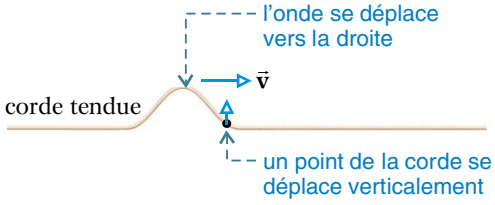


FIGURE 2.3
Une onde sur une corde tendue est une onde transversale.

Si on remplace la corde par un ressort, on peut produire une onde d'une autre façon, en tirant et en poussant le ressort dans le sens de sa longueur. La compression du ressort se déplace vers la droite. On obtient une *onde longitudinale*, car le déplacement de l'onde est dans la même direction que le mouvement d'une partie du ressort (*voir la figure 2.4 à la page suivante*). Les ondes sonores dans un gaz sont aussi des ondes longitudinales, car les molécules oscillent dans la même direction que le déplacement de l'onde.

Dans certains milieux, les ondes sont une superposition d'ondes transversales et d'ondes longitudinales. Ce sont des *ondes mixtes*. Par exemple, c'est le cas

des ondes sismiques qui sont produites par un tremblement de terre. C'est aussi le cas pour les vagues qui se déplacent dans l'eau.

Jusqu'à maintenant, les ondes présentées en exemples sont des *ondes progressives*, c'est-à-dire des ondes qui se déplacent, en transportant de l'énergie, à partir de la source vers des points éloignés.

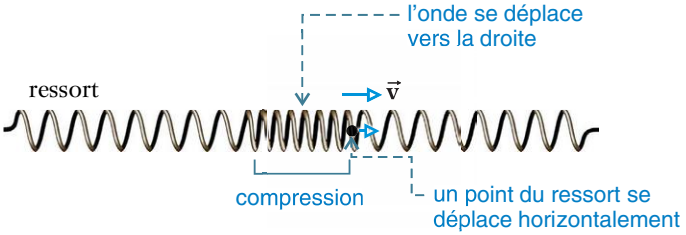


FIGURE 2.4
Une onde longitudinale se déplace dans un ressort.

REMARQUE

Il est important de voir que lorsqu'une onde se déplace, les composantes du milieu ne se déplacent pas avec l'onde, mais elles oscillent autour d'une position d'équilibre.

2.2 Les ondes progressives à une dimension

Les ondes sur une corde tendue effectuent un déplacement à une dimension le long de la corde. On commence l'étude des ondes avec ce type d'ondes, car ces ondes sont faciles à visualiser et elles possèdent quand même les caractéristiques générales d'une onde. Les ondes à deux dimensions, comme les ondes à la surface d'un verre de lait, et les ondes à trois dimensions, comme les ondes sonores qui se déplacent dans une pièce, sont plus complexes à visualiser et à analyser. Nous les étudierons dans le chapitre 3.

Les ondes sur une corde

Les ondes sur une corde tendue sont un exemple simple d'ondes qui effectuent un déplacement à une dimension. Cet exemple va permettre d'analyser le comportement des ondes à une dimension. La figure 2.5 montre une corde tendue dans laquelle se déplace une onde. L'onde illustrée est appelée une *impulsion*. Une impulsion est produite par un mouvement rapide et bref de la corde.

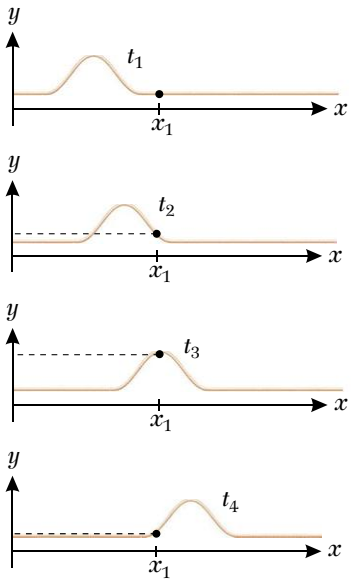


FIGURE 2.5
Une impulsion sur une corde, à quatre instants successifs

Contrairement à une particule, l'onde n'est pas localisée en un point, mais elle a plutôt une certaine étendue. Pour la décrire, on a besoin de donner la position verticale y de tous les points de la corde, dont la coordonnée horizontale est x, à des temps t. On a donc besoin de la fonction $y(x; t)$. C'est la *fonction d'onde* pour une onde sur une corde.

La figure 2.5 montre l'onde sur la corde à quatre instants différents, comme si on avait photographié la corde à ces instants. Chaque image illustre la corde lorsque la fonction d'onde est évaluée à un temps fixe. Par exemple, la première image est donnée par la fonction $y(x; t_1)$, la deuxième image correspond à

$y(x\,;\,t_2)$ et ainsi de suite. Cette représentation donne une partie de l'information sur cette onde.

Une deuxième partie de l'information de l'onde peut être visualisée en traçant la fonction $y(x_1\,;\,t)$, où x_1 représente un point ayant une coordonnée x fixe sur la corde, comme le point qui apparaît à la figure 2.5. On obtient alors le graphique de la figure 2.6. Les deux figures sont importantes dans la visualisation de l'onde, chacune apportant une information complémentaire sur l'onde.

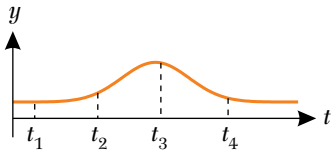


FIGURE 2.6
Le graphique de $y(x_1\,;\,t)$ représente la position verticale du point x_1 en fonction du temps.

La forme générale de la fonction d'onde

Chaque onde peut être décrite par une fonction d'onde qui est la solution d'une équation d'onde. Pour obtenir une équation générale, prenons une fonction d'onde $f(x\,;\,t)$ qui peut décrire une onde progressive quelconque, comme une onde sur une corde ou une onde sonore.

La fonction d'onde représente le déplacement d'un élément du milieu. Dans le cas d'une onde sur une corde, l'élément du milieu correspond à une petite partie de la corde. Pour une onde sonore, il peut s'agir d'un petit ensemble de molécules ayant un mouvement semblable.

Le déplacement d'un élément du milieu dépend à la fois de la position x et du temps t, c'est pourquoi la fonction d'onde est une fonction de deux variables. Par contre, cette fonction ne peut pas être une fonction arbitraire de ces variables pour décrire une onde progressive.

Pour trouver la forme de la fonction d'onde, on analyse l'impulsion présentée à la figure 2.7 au temps $t = 0$ et au temps t. Entre ces deux instants, l'impulsion s'est déplacée vers la droite d'une distance $d = vt$, où v est le module de la vitesse de l'onde. Mathématiquement, la fonction d'onde $f(x\,;\,t)$ doit correspondre à la fonction $f(x)$, déplacée d'une distance d. Ici, le maximum de l'impulsion se produit lorsque l'argument de la fonction d'onde est nul. Une fonction décrivant une onde progressive qui se déplace vers la droite à une vitesse ayant un module v est alors

$$f(x\,;\,t) = f(x - vt) \qquad \text{(une onde vers la droite)}\,. \tag{2.1}$$

Donc, une onde progressive est décrite par une fonction où les variables x et t sont présentes selon la forme $(x - vt)$.

On obtient une onde qui se déplace vers la gauche pour toute fonction ayant la forme :

$$f(x\,;\,t) = f(x + vt) \qquad \text{(une onde vers la gauche)}\,. \tag{2.2}$$

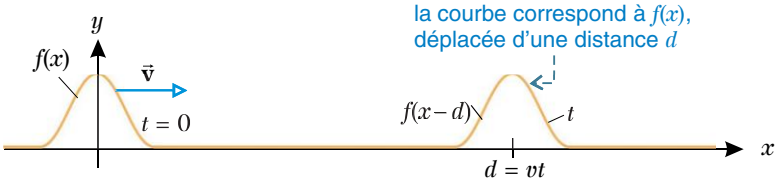


FIGURE 2.7
Une onde se déplace vers la droite. Au temps t, la fonction $f(x\,;\,t)$ correspond à la fonction $f(x)$ déplacée d'une distance $d = vt$ vers la droite.

REMARQUE

On a écrit la fonction d'une onde qui se déplace parallèlement à l'axe des x. Si l'onde se déplace plutôt parallèlement à l'axe des y ou à l'axe des z, on remplace la variable x par y ou z.

L'équation d'onde

Une fonction quelconque $f(x\,;\,t) = f(x \mp vt)$ décrit une onde progressive, avec le signe négatif lorsque l'onde se déplace dans le sens de l'axe des x et le signe positif dans le cas contraire. Cette fonction doit être une fonction continue. On peut dériver cette fonction par rapport à x ou par rapport à t. Les deux dérivées sont reliées par l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mp v \frac{\partial f}{\partial x},$$

car lorsqu'on dérive la fonction par rapport à t, le terme $\mp v$ apparaît en dérivant l'argument de la fonction.

REMARQUE

On utilise la notation ∂ pour indiquer une dérivée partielle d'une fonction à plusieurs variables. La dérivée partielle $\partial f/\partial t$ indique qu'on dérive la fonction $f(x\,;\,t)$ par rapport à t, en gardant l'autre variable x constante.

En dérivant de nouveau la fonction, on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Cette équation différentielle est habituellement écrite de la façon suivante :

Équation d'onde (l'équation de d'Alembert)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \tag{2.3}$$

Cette équation différentielle aux dérivées partielles est l'équation d'onde. Elle a été obtenue par le mathématicien et philosophe français Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) dans son étude de la corde vibrante. La solution de cette équation est une fonction d'onde, c'est-à-dire que cette équation implique qu'une onde progressive peut se propager dans le milieu. Lorsqu'on va rencontrer cette équation, cela va nous permettre de prouver qu'une onde progressive peut se déplacer dans le milieu. De plus, l'équation 2.3 nous indiquera le module de la vitesse v de l'onde dans le milieu.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 2.1

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles décrivent une onde progressive ?

(i) $y(x\,;t) = 4\sin(2x)\cos(4t)$

(ii) $s(y\,;t) = 1/(2y + 6t - 1)^2$

(iii) $p(z\,;t) = 0{,}5\cos(4z + 8t - 1)$

(iv) $h(x\,;t) = \dfrac{2}{2x^2 - 3t^2}$

2.3 La vitesse des ondes sur une corde

Lorsqu'une onde se déplace dans un milieu, la vitesse de propagation dépend uniquement des propriétés du milieu. Dans le cas des ondes sur une corde, la vitesse des ondes dépend uniquement des propriétés de la corde. Pour une corde de longueur L et de masse m, on définit la masse linéique μ comme la masse par unité de longueur :

$$\mu \equiv \frac{m}{L} . \tag{2.4}$$

Un petit fil a une masse linéique faible, alors qu'un câble utilisé pour amarrer un bateau a une masse linéique très élevée.

Pour qu'une onde se déplace dans une corde, celle-ci doit être tendue. La tension dans la corde est notée F. Le module de la vitesse des ondes sur une corde est

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} . \tag{2.5}$$

Module de la vitesse des ondes sur une corde

La preuve de cette équation est présentée à la fin de la section.

On remarque que le module de la vitesse augmente si la tension dans la corde augmente. Dans ce cas, chaque partie de la corde tire de façon plus importante sur les parties voisines. De même, le module de la vitesse de l'onde augmente si la masse linéique est plus faible, car l'inertie d'un élément de la corde est plus faible. L'élément est plus facile à mettre en mouvement. Nous verrons l'importance de ces facteurs sur la fréquence émise par des instruments de musique à cordes au chapitre 3.

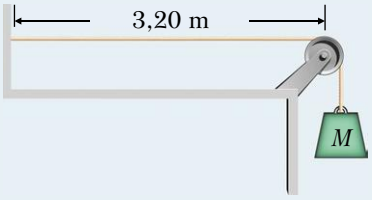
L'équation 2.5 permet de calculer le module de la vitesse d'une onde. Cette quantité est toujours positive, car il s'agit du module d'un vecteur.

REMARQUE

On utilise le symbole F pour représenter la tension dans la corde, plutôt que T qui a été utilisé dans le tome 1 pour représenter la tension dans une corde. On évite ainsi de mélanger le symbole avec le symbole de la période T d'un mouvement d'oscillation.

EXEMPLE 2.1 La mesure d'une masse avec un chronomètre

Une corde de 3,50 m est attachée à un mur à une extrémité. Elle passe par une poulie, et on attache un bloc de masse M à l'autre extrémité (*voir la figure suivante*). La corde a une masse volumique de 7 874 kg/m^3 et un diamètre de 0,811 mm. La poulie est placée à une distance de 3,20 m du mur. On mesure qu'une onde a besoin de 0,160 s pour parcourir la distance entre le mur et la poulie. Quelle est la masse du bloc ?



SOLUTION

Illustrer la situation

Pour calculer la tension dans la corde, nous avons besoin du diagramme des forces du bloc, présenté à la figure 2.8.

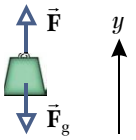


FIGURE 2.8
Le diagramme des forces du bloc de l'exemple 2.1

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\rho = 7874\ \text{kg/m}^3$	M
$d = 0{,}811\ \text{mm}$	
$\Delta x = 3{,}20\ \text{m}$	
$\Delta t = 0{,}160\ \text{s}$	

La masse linéique représente la masse par unité de longueur. On peut exprimer la masse en fonction de la masse volumique et du volume par $m = \rho V$. Une corde a une force cylindrique, de telle sorte que le volume est $V = \pi r^2 L = \pi(d/2)^2 L$. La masse linéique de la corde est

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{\rho\pi\dfrac{d^2}{4}L}{L} = \frac{\rho\pi d^2}{4}$$
$$= \frac{7874\ \text{kg/m}^3\,\pi\,(0{,}811\times10^{-3}\ \text{m})^2}{4}$$
$$\mu = 4{,}067\times10^{-3}\ \text{kg/m}\,. \qquad \text{(i)}$$

Le module de la vitesse de l'onde est

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3{,}20\ \text{m}}{0{,}160\ \text{s}} = 20{,}0\ \text{m/s}\,. \qquad \text{(ii)}$$

Identifier les clés

La première clé est l'équation 2.5, qui permet de calculer le module de la vitesse de l'onde sur une corde :

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\,. \qquad \text{(iii)}$$

La tension dans la corde est produite par la masse suspendue. Selon le diagramme des forces illustré à la figure 2.8,

$$\sum F_y = F - Mg = 0 \Rightarrow F = Mg\,. \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons l'équation (iv) dans l'équation (iii) et isolons M :

$$v = \sqrt{\frac{Mg}{\mu}} \Rightarrow M = \frac{v^2\mu}{g}$$
$$M = \frac{(20{,}0\ \text{m/s})^2\ 4{,}067\times10^{-3}\ \text{kg/m}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}$$
$$M = 0{,}166\ \text{kg}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous avons négligé la masse de la partie de la corde qui est verticale :

$$m_{\text{vert}} = 4{,}067\ \text{g/m}\times0{,}30\ \text{m} = 1{,}2\ \text{g}\,.$$

Pour être plus précis, nous devrions soustraire cette masse à la masse M pour obtenir la masse du bloc. Ceci ne change que le dernier chiffre significatif.

La preuve de l'équation du module de la vitesse

On ne peut pas appliquer la deuxième loi de Newton à une onde sur une corde, car ce n'est pas une particule. Par contre, on peut l'appliquer aux éléments formant la corde. Pour démontrer l'équation 2.5, on va appliquer la deuxième loi de Newton à un élément de la corde, pour obtenir l'équation d'onde (*l'équation 2.3*), dans laquelle apparaît le module de la vitesse.

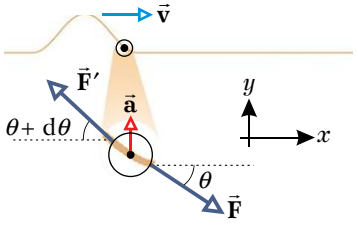


FIGURE 2.9
Le diagramme des forces d'un élément de la corde

La figure 2.9 montre une impulsion qui se déplace le long d'une corde. La corde a une masse linéique μ et une tension F. On suppose que l'amplitude de l'onde (la hauteur de l'impulsion) est faible, de telle sorte que l'étirement de la corde est très faible et que le changement de tension dans la corde est négligeable. Ceci implique aussi que l'angle entre un élément de la corde et l'horizontale est toujours très faible.

On analyse un élément de la corde qui a une longueur $d\ell \approx dx$ et une masse $dm = \mu\, dx$. Cet élément est soumis à deux forces de tension $\vec{\mathbf{F}}$ et $\vec{\mathbf{F}}'$ (la force gravitationnelle est négligée). Ces forces ne sont pas tout à fait opposées, car l'orientation de la corde change de θ à $\theta + d\theta$. L'élément de la corde subit alors une accélération verticale $a_y = \partial^2 y/\partial t^2$. Selon la deuxième loi de Newton,

$$\sum F_y = F\sin(\theta + d\theta) - F\sin(\theta) = ma_y = (\mu\, dx)\,\frac{d^2y}{dt^2}. \tag{2.6}$$

Comme l'amplitude est faible, l'angle de la corde par rapport à l'horizontale est très faible. On peut utiliser l'approximation des petits angles pour la fonction sinus ($\sin[\theta + d\theta] \approx \theta + d\theta$ et $\sin[\theta] \approx \theta$). On obtient alors

$$\begin{aligned} F(\theta + d\theta) - F\theta &= \mu\, dx\,\frac{d^2y}{dt^2} \\ F\, d\theta &= \mu\, dx\,\frac{d^2y}{dt^2}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

La figure 2.10 montre la corde inclinée à un angle θ, de telle sorte que

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx}. \tag{2.8}$$

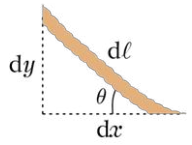


FIGURE 2.10
L'élément de la corde $d\ell$ est incliné à un angle θ.

Cette équation relie l'angle θ à la position x. On peut calculer la différentielle de chaque côté de cette équation :

$$d(\tan\theta) = \frac{d}{d\theta}(\tan\theta)\, d\theta = \sec^2\theta\, d\theta$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) dx.$$

De nouveau, on peut utiliser l'approximation des petits angles, de telle sorte que $\sec^2\theta \approx 1$. En insérant ces équations dans l'équation 2.8, on obtient

$$d\theta = \frac{d^2y}{dx^2}\, dx. \tag{2.9}$$

On insère l'équation 2.9 dans l'équation 2.7, en remplaçant les dérivées ordinaires par des dérivées partielles, car la fonction y est une fonction des variables x et t :

$$F\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, dx = \mu\, dx\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{2.10}$$

La longueur de l'élément de la corde dx est arbitraire. Ceci permet d'écrire l'équation 2.10 sous la forme de l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{2.11}$$

En comparant l'équation précédente à l'équation d'onde (*voir l'équation 2.3*), on obtient le module de la vitesse de l'onde :

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

2.4 Les ondes progressives sinusoïdales

Une onde progressive sinusoïdale est produite lorsqu'une source déplace un milieu selon un mouvement harmonique simple. C'est le cas lorsque l'extrémité d'une très longue corde tendue est déplacée en effectuant un mouvement harmonique simple. On produit aussi des ondes sonores sinusoïdales lorsqu'un haut-parleur oscille selon un mouvement harmonique simple. De même, des ondes électromagnétiques sinusoïdales sont produites lorsque le courant électrique dans un émetteur varie de façon sinusoïdale. Dans la présente section, nous étudions la situation des ondes sur une corde tendue, mais des résultats semblables peuvent être obtenus avec les autres types d'ondes.

La description qualitative

Lorsqu'on déplace l'extrémité d'une corde tendue selon un mouvement harmonique simple, une onde progressive se forme et se déplace le long de la corde. Dans le régime permanent, la corde prend la forme d'un sinus, avec des *crêtes* et des creux, comme le montre la figure 2.11a. Le déplacement vertical maximal est l'*amplitude* y_m, et la distance entre deux crêtes (ou entre deux creux) est appelée la *longueur d'onde* λ (la lettre grecque «lambda» minuscule). La longueur d'onde représente la distance pour que l'onde se répète, et elle est mesurée en mètres dans le système international.

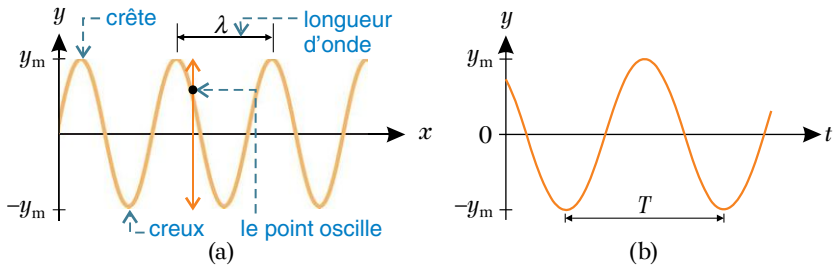


FIGURE 2.11
(a) La forme de l'onde à un temps fixe. (b) Le déplacement d'un élément de la corde en fonction du temps.

Si on se concentre sur un point particulier de la corde, celui-ci effectue un mouvement harmonique simple, comme le montre la figure 2.11b. Le mouvement se répète après une période T. Le déplacement vertical maximal est l'amplitude y_m.

MISE EN GARDE

Il est important de faire la différence entre les graphiques des figures 2.11a et 2.11b. Le premier graphique est équivalent à une photographie de la corde, prise à un temps t fixe. Il présente la position de tous les points de la corde à un temps fixe. Le deuxième graphique représente le déplacement d'un point sur la corde en fonction du temps, c'est-à-dire la position d'un point fixe à tous les instants.

La figure 2.12 montre la corde à des temps successifs, ainsi que la position d'un point $\mathcal{P}$ sur la corde, ayant une coordonnée x fixe. Si on suit le mouvement d'une crête dans cet intervalle de temps, on remarque que la crête se déplace d'une distance égale à la longueur d'onde ($\Delta x = \lambda$) dans un cycle

d'oscillation du point $\mathcal{P}$, ce qui correspond à un temps égal à la période ($\Delta t = T$). Le module de la vitesse de l'onde est donc

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T}\,. \tag{2.12}$$

Habituellement, on décrit l'onde par la fréquence $f = 1/T$ plutôt que la période. On obtient alors la relation :

$$v = \lambda f\,. \tag{2.13}$$

Cette relation est très importante, car elle permet d'obtenir le module de la vitesse d'une onde en reliant la fréquence et la longueur d'onde. Cette équation est valide pour toutes les ondes sinusoïdales, que ce soit une onde sur une corde, une onde sonore ou une onde électromagnétique.

REMARQUE

La longueur d'onde et la fréquence sont des paramètres qui décrivent des ondes périodiques comme l'onde sinusoïdale. La longueur d'onde et la fréquence n'existent pas dans le cas des impulsions, comme l'impulsion illustrée à la figure 2.5.

La fonction d'onde

Pour représenter mathématiquement l'onde de la figure 2.12, on donne la position y des éléments de la corde, situés aux coordonnées x, en fonction du temps. Selon l'équation 2.1, une onde qui se déplace dans le sens de l'axe des x à une vitesse de module v est donnée par une fonction $y(x\,;\,t) = y(x - vt)$. On commence alors par trouver une fonction qui décrit l'onde à $t = 0$, illustrée à la figure 2.13. Ce graphique correspond à une fonction sinusoïdale :

$$y(x\,;\,0) = y_\text{m} \sin(kx + \phi)\,. \tag{2.14}$$

Dans cette équation, y_m est l'*amplitude* de l'onde progressive. Par rapport à la position d'équilibre ($y = 0$), un élément de la corde peut se trouver entre la position maximale y_m et la position minimale $-y_\text{m}$. Le paramètre ϕ est la constante de phase, qui dépend des conditions initiales. La constante k est appelée le *nombre d'onde*, et elle est mesurée dans le SI en rad/m. Ce paramètre est relié à la longueur d'onde. En effet, si on prend deux points séparés par une distance égale à la longueur d'onde, ils ont le même déplacement y :

$$y_\text{m} \sin(kx + \phi) = y_\text{m} \sin\left(k\,[x + \lambda] + \phi\right)\,.$$

Étant donné que la fonction sinus se répète lorsque son argument augmente de 2π, on a

$$k\lambda = 2\pi$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}\,. \tag{2.15}$$

Le nombre d'onde est l'équivalent spatial de la fréquence angulaire, car la relation entre k et λ est la même que la relation entre ω et T.

MISE EN GARDE

Vous devez faire attention à ne pas confondre le nombre d'onde k et la constante de rappel k d'un ressort.

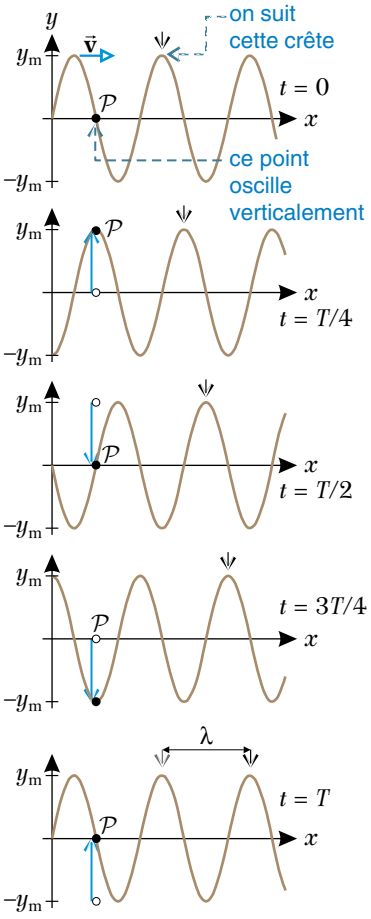


FIGURE 2.12
Le mouvement de l'onde dans un intervalle de temps d'une période

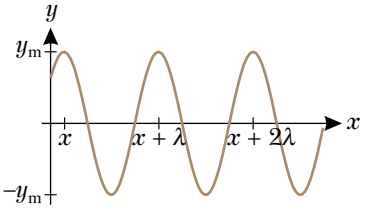


FIGURE 2.13
La corde à $t = 0$ est représentée par une fonction sinusoïdale.

Pour obtenir la fonction d'onde $y(x\,;t)$, on remplace x par $x - vt$ lorsqu'une onde se déplace dans le sens de l'axe des x :

$$y(x\,;t) = y_{\mathrm{m}} \sin\left[k(x - vt) + \phi\right] = y_{\mathrm{m}} \sin(kx - kvt + \phi)\,.$$

Dans la dernière équation, on peut remplacer kv par la fréquence angulaire ω de la source, reliée à la fréquence f de la source par l'équation 1.4 :

$$\omega = 2\pi f\,. \tag{2.16}$$

En effet,

$$kv = \frac{2\pi v}{\lambda} = 2\pi f = \omega\,.$$

La fonction d'onde de l'onde sur la corde se déplaçant vers la droite est

Onde se déplaçant vers la droite

$$y(x\,;t) = y_{\mathrm{m}} \sin(kx - \omega t + \phi)\,. \tag{2.17}$$

Une onde qui se déplace en sens opposé à l'axe des x est décrite par la fonction $y(x\,;t) = y_{\mathrm{m}} \sin(kx + \omega t + \phi)$.

La *phase* de l'onde correspond à l'argument de la fonction sinusoïdale :

$$\Phi = kx \mp \omega t + \phi\,, \tag{2.18}$$

où le signe est négatif pour une onde se déplaçant dans le même sens que l'axe des x, et le signe est positif dans l'autre cas. Lorsque deux ondes n'ont pas la même phase, on dit qu'elles sont déphasées. Le *déphasage* entre deux ondes est

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1\,. \tag{2.19}$$

Le module de la vitesse de l'onde peut être calculé en fonction du nombre d'onde et de la fréquence angulaire :

$$v = \lambda f = \left(\frac{2\pi}{k}\right)\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{\omega}{k}\,.$$

Donc, de façon équivalente, le module de la vitesse de l'onde s'exprime par :

Module de la vitesse de l'onde

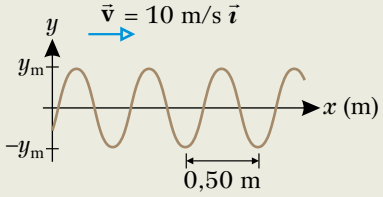
$$v = \lambda f = \frac{\omega}{k}\,. \tag{2.20}$$

Selon la section 2.3, le module de la vitesse d'une onde dépend uniquement des propriétés du milieu de propagation, comme la masse linéique et la tension dans la corde. Si la fréquence de la source augmente, cela ne change pas le module de la vitesse. En effet, la longueur d'onde de l'onde diminue de telle sorte que l'équation 2.20 donne le module de la vitesse de l'onde. On peut donc dire que

- Le module de la vitesse de l'onde dépend des propriétés du milieu.
- La fréquence de l'onde dépend de la fréquence de la source.
- La longueur d'onde s'ajuste pour que l'équation 2.20 soit respectée.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 2.2

Quelle est la fréquence de l'onde illustrée ci-dessous ?



EXEMPLE 2.2 Les paramètres d'une onde

Une onde se déplace dans une corde tendue, parallèlement à l'axe des x. Elle est décrite par la fonction d'onde :

$$y = 0{,}030\,0 \sin\left[\frac{20}{3}\pi x - 50\pi\, t + \frac{\pi}{4}\right],$$

où tous les paramètres sont exprimés dans le SI. La corde a une masse linéique de 0,080 0 kg/m.

a. Quelles sont l'amplitude, la longueur d'onde et la fréquence de l'onde ?

b. Quelle est la vitesse de l'onde ?

c. Quelle est la tension dans la corde ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

La fonction d'onde a la forme de l'équation 2.17 :

$$y = y_m \sin(kx - \omega t + \phi). \qquad \text{(i)}$$

Ceci permet d'obtenir les paramètres de l'onde.

Connues		Inconnues		
$y_m = 0{,}030\,0$ m	$k = \frac{20}{3}\pi$	y_m	λ	f
$\omega = 50\pi$	$\phi = \pi/4$		$\vec{v}$	
$\mu = 0{,}080\,0$ kg/m			F	

SOLUTION a.

Identifier les clés

L'amplitude est directement donnée par la fonction d'onde :

$$y_m = 0{,}030\,0 \text{ m} = 3{,}00 \text{ cm}. \qquad \text{(réponse)}$$

Le nombre d'onde permet de calculer la longueur d'onde, selon l'équation 2.15 :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}. \qquad \text{(ii)}$$

De plus, la fréquence est obtenue à l'aide de la fréquence angulaire, selon l'équation 2.16 :

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\lambda = \frac{2\pi}{20\pi/3} = 0{,}300 \text{ m} \qquad \text{(réponse)}$$

$$f = \frac{50\pi}{2\pi} = 25{,}0 \text{ Hz}. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

L'onde se déplace vers la droite, car la phase a la forme $\Phi = kx - \omega t + \phi$.

Identifier la clé

Le module de la vitesse peut être calculé à partir des paramètres de l'onde :

$$v = \frac{\omega}{k}. \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème
Nous remplaçons les valeurs :

$$v = \frac{50\pi}{20\pi/3} = 7{,}50 \text{ m/s} .$$

La vitesse de l'onde est alors

$$\vec{\mathbf{v}} = 7{,}50 \text{ m/s}\vec{\boldsymbol{\imath}} . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.
Identifier la clé
Le module de la vitesse de l'onde dépend des caractéristiques de la corde :

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow F = v^2\mu . \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème
Nous obtenons

$$F = (7{,}50 \text{ m/s})^2 (0{,}0800 \text{ kg/m}) = 4{,}50 \text{ N} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse
L'ordre de grandeur des réponses semble correct. On donne la vitesse sous forme vectorielle, car la vitesse est un vecteur. La tension correspond au module d'une force et doit donc être positive.

Le mouvement harmonique d'un élément de la corde

Chaque élément de la corde, dont la coordonnée est x, oscille verticalement selon un mouvement harmonique simple. La position verticale est donnée par la fonction d'onde :

$$y = y_m \sin(kx - \omega t + \phi) .$$

La *vitesse transversale* correspond à la vitesse d'un point de la corde. On l'obtient en calculant la dérivée par rapport au temps de la position verticale :

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t + \phi) . \qquad (2.21)$$

Un point de la corde a aussi une accélération, car la vitesse transversale change en fonction du temps :

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 y_m \sin(kx - \omega t + \phi) = -\omega^2 y . \qquad (2.22)$$

L'équation précédente montre bien qu'un point de la corde effectue un mouvement harmonique simple, car l'accélération transversale est directement proportionnelle à la position verticale.

La constante de phase peut être calculée à partir des conditions initiales de la position verticale et de la vitesse transversale. Lorsque l'onde se déplace dans le même sens que l'axe des x, le point $x = 0$ à $t = 0$ a un déplacement et une vitesse transversale donnés par les équations :

$$y(0;0) = y_m \sin\phi \qquad (2.23)$$

$$v_y(0;0) = -\omega y_m \cos(\phi) . \qquad (2.24)$$

MISE EN GARDE

Vous devez bien faire la différence entre la vitesse de l'onde $\vec{\mathbf{v}}$, qui est constante, et la vitesse transversale v_y, qui représente la vitesse du mouvement d'oscillation d'un point de la corde.

EXEMPLE 2.3 La fonction d'onde

Une très longue corde a une masse linéique de 1,8 g/m et une tension de 50,0 N. Elle est attachée à un oscillateur harmonique simple, dont la fréquence est de 75,0 Hz, et qui fait osciller la corde perpendiculairement à sa longueur avec une amplitude de 8,00 mm. Une onde sinusoïdale se déplace vers la droite. À $t = 0$, le point $x = 0{,}00$ m a un déplacement vertical de –3,0 mm par rapport à la position d'équilibre et il se déplace vers le haut.

a. Écrivez la fonction d'onde.

b. Quel est le déphasage entre le point $x_1 = 0{,}100$ m et le point $x_2 = 0{,}250$ m ?

SOLUTION a.

Décortiquer le problème

Connues

$\mu = 0{,}0018$ kg/m $\quad F = 50{,}0$ N

$f = 75{,}0$ Hz $\quad y_m = 0{,}008\,00$ m

$y(0\,;0) = -0{,}003\,0$ m $\quad v_y(0\,;0) > 0$

Inconnue

$y(x\,;t)$

Identifier les clés

Pour une onde se déplaçant vers la droite, la fonction d'onde est donnée par l'équation 2.17 :

$$y = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)\,. \tag{i}$$

La constante de phase se calcule à l'aide des conditions initiales. La fréquence angulaire est calculée à partir de la fréquence :

$$\omega = 2\pi f\,. \tag{ii}$$

Le nombre d'onde est obtenu en se basant sur la fréquence angulaire et le module de la vitesse de l'onde :

$$v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v}\,, \tag{iii}$$

où le module de la vitesse est calculé à partir des caractéristiques de la corde :

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\,. \tag{iv}$$

Résoudre le problème

Nous calculons la fréquence angulaire à partir de la fréquence :

$$\omega = 2\pi \times 75{,}0 \text{ Hz} = 150\pi \text{ rad/s}\,. \tag{v}$$

Le nombre d'onde est obtenu en remplaçant l'équation (iii) dans l'équation (ii) :

$$k = \omega\sqrt{\frac{\mu}{F}} = 150\pi\sqrt{\frac{0{,}0018 \text{ kg/m}}{50{,}0 \text{ N}}} = 0{,}900\pi \text{ rad/m}\,. \tag{vi}$$

Pour obtenir la constante de phase, nous utilisons la condition initiale :

$$y(0\,;0) = 0{,}008 \sin\phi = -0{,}003$$
$$\Rightarrow \sin\phi = -0{,}375\,.$$

Comme nous l'avons vu à la section 1.1, la fonction arcsin a deux solutions. Selon le cercle trigonométrique de la figure 2.14, les deux solutions mathématiques sont ϕ et $-\pi + |\phi| = -\pi - \phi$, où ϕ est un angle négatif. Nous obtenons

$$\phi = \begin{cases} -0{,}384\,4 \text{ rad} \\ -2{,}757 \text{ rad}\,. \end{cases}$$

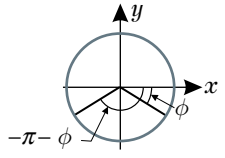


FIGURE 2.14
Le cercle trigonométrique pour trouver les deux valeurs de la constante de phase

Pour choisir la valeur qui correspond à l'onde présente, nous vérifions la vitesse transversale du point $x = 0$ à $t = 0$. En effet, selon l'énoncé, ce point se déplace vers le haut. D'après l'équation 2.21,

$$v_y(x\,;t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t + \phi)\,.$$

Ceci implique que $v_y(0\,;\,0) = -\omega y_m \cos(\phi)$. Pour que cette vitesse soit positive, il faut que $\cos(\phi) < 0$, c'est-à-dire que la bonne constante de phase soit celle pour laquelle le cosinus est négatif. Nous calculons le cosinus des deux constantes de phase précédentes :

$$\cos(-0{,}384) = 0{,}927$$
$$\cos(-2{,}757) = -0{,}927\,.$$

C'est la deuxième valeur qui est la bonne constante de phase.

Nous obtenons la fonction d'onde en insérant tous les résultats dans l'équation (i) :

$$y = 0{,}008\,00 \sin(0{,}900\pi x - 150\pi t - 2{,}757)\,, \qquad \text{(réponse)}$$

où les distances sont exprimées en mètres, et le temps est exprimé en secondes.

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$x_1 = 0{,}100$ m	$\Delta\Phi$
$x_2 = 0{,}250$ m	

Identifier la clé

Le déphasage représente la différence de phase entre deux situations :

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = (kx_2 - \omega t + \phi) - (kx_1 - \omega t + \phi)\,. \qquad \text{(vii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= k(x_2 - x_1)\\ &= 0{,}900\pi \text{ rad/m } (0{,}250 \text{ m} - 0{,}100 \text{ m})\\ &= 0{,}424 \text{ rad}\,. \qquad \text{(réponse)}\end{aligned}$$

Valider la réponse

La fonction d'onde calculée en a. représente bien une onde qui se déplace vers la droite. Le déphasage sera une quantité importante lorsque nous étudierons les interférences des ondes.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 2.3

Une onde se propage vers la droite sur une corde tendue avec une tension F. On double la fréquence de l'oscillateur harmonique qui produit l'onde.

a. Comment le module de la vitesse de l'onde change-t-il ?
b. Comment la longueur d'onde de l'onde change-t-elle ?

2.5 La puissance transportée par une onde

Une onde progressive transporte de l'énergie, de la source vers des points éloignés. C'est la source de l'onde qui fournit l'énergie à l'onde. Dans le cas des ondes sismiques, une grande quantité d'énergie est libérée à l'emplacement de l'épicentre, et les ondes sismiques transportent cette énergie sur de très grandes distances. Dans cette section, nous allons déterminer la puissance transportée par une onde sur une corde en exprimant le résultat de façon générale ; ainsi, nous pourrons utiliser ce résultat quand il sera question des autres ondes mécaniques.

Lorsqu'une onde se déplace le long de la corde, elle transporte aussi de l'énergie. Cette énergie est fournie par l'oscillateur (la source) qui effectue un travail sur la corde. L'énergie est transmise d'un élément de la corde à l'autre, car chaque

élément de la corde tire sur les éléments voisins, en effectuant un travail. L'énergie d'un élément de la corde varie en fonction du temps, selon que le travail effectué par les éléments voisins est positif ou négatif.

On va calculer l'énergie présente dans une corde tendue lorsqu'une onde sinusoïdale se déplace vers la droite. La figure 2.15 montre la corde à un temps t. Les éléments de la corde ont une vitesse transversale qui dépend de la position et du temps. Les éléments formant une crête ou un creux ont une vitesse transversale nulle, donc une énergie cinétique nulle. La vitesse transversale a un module maximal pour les éléments de la corde pour lesquels $y = 0$. L'énergie cinétique est maximale pour ces éléments.

Lorsque l'onde se déplace, les éléments de la corde s'étirent légèrement. La corde se comporte comme un ressort étiré : il y a une énergie potentielle associée à l'étirement de la corde. Comme le montre la figure 2.15, les éléments de la corde formant les crêtes et les creux ne sont pas étirés, alors que les éléments de la corde qui passent par $y = 0$ sont étirés au maximum. Ceci implique que l'énergie potentielle est maximale pour les éléments de la corde qui passent par $y = 0$. L'énergie potentielle et l'énergie cinétique sont maximales en même temps lorsqu'un élément passe par $y = 0$, alors que l'énergie des éléments vis-à-vis des crêtes ou vis-à-vis des creux est nulle.

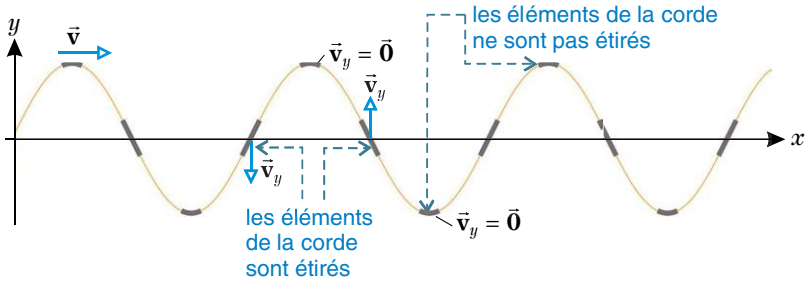


FIGURE 2.15
Une onde se déplace vers la droite, en transportant de l'énergie.

La puissance moyenne P transportée, qui représente le taux moyen de transfert d'énergie par l'onde, dépend à la fois des propriétés du milieu (la corde) et des caractéristiques de la source. Pour une onde sinusoïdale, on trouve

$$P = \frac{1}{2} Z\omega^2 y_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_{\mathrm{m}}^2 \,. \tag{2.25}$$

Puissance moyenne (onde sinusoïdale)

Le paramètre Z est une propriété de la corde qu'on appelle l'*impédance caractéristique* de la corde :

$$Z = \sqrt{\mu F} = \mu v = \frac{F}{v} \,. \tag{2.26}$$

Dans le SI, l'impédance de la corde se mesure en kg/s.

Le facteur 1/2 est caractéristique d'une onde sinusoïdale. Pour une onde quelconque, la puissance moyenne est donnée par l'équation 2.25, avec un facteur numérique différent de 1/2.

On obtient aussi le résultat général pour les ondes :

> La puissance transportée par une onde dépend du carré de l'amplitude de l'onde.

Ce résultat sera important lorsque nous étudierons la superposition des ondes.

EXEMPLE 2.4 La puissance d'un oscillateur

Un oscillateur produit à une fréquence de 60,0 Hz une onde sinusoïdale sur une corde ayant une amplitude de 4,50 mm. La corde a une masse linéique de 7,40 g/m et une tension de 300 N. Quelle est la puissance moyenne fournie par l'oscillateur ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$f = 60{,}0$ Hz	P
$y_m = 4{,}50 \times 10^{-3}$ m	
$\mu = 7{,}40 \times 10^{-3}$ kg/m	
$F = 300$ N	

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 2.25 :

$$P = \frac{1}{2} Z\omega^2 y_m^2 = \frac{1}{2} Z(4\pi^2 f^2) y_m^2 , \qquad \text{(i)}$$

où $\omega = 2\pi f$, et Z est l'impédance de la corde :

$$Z = \sqrt{\mu F} . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'impédance de la corde :

$$Z = \sqrt{7{,}40 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \times 300 \text{ N}} = 1{,}49 \text{ kg/s} . \qquad \text{(iii)}$$

La puissance moyenne est donc

$$P = \frac{1}{2}(1{,}49 \text{ kg/s}) 4\pi^2 (60{,}0 \text{ Hz})^2 \ (4{,}50 \times 10^{-3} \text{ m})^2$$
$$= 2{,}14 \text{ W} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'ordre de grandeur semble correct.

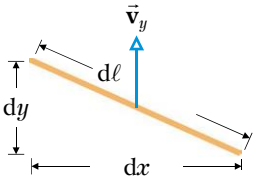


FIGURE 2.16
Un élément de la corde a une vitesse transversale $\vec{v}_y$ et une longueur $d\ell$.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 2.4

Un oscillateur harmonique est relié à une très longue corde, ayant une masse linéique μ et une tension F. La fréquence de l'oscillateur est f, et son amplitude est y_m. Indiquez de quelle façon la puissance moyenne transportée par l'onde change si :

a. on double la fréquence sans changer les autres paramètres ;
b. on double plutôt la tension sans changer les autres paramètres ;
c. on double l'amplitude plutôt que les autres paramètres.

La preuve de l'équation de la puissance moyenne

Pour obtenir la puissance moyenne transportée par une onde sinusoïdale sur une corde, on calcule l'énergie cinétique et l'énergie potentielle d'un élément quelconque de la corde, situé à une position x (*voir la figure 2.16*). Au temps t, son déplacement vertical est donné par la fonction d'onde :

$$y = y_m \sin(kx - \omega t + \phi) . \qquad (2.27)$$

Cet élément a une longueur $\mathrm{d}\ell \approx \mathrm{d}x$ et une masse $\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}x$. Il oscille à une vitesse transversale :

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_\mathrm{m} \cos(kx - \omega t + \phi)\,.$$

L'énergie cinétique de l'élément est donc

$$\mathrm{d}K = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\, v_y^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_\mathrm{m}^2 \cos^2\,(kx - \omega t + \phi)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.28}$$

L'énergie potentielle est associée à l'étirement de la corde. Afin de la déterminer, on calcule le travail effectué par la force de tension pour étirer la corde, d'une longueur initiale $\mathrm{d}x$ à une longueur $\mathrm{d}\ell$:

$$\mathrm{d}U = F(\mathrm{d}\ell - \mathrm{d}x)\,. \tag{2.29}$$

Selon la figure 2.16, la longueur de l'élément de la corde est

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,.$$

Étant donné que l'amplitude est faible, la corde demeure peu inclinée, et la longueur $\mathrm{d}\ell$ est très près de $\mathrm{d}x$. On peut alors utiliser l'approximation du binôme ($[1 + x]^n \approx 1 + nx$, *voir l'annexe E*) :

$$\mathrm{d}\ell \approx \mathrm{d}x\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right].$$

En remplaçant ce résultat dans l'équation 2.29, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{d}U &= F\left\{\mathrm{d}x\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right] - \mathrm{d}x\right\} \\ &= \frac{1}{2}F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

où on a remplacé la dérivée ordinaire par une dérivée partielle, car le déplacement y est une fonction de deux variables. Dans le cas de l'onde sinusoïdale de l'équation 2.27, $\partial y/\partial x = k y_\mathrm{m} \cos(kx - \omega t + \phi)$, et l'énergie potentielle est

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{2}Fk^2 y_\mathrm{m}^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi)\,.$$

L'énergie potentielle est égale à l'énergie cinétique, donnée à l'équation 2.28. En effet,

$$v^2 = \frac{F}{\mu} = \frac{\omega^2}{k^2} \Rightarrow Fk^2 = \mu\omega^2\,.$$

On obtient donc

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_\mathrm{m}^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi)\,\mathrm{d}x \tag{2.30}$$

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}K + \mathrm{d}U = \mu\omega^2 y_\mathrm{m}^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.31}$$

La puissance instantanée est le taux de variation de l'énergie :

$$P_{\text{inst}} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \mu\omega^2 y_{\text{m}}^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,.$$

Or, dx/dt représente le module de la vitesse de l'onde. La puissance instantanée est donc

$$P_{\text{inst}} = \mu v\omega^2 y_{\text{m}}^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi)\,. \tag{2.32}$$

La puissance instantanée varie en fonction de la position et du temps. La figure 2.17 montre le graphique de la fonction $\cos^2(\Phi)$ (où $\Phi = kx - \omega t + \phi$) en fonction du temps pour un point x sur la corde. La fonction $\cos^2(\Phi)$ varie rapidement, entre 0 et 1. La valeur moyenne de cette fonction sur une période est simplement égale à 1/2*. La puissance moyenne transportée par une onde sur une corde est donc

$$P = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_{\text{m}}^2\,.$$

C'est bien l'équation 2.25.

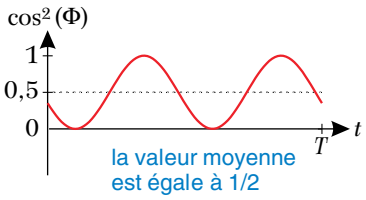


FIGURE 2.17
Le graphique de $\cos^2(\Phi)$ varie entre 0 et 1.

2.6 La réflexion et la transmission des ondes

Jusqu'à présent, nous avons étudié des ondes qui se déplacent le long d'une très longue corde. Le module de la vitesse de l'onde est constant. Qu'arrive-t-il lorsque l'onde arrive à l'extrémité de la corde ? La figure 2.18 montre deux situations où une impulsion se déplace vers l'extrémité d'une corde. Dans les deux situations, l'onde est réfléchie par l'extrémité de la corde.

Dans la situation de la figure 2.18a, l'extrémité de la corde est fixée, de telle sorte que ce point de la corde ne peut pas bouger. Lorsque l'onde arrive à cet endroit, le point d'attache exerce une force vers le bas, car la corde exerce une force vers le haut sur le point d'attache. La force exercée sur la corde produit une onde réfléchie inversée par rapport à l'onde incidente. On dit que la réflexion est une *réflexion dure*.

À la figure 2.18b, la corde est attachée à un poteau au moyen d'un anneau. De cette façon, lorsque l'onde arrive à l'extrémité de la corde, celle-ci peut se déplacer librement vers le haut, tout en ayant une certaine tension. Il n'y a pas de force verticale exercée sur la corde, et l'onde réfléchie n'est pas inversée par rapport à l'onde incidente. On dit que la réflexion est une *réflexion molle*.

Il est aussi possible d'attacher ensemble deux cordes différentes. Le point de jonction entre les deux cordes est une discontinuité. La figure 2.19a montre deux cordes reliées ensemble. La tension est la même dans les deux cordes, mais la corde de gauche a une masse linéique plus grande. Comme $Z = \sqrt{\mu F}$, l'impédance de la corde de gauche est plus grande.

---

* Pour une fonction périodique ayant une période T, la valeur moyenne est donnée par l'intégrale

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

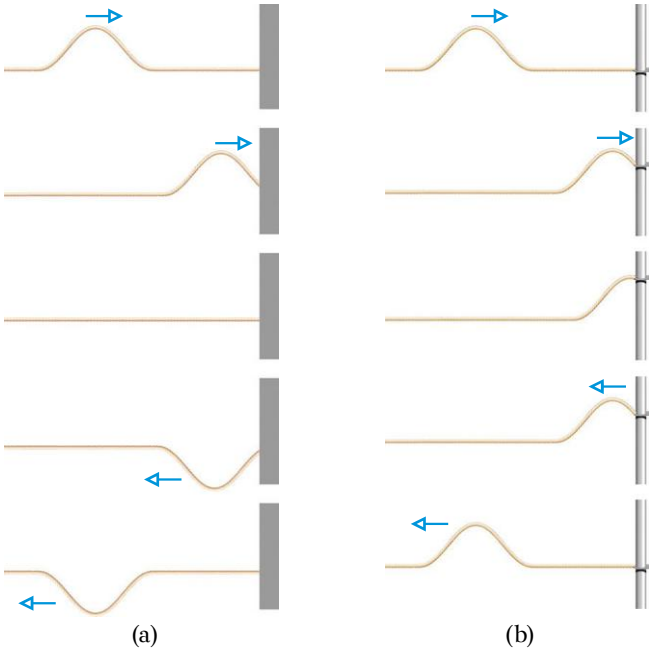


FIGURE 2.18
Une onde est réfléchie lorsqu'elle arrive au bout d'une corde. (a) La corde est fixée à un mur, et l'onde réfléchie est inversée. (b) La corde est reliée à un anneau libre de se déplacer verticalement ; l'onde réfléchie n'est pas inversée.

Il y a une discontinuité dans la vitesse lorsque l'onde arrive à la jonction entre les deux cordes. Une partie de l'onde est transmise dans la deuxième corde, et une partie de l'onde est réfléchie. L'onde réfléchie se déplace alors vers la gauche.

i+ **Défi animé 2.1**
Lorsqu'une impulsion triangulaire se produit, êtes-vous en mesure de tracer la forme de l'onde pendant sa réflexion ?

À la figure 2.19a, l'onde réfléchie n'est pas inversée par rapport à l'onde incidente lorsque l'impédance de la première corde est plus grande que l'impédance de la deuxième corde. La réflexion est une réflexion molle. Dans la situation de la figure 2.19b, la première corde a une impédance plus faible, car sa masse linéique est plus faible que la deuxième corde. Il y a de nouveau une onde réfléchie et une onde transmise. Cette fois, l'onde réfléchie est inversée.

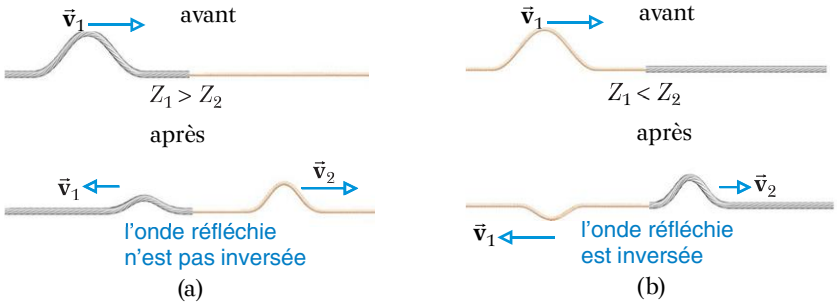


FIGURE 2.19
(a) La corde de gauche a une masse linéique et une impédance plus élevée. L'onde réfléchie n'est pas inversée. C'est une réflexion molle. (b) La corde de gauche a une masse linéique et une impédance plus élevées. L'onde réfléchie est inversée. C'est une réflexion dure.

La réflexion est une réflexion dure. Remarquez que l'onde transmise n'est pas inversée, que la réflexion soit dure ou molle.

La réflexion et la transmission des ondes, lorsqu'il y a une discontinuité du milieu de propagation, est un comportement général des ondes. Quand une onde arrive à un endroit où l'impédance du milieu change brusquement, une partie de l'onde est réfléchie, et une partie est transmise dans le deuxième milieu. Par exemple, lorsque la lumière frappe une surface de verre, une partie de la lumière est transmise dans le verre (on peut voir la lumière à travers une fenêtre), et une partie de la lumière est réfléchie (on peut voir la lumière réfléchie par une fenêtre lorsqu'on est dans une pièce plus éclairée que l'extérieur).

2.7 La superposition des ondes

Il arrive que dans un même milieu, deux ondes se rencontrent. Par exemple, lorsque vous êtes devant un système de son muni de deux haut-parleurs, les deux ondes sonores se rencontrent. Que se passe-t-il alors ? Vous entendez une onde sonore qui est la superposition des deux ondes. Contrairement aux particules comme les balles, les ondes peuvent occuper le même espace. Elles peuvent se superposer. De même, sur l'eau, des ondes issues de deux sources différentes peuvent se superposer et produire un déplacement plus grand. La lumière peut aussi se superposer lorsqu'il y a plusieurs sources. La superposition est une caractéristique importante des ondes, qui ne s'applique pas aux particules comme les balles.

FIGURE 2.20
Deux ondes se déplacent l'une vers l'autre.

Pour comprendre ce phénomène, supposons que deux ondes se dirigent l'une vers l'autre sur une corde tendue, comme à la figure 2.20. L'onde de gauche est décrite par la fonction $y_1(x\,;\,t)$ et l'onde de droite par $y_2(x\,;\,t)$. Les ondes se superposent, et le déplacement résultant de la corde est

Principe de superposition

$$y'(x\,;\,t) = y_1(x\,;\,t) + y_2(x\,;\,t)\,. \tag{2.33}$$

C'est le principe de superposition. Ce principe s'applique à toutes les ondes étudiées dans ce tome, tant que l'amplitude des ondes est faible. On a alors des *ondes linéaires*, car ces dernières se superposent de façon linéaire lorsqu'elles se rencontrent.

La figure 2.21 montre la forme de la corde à des instants successifs. On remarque que la forme de chaque onde n'est pas transformée par la superposition.

Les ondes linéaires qui se superposent conservent leur forme respective et leur sens de propagation.

FIGURE 2.21
(a) Les ondes se superposent. (b) Après la superposition, les ondes ne sont pas déformées.

2.8 L'interférence des ondes

La capacité des ondes à se superposer est un phénomène déterminant. Lorsque les ondes ont la même fréquence, on obtient une superposition très importante, appelée l'*interférence*. Dans les prochains chapitres, l'étude des interférences des ondes sonores et de la lumière, en deux dimensions et en trois dimensions, amènera des résultats significatifs et très intéressants. Pour se familiariser mathématiquement avec ce phénomène, on s'intéresse à la superposition d'ondes se déplaçant dans le même sens dans une corde.

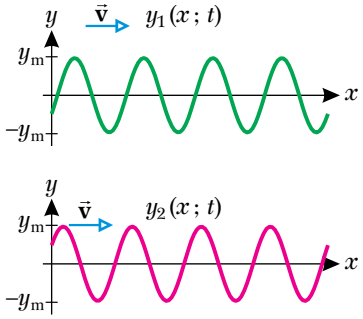


FIGURE 2.22
La représentation de deux ondes sinusoïdales, qui se superposent sur une corde pour produire une interférence.

Soit deux ondes sinusoïdales qui se déplacent dans le même sens. Les deux ondes ont la même amplitude y_m, la même fréquence f et la même longueur d'onde λ. Les ondes sont illustrées séparément à la figure 2.22 et elles sont décrites par :

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t + \phi_1) = y_m \sin(\Phi_1) \tag{2.34}$$

$$y_2 = y_m \sin(kx - \omega t + \phi_2) = y_m \sin(\Phi_2)\,, \tag{2.35}$$

où $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde, $\omega = 2\pi f$, la fréquence angulaire et $\Phi = kx - \omega t + \phi$, la phase de chaque onde. L'onde résultante dépend du déphasage $\Delta\Phi$, entre les deux ondes. Dans le présent cas, les ondes se distinguent uniquement par leur constante de phase différente. Le déphasage entre les deux ondes est

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \phi_2 - \phi_1\,. \tag{2.36}$$

L'onde résultante est obtenue à l'aide du principe de superposition (*voir l'équation 2.33*) :

$$\begin{aligned} y'(x\,;t) &= y_1(x\,;t) + y_2(x\,;t) \\ &= y_m \sin(kx - \omega t + \phi_1) + y_m \sin(kx - \omega t + \phi_2) \\ &= y_m \left[\sin(kx - \omega t + \phi_2) + \sin(kx - \omega t + \phi_1)\right]. \end{aligned}$$

Cette équation peut être simplifiée à l'aide d'une identité trigonométrique (*voir l'annexe E*) :

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right), \tag{2.37}$$

où $\alpha = \Phi_2 = kx - \omega t + \phi_2$ et $\beta = \Phi_1 = kx - \omega t + \phi_1$. On obtient alors

$$y'(x\,;t) = \left[2y_m \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\right]\sin(kx - \omega t + \phi_{moy})\,, \tag{2.38}$$

où $\phi_{moy} = (\phi_1 + \phi_2)/2$ est la moyenne des constantes de phase.

L'onde résultante, illustrée à la figure 2.23, est une onde progressive sinusoïdale, ayant la même fréquence, la même longueur d'onde et le même sens de propagation que les deux ondes qui se superposent. Il y a deux différences entre les ondes initiales et l'onde résultante :

- La constante de phase $\phi_{moy} = (\phi_1 + \phi_2)/2$, ce qui implique que l'onde résultante est déplacée le long de l'axe des x par rapport aux ondes initiales.
- L'amplitude de l'onde résultante est différente.

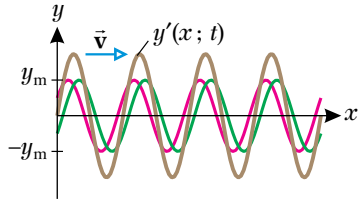


FIGURE 2.23
Les deux ondes (en vert et en magenta) se superposent pour donner l'onde résultante $y'(x\,;t)$.

L'amplitude de l'onde résultante correspond à la valeur absolue du terme constant placé entre crochets dans l'équation 2.38 :

$$\text{amplitude} = \left| 2y_m \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \right| = \left| 2y_m \cos\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right) \right| . \qquad (2.39)$$

Le résultat important est que

> L'amplitude de l'onde résultante dépend du déphasage entre les deux ondes qui se superposent.

Ceci est un résultat général que nous allons revoir au chapitre 3 lorsqu'il sera question des interférences des ondes sonores et au chapitre 7 quand sera abordée l'interférence de la lumière.

On peut diviser le résultat en trois cas importants :

- **L'interférence est constructive** lorsque les ondes sont en phase, comme le montre la figure 2.24a. Cela se produit lorsque le déphasage est égal à un multiple pair de π:

Condition d'interférence constructive

$$\Delta\Phi = 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) . \qquad (2.40)$$

  L'onde résultante est alors $y' = 2y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$, et l'amplitude de cette onde est le double des ondes qui se superposent.

- **L'interférence est destructive** lorsque les ondes sont en opposition de phase, comme le montre la figure 2.24b. Cela se produit lorsque le déphasage correspond à un multiple impair de π :

Condition d'interférence destructive

$$\Delta\Phi = (2m+1)\,\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) . \qquad (2.41)$$

  L'onde résultante est alors $y'(x;\, t) = 0$. Les deux ondes initiales s'annulent mutuellement, ce qui produit une onde résultante ayant une amplitude nulle.

- **L'interférence est intermédiaire** lorsque le déphasage n'est pas un multiple de π. L'amplitude de l'onde résultante est alors entre 0 et $2y_m$. La figure 2.23 montre une telle situation.

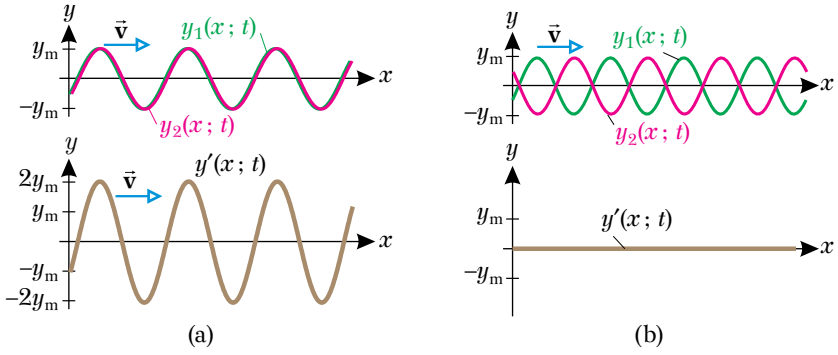


FIGURE 2.24

(a) Deux ondes en phase produisent une interférence constructive. (b) Deux ondes en opposition de phase produisent une interférence destructive.

EXEMPLE 2.5 L'interférence de deux ondes

Les ondes suivantes se superposent :

$$y_1 = 0{,}003\,4\sin(12x - 40t + \pi/4)$$
$$y_2 = 0{,}003\,4\cos(12x - 40t + 3\pi/4)\,.$$

a. Quel est le déphasage ? Indiquez le type d'interférence.

b. Quelle est l'amplitude de l'onde résultante ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Pour calculer le déphasage, nous devons exprimer les deux ondes sous la même forme $y = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$. La première onde se présente sous la bonne forme. Pour la deuxième onde, nous utilisons l'identité trigonométrique $\cos(\Phi) = \sin(\Phi + \pi/2)$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} y_2 &= 0{,}003\,4\sin(12x - 40t + 3\pi/4 + \pi/2) \\ &= 0{,}003\,4\sin(12x - 40t + 5\pi/4)\,. \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

Connues		Inconnues
$\phi_1 = \dfrac{\pi}{4}$	$\phi_2 = \dfrac{5\pi}{4}$	$\Delta\Phi$
$y_m = 0{,}003\,4$ m		amplitude

SOLUTION a.

Identifier la clé

Le déphasage est la différence entre les deux phases :

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \phi_2 - \phi_1\,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\Delta\Phi = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Selon l'équation 2.41, lorsque le déphasage est un multiple impair de π,

l'interférence est destructive. (réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

Selon l'équation 2.39,

$$\text{amplitude} = 2y_m \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right). \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

En remplaçant le résultat obtenu à la partie **a.** dans l'équation (iii), nous obtenons

$$\text{amplitude} = 0{,}000\,0 \text{ m}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'amplitude de l'onde résultante doit être nulle, car l'interférence est destructive.

2.9 Les ondes stationnaires

On veut analyser l'oscillation d'une très longue corde, fixée à $x = 0$ et qui s'étend vers les coordonnées x positives. La figure 2.25 à la page suivante montre une onde sinusoïdale incidente qui se déplace vers la gauche. La réflexion produit une onde inversée, car la corde est fixe à cet endroit ; cette onde se déplace vers la droite. L'onde incidente et l'onde réfléchie se superposent. L'onde résultante n'est plus une onde progressive. C'est une *onde stationnaire*. Tous les points de la corde oscillent en même temps selon un mouvement harmonique simple. Certains points de la corde n'oscillent pas du tout. Ce sont les *nœuds*, marqués par des points qu'on peut voir à la figure 2.25c. À mi-chemin entre deux nœuds, la corde oscille avec une grande amplitude. Ces points sont appelés des *ventres*. La position des nœuds et des ventres est fixe.

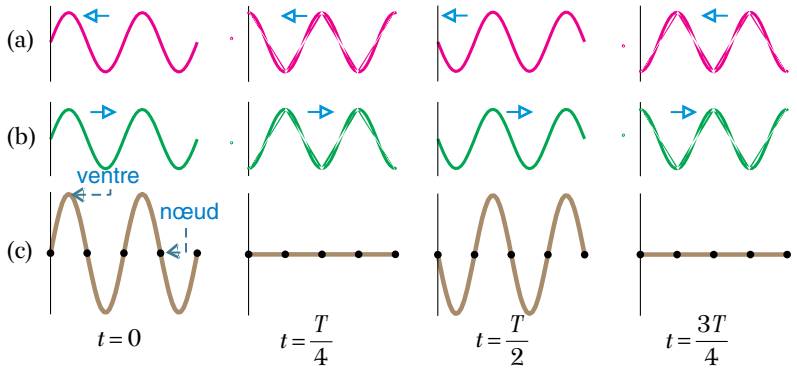


FIGURE 2.25
(a) Une onde progressive se déplace vers la gauche. (b) La réflexion de l'onde incidente se déplace vers la droite. (c) La superposition des deux ondes produit une onde stationnaire.

Une onde stationnaire est produite par la superposition de deux ondes progressives, de même amplitude, de même fréquence, qui se déplacent en sens opposés dans un milieu.

Dans la figure 2.25, la superposition des deux ondes produit une interférence constructive à $t = 0$ et à $t = T/2$, car les deux ondes sont en phase. À $t = T/4$ et à $t = 3T/4$, les ondes sont en opposition de phase, et l'interférence est destructive. La corde est alors horizontale.

L'onde incidente (l'onde en rouge dans la figure 2.25) est une onde progressive qui se déplace vers la gauche, ayant une longueur λ, une fréquence angulaire ω et une amplitude y_m. Elle est décrite par la fonction d'onde :

$$y_1 = y_m \sin(kx + \omega t) .$$

L'onde réfléchie (l'onde en vert dans la figure 2.25) a les mêmes caractéristiques, à l'exception du sens, car elle se déplace vers la droite. Elle est décrite par l'expression :

$$y_2 = y_m \sin(kx - \omega t) .$$

L'onde résultante est la superposition de ces deux ondes :

$$y' = y_1 + y_2 = y_m\left[\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)\right] .$$

On peut simplifier cette expression en utilisant de nouveau l'identité trigonométrique donnée à l'équation 2.37. L'onde résultante est

Onde stationnaire

$$y'(x;t) = \left[2y_m \sin(kx)\right] \cos(\omega t) . \qquad (2.42)$$

Ceci n'est pas une onde progressive, car elle n'a pas la forme $f(x \mp vt)$. La fonction $\cos(\omega t)$ indique plutôt que les points de la corde décrivent un mouvement harmonique simple, avec une amplitude $2y_m \sin(kx)$, qui dépend de la position sur la corde :

$$\text{amplitude} = \left|2y_m \sin(kx)\right| . \qquad (2.43)$$

La figure 2.26 montre une onde stationnaire dans une corde, avec des nœuds et des ventres. Les nœuds sont les points qui ne bougent pas, c'est-à-dire les points ayant une amplitude nulle :

$$2y_{\mathrm{m}} \sin(kx) = 0$$

$$kx_n = \frac{2\pi}{\lambda} x_n = n\pi \qquad (n = 0, 1, \ldots) .$$

La position du n^{e} nœud est alors :

$$x_n = n\frac{\lambda}{2} \qquad \text{avec } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.44}$$

L'extrémité de la corde $x = 0$ correspond au nœud $n = 0$.

Pour les ventres, l'amplitude est maximale et est égale à $2y_{\mathrm{m}}$. Ceci se produit lorsque $|\sin(kx)| = 1$:

$$kx_n = \frac{2\pi}{\lambda} x_n = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi .$$

La position des ventres est donc

$$x_n = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}, \qquad \text{où } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.45}$$

La distance entre deux nœuds successifs est égale à $\lambda/2$, tout comme la distance entre deux ventres successifs.

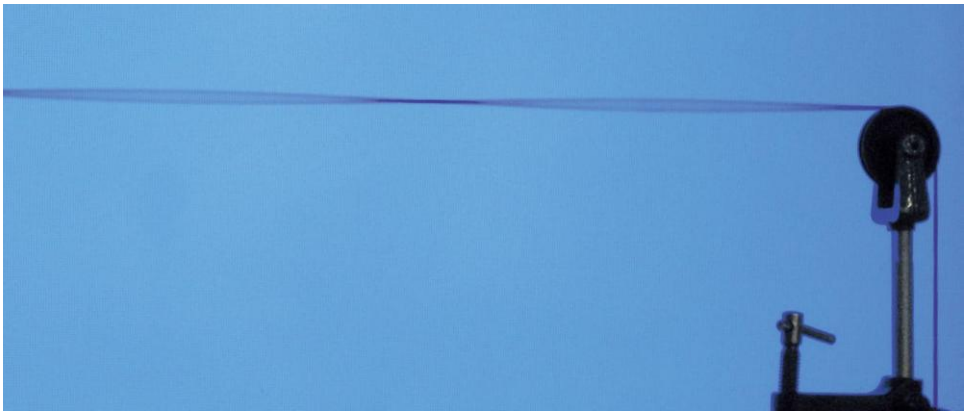


FIGURE 2.26
Une onde stationnaire dans une corde

EXEMPLE 2.6 Les nœuds d'une onde stationnaire

Une très longue corde, fixée à $x = 0$, a une masse linéique de 4,00 g/m et elle est soumise à une tension de 10,0 N. Un générateur fait osciller la corde et produit une onde progressive ayant une fréquence de 40,0 Hz et une amplitude de 3,00 mm. La réflexion de l'onde produit une onde stationnaire sur la corde.

a. Calculez la distance entre deux nœuds successifs.

b. Quel est le déplacement maximal d'un point de la corde ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues
$\mu = 4{,}00$ g/m	$F = 10{,}0$ N	$x_{n+1} - x_n$
$f = 40{,}0$ Hz	$y_m = 3{,}00$ mm	y_{max}

SOLUTION a.

Identifier la clé

La position des nœuds est donnée par l'équation 2.44 :

$$x_n = n\frac{\lambda}{2}, \qquad \text{(i)}$$

ce qui implique que la distance entre le nœud $n+1$ et le nœud n est

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n = (n+1)\frac{\lambda}{2} - n\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}. \qquad \text{(ii)}$$

Pour trouver la longueur d'onde, nous calculons le module de la vitesse de l'onde :

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \lambda f\ . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Le module de la vitesse de l'onde est

$$\sqrt{\frac{10{,}0\text{ N}}{4{,}00\times10^{-3}\text{ kg/m}}} = 50{,}0\text{ m/s}\ . \qquad \text{(iv)}$$

En insérant les équations (iv) et (iii) dans l'équation (ii), nous obtenons

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2f} = \frac{50{,}0\text{ m/s}}{2\times40{,}0\text{ Hz}} = 0{,}625\text{ m}\ .$$

(réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

L'amplitude du mouvement des points de la corde est donnée par l'équation 2.43 :

$$\text{amplitude} = \left|2y_m \sin(kx)\right|. \qquad \text{(v)}$$

L'amplitude est maximale lorsque la fonction sinus est égale à ±1 :

$$y_{max} = 2y_m\ . \qquad \text{(vi)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$y_{max} = 2\times3{,}00\text{ mm} = 6{,}00\text{ mm}\ .$$

(réponse)

Valider la réponse

L'ordre de grandeur semble correct.

2.10 Les modes normaux d'oscillation d'une corde

Jusqu'à présent, nous avons analysé des ondes qui se propagent le long d'une très longue corde. Lorsqu'une corde a une longueur L et qu'elle est fixée aux deux extrémités, les caractéristiques des ondes qui peuvent faire osciller la corde sont limitées.

Lorsqu'une onde progressive se propage sur une corde et qu'elle arrive à l'extrémité de la corde, cela génère une onde réfléchie inversée. L'onde réfléchie se superpose à l'onde incidente et se propage vers l'autre extrémité. Il y a une nouvelle onde réfléchie générée à la seconde extrémité, qui se superpose aux ondes précédentes et se propage de nouveau vers la première extrémité. On obtient rapidement un grand nombre d'ondes qui se superposent. Ainsi, une interférence destructive est produite, et la corde n'oscille que très légèrement, à moins que la longueur d'onde de l'onde incidente ait une valeur très particulière, de telle sorte que la superposition des ondes produit une onde stationnaire. Il y a alors résonance : la fréquence d'oscillation de la source concorde avec une fréquence naturelle d'oscillation de la corde.

La corde étant fixe à ses deux extrémités, à $x = 0$ et à $x = L$, ces points ne peuvent pas osciller, c'est-à-dire que $y(0\,;\,t) = y(L\,;\,t) = 0$. Ceci représente les *conditions aux limites*.

Pour une corde d'une longueur L donnée, seules certaines fréquences d'oscillation donnent lieu à de l'interférence constructive et génèrent une onde stationnaire ayant une longueur d'onde précise.

La fonction d'onde d'une onde stationnaire est donnée par l'équation 2.42 :

$$y(x\,;\,t) = 2y_{\mathrm{m}} \sin(kx) \cos(\omega t)\,.$$

La condition $y(0\,;\,t)$ est déjà respectée par cette fonction d'onde. À $x = L$, on doit avoir

$$\sin kL = 0 \Rightarrow kL = \frac{2\pi}{\lambda_n} L = n\pi \qquad (n = 1,2,\ldots)\,.$$

Cette situation est possible seulement pour certaines longueurs d'onde :

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}\,. \tag{2.46}$$

On dit que la corde ne peut osciller que pour différents *modes d'oscillation*. L'onde stationnaire pour laquelle $n = 1$ est appelée le *mode fondamental*, et les autres modes sont les modes d'ordre n. La figure 2.27 illustre les trois premiers modes d'oscillation d'une corde de longueur L.

Étant donné que le module de la vitesse des ondes $v = \lambda f$ est une quantité qui ne dépend que des caractéristiques de la corde, celle-ci ne peut osciller qu'à certaines fréquences f_n :

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L} = nf_1\,. \tag{2.47}$$

La fréquence du mode fondamental $f_1 = v/(2L)$ est appelée le *premier harmonique*. Les fréquences des modes d'ordre supérieur sont des multiples du premier harmonique. On dit alors que le mode d'ordre n produit le n^{e} harmonique. On remarque que pour augmenter la fréquence du premier harmonique, on peut réduire la longueur de la corde ou augmenter le module de la vitesse, en augmentant la tension ou en utilisant une corde qui a une masse linéique plus faible.

Comme le montre la figure 2.27, le mode n possède n ventres et $n + 1$ nœuds. Deux nœuds consécutifs sont séparés par une distance $\lambda/2$.

Défi animé 2.2
Dans le cas d'une onde sur une corde, peut-on obtenir une onde stationnaire si l'une des extrémités de la corde est libre ?

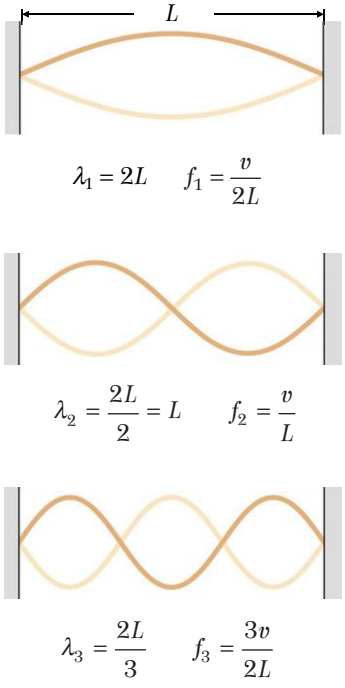


FIGURE 2.27
Les trois premiers modes d'oscillation d'une corde de longueur L

EXEMPLE 2.7 Les modes d'oscillation d'une corde

Une corde a une longueur de 1,30 m et une masse de 3,50 g. Elle est fixée à ses deux extrémités. À l'aide d'un oscillateur, on produit une onde stationnaire à une fréquence de 300 Hz. En augmentant la fréquence de l'oscillateur, on produit une autre onde stationnaire à une fréquence de 350 Hz. Les fréquences entre 300 Hz et 350 Hz ne créent pas d'onde stationnaire. Quelle est la tension dans la corde ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Les fréquences données correspondent à des harmoniques consécutifs f_n et f_{n+1}.

Connues		Inconnue
$L = 1{,}30$ m	$m = 3{,}50$ g	F
$f_n = 300$ Hz	$f_{n+1} = 350$ Hz	

La masse linéique de la corde est

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{3{,}50 \times 10^{-3}\ \text{kg}}{1{,}30\ \text{m}} = 2{,}692 \times 10^{-3}\ \text{kg/m}\ . \quad \text{(i)}$$

Identifier la clé

La fréquence du n^{e} harmonique d'une corde est

$$f_n = nf_1 = n\frac{v}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}\ . \quad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Selon l'équation (ii),

$$f_{n+1} = (n+1)\, f_1$$
$$f_n = nf_1\ .$$

Nous obtenons la fréquence fondamentale en soustrayant les fréquences d'harmoniques consécutifs :

$$f_{n+1} - f_n = (n+1)\, f_1 - nf_1 = f_1$$

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} = 350\ \text{Hz} - 300\ \text{Hz} = 50\ \text{Hz}\ . \quad \text{(iii)}$$

Nous trouvons la tension dans la corde en isolant F dans l'équation (ii) :

$$F = 4L^2 f_1^2 \mu$$
$$= 4\,(1{,}30\ \text{m})^2\,(50\ \text{Hz})^2\ 2{,}692 \times 10^{-3}\ \text{kg/m}$$
$$F = 45{,}5\ \text{N} = 46\ \text{N}\ . \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La réponse n'a que deux chiffres significatifs, car la soustraction des deux fréquences fait perdre un chiffre significatif. L'ordre de grandeur semble correct.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 2.5

On fait osciller une corde de longueur L selon le deuxième harmonique.

a. Tracez l'onde stationnaire.

b. De quelle façon la fréquence change-t-elle si on quadruple la tension sans changer le mode d'oscillation ?

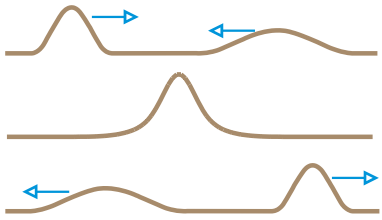
RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié les ondes et leur comportement, en portant une attention plus particulière aux ondes sur une corde.

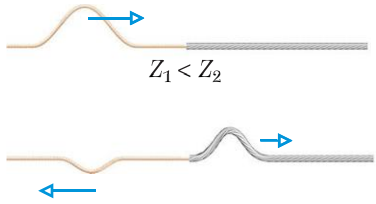
LES LOIS ET LES PRINCIPES

- Une **onde progressive** est une perturbation qui se déplace avec un module de la vitesse v constant (lorsque le milieu est homogène).
- Une **onde mécanique** se propage grâce à l'élasticité et à l'inertie d'un milieu de propagation.
- Le **module de la vitesse de l'onde** dépend des caractéristiques du milieu de propagation.
- Une **onde transporte de l'énergie**, mais les éléments du milieu de propagation ne se déplacent pas avec l'onde.
- Dans une **onde transversale**, les éléments du milieu se déplacent perpendiculairement au déplacement de l'onde.
- Dans une **onde longitudinale**, les éléments du milieu se déplacent dans la même direction que le déplacement de l'onde.
- Lorsque deux ondes y_1 et y_2 se rencontrent, l'onde résultante est la **superposition des ondes** :

$$y' = y_1 + y_2 \, .$$



- Lorsqu'une onde rencontre une discontinuité, une partie de l'onde est transmise et une partie est réfléchie.



LES RÉSULTATS

Une **onde progressive sinusoïdale** est produite par une source qui déplace le milieu selon un mouvement harmonique simple :

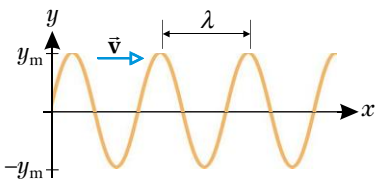
$$y = y_m \sin(kx \mp \omega t + \phi) \, ,$$

où k est le nombre d'onde et ω, la fréquence angulaire.

- L'onde se déplace dans le même sens que l'axe des x (pour le signe –) ou dans le sens opposé à l'axe des x (pour le signe +).
- L'onde a une amplitude y_m, une longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ et une fréquence $f = \omega/(2\pi)$.
- Le module de la vitesse de l'onde est

$$v = \lambda f = \frac{\omega}{k} \, .$$

- La fréquence et l'amplitude dépendent de la source, alors que la vitesse dépend des caractéristiques du milieu. La constante de phase ϕ dépend des conditions initiales.



L'**interférence des ondes** est la superposition de deux ondes ayant la même fréquence. L'onde résultante dépend du déphasage entre les deux ondes.

- L'**interférence est constructive** lorsque les ondes sont en phase :

$$\Delta\Phi = 2m\pi \, .$$

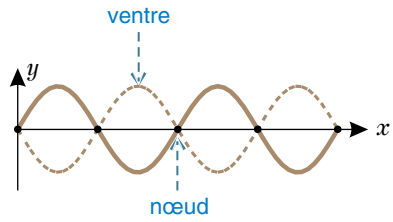
- L'**interférence est destructive** lorsque les ondes sont en opposition de phase :

$$\Delta\Phi = (2m + 1)\pi \, .$$

Une **onde stationnaire** est produite par la superposition des deux ondes progressives qui se déplacent en sens opposés et ayant la même longueur d'onde :

$$y' = 2y_m \sin(kx) \cos(\omega t) \, .$$

- Les **nœuds** sont les points qui n'oscillent pas ($x_n = n\lambda/2$).
- Les **ventres** sont les points ayant une amplitude maximale ($x_n = [2n + 1]\lambda/4$).



LES APPLICATIONS

Pour une **onde sur une corde tendue**, dont la masse linéique est μ et la tension est F:

- Le module de la vitesse est $v = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$.
- L'impédance est $Z = \dfrac{F}{v} = \sqrt{\mu F}$.
- La puissance transportée par une onde progressive sinusoïdale est $P = \dfrac{1}{2} Z\omega^2 y_{\text{m}}^2$.

Une corde de longueur L n'admet que des ondes stationnaires ayant une certaine longueur d'onde. Ce sont les **modes normaux d'oscillation**. Le mode n a une longueur d'onde:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

La fréquence du n^{e} harmonique est

$$f_n = nf_1 = n\frac{v}{2L}.$$

QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

Section 2.1 Les types d'ondes

Q1 Indiquez, dans chacun des cas suivants, s'il s'agit d'une onde progressive (ou impulsion) transversale, d'une onde longitudinale, d'une onde mixte, ou s'il ne s'agit pas d'une onde progressive.

a. On lance un caillou dans l'eau, ce qui produit des ondulations à la surface.

b. Une masse oscille, suspendue à un ressort.

c. Le son qui part du haut-parleur et parvient à vos oreilles.

d. Une corde de piano est frappée par l'un des marteaux.

e. Lorsqu'on augmente la tension dans une corde, cette augmentation de tension se propage d'un bout à l'autre.

f. À la suite d'un séisme, le sol oscille à plusieurs endroits.

P2 Lorsque survient un séisme, des ondes sismiques sont produites à l'épicentre. Ces ondes sont des ondes mixtes, composées d'ondes longitudinales (qu'on appelle les *ondes P*) et d'ondes transversales (qu'on appelle les *ondes S*). Ces ondes se propagent à des vitesses de modules différents. Les ondes P se déplacent à une vitesse dont le module est de 7,0 km/s, et les ondes S se déplacent à une vitesse dont le module est de 4,5 km/s. Un sismographe mesure d'abord des ondes P, puis, 14 s plus tard, il mesure des ondes S.

a. À quelle distance se trouve l'épicentre?

b. Pendant combien de temps les ondes P se sont-elles déplacées entre l'épicentre et le sismographe?

Section 2.2 Les ondes progressives à une dimension

Q3 Les ondes suivantes se déplacent le long de l'axe des x.

(i) $y(x;t) = 0{,}040\sin(6x + 4t + 0{,}4)$

(ii) $z(x;t) = \dfrac{1}{(2x + 3t + 2)^2}$

(iii) $s(x;t) = 0{,}30\text{e}^{-(2t-2x)^2}$

Dans ces fonctions d'onde, toutes les distances sont exprimées en mètres et le temps, en secondes.

a. Classez les ondes selon un ordre croissant du module de la vitesse.

b. Quelle onde se déplace dans le même sens que l'axe des x?

E4 Vérifiez que la fonction

$$y(x;t) = 0{,}040\text{e}^{-(7t-4x+1)^2}$$

est une solution de l'équation d'onde.

Section 2.3 La vitesse des ondes sur une corde

Q5 Le tableau suivant indique la tension, la masse volumique et le diamètre de quatre cordes différentes. Classez ces cordes selon un ordre croissant du module de la vitesse des ondes.

corde	tension	masse volumique	diamètre
1	F	ρ	d
2	$2F$	2ρ	d
3	F	ρ	$2d$
4	F	$\rho/2$	$2d$

Q6 On attache bout à bout deux cordes faites du même matériau mais de diamètres différents. On attache ensuite les extrémités libres à deux poteaux distants, de façon à produire une tension dans cette corde à deux sections. On produit une onde à l'une des extrémités de cette corde. Dans quelle section de la corde l'onde se propagera-t-elle le plus rapidement?

E7 Les ondes transversales dans un câble tendu se propagent à la vitesse ayant un module v_0. La rigidité de ce câble permet de tripler sa tension sans modifier sa longueur de façon mesurable. Les ondes se déplacent alors à une vitesse dont le module est v. Quel est le rapport v/v_0?

E8 Une ficelle de 25,0 m est vendue en pelote dont la masse est de 90,0 g. On en utilise une certaine longueur pour faire le montage de la figure 2.28. La longueur entre le point fixe et la poulie est $L = 1{,}50$ m. La masse suspendue est $m = 1{,}20$ kg. Quel est le module de la vitesse de propagation d'une onde qu'on produit sur cette ficelle tendue ?

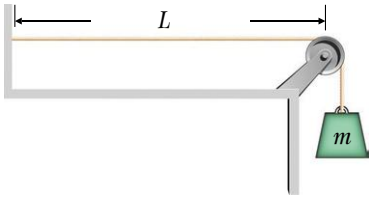


FIGURE 2.28 • Exercice 8

E9 Une onde se déplace sur une corde avec une vitesse de 30,0 m/s. Cette corde a un diamètre de 1,42 mm. Une deuxième corde est faite du même matériau, et elle est tendue avec la même tension que la première corde. La vitesse des ondes sur la deuxième corde a un module de 36,7 m/s. Quel est le diamètre de la deuxième corde ?

E10 Le câble d'un filet de tennis a un diamètre de 4,50 mm, et il supporte une tension de 1,50 kN. Sa masse linéique est de 126 g/m. Durant les compétitions, des chasseurs de balles, accroupis aux extrémités du filet, mettent leur doigt sur le câble pour détecter un contact de la balle avec le filet lors du service. Si une balle frôle le filet au centre du terrain, combien de temps met l'impulsion pour se rendre jusqu'à une extrémité du filet, à 5,03 m du centre, afin qu'elle soit détectée ?

E11 Dans une expérience, on réalise un système de communication rudimentaire en installant entre deux maisons un fil métallique tendu. Le fil installé mesure 43,5 m. Une impulsion prend 1,20 s pour parcourir la distance lorsqu'on pince le câble à l'une de ses extrémités. Avant l'installation, on a déterminé que la portion du câble entre les deux crochets a une masse de 7,60 kg. Quelle est la tension dans le câble ?

Section 2.4 Les ondes progressives sinusoïdales

Q12 La figure 2.29 montre une onde sinusoïdale sur une corde qui se déplace vers la gauche. Pour les points de la corde illustrés, indiquez si ces points sont en train de monter ou de descendre.

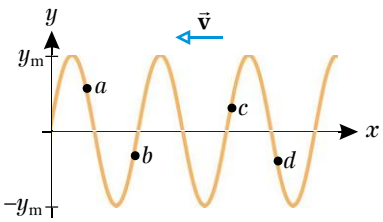


FIGURE 2.29 • Question 12

Q13 La figure 2.30 montre le graphique du déplacement vertical d'un élément de la corde en fonction du temps. Aux instants indiqués, dans quel sens se déplace l'élément de la corde ?

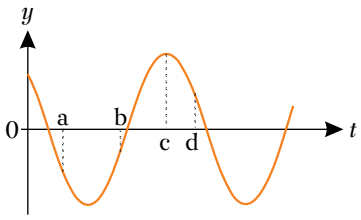


FIGURE 2.30 • Question 13

Q14 Une onde sinusoïdale se propage le long d'une longue corde. En un point précis de la corde, durant le passage d'un cycle complet de l'onde, combien de fois ce point a-t-il :

a. une vitesse ayant un module maximal ?

b. une accélération de module égal à la moitié de sa valeur maximale ?

c. une vitesse positive et un déplacement dont le module est égal au tiers de l'amplitude ?

Q15 Les ondes suivantes se propagent dans des cordes soumises à la même tension.

$$y_1 = 0{,}03\sin(4x - 3t)$$

$$y_2 = 0{,}02\sin(2x + 3t + \pi/2)$$

$$y_3 = 0{,}025\sin(4x + 2t - \pi/2)$$

$$y_4 = 0{,}04\sin(2x + 4t)$$

Classez les ondes selon un ordre croissant :

a. du module de la vitesse des ondes ;

b. de la masse linéique des cordes.

E16 Lors d'un tremblement de terre, les ondes primaires (dites P) ont une fréquence de 8,00 Hz. Elles atteignent, à 1,24 s d'intervalle, deux sismographes distants de 7 240 m, dans la direction de la propagation des ondes. Quelle est la longueur d'onde de ces ondes sismiques ?

E17 Sur une corde soumise à des ondes transversales, un point oscille entre deux positions distantes de 2,10 cm et se rend de l'une à l'autre en 0,150 s. La longueur d'onde de cette onde est de 1,75 m.

a. Quelle est l'amplitude de cette onde ?

b. Quelle en est la fréquence ?

c. Quel est le module de la vitesse de propagation de l'onde ?

E18 Une corde vibrante oscille selon un mouvement qui obéit à l'équation :

$$y(x;t) = 1{,}25\sin\,(0{,}0750x - 128t + \pi/3)\,,$$

où les longueurs sont en centimètres, le temps est en secondes et l'axe des x est orienté vers la droite. La tension dans la corde est de 18,0 N.

a. Quelle est la fréquence d'oscillation d'un point de cette corde ?

b. Quelle est la longueur d'onde ?

c. Quelle est la vitesse de propagation de l'onde ?

d. Quelle est la masse linéique de la corde ?

e. Quelles sont la position verticale et la vitesse transversale d'un point de la corde situé à $x = 2{,}00$ cm à l'instant $t = 5{,}00$ s ?

E19 Les vagues à la surface d'un lac peuvent être comparées à une onde dont l'équation, le long de la direction de propagation, est la même que pour une corde vibrante. Dans des conditions données, on observe que le sommet des vagues se trouve 15,5 cm plus haut que le fond d'un creux, que la plus courte distance entre deux crêtes est de 85,0 cm, et que les vagues se déplacent à une vitesse de 62,0 cm/s. Écrivez l'équation du déplacement vertical d'un point de la surface de l'eau, le long d'un axe des x orienté selon le déplacement de l'onde. (Supposez que la constante de phase est nulle.)

E20 Une onde sinusoïdale se déplace le long d'un câble tendu. La fréquence de l'onde est de 420 Hz, et celle-ci se propage à 200 m/s. Quelle est la différence de phase entre deux points distants de 8,00 cm ?

P21 Une corde a une masse linéique de 1,40 g/m, et elle est soumise à une tension de 33,0 N. On produit une onde sinusoïdale en déplaçant l'extrémité de la corde ($x = 0$) selon un mouvement harmonique simple :

$$y(t) = 12{,}0 \text{ mm} \sin(88{,}0t + \pi/6)\,.$$

L'onde se déplace dans le même sens que l'axe des x.

a. Quelle est la distance entre deux points dont la différence de phase est de $3\pi/2$?

b. Écrivez la fonction d'onde.

P22 La figure 2.31 montre une onde qui se déplace vers la droite sur une corde à $t = 0$. La corde a une masse linéique de 12,0 g/m et une tension de 40,0 N.

a. Quelle est l'amplitude de l'onde ?

b. Quelle est la fréquence d'oscillation des points de la corde ?

c. Écrivez la fonction d'onde.

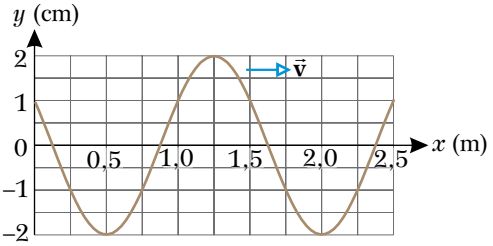


FIGURE 2.31 • Problème 22

Section 2.5 La puissance transportée par une onde

Q23 Un oscillateur produit une onde sinusoïdale sur une longue corde, avec une puissance P_0. Si l'amplitude est doublée, par quel facteur la puissance de l'oscillateur doit-elle augmenter ?

Q24 Deux câbles sont composés du même matériau. Ils ont la même tension, mais des diamètres différents $d_1 = 2d_2$. Ils sont excités de façon transversale à la même fréquence et avec la même amplitude.

a. Quel est le rapport v_1/v_2 entre les modules de la vitesse des ondes sur chaque câble ?

b. Quel est le rapport P_1/P_2 entre les puissances transportées par les ondes ?

E25 Dans le but de transmettre de l'énergie à un mécanisme expérimental, on utilise une corde d'une masse linéique de 7,23 g/m qu'on excite à une fréquence de 50,0 Hz avec une amplitude de 12,0 mm. Quelle tension doit-on appliquer dans la corde pour transmettre 5,00 J d'énergie à chaque seconde ?

P26 Une très longue corde a une masse linéique de 2,80 g/m, et elle est soumise à une tension de 16,0 N. Un oscillateur produit une onde sinusoïdale qui se déplace dans le sens opposé de l'axe des x en la faisant osciller à une fréquence de 35,0 Hz, ce qui demande une puissance de 4,00 W. À $t = 0$, le point $x = 0$ a une position verticale de 2,50 cm et il se déplace vers le haut.

a. Quelle est l'amplitude de l'onde ?

b. Écrivez la fonction d'onde.

c. Quelle est la vitesse transversale du point $x = 0$ à $t = 0{,}200$ s ?

Section 2.6 La réflexion et la transmission des ondes

Q27 On relie ensemble deux cordes ayant des masses linéiques différentes, où $\mu_1 < \mu_2$. Une impulsion est envoyée de deux façons différentes. Pour chaque cas illustré à la figure 2.32, dessinez les cordes après que l'impulsion est complètement réfléchie.

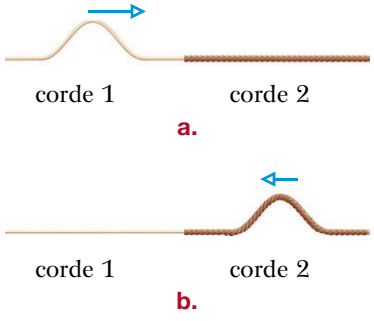


FIGURE 2.32 • Question 27

Q28 Deux cordes ayant des diamètres différents sont reliées ensemble et tendues. On produit une onde sinusoïdale qui se propage de la première corde vers la deuxième

corde. Quelle est la relation entre la fréquence de l'onde transmise et la fréquence de l'onde réfléchie ?

E29 Un fil de 5,00 m, dont la masse linéique est de 2,18 g/m, est attaché à l'extrémité libre d'un autre fil de 7,00 m, dont la masse linéique est de 3,44 g/m. L'ensemble est soumis à une tension de 7,20 N. Combien de temps met une impulsion pour parcourir le système ?

P30 On attache une corde de masse linéique μ_1 à un crochet fixé à un mur. À l'autre extrémité de cette corde, on attache une seconde corde, de masse linéique $\mu_2 = 3\mu_1$, deux fois plus courte. Une personne tient dans sa main l'extrémité libre de la seconde corde en y appliquant une certaine tension. La personne produit une impulsion qui atteint la jonction entre les deux cordes en 0,700 s.

a. L'impulsion ayant fait l'aller-retour complet sera-t-elle inversée ou reviendra-t-elle du même côté de la corde ?

b. Combien de temps met cette impulsion pour faire un aller-retour complet ?

Section 2.7 La superposition des ondes

Q31 Deux impulsions de même forme mais inversées se propagent en sens inverse sur une corde.

a. Lorsque les impulsions sont parfaitement centrées, la corde est-elle parfaitement droite ?

b. De quelle façon la puissance transportée est-elle modifiée par l'état de la corde au moment de la rencontre des impulsions ?

E32 Deux ondes voyageant en sens opposés sont produites sur une corde qui s'étend de $x = 0{,}0$ m à $x = 50{,}0$ m. La fonction d'onde de chacune est

$$y_1 = 0{,}0125 \sin\,(2{,}50x - 300t + \pi/2)$$

$$y_2 = 0{,}0150 \sin\,(2\,[50{,}0 - x] - 240t + \pi)\,,$$

où les distances sont exprimées en mètres et le temps, en secondes. Quelle est la position verticale du centre de la corde à $t = 3{,}25$ s ?

Section 2.8 L'interférence des ondes

Q33 Une première onde $y_0 = y_m \sin(kx - \omega t + \pi/6)$ se propage sur une corde. Pour les ondes suivantes, indiquez si la superposition avec l'onde y_0 produit une interférence constructive, destructive ou intermédiaire.

a. $y_1 = y_m \sin(kx - \omega t - 5\pi/6)$

b. $y_2 = y_m \sin(kx - \omega t + 5\pi/6)$

c. $y_3 = y_m \sin(kx - \omega t + 13\pi/6)$

d. $y_4 = y_m \sin(kx - \omega t + 5\pi/3)$

E34 Deux ondes identiques ont une amplitude y_m. Déterminez le déphasage entre les ondes si l'amplitude de l'onde résultante est égale à

a. $1{,}5y_m$;

b. y_m.

E35 Deux ondes superposées ont la même amplitude y_m, la même fréquence et la même vitesse de propagation, mais elles sont déphasées de $5\pi/4$.

a. De quel type d'interférence s'agit-il ?

b. Quelle est l'amplitude de l'onde résultante ?

P36 Deux ondes ont une amplitude de 3,50 cm chacune, la même fréquence, la même longueur d'onde et elles se propagent dans le même sens. L'onde résultante est décrite par la fonction d'onde $y'(x\,;t) = (5{,}00\text{ cm}) \sin\,(125x - 25t)$. Quelles sont les fonctions d'onde de chacune des ondes ?

Section 2.9 Les ondes stationnaires

E37 Une corde de 10,0 m, sur laquelle des ondes se propagent à 14,0 m/s, est excitée à une fréquence telle que la réflexion des ondes à l'autre extrémité produit une onde stationnaire. La distance entre deux nœuds voisins est de 2,00 m. Quelle est la fréquence d'excitation de la corde ?

E38 Les deux ondes suivantes se propagent sur une corde :

$$y_1(x\,;t) = 0{,}030 \sin(20{,}9x - 25{,}1t)$$

$$y_2(x\,;t) = 0{,}030 \sin(20{,}9x + 25{,}1t)\,.$$

Quelle est la fonction d'onde de l'onde résultante ?

E39 Une onde stationnaire produite par des ondes superposées sur une corde est décrite par l'équation :

$$y(x\,;t) = 2{,}00 \sin\,(0{,}750x) \cos\,(25{,}0t)\,,$$

où les distances sont exprimées en centimètres et le temps, en secondes.

a. Déterminez le module de la vitesse de propagation d'une onde progressive sur cette corde.

b. Quelle est la fréquence d'oscillation d'un point de la corde ?

c. Quelle est la distance entre deux nœuds voisins sur la corde ?

d. Déterminez la vitesse d'un point de la corde situé à $x = 1{,}25$ cm à l'instant $t = 0{,}400$ s.

e. Quel est le module de l'accélération maximale d'un point de la corde situé précisément sur un ventre ?

Section 2.10 Les modes normaux d'oscillation d'une corde

Q40 Une corde oscille dans son cinquième harmonique entre deux points fixes.

a. Combien de nœuds y a-t-il sur la corde ?

b. Combien de ventres trouve-t-on sur la corde ?

c. La longueur de la corde représente combien de longueurs d'onde ?

Q41 Excitée à une certaine fréquence f, une corde tendue entre deux points d'attache oscille dans son troisième mode. Par quel facteur doit-on modifier la fréquence pour que la corde oscille dans son quatrième mode ?

Q42 Une corde oscille dans son deuxième mode à une fréquence f. Sans changer la fréquence ni la longueur de la corde, on divise par quatre la tension dans la corde. Quel est le nouveau mode d'oscillation ?

Q43 Deux cordes A et B ont la même longueur et sont soumises à la même tension. Elles oscillent à la même fréquence, mais dans des modes différents, comme le montre la figure 2.33. Quel est le rapport μ_A/μ_B ?

FIGURE 2.33 • Question 43

E44 Dans quels modes d'oscillation doit-on exciter une corde de 4,00 m de longueur, fixée à ses deux extrémités, pour faire en sorte qu'un point à 50,0 cm ait une vitesse verticale nulle ?

E45 Une corde de guitare de 641 mm de longueur oscille dans son mode fondamental et produit la note *sol* en oscillant à la fréquence de 196 Hz. L'analyse du son qu'elle produit, faite à l'aide d'un logiciel et d'un microphone, permet d'observer la présence du deuxième et du troisième harmonique de cette corde. Quelles sont les fréquences de ces deux harmoniques supplémentaires ?

E46 Une corde de piano servant à produire un *do* doit vibrer à 65,4 Hz dans son mode fondamental. La corde a un diamètre de 3,00 mm et une longueur de 1,10 m. Elle est composée d'un métal dont la masse volumique est de $7{,}90 \times 10^3$ kg/m^3. Quelle est la tension nécessaire dans la corde ?

E47 Une corde fixée à ses deux extrémités oscille dans son troisième harmonique lorsqu'elle est parcourue par une onde décrite par la fonction d'onde :

$$y(x;t) = 0{,}105 \sin(4{,}00\pi x)\cos(4{,}00t)\,,$$

où les distances sont exprimées en mètres, et le temps est exprimé en secondes. Quelle est la longueur de cette corde ?

E48 Vous procédez à une expérience avec un câble de tyrolienne, qui enjambe une petite rivière, pour déterminer sa tension. En agitant l'un de ses points d'attache, vous constatez que la durée de 20,0 oscillations dans son mode fondamental est de 62,5 s. Vous savez également que le câble a une masse linéique de 194 g/m et que sa longueur est de 33,7 m, d'un point d'attache à l'autre. Quelle est la tension dans le câble ?

P49 Une corde est tendue entre $x = 0$ et $x = 1{,}20$ m. Elle oscille selon une onde stationnaire qui comporte 5 nœuds. La corde est droite toutes les 6,00 ms. À $t = 14{,}0$ ms, le point $x = 0{,}200$ m a une position verticale de 1,6 mm.

a. Quel est le module de la vitesse des ondes sur la corde ?

b. Quelle est la position du ventre le plus près de $x = 0$?

c. Écrivez la fonction d'onde.

P50 Deux cordes différentes sont attachées ensemble, comme le montre la figure 2.34. La première corde a une longueur de 0,600 m et une masse linéique de 2,40 g/m. La deuxième corde a une masse linéique de 33,75 g/m, et la distance entre le point d'attache et la poulie est de 0,400 m. On suspend une masse $m = 0{,}700$ kg pour tendre l'ensemble du système. Quelle est la plus faible fréquence produisant une onde stationnaire dans le système, avec un nœud vis-à-vis du point d'attache ?

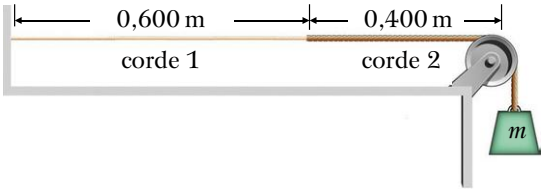


FIGURE 2.34 • Problème 50

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

2.1 (ii) et (iii)

Une onde progressive est représentée par une fonction $f(x;t) = f(x \mp vt)$, où x peut être remplacée par une autre coordonnée. On peut écrire $s(y;t) = 1/(2[y+3t]-1)^2$, ce qui est la forme nécessaire. De même, $p(z;t) = 0{,}5\cos\,(4[z+2t]-1)$.

2.2 $f = 20$ Hz

Le module de la vitesse est $v = \lambda f$. Selon la figure, $\lambda = 0{,}50$ m, ce qui signifie que $f = v/\lambda = 20$ Hz .

2.3 **a.** v ne change pas.

Le module de la vitesse dépend des propriétés de la corde (F et μ). Ces propriétés ne changent pas lorsque la fréquence change.

b. λ diminue de moitié.

Selon $v = \lambda f$, si f double, λ est divisée par 2, car v ne change pas.

2.4 **a.** La puissance est multipliée par 4.

La puissance moyenne est $P = Z\omega^2 y_m^2 / 2$, où $Z = \sqrt{\mu F}$.

b. La puissance est multipliée par $\sqrt{2}$.

c. La puissance est multipliée par 4.

2.5 **a.**

Le deuxième mode possède deux ventres et trois nœuds.

b. La fréquence double.

La fréquence du n^e harmonique est

$$f_n = \frac{nv}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}\,.$$

Si la tension est multipliée par 4, la fréquence est multipliée par 2.

Chapitre 03

Les ondes sonores

Buts du chapitre

Ce chapitre traite en détail des ondes sonores. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de décrire les ondes sonores ;
- d'étudier la propagation du son ;
- de calculer l'intensité du son et de représenter celle-ci en utilisant le niveau sonore ;
- d'analyser l'interférence sonore et les battements ;
- d'obtenir les modes d'oscillation d'un tuyau ;
- de calculer le changement de fréquence par effet Doppler.

Préalables

Ce chapitre porte sur les ondes longitudinales. Revoyez :

- les ondes progressives, analysées aux sections 2.2 et 2.4 ;
- la puissance transportée par une onde, vue à la section 2.5 ;
- l'interférence des ondes, examinée à la section 2.8 ;
- les ondes stationnaires, étudiées aux sections 2.9 et 2.10.

Les sons de l'orgue de la Maison symphonique, à Montréal, sont produits par des ondes stationnaires dans les tuyaux.

Après avoir étudié les ondes sur une corde, nous explorons maintenant les ondes sonores. Le son est un outil de communication essentiel. Il peut parfois être agréable, par exemple sous forme de musique ; il peut aussi être déplaisant, par exemple lorsqu'on entend le bruit produit par de la machinerie lourde. L'étude du son permet notamment aux scientifiques d'améliorer l'acoustique des salles de concert. Elle permet aussi de concevoir des protecteurs d'oreilles pour les travailleurs et des méthodes d'atténuation du bruit, comme les écrans anti-bruit, pour les résidents qui habitent près d'un chantier de construction ou d'une autoroute.

FIGURE 3.1
L'image d'un fœtus produite par échographie

Le son est une onde longitudinale qui se déplace dans un milieu de propagation comme l'air ou l'eau. La fréquence d'oscillation des ondes sonores est comprise entre 20 Hz et 20 kHz, ce qui correspond à l'intervalle perçu par l'oreille humaine moyenne. Les oscillations ayant une fréquence plus basse sont appelées des *infrasons*, alors que les oscillations ayant des fréquences plus élevées sont appelées des *ultrasons*. Les ultrasons sont entre autres utilisés pour les échographies, une méthode d'imagerie médicale servant à visualiser les tissus délicats du corps humain. La figure 3.1 montre l'image d'un fœtus durant la grossesse.

Les ondes sonores possèdent plusieurs caractéristiques qui ont déjà été examinées dans l'étude de l'onde sur une corde. Les ondes se propagent sous la forme d'ondes progressives sinusoïdales, avec une vitesse qui dépend seulement des propriétés du milieu. De plus, elles transportent de l'énergie, fournie par la source de l'onde. On peut produire des ondes sonores stationnaires, en contraignant l'onde dans un volume. Un tel phénomène se produit par exemple lorsqu'on souffle dans une flûte ou un tuyau d'orgue, comme ceux de l'orgue illustré sur la photo en ouverture de chapitre.

Le fait que le son se propage en trois dimensions, cela produit des résultats plus intéressants que dans le cas d'ondes se propageant en une dimension. L'énergie de l'onde se répartit le long de fronts d'onde dont la surface augmente avec la distance. Pour cette raison, nous allons définir l'intensité sonore, qui est habituellement représentée sur une échelle logarithmique des décibels.

La superposition des ondes sonores produit des effets intéressants. On obtient des interférences pour des ondes ayant la même longueur d'onde, mais qui ont parcouru des distances différentes. De même, lorsque deux ondes sonores ayant des fréquences légèrement différentes se superposent, l'interférence varie dans le temps et on entend des battements.

Vous avez sûrement remarqué que la fréquence de la sirène change brusquement lorsque l'ambulance passe devant vous. Cette variation brusque de la fréquence est causée par l'effet Doppler. Nous allons obtenir la relation entre la fréquence émise et la fréquence perçue, en fonction de la vitesse de la source et de la vitesse de l'observateur.

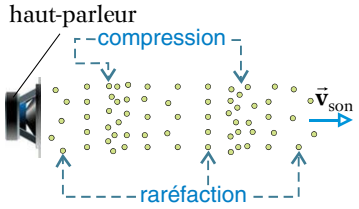


FIGURE 3.2
Une onde sonore est composée de régions de compression des molécules et de régions de raréfaction des molécules, qui se propagent.

3.1 La description des ondes sonores

Les ondes sonores se propagent dans l'air, mais aussi dans les liquides comme l'eau, et même dans les solides comme l'acier. On peut étudier le mouvement des molécules en plaçant un haut-parleur ayant une membrane qui oscille selon un mouvement harmonique simple (*voir la figure 3.2*). Lorsque la membrane du

haut-parleur se déplace vers l'avant, elle déplace des molécules, ce qui provoque une compression de l'air, une région où la pression de l'air est plus élevée que la pression atmosphérique. Après une demi-période, la membrane se déplace vers l'arrière, ce qui laisse de l'espace libre où l'air se dilate. Il y a une région de raréfaction de l'air où la pression de l'air est plus faible que la pression atmosphérique. Les zones de compression et de raréfaction se succèdent, et ces régions se propagent à l'opposé du haut-parleur, ce qui constitue une onde sonore. L'onde sonore est une onde longitudinale, car les molécules oscillent dans la même direction que la propagation de l'onde.

Vous pouvez aussi produire une onde sonore en frappant un objet. Le choc provoque une compression des molécules. Cette dernière se déplace dans l'objet sous la forme d'une onde sonore longitudinale.

REMARQUE

Des ondes sonores transversales, qu'on appelle aussi des *ondes de cisaillement*, peuvent se déplacer dans les solides. Contrairement aux gaz et aux liquides, les solides ont des molécules faisant partie d'un arrangement rigide. Lorsque des molécules sont déplacées de façon perpendiculaire, elles tirent sur les molécules voisines, comme les éléments d'une corde. En général, les ondes transversales et les ondes longitudinales dans un solide ont des vitesses de propagation différentes. Les ondes sonores transversales dans les solides ne sont pas étudiées dans ce manuel.

Pour simplifier l'analyse, on commence par supposer que l'onde se déplace dans un long tuyau horizontal, de telle sorte que les molécules se déplacent dans la direction de l'axe des x (*voir la figure 3.3*). Au chapitre 2, nous avons décrit une onde dans une corde à l'aide de la fonction d'onde $y(x\,;\,t)$. Cette fonction indique le déplacement vertical y de chaque élément de la corde, situé à la position x, au temps t. Dans le cas d'une onde sonore, les molécules oscillent dans la même direction que la direction de propagation de l'onde, comme le montre la figure 3.4, où une onde sonore se déplace vers la droite. À un temps t fixe, chaque molécule a un certain déplacement s par rapport à sa position d'équilibre. L'onde sonore est donc décrite par la fonction d'onde $s(x\,;\,t)$, qui indique le déplacement s de chaque molécule, dont la position d'équilibre est x, au temps t.

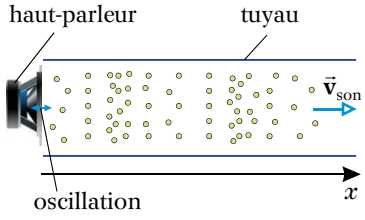


FIGURE 3.3
Une onde sonore se propage dans un long tuyau lorsque la membrane d'un haut-parleur oscille.

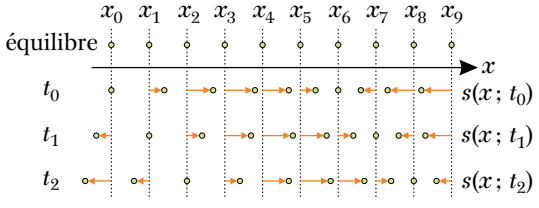


FIGURE 3.4
Une onde sonore se déplace vers la droite. Les flèches indiquent le déplacement de chaque molécule par rapport à sa position d'équilibre, pour trois temps différents.

Lorsque la membrane du haut-parleur oscille selon un mouvement harmonique simple à une fréquence angulaire ω, les molécules d'air dans le tuyau vont aussi osciller selon un mouvement harmonique simple à une fréquence

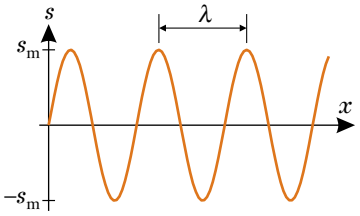


FIGURE 3.5
La fonction d'onde $s(x\,;t)$ à un temps t fixe

angulaire ω. Cette oscillation va produire une onde sonore progressive sinusoïdale (*voir la figure 3.5*), qui se propage le long du tuyau. Le déplacement d'une molécule, dont la position d'équilibre est x, au temps t, est

$$s = s_m \sin(kx - \omega t + \phi)\,. \tag{3.1}$$

Cette fonction a la même forme que la fonction d'une onde sur une corde. Le déplacement des molécules varie entre la valeur maximale s_m (qu'on appelle l'amplitude), et la valeur minimale $-s_m$ (le signe négatif indique un déplacement opposé à l'axe des x). Le paramètre k est le nombre d'onde, associé à la longueur d'onde ($k = 2\pi/\lambda$). Le paramètre ϕ est la constante de phase, qui dépend des conditions initiales.

Comme dans le cas de l'onde sur une corde, la longueur d'onde et la fréquence $f = \omega/(2\pi)$ sont reliées au module de la vitesse de l'onde :

$$v = \lambda f = \frac{\omega}{k}\,. \tag{3.2}$$

La vitesse du son dépend des propriétés du milieu de propagation, comme nous le verrons à la section 3.2. Cette vitesse est de 343 m/s dans le cas de l'air à une température de 20 °C et à une pression atmosphérique de 101,325 kPa. Si la fréquence du son augmente, la longueur d'onde diminue de la même façon, de telle sorte que la vitesse du son ne change pas.

Les molécules n'ont pas le même déplacement. À un temps t, certaines se sont déplacées vers la droite, d'autres se sont déplacées vers la gauche et certaines sont revenues à leur position d'équilibre. La densité des molécules varie alors d'un point à l'autre du tube. Par exemple à la figure 3.4 au temps t_0, la densité est plus grande vis-à-vis du point x_6, car la molécule à x_5 s'est déplacée vers la droite pendant que la particule à x_7 s'est déplacée vers la gauche. Ceci produit en même temps une augmentation de la force moyenne qu'exercent les molécules entre elles, c'est-à-dire une augmentation de la pression au point x_6. Il y a donc une relation entre le déplacement des molécules du milieu et la variation de pression dans le milieu.

La pression représente le module de la force moyenne appliquée par les molécules par unité d'aire. Dans le système international, elle est mesurée en pascals (1 Pa = 1 N/m^2), en l'honneur du mathématicien et philosophe français Blaise Pascal (1623-1662). À l'état d'équilibre, les molécules exercent une pression p_0. C'est la pression atmosphérique dans le cas de l'air. L'oscillation des molécules produit une variation de pression $\Delta p = p - p_0$. Une zone de compression est une région où $\Delta p > 0$, alors qu'une région de raréfaction est une région où $\Delta p < 0$.

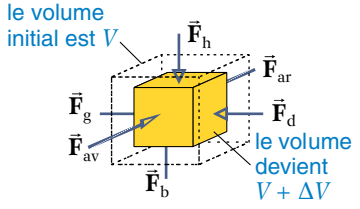


FIGURE 3.6
À la suite d'une compression, le volume d'un cube change de ΔV.

Pour obtenir la relation entre le déplacement des molécules et la variation de pression, on a d'abord besoin de définir le module de compressibilité B d'un matériau, une propriété qui caractérise son élasticité. La figure 3.6 montre un cube ayant un volume initial V et des faces ayant une aire A. On applique sur chacune de ses faces des forces ayant un module F. La pression sur chaque face est $\Delta p = F/A$. Les forces réduisent le volume, jusqu'à $V + \Delta V$ (où $\Delta V < 0$). Le module de compressibilité est défini par l'équation :

$$B \equiv -\frac{F/A}{\Delta V/V} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}\,. \tag{3.3}$$

Le module de compressibilité se mesure en pascals (Pa). C'est une caractéristique d'un matériau. Le tableau 3.1 donne la valeur du module de compressibilité pour quelques solides et liquides. Plus B est élevé, plus le matériau est difficile à comprimer, c'est-à-dire qu'on doit appliquer une grande pression pour changer son volume. On remarque que B est plus élevé pour les solides que pour les liquides, ce qui indique qu'en général, un solide est plus difficile à comprimer qu'un liquide. Un gaz est beaucoup plus facile à comprimer. Le module de compressibilité est relié à la pression du gaz.

TABLEAU 3.1

La valeur du module de compressibilité pour certains matériaux

Matériau	B (GPa)
Acier	160
Aluminium	76
Cuivre	140
Eau	2,2
Fer	170
Laiton	61
Mercure	25
Tungstène	310

Revenons maintenant à la propagation d'une onde sonore dans un long tuyau. La figure 3.7 montre un élément de volume du tuyau en l'absence d'une onde sonore, ayant une longueur Δx et une aire A. Le volume à l'équilibre est $V = A\,\Delta x$. En raison de la propagation d'une onde sonore, le côté gauche a un déplacement s_g et le côté droit, un déplacement de s_d. L'onde sonore a fait changer le volume, car les deux frontières ne se sont pas déplacées de la même distance :

$$\Delta V = A\,(s_d - s_g) = A\,\Delta s\,.$$

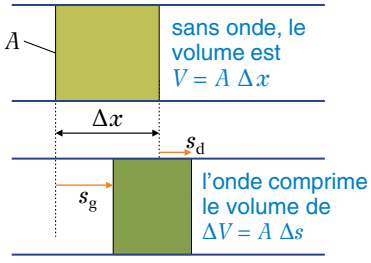


FIGURE 3.7
Une onde sonore produit une compression d'un élément de volume.

Selon l'équation 3.3, la variation de volume est produite par une variation de pression :

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V} = -B\frac{A\,\Delta s}{A\,\Delta x} = -B\frac{\Delta s}{\Delta x}\,.$$

On prend la limite où l'épaisseur de l'élément de volume tend vers zéro ($\Delta x \to 0$). Le rapport $\Delta s/\Delta x$ devient alors une dérivée partielle :

$$\Delta p = -B\frac{\partial s}{\partial x}\,. \tag{3.4}$$

Le signe négatif indique que lorsque le volume de l'élément diminue (avec $\partial s/\partial x < 0$), la pression augmente ($\Delta p > 0$). En se rapprochant, les molécules exercent les unes sur les autres une force plus grande.

On peut alors représenter l'onde sonore par une onde de pression, en indiquant la variation de pression en fonction de la position, comme à la figure 3.8. Dans le cas de l'onde sinusoïdale donnée par l'équation 3.1, la fonction de l'onde de pression est

$$\Delta p = -Bks_m\cos(kx - \omega t + \phi) = -\Delta p_m\cos(kx - \omega t + \phi)\,, \tag{3.5}$$

où $\Delta p_m = Bks_m$ est l'amplitude de la variation de pression. On voit que l'amplitude de pression dépend directement de l'amplitude du déplacement des molécules et du module de compressibilité. À la section 3.2, nous établirons une relation entre le module de la vitesse du son et le module de compressibilité, ce qui permettra d'exprimer l'amplitude de pression en fonction de l'amplitude de déplacement et du module de la vitesse du son.

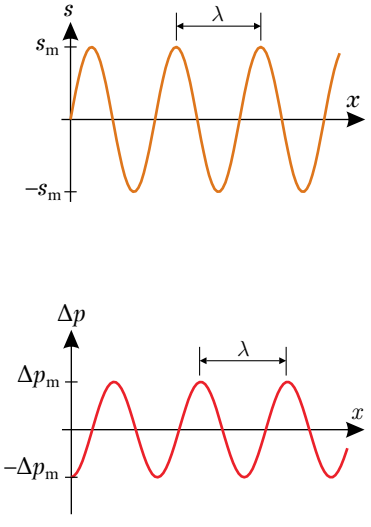


FIGURE 3.8
La pression est déphasée par rapport au déplacement.

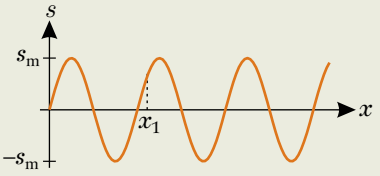
La fonction d'onde de pression a la même longueur d'onde et la même fréquence que la fonction d'onde de déplacement. La figure 3.8 montre que la fonction d'onde de pression est déphasée d'un quart de longueur d'onde : lorsque la composante du déplacement est la plus positive ou la plus négative, la variation de pression est nulle (la pression est égale à la pression p_0 à l'équilibre) ; par contre, lorsque le déplacement est nul, la variation de pression est maximale ou minimale.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 3.1

La figure suivante montre le déplacement des molécules dans une onde sonore qui se déplace vers la droite.

a. Au point x_1 indiqué, la molécule se déplace-t-elle vers la droite, vers la gauche ou est-elle immobile ?

b. Au point x_1 indiqué, la variation de pression est-elle positive, négative ou nulle ?



EXEMPLE 3.1 La fonction d'onde d'une onde sonore

Le déplacement des molécules produit par une onde sonore est donné par

$$s(x\,;t) = 0{,}856\ \mu\text{m}\ \sin(9{,}159x + 1000\pi t)\,,$$

où x est exprimé en mètres et t, en secondes. L'onde se déplace dans un long tuyau, parallèlement à l'axe des x. Le module de compressibilité est de 141,9 kPa.

a. Quelles sont la longueur d'onde et la fréquence de l'onde ?

b. Quelle est la vitesse de l'onde ?

c. Quelle est l'amplitude de pression ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

La fonction d'onde a la forme de l'équation 3.1 :

$$s(x\,;t) = s_m\ \sin(kx + \omega t + \phi)\,. \qquad \text{(i)}$$

Le signe positif dans l'argument du sinus indique que l'onde se déplace dans le sens opposé de l'axe des x.

Connues	Inconnues
$s_m = 0{,}856\ \mu\text{m}$	λ f
$k = 9{,}159\ \text{rad/m}$	$\vec{\mathbf{v}}$
$\omega = 1000\pi\ \text{rad/s}$	Δp_m
$B = 141{,}9\ \text{kPa}$	

SOLUTION a.

Identifier la clé

Nous obtenons la longueur d'onde et la fréquence à partir des paramètres de la fonction d'onde, selon les équations 2.15 et 2.16 :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \text{et} \quad f = \frac{\omega}{2\pi}\,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\lambda = \frac{2\pi}{9{,}159\ \text{rad/m}} = 0{,}686\,0\ \text{m} \quad \text{(réponse)}$$

$$f = \frac{1000\pi\ \text{rad/s}}{2\pi} = 500{,}0\ \text{Hz}\,. \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** pour calculer le module de la vitesse est l'équation 3.2 :

$$v = \lambda f = \frac{\omega}{k}\,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons, en utilisant les valeurs issues de la fonction d'onde :

$$v = \frac{1000\pi\ \text{rad/s}}{9{,}159\ \text{rad/m}} = 343{,}0\ \text{m/s}\,.$$

Comme l'onde se déplace dans le sens opposé à l'axe des x, la vitesse est

$$\vec{\mathbf{v}} = -343{,}0 \text{ m/s}\,\vec{\imath}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Identifier la clé

La variation de pression est obtenue à l'aide de l'équation 3.4 :

$$\Delta p = -B\frac{\partial s}{\partial x}\ .$$

Pour la fonction d'onde donnée à l'équation (i), la variation de pression est :

$$\Delta p = -Bks_{\text{m}}\cos(kx + \omega t)\ . \qquad \text{(iv)}$$

L'amplitude de pression correspond à la valeur absolue du facteur qui multiplie la fonction trigonométrique :

$$\Delta p_{\text{m}} = Bks_{\text{m}}\ . \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\Delta p_{\text{m}} = 141{,}9\times10^{3}\text{ Pa}\times9{,}159\text{ rad/m} \times0{,}856\times10^{-6}\text{ m} = 1{,}11\text{ Pa}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'ordre de grandeur des résultats semble correct. Remarquez que l'amplitude de pression est beaucoup plus faible que la pression atmosphérique, qui se situe autour de 101 kPa.

3.2 La vitesse du son

Lorsqu'une onde sonore se déplace dans un milieu comme l'air ou l'eau, le module de la vitesse de l'onde ne dépend pas de la fréquence du son émis par la source. Comme dans le cas de l'onde sur une corde, le module de la vitesse de l'onde dépend des propriétés mécaniques du milieu, liées à son élasticité et à son inertie. L'inertie dépend de la masse volumique ρ du milieu. Comme nous l'avons vu à la section 3.1, le module de compressibilité d'un matériau est lié à son élasticité. On peut obtenir le module de la vitesse du son en se basant sur l'équation 2.5 : on remplace la masse linéique par la masse volumique (qui représente l'inertie du milieu), et la tension dans la corde est remplacée par le module de compressibilité (qui est le facteur lié à l'élasticité du milieu) :

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}\ . \qquad (3.6)$$

Module de la vitesse du son

Cette équation est prouvée pour une onde sonore se déplaçant dans un long tuyau à la fin de la présente section.

Le tableau 3.2 (*voir la page suivante*) indique le module de la vitesse du son pour quelques substances. On remarque que le module de la vitesse du son est beaucoup plus grand dans les solides que dans les gaz. Ceci est lié directement au module de compressibilité. En effet, les gaz sont des substances facilement compressibles. Lorsqu'on applique une pression, leur volume diminue beaucoup. Au contraire, les solides sont très difficiles à comprimer ; même avec une pression importante, leur volume ne diminue que très peu.

TABLEAU 3.2

Le module de la vitesse du son pour quelques substances à 20 °C et 1 atm, sauf avis contraire

Substance	v (m/s)
Gaz	
Air (0 °C)	331
Air (25 °C)	343
Hélium (0 °C)	965
Hydrogène	1310
Néon (0 °C)	435
Liquide	
Eau (0 °C)	1401
Eau	1483
Eau de mer	1522
Solide	
Acier	5940
Aluminium	6420
Cuivre	4760
Fer	4994

TABLEAU 3.3

Le paramètre adiabatique

Type	γ
monoatomique	5/3
diatomique	7/5
polyatomique	4/3

À l'aide de l'équation 3.6, on peut exprimer l'amplitude de pression en fonction de l'amplitude du déplacement, en remplaçant le module de compressibilité par le module de la vitesse et par la masse volumique du milieu. En effet,

$$v^2 = \frac{B}{\rho} = v\frac{\omega}{k} \Rightarrow Bk = v\rho\omega\,.$$

En remplaçant cette relation dans l'équation 3.5, on trouve:

$$\Delta p_{\mathrm{m}} = Bks_{\mathrm{m}} = v\rho\omega s_{\mathrm{m}}\,. \tag{3.7}$$

Dans le cas d'un gaz, on peut obtenir le module de la vitesse du son en recourant à la thermodynamique. En effet, le module de compressibilité s'écrit en fonction de la pression du gaz:

$$B = \gamma p\,, \tag{3.8}$$

où γ est le paramètre adiabatique, qui dépend du type de molécules composant le gaz (*voir le tableau 3.3*). Dans le cas de l'air, composé principalement d'azote et d'oxygène (des molécules diatomiques), $\gamma = 7/5 = 1{,}40$.

De plus, un gaz à basse pression obéit à la loi des gaz parfaits, qui met en relation la pression, le volume et la température:

$$pV = \frac{mRT}{M}\,, \tag{3.9}$$

où m est la masse de la substance, M sa masse molaire et $R = 8{,}314$ J/(mol · K), la constante des gaz parfaits. On peut exprimer le module de compressibilité en fonction de la température:

$$B = \gamma\frac{mRT}{VM} = \frac{\gamma\rho RT}{M}\,,$$

car $m/V = \rho$, la masse volumique. L'équation 3.6 devient

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}\,. \tag{3.10}$$

REMARQUE

Dans l'équation 3.10, la température doit être exprimée en kelvins. Lorsque la température est en degrés Celsius, on doit faire la conversion T (K) = T (°C) + 273,15.

Dans le cas de l'air, où $\gamma = 1{,}40$ et $M = 28{,}96 \times 10^{-3}$ kg/mol, on trouve que le module de la vitesse du son est

$$v_{\mathrm{air}} = 20{,}05\sqrt{T} \quad (T \text{ exprimé en kelvins}). \tag{3.11}$$

Ceci donne un module de vitesse $v = 343$ m/s lorsque la température est de 20 °C. À moins d'avis contraire, c'est la valeur qui sera utilisée dans ce manuel.

EXEMPLE 3.2 La vitesse du son dans le gaz carbonique

Calculez le module de la vitesse du son dans le gaz carbonique lorsque la température est de 20,0 °C.

SOLUTION

Décortiquer le problème

Le gaz carbonique (CO_2) est un gaz polyatomique.

Connues	Inconnue
$\gamma = \frac{4}{3}$ $T = 20{,}0\ °C$	v

La température doit être exprimée en kelvins :

$$T = 20{,}0 + 273{,}15 = 293{,}15\ K\ . \qquad \text{(i)}$$

Nous calculons sa masse molaire en utilisant les données tirées de l'annexe F :

$$\begin{aligned} M_{CO_2} &= M_C + 2M_O \\ &= 12{,}011\ g/mol + 2 \times 15{,}999\ g/mol \\ M_{CO_2} &= 44{,}009\ g/mol\ . \end{aligned} \qquad \text{(ii)}$$

Identifier la clé

Pour calculer le module de la vitesse du son dans un gaz, la **clé** est l'équation 3.10 :

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}\ .$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{4 \times 8{,}314\ J\ (mol \cdot K) \times 293{,}15\ K}{3 \times 44{,}009 \times 10^{-3}\ kg/mol}} \\ &= 271{,}7\ m/s\ . \end{aligned} \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le module de la vitesse est du même ordre de grandeur que le module de la vitesse du son dans l'air.

La démonstration du module de la vitesse du son

Pour démontrer l'équation 3.6, on peut utiliser la même méthode que celle qui est utilisée pour prouver l'équation du module de la vitesse des ondes sur une corde. On applique la deuxième loi de Newton à un élément du système, et on transforme l'équation pour l'exprimer de la même manière que l'équation d'onde (*voir l'équation 2.3*).

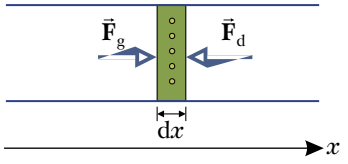


FIGURE 3.9
Un groupe de molécules est soumis à des forces de modules différents lorsque l'onde sonore se déplace dans un tuyau.

La figure 3.9 montre un groupe de molécules d'épaisseur dx contenues dans un tuyau ayant une aire A. La masse de ce groupe de molécules est $dm = \rho A\ dx$. Le déplacement de l'onde sonore produit une variation de pression Δp, différente des deux côtés du groupe de molécules. On suppose que la pression à gauche est Δp et que la pression à droite est $\Delta p + d\Delta p$. Le groupe de molécules subit les forces $\vec{\mathbf{F}}_g = \Delta p A \vec{\imath}$ et $\vec{\mathbf{F}}_d = -(\Delta p + d\Delta p) A \vec{\imath}$.

Selon la deuxième loi de Newton,

$$\begin{aligned} \sum F_x &= F_g - F_d = ma_x \\ \left[\Delta p - (\Delta p + d\Delta p)\right] A &= \rho A\ dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \\ -d\Delta p &= \rho\ dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}\ , \end{aligned} \qquad (3.12)$$

où l'accélération est exprimée en fonction de la dérivée seconde du déplacement par rapport au temps. On peut utiliser le calcul différentiel pour exprimer la variation de pression $d\Delta p$ en fonction de la coordonnée x :

$$d\Delta p = \frac{\partial \Delta p}{\partial x}\ dx\ .$$

De plus, selon l'équation 3.4, la pression est reliée à la dérivée du déplacement :

$$\Delta p = -B\frac{\partial s}{\partial x}.$$

En insérant ces résultats dans l'équation 3.12, on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Delta p}{\partial x}\,\mathrm{d}x &= \rho\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \\ B\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} &= \rho\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} &= \frac{\rho}{B}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Cette équation a la forme de l'équation d'onde (*voir l'équation 2.3*) :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2},$$

où v est le module de la vitesse du son :

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}.$$

Il s'agit bien de l'équation 3.6.

3.3 Les ondes en deux et en trois dimensions

Lorsque vous lancez un caillou dans un étang, vous observez une onde qui se propage en constatant la présence de cercles dont le rayon augmente graduellement, comme à la figure 3.10. Ces cercles sont les endroits où le déplacement des molécules d'eau est maximal, et ils sont équidistants. Ces cercles sont appelés les *fronts d'onde*, et l'onde est une *onde circulaire*, qui se propage le long de la surface de l'eau, en deux dimensions. La distance entre les fronts d'onde est la longueur d'onde λ, et la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ de l'onde est perpendiculaire aux fronts d'onde.

Si on se trouve très loin de la source de l'onde, les fronts d'onde sont des cercles ayant un très grand rayon. Dans ce cas, on observe seulement une petite partie d'un front d'onde, et celui-ci a la forme d'un segment de droite perpendiculaire à la vitesse, comme à la figure 3.11.

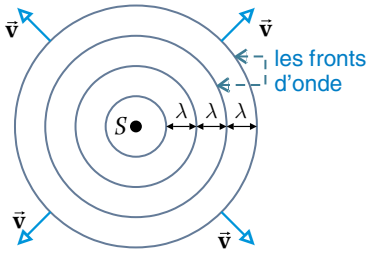


FIGURE 3.10
La source S émet une onde circulaire, qui se propage à la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$. Les fronts d'onde sont des cercles concentriques.

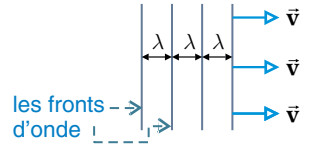


FIGURE 3.11
Très éloignés de la source, les fronts d'onde sont approximativement des segments de droite parallèles.

Le son est une onde qui se propage en trois dimensions. Les fronts d'onde sont des surfaces où le déplacement des molécules est maximal. Lorsqu'une petite source émet une onde de façon égale dans toutes les directions, on obtient une *onde sphérique*. Les fronts d'onde sont des sphères concentriques qui sont séparées par une distance égale à la longueur d'onde. On obtient un diagramme semblable à la figure 3.10 lorsqu'on présente une vue en coupe.

Si on est très éloigné de la source du son, les fronts d'onde forment pratiquement des plans parallèles, comme à la figure 3.12. Le déplacement des molécules est le même pour tous les points sur un plan perpendiculaire à la vitesse de l'onde. C'est une onde plane. Avec le système de coordonnées de la figure 3.12, le déplacement des molécules par rapport à la position d'équilibre dépend uniquement de la coordonnée y. La fonction d'onde donnée à l'équation 3.1 décrit bien l'onde plane (en remplaçant x par y).

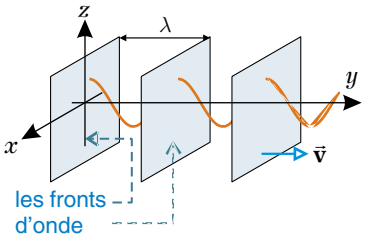


FIGURE 3.12
Pour une onde plane, la fonction d'onde $s(x\,;t)$ ne dépend ni de y ni de z.

Dans le cas d'une onde sphérique ou d'une onde circulaire, le déplacement des molécules est le même pour des points situés à la même distance r de la source. La fonction d'onde doit donc dépendre de r plutôt que de x. Pour une onde sinusoïdale, la fonction d'onde est

$$s(r\,;t) = s_{\mathrm{m}}(r)\sin(kr - \omega t + \phi)\,. \tag{3.14}$$

L'amplitude $s_{\mathrm{m}}(r)$ n'est pas une constante, mais elle est une fonction de la distance r. En effet, l'amplitude doit diminuer à mesure que r augmente, car l'énergie fournie par la source se répartit le long de fronts d'onde ayant une surface de plus en plus grande.

3.4 L'intensité sonore

Le son est une onde qui transporte de l'énergie. Cette énergie est fournie par la source sonore. Comme l'onde se propage en trois dimensions, l'énergie est répartie sur des fronts d'onde, c'est-à-dire qu'elle est répartie sur des surfaces. Pour cette raison, on définit l'*intensité sonore* comme la puissance moyenne transportée par l'onde par unité d'aire :

$$I \equiv \frac{P}{A}\,. \tag{3.15}$$

Dans le SI, l'intensité se mesure en watts par mètre carré ($\mathrm{W/m^2}$).

Dans le cas d'une onde sonore sinusoïdale ayant une fréquence angulaire ω et une amplitude s_{m}, se propageant dans un milieu où le module de la vitesse est v, l'intensité est donnée par l'expression :

$$I = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 s_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{2}Z\omega^2 s_{\mathrm{m}}^2\,, \tag{3.16}$$

où Z représente l'impédance acoustique caractéristique du milieu, mesurée en $\mathrm{Pa \cdot s/m}$:

$$Z = \rho v = \sqrt{\rho B} = \frac{B}{v}\,, \tag{3.17}$$

où l'équation 3.6 a été utilisée.

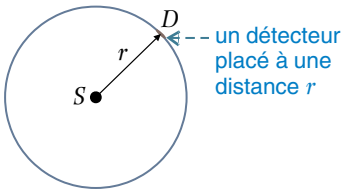


FIGURE 3.13
Un détecteur D est placé à une distance r d'une source ponctuelle S. L'énergie est répartie sur la sphère de rayon r.

L'équation 3.16 a la même forme que l'équation 2.25, qui permet de calculer la puissance transportée par une onde sur une corde. L'intensité sonore dépend à la fois des propriétés du milieu (par l'impédance acoustique) et des propriétés de l'onde (par la fréquence angulaire et par l'amplitude). De nouveau, on remarque que

L'intensité d'une onde sonore dépend du carré de l'amplitude.

Dans le cas d'une onde sphérique, la puissance fournie par la source se répartit sur des sphères de rayon r. L'énergie est alors répartie sur une surface dont l'aire est $A = 4\pi r^2$. Si on place un détecteur à une distance r d'une source ponctuelle, comme à la figure 3.13, l'intensité à la position du détecteur est

$$I = \frac{P_S}{4\pi r^2}, \tag{3.18}$$

où P_S est la puissance émise par la source.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 3.2

Une source ponctuelle S émet une onde sphérique. Deux micros sont placés à des distances différentes de la source. Le micro 2 est situé à une distance deux fois plus grande que le micro 1.

a. Quel est le rapport I_1/I_2 ?
b. Quel est le rapport s_{m1}/s_{m2} ?

EXEMPLE 3.3 La puissance captée par un micro

Un micro est placé à une distance de 15,0 m d'un petit haut-parleur, qui émet à une puissance moyenne de 0,400 W. Le micro est constitué d'une membrane circulaire ayant un rayon de 0,800 cm. Le module de la vitesse du son est de 343 m/s, et la masse volumique de l'air est de 1,21 kg/m^3.

a. Quelle est la puissance moyenne reçue par le micro ?
b. Quelle est l'amplitude de pression à la position du micro ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues
$P_S = 0{,}400$ W	$r = 15{,}0$ m	P_{micro}
$R = 0{,}800$ cm	$v = 343$ m/s	Δp_m
$\rho = 1{,}21$ kg/m^3		

Le micro a une membrane circulaire. L'aire de cette membrane est

$$A_{micro} = \pi R^2 = \pi\,(0{,}800\times10^{-2}\text{ m})^2 = 2{,}011\times10^{-4}\text{ m}^2\,. \tag{i}$$

SOLUTION a.

Identifier les clés

L'intensité sonore à la position du micro est donnée par l'équation 3.18 :

$$I = \frac{P_S}{4\pi r^2}\,. \tag{ii}$$

L'intensité permet de calculer la puissance reçue par le micro :

$$I = \frac{P_{micro}}{A_{micro}} \Rightarrow P_{micro} = I A_{micro}\,. \tag{iii}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'intensité à l'aide de l'équation (ii) :

$$I = \frac{0{,}400\ \text{W}}{4\pi\,(15{,}0\ \text{m})^2} = 1{,}415\times10^{-4}\ \text{W/m}^2 . \quad \text{(iv)}$$

La puissance reçue par le micro est alors

$$\begin{aligned} P_{\text{micro}} &= 1{,}415\times10^{-4}\ \text{W/m}^2 \times 2{,}011\times10^{-4}\ \text{m}^2 \\ &= 2{,}84\times10^{-8}\ \text{W} . \end{aligned} \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier les clés

L'intensité dépend du carré de l'amplitude, selon l'équation 3.16 :

$$I = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 s_{\text{m}}^2 . \quad \text{(v)}$$

De plus, l'amplitude de pression peut être calculée à partir de l'équation 3.7 :

$$\Delta p_{\text{m}} = v\rho\omega s_{\text{m}} \Rightarrow s_{\text{m}} = \frac{\Delta p_{\text{m}}}{v\rho\omega} . \quad \text{(vi)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons l'équation (vi) dans l'équation (v), puis nous isolons Δp_{m} :

$$I = \frac{1}{2}v\rho\omega^2\left(\frac{\Delta p_{\text{m}}}{v\rho\omega}\right)^2 = \frac{(\Delta p_{\text{m}})^2}{2v\rho}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta p_{\text{m}} &= \sqrt{2I\,\rho v} \\ &= \sqrt{2\times1{,}415\times10^{-4}\times343\times1{,}21} \\ \Delta p_{\text{m}} &= 0{,}343\ \text{Pa} . \end{aligned} \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La puissance reçue par le micro est beaucoup plus faible que la puissance émise par la source. Lorsqu'on exprime l'intensité en fonction de l'amplitude de pression, celle-ci ne dépend pas de la fréquence angulaire du son. Remarquez que la variation de pression est beaucoup plus faible que la pression atmosphérique normale (p = 101,325 kPa).

Le niveau sonore

L'oreille humaine est sensible à des sons ayant une large gamme d'intensité sonore, de 1×10^{-12} W/m^2 jusqu'à 10 W/m^2. Pour traiter une si grande variation de l'intensité, il est utile d'utiliser une échelle logarithmique. On obtient alors le *niveau sonore*. Dans le SI, on mesure le niveau sonore en bels, en l'honneur de l'inventeur britannique Alexander Graham Bell (1847-1922). Habituellement, le niveau sonore est plutôt exprimé en décibels (dB). Pour un son dont l'intensité est I, le niveau sonore β est

$$\beta = 10\,\text{dB}\,\log\frac{I}{I_0} , \quad (3.19)$$

où I_0 est une intensité de référence. Dans le cas du son, cette valeur de référence est de $I_0 = 1\times10^{-12}$ W/m^2, ce qui représente approximativement l'intensité du *seuil d'audibilité*, c'est-à-dire la limite d'un son qu'une oreille humaine moyenne peut entendre. Le tableau 3.4 présente quelques exemples de niveaux sonores.

MISE EN GARDE

Comme le niveau sonore est une échelle logarithmique, on ne peut pas additionner deux niveaux sonores lorsque deux sons sont entendus en même temps. Dans ce cas, on doit additionner les intensités sonores (en W/m^2), puis calculer le niveau sonore du son résultant.

TABLEAU 3.4

Quelques exemples de niveaux sonores, à une distance approximativement égale à 1 m

Source	β (dB)
Seuil d'audibilité	0
Bibliothèque silencieuse	30
Chuchotement	40
Conversation	65
Circulation automobile	75
Aspirateur	85
Rame de métro	90
Marteau-piqueur	100
Seuil de la douleur	120
Petit avion	140
Moteur d'avion à réaction	160

EXEMPLE 3.4 Deux bruits superposés

Un aspirateur émet un son à 84,0 dB. Un camion passe dans la rue, ce qui produit près de l'aspirateur un son de 80,0 dB. Quel est le niveau sonore du bruit résultant ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\beta_1 = 84{,}0$ dB	β
$\beta_2 = 80{,}0$ dB	

Identifier la clé

Nous ne pouvons pas additionner directement des niveaux sonores. Nous devons plutôt calculer les intensités sonores. La réciproque du logarithme est l'exposant :

$$\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Rightarrow I = I_0\ 10^{\beta/10}\ . \qquad \text{(i)}$$

L'intensité résultante est la somme des intensités :

$$I = I_1 + I_2\ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons l'intensité de chaque bruit :

$$I_1 = (1{,}00\times10^{-12}\ \text{W/m}^2)\ 10^{84{,}0/10}$$
$$= 2{,}51\times10^{-4}\ \text{W/m}^2$$

$$I_2 = (1{,}00\times10^{-12}\ \text{W/m}^2)\ 10^{80{,}0/10}$$
$$= 1{,}00\times10^{-4}\ \text{W/m}^2\ .$$

Nous additionnons les deux intensités pour obtenir l'intensité totale :

$$I = 2{,}51\times10^{-4}\ \text{W/m}^2 + 1{,}00\times10^{-4}\ \text{W/m}^2$$
$$= 3{,}51\times10^{-4}\ \text{W/m}^2\ . \qquad \text{(iii)}$$

Nous calculons le niveau sonore :

$$\beta = 10\ \text{dB}\log\left(\frac{3{,}51\times10^{-4}\ \text{W/m}^2}{1{,}00\times10^{-12}\ \text{W/m}^2}\right) = 85{,}5\ \text{dB}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le niveau sonore augmente très peu lorsque deux sons semblables se superposent. Dans le cas de deux sons identiques qui se superposent, l'intensité est doublée, ce qui fait augmenter le niveau sonore de 10 log 2 = 3,0 dB. Comme le son du camion a un niveau sonore plus faible que le niveau sonore de l'aspirateur, le niveau sonore doit augmenter de moins de 3 dB, ce qui est bien le cas.

3.5 L'interférence des ondes sonores

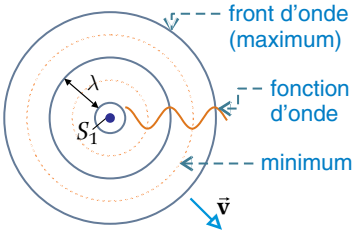


FIGURE 3.14
Une source sonore S_1 émet une onde sphérique. La position des maximums et des minimums de déplacement est indiquée.

Deux ondes sonores ayant la même fréquence produisent des interférences lorsqu'elles se superposent, comme dans le cas des ondes transversales sur une corde. Pour analyser ce phénomène, on considère deux petites sources sonores qui émettent une onde à la même fréquence et à la même amplitude.

Prenons d'abord une source S_1 qui émet une onde sphérique, comme à la figure 3.14. Cette figure montre les fronts d'onde à un instant t avec une représentation de la fonction d'onde. Chaque front d'onde indique un maximum de la fonction d'onde. Les lignes en pointillé, à mi-chemin entre deux fronts d'onde, indiquent les positions de minimum de la fonction d'onde.

On place une deuxième source S_2, ayant la même fréquence (donc la même longueur d'onde) et la même amplitude. La figure 3.15a illustre les fronts d'onde issus des deux sources. On obtient une interférence constructive aux endroits où deux maximums de déplacement se superposent et aux endroits où deux minimums se superposent. À ces endroits, l'amplitude résultante sera maximale, ce qui fait que l'intensité sonore (qui dépend du carré de l'amplitude) sera

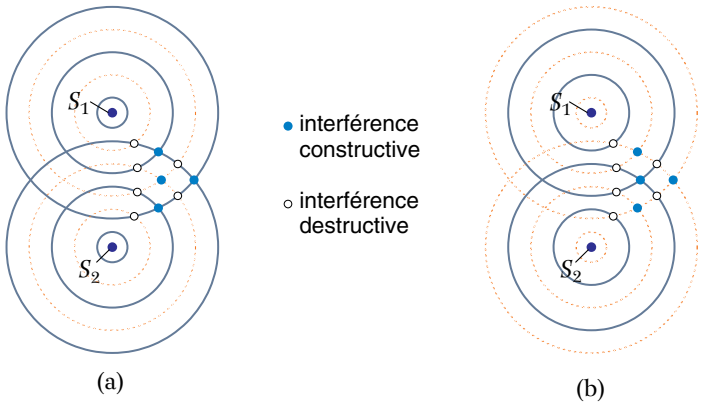


FIGURE 3.15

(a) La superposition de deux ondes sphériques produit des interférences. (b) Après une demi-période, les maximums ont été remplacés par des minimums, et inversement. La position des interférences constructives et destructives ne change pas.

maximale. Pour obtenir une interférence destructive (un déplacement résultant nul), il faut qu'un maximum se superpose à un minimum de l'autre onde. Dans ce cas, l'amplitude de l'onde sonore résultante sera minimale, et l'intensité du son sera très faible.

La figure 3.15a donne la position des fronts d'onde à un temps t. Les deux ondes se propagent de façon radiale de telle sorte que le rayon des fronts d'onde augmente. Après une demi-période, les maximums ont été remplacés par des minimums, et les minimums ont été remplacés par les maximums, comme le montre la figure 3.15b. Cependant, les points où il y a une interférence constructive (lorsque deux maximums ou deux minimums se superposent) sont les mêmes. De même, les endroits où il y a une interférence destructive (lorsqu'un maximum se superpose à un minimum) n'ont pas bougé.

Pour trouver la position des interférences constructives et des interférences destructives, on suppose qu'un détecteur est placé à un point $\mathcal{P}$, situé à une distance r_1 de la première source et à une distance r_2 de la deuxième source, comme à la figure 3.16. Le déplacement produit par chaque source à la position du point $\mathcal{P}$ est donné par la fonction d'onde relative à chaque source :

$$\begin{aligned} s_1 &= s_m \sin(kr_1 - \omega t + \phi_1) = s_m \sin(\Phi_1) \\ s_2 &= s_m \sin(kr_2 - \omega t + \phi_2) = s_m \sin(\Phi_2)\,. \end{aligned} \tag{3.20}$$

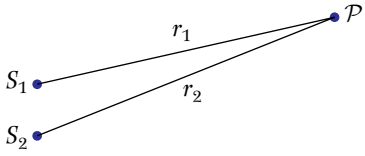


FIGURE 3.16

Deux sources sonores produisent des sons. Un détecteur placé au point $\mathcal{P}$ mesure une interférence sonore.

Ici, ϕ_1 et ϕ_2 représentent les constantes de phase de chaque source, et Φ_1 et Φ_2 représentent la phase de chaque onde à la position du point $\mathcal{P}$.

Comme dans le cas de la superposition des ondes sur une corde, l'onde résultante est obtenue en appliquant le principe de superposition, c'est-à-dire qu'on additionne les deux déplacements :

$$\begin{aligned} s &= s_1 + s_2 = s_m\left[\sin(kr_1 - \omega t + \phi_1) + \sin(kr_2 - \omega t + \phi_2)\right] \\ &= 2s_m \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \sin(kr_{moy} - \omega t + \phi_{moy})\,, \end{aligned} \tag{3.21}$$

où $r_{moy} = (r_2 + r_1)/2$ et $\phi_{moy} = (\phi_1 + \phi_2)/2$. L'onde résultante est une onde progressive dont l'amplitude (le terme devant la fonction sinusoïdale qui dépend du temps) dépend du déphasage $\Delta\Phi$ entre les deux ondes (la différence de phase) :

$$\text{amplitude} = \left| 2s_m \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \right| . \tag{3.22}$$

Dans le présent cas, le déphasage est

$$\Delta\Phi = k\,(r_2 - r_1) + (\phi_2 - \phi_1) = \frac{2\pi\Delta r}{\lambda} + (\phi_2 - \phi_1) . \tag{3.23}$$

La différence de la distance parcourue par les deux ondes, $\Delta r = r_2 - r_1$, est appelée la *différence de marche*.

Comme dans le cas présenté à la section 2.8, l'amplitude de l'onde résultante dépend de la différence de phase $\Delta\Phi$ entre les deux ondes sonores. L'amplitude est maximale lorsque $\cos(\Delta\Phi/2) = \pm 1$, donc :

Condition d'interférence constructive

$$\Delta\Phi = 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) . \tag{3.24}$$

Les deux ondes sonores sont alors en phase au point $\mathcal{P}$, et on obtient une *interférence constructive*.

L'amplitude de l'onde résultante est nulle lorsque $\cos(\Phi/2) = 0$, c'est-à-dire que

Condition d'interférence destructive

$$\Delta\Phi = (2m+1)\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) . \tag{3.25}$$

Les deux ondes sonores sont en opposition de phase, et l'interférence est destructive.

Lorsque les deux sources sont identiques, $\phi_2 = \phi_1$, et le type d'interférence obtenue au point $\mathcal{P}$ dépend uniquement de la différence de marche et de la longueur d'onde des ondes sonores :

$$\text{interférence constructive} : \Delta r = m\lambda \tag{3.26}$$

$$\text{interférence destructive} : \Delta r = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda . \tag{3.27}$$

Pour $\Delta r = 0$, les deux ondes parcourent la même distance, et l'interférence est constructive, quelle que soit la longueur d'onde. Les valeurs de m positives correspondent aux positions plus près de la source S_1, alors que les valeurs négatives correspondent à des positions plus près de S_2.

Défi animé 3.1
L'intensité sonore produite par deux haut-parleurs est-elle constante quand on se déplace parallèlement à ceux-ci ?

REMARQUE

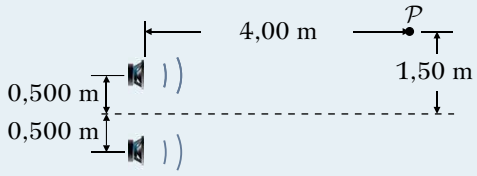
On a supposé que les deux ondes ont la même amplitude au point $\mathcal{P}$ pour simplifier l'analyse mathématique. Lorsque les ondes ont des amplitudes différentes, l'amplitude ne sera pas égale à $2s_m$ dans le cas d'une interférence constructive. Cependant, l'amplitude sera quand même maximale. De même, l'amplitude ne sera pas nulle dans le cas d'une interférence destructive, mais elle sera quand même minimale.

EXEMPLE 3.5 L'interférence sonore

Deux haut-parleurs émettent une onde sonore identique. Ils sont séparés par une distance de 1,00 m, dans une pièce où le module de la vitesse du son est de 343 m/s. Une personne est placée au point $\mathcal{P}$ devant les haut-parleurs, comme le montre la figure ci-dessous.

a. Quelle est la plus petite fréquence pour que l'auditeur entende un son d'intensité maximale ?

b. Quelle est la plus petite fréquence pour que l'auditeur entende un son d'intensité minimale ?



SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 3.17 illustre le schéma de la situation, avec les distances r_1 et r_2.

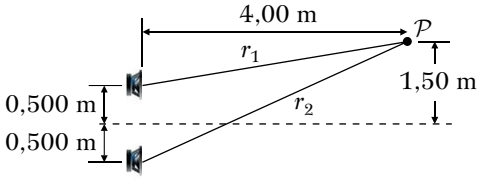


FIGURE 3.17
Le schéma de la situation pour l'exemple 3.5

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\phi_2 = \phi_1$	f_{min}
$v = 343$ m/s	

En se référant à la géométrie de la figure 3.17, nous calculons les distances r_1 et r_2 :

$$r_1 = \sqrt{(4{,}00\text{ m})^2 + (1{,}00\text{ m})^2} = 4{,}123\text{ m} \qquad \text{(i)}$$

$$r_2 = \sqrt{(4{,}00\text{ m})^2 + (2{,}00\text{ m})^2} = 4{,}472\text{ m}\,. \qquad \text{(ii)}$$

La différence de marche est donc

$$\Delta r = r_2 - r_1 = 4{,}472 - 4{,}123\text{ m} = 0{,}349\text{ m} = 0{,}35\text{ m}\,. \qquad \text{(iii)}$$

SOLUTION a.

Identifier la clé

L'intensité est maximale lorsque l'interférence est constructive. Comme les sources sont initialement en phase, la condition d'interférence est donnée par l'équation 3.27 :

$$\Delta r = m\lambda = \frac{mv}{f} \Rightarrow f = \frac{mv}{\Delta r}\,. \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

La plus petite fréquence correspond à $m = 1$:

$$f_{\text{min}} = \frac{1 \times 343\text{ m/s}}{0{,}349\text{ m}} = 983\text{ Hz} = 0{,}98\text{ kHz}\,.$$

(réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

L'intensité est minimale dans le cas d'une interférence destructive :

$$\Delta r = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{v}{f}$$

$$\Rightarrow f = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{v}{\Delta r}\,. \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

La fréquence minimale correspond à $m = 0$, de telle sorte que le terme entre parenthèses est minimal :

$$f_{\text{min}} = \frac{1}{2}\,\frac{343\text{ m/s}}{0{,}349\text{ m}} = 491\text{ Hz} = 0{,}49\text{ kHz}\,.$$

(réponse)

Valider la réponse

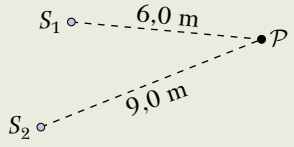
Les réponses ont seulement deux chiffres significatifs, puisque le calcul de Δr fait perdre un chiffre significatif. Dans la partie **a.**, la fréquence minimale ne correspond pas à $m = 0$, car cette valeur de m est une position pour laquelle $r_1 = r_2$, alors que selon la figure 3.17, $r_2 > r_1$. Les fréquences obtenues sont dans l'intervalle des sons audibles par un humain.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 3.3

Les sources S_1 et S_2, illustrées à la figure suivante, produisent des ondes sonores identiques, ayant une longueur d'onde λ. Indiquez quel type d'interférence est observé au point $\mathcal{P}$ si :

a. $\lambda = 1{,}0$ m ;

b. $\lambda = 2{,}0$ m.



3.6 Les battements

Nous avons étudié la superposition de deux sons de même fréquence à la dernière section. Si deux sons de même fréquence sont émis, vous allez entendre un seul son, avec une intensité sonore qui dépend du déphasage entre les deux ondes sonores à la position que vous occupez. Si les deux sons ont des fréquences très différentes, vous allez entendre deux sons distincts. Si les deux sons ont des fréquences légèrement différentes (par exemple une différence de 2 Hz), vous allez entendre un seul son ayant une fréquence constante, mais l'intensité va varier : un son intense, puis un son faible, puis un son intense, et ainsi de suite. Le résultat est une succession d'interférences constructives et d'interférences destructives, qu'on appelle des *battements*.

Pour analyser les battements, on suppose qu'à un point $\mathcal{P}$, il y a deux ondes sonores, de même amplitude s_m, de fréquences légèrement différentes f_1 et f_2, qui se superposent :

$$s_1 = s_m \sin(k_1 x - \omega_1 t + \phi_1) = s_m \sin(\tilde{\phi}_1 - \omega_1 t)$$

$$s_2 = s_m \sin(k_2 x - \omega_2 t + \phi_2) = s_m \sin(\tilde{\phi}_2 - \omega_2 t)\,,$$

où $\tilde{\phi} = kx + \phi$. On veut étudier la superposition des deux ondes pour un point fixe, de telle sorte que la partie spatiale de l'onde n'a pas d'intérêt. On peut simplifier l'analyse en supposant que $\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_2 = \pi/2$. Les deux ondes s'écrivent alors

$$s_1 = s_m \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega_1 t\right) = s_m \cos(\omega_1 t)$$

$$s_2 = s_m \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega_2 t\right) = s_m \cos(\omega_2 t)\,,$$

où on a utilisé l'identité trigonométrique $\cos(\alpha) = \sin(\pi/2 - \alpha)$. L'onde résultante est

$$s = s_1 + s_2 = s_m \left[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right].$$

En utilisant l'identité trigonométrique

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta + \alpha}{2}\right),$$

l'onde résultante peut s'écrire

$$s = 2s_{\mathrm{m}} \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)\, t\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)\, t\right] \tag{3.28}$$

$$= \left[2s_{\mathrm{m}} \cos(\omega_{\mathrm{mod}} t)\right] \cos(\omega_{\mathrm{moy}} t)\,, \tag{3.29}$$

où $\omega_{\mathrm{moy}} = (\omega_2 + \omega_1)/2$ est la fréquence angulaire moyenne, et $\omega_{\mathrm{mod}} = (\omega_2 - \omega_1)/2$ est appelée la *fréquence angulaire de modulation*.

Les battements se produisent lorsque les deux fréquences angulaires sont très rapprochées ($\omega_1 \approx \omega_2$). Dans ce cas, ω_{moy} est à peu près égale à ω_1 et à ω_2. Par contre, la fréquence angulaire de modulation est très faible. Selon l'équation 3.29, le déplacement oscille rapidement à une fréquence angulaire ω_{moy}, avec une amplitude (le terme entre crochets) qui oscille lentement, à une fréquence angulaire ω_{mod}.

La figure 3.18 illustre le déplacement des molécules d'air en fonction du temps. On observe un son ayant une fréquence $f_{\mathrm{moy}} = \omega_{\mathrm{moy}}/(2\pi) = (f_1 + f_2)/2$. La ligne pointillée donne la variation de l'amplitude du son en fonction du temps. On dit que l'amplitude est *modulée*. La modulation s'effectue à une fréquence $f_{\mathrm{mod}} = \omega_{\mathrm{mod}}/(2\pi) = |f_2 - f_1|/2$. Vous entendez une succession de sons intenses et de sons faibles, c'est-à-dire des battements.

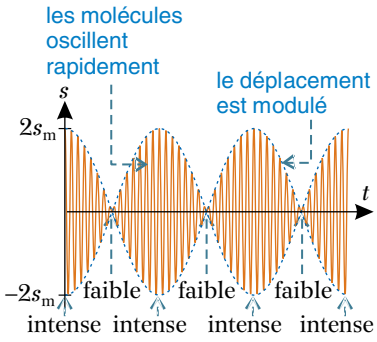


FIGURE 3.18
Le déplacement résultant correspond à une oscillation rapide ayant une fréquence f_{moy}, modulée par une fréquence lente f_{mod}.

L'intensité du son est proportionnelle au carré de l'amplitude du déplacement. L'intensité est donc maximale lorsque $\cos(\omega_{\mathrm{mod}} t) = \pm 1$. Pour chaque cycle de la modulation, l'intensité est maximale à deux reprises. La *fréquence de battements* est donc le double de la fréquence de modulation :

$$f_{\mathrm{batt}} = |f_2 - f_1|\,. \tag{3.30}$$

Fréquence de battements

Le phénomène des battements est très utile lorsqu'on veut accorder un instrument de musique. Pour accorder une corde de guitare à la bonne fréquence, on fait résonner un diapason, ayant la fréquence désirée f_1, et la corde, ayant une fréquence f_2. En changeant la tension dans la corde, on change sa fréquence. Plus la fréquence de la corde de guitare s'approche de la fréquence du diapason, plus la fréquence de battements diminue. Lorsqu'on n'entend plus de battement, les deux fréquences sont égales et la corde de guitare est accordée.

Pour entendre des battements, il faut que les fréquences des deux sons soient légèrement différentes, jusqu'à une différence de fréquence d'environ 10 Hz. Si la différence de fréquence est plus élevée, la variation d'intensité varie trop rapidement pour que le système oreille-cerveau soit capable de le percevoir. Dans ce cas, on observe la superposition des ondes sonores comme deux notes différentes.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 3.4

Une corde de guitare oscille en même temps qu'un diapason qui oscille à une fréquence de 440 Hz. Vous entendez 2,0 battements par seconde. Quelle est la fréquence du son produit par la corde de guitare ?

3.7 Les ondes sonores stationnaires et les instruments de musique

Les modes normaux d'une colonne d'air

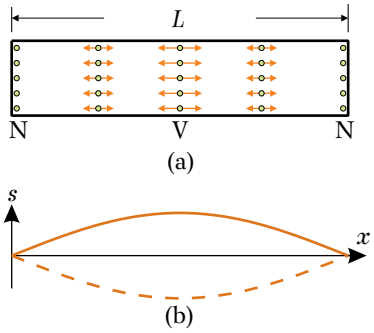


FIGURE 3.19
(a) Les molécules dans une colonne d'air oscillent dans le premier mode d'oscillation. Les extrémités sont des nœuds, et le centre est un ventre. (b) La représentation de l'onde stationnaire dans un tuyau fermé.

Dans la figure 3.19, une onde sonore fait osciller les molécules d'air contenues dans un tuyau fermé aux deux extrémités. Lorsque l'onde arrive à une extrémité, les molécules ne peuvent pas osciller librement. L'onde est réfléchie, et l'extrémité est un nœud de déplacement. La superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie génère une onde stationnaire. La figure 3.19 montre le premier mode d'oscillation du tuyau fermé. Les deux extrémités sont des nœuds de déplacement, alors que le centre est un ventre. La figure 3.19b représente l'onde stationnaire au moyen du graphique du déplacement en fonction de la position. L'onde stationnaire de ce tuyau a la même forme que l'onde stationnaire sur une corde tendue, car dans chaque cas, les extrémités sont des nœuds.

Un tuyau fermé à ses deux extrémités produit un son peu audible à l'extérieur de ce dernier. Pour entendre le son, il faut placer un détecteur à l'intérieur d'un tel tuyau. Pour cette raison, on utilise des tuyaux avec une ou deux extrémités ouvertes. Les instruments de musique à vent sont de tels tuyaux. Par exemple, l'orgue (*voir la photo en ouverture de chapitre*) est constitué d'un grand nombre de tuyaux ouverts aux deux extrémités. Des sons sont produits lorsqu'un soufflet pousse de l'air dans un tuyau, ce qui génère une onde sonore stationnaire dans celui-ci.

Pour qu'une onde sonore stationnaire soit générée dans une colonne d'air, l'onde doit satisfaire aux conditions aux limites. Ainsi, l'onde doit avoir un nœud de déplacement vis-à-vis d'une extrémité fermée, et l'onde doit avoir un ventre de déplacement dans le cas d'une extrémité ouverte.

REMARQUE

En réalité, l'extrémité ouverte n'est pas tout à fait un ventre, car les molécules à l'extérieur exercent une force sur les molécules à l'intérieur, à cause de la pression atmosphérique. Nous négligeons cet effet.

La figure 3.20 montre les trois premiers modes d'oscillation dans le cas d'un tuyau fermé aux deux extrémités (un tuyau fermé-fermé), d'un tuyau ouvert à une extrémité (un tuyau ouvert-fermé) et d'un tuyau ouvert aux deux extrémités (un tuyau ouvert-ouvert). Les molécules vis-à-vis d'une extrémité fermée ne peuvent pas osciller, car la paroi du tuyau les en empêche. Ceci produit un nœud vis-à-vis d'une extrémité fermée. Dans le cas d'une extrémité ouverte, les molécules peuvent osciller librement, ce qui génère un ventre d'oscillation.

Pour le tuyau fermé-fermé, l'onde stationnaire a la même forme que l'onde stationnaire d'une onde sur une corde, car les deux extrémités sont des nœuds de déplacement. Le mode n a n ventres et $(n + 1)$ nœuds. On obtient l'onde stationnaire du tuyau ouvert-ouvert en permutant les nœuds et les ventres. Le mode n du tuyau ouvert-ouvert possède n nœuds et $(n + 1)$ ventres. La distance entre deux

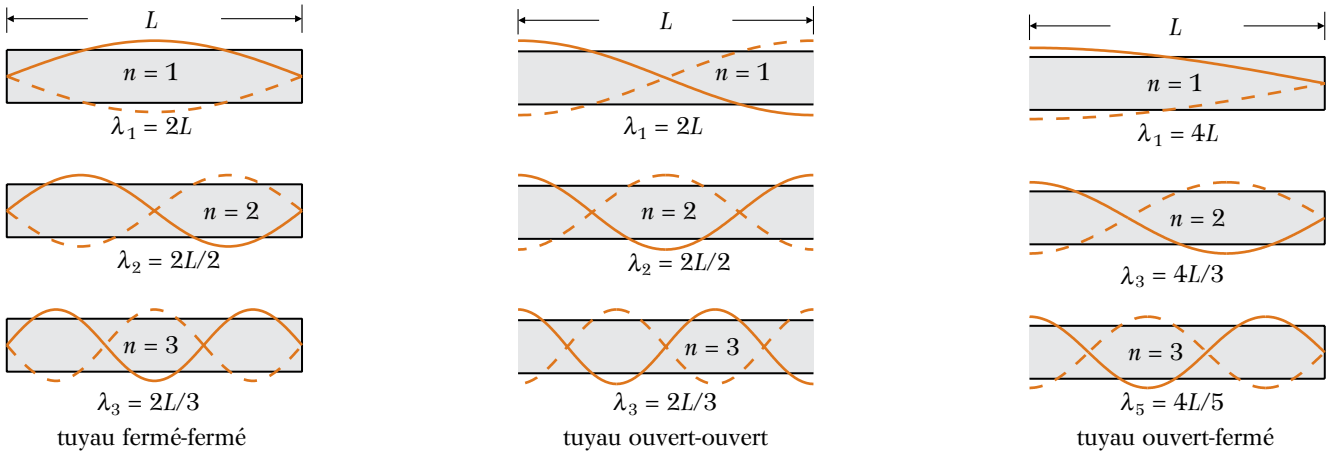


FIGURE 3.20
Les trois premiers modes d'oscillation pour un tuyau fermé-fermé, pour un tuyau ouvert-ouvert et pour un tuyau ouvert-fermé

ventres est de $\lambda/2$. La longueur d'onde λ et la fréquence $f = v/\lambda$ du mode n d'un tuyau fermé-fermé ou d'un tuyau ouvert-ouvert sont alors

$$\begin{cases} \lambda_n = \dfrac{2L}{n} \\ f_n = \dfrac{nv}{2L} = nf_1 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3.31}$$

Mode pour un tuyau fermé-fermé ou ouvert-ouvert

Comme dans le cas des modes d'oscillation d'une corde, le mode n correspond au n^{e} harmonique, étant donné que la fréquence du mode n est égale à la fréquence fondamentale f_1 multipliée par n.

Le tuyau ouvert-fermé présente une onde stationnaire différente. Dans le premier mode, la longueur du tuyau correspond seulement au quart de la longueur d'onde. Pour le deuxième mode, la longueur d'onde n'est pas deux fois plus petite, mais plutôt trois fois plus petite que la longueur d'onde du mode fondamental. En notant n le n^{e} mode, on obtient la longueur d'onde ainsi que la fréquence de l'harmonique correspondant :

$$\begin{cases} \lambda_{2n-1} = \dfrac{4L}{2n-1} \\ f_{2n-1} = (2n-1)\dfrac{v}{4L} = (2n-1)\, f_1 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3.32}$$

Mode pour un tuyau ouvert-fermé

Les fréquences d'oscillation d'un tuyau ouvert-fermé sont des multiples impairs de la fréquence fondamentale. On dit alors que seuls les harmoniques impairs sont présents. Comme le montre la figure 3.20, le mode n d'un tuyau ouvert-fermé possède n nœuds et n ventres. De plus, le mode n représente le $(2n - 1)^{e}$ harmonique.

MISE EN GARDE

On numérote les modes en utilisant l'ordre n, où $n = 1, 2, \ldots$. Lorsqu'on parle d'un harmonique, on indique une fréquence égale à un multiple de la fréquence fondamentale.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 3.5

Un tube ouvert-ouvert oscille dans son mode fondamental à une fréquence de 800 Hz.

a. Si vous fermez l'une des extrémités, quelle est la fréquence du mode fondamental ?

b. Si vous fermez les deux extrémités, quelle est la fréquence du mode fondamental ?

EXEMPLE 3.6 Des modes successifs

Un tuyau ouvert-fermé peut osciller à une fréquence de 150 Hz et à une fréquence de 250 Hz. Il n'y a pas d'onde stationnaire avec une fréquence entre 150 Hz et 250 Hz. Le module de la vitesse du son est de 343 m/s.

a. Quelle est la fréquence fondamentale du tuyau ?

b. Quelle est la longueur du tuyau ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Comme il n'y a pas d'onde stationnaire avec une fréquence entre les deux fréquences données, cela indique qu'il y a deux modes consécutifs, soit le mode n et le mode $n+1$.

Connues	Inconnues
$f_{2n-1} = 150$ Hz	f_1
$f_{2n+1} = 250$ Hz	L
$v = 343$ m/s	

SOLUTION a.

Identifier la clé

Les fréquences d'un tuyau ouvert-fermé sont données par l'équation 3.32 :

$$f_{2n-1} = (2n-1)f_1 \qquad \text{(i)}$$

$$f_{2n+1} = (2n+1)f_1 \,. \qquad \text{(ii)}$$

Si nous soustrayons ces deux équations, nous obtenons

$$f_{2n+1} - f_{2n-1} = \big[(2n+1)-(2n-1)\big]f_1 = 2f_1 \,.$$

La fréquence fondamentale est alors

$$f_1 = \frac{f_{2n+1} - f_{2n-1}}{2} = \frac{250\text{ Hz} - 150\text{ Hz}}{2} = 50{,}0\text{ Hz}\,.$$

(réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

La fréquence fondamentale d'un tuyau ouvert-fermé est

$$f_1 = \frac{v}{4L} \Rightarrow L = \frac{v}{4f_1}\,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous trouvons

$$L = \frac{343\text{ m/s}}{4 \times 50{,}0\text{ Hz}} = 1{,}72\text{ m}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Les fréquences du tuyau données dans l'énoncé sont bien des multiples impairs de la fréquence fondamentale calculée en a. L'ordre de grandeur semble correct.

Les instruments de musique

Les instruments de musique produisent des sons en générant des ondes stationnaires. Pour un instrument à cordes comme la guitare, le piano ou le violon, des cordes sont fixées aux extrémités. Lorsqu'on pince, frappe ou frotte la corde, une perturbation est produite, et des ondes sinusoïdales se propagent le long

de la corde. Pour les ondes ayant une fréquence répondant à la condition de l'équation 2.47,

$$f_n = \frac{nv}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}, \tag{3.33}$$

une onde stationnaire est générée. L'oscillation de la corde produit une oscillation des molécules d'air à la même fréquence f, donc une onde sonore ayant une fréquence f.

MISE EN GARDE

Dans l'équation 3.33, le symbole v représente le module de la vitesse des ondes sur la corde, qui dépend de la tension F et de la masse linéique μ de la corde, et non le module de la vitesse du son.

Les instruments comme la guitare et le violon sont munis de cordes ayant à peu près la même longueur et la même tension, de telle sorte que le manche n'est pas soumis à une contrainte de torsion. Pour produire des fréquences différentes, les cordes ont des diamètres inégaux, ce qui produit des masses linéiques différentes. En plaçant un doigt sur une corde, le musicien réduit la longueur de la corde pouvant osciller, ce qui change la fréquence de l'onde stationnaire sur la corde. Dans le cas du piano, on utilise un grand nombre de cordes ayant des longueurs et des tensions différentes, ce qui donne à l'instrument un registre très étendu.

Lorsqu'une guitare et un violon jouent la même note, on remarque très facilement la différence entre les deux sons. La note entendue correspond à la fréquence du mode fondamental, c'est-à-dire le premier harmonique. En général, une corde n'oscille pas selon un mode unique, mais plutôt selon la superposition d'un grand nombre de modes. L'équation 3.33 donne les fréquences possibles. Le son entendu est alors la superposition d'un grand nombre d'harmoniques, ayant des amplitudes différentes. Selon qu'on pince une corde ou qu'on la frotte avec un archet, l'oscillation résultante sera différente, même si le mode fondamental est le même. La figure 3.21 montre la différence entre l'onde produite par un violon et l'onde produite par un diapason, qui produit une onde sinusoïdale.

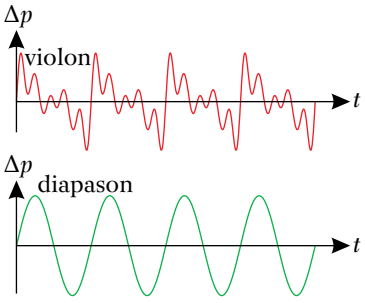


FIGURE 3.21
La comparaison des ondes produites par un violon et par un diapason ayant le même mode fondamental

Les instruments à vent produisent des sons en générant des ondes sonores dans une colonne d'air. Lorsque de l'air est envoyé dans un tuyau d'orgue, une onde sonore stationnaire est générée. Dans le cas d'un tuyau ouvert aux deux extrémités, le mode fondamental et les modes supérieurs se superposent, ce qui produit une superposition de tous les harmoniques. Si le tuyau est fermé à une extrémité, le tuyau produit une fréquence deux fois plus petite, mais l'onde résultante ne possède que des harmoniques impairs. L'orgue utilise un grand nombre de tuyaux de différentes tailles pour obtenir des fréquences différentes.

La plupart des instruments à vent sont munis de trous sur le côté, ce qui permet de changer la longueur de la colonne d'air dans laquelle se produit l'onde stationnaire. Le musicien joue différentes notes en laissant ouverts ou en bouchant les trous avec ses doigts ou au moyen de clés dans le cas de trous trop éloignés.

Plusieurs instruments à vent sont munis d'une anche qui permet de produire l'oscillation initiale. Pour jouer une note, le musicien fait osciller l'anche. Dans le cas d'une clarinette, l'anche ferme et ouvre successivement l'ouverture de la

colonne durant l'oscillation. La clarinette est donc un tuyau ouvert-fermé. Selon l'équation 3.32, les modes d'oscillation supérieurs produisent seulement des harmoniques impairs.

Le saxophone et le hautbois sont aussi des tuyaux ouverts-fermés, mais ils sont coniques plutôt que cylindriques. L'analyse des fréquences associées aux modes d'oscillation est plus complexe. Les modes supérieurs produisent approximativement des harmoniques pairs et impairs.

L'orgue et la flûte produisent un son lorsque de l'air est soufflé le long de la colonne. Ce sont des colonnes ouvertes aux deux extrémités. Tous les harmoniques sont produits, qu'ils soient pairs ou impairs.

La fréquence des ondes stationnaires dans une colonne d'air dépend du module de la vitesse du son à l'intérieur de la colonne d'air. Comme nous l'avons vu à la section 3.2, le module de la vitesse du son change légèrement lorsque la température change. La fréquence du son produit par un instrument à vent est influencée par les variations de température.

Les instruments à percussion produisent des sons en faisant osciller des membranes ou des plaques. Lorsqu'on frappe un tambour, cela produit une oscillation en deux dimensions, qui est réfléchie lorsqu'elle arrive au pourtour de la membrane. La superposition des ondes réfléchies produit une onde stationnaire en deux dimensions, qui est la superposition de plusieurs modes d'oscillation. Lorsque la membrane oscille dans un mode particulier, il y a des lignes nodales, formées des points de la surface ayant un déplacement nul (*voir la figure 3.22*). L'analyse des modes d'oscillation d'une membrane fait intervenir des fonctions plus complexes que les fonctions trigonométriques. Les fréquences des modes supérieurs ne sont pas des multiples de la fréquence fondamentale, donc ce ne sont pas des harmoniques. Pour cette raison, le son d'un tambour est moins agréable que le son d'un instrument à cordes ou d'un instrument à vent.

Voir l'animation de l'oscillation d'une membrane circulaire.

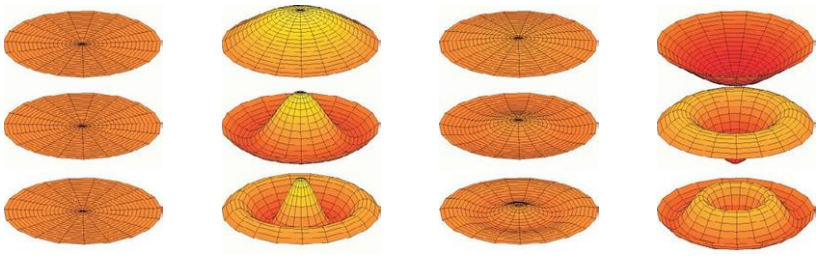


FIGURE 3.22
Trois modes d'oscillation d'une membrane circulaire

3.8 L'effet Doppler

La fréquence d'un son entendu dépend du mouvement de la source et du mouvement du détecteur par rapport à l'air. C'est l'effet Doppler. Par exemple, lorsque vous êtes immobile et qu'une ambulance s'approche, vous entendez la sirène avec une fréquence plus élevée. Lorsque l'ambulance passe devant vous puis s'éloigne, la fréquence entendue est plus faible.

L'effet Doppler a d'abord été prédit par le physicien autrichien Christian Johann Doppler (1803-1853) dans un article publié en 1843, dans lequel il avance l'hypothèse que la couleur observée d'une étoile dépend du mouvement relatif de l'étoile par rapport à la Terre. Cet effet étant un phénomène ondulatoire, Doppler mentionne qu'il doit aussi se produire dans le cas des ondes sonores. L'effet Doppler sonore a été vérifié expérimentalement en 1845 par le météorologue néerlandais Christoph Buys Ballot (1817-1890). Il a demandé à des trompettistes de jouer une note précise dans un train en mouvement pour enregistrer le son perçu par un détecteur immobile.

La fréquence d'un son observé dépend de la vitesse du détecteur et de la vitesse de la source, y compris le sens. Pour cette raison, on utilise une méthode vectorielle, avec les composantes des vitesses par rapport à l'axe des x, placé dans la même direction que la vitesse du son entre la source et le détecteur.

La source et le détecteur immobiles

Pour commencer l'analyse de l'effet Doppler, on suppose une source S immobile, qui émet une onde sonore à une fréquence f. L'onde est une onde sphérique, qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$. Les fronts d'onde sont illustrés à la figure 3.23. La distance entre deux fronts d'onde successifs représente la longueur d'onde. Un détecteur D est placé sur l'axe des x, à droite de S. Selon lui, la vitesse du son est $\vec{\mathbf{v}} = v_x\vec{\boldsymbol{\imath}}$. Il observe la fréquence $f = v_x/\lambda$.

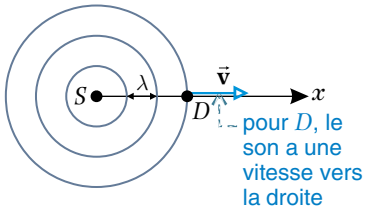


FIGURE 3.23
Les fronts d'onde lorsque S et D sont immobiles

Le détecteur en mouvement

On suppose maintenant que le détecteur s'éloigne de la source en se déplaçant vers la droite à une vitesse constante $\vec{\mathbf{v}}_D = v_{D,x}\vec{\boldsymbol{\imath}}$, comme le montre la figure 3.24. Comme la source demeure immobile, les fronts d'onde sont de nouveau des sphères concentriques séparées par la distance $\lambda = v/f$.

Pour le détecteur, le son a une vitesse différente de $\vec{\mathbf{v}}$. Si le détecteur s'éloigne de la source, il mesure une vitesse du son plus faible. Selon le résultat obtenu à la section 4.6 du tome 1,

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{son}/D} = \vec{\mathbf{v}}_{\text{son/air}} + \vec{\mathbf{v}}_{\text{air}/D} = \vec{\mathbf{v}}_{\text{son/air}} - \vec{\mathbf{v}}_{D/\text{air}} ,$$

car $\vec{\mathbf{v}}_{D/\text{air}} = -\vec{\mathbf{v}}_{\text{air}/D}$. Soit $\vec{\mathbf{v}}'$ la vitesse du son par rapport à D et $\vec{\mathbf{v}}$ la vitesse du son par rapport à l'air. Pour la composante x de la vitesse du son, on obtient

$$v'_x = v_x - v_{D,x} . \tag{3.34}$$

Le détecteur entend une fréquence f', différente de f:

$$f' = \frac{v'_x}{\lambda} = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x/f}$$

$$f' = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x} f . \tag{3.35}$$

Dans le cas où le détecteur s'éloigne, $v_{D,x} > 0$ et $f' < f$. Le son entendu par le détecteur a une fréquence plus faible que la fréquence produite par la source. Si le détecteur s'approche de la source, $v_{D,x} < 0$ et $f' > f$. Le son entendu par le détecteur a une fréquence plus élevée que la fréquence du son selon la source S. L'équation 3.35 est valable quel que soit le sens du mouvement du détecteur.

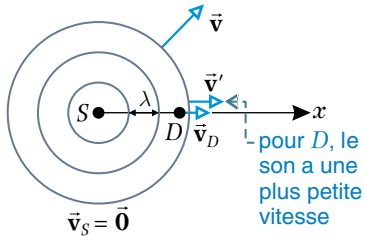


FIGURE 3.24
Le détecteur s'éloigne de la source à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}_D$. Pour D, la vitesse du son est plus faible.

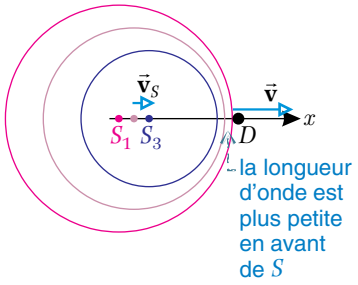


FIGURE 3.25
Trois fronts d'onde et la position de la source durant leur émission. La longueur d'onde est plus faible en avant de la source en mouvement, et la longueur d'onde est plus petite derrière.

La source en mouvement

On suppose maintenant que le détecteur est immobile, alors que la source a une vitesse $\vec{\mathbf{v}}_S = v_{S,x}\vec{\boldsymbol{\imath}}$. Le mouvement change le profil des fronts d'onde. En effet, les fronts d'onde, toujours circulaires, n'ont plus le même centre. La figure 3.25 montre les fronts d'onde et leur centre, c'est-à-dire la position de la source au moment de leur émission. La longueur d'onde λ' (la distance entre deux fronts d'onde consécutifs) est plus petite en avant de la source et plus grande en arrière de la source.

Durant une période $T = 1/f$, le son parcourt une distance $v_x T$, et la source parcourt une distance $v_{S,x}T$. La longueur d'onde en avant de la source est la différence entre ces deux distances :

$$\lambda' = v_x T - v_{S,x} T = \frac{v_x - v_{S,x}}{f}\,. \tag{3.36}$$

Comme le détecteur est immobile, il observe que la vitesse du son est $\vec{\mathbf{v}}$. Le mouvement de la source n'a pas d'influence sur la vitesse du son, car cette vitesse dépend uniquement des propriétés du milieu. La fréquence observée par le détecteur est alors

$$f' = \frac{v_x}{\lambda'} = \frac{v_x}{v_x - v_{S,x}} f\,. \tag{3.37}$$

L'équation 3.37 est valable lorsque la source s'approche ou lorsqu'elle s'éloigne du détecteur. Quand la source s'approche du détecteur, $v_{S,x} > 0$, la longueur d'onde du son est plus faible et $f' > f$. Le son entendu est plus aigu. Quand la source s'éloigne, $v_{S,x} < 0$, la longueur d'onde est plus grande et $f' < f$. Le son entendu par D est plus grave.

La source et le détecteur en mouvement

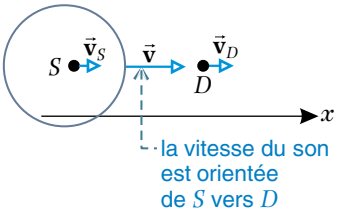


FIGURE 3.26
La source et le détecteur sont en mouvement. Le son se déplace de la source vers le détecteur.

Lorsque la source a une vitesse $\vec{\mathbf{v}}_S$ et que le détecteur a une vitesse $\vec{\mathbf{v}}_D$, ces vitesses étant mesurées par rapport à l'air (comme à la figure 3.26), le détecteur mesure une vitesse du son $\vec{\mathbf{v}}' = \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}}_D$, et la longueur d'onde est $\lambda' = (v_x - v_{S,x})/f$. Pour une onde sonore émise à une fréquence f, le détecteur mesure une fréquence f' :

$$f' = \frac{v'_x}{\lambda'} = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x - v_{S,x}} f\,, \tag{3.38}$$

où le son a une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = v_x\vec{\boldsymbol{\imath}}$. La fréquence détectée est plus élevée lorsque la source et le détecteur se rapprochent l'un de l'autre, et elle est plus faible lorsqu'ils s'éloignent l'un de l'autre.

REMARQUE

L'équation 3.38 permet de calculer la fréquence détectée lorsque l'air est immobile. Si l'air est en mouvement (lorsqu'il y a du vent), on doit se placer dans le référentiel où l'air est immobile pour que l'équation 3.38 puisse être utilisée.

La stratégie suivante indique les étapes importantes pour bien appliquer l'équation 3.38.

STRATÉGIE 3.1 L'effet Doppler

Illustrer la situation

Vous devez faire un schéma de la situation, en illustrant la source S et le détecteur D. Indiquez la vitesse de la source $\vec{\mathbf{v}}_S$, la vitesse du détecteur $\vec{\mathbf{v}}_D$ ainsi que la vitesse du son $\vec{\mathbf{v}}$, orientée de la source vers le détecteur. Tracez l'axe des x dans la même direction que la vitesse du son $\vec{\mathbf{v}}$ (dans le même sens ou dans le sens opposé).

Décortiquer le problème

Écrivez les composantes des vitesses : une composante est positive lorsque le vecteur a le même sens que l'axe, et la composante est négative lorsque le vecteur est dans le sens opposé à l'axe des x. Indiquez clairement les quantités connues et les quantités recherchées.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 3.38 :

$$f' = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x - v_{S,x}} f \, .$$

Résoudre le problème

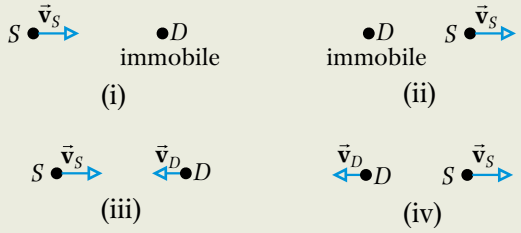
Vous devez résoudre l'équation pour trouver les quantités inconnues.

Valider la réponse

La fréquence détectée doit être plus élevée lorsque la source et le détecteur se rapprochent l'un de l'autre, et elle doit être plus faible lorsqu'ils s'éloignent l'un de l'autre.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 3.6

La figure suivante montre quatre situations où une source se déplace à la même vitesse $\vec{\mathbf{v}}_S$ et émet une onde sonore ayant une fréquence f. Classez les situations selon un ordre croissant de la fréquence perçue par le détecteur.



EXEMPLE 3.7 C'est une urgence...

Une voiture se déplace à une vitesse de 13,0 m/s, orientée vers le nord. Une ambulance s'approche de la voiture en se déplaçant à 25,0 m/s dans le sens inverse. L'automobiliste entend le son de la sirène à une fréquence de 5,00 kHz. Quelle est la fréquence de la sirène pour les passagers de l'ambulance ? Le module de la vitesse du son est de 343 m/s.

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 3.27 illustre la situation. La vitesse du son $\vec{\mathbf{v}}$ est orientée de l'ambulance (S) vers la voiture (D). Nous avons placé l'axe des x dans le même sens que la vitesse du son.

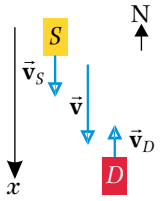


FIGURE 3.27
Le schéma de la situation pour l'exemple 3.7

Décortiquer le problème

Les composantes v_x et $v_{S,x}$ sont positives, étant donné que ces vitesses sont dans le même sens que celui de l'axe des x. La composante $v_{D,x}$ est négative.

Connues		Inconnue
$v_x = 343$ m/s	$v_{S,x} = 25{,}0$ m/s	f
$v_{D,x} = -13{,}0$ m/s	$f' = 5{,}00$ kHz	

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 3.38 :

$$f' = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x - v_{S,x}} f \Rightarrow f = \frac{v_x - v_{S,x}}{v_x - v_{D,x}} f' . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons les données dans l'équation (i) :

$$f = \left[\frac{343 \text{ m/s} - 25{,}0 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - (-13{,}0 \text{ m/s})}\right] 5{,}00 \text{ kHz} = 4{,}47 \text{ kHz} .$$

(réponse)

Valider la réponse

La fréquence f' doit être plus élevée que la fréquence f, car l'ambulance et la voiture se déplacent l'une vers l'autre.

L'effet Doppler et l'écho

Les ondes sonores peuvent être utilisées pour mesurer la vitesse des objets en mouvement. Un objet 1 envoie une onde sonore vers un objet 2 (*voir la figure 3.28*). Celui-ci réfléchit l'onde, qui revient vers l'objet 1. Il y a un premier effet Doppler lorsque l'onde incidente se déplace de l'objet 1 (la source) vers l'objet 2 (le détecteur). Il y a un deuxième effet Doppler lorsque l'onde réfléchie revient vers l'objet 1. Pour cette deuxième étape, l'objet 2 devient la source, et le détecteur est l'objet 1. À la position de l'objet 1, il y a une superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie ayant une fréquence différente à cause de l'effet Doppler. Cette superposition produit des battements.

Plusieurs animaux utilisent des ondes sonores comme méthode de détection. C'est le cas des chauves-souris qui émettent des ultrasons à des fréquences autour de 80 kHz. Les ondes sont réfléchies par les objets qui les entourent. Les

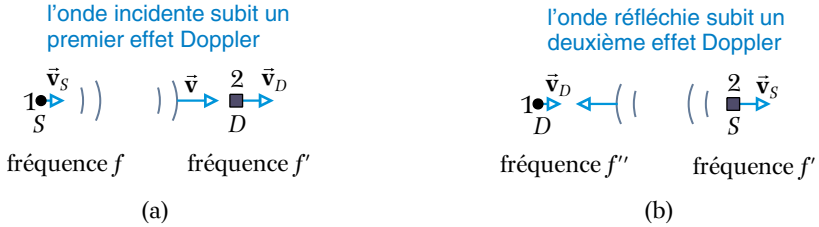


FIGURE 3.28
(a) Une onde sonore est émise par l'objet 1 à une fréquence f. L'objet 2 perçoit une fréquence f'.
(b) L'onde ayant une fréquence f' est réfléchie et revient vers l'objet 1, qui perçoit une fréquence f''.

chauves-souris peuvent connaître la vitesse de leurs proies par rapport à elles en détectant un ultrason (réfléchi par la proie) ayant une fréquence différente de la fréquence de l'ultrason initial.

Des systèmes de détection par ultrasons peuvent faire partie d'un système d'alarme. La source d'ondes sonores est immobile, comme les murs qui réfléchissent les ultrasons. Si une personne se déplace dans la pièce, les ondes réfléchies par cette personne auront une fréquence différente à cause de l'effet Doppler. Lorsque les ondes réfléchies retournent au système d'alarme, celui-ci détecte des battements entre les ondes initiales et les ondes réfléchies.

L'effet Doppler est aussi utilisé en médecine pour mesurer la vitesse du sang dans les artères et les veines, et pour mesurer la vitesse des tissus du cœur.

EXEMPLE 3.8 Un système d'alarme

Un système d'alarme émet des ultrasons ayant une fréquence de 30,00 kHz. Un cambrioleur marche à une vitesse de 1,20 m/s, orientée vers le système d'alarme. Le module de la vitesse du son est de 343,0 m/s.

a. Quelle est la fréquence de l'onde incidente perçue par le cambrioleur ?
b. Quelle est la fréquence de l'onde réfléchie perçue par le système d'alarme ?
c. Quelle est la fréquence de battements observée par le système d'alarme ?

SOLUTION a.

Illustrer la situation

La figure 3.29 illustre le schéma de la situation pour l'onde incidente. La source est le système d'alarme, et le détecteur est le cambrioleur. Nous plaçons l'axe des x vers la droite, dans le même sens que la vitesse de l'onde incidente.

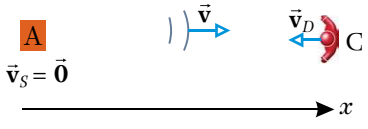


FIGURE 3.29
Le schéma de la situation pour la partie a

Décortiquer le problème

La source est immobile, alors que le détecteur a une composante $v_{D,x} < 0$, étant donné que sa vitesse a un sens opposé à l'axe des x.

Connues	Inconnue
$f = 30{,}00$ kHz	f'
$v_x = 343{,}0$ m/s	
$v_{S,x} = 0{,}0$ m/s	
$v_{D,x} = -1{,}20$ m/s	

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 3.38 :

$$f' = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x - v_{S,x}} f \,. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous trouvons

$$f' = \left[\frac{343{,}0 \text{ m/s} - (-1{,}20 \text{ m/s})}{343{,}0 \text{ m/s} - 0{,}0 \text{ m/s}}\right] 30{,}00 \text{ kHz}$$
$$= 30{,}105 \text{ kHz} = 30{,}11 \text{ kHz} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La fréquence f' doit être plus élevée, car le cambrioleur se déplace vers le système d'alarme.

SOLUTION b.

Illustrer la situation

La figure 3.30 (*voir la page suivante*) illustre le schéma de la situation pour l'onde réfléchie. La source est maintenant le cambrioleur, et le détecteur est le système d'alarme.

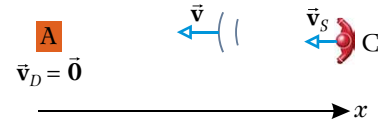


FIGURE 3.30
Le schéma de la situation pour la partie b

Décortiquer le problème
Nous avons gardé l'axe des x orienté vers la droite. La composante v_x est négative, étant donné que la vitesse du son est dans le sens opposé à l'axe des x.

Connues	Inconnue
$f' = 30{,}105$ kHz	f''
$v_x = -343{,}0$ m/s	
$v_{D,x} = 0{,}0$ m/s	
$v_{S,x} = -1{,}20$ m/s	

Identifier la clé
La **clé** est de nouveau l'équation 3.38 :

$$f'' = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x - v_{S,x}} f' . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème
Nous obtenons

$$f'' = \left[\frac{-343{,}0 \text{ m/s} - 0{,}0 \text{ m/s}}{-343{,}0 \text{ m/s} - (-1{,}20 \text{ m/s})}\right] 30{,}105 \text{ kHz}$$
$$= 30{,}21 \text{ kHz} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse
De nouveau, l'effet Doppler produit une fréquence plus élevée, puisque la source s'approche du détecteur.

SOLUTION c.
Décortiquer le problème
Il y a deux ondes vis-à-vis du système d'alarme : l'onde incidente ayant une fréquence f et l'onde réfléchie ayant une fréquence f''.

Connues	Inconnue
$f = 30{,}00$ kHz $\quad f'' = 30{,}21$ kHz	f_{batt}

Identifier la clé
La **clé** est l'équation 3.30 :

$$f_{\text{batt}} = |f'' - f| . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème
La fréquence de battements est

$$f_{\text{batt}} = |30{,}21 \text{ kHz} - 30{,}00 \text{ kHz}| = 0{,}21 \text{ kHz} .$$

(réponse)

Valider la réponse
Nous répondons bien à la question. La réponse n'a que deux chiffres significatifs par suite de la soustraction.

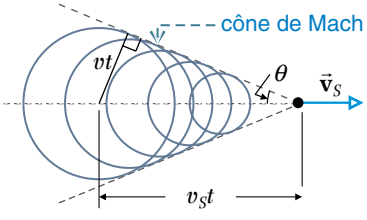


FIGURE 3.31
Lorsque la source se déplace plus rapidement que le son, cela produit une onde de choc. Les fronts d'onde se superposent et forment le cône de Mach.

3.9 La vitesse supersonique et les ondes de choc

L'équation 3.38 est valable lorsque la source se déplace à une vitesse plus faible que la vitesse du son. Dans le cas contraire, les fronts d'onde forment un cône appelé le *cône de Mach* (*voir la figure 3.31*). Les ondes se superposent et produisent une interférence constructive le long du cône. C'est une onde de choc.

Le rayon d'un front d'onde est vt, où v est le module de la vitesse du son et t, le temps depuis la formation du front d'onde. Ce rayon augmente moins rapidement que la distance parcourue par la source $d_S = v_S t$. On peut calculer l'angle du cône :

$$\sin\theta = \frac{vt}{v_S t} = \frac{v}{v_S} . \qquad (3.39)$$

Plus le module de la vitesse de la source est grand, plus le cône a un petit angle. Le rapport v/v_S est appelé le *nombre de Mach*. La figure 3.32 montre un avion militaire américain qui se déplace à une vitesse plus grande que la vitesse du son. Lorsque l'onde de choc arrive au sol, on entend un *boom supersonique*, un son très fort, causé par la superposition de plusieurs fronts d'onde composant le cône de Mach.

Une onde de choc est aussi produite lorsqu'un projectile est lancé à l'aide d'une arme à feu, car la vitesse de la balle de fusil excède la vitesse du son. De même, le claquement d'un fouet se produit lorsque l'extrémité d'un long fouet a une vitesse qui dépasse la vitesse du son. Le son entendu dans ces situations est le boom supersonique.

Les ondes de choc se produisent pour d'autres types d'onde. Lorsqu'un bateau a une vitesse qui dépasse la vitesse des ondes sur l'eau, un triangle se forme derrière le bateau. Ce triangle est l'équivalent du cône de Mach pour une onde en deux dimensions. De même pour la lumière, lorsqu'une particule se déplace plus rapidement que la vitesse de la lumière dans un milieu*, cela produit une onde de choc lumineuse (un flash lumineux), qu'on appelle le *rayonnement de Tcherenkov*, en l'honneur de physicien russe Pavel Tcherenkov (1904-1990). Ce dernier a été l'un des premiers scientifiques à étudier ce phénomène. L'effet Tcherenkov permet la détection de certaines particules comme les neutrinos.

FIGURE 3.32
Un avion se déplace plus rapidement que le son. L'onde de choc est visible, car la variation rapide de la pression d'air produit une condensation de molécules d'eau, ce qui forme un brouillard.

* Aucune particule ne peut avoir une vitesse plus grande que la vitesse de la lumière dans le vide. Par contre, dans un milieu comme l'eau, puisque la lumière a une vitesse plus faible que dans le vide, une particule peut avoir une vitesse plus grande.

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié les ondes sonores, qui sont des ondes mécaniques longitudinales.

LES RÉSULTATS

- La fonction d'onde d'une **onde sonore** donne le déplacement s d'une particule située à la position x au temps t.
- Une **onde sonore sinusoïdale** est décrite par :

$$s = s_{\text{m}} \sin(kx \mp \omega t + \phi) .$$

- L'oscillation des particules produit une **variation de pression :**

$$\Delta p = -B \frac{\partial s}{\partial x} .$$

- L'onde se déplace à une **vitesse** ayant un module v :

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad \text{(général)}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad \text{(gaz parfait)}$$

$$v = 20{,}05\sqrt{T} \qquad \text{(air) .}$$

- L'**intensité sonore** est la puissance moyenne transportée par l'onde par unité d'aire :

$$I \equiv \frac{P}{A} .$$

- Pour une onde sinusoïdale :

$$I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 s_{\text{m}}^2 .$$

- L'intensité diminue lorsqu'on s'éloigne de la source. Pour une source ponctuelle,

$$I = \frac{P_S}{4\pi r^2} .$$

- Le **niveau sonore** représente l'intensité sonore sur une échelle logarithmique :

$$\beta = 10 \text{ dB} \log\left(\frac{I}{I_0}\right), \quad \text{où } I_0 = 1 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2 .$$

- Deux ondes sonores de même fréquence qui se superposent produisent une **interférence**.
- Le type d'interférence dépend du **déphasage** entre les deux ondes :

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi \Delta r}{\lambda} + (\phi_2 - \phi_1)$$

interférence constructive : $\Delta\Phi = 2m\pi$

interférence destructive : $\Delta\Phi = (2m+1)\,\pi$.

- Pour deux sources identiques, $\phi_2 = \phi_1$ et le type d'interférence dépend seulement de la **différence de marche** $\Delta r = r_2 - r_1$:

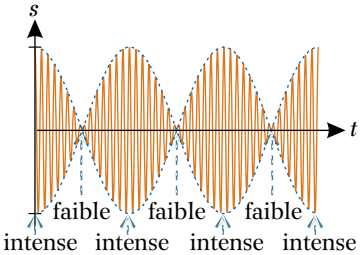
interférence constructive : $\Delta r = m\lambda$

interférence destructive : $\Delta r = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$.

LES APPLICATIONS

Lorsque deux ondes ont des fréquences légèrement différentes, la superposition donne des **battements**, une interférence qui varie dans le temps. La fréquence de battements est

$$f_{\text{batt}} = |f_2 - f_1| .$$



Des **ondes stationnaires** sont produites dans un tuyau de longueur L.

- Pour un **tuyau fermé-fermé** ou un **tuyau ouvert-ouvert** :

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$f_n = \frac{nv}{2L} = nf_1 .$$

Tous les harmoniques sont présents.

- Pour un tuyau ouvert-fermé :

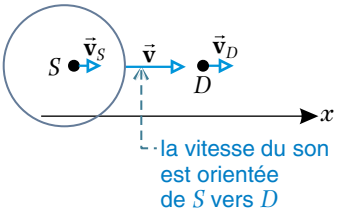
$$\lambda_{2n-1} = \frac{4L}{2n-1}$$

$$f_{2n-1} = (2n-1)\frac{v}{4L} = (2n-1)f_1 .$$

Seuls les harmoniques impairs sont présents.

Une source sonore en mouvement produit un son à une fréquence f. Ce son est observé à une fréquence f' différente à cause de l'**effet Doppler** :

$$f' = \frac{v_x - v_{D,x}}{v_x - v_{S,x}} f .$$



QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

À moins d'avis contraire, utilisez les données suivantes pour l'air :

$$v_{son} = 343 \text{ m/s}$$
$$\rho = 1{,}21 \text{ kg/m}^3 .$$

Section 3.1 La description des ondes sonores

Q1 La figure 3.33 est un graphique du déplacement des molécules d'air en fonction de la position lorsqu'une onde sonore se déplace vers la gauche. Indiquez si les molécules aux points indiqués se déplacent vers la droite, vers la gauche ou si elles sont immobiles.

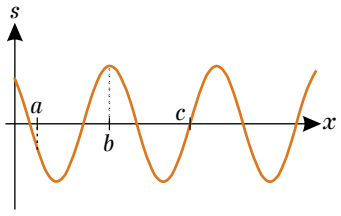


FIGURE 3.33 • Question 1

Q2 Un haut-parleur émet un son initial à une fréquence f_0 et à une amplitude s_m. La fréquence est doublée ($f = 2f_0$), sans que l'amplitude de l'onde soit changée. Indiquez comment vont changer les grandeurs physiques suivantes :

a. le module de la vitesse de l'onde ;

b. la fréquence angulaire ;

c. la longueur d'onde ;

d. le nombre d'onde ;

e. le module de compressibilité ;

f. l'amplitude de pression.

E3 L'oreille humaine peut entendre des sons ayant des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz. Quel est l'intervalle de longueurs d'onde correspondante ?

E4 Les dauphins utilisent l'écholocalisation, basée sur l'émission d'ultrasons, pour localiser des obstacles, des proies, ou pour communiquer entre eux. Un dauphin émet un son à une fréquence de 30 kHz, à une profondeur dans l'eau de mer où la vitesse du son est de $1{,}52 \times 10^3$ m/s. Déterminez la longueur d'onde des ondes émises.

E5 Un appareil d'échographie utilise des ondes sonores de 4,5 MHz dans le but d'examiner des tissus humains. Le son se propage dans les tissus à une vitesse de 1,5 km/s.

a. Quelle est la longueur d'onde de ces ondes sonores dans l'air, où la vitesse du son est de 343 m/s ?

b. Quelle est la longueur d'onde de ces ondes sonores dans les tissus ?

E6 Une onde sonore ayant une fréquence de 500 Hz se déplace dans l'eau à une vitesse de 1,48 km/s. L'onde a une amplitude de 76 nm. Quelle est l'amplitude de pression de cette onde ?

E7 Une onde sonore est décrite par la fonction d'onde de pression :

$$\Delta p(x\,;t) = 0{,}90 \text{ Pa} \cos(2{,}11\pi x - 700\pi t - \pi/4) ,$$

où la position est mesurée en mètres et le temps, en secondes. Le module de compressibilité du milieu est égal à 142 kPa.

a. Quelles sont la fréquence et la longueur d'onde ?

b. Quelle est la vitesse de l'onde ?

c. Calculez l'amplitude du déplacement s_m.

P8 Une onde sonore se déplace dans l'air vers la gauche, à une vitesse dont le module est de 338 m/s. L'onde a une amplitude de 3,6 µm et une fréquence de 1,30 kHz. Le module de compressibilité du milieu est égal à 142 kPa. À $t = 0$, les molécules dont la position d'équilibre est $x = 0$ ont un déplacement de 2,5 µm, et elles se déplacent vers la position d'équilibre.

a. Quelle est la longueur d'onde ?

b. Écrivez la fonction d'onde.

c. Quelle est l'amplitude de pression ?

d. Écrivez la fonction d'onde de pression.

Section 3.2 La vitesse du son

Q9 Pour s'amuser, un homme respire de l'hélium contenu dans un ballon de fête, de telle sorte que sa voix devient aiguë. Expliquez ce phénomène.

E10 En se réchauffant, le volume d'un gaz augmente de 25 %, alors que son module de compressibilité augmente de 15 %. Par quel facteur v'/v le module de la vitesse du son dans ce gaz sera-t-il modifié ?

E11 Soumis à une augmentation de pression de 100 kPa à 120 kPa, le volume d'un gaz est réduit à 79,1 % de sa valeur initiale. De plus, le module de la vitesse du son est de 440 m/s.

a. Quel est le module de compressibilité de ce gaz ?

b. Quelle est la masse volumique de ce gaz ?

E12 La membrane d'un haut-parleur produisant une note constante oscille selon l'équation $s(t) = 1{,}35 \text{ mm} \sin(320\pi t + \pi)$, où t est mesuré en secondes. L'air devant la membrane est à une température de 26,0 °C, et son module de compressibilité est de 141,9 kPa. L'onde se déplace vers la droite.

a. Quelle est la fréquence de l'onde ?

b. Quel est le module de la vitesse du son ?

c. Quelle est la longueur d'onde ?

d. Quelle est l'amplitude de pression ?

e. Écrivez l'équation du déplacement de l'air devant le haut-parleur.

E13 Des molécules d'air oscillent avec une amplitude de 0,644 mm devant la membrane d'un gros haut-parleur oscillant à une fréquence de 60,5 Hz. Donnez l'équation de l'onde sonore émergeant de ce haut-parleur, celui-ci étant à l'origine d'un axe des x dans l'air à 25,0 °C.

E14 De l'air a une température initiale de 20,0 °C. L'air est chauffé, jusqu'à ce que le module de la vitesse du son ait augmenté de 5,00 %. Quelle est la nouvelle température de l'air ?

E15 Par une chaude journée où il fait 30 °C, un orage éclate et vous observez les éclairs. À l'aide d'un chronomètre, vous constatez que le son de la foudre tombée à l'horizon vous est parvenu 5,45 s après que vous avez aperçu l'éclair. À quelle distance de vous la foudre est-elle tombée ?

E16 Sur Mars, la température peut chuter jusqu'à –143 °C la nuit, dans une atmosphère composée presque exclusivement de dioxyde de carbone. À quelle vitesse se propage une onde sonore dans ces conditions ?

P17 Une tige métallique a une longueur de 8,90 m. On frappe l'extrémité de la tige avec un marteau. Ceci produit un son qui se transmet à la fois dans l'air et dans la tige. Un microphone, placé à l'autre extrémité de la tige, mesure deux sons séparés par un intervalle de 24,5 ms. Le module de la vitesse du son dans l'air est de 343 m/s. Quel est le module de la vitesse du son dans la tige ?

P18 On laisse tomber un caillou dans un puits. On entend le caillou frapper l'eau après 1,99 s. La température à l'intérieur du puits est de 12,0 °C. On suppose que la résistance de l'air est négligeable. Quelle est la profondeur du puits ?

Section 3.3 Les ondes en deux et en trois dimensions

Q19 La chute d'un caillou provoque des ondes à la surface de l'eau. Quelle forme auraient les ondes si celles-ci se déplaçaient plus rapidement selon l'axe des x et moins rapidement selon l'axe des y, avec l'axe des y perpendiculaire à l'axe des x ?

E20 Une source sonore est placée à l'origine d'un système de coordonnées. L'onde émise est une onde sphérique ayant une fréquence de 300 Hz. À un temps t, quel est le déphasage entre les points (1,50 ; 2,30 ; 0,00) m et (–2,00 ; 1,00 ; 0,00) m ?

E21 Une source sonore est placée sur l'axe des x. Les points $x_1 = -1{,}20$ m et $x_2 = 7{,}40$ m reçoivent le même front d'onde sphérique en même temps.

a. À quelle position est située la source ?

b. Un point sur l'axe des y reçoit aussi l'onde en même temps que les deux autres points. Quelle est la coordonnée y du troisième point ?

P22 Pour localiser une source sonore, le cerveau perçoit le délai entre l'observation du son faite par chacune des oreilles. Si la source est directement devant vous, le délai est nul, alors que si l'objet est directement à gauche, le front d'onde frappe l'oreille droite après l'oreille gauche, avec un délai $\Delta t = d/v$, où d représente la distance entre les deux oreilles. Une onde plane, issue d'une source sonore, est incidente à un angle ϕ, comme le montre la figure 3.34. La distance entre les oreilles de la personne est de 17,0 cm, et son cerveau perçoit un délai de 0,38 ms entre les observations du front d'onde par chaque oreille. Quel est l'angle ϕ ?

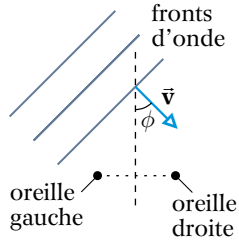


FIGURE 3.34 • Problème 22

Section 3.4 L'intensité sonore

Q23 En négligeant l'amortissement ou la perte d'énergie, précisez de quelle manière évolue l'intensité de l'onde émise par une source en fonction de la distance parcourue r dans les cas suivants. S'agit-il d'une diminution selon $\frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}$, ou n'y a-t-il aucune diminution ?

a. Les ondes sont produites à la surface de l'eau par un objet tombé dans l'eau.

b. Une impulsion est émise sur une longue corde.

c. Le son provient de l'éclatement d'un feu d'artifice.

d. La lumière est émise par le Soleil.

e. Le son se propage le long d'une tige métallique.

Q24 Le niveau sonore d'un son peut-il être inférieur à 0 dB ?

E25 Les molécules des gaz de l'air se trouvant à une certaine distance d'une source sonore oscillent avec une amplitude de 12,4 µm. Quelle est l'amplitude d'oscillation des molécules se trouvant deux fois plus loin de la même source ?

E26 Tel un microphone, un tympan est une membrane mise en vibration par les ondes sonores qui le frappent. Pour un adulte, le tympan couvre une aire de 56,0 mm^2. Une personne se trouve à une distance de 5,00 m d'une source produisant une puissance sonore de 75,0 W.

a. Quelle est l'intensité sonore à la position de la personne ?

b. Quel est le niveau sonore ?

c. Quelle est la puissance sonore reçue par le tympan ?

E27 Montrez que l'échelle logarithmique du niveau sonore fait en sorte que lorsqu'on double la distance depuis une source sonore, le niveau sonore diminue d'environ 6 dB.

E28 Dans les milieux de travail très bruyants, les travailleurs doivent porter des bouchons pour protéger les oreilles. Un modèle de bouchon réduit le bruit de 23 dB. Soit I, l'intensité du bruit sans protection, et I_p, l'intensité du bruit avec les bouchons de protection.

a. Quel est le rapport des intensités I_p/I ?

b. Quel est le rapport des amplitudes de pression $\Delta p_{pm}/\Delta p_m$?

E29 Au centre d'un terrain de football, le son produit par une foule peu nombreuse et clairsemée est mesuré avec un sonomètre. Celui-ci indique 58,3 dB. Qu'indiquerait le sonomètre si la foule était trois fois plus nombreuse, chaque individu produisant en moyenne la même intensité sonore ?

E30 Une source produit un son ayant une fréquence de 100 Hz et un niveau sonore de 73,0 dB.

a. Quelle est l'intensité sonore ?

b. Quelle est l'amplitude de l'onde sonore ?

P31 Durant un festival de musique, le niveau sonore à une distance de 3,00 m d'un haut-parleur est de 120 dB. À quelle distance doit-on se placer pour que le niveau sonore soit de 90 dB ?

P32 Dans une usine, un travailleur est exposé simultanément au bruit d'un ventilateur et d'une pompe. À une position donnée, le niveau sonore associé au ventilateur est de 85,0 dB, et le niveau sonore associé à la pompe est de 82,0 dB.

a. Quelle est l'intensité sonore résultante ?

b. Quelle est l'amplitude de pression résultante ?

c. Quel est le niveau sonore résultant ?

Section 3.5 L'interférence des ondes sonores

Q33 Une onde sonore a une amplitude de déplacement s_m et une longueur d'onde λ. Un dispositif antibruit, utilisé entre autres dans certains écouteurs, émet une seconde onde sonore pour annuler l'onde initiale.

a. Quels sont l'amplitude de déplacement, la longueur d'onde et le sens de propagation nécessaires pour le deuxième son ?

b. Quelle est la différence de phase minimale entre les deux ondes pour que l'intensité sonore soit minimale ?

Q34 Deux sources S_1 et S_2 émettent des ondes sonores identiques. Les ondes ont la même longueur d'onde λ. Les sources sont séparées par une distance $d = 3\lambda/2$. On déplace un microphone M selon trois trajectoires différentes, comme le montre la figure 3.35. Déterminez le type d'interférence qu'on observe :

a. pour la trajectoire 1 ;

b. pour la trajectoire 2, vis-à-vis de S_1 ;

c. pour la trajectoire 3, où M est à égale distance des deux sources.

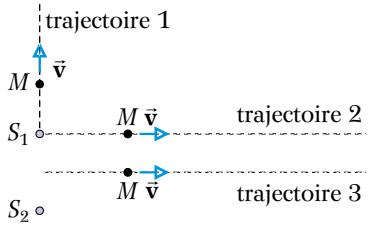


FIGURE 3.35 • Question 34

E35 Deux haut-parleurs sont placés face à face, séparés de 3,00 m l'un de l'autre. Ils produisent des ondes sonores identiques, à une fréquence de 250 Hz (*voir la figure 3.36*). À quelles distances du haut-parleur de gauche trouve-t-on des sites d'interférence constructive ? Considérez seulement les points sur le segment de droite entre les deux haut-parleurs.

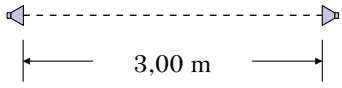


FIGURE 3.36 • Exercice 35

E36 Dans un liquide où la vitesse du son est inconnue, on place un microphone entre deux dispositifs sonores, oscillant à 32,50 kHz. La position initiale du microphone est choisie pour observer un minimum d'intensité sonore. On déplace le microphone le long de la ligne joignant les deux sources sur une distance de 19,13 cm. Durant ce déplacement, on observe exactement six minimums d'intensité sonore (la position finale correspond à un minimum). Quel est le module de la vitesse du son dans ce milieu ?

P37 Deux sources, émettant des ondes identiques à une longueur d'onde λ, sont séparées d'une distance $L = 2{,}00\ \lambda$. On trace un grand cercle, de rayon r, dont le centre correspond au point mitoyen entre les deux sources, comme le montre la figure 3.37 (*voir la page suivante*).

a. Quelle est la différence de marche au point $\mathcal{P}_1$?

b. Quelle est la différence de marche au point $\mathcal{P}_2$?

c. Combien de maximums d'intensité sonore observe-t-on le long du cercle ?

d. Combien de minimums d'intensité sonore observe-t-on le long du cercle ?

e. Si on double le rayon du cercle, combien de maximums d'intensité sonore observe-t-on le long du nouveau cercle ?

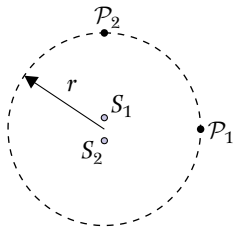


FIGURE 3.37 • Problème 37

P38 On place un microphone M à une distance $D = 0{,}50$ m vis-à-vis d'un haut-parleur. Un deuxième haut-parleur est placé à une distance $d = 70{,}0$ cm du premier (*voir la figure 3.38*). Les deux haut-parleurs émettent des ondes sonores identiques, ayant une fréquence de 1,50 kHz.

a. De quelle distance doit-on éloigner le microphone du premier haut-parleur pour observer un minimum d'intensité sonore ?

b. À partir de la position initiale, de quelle distance doit-on approcher le microphone du premier haut-parleur pour observer un maximum d'intensité sonore ?

P39 Deux sources émettent des ondes identiques ayant une fréquence de 440 Hz. Elles sont placées comme à la figure 3.38, où $d = 1{,}45$ cm. On déplace un microphone M, de l'infini jusqu'à la position de S_1.

a. À quelles distances D observe-t-on un minimum d'intensité ?

b. À quelle distance D observe-t-on un maximum d'intensité ?

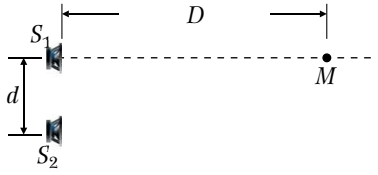


FIGURE 3.38 • Problèmes 38 et 39

P40 Deux haut-parleurs produisent des sons de même fréquence, mais en opposition de phase. Le premier haut-parleur est situé à l'origine, et la position du deuxième est $\vec{\mathbf{r}}_2 = 2{,}40\ \text{m}\,\vec{\boldsymbol{j}}$. Une personne se trouve à la position $\vec{\mathbf{r}}_p = (4{,}50\vec{\boldsymbol{i}} - 2{,}30\vec{\boldsymbol{j}})\ \text{m}$. Pour quelles fréquences entre 100 Hz et 1000 Hz la personne va-t-elle entendre un son très fort ?

Section 3.6 Les battements

Q41 On veut accorder la corde d'un instrument de musique en observant les battements produits par la superposition du son de la corde et du son d'un diapason ayant la fréquence recherchée. Quelle est la fréquence de battements lorsque la corde a la bonne fréquence ?

E42 À quelle fréquence entend-on les battements produits par la superposition des fréquences 800 Hz et 803 Hz ?

P43 Un accordeur de piano fait osciller simultanément une corde et un diapason. La fréquence du diapason est de 440,0 Hz. L'accordeur entend un battement ayant une fréquence de 2,5 Hz. En augmentant la tension dans la corde, il observe que la fréquence de battements augmente. Quelle est la fréquence initiale de la corde ?

Section 3.7 Les ondes sonores stationnaires et les instruments de musique

Q44 À l'occasion d'un spectacle en plein air présenté par un orchestre symphonique, la température diminue graduellement. Déterminez ce qui arrive à la fréquence des notes émises :

a. par les instruments à cordes ;

b. par les instruments à vent.

Q45 En soufflant dans une bouteille vide, vous pouvez produire un son. Vous ajoutez un peu d'eau dans la bouteille et soufflez de nouveau dans celle-ci pour produire un son. Le deuxième son a-t-il une fréquence plus élevée, plus basse ou semblable à la fréquence du premier son ?

Q46 L'onde stationnaire dans un tuyau a trois ventres et trois nœuds.

a. De quel type de tuyau s'agit-il ?

b. À quel harmonique cette onde stationnaire correspond-elle ?

Q47 La figure 3.39 montre quatre tuyaux différents. Classez les tuyaux par ordre croissant de leur fréquence fondamentale.

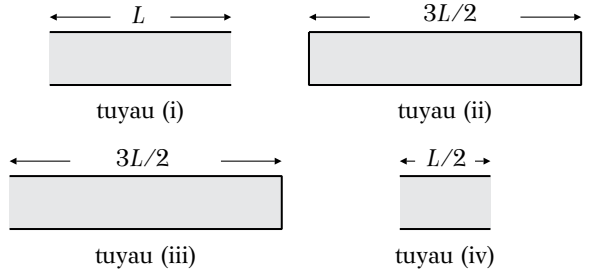


FIGURE 3.39 • Question 47

E48 En soufflant sur le bout d'un mince tube ouvert à ses deux extrémités, vous produisez une note stridente. Vous mesurez la longueur de ce tube et trouvez 26,5 mm. Quelle est la fréquence de la note entendue, en supposant qu'il s'agit du mode fondamental ?

E49 Un trombone à coulisse consiste en un tuyau de longueur variable dans lequel la colonne d'air est mise en vibration (les deux extrémités étant ouvertes). Le déplacement de la coulisse fait varier la longueur de la colonne d'air de 2,15 m à 2,95 m. À quelle gamme de fréquences le musicien a-t-il accès s'il peut faire vibrer la colonne d'air dans ses huit premiers modes dans toutes les positions de la coulisse ?

E50 Plusieurs bouteilles identiques sont remplies avec des quantités d'eau différentes et donnent des tonalités distinctes lorsqu'elles sont frappées avec un ustensile. Une bouteille remplie à la moitié de sa hauteur produit un son dont la fréquence fondamentale est de 661 Hz. Quelle est la fréquence fondamentale du son produit par une bouteille identique remplie au quart de sa hauteur ?

P51 Dans une expérience sur la vitesse du son, on fait varier le niveau d'eau dans un tuyau dont l'extrémité supérieure demeure ouverte. On place près de l'extrémité un petit haut-parleur qui produit une onde sonore ayant une fréquence de 500 Hz. On observe que la plus petite longueur produisant une onde stationnaire est $L = 17{,}4$ cm.

a. Quel est le module de la vitesse du son dans cette expérience ?

b. Quelle est la température de l'air ?

P52 En produisant du son dans un long tuyau fermé à l'un de ses bouts, vous trouvez un mode d'oscillation à 110 Hz. Vous augmentez graduellement la fréquence et trouvez un mode d'oscillation voisin à 154 Hz. Déterminez :

a. la longueur du tuyau ;

b. l'ordre n des deux modes que vous avez trouvés.

P53 Une corde, fixée à ses deux extrémités, a une masse de 61,4 g et une longueur de 1,10 m. Lorsqu'elle oscille dans son 6^{e} mode, elle fait osciller un tuyau dans son 4^{e} harmonique. La longueur du tuyau est de 76,0 cm.

a. Quelle est la fréquence du 4^{e} mode d'oscillation du tuyau ?

b. Quelle est la fréquence fondamentale de la corde ?

c. Quelle est la tension dans la corde ?

P54 On produit des ondes stationnaires sur une corde et dans un tuyau ouvert à une extrémité. La corde a une longueur de 70,0 cm, une masse linéique de 4,82 g/m et elle est soumise à une tension de 850 N. Le tuyau a une longueur de 42,9 cm. Quelle est la plus petite fréquence produisant un mode d'oscillation dans la corde et dans le tuyau de façon simultanée ?

Section 3.8 L'effet Doppler

Q55 La figure 3.40 montre une source sonore et deux observateurs en mouvement. La fréquence de la source est f_0. L'observateur de gauche observe une fréquence f_g et celui de droite observe une fréquence f_d. Classez ces fréquences par ordre croissant.

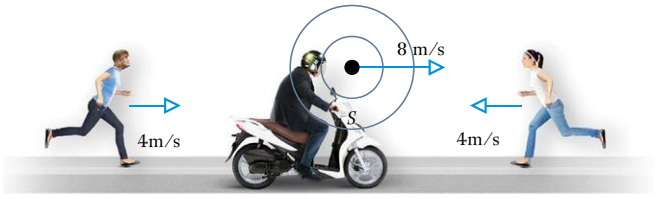


FIGURE 3.40 • Question 55

E56 Alors que vous voyagez en train, vous avez entendu maintes fois le sifflet du train retentir à 925 Hz. En approchant de la gare, vous entendez par la fenêtre le sifflet d'un train immobile, au loin, à la fréquence de 976 Hz. Quel est le module de la vitesse de votre train, exprimé en km/h ?

E57 Quelle est la vitesse d'une source pour que le son soit perçu par un observateur immobile à une fréquence deux fois plus élevée que la fréquence du son émis ?

E58 Un haut-parleur émettant deux fréquences distantes de 100 Hz est mis en mouvement sur un rail. À quelle vitesse doit-il se déplacer pour qu'un micro immobile à une extrémité du rail enregistre deux fréquences distantes de 120 Hz ?

P59 Maxime tente de déterminer le module de la vitesse d'une moto qu'il voit passer sur l'autoroute depuis son balcon. Maxime observe que la fréquence du son de la moto change, de 942 Hz à 823 Hz. Quel est le module de la vitesse de la moto ?

P60 Une ambulance se déplace à 70,0 km/h derrière votre voiture, qui se déplace dans le même sens à 50,0 km/h. L'ambulance est munie d'une sirène qui émet un son à une fréquence de 2,00 kHz.

a. À quelle fréquence percevez-vous le son de la sirène lorsque l'ambulance est derrière vous ?

b. L'ambulance vous dépasse et continue son chemin dans le même sens. À quelle fréquence percevez-vous le son de la sirène ?

P61 Les chauves-souris émettent des ultrasons et utilisent l'écho pour se diriger. Une chauve-souris, se déplaçant à 8,00 m/s vers un mur, émet un ultrason à une fréquence de 40,00 kHz.

a. Quelle est la fréquence de l'écho perçue par la chauve-souris ?

b. La chauve-souris capte aussi un écho ayant une fréquence de 41,00 kHz, provenant de la réflexion de l'ultrason

sur un insecte en mouvement. Quelle est la vitesse de l'insecte ?

P62 Sur le quai d'une gare, un voyageur immobile entend la sirène d'un train qui arrive, à une fréquence de 2 082 Hz. Le train s'approche de la gare à une vitesse de 13,0 m/s. C'est une journée où le vent a une vitesse de 11,0 m/s, dans le sens opposé à celui du train. Quelle est la fréquence de la sirène pour les passagers du train ?

P63 Dans une démonstration, un professeur fait tourner une source sonore sur une table tournante en sens antihoraire (*voir la figure 3.41*). La source émet un son à une fréquence de 1 500 Hz ; elle est placée à une distance de 25,00 cm du centre de la table. Cette dernière tourne à une vitesse angulaire de 78,00 tr/min. On place un microphone immobile à une distance de 40,00 cm à droite de la table. Déterminez la fréquence perçue lorsque la source est aux positions suivantes :

a. à la position *a* ;

b. à la position *b* ;

c. à la position *c*.

(Indice : Portez attention à l'orientation de l'axe des *x*.)

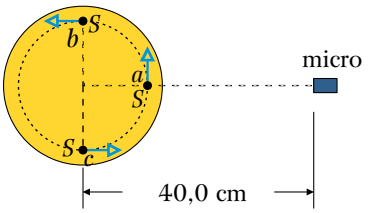


FIGURE 3.41 • Problème 63

Section 3.9 La vitesse supersonique et les ondes de choc

E64 Une balle de fusil produit une onde de choc qui forme un angle de 40° par rapport à la direction de la balle. Quel est le module de la vitesse du projectile ?

P65 Un avion militaire se déplace à une altitude de 4,00 km à une vitesse de 530 m/s. Le module de la vitesse du son est de 330 m/s.

a. Quel est l'angle du cône de Mach ?

b. Lorsque l'onde de choc frappe le sol, quelle distance l'avion a-t-il franchie ?

c. Combien de temps se passe-t-il entre le passage de l'avion et l'arrivée de l'onde de choc au sol ?

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

3.1	**a.** La molécule se déplace vers la gauche.	L'onde se déplace vers la droite. Le déplacement s du point x_1 sera plus près de sa position d'équilibre, donc la molécule se déplace vers la gauche.
	b. $\Delta p < 0$	Selon l'équation 3.4, la variation de pression est l'opposé de la pente du graphique de s en fonction de x. Au point x_1, la pente est positive, donc la variation de pression est négative.
3.2	**a.** $I_1/I_2 = 4$	L'intensité dépend de l'inverse du carré de la distance, donc $I_1/I_2 = r_2^2/r_1^2 = 4$.
	b. $s_{1\text{m}}/s_{2\text{m}} = 2$	L'intensité est proportionnelle au carré de l'amplitude s_m. Donc, $I_1 / I_2 = 4 = (s_{1\text{m}}/s_{2\text{m}})^2$ et $s_{1\text{m}}/s_{2\text{m}} = 2$
3.3	**a.** Interférence constructive	Les ondes sont identiques. La différence de marche est $\Delta r = 3{,}0\text{ m} = 3\lambda$, ce qui implique que les ondes sont en phase au point $\mathcal{P}$.
	b. Interférence destructive	Les ondes sont identiques. La différence de marche est $\Delta r = 3{,}0\text{ m} = (1 + \frac{1}{2})\,\lambda$, ce qui implique que les ondes sont en opposition de phase au point $\mathcal{P}$.
3.4	$f_1 = 438$ Hz ou $f_1 = 442$ Hz	La fréquence de battements est $f_\text{batt} = \lvert f_2 - f_1\rvert$. La fréquence de la corde de guitare peut être plus faible ou plus élevée.
3.5	**a.** $f_1 = 400$ Hz	La fréquence fondamentale d'un tuyau fermé-fermé est $f_1 = v/(2L)$, alors que celle d'un tuyau ouvert-fermé est $f_1 = v/(4L)$, ce qui représente une fréquence deux fois plus petite.
	b. $f_1 = 800$ Hz	La fréquence fondamentale d'un tuyau fermé-fermé $f_1 = v/(2L)$ est la même que la fréquence fondamentale d'un tuyau ouvert-ouvert.
3.6	$f'_\text{iv} < f'_\text{ii} < f'_\text{i} < f'_\text{iii}$	La fréquence f' est plus faible lorsque la source et le détecteur s'éloignent l'un de l'autre, et elle est plus élevée lorsque la source et le détecteur s'approchent l'un de l'autre.

Chapitre 04

Les ondes électromagnétiques

Buts du chapitre

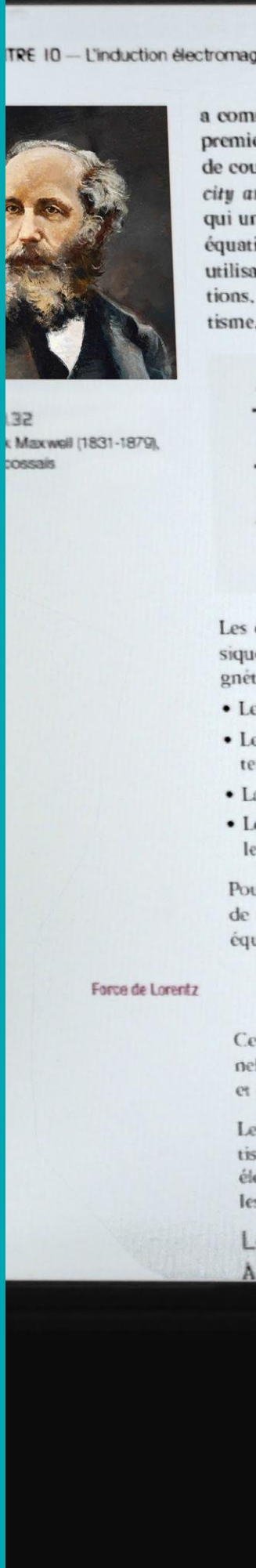
Dans ce chapitre, on décrit la lumière comme une onde électromagnétique. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de décrire une onde électromagnétique plane à l'aide d'un champ électrique et d'un champ magnétique oscillants ;
- d'identifier les différentes parties du spectre électromagnétique ;
- de calculer l'irradiance de la lumière et la pression de radiation ;
- d'expliquer le phénomène de la polarisation de la lumière.

Préalables

Ce chapitre applique les résultats de la physique ondulatoire à l'électromagnétisme. Revoyez :

- les ondes progressives sinusoïdales, notion introduite à la section 2.4 ;
- la puissance transportée par une onde, présentée à la section 2.5, et l'intensité, expliquée à la section 3.4 ;
- les équations de Maxwell, étudiées à la section 10.9 du tome 2.



gnétique

mencé l'étude de l'électricité et du magnétisme en 1855 en publiant un
er article intitulé « On Faraday's lines of force », où il a introduit le concept
urant de déplacement. En 1873, il a publié le traité *A Treatise on Electri-
nd Magnetism*, dans lequel il expose la théorie de l'électromagnétisme,
nifie l'électricité et le magnétisme. Au départ, sa théorie comportait vingt
ions. Par la suite, le physicien anglais Oliver Heaviside (1850-1925), en
ant l'analyse vectorielle, a ramené ce nombre à quatre. Ces quatre équa-
que nous avons vues lorsque nous avons étudié l'électricité et le magné-
, sont aujourd'hui appelées les *équations de Maxwell*:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \qquad \text{(théorème de Gauss)}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad \text{(théorème de Gauss en magnétisme)}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \qquad \text{(loi de Faraday)}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{int} + \epsilon_0 \mu_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \qquad \text{(théorème d'Ampère-Maxwell).}$$

équations de Maxwell font partie des équations fondamentales de la phy-
e, car elles décrivent complètement le champ électrique et le champ ma-
tique. On peut les résumer de la façon suivante:

e théorème de Gauss: les particules chargées produisent un champ électrique.

e théorème de Gauss en magnétisme: les monopôles magnétiques n'exis-
nt pas.

a loi de Faraday: un champ magnétique variable produit un champ électrique.

e théorème d'Ampère-Maxwell: les champs magnétiques sont produits par
s courants et par les champs électriques variables.

ur compléter l'électromagnétisme, il ne manque qu'une équation permettant
calculer la force exercée par les champs sur une particule chargée. Cette
uation est celle de la force de Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}\,. \qquad (10.15)$$

tte équation indique qu'une charge subit une force électrique (proportion-
lle au champ électrique) et une force magnétique (proportionnelle à la vitesse
au champ magnétique).

s cinq équations représentent la théorie classique complète de l'électromagné-
sme. Elles décrivent l'électrostatique, les circuits, le magnétisme et l'induction
ectromagnétique. Les autres lois déjà abordées, telles que la loi de Coulomb,
s lois de Kirchhoff o

es ondes élect
l'aide de sa théor et

situation correspond à une *onde électromagn*
de champs qui se propagent. Selon la théo
doit être constituée d'un champ électri
perpendiculaires entre eux. De pl
direction de propagation de l'on

Maxwell a été capable de
a trouvé

Cette vi
pas
et un champ mag

La prédiction de
mand Heinrich H
partir de circuits
de la lumière. L'é
sera vue en détai

Un écran à cristaux liquides fonctionne en polarisant la lumière. Un filtre polarisant, placé à droite, bloque complètement la lumière de l'écran. Un autre polariseur est placé à gauche et laisse passer une partie de la lumière.

Maxwell, le génie sans histoires

Le plus étonnant dans la vie de James Clerk Maxwell (1831-1879), c'est qu'il n'a surpris personne en ouvrant la voie à la physique moderne.

Un peu excentrique mais jamais flamboyant, le physicien écossais a suivi un parcours tracé dès l'enfance. Il n'a même pas quinze ans lorsque sa première communication scientifique est présentée à l'assemblée de savants de la Royal Society d'Édimbourg. À l'Université de Cambridge, il excelle en mathématiques et impressionne ses professeurs. L'un d'eux avouera que Maxwell semblait incapable de se tromper en physique. Les autres étudiants sont convaincus qu'il est déjà un génie.

En 1860, Maxwell accepte un poste à Londres. Après son mariage, sa femme et lui ont collaboré à une étude au sujet de la décomposition des couleurs et de la vision humaine. Maxwell a remporté un prix pour son étude des anneaux de Saturne en traitant les particules innombrables qui les constituent comme les éléments d'un fluide. Dans la foulée, il a signé un article fondamental sur la théorie cinétique des gaz en calculant la distribution du module de la vitesse des molécules d'un gaz. C'est l'entrée par la grande porte des probabilités dans la physique. Pourtant, Maxwell se distinguera dans un autre domaine.

Depuis sa jeunesse à Édimbourg, il connaît les travaux de Faraday sur l'électromagnétisme. La théorie électromagnétique demeure toutefois fragmentaire. Au XVIII^{e} siècle, l'électricité, le magnétisme et la lumière étaient considérés comme trois fluides distincts aux caractéristiques inexplicables. Les expériences de Coulomb ont permis d'établir un lien entre les effets électriques et magnétiques et l'action d'une force directe à distance, mais Faraday défend le rôle des lignes de force.

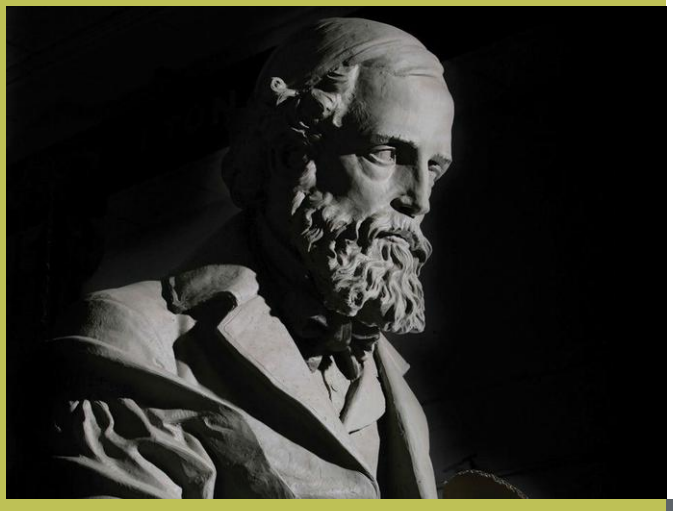
Entre 1861 et 1865, Maxwell propose une théorie générale de l'électromagnétisme. Il part des lignes de force pour imaginer un fluide qui se comporte comme s'il était constitué de tourbillons magnétiques dont la rotation entraîne des tourbillons électriques. Quand il dote cette substance d'une certaine élasticité, cette matière se prête à la propagation d'ondes transversales qui se déplacent à la vitesse de la lumière parce qu'elles sont la lumière même.

La percée est de taille. Maxwell vient d'unifier l'optique et l'électromagnétisme. En 1865, il renonce aux engrenages de tourbillons pour énoncer une série d'équations fondamentales qui gouvernent tous les phénomènes électromagnétiques. Selon le physicien, la lumière composée de champs électriques et magnétiques en fait désormais partie.

Maxwell remet alors sa démission à l'université. En tant que propriétaire foncier, il peut se permettre de vivre sans sa rémunération de professeur. Le couple quitte Londres pour le manoir familial, et Maxwell profite de ses loisirs pour approfondir sa théorie cinétique des gaz, s'intéresser à la thermodynamique et rédiger *A Treatise on Electricity and Magnetism* (1873), qui résume sa théorie générale de l'électromagnétisme. En 1871, il accepte la direction du nouveau laboratoire de physique expérimentale à l'Université de Cambridge, et il en fait un pôle d'excellence de la science britannique. En 1879, il meurt brutalement d'un cancer de l'estomac à l'âge de quarante-huit ans.

Poète à ses heures, plaisantin pince-sans-rire et chrétien fervent, Maxwell a préparé la physique du XX^{e} siècle. D'une part, c'est un unificateur. D'autre part, ses travaux mettent en évidence la division entre les champs et les ondes de l'électromagnétisme et les particules de la mécanique statistique. Il lègue aussi à ses successeurs un mystère, celui qui entoure l'éther.

Depuis les travaux antérieurs de Young et de Fresnel, les physiciens considéraient que les ondes lumineuses devaient se déplacer dans un milieu matériel appelé l'«éther», tout comme les ondes sonores sont transmises par l'air ou par l'eau. Même si Maxwell admet qu'il serait possible de s'en passer, son intuition de physicien l'incline à croire à sa réalité. En 1873, il conclut son traité d'électromagnétisme en soutenant que toute sa théorie exige un tel milieu. Il ne restera plus qu'à le détecter.



James Clerk Maxwell (1831-1879)

La majeure partie de l'information qu'on reçoit, dans la vie de tous les jours et dans les domaines scientifiques, nous parvient grâce à la lumière. Un grand nombre d'observations se font à l'aide de nos yeux ou elles sont enregistrées au moyen d'appareils photo ou de détecteurs optiques. Pour cette raison, l'étude de la lumière est essentielle.

Dans ce chapitre, nous abordons l'optique, branche de la physique qui étudie la lumière, en nous concentrant sur la nature de celle-ci. Les physiciens du 19e siècle avaient découvert que la lumière se comporte comme une onde, mais ils ignoraient ce qui oscille exactement. C'est seulement après les travaux de James Clerk Maxwell que la nature de la lumière a été comprise : la lumière est une onde électromagnétique ; le champ électrique et le champ magnétique oscillent. Le physicien allemand Henrich Hertz a vérifié expérimentalement les idées de Maxwell en produisant et en détectant des ondes électromagnétiques à l'aide de circuits électriques. Il a aussi montré que ces ondes ont les mêmes propriétés que la lumière. La lumière est donc un phénomène électromagnétique.

La lumière visible, qu'on détecte avec les yeux, n'est donc pas la seule forme d'onde électromagnétique. Il existe un spectre complet d'ondes, qui se différencient par leur longueur d'onde et leur fréquence, des ondes radio jusqu'aux rayons gamma. L'utilisation des ondes électromagnétiques dans les circuits électriques a permis le développement de nombreuses applications, telles que les téléphones cellulaires et les dispositifs sans fil qui utilisent des ondes électromagnétiques. Dans les domaines scientifiques, le spectre complet est utilisé pour obtenir différentes informations.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons de façon générale aux ondes électromagnétiques. Nous allons voir que ces ondes transportent de l'énergie, ce qui nous permet de recevoir l'énergie du Soleil. Nous apprendrons que la lumière peut aussi appliquer une force, puisqu'un faisceau exerce une pression. Nous verrons aussi que la façon dont le champ électrique oscille peut être contrôlée, ce qui permet d'obtenir de la lumière polarisée. Nous nous limitons pour l'instant aux ondes qui se déplacent dans le vide (ou dans l'air) pour simplifier l'analyse.

4.1 Les propriétés des ondes électromagnétiques

Dans les premiers chapitres de ce manuel, nous avons étudié les ondes mécaniques. Ces ondes sont le résultat d'oscillations d'un milieu matériel, qui se propagent grâce aux propriétés élastiques du milieu. Nous avons analysé ces oscillations en appliquant les lois de Newton aux éléments qui constituent le milieu.

Les ondes électromagnétiques sont le résultat d'oscillations du champ électrique et du champ magnétique. Ces champs peuvent exister dans les milieux matériels, mais aussi dans le vide. Pour analyser ces ondes, il faut appliquer les équations de Maxwell, les équations fondamentales de l'électromagnétisme. L'analyse en profondeur dépassant largement le cadre de cet ouvrage, nous allons nous limiter à présenter les solutions et à vérifier que ces dernières sont cohérentes avec les équations de Maxwell. De plus, notre analyse se limitera aux ondes qui se déplacent dans le vide. Les ondes électromagnétiques peuvent aussi se déplacer dans l'air, ce qui change peu leurs propriétés. Nous verrons au chapitre 5 la propagation de la lumière dans les milieux transparents.

Le champ électrique et le champ magnétique peuvent exister dans le vide en l'absence de charge électrique et de courant. Une onde électromagnétique qui se propage dans le vide doit correspondre à une solution des équations de Maxwell suivantes :

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \tag{4.1}$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \tag{4.2}$$

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\int \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \tag{4.3}$$

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \epsilon_0 \mu_0 \int \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \,. \tag{4.4}$$

L'équation 4.3 implique qu'un champ magnétique variable produit un champ électrique non uniforme. De même, selon l'équation 4.4, un champ électrique variable produit un champ magnétique non uniforme. Ceci montre que s'il y a un champ électrique qui oscille à un endroit, il induit un champ magnétique oscillant dans son environnement, ce qui induit un champ électrique oscillant dans son environnement et ainsi de suite. Le résultat est une onde électromagnétique qui se propage.

Les ondes électromagnétiques ont toujours les propriétés suivantes.

1. Le champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ est perpendiculaire au champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$.
2. Le produit vectoriel $\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ est un vecteur qui donne le sens de propagation de l'onde. Les champs sont perpendiculaires à la vitesse de l'onde, ce qui est représenté par $\vec{\mathbf{c}}$. Les ondes électromagnétiques sont donc des ondes transversales.
3. Toutes les ondes électromagnétiques se propagent dans le vide à une vitesse de même module :
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \,. \tag{4.5}$$
4. Les champs électrique et magnétique sont en phase. Le module du champ magnétique est directement proportionnel au module du champ électrique :
$$B = \frac{E}{c} \,. \tag{4.6}$$

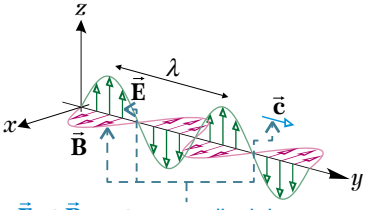


FIGURE 4.1
La représentation d'une onde électromagnétique qui se propage dans le sens de l'axe des y

L'onde plane sinusoïdale

L'onde électromagnétique la plus simple à décrire est une onde plane sinusoïdale, ce qui représente l'onde électromagnétique pour des points très éloignés de la source. Prenons par exemple une onde plane qui se propage dans le vide dans le même sens que l'axe des y, avec le champ électrique orienté parallèlement à l'axe des z et le champ magnétique orienté parallèlement à l'axe des x. Cette onde est illustrée à la figure 4.1. Les champs sont donnés par les expressions :

$$\vec{\mathbf{E}} = E_z \vec{\boldsymbol{k}} = E_{\mathrm{m}} \sin(ky - \omega t)\, \vec{\boldsymbol{k}} \tag{4.7}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = B_x \vec{\boldsymbol{\imath}} = B_{\mathrm{m}} \sin(ky - \omega t)\, \vec{\boldsymbol{\imath}} \,, \tag{4.8}$$

où E_m et B_m sont les amplitudes des champs. Pour simplifier, on a supposé que la fonction d'onde a une constante de phase $\phi = 0$. Cette onde sinusoïdale est caractérisée par le nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$, associé à la longueur d'onde λ, et par la fréquence angulaire $\omega = 2\pi f$, associée à la fréquence f de l'onde. Selon l'équation 2.20, la longueur d'onde et la fréquence sont reliées au module de la vitesse de l'onde électromagnétique :

$$c = \lambda f = \frac{\omega}{k} . \tag{4.9}$$

Nous allons vérifier à la section 4.2 que le module de la vitesse des ondes électromagnétiques est égal au module de la vitesse de la lumière, donné par l'expression :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m/s} , \tag{4.10}$$

ce qui donne environ $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s.

Comme le montre la figure 4.1, le champ électrique et le champ magnétique sont perpendiculaires entre eux et ils sont perpendiculaires à $\vec{\mathbf{c}}$, la vitesse de l'onde. Le produit vectoriel $\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ donne un vecteur ayant la même orientation que la vitesse de l'onde $\vec{\mathbf{c}}$. On peut utiliser la règle de la main droite du produit vectoriel pour obtenir l'orientation de la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique. De plus, les champs sont en phase : lorsque la composante E_z est maximale, la composante B_x est maximale.

La figure 4.1 illustre uniquement les champs pour des points sur l'axe des y. L'onde étant une onde plane, les champs sont les mêmes pour tous les points qui font partie d'un plan y = constante, c'est-à-dire que les champs sont les mêmes pour des points ayant des coordonnées x et z différentes, mais qui partagent la même coordonnée y. La figure 4.2 montre les champs pour une petite section du plan des yz (une vue de côté) à un instant t donné. Les champs sont illustrés pour une coordonnée $z_1 > 0$ et pour une coordonnée $z_2 < 0$.

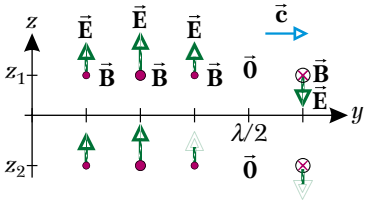


FIGURE 4.2
Une onde électromagnétique qui se déplace dans le sens de l'axe des y, vue de côté

La figure 4.3 montre l'onde au même instant, mais pour les points du plan des xz, pour une coordonnée y donnée. Dans cette vue, l'onde se déplace directement vers l'observateur, en sortant de la page. Les champs sont les mêmes pour tous les points de la figure, car la coordonnée y est la même pour tous ces points.

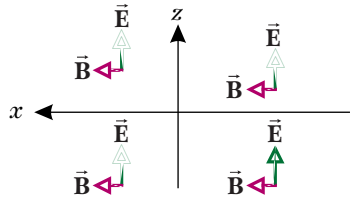


FIGURE 4.3
Une onde électromagnétique qui se déplace dans le sens de l'axe des y, vue de face

L'onde électromagnétique étudiée se déplace dans le sens de l'axe des y. Dans le cas d'une onde qui se déplace dans le sens opposé à l'axe des y, la phase des champs sera remplacée par $ky + \omega t$, comme nous l'avons vu à la section 2.4 dans le cas d'une onde sur une corde. De plus, l'orientation du champ magnétique sera opposée à celle qui a été obtenue dans le cas d'une onde qui se déplace dans le sens de l'axe des y, de telle sorte que $\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ donne un vecteur opposé à l'axe des y.

On a supposé que le champ électrique est orienté selon l'axe des z. Il y a d'autres orientations possibles dans le cas d'une onde électromagnétique qui se déplace selon l'axe des y. En effet, le champ électrique peut osciller dans n'importe quelle direction dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. Nous reparlerons des différentes façons dont peut osciller le champ électrique à la section 4.6.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 4.1

Le champ électrique d'une onde électromagnétique est donné par l'expression :

$$\vec{\mathbf{E}} = E_{\mathrm{m}} \sin(kx - \omega t)\, \vec{\boldsymbol{j}} \,.$$

a. Dans quel sens l'onde électromagnétique se propage-t-elle ?

b. Dans quel sens est le champ magnétique lorsque le champ électrique est orienté dans le sens de l'axe des y ?

EXEMPLE 4.1 La fonction d'onde d'une onde FM

Une onde électromagnétique a une fréquence de 93,3 MHz, et elle se propage dans le sens opposé à l'axe des x. Le champ électrique oscille dans la direction de l'axe des y, et son amplitude est de 5,4 V/m.

a. Quelle est la longueur d'onde de cette onde radio ?

b. Quelle est l'amplitude du champ magnétique ?

c. Écrivez l'expression du champ électrique et l'expression du champ magnétique de cette onde.

SOLUTION

Décortiquer le problème

L'onde électromagnétique se déplace à la vitesse de la lumière : $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s.

Connues	Inconnues
$f = 93{,}3 \times 10^6$ Hz	λ
$E_{\mathrm{m}} = 5{,}4$ V/m	B_{m}
$c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s	$\vec{\mathbf{E}}$ $\vec{\mathbf{B}}$

SOLUTION a.

Identifier la clé

Nous calculons la longueur d'onde à l'aide de l'équation 4.9 :

$$c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \,. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\lambda = \frac{3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}}{93{,}3 \times 10^6 \text{ Hz}} = 3{,}22 \text{ m} \,. \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est la 4e propriété des ondes électromagnétiques :

$$B = \frac{E}{c} \Rightarrow B_{\mathrm{m}} = \frac{E_{\mathrm{m}}}{c} \,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons l'amplitude du champ magnétique :

$$B_{\mathrm{m}} = \frac{5{,}4 \text{ V/m}}{3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}} = 1{,}8 \times 10^{-8} \text{ T} \,.$$

(réponse)

SOLUTION c.

Illustrer la situation

La figure 4.4 montre les vecteurs $\vec{\mathbf{c}}$ et $\vec{\mathbf{E}}$. On suppose qu'à cet instant, le champ électrique est orienté dans le même sens que l'axe des y.

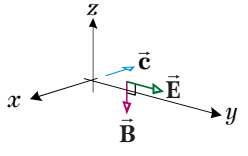


FIGURE 4.4 Exemple 4.1

Décortiquer le problème

Le champ magnétique doit être perpendiculaire à $\vec{\mathbf{c}}$ et à $\vec{\mathbf{E}}$. De plus, $\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ doit donner un vecteur orienté dans le sens opposé à l'axe des x. Le champ magnétique oscille parallèlement à l'axe des z, et sa composante doit être de signe opposé à la composante de E_y, car $\vec{\boldsymbol{j}} \times (-\vec{\boldsymbol{k}}) = -\vec{\boldsymbol{i}}$.

Identifier la clé

La clé est que l'onde électromagnétique est une onde plane sinusoïdale :

$$\vec{\mathbf{E}} = E_{\mathrm{m}} \sin(kx + \omega t)\, \vec{\boldsymbol{j}} \qquad \text{(iii)}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = -B_{\mathrm{m}} \sin(kx + \omega t)\, \vec{\boldsymbol{k}}\,. \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons la fréquence angulaire et le nombre d'onde :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 93{,}3 \times 10^{6}\ \text{Hz} = 5{,}86 \times 10^{8}\ \text{rad/s}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3{,}22\ \text{m}} = 1{,}95\ \text{rad/m}\,.$$

Les champs sont donc

$$\vec{\mathbf{E}} = (5{,}4\ \text{V/m}) \sin\ (1{,}95x + 5{,}86 \times 10^{8} t)\, \vec{\boldsymbol{j}} \quad \text{(réponse)}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = -(1{,}8 \times 10^{-8}\ \text{T}) \sin\ (1{,}95x + 5{,}86 \times 10^{8} t)\, \vec{\boldsymbol{k}}\,. \quad \text{(réponse)}$$

La position doit être exprimée en mètres et le temps, en secondes.

Valider la réponse

Nous répondons bien aux questions. Le champ électrique et le champ magnétique sont perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à la vitesse de l'onde.

Les sources d'onde électromagnétique

Une onde électromagnétique peut se propager dans le vide, sans l'aide de charge ou de courant électrique. Par contre, pour produire une onde électromagnétique, il faut qu'il y ait une source. À la position de la source, les charges et les courants sont nécessaires pour produire une onde électromagnétique.

Dans le tome 2, nous avons étudié les champs électriques produits par des charges immobiles ou par des charges se déplaçant à vitesse constante. Dans ces situations, le champ électrique est constant, c'est-à-dire qu'il ne varie pas en fonction du temps. Pour qu'un champ électrique varie dans le temps, il faut qu'une charge soit accélérée. Lorsque le champ électrique varie, un champ magnétique variable est induit, et l'onde électromagnétique est produite. On obtient donc, de façon générale :

Une onde électromagnétique est produite lorsqu'une charge électrique subit une accélération.

Dans les circuits électriques, on produit une onde électromagnétique en changeant la polarité d'un dipôle électrique. La figure 4.5a à la page suivante montre le champ électrique produit par un dipôle. Le champ à gauche du dipôle est orienté vers le bas. Si on inverse la polarité du dipôle, le champ prend la forme qu'on peut voir à la figure 4.5b, avec un champ électrique vers le haut pour les points à droite. On obtient une onde électromagnétique sinusoïdale en faisant osciller les charges selon un mouvement harmonique simple. Le champ électrique variable induit un champ magnétique variable, qui induit un champ électrique variable... L'onde électromagnétique est produite, et elle se propage vers l'extérieur. C'est le mouvement accéléré des charges qui produit l'onde électromagnétique.

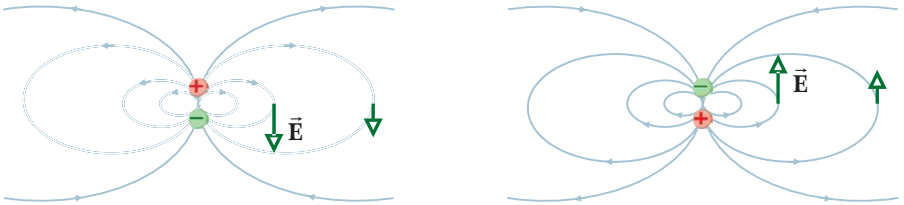


FIGURE 4.5
Le champ électrique produit par un dipôle pour deux polarités différentes

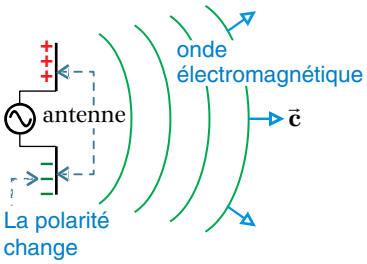


FIGURE 4.6
Une antenne reliée à une f.é.m. alternative produit une onde électromagnétique.

On produit des ondes électromagnétiques en utilisant deux conducteurs servant d'*antenne*, branchés à une source de f.é.m. alternative, comme le montre la figure 4.6. La polarité de chaque conducteur change en fonction du temps. Les deux conducteurs se comportent comme un dipôle électrique. Le changement de polarité produit un champ électrique variable, qui induit un champ magnétique variable. L'onde électromagnétique est créée, et elle se propage. Une fois produite, l'onde n'a plus besoin d'antenne. Elle se propage librement.

4.2 La vitesse de la lumière et l'équation d'onde

On veut vérifier que l'onde plane électromagnétique présentée aux équations 4.7 et 4.8 est bien une solution des équations de Maxwell. En accomplissant cette tâche, on obtiendra l'équation d'onde (*voir l'équation 2.3*), ce qui permettra d'obtenir c, le module de la vitesse de la lumière, en fonction de la constante électrique et de la constante magnétique.

Nous étudions une onde électromagnétique plane sinusoïdale qui se déplace dans le sens de l'axe des y. Le champ électrique a une composante parallèle à l'axe des z, et le champ magnétique a une composante parallèle à l'axe des x:

$$E_x = 0 \qquad E_y = 0 \qquad E_z = E_{\mathrm{m}} \sin(ky - \omega t) \tag{4.11}$$

$$B_x = B_{\mathrm{m}} \sin(ky - \omega t) \qquad B_y = 0 \qquad B_z = 0\,. \tag{4.12}$$

Le théorème de Gauss

Comme nous l'avons vu au chapitre 3 du tome 2, le théorème de Gauss indique que le flux électrique (le nombre net de lignes de champ électrique) à travers une surface fermée dépend de la charge à l'intérieur de la surface. Dans le cas d'une onde électromagnétique qui se déplace dans le vide, il n'y a pas de charge nette, et le flux électrique à travers une surface fermée doit être nul.

À la figure 4.7a, une boîte est placée dans le champ électrique de l'onde (pour plus de clarté, on a omis le champ magnétique). Les lignes de champ entrent par la face du bas, et elles sortent par la face supérieure. Les autres faces ne contribuent pas au flux électrique, car les lignes de champ sont parallèles à ces surfaces. Comme l'onde est une onde plane, le module des champs électriques sur la surface inférieure est égal au module des champs sur la surface supérieure. Le flux sur la surface inférieure est donc opposé au flux à travers la surface supérieure, et le flux électrique net à travers la boîte est nul. Le théorème de Gauss, pour le champ électrique, est bien respecté.

Selon le théorème de Gauss en magnétisme, le flux magnétique à travers une surface fermée doit être nul, car les monopôles magnétiques n'existent pas. Pour vérifier que dans le cas de l'onde plane, ce théorème est respecté, on place de nouveau une boîte, et on calcule le flux magnétique à travers cette boîte (*voir la figure 4.7b*). Pour l'onde étudiée, les lignes de champ magnétique entrent par la face arrière et sortent par la face avant. Encore une fois, le flux net est nul, car le flux sur la face arrière est opposé au flux à travers la face avant. L'onde plane respecte le théorème de Gauss pour le magnétisme.

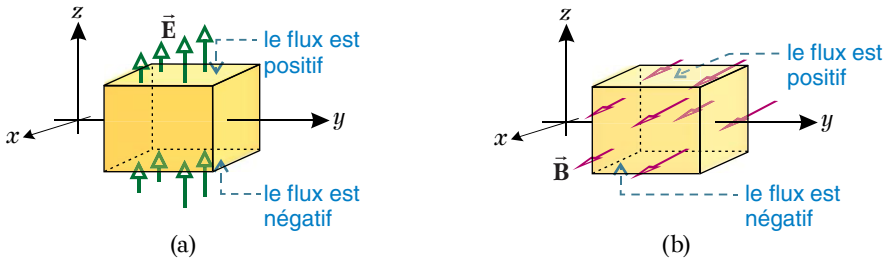


FIGURE 4.7
(a) Le flux électrique à travers la boîte est nul dans le cas d'une onde plane. (b) Le flux magnétique à travers la boîte est nul dans le cas d'une onde plane.

La loi de Faraday

Selon la loi de Faraday, un champ magnétique qui varie dans le temps induit un champ électrique. Cette loi met en relation le flux de la dérivée du champ magnétique à travers une surface et la circulation du champ électrique autour de la frontière de cette surface :

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\int \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}} .$$

On choisit de calculer le flux à travers un rectangle de hauteur h et de largeur dy situé dans le plan des yz, comme le montre la figure 4.8. L'orientation du vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ est perpendiculaire au plan du rectangle, de telle sorte que $\vec{\mathbf{A}} = h\, dy\, \vec{\imath}$. La largeur du rectangle est suffisamment petite pour que $\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$ varie très peu. Le flux est alors

$$\int \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot \vec{\mathbf{A}} = \frac{\partial B_x}{\partial t}\, h\, dy . \qquad (4.13)$$

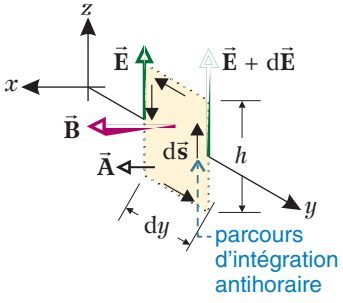


FIGURE 4.8
On applique la loi de Faraday à un rectangle de hauteur h et de largeur dy.

Pour calculer la circulation du champ électrique, on doit utiliser un parcours d'intégration dont le sens est donné par la règle de la main droite : le pouce est placé selon le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$, et les doigts tournent selon le sens du parcours d'intégration $d\vec{\mathbf{s}}$, donc en sens antihoraire. On divise le parcours d'intégration en quatre intégrales, une intégrale pour chaque côté du rectangle (*voir la figure 4.8*) :

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{\text{droite}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_{\text{haut}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_{\text{gauche}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_{\text{bas}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} .$$

L'intégrale sur le côté du haut et celle sur le côté du bas du rectangle sont nulles, car $\vec{\mathbf{E}}$ et $d\vec{\mathbf{s}}$ sont perpendiculaires. Pour les deux autres intégrales, on peut sortir le champ électrique parce qu'il a la même valeur le long d'un côté. Pour le

côté gauche, $\vec{\mathbf{E}} = E_z\vec{\boldsymbol{k}}$ et pour le côté droit, le champ est légèrement plus grand : $\vec{\mathbf{E}} = (E_z + \mathrm{d}E_z)\vec{\boldsymbol{k}}$. La circulation du champ électrique est alors

$$\begin{aligned}\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} &= (E_z + \mathrm{d}E_z) \int_{\text{droite}} \mathrm{d}s \cos(0°) + E_z \int_{\text{gauche}} \mathrm{d}s \cos(180°) \\ &= (E_z + \mathrm{d}E_z)\, h - E_z h = h\, \mathrm{d}E_z \\ &= h \frac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}y}\, \mathrm{d}y\,, \end{aligned} \tag{4.14}$$

où on a utilisé le résultat du calcul différentiel :

$$\mathrm{d}E_z = \frac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}y}\, \mathrm{d}y\,.$$

On insère les équations 4.13 et 4.14 dans l'expression de la loi de Faraday, en remplaçant les dérivées ordinaires par des dérivées partielles, car les champs dépendent des variables y et t :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}\, h\, \mathrm{d}y = -\frac{\partial B_x}{\partial t}\, h\, \mathrm{d}y\,.$$

L'aire du rectangle $A = h\, \mathrm{d}y$ est arbitraire. On obtient alors une relation entre le champ électrique et le champ magnétique :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}\,. \tag{4.15}$$

Cette équation est une condition qui doit être respectée dans le cas des champs d'une onde électromagnétique qui se déplace dans le sens de l'axe des y.

En ce qui concerne l'onde électromagnétique donnée par les équations 4.11 et 4.12, les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = kE_\mathrm{m} \cos(ky - \omega t)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\omega B_\mathrm{m} \cos(ky - \omega t)\,.$$

En remplaçant ces équations dans l'équation 4.15, on obtient

$$kE_\mathrm{m} \cos(ky - \omega t) = \omega B_\mathrm{m} \cos(ky - \omega t)$$

$$E_\mathrm{m} = \frac{\omega}{k} B_\mathrm{m} = cB_\mathrm{m}\,, \tag{4.16}$$

dans laquelle on a utilisé $\omega/k = c$, où c est le module de la vitesse de l'onde.

L'équation 4.16 montre que dans le cas d'une onde électromagnétique, l'amplitude du champ électrique et l'amplitude du champ magnétique ne sont pas des valeurs arbitraires. Lorsque l'amplitude du champ électrique est connue, l'amplitude du champ magnétique doit être égale à E_m/c. L'équation 4.15 montre aussi que le champ électrique et le champ magnétique sont en phase, car les deux fonctions sinusoïdales doivent être identiques pour que l'équation 4.15 soit respectée à un temps et à une position y quelconques.

MISE EN GARDE

Selon l'équation 4.16, $B_m = E_m/c$. Même si $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s est une grande valeur, cela ne veut pas dire que le module du champ magnétique est beaucoup plus petit que le module du champ électrique. On ne peut pas comparer ces deux quantités, car elles sont exprimées dans des unités différentes.

Le théorème d'Ampère-Maxwell et l'équation d'onde

Il reste à vérifier que dans le cas de l'onde plane, le théorème d'Ampère-Maxwell est respecté. Comme il n'y a pas de courant, ce théorème met en relation la circulation du champ magnétique et le flux de la dérivée du champ électrique :

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \epsilon_0 \mu_0 \int \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \,. \tag{4.17}$$

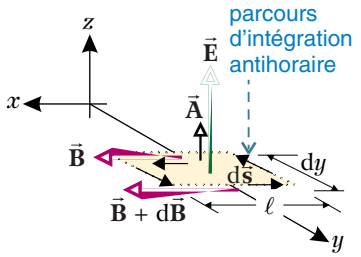


FIGURE 4.9
On applique le théorème d'Ampère-Maxwell à un rectangle parallèle au plan des xy.

La méthode utilisée ici est semblable à celle qui a été décrite à la sous-section précédente. On calcule le flux de la dérivée du champ électrique à travers un rectangle de longueur ℓ et de largeur dy, situé parallèlement au plan des xy (*voir la figure 4.9*).

Pour le calcul du flux, le vecteur aire est $\vec{\mathbf{A}} = \ell \, dy \, \vec{\boldsymbol{k}}$. La dérivée du champ électrique varie de façon négligeable, car la largeur du rectangle est très petite. Le flux à travers le rectangle est alors

$$\int \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \cdot \vec{\mathbf{A}} = \frac{\partial E_z}{\partial t} \ell \, dy \,. \tag{4.18}$$

La circulation du champ magnétique se calcule le long du périmètre du rectangle, en sens antihoraire, selon la règle de la main droite. De nouveau, on divise l'intégrale en quatre intégrales :

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = \int_{\text{avant}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_{\text{droite}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_{\text{arrière}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} + \int_{\text{gauche}} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \,.$$

Les intégrales sur le côté droit et sur le côté gauche sont nulles, car $\vec{\mathbf{B}}$ et $d\vec{\mathbf{s}}$ sont perpendiculaires. Pour les deux autres côtés, on peut sortir le champ de l'intégrale parce que celui-ci ne change pas lorsque y demeure fixe :

$$\begin{aligned} \oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} &= (B_x + dB_x) \int_{\text{avant}} ds \cos(180°) + B_x \int_{\text{arrière}} ds \cos(0°) \\ &= -(B_x + dB_x)\, \ell + B_x \ell = -\ell \, dB_x \\ &= -\ell \frac{dB_x}{dy} \, dy \,. \end{aligned} \tag{4.19}$$

On insère les équations 4.18 et 4.19 dans l'équation 4.17, en remplaçant de nouveau la dérivée ordinaire par une dérivée partielle. On obtient

$$-\frac{\partial B_x}{\partial y} \ell \, dy = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \ell \, dy \,.$$

L'aire du rectangle est arbitraire. On obtient alors une deuxième condition issue des équations de Maxwell :

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} . \tag{4.20}$$

Cette condition doit être respectée dans le cas d'une onde électromagnétique qui se déplace dans le sens de l'axe des y.

On peut combiner les équations 4.15 et 4.20 pour obtenir une équation dans laquelle seul le champ électrique apparaît. Pour ce faire, on dérive les deux membres de l'équation 4.20 par rapport au temps :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_z}{\partial t}\right).$$

Comme les variables y et t sont indépendantes, on peut changer l'ordre des dérivées dans le membre gauche de la dernière équation :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial B_x}{\partial t}\right) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} .$$

Il est maintenant possible de remplacer la dérivée de B_x par rapport au temps par l'opposé de la dérivée de E_z par rapport à y, selon l'équation 4.15. On obtient

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} . \tag{4.21}$$

Cette équation est l'équation d'onde, que nous avons étudiée au chapitre 2, dans le cas d'une onde sur une corde. Elle nous permet d'obtenir le module de la vitesse des ondes électromagnétiques. En comparant l'équation 4.21 avec l'équation 2.3, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} .$$

On obtient le module de la vitesse des ondes électromagnétiques, représenté par c :

Module de la vitesse de la lumière

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s} . \tag{4.22}$$

C'est un résultat très important auquel est parvenu Maxwell. Les constantes ϵ_0 et μ_0 ne semblent pas avoir de relation avec la lumière. La constante électrique ϵ_0 fait partie de la loi de Coulomb pour obtenir la force entre deux charges électriques. De même, la constante μ_0 fait partie de la loi de Biot-Savart pour d'abord obtenir le champ magnétique produit par un courant, puis le module de la force entre deux courants électriques. L'équation d'onde 4.21 est indépendante de la fréquence et de la longueur d'onde des ondes. Ceci implique que toutes les ondes électromagnétiques se propagent dans le vide à la même vitesse c.

De nos jours, le module de la vitesse de la lumière peut être mesuré avec une très grande précision, et cette dernière est supérieure à celle qui permet de mesurer une longueur. Pour cette raison, le module de la vitesse de la lumière est utilisé comme étalon. Par définition, le module de la vitesse de la lumière dans le vide est

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} . \tag{4.23}$$

Le mètre est alors défini comme la distance parcourue par la lumière dans le vide en $1/(299\,792\,458)$ s. Les constantes ϵ_0 et μ_0 ont aussi des valeurs exactes : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, et ϵ_0 est définie à partir de l'équation 4.22 : $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$.

4.3 Le spectre électromagnétique

Les ondes électromagnétiques peuvent avoir différentes fréquences et longueurs d'onde. Toutes ces ondes se propagent dans le vide à une vitesse c. Le *spectre électromagnétique* représente l'ensemble des ondes électromagnétiques, classées selon la fréquence et la longueur d'onde. Lorsque les ondes se déplacent dans le vide, la longueur d'onde et la fréquence sont reliées par le module de la vitesse de la lumière :

$$c = \lambda f . \tag{4.24}$$

On divise le spectre en sept types d'ondes, comme le montre la figure 4.10. La frontière entre deux types d'onde est approximative.

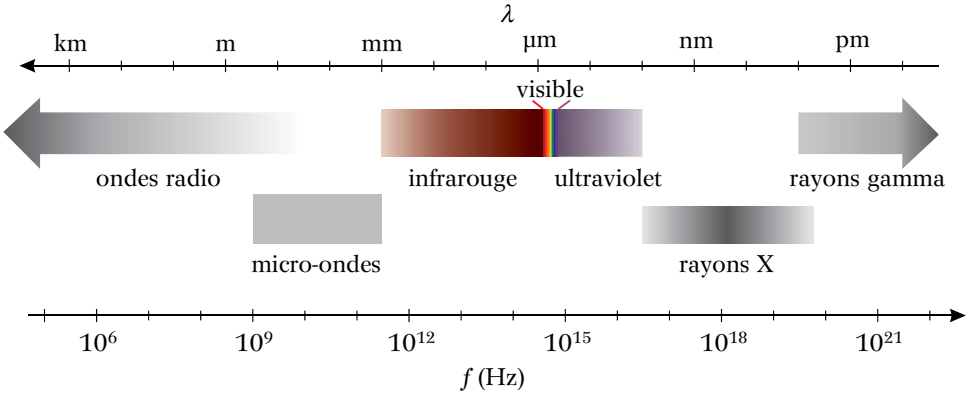


FIGURE 4.10
Le spectre électromagnétique

- **Les ondes radio** sont les ondes électromagnétiques ayant la plus grande longueur d'onde, plus grande que 30 cm, ce qui correspond à une fréquence plus petite que 1 GHz. C'est le physicien Heinrich Hertz (1857-1894) qui a été le premier à produire, à détecter et à étudier les ondes radio dans les années 1887 et 1888. Les ondes radio sont produites et détectées par des circuits électriques. Elles sont entre autres utilisées pour transmettre les signaux de la radio (*voir la figure 4.11*) et de la télévision.

FIGURE 4.11
Un syntoniseur intégré à une radio AM-FM

FIGURE 4.12
Un four à micro-ondes utilise une onde électromagnétique.

- **Les micro-ondes** sont aussi des ondes électromagnétiques produites par des circuits électriques. Leur longueur d'onde est plus petite que celle des ondes radio, entre 30 cm et 1 mm, ce qui correspond à une fréquence entre 1 GHz et 300 GHz. Ces ondes sont utilisées dans les télécommunications (téléphones cellulaires, réseaux sans fil), les systèmes de radar et les communications avec les satellites, car l'atmosphère est transparente aux micro-ondes. Le four à micro-ondes (*voir la figure 4.12*) utilise une onde électromagnétique ayant une fréquence de 2,45 GHz. Cette onde a la bonne fréquence pour produire une résonance dans la rotation des molécules d'eau (une molécule ayant un moment dipolaire important). L'énergie de rotation se transforme en énergie thermique par collisions.
- **L'infrarouge** (qui précède le rouge) a été découvert en 1800 par l'astronome anglais sir Frederick William Herschel (1738-1822). Les infrarouges ont une longueur d'onde entre 1 mm et la limite de la lumière visible, autour de 0,8 µm. C'est une onde électromagnétique émise par les corps chauds à cause de l'agitation thermique. Certains animaux sont sensibles aux infrarouges, ce qui leur permet de voir la nuit. Les molécules absorbent de façon caractéristique des infrarouges ayant des longueurs d'onde spécifiques. La spectroscopie par infrarouge est donc fréquemment utilisée par les chimistes pour identifier les molécules présentes dans un échantillon. La plupart des télécommandes d'appareils électroniques (*voir la figure 4.13*) utilisent l'infrarouge pour commander ces derniers à distance.

FIGURE 4.13
Les télécommandes d'appareils électroniques utilisent l'infrarouge.

- **La lumière visible,** qu'on appelle habituellement la *lumière*, correspond à une onde électromagnétique détectée par l'œil humain. Dans le spectre électromagnétique, la lumière ne représente qu'un très petit intervalle de longueurs d'onde, approximativement entre 800 nm (le rouge) et 380 nm (le violet), comme le montre la figure 4.14. La sensibilité de l'œil dépend de la longueur d'onde, comme le montre le graphique de la figure 4.15. Elle est maximale à une longueur d'onde d'environ 550 nm, alors qu'elle est très faible pour une longueur d'onde plus élevée que 700 nm ou plus faible que 400 nm. Pour cette raison, il est habituel de limiter le domaine du visible entre 700 nm et 400 nm. La lumière visible est produite par les corps très chauds et par des transitions d'électrons de valence dans les atomes. L'optique est l'étude de la lumière visible. C'est le principal sujet des chapitres 5 à 8 de ce manuel.

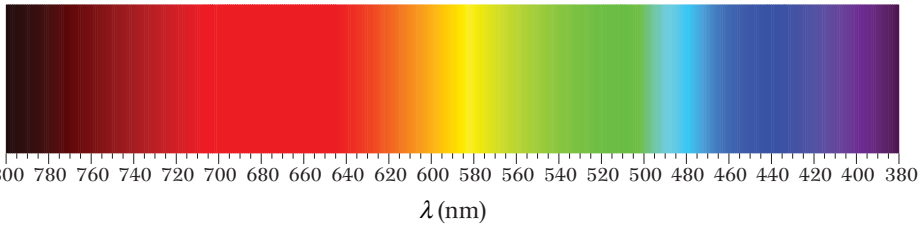


FIGURE 4.14
Le spectre de la lumière visible

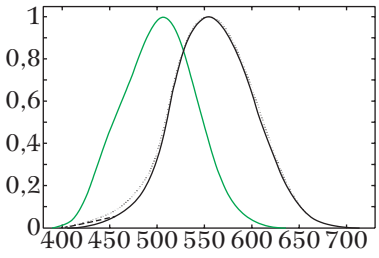


FIGURE 4.15
L'efficacité moyenne de l'œil humain en fonction de la longueur d'onde, pour la vue de jour (courbe noire) et pour la vue de nuit (courbe verte)

- **L'ultraviolet** (au-delà du violet) est une lumière dont la longueur d'onde est plus courte que le visible, mais plus grande que les rayons X, entre 380 nm et 10 nm. Les ultraviolets permettent de bronzer, mais ils provoquent aussi des cancers de la peau. Environ 5 % du rayonnement solaire est sous forme d'ultraviolet, mais la majeure partie incidente sur Terre est absorbée par la couche d'ozone présente dans l'atmosphère. C'est le physicien allemand Johann Wilhelm Ritter (1776-1810) qui a découvert, en 1801, ces ondes

électromagnétiques, en étudiant leur action sur le chlorure d'argent utilisé en photographie. Le rayonnement ultraviolet est produit par des transitions électroniques. Les lampes fluorescentes (*voir la figure 4.16*) émettent d'abord de l'ultraviolet. Une substance autour du tube absorbe l'ultraviolet en émettant de la lumière visible par fluorescence.

- **Les rayons X** ont une longueur d'onde entre 10 nm et 5 pm. On les produit habituellement en bombardant des électrons qui ont une grande énergie cinétique sur une plaque de métal. Les électrons subissent une très forte décélération, ce qui produit les rayons X. Ces rayons sont aussi produits par des transitions électroniques profondes. Ils ont été découverts en 1895 par le physicien allemand Wilhelm Röntgen (1845-1923). Ce dernier les a appelés ainsi parce qu'il s'agissait d'un rayonnement inconnu à ce jour. Les rayons X sont utilisés en imagerie médicale (*voir la figure 4.17*). Ils servent aussi en cristallographie, car leur longueur d'onde est du même ordre de grandeur que la distance entre les atomes formant un cristal.
- **Les rayons gamma** ont les longueurs les plus courtes, à partir de 10 pm. Ils sont produits par les transitions à l'intérieur du noyau atomique et dans des processus d'annihilation. Les rayons gamma ont été découverts en 1900 par le physicien et chimiste français Paul Villard (1860-1934) qui étudiait le radium. L'appellation «rayon gamma» a été proposée par le physicien britannique Ernest Rutherford (1871-1937) lors de ses études sur la radioactivité effectuées à l'Université McGill au début du 20^{e} siècle. Les rayons gamma sont utilisés en médecine : en radiothérapie pour détruire les cellules cancéreuses et dans certaines méthodes d'imagerie comme la tomographie à émission de positrons.

FIGURE 4.16
Une lampe fluorescente émet d'abord un rayonnement ultraviolet.

FIGURE 4.17
L'image d'un pied obtenue à l'aide de rayons X

4.4 L'énergie transportée par la lumière

Lorsque vous vous placez face au Soleil, vous ressentez un effet de chaleur. La lumière du Soleil transporte de l'énergie, comme le fait toute onde. Étant donné que les ondes électromagnétiques se propagent en trois dimensions, on définit l'irradiance I (aussi appelée l'*éclairement énergétique**) comme la puissance moyenne transportée par unité de surface :

$$I \equiv \frac{P}{A}. \tag{4.25}$$

Cette définition est identique à celle de l'intensité sonore, présentée à la section 3.4. L'unité de l'irradiance lumineuse est le watt par mètre carré (W/m^2).

Dans le cas d'une source ponctuelle, qui émet de façon isotrope, l'onde est une onde sphérique, et l'énergie émise par la source se répartit sur la surface de sphères (*voir la figure 4.18*). Pour un observateur placé à une distance r d'une source ponctuelle, l'irradiance diminue en fonction du carré de la distance :

$$I = \frac{P_S}{4\pi r^2}, \tag{4.26}$$

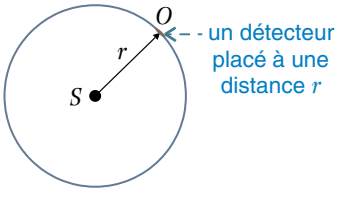


FIGURE 4.18
Un observateur est placé à une distance r d'une source ponctuelle.

* Il aurait été plus simple d'appeler «intensité lumineuse» cette quantité, mais cette expression fait plutôt référence à l'éclat provenant d'une source lumineuse, qui est perçu par l'œil humain.

où P_S est la puissance émise par la source. Dans le cas d'une source non isotrope, l'équation 4.26 ne s'applique pas, mais l'irradiance diminue quand même selon l'inverse du carré de la distance.

À un point donné, l'irradiance doit être une fonction du champ électrique et du champ magnétique présents à cet endroit. Selon les résultats obtenus dans le chapitre 2 du tome 2, la présence d'un champ électrique produit une densité d'énergie électrique u_E. De plus, dans le chapitre 11 du même tome, on apprend que la présence d'un champ magnétique produit une densité d'énergie magnétique u_B. Donc, en présence d'une onde électromagnétique, il y a une densité d'énergie électromagnétique :

$$u = u_E + u_B = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \, .$$

Selon l'équation 4.6, le module du champ magnétique d'une onde électromagnétique est proportionnel au module du champ magnétique, c'est-à-dire que $B = E/c$. La densité d'énergie est alors

$$\begin{aligned} u &= \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0 c^2} E^2 \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{\epsilon_0 \mu_0}{2\mu_0} E^2 \, , \end{aligned}$$

où on a utilisé l'équation 4.22 : $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. La densité d'énergie électromagnétique dans l'onde est alors

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \epsilon_0 E^2 \, . \tag{4.27}$$

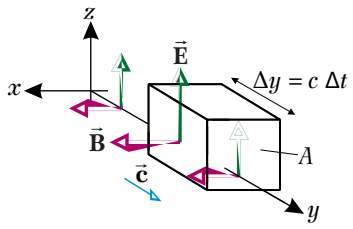


FIGURE 4.19
Une onde plane traverse une boîte, de section A et de longueur Δy.

Remarquez que la densité d'énergie magnétique est égale à la densité d'énergie électrique contenue dans l'onde électromagnétique.

Pour trouver l'irradiance, on calcule l'énergie électromagnétique contenue dans une boîte ayant une aire A et une longueur Δy lorsqu'une onde plane sinusoïdale traverse cette boîte dans la direction y, comme le montre la figure 4.19. L'onde a besoin d'un temps $\Delta t = \Delta y/c$ pour traverser la boîte, et l'énergie électromagnétique dans la boîte se calcule en multipliant la densité d'énergie électromagnétique et le volume de la boîte $\Delta V = A\,\Delta y = Ac\,\Delta t$:

$$\Delta U = uAc\,\Delta t = (\epsilon_0 E^2)\, c\,\Delta t\, A \, .$$

L'irradiance correspond à la puissance moyenne par unité de surface transportée par l'onde, c'est-à-dire l'énergie moyenne par unité de temps et par unité de surface :

$$I = \frac{U_{\text{moy}}}{A\,\Delta t} = \epsilon_0 c E_{\text{moy}}^2 \, . \tag{4.28}$$

Pour une onde plane sinusoïdale, le module du champ au carré est

$$E^2 = E_{\text{m}}^2 \sin^2(ky - \omega t) = E_{\text{m}}^2 \sin^2(\Phi) \, , \tag{4.29}$$

où $\Phi = ky - \omega t$ est la phase de l'onde.

La figure 4.20 montre la fonction $\sin^2(\Phi)$ en fonction du temps. Cette fonction varie très rapidement entre 0 et 1. Le résultat est le même que dans le cas de la section 2.5, lorsque nous avons calculé la valeur moyenne de la fonction $\cos^2(\Phi)$. La valeur moyenne donne simplement 1/2. La valeur moyenne du champ électrique au carré est donc

$$E_{\text{moy}}^2 = \frac{E_{\text{m}}^2}{2}. \tag{4.30}$$

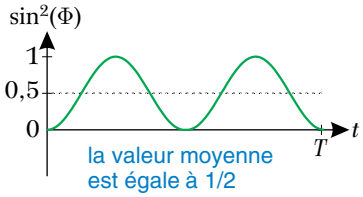


FIGURE 4.20
La fonction $\sin^2(\Phi)$ varie entre 0 et 1.

Habituellement, l'irradiance est exprimée en fonction de μ_0 plutôt que de ϵ_0. En effet,

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Rightarrow \epsilon_0 c = \frac{1}{\mu_0 c}.$$

On obtient donc l'irradiance en fonction du module du champ électrique :

$$I = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_{\text{m}}^2 = \frac{1}{2\mu_0 c} E_{\text{m}}^2. \tag{4.31}$$

On remarque de nouveau que la puissance transportée par une onde (l'énergie par unité de temps) dépend du **carré de l'amplitude de l'onde,** c'est-à-dire le carré de l'amplitude du champ électrique.

REMARQUE

On pourrait aussi présenter l'équation 4.31 en fonction de l'amplitude du champ magnétique. Toutefois, l'utilisation de la forme avec l'amplitude du champ électrique est préférable parce qu'il est plus facile de détecter un champ électrique qu'un champ magnétique dans le cas d'une onde électromagnétique.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 4.2

Une source lumineuse émet à une puissance P. On place un détecteur D_1 à une distance $r_1 = a$ et un détecteur D_2 à une distance $r_2 = 3a$. L'irradiance à la position de D_1 est I_1, et l'irradiance à la position de D_2 est I_2.

a. À la position de P_1, quel est le rapport u_B/u_E ?
b. Quel est le rapport des irradiances I_1/I_2 ?
c. Quel est le rapport entre les amplitudes des champs électriques $\frac{E_{1\text{m}}}{E_{2\text{m}}}$ aux positions des détecteurs ?

EXEMPLE 4.2 L'irradiance solaire

Le Soleil produit une puissance moyenne de $3{,}8 \times 10^{26}$ W. La Terre se trouve à une distance moyenne de $1{,}496 \times 10^{11}$ m.

a. Quelle est l'irradiance solaire mesurée sur Terre ?
b. Quelle est l'amplitude du champ électrique ?
c. Quelle est l'amplitude du champ magnétique ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Comme le Soleil est très éloigné de la Terre par rapport à son rayon, on peut le considérer comme une source ponctuelle.

Connues	Inconnues
$P_S = 3{,}8\times10^{26}\ \text{W}$	I
$r = 1{,}496\times10^{11}\ \text{m}$	E_m B_m

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 4.26, afin de calculer l'irradiance à une distance r d'une source ponctuelle :

$$I = \frac{P_S}{4\pi r^2}\,. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$I = \frac{3{,}8\times10^{26}\ \text{W}}{4\pi\,(1{,}496\times10^{11}\ \text{m})^2} = 1{,}35\times10^{3}\ \text{W/m}^2$$

$$I = 1{,}4\ \text{kW/m}^2\,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

L'irradiance dépend du carré de l'amplitude du champ électrique, selon l'équation 4.31 :

$$I = \frac{1}{2\mu_0 c}E_\text{m}^2 \Rightarrow E_\text{m} = \sqrt{2\mu_0 c I}\,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Le module du champ électrique est

$$E_\text{m} = \sqrt{2\times4\pi\times10^{-7}\times3{,}00\times10^{8}\times1{,}4\times10^{3}}$$

$$= 1{,}0\ \text{kV/m}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Identifier la clé

Nous obtenons le module du champ magnétique à l'aide de l'équation 4.6 :

$$B_\text{m} = \frac{E_\text{m}}{c}\,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$B_\text{m} = \frac{1{,}0\times10^{3}\ \text{V/m}}{3{,}00\times10^{8}\ \text{m/s}} = 3{,}4\ \mu\text{T}\,. \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons bien aux questions. Remarquez que le module du champ magnétique est plus faible que le champ magnétique terrestre, dont le module est d'environ 50 µT.

4.5 La pression de radiation

FIGURE 4.21
La comète Hale-Bopp

La lumière transporte de l'énergie, mais aussi de la quantité de mouvement. Elle peut exercer une force sur les objets. Cette force est habituellement négligeable pour ce qui est des objets qui nous entourent, mais elle doit être prise en considération dans le cas des sondes spatiales qu'on envoie pour explorer le système solaire, car la lumière du Soleil exerce une force sur les objets dans le système solaire. La forme de la queue principale d'une comète est due à cette force (*voir la figure 4.21*). La queue d'une comète provient de la lumière que réfléchissent des grains de poussière éjectés de la comète. La trajectoire de ces grains subit l'influence de la *pression de radiation* causée par la lumière du Soleil. La pression de radiation est également importante dans le cas de la lumière provenant d'un laser, car cette dernière est très concentrée, avec une irradiance importante.

Prenons une onde électromagnétique plane qui éclaire complètement un écran ayant une aire A (*voir la figure 4.22*). Selon les équations de Maxwell, l'onde incidente transporte de la quantité de mouvement $\vec{\mathbf{p}}_\text{em}$, orientée dans le même sens que la vitesse de l'onde, et dont le module est

$$p_\text{em} = \frac{U}{c}\,, \qquad (4.32)$$

où U est l'énergie électromagnétique contenue dans l'onde. On suppose que l'écran est immobile avant de recevoir l'onde et que l'onde électromagnétique est complètement absorbée par l'écran. Selon le principe de conservation de la quantité de mouvement, la quantité de mouvement de l'onde doit être transférée à l'écran, car l'onde est complètement absorbée. Lorsque l'écran absorbe une énergie ΔU, sa quantité de mouvement change aussi : $\Delta p_y = \Delta U/c$ (*voir la figure 4.23*). Selon la deuxième loi de Newton, la variation de la quantité de mouvement d'un objet est causée par une force exercée sur l'objet :

$$F_y = \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U}{c\,\Delta t}\,. \tag{4.33}$$

On peut réécrire la dernière équation en fonction de l'irradiance de la lumière, car selon l'équation 4.28, $\Delta U = IA\,\Delta t$. La force exercée par la lumière est donc

$$F_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{IA\,\Delta t}{c\,\Delta t} = \frac{I}{c} A\,.$$

La force exercée par la lumière est proportionnelle à l'aire de l'écran qui est éclairée. On appelle cette force la *force de radiation*. On définit la *pression de radiation* comme le module de cette force par unité d'aire éclairée :

$$p_{\text{rad}} \equiv \frac{F_{\text{rad}}}{A_{\text{éclairée}}} = \frac{I}{c} \qquad \text{(absorption totale)}\,. \tag{4.34}$$

Donc, la pression de radiation dépend de l'irradiation de la lumière qui éclaire un objet. Pour obtenir une pression de radiation importante, il faut que l'irradiation soit élevée, donc que la lumière soit focalisée sur une petite aire.

Dans le cas où la lumière est complètement réfléchie par l'écran, celui-ci a une quantité de mouvement deux fois plus grande selon le principe de conservation de la quantité de mouvement. Comme le montre la figure 4.24, après la réflexion, l'onde électromagnétique a une quantité de mouvement $\vec{\mathbf{p}}_{\text{em,f}} = -\frac{\Delta U}{c}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$. Selon le principe de conservation de la quantité de mouvement,

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{p}}_{\text{em,i}} + \vec{\mathbf{p}}_{\text{e,i}} &= \vec{\mathbf{p}}_{\text{em,f}} + \vec{\mathbf{p}}_{\text{e,f}} \\ \frac{\Delta U}{c}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \vec{\mathbf{0}} &= -\frac{\Delta U}{c}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{é}} \\ \Delta\vec{\mathbf{p}}_{\text{é}} &= \frac{2\,\Delta U}{c}\vec{\boldsymbol{\jmath}}\,. \end{aligned} \tag{4.35}$$

La quantité de mouvement change deux fois plus que dans le cas de la lumière absorbée. La force de radiation exercée par la lumière sur l'écran et la pression de radiation sont donc deux fois plus grandes dans la présente situation :

$$p_{\text{rad}} = \frac{F_{\text{rad}}}{A_{\text{éclairée}}} = \frac{2I}{c} \quad \text{(réflexion totale)}\,. \tag{4.36}$$

Les deux cas étudiés sont les deux cas limites. Soit $\mathcal{R}$ le *coefficient de réflexion* d'un objet, c'est-à-dire la fraction de l'énergie lumineuse qui est réfléchie par l'objet. La pression de radiation sur un objet est

$$p_{\text{rad}} \equiv \frac{F_{\text{rad}}}{A_{\text{éclairée}}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) I\,. \tag{4.37}$$

Pour une surface qui absorbe complètement la lumière (un écran noir), $\mathcal{R} = 0$, alors que pour une surface parfaitement réfléchissante (un miroir parfait), $\mathcal{R} = 1$.

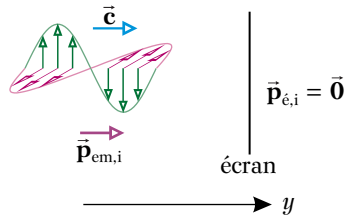


FIGURE 4.22
Une onde électromagnétique éclaire un écran.

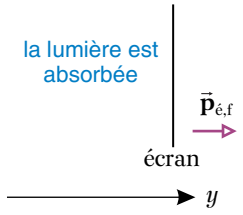


FIGURE 4.23
La lumière est complètement absorbée par l'écran. La quantité de mouvement est transférée à l'écran.

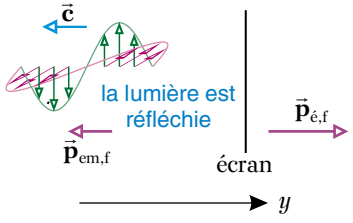


FIGURE 4.24
La lumière réfléchie transfère deux fois plus de quantité de mouvement à l'écran que dans le cas où la lumière est absorbée.

MISE EN GARDE

Pour calculer le module de la force de radiation sur un objet, on doit multiplier la pression de radiation par l'aire de l'objet éclairée par la lumière, alors que pour calculer l'irradiance de la lumière, on utilise la puissance de la source et l'aire du faisceau.

EXEMPLE 4.3 La pression d'un pointeur

Un pointeur laser de 1,05 mW produit un faisceau lumineux de 1,70 mm de diamètre. On éclaire un carton noir de 5,00 cm de côté. Le carton absorbe 96 % de la lumière.

a. Quelle est l'irradiance de la lumière du laser ?

b. Quel est le module de la force de radiation sur le carton ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 4.25 illustre le carton et la partie éclairée.

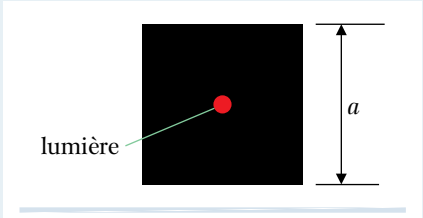


FIGURE 4.25
La lumière d'un laser sur un carton noir

Décortiquer le problème

Le carton absorbe 96 % de la lumière, ce qui implique qu'il en réfléchit 4 %.

Connues	Inconnues
$P_S = 1{,}05\times10^{-3}$ W	I
$d = 1{,}70$ mm	F_{rad}
$a = 5{,}00$ cm	
$\mathcal{R} = 0{,}04$	

SOLUTION a.

Identifier la clé

Nous calculons l'irradiance à l'aide de l'équation 4.25 :

$$I = \frac{P}{A}, \qquad \text{(i)}$$

où A est l'aire du faisceau, c'est-à-dire l'aire d'un cercle :

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons les données dans les équations (i) et (ii) :

$$I = \frac{P}{\pi d^2/4} = \frac{4P}{\pi d^2}$$
$$= \frac{4\times1{,}05\times10^{-3}\ \text{W}}{\pi\,(1{,}70\times10^{-3}\ \text{m})^2}$$
$$I = 462{,}6\ \text{W/m}^2 = 463\ \text{W/m}^2\ . \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

Selon la figure 4.25, l'aire du carton éclairée correspond à l'aire du faisceau. Les dimensions du carton ne sont pas utiles ici.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 4.37 :

$$p_{\text{rad}} = \frac{F_{\text{rad}}}{A_{\text{éclairée}}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) I$$
$$\Rightarrow F_{\text{rad}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) I A_{\text{éclairée}}. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons l'équation (i) dans l'équation (iii), car l'aire éclairée est égale à l'aire du faisceau, puis nous insérons les valeurs :

$$F_{\text{rad}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) P$$
$$= \left(\frac{1+0{,}04}{3{,}00\times10^{8}\ \text{m/s}}\right) 1{,}05\times10^{-3}\ \text{W}$$
$$F_{\text{rad}} = 3{,}64\times10^{-12}\ \text{N}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le module de la force de radiation est vraiment très faible. Ce n'est pas un pointeur laser qui va déplacer une feuille de papier.

EXEMPLE 4.4 Poussières de comète

Lorsqu'une comète s'approche du Soleil, des grains de poussière en sont éjectés, et ces grains forment la queue principale de la comète. Un certain grain de poussière sphérique se trouve à une distance de 1,00 ua du Soleil, il a un rayon de 0,150 µm et il réfléchit 10 % de la lumière. Sa masse volumique est de $3{,}5 \times 10^3$ kg/m^3. Le Soleil émet de la lumière à une puissance de $3{,}8 \times 10^{26}$ W. Quelle est force résultante exercée sur le grain de poussière ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 4.26 montre le diagramme des forces pour le grain de poussière. Les deux forces ont une direction radiale : la force gravitationnelle $\vec{\mathbf{F}}_g$ vers le Soleil, et la force de radiation $\vec{\mathbf{F}}_{rad}$ à l'opposé du Soleil. Nous avons ajouté le vecteur unitaire radial $\vec{\mathbf{u}}_r$.

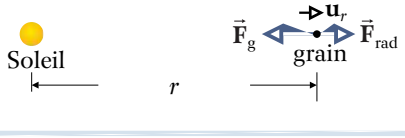


FIGURE 4.26
Le diagramme des forces pour l'exemple 4.4

Décortiquer le problème

À l'annexe C, nous trouvons la valeur de l'unité astronomique exprimée en mètres, et la masse du Soleil est donnée à l'annexe D. Nous utilisons le symbole r pour représenter la distance entre le Soleil et le grain de poussière, et le symbole a pour le rayon de ce grain de poussière.

Connues	
$r = 1{,}496 \times 10^{11}$ m	$a = 1{,}50 \times 10^{-7}$ m
$\rho = 3{,}5 \times 10^3$ kg/m^3	$\mathcal{R} = 0{,}10$
$P_S = 3{,}8 \times 10^{26}$ W	$M_S = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg

Inconnue
$\vec{\mathbf{F}}_{rés}$

L'aire transversale du grain de poussière est

$$A_{éclairé} = \pi a^2 \,, \tag{i}$$

où a est son rayon. En effet, si on éclaire une sphère, l'ombre correspond à un disque de même rayon. Pour r = 1,00 ua, le Soleil se comporte comme une source ponctuelle, car son rayon est beaucoup plus petit. L'irradiance est donc

$$I = \frac{P_S}{4\pi r^2} \,. \tag{ii}$$

Identifier la clé

La force résultante est

$$\vec{\mathbf{F}}_{rés} = \vec{\mathbf{F}}_{rad} + \vec{\mathbf{F}}_g \,, \tag{iii}$$

où la force de radiation $\vec{\mathbf{F}}_{rad}$ est obtenue à l'aide de l'équation 4.37 :

$$\vec{\mathbf{F}}_{rad} = p_{rad} A \vec{\mathbf{u}}_r = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) IA\vec{\mathbf{u}}_r \,. \tag{iv}$$

La force $\vec{\mathbf{F}}_g$ est la force gravitationnelle, étudiée au chapitre 7 du tome 1 :

$$\vec{\mathbf{F}}_g = -\frac{GM_S m_p}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r = -\frac{GM_S\rho\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r \,, \tag{v}$$

où la masse du grain de poussière a été exprimée en fonction de sa masse volumique et de son volume.

Résoudre le problème

Nous calculons la force de radiation en insérant les équations (i) et (ii) dans l'équation (iv) :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_{rad} &= \frac{(1+\mathcal{R})\,P_S \pi a^2}{c 4\pi r^2}\vec{\mathbf{u}}_r \\ &= \frac{(1+0{,}10)\,3{,}8\times10^{26}\text{ W}\,(1{,}50\times10^{-7}\text{ m})^2}{4\times3{,}00\times10^8\text{ m/s}\,(1{,}496\times10^{11}\text{ m})^2}\vec{\mathbf{u}}_r \\ \vec{\mathbf{F}}_{rad} &= 3{,}5\times10^{-19}\text{ N}\vec{\mathbf{u}}_r \,. \end{aligned} \tag{vi}$$

La force gravitationnelle est

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_g &= -\frac{4\pi GM_S\,\rho a^3}{3r^2}\vec{\mathbf{u}}_r \\ &= -\big[4\pi\times6{,}67\times10^{-11}\times1{,}99\times10^{30} \\ &\qquad \times3{,}5\times10^3\,(1{,}50\times10^{-7})^3\big] \\ &\qquad \times\big[3\times(1{,}496\times10^{11})^2\big]^{-1}\vec{\mathbf{u}}_r \\ \vec{\mathbf{F}}_g &= -2{,}9\times10^{-19}\text{ N}\,\vec{\mathbf{u}}_r \,. \end{aligned} \tag{vii}$$

La force résultante est donc

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_{rés} &= 3{,}5\times10^{-19}\text{ N}\,\vec{\mathbf{u}}_r - 2{,}9\times10^{-19}\text{ N}\,\vec{\mathbf{u}}_r \\ &= 6\times10^{-20}\text{ N}\,\vec{\mathbf{u}}_r \,. \end{aligned}$$

La force résultante est donc orientée à l'opposé du Soleil :

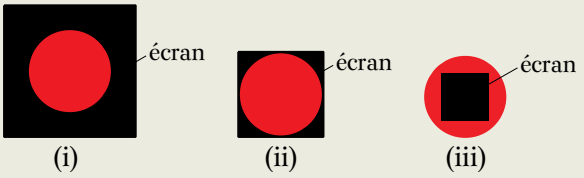
$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{rés}} = 6 \times 10^{-20} \text{ N } \overrightarrow{\text{opposée au Soleil}} . \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse
Remarquez que les deux forces diminuent selon l'inverse du carré de la distance. Quelle que soit la distance, la force gravitationnelle sera plus petite que la force de radiation pour un grain de poussière ayant le présent rayon. La force de radiation peut être plus petite que la force gravitationnelle quand un grain de poussière a un plus grand rayon, car cette force (qui dépend de a^2) augmente moins rapidement que la force gravitationnelle (qui dépend de a^3) lorsque a augmente.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 4.3

La figure suivante montre trois écrans noirs, ayant des grandeurs différentes, qui absorbent complètement la lumière. Ils sont éclairés par des faisceaux lumineux rouges identiques, ayant la même irradiation. Classez les écrans selon un ordre croissant :

a. de la pression de radiation exercée ;
b. du module de la force de radiation exercée.



4.6 La polarisation de la lumière

Jusqu'à présent, nous avons étudié une onde électromagnétique qui se déplace selon l'axe des y, dont le champ électrique oscille en direction de l'axe des z, et le champ magnétique oscille selon l'axe des x, comme à la figure 4.27. On dit que cette onde électromagnétique est *polarisée* dans la direction de l'axe des z (ou polarisée verticalement).

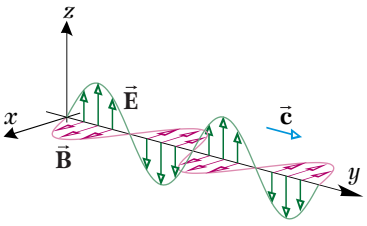


FIGURE 4.27
Une onde électromagnétique polarisée dans la direction de l'axe des z

À la figure 4.28, le champ électrique oscille dans la direction de l'axe des x. C'est une onde polarisée selon l'axe des x (une onde polarisée horizontalement). La direction de polarisation d'une onde correspond à la direction d'oscillation du champ électrique. Il est aussi possible d'obtenir une onde dont le champ électrique oscille dans le plan des xz de façon oblique par rapport aux axes, de telle sorte que le champ électrique demeure perpendiculaire à la vitesse de propagation $\vec{\mathbf{c}}$.

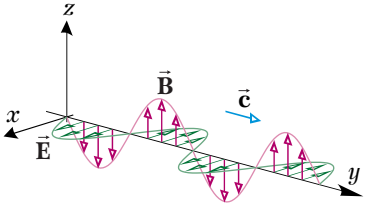


FIGURE 4.28
Une onde électromagnétique polarisée dans la direction de l'axe des x

Pour représenter la polarisation d'une onde électromagnétique, on trace les vecteurs $\pm\vec{\mathbf{E}}_m$ selon une vue de face, comme le montre la figure 4.29. L'onde

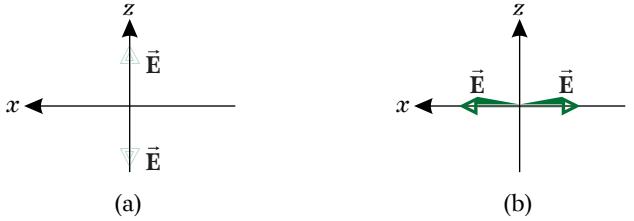


FIGURE 4.29
La représentation d'une onde polarisée : (a) en direction de l'axe des z ; (b) en direction de l'axe des x.

polarisée de la figure 4.27 est représentée à la figure 4.29a, et l'onde de la figure 4.28 est représentée à la figure 4.29b.

Certaines sources d'ondes comme les antennes radio et certains lasers émettent des ondes polarisées, dont la direction d'oscillation du champ électrique est bien définie. En revanche, la plupart des sources de lumière naturelle produisent des ondes électromagnétiques non polarisées. Par exemple, une ampoule électrique produit de la lumière lorsque le filament est chauffé. Cette lumière vient de l'accélération aléatoire des atomes. Chaque atome est indépendant des autres. Le champ résultant est la somme vectorielle de champs électriques qui oscillent dans toutes les directions perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde. On dit que l'onde est *non polarisée*, car la polarisation change continuellement, de façon aléatoire. On pourrait représenter une onde non polarisée par un grand nombre de vecteurs $\vec{\mathbf{E}}$, comme à la figure 4.30a. À la place, on trace le champ électrique dans deux directions perpendiculaires, comme à la figure 4.30b.

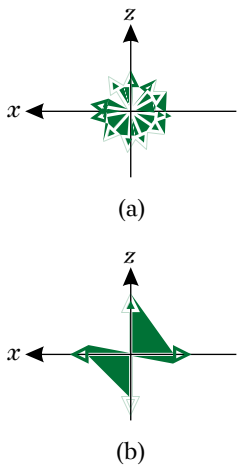


FIGURE 4.30
(a) Le champ électrique d'une onde non polarisée. (b) La représentation d'une onde non polarisée.

Il existe des phénomènes qui *polarisent partiellement* la lumière, c'est-à-dire qu'une direction de polarisation est favorisée par rapport aux autres. C'est le cas de la diffusion de la lumière par l'atmosphère. La lumière provenant du ciel bleu dans une direction de 90° par rapport à la direction du Soleil est partiellement polarisée. De même, la lumière réfléchie par une surface plane est partiellement polarisée parallèlement à la surface. Nous reviendrons au chapitre 5 sur la polarisation par réflexion. Pour représenter une lumière partiellement polarisée, on trace des vecteurs plus longs dans la direction favorisée, comme dans la figure 4.31, où une onde partiellement polarisée dans la direction de l'axe des x est représentée.

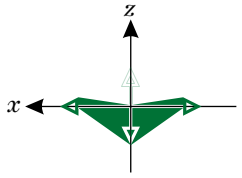


FIGURE 4.31
La représentation d'une onde partiellement polarisée dans la direction de l'axe des x

La façon la plus simple de polariser la lumière est d'utiliser un *polariseur*. Celui-ci fonctionne comme un filtre qui absorbe une composante du champ électrique dans une direction et qui laisse passer la composante perpendiculaire. C'est le scientifique et inventeur Edwin Land (1909-1991) qui a conçu ces filtres dans les années 1930. Ces filtres sont constitués de très longues molécules, appelées polymères, imbriquées dans du plastique. Au cours de la fabrication du polariseur, la feuille est étirée, ce qui aligne les polymères dans la même direction ; ces derniers forment une grille de longues molécules.

Lorsqu'une lumière non polarisée est incidente sur ce type de polariseur (*voir la figure 4.32*), la composante du champ parallèle aux molécules fait osciller les électrons à l'intérieur des molécules. Les électrons absorbent l'énergie du champ électrique, et celui-ci est absorbé. Par contre, le champ perpendiculaire aux molécules ne fait pas osciller les électrons, car ceux-ci ne peuvent pas passer d'une molécule à l'autre. Le polariseur absorbe le champ qui oscille parallèlement aux molécules de polymères, et il laisse passer le champ qui oscille perpendiculairement aux molécules. Après le polariseur, la lumière est polarisée perpendiculairement aux molécules. On définit l'*axe de transmission* du polariseur comme la direction dans laquelle le champ électrique est transmis. Cet axe est perpendiculaire aux molécules de polymères. Il est habituellement indiqué sur le boîtier du polariseur.

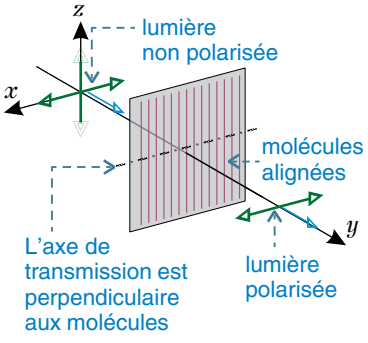


FIGURE 4.32
Un polariseur absorbe le champ électrique parallèle aux molécules. L'axe de transmission est perpendiculaire aux molécules.

Un polariseur idéal laisse passer complètement le champ électrique parallèle à l'axe de transmission et absorbe complètement le champ perpendiculaire à son axe. La lumière qui sort du polariseur est donc polarisée parallèlement à l'axe de transmission du polariseur.

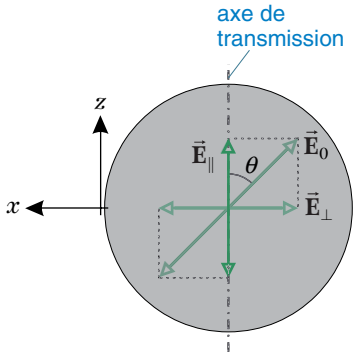


FIGURE 4.33
Un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}_0$ est incident sur un polariseur.

La loi de Malus

Supposons qu'une lumière polarisée est incidente sur un polariseur avec une irradiance I_0. L'axe de transmission du polariseur forme un angle θ par rapport à la direction de polarisation de la lumière. L'amplitude du champ électrique incident est E_0. Selon l'équation 4.31, l'irradiance de l'onde incidente est proportionnelle au carré de l'amplitude du champ électrique :

$$I_0 = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2 \,. \tag{4.38}$$

La figure 4.33 illustre le champ électrique incident et l'axe du polariseur, placé parallèlement à l'axe des z. Le champ électrique peut être décomposé selon ses composantes :

$$\vec{\mathbf{E}}_0 = E_{\perp}\vec{\boldsymbol{\imath}} + E_{\parallel}\vec{\boldsymbol{k}} = E_0 \sin\theta\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + E_0 \cos\theta\,\vec{\boldsymbol{k}} \,.$$

Un polariseur idéal laisse complètement passer la composante parallèle à l'axe de transmission ($E_{\parallel}\vec{\boldsymbol{k}}$) et absorbe complètement la composante perpendiculaire à l'axe de transmission ($E_{\perp}\vec{\boldsymbol{\imath}}$). L'amplitude du champ électrique transmis est alors

$$E = E_0 \cos\theta \,.$$

On peut calculer l'irradiance I de l'onde transmise en utilisant de nouveau l'équation 4.31 :

$$I = \frac{1}{2\mu_0 c} E^2 = \frac{1}{2\mu_0 c} (E_0 \cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2\right) \cos^2\theta$$

Loi de Malus

$$I = I_0 \cos^2\theta \qquad \text{(lumière incidente polarisée)} \,. \tag{4.39}$$

C'est la loi de Malus. Elle a été découverte par le physicien français Étienne Louis Malus de Mitry (1775-1812). Cette loi est illustrée à la figure 4.34, où un polariseur est placé devant un écran à cristaux liquides (qui émet de la lumière polarisée) ; trois orientations différentes de l'axe de transmission du polariseur sont présentées. On remarque que lorsque $\theta = 90°$ (*voir la figure 4.34c*), le polariseur absorbe complètement la lumière, et l'irradiance transmise est nulle.

(a) (b) (c)

FIGURE 4.34
Un polariseur est placé devant un écran à cristaux liquides. L'angle entre la polarisation de la lumière et l'axe de transmission est : (a) $\theta = 0°$; (b) $\theta = 45°$; (c) $\theta = 90°$.

Lorsque la lumière incidente sur un polariseur n'est pas polarisée, on doit calculer la moyenne de la loi de Malus pour toutes les orientations possibles. Comme la valeur moyenne de $\cos^2\theta$ est égale à 1/2, il en résulte que la moitié de l'irradiance incidente est transmise par le polariseur :

$$I = \frac{I_0}{2} \text{ (lumière incidente non polarisée)}. \qquad (4.40)$$

La figure 4.35 montre un montage important dans lequel une lumière non polarisée est incidente sur un premier polariseur P_1. Un deuxième polariseur P_2, qu'on appelle l'*analyseur*, est placé pour que son axe de transmission soit incliné d'un angle θ par rapport à celui de P_1. La quantité de lumière transmise est maximale lorsque les deux axes de transmission sont parallèles, alors qu'aucune lumière n'est transmise lorsque les axes de transmission sont perpendiculaires. Quand les axes sont perpendiculaires, on dit que les polariseurs sont *croisés*.

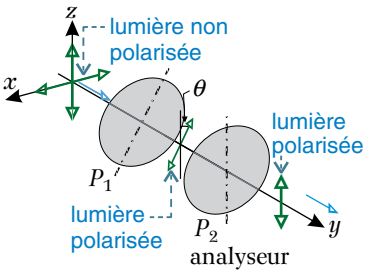
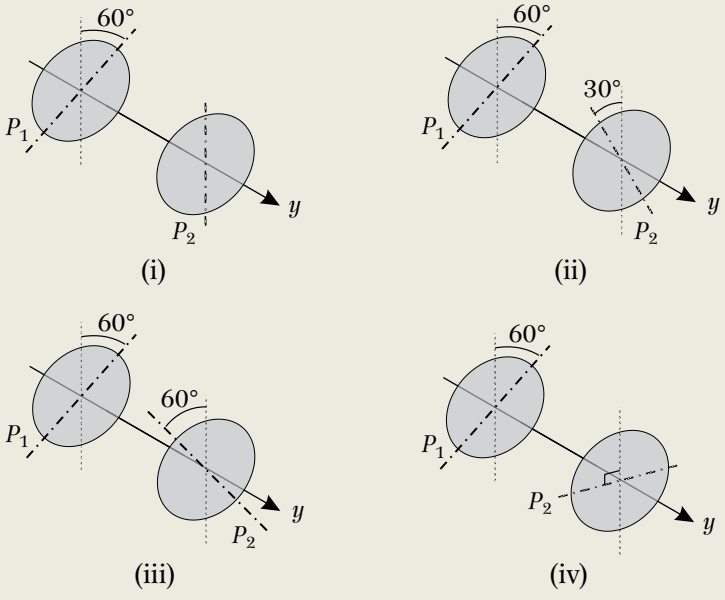


FIGURE 4.35
Le polariseur P_1 produit de la lumière polarisée. Le polariseur P_2 est l'analyseur.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 4.4

La figure suivante montre quatre systèmes de deux polariseurs. Ces systèmes sont éclairés par de la lumière non polarisée, qui se déplace dans le sens de l'axe des y. Classez les systèmes selon un ordre décroissant de la fraction de l'irradiation transmise par rapport à l'irradiance incidente.



EXEMPLE 4.5 La lumière à travers trois polariseurs

De la lumière non polarisée est incidente sur un système de trois polariseurs. La lumière se déplace dans le sens de l'axe des y, et l'irradiance initiale est de 0,600 W/m^2. L'axe de transmission du premier polariseur est parallèle à l'axe des z, l'axe de transmission du deuxième polariseur forme un angle de 25,0° en sens horaire par rapport à l'axe des z, et l'axe de transmission du troisième est parallèle à l'axe des x.

a. Quelle est la polarisation de la lumière après le troisième polariseur ?

b. Quelle est l'irradiance de la lumière après le troisième polariseur ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 4.36 montre les polariseurs et le champ électrique de la lumière à chaque étape.

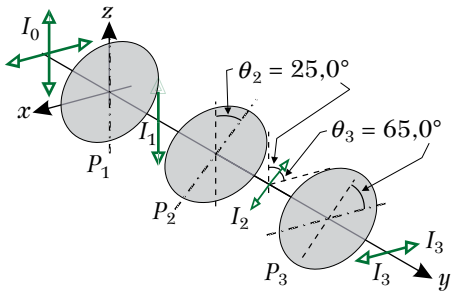


FIGURE 4.36
Le schéma de la situation pour l'exemple 4.5

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est que chaque polariseur laisse passer seulement la composante du champ électrique qui est parallèle à son axe de transmission.

Résoudre le problème

- Après P_1, $\vec{\mathbf{E}}_1$ oscille selon l'axe des z.
- Après P_2, $\vec{\mathbf{E}}_2$ oscille à 25,0° de l'axe des z, donc à 65,0° de l'axe des x.
- Après P_3, $\vec{\mathbf{E}}_3$ oscille selon l'axe des x.

Donc, la lumière transmise par P_3 est polarisée parallèlement à l'axe des x. (réponse)

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

Nous trouvons l'angle entre la lumière incidente et l'axe de transmission d'un polariseur à l'aide de la figure 4.36.

Connues	Inconnue
$I_0 = 0{,}600\ \text{W/m}^2$	I_3
$\theta_2 = 25{,}0°$	
$\theta_3 = 90° - 25{,}0° = 65°$	

Identifier les clés

Pour P_1, la lumière incidente est non polarisée. La **clé** permettant d'obtenir l'irradiance après P_1 est l'équation 4.40 :

$$I_1 = \frac{I_0}{2}. \qquad \text{(i)}$$

La lumière incidente sur P_2 et sur P_3 est polarisée. Pour obtenir l'irradiance après le polariseur, la **clé** est la loi de Malus (l'équation 4.39) :

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta_2 \qquad \text{(ii)}$$

$$I_3 = I_2 \cos^2 \theta_3 . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons les valeurs :

$$I_1 = \frac{0{,}600\ \text{W/m}^2}{2} = 0{,}300\ \text{W/m}^2$$

$$I_2 = 0{,}300\ \text{W/m}^2 \cos^2(25{,}0°) = 0{,}246\,4\ \text{W/m}^2$$

$$I_3 = 0{,}246\,4\ \text{W/m}^2 \cos^2(65{,}0°) = 0{,}044\,0\ \text{W/m}^2 .$$

(réponse)

Valider la réponse

Nous répondons bien aux questions. Il ne faut pas oublier de sélectionner le mode degré de la calculatrice plutôt que le mode radians, qui a été utilisé dans les premiers chapitres. Remarquez que si on enlève le polariseur P_2, il n'y a pas de lumière transmise par P_3, car la lumière transmise par P_1 a une polarisation perpendiculaire à l'axe de transmission de P_3.

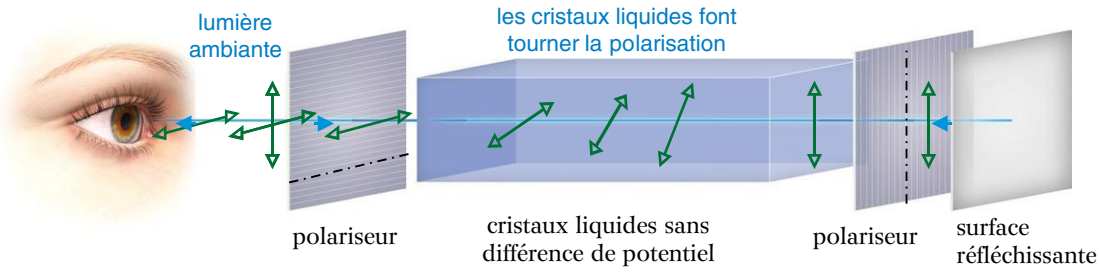
Quelques applications de la polarisation

Comme le montre la photographie en ouverture de chapitre, la lumière produite par un écran d'ordinateur est une lumière polarisée. La polarisation de la lumière est le principe de fonctionnement des écrans à affichage par cristaux liquides (ACL), comme les écrans de télévision, mais aussi les écrans des montres et des calculatrices. Les cristaux liquides peuvent faire tourner la

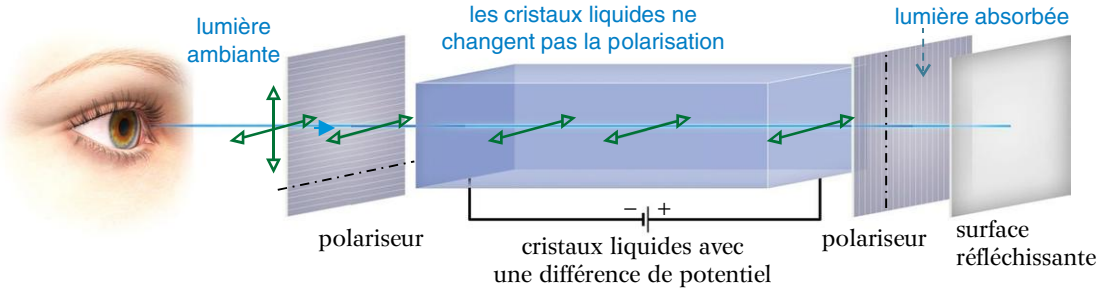
polarisation de la lumière, et cette rotation peut être contrôlée en appliquant une différence de potentiel.

La figure 4.37 montre un schéma simplifié de l'écran ACL d'une calculatrice. Chaque segment d'un chiffre est constitué d'une cellule de cristaux liquides placée entre deux polariseurs croisés et une surface réfléchissante. La cellule de cristaux liquides est conçue pour que ceux-ci tournent la polarisation de 90° lorsqu'aucune différence de potentiel n'est appliquée. Dans ce cas, la lumière naturelle incidente est polarisée horizontalement par le premier polariseur, les cristaux liquides produisent une rotation de 90° du plan de polarisation, ce qui fait que la lumière est polarisée verticalement lorsqu'elle est incidente sur le deuxième polariseur. Toute la lumière est transmise. Cette lumière est réfléchie par la surface réfléchissante, et elle revient vers l'observateur qui verra donc un fond gris. Le segment du chiffre est transparent.

À la figure 4.37b, une différence de potentiel est appliquée aux bornes de la cellule de cristaux liquides. Ceux-ci ne tournent plus la polarisation de la lumière. La lumière incidente sur le deuxième polariseur a une polarisation perpendiculaire à l'axe de transmission. Le deuxième polariseur absorbe alors la lumière. Dans ce cas, l'observateur voit un segment noir pour cette cellule de cristaux liquides.



(a)



(b)

FIGURE 4.37

Le schéma simplifié d'un écran à affichage à cristaux liquides d'une calculatrice. (a) Sans différence de potentiel appliquée aux cristaux liquides, ceux-ci font tourner le plan de polarisation. (b) Si on applique une différence de potentiel, les cristaux liquides ne changent plus la polarisation, et la lumière est absorbée par le polariseur de droite.

Les écrans couleur utilisent une lampe à la place de la surface réfléchissante pour produire la lumière incidente. Chaque pixel contient trois cellules de cristaux liquides et des filtres colorés (pour chaque couleur primaire). En appliquant une différence de potentiel plus ou moins intense, on contrôle l'intensité d'un pixel.

La polarisation est aussi utile en chimie et en biochimie. En effet, certaines molécules font tourner de façon naturelle la polarisation de la lumière. Cette propriété s'appelle l'*activité optique*. C'est le cas par exemple de la molécule de dextrose, un sucre simple. La rotation du plan de polarisation est une fonction de la distance parcourue dans la substance et de sa concentration. Un *polarimètre* est un appareil qui mesure l'angle de rotation de la polarisation causée par un échantillon (*voir la figure 4.38*). Un premier polariseur polarise la lumière incidente. L'échantillon fait tourner la polarisation d'un certain angle. Un deuxième polariseur (l'analyseur) est tourné jusqu'à ce que le détecteur mesure une irradiance maximale.

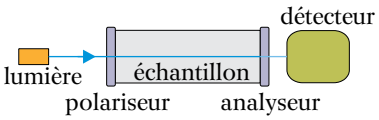


FIGURE 4.38
Un polarimètre permet de mesurer la rotation du plan de polarisation causée par un échantillon.

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié les propriétés des ondes électromagnétiques.

LES PRINCIPES ET LES LOIS

Une **onde électromagnétique** est constituée d'un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ et d'un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ oscillants. Ces champs existent en l'absence de charge électrique et de courant électrique.

- Le champ électrique est perpendiculaire au champ magnétique.
- Le produit $\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ donne un vecteur ayant la même orientation que la vitesse de l'onde $\vec{\mathbf{c}}$. L'onde électromagnétique est donc une onde transversale.
- Toutes les ondes électromagnétiques se déplacent dans le vide à une vitesse dont le module est

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

- Les champs sont en phase. L'amplitude du champ magnétique est

$$B_\text{m} = \frac{E_\text{m}}{c}.$$

LES RÉSULTATS

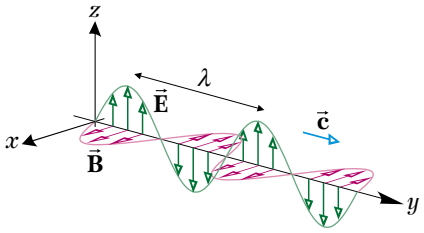
- Une onde électromagnétique qui se déplace dans le sens de l'axe des y peut être décrite par la **fonction d'onde** :

$$\vec{\mathbf{E}} = E_\text{m} \sin(ky - \omega t)\vec{\boldsymbol{k}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = B_\text{m} \sin(ky - \omega t)\vec{\boldsymbol{\imath}},$$

où

$$c = \lambda f = \frac{\omega}{k}.$$



- Le **spectre électromagnétique** regroupe les ondes de différentes fréquences et longueurs d'onde. Le domaine visible correspond à une longueur d'onde entre 800 nm (rouge) et 380 nm (violet).
- L'**irradiance** de la lumière est la puissance moyenne transportée par unité de surface :

$$I \equiv \frac{P}{A}.$$

L'irradiance à une distance r d'une source ponctuelle qui émet à une puissance P_S est

$$I = \frac{P_S}{4\pi r^2}.$$

L'irradiance dépend du **carré de l'amplitude** du champ électrique :

$$I = \frac{1}{2\mu_0 c} E_\text{m}^2 = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_\text{m}^2.$$

- La lumière exerce une **pression de radiation** sur un objet éclairé :

$$p_\text{rad} \equiv \frac{F_\text{rad}}{A_\text{éclairée}} = \left(\frac{1+\mathcal{R}}{c}\right) I,$$

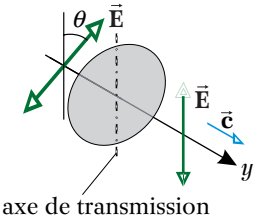
où $\mathcal{R}$ est le coefficient de réflexion de l'objet.

LES APPLICATIONS

- La **lumière est polarisée** lorsque le champ électrique oscille dans une direction déterminée.
- Un **polariseur idéal** laisse passer le champ électrique qui oscille dans la direction de son axe de transmission, et il absorbe complètement le champ électrique qui oscille perpendiculairement à son axe.
- L'irradiance de la lumière transmise est

$$I = I_0 \cos^2\theta \qquad \text{(lumière incidente polarisée)}$$

$$I = \frac{I_0}{2} \qquad \text{(lumière incidente non polarisée)}.$$



QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

Section 4.1 Les propriétés des ondes électromagnétiques

Q1 Une onde électromagnétique se déplace dans le sens de l'axe des z. À un certain instant, le champ électrique à un point est orienté dans le sens opposé à l'axe des x. À cet instant, quel est le sens du champ magnétique à ce point ?

Q2 Le champ magnétique d'une onde électromagnétique est donné par $\vec{\mathbf{B}} = B_m \sin(ky + \omega t)\vec{k}$.

a. Dans quel sens l'onde électromagnétique se propage-t-elle ?

b. Quel est le sens du champ électrique au point $y = 0$ lorsque $t = T/4$?

Q3 Une antenne linéaire, centrée sur l'origine, est placée parallèlement à l'axe des y. Elle porte des charges en mouvement d'oscillation le long de son axe.

a. Quelle est la direction d'oscillation du champ électrique pour des points éloignés sur l'axe des z ?

b. Quelle est la direction d'oscillation du champ magnétique pour des points éloignés sur l'axe des z ?

Q4 Montrez que le traitement des unités permet de vérifier que l'expression $1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ donne bien une vitesse.

E5 Le circuit électrique d'un émetteur oscille à une fréquence de 2,44 MHz. Quelle est la longueur d'onde des ondes électromagnétiques émises par cet émetteur ?

E6 Le champ électrique associé à une onde électromagnétique est

$$\vec{\mathbf{E}} = 3{,}5 \text{ V/m} \sin(30\pi y - 9{,}0 \times 10^9 \pi t)\,\vec{k} \ ,$$

où y est exprimé en mètres et t, en secondes.

a. Quelle est la fréquence de l'onde ?

b. Quelle est la longueur d'onde ?

c. Dans quel sens l'onde se propage-t-elle ?

d. Quelle est l'amplitude du champ magnétique ?

P7 Une onde électromagnétique est produite par une antenne excitée à une fréquence de 13,5 GHz. L'onde se propage vers le sud. En un point donné et à $t = 0$, le champ magnétique généré par le passage de l'onde a un module de $3{,}24 \times 10^{-9}$ T, et il est orienté vers l'est. De plus, à cet instant, le champ magnétique augmente.

a. Quelle est la longueur d'onde ?

b. Déterminez le champ électrique instantané au même endroit et au même instant.

c. Exprimez le champ électrique en fonction du temps pour ce point, si l'amplitude du champ magnétique est de $6{,}48 \times 10^{-9}$ T.

P8 En un point de l'espace, le champ magnétique correspond à $(1{,}20\vec{\imath} - 2{,}50\vec{\jmath}) \times 10^{-8}$ T, et le champ électrique est parallèle au vecteur $(-\vec{\imath} - 0{,}48\vec{\jmath} + 0{,}26\vec{k})$.

a. Quel est le vecteur représentant le champ électrique ?

b. Quelle est la vitesse de l'onde ?

Section 4.3 Le spectre électromagnétique

E9 Le domaine visible des longueurs d'onde des ondes électromagnétiques s'étend de 380 nm à 800 nm. À quel intervalle de fréquences cela correspond-il ?

Section 4.4 L'énergie transportée par la lumière

Q10 Deux sources lumineuses S_1 et S_2 sont placées à des distances d_1 et $d_2 = 2d_1$ d'un point donné. La source S_2 émet trois fois plus d'énergie que S_1.

a. Quel est le rapport des irradiances I_1/I_2 au point étudié ?

b. Quel est le rapport des amplitudes des champs électriques E_{1m}/E_{2m} au même endroit ?

E11 Une ampoule de 100 W émet à peu près uniformément dans toutes les directions autour d'elle. Si 4,1 % de l'énergie émise se trouve dans le domaine visible de la lumière, quelle est l'irradiance de la lumière visible à une distance de 3,00 m de cette ampoule ?

E12 Une chaufferette fonctionnant par radiation émet principalement dans l'infrarouge, dans toutes les directions autour des éléments chauffants. Quelle puissance totale doit produire la chaufferette si on veut qu'à 4,00 m une personne reçoive 6,00 W au total sur la partie exposée de son corps, qui est de 0,420 m^2 ?

E13 Un four à micro-ondes laisse généralement échapper une petite partie des ondes qu'il génère. Les normes exigent que l'irradiance mesurée à 5,00 cm de distance du four soit inférieure à 5,00 mW/cm^2. À cette limite d'irradiance, quelles sont l'amplitude du champ électrique et l'amplitude du champ magnétique ?

E14 Au passage d'une onde radio, le champ électrique en un point a un module de 0,075 2 V/m. Quelle est la densité d'énergie portée par l'onde à cet endroit ?

E15 L'antenne émettrice d'un téléphone cellulaire émet, dans le domaine des micro-ondes, avec une puissance de 0,225 W. Une antenne du réseau située à une distance de 3,25 km doit capter le signal pour permettre la communication.

a. Quelle est l'irradiance reçue à l'endroit où se trouve l'antenne réceptrice ?

b. Quelle est l'amplitude du champ électrique mesuré par cette antenne ?

E16 Un système d'alarme peut être actionné à distance au moyen d'une télécommande. L'émetteur de la télécommande a une puissance de 0,100 W. Le récepteur du système d'alarme doit recevoir un champ égal ou supérieur à 0,120 V/m pour armer le système. À quelle distance maximale du système d'alarme peut-on l'armer à l'aide de la télécommande ?

P17 Un laser n'émet pas la lumière de façon isotrope. À cause de la diffraction, la lumière est plutôt contenue dans un cône, comme le montre la figure 4.39. Un laser a une puissance de 0,800 mW, et son angle de divergence Θ est de 1,20 mrad. On place un écran à une distance de 10,00 m du laser, de telle sorte que le laser éclaire un cercle.

a. Quel est le rayon du cercle éclairé ?

b. Quelle est l'irradiance sur l'écran ?

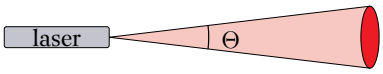


FIGURE 4.39 • Problème 17

Section 4.5 La pression de radiation

Q18 Un faisceau lumineux éclaire un écran noir. Indiquez par quel facteur est multipliée la pression de radiation dans les situations suivantes.

a. On double la distance.

b. On change l'écran pour doubler l'aire éclairée.

c. On remplace l'écran noir par un miroir, qui réfléchit complètement la lumière.

E19 Un miroir carré, de 90 cm de côté, est exposé au Soleil, de façon perpendiculaire. Il réfléchit complètement la lumière qu'il reçoit. L'irradiance du Soleil est de 800 W/m^2 au sol au moment de l'expérience. Quel est le module de la force de radiation exercée sur le miroir ?

E20 Une ampoule de 150 W est placée au centre d'une enceinte sphérique de 50,0 cm de rayon. Déterminez la pression de radiation appliquée sur la paroi intérieure de l'enceinte si celle-ci absorbe entièrement le rayonnement, en supposant que l'énergie est dissipée uniformément autour de l'ampoule.

P21 Quelle est la masse par unité d'aire que doit avoir un grain de poussière, qui réfléchit 12,0 % de la lumière, pour que la force gravitationnelle et la force de radiation du Soleil s'équilibrent, sachant que $P_{\text{Soleil}} = 3{,}8 \times 10^{26}$ W ?

P22 Une sonde spatiale qui explore Mars étend ses panneaux solaires perpendiculairement au Soleil pour alimenter ses équipements. Les deux panneaux solaires présentent chacun une aire de 23,5 m^2 et absorbent 80 % de l'énergie lumineuse reçue. Sachant que le Soleil émet de façon uniforme une puissance radiative de $3{,}8 \times 10^{26}$ W, quel est le module de la force de radiation subie par le satellite ? (Indice : L'annexe D peut vous être utile.)

P23 Quel est le module de la quantité de mouvement que reçoit par rayonnement la Terre durant une période de 24 heures ? L'albédo moyen de la Terre (son coefficient de réflexion) est de 0,30. L'irradiance solaire reçue par la Terre est de 1,36 kW/m^2, perpendiculaire au rayonnement solaire.

P24 Un petit cube a une masse volumique ρ et un coefficient de réflexion $\mathcal{R}$. On le fait flotter en l'éclairant avec un laser, dont la puissance est P_{laser} et qui éclaire un cercle de rayon r. La lumière du laser est centrée sur la surface du cube. Quelle puissance du laser est nécessaire dans les situations suivantes ?

a. Le côté du cube a est plus petit que le rayon r du faisceau.

b. Le côté du cube a est plus grand que le diamètre ($d = 2r$) du faisceau.

Section 4.6 La polarisation de la lumière

Q25 Comment peut-on produire de la lumière polarisée horizontalement à partir d'une lumière polarisée verticalement, en utilisant deux polariseurs ?

Q26 De la lumière se propageant horizontalement est incidente sur un polariseur dont l'axe de transmission est horizontal. On tourne légèrement le polariseur. Indiquez comment change l'irradiance de l'onde transmise dans les situations suivantes.

a. La lumière incidente n'est pas polarisée.

b. La lumière incidente est polarisée horizontalement.

c. La lumière incidente est polarisée verticalement.

E27 Quel pourcentage de l'irradiance incidente est transmise par un polariseur dans les situations suivantes ?

a. La lumière incidente est polarisée parallèlement à l'axe de transmission du polariseur.

b. La lumière incidente est polarisée perpendiculairement à l'axe de transmission du polariseur.

c. La lumière incidente est polarisée à 30° par rapport à l'axe de transmission du polariseur.

d. La lumière incidente n'est pas polarisée.

E28 Le Soleil produit $3{,}8 \times 10^{26}$ W en rayonnement. Dans certaines conditions, l'atmosphère atténue 65 % de l'énergie provenant du Soleil. Dans ces conditions, quelle est l'irradiance traversant un polariseur placé perpendiculairement au rayonnement ?

E29 Une lumière initialement non polarisée traverse successivement deux polariseurs A et B dont les axes sont perpendiculaires l'un à l'autre. On insère, entre les deux polariseurs, un troisième polariseur C dont l'axe de transmission forme un angle de 30,0° par rapport à l'axe du

polariseur A. En fonction de l'irradiance initiale I_0, déterminez l'irradiance :

a. après le polariseur A ;

b. après le polariseur C ;

c. après le polariseur B.

P30 Trois polariseurs sont placés l'un après l'autre, comme le montre la figure 4.40. L'axe de transmission du premier polariseur est vertical, et les axes de transmission des deux autres polariseurs forment un angle $\theta = 25{,}0°$ de chaque côté de l'horizontale. De la lumière non polarisée est incidente sur le premier polariseur, avec une irradiance de 0,780 W/m^2. Calculez l'irradiance de la lumière transmise par le troisième polariseur.

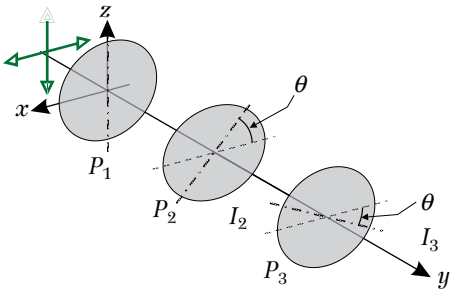


FIGURE 4.40 • Problème 30

P31 Une onde plane non polarisée, dont la longueur d'onde est de 632 nm, se propage dans le même sens que l'axe des x avec une irradiance de 4,70 W/m^2. Un polariseur dont l'axe de transmission est parallèle à l'axe des y est placé perpendiculairement à la lumière.

a. Écrivez l'expression du champ électrique transmis par le polariseur.

b. Écrivez l'expression du champ magnétique transmis par le polariseur.

P32 Un polarimètre est constitué de deux polariseurs séparés par un cylindre de 10,0 cm de longueur, dans lequel on place une solution de sucrose (*voir la figure 4.41*). Pour une concentration de 1,00 g de sucrose par millilitre de solution, le sucrose fait tourner la polarisation de la lumière d'un angle de 6,65° par centimètre parcouru par la lumière dans la solution. Pour obtenir un maximum de lumière transmise, le deuxième polariseur doit former un angle de 1,2° par rapport au premier. Quelle est la masse du sucrose dans 1,00 L de la solution ?

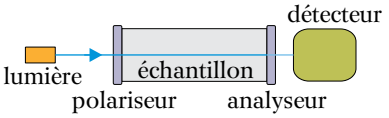


FIGURE 4.41 • Problème 32

P33 Une lumière polarisée verticalement frappe un polariseur dont l'axe de transmission forme un angle θ avec la verticale. Un deuxième polariseur, dont l'axe de transmission est horizontal, est placé après le premier polariseur. Pour quels angles θ l'irradiance de la lumière transmise par le second polariseur est-elle égale à 15,0 % de l'irradiance de la lumière incidente ?

P34 La lumière partiellement polarisée peut être considérée comme une superposition d'une lumière polarisée et d'une lumière non polarisée :

$$I_0 = I_p + I_{np}\,.$$

On place un polariseur perpendiculairement à une lumière partiellement polarisée. On tourne le polariseur graduellement, jusqu'à 180°, en le gardant perpendiculaire à la lumière. Durant la rotation, on mesure que l'irradiance de la lumière transmise passe par un maximum et par un minimum non nul. Si l'irradiance maximale est 6,5 fois plus grande que l'irradiance minimale, quel pourcentage de la lumière incidente est polarisée ?

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

4.1	**a.** Dans le sens de l'axe des x	Le sens de propagation est obtenu à l'aide de la phase. Comme la phase dépend de la coordonnée x, l'onde se déplace dans la direction de l'axe des x. Le signe négatif dans la phase indique que l'onde se déplace dans le même sens que l'axe.
	b. Dans le sens de l'axe des z	$\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ doit donner le sens de propagation de l'onde. Ici, on obtient $\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$.
4.2	**a.** $\frac{u_B}{u_E} = 1$	Dans une onde électromagnétique, la densité d'énergie magnétique est égale à la densité d'énergie magnétique, car $B_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{m}}/c$.
	b. $\frac{I_1}{I_2} = 9$	L'irradiance dépend de l'inverse du carré de la distance. Comme le détecteur D_2 est placé à une distance trois fois plus grande, l'irradiance à sa position est 9 fois plus petite.
	c. $\frac{E_{1\mathrm{m}}}{E_{2\mathrm{m}}} = 3$	L'irradiance dépend du carré de l'amplitude du champ électrique. L'irradiance à la position de D_2 est 9 fois plus petite, ce qui implique que l'amplitude du champ est trois plus petite à cette position.
4.3	**a.** $p_{\mathrm{rad,i}} = p_{\mathrm{rad,ii}} = p_{\mathrm{rad,iii}}$	Dans le cas d'une surface qui absorbe complètement la lumière, la pression de radiation est $p_{\mathrm{rad}} = I/c$. Comme les faisceaux ont la même irradiance, les pressions de radiation sont égales.
	b. $F_{\mathrm{rad,iii}} < F_{\mathrm{rad,i}} = F_{\mathrm{rad,ii}}$	Le module de la force de radiation dépend de la pression de radiation (égale pour les trois situations) et de l'aire éclairée. L'aire éclairée est plus petite dans la situation (iii), alors que dans les situations (i) et (ii), la même aire est éclairée.
4.4	$I_{\mathrm{iv}} > I_{\mathrm{i}} = I_{\mathrm{iii}} > I_{\mathrm{ii}}$	Selon la loi de Malus, l'irradiance transmise dépend du cosinus au carré de l'angle entre les deux axes de transmission. On a $\theta_1 = 60°$, $\theta_2 = 90°$, $\theta_3 = 60°$ et $\theta_4 = 30°$.

Chapitre 05

La propagation de la lumière

Buts du chapitre

Ce chapitre porte sur la propagation de la lumière dans différents milieux. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- d'expliquer la façon dont la lumière se propage dans un milieu ;
- d'analyser la réflexion et la réfraction de la lumière ;
- de décrire le phénomène de dispersion ;
- d'expliquer la polarisation de la lumière produite par une réflexion.

Préalables

Dans ce chapitre, l'étude de la lumière se poursuit avec l'analyse de sa propagation. Revoyez :

- les propriétés des ondes électromagnétiques, vues à la section 4.1 ;
- la réflexion et la transmission des ondes, étudiées à la section 2.6 ;
- les ondes en deux et en trois dimensions, présentées à la section 3.3 ;
- la polarisation de la lumière, vue à la section 4.6.

Un arc-en-ciel est produit par la dispersion de la lumière du Soleil lors de la réfraction à travers les gouttes d'eau.

Le précédent chapitre a porté sur la lumière et les autres ondes électromagnétiques lorsque celles-ci se propagent dans le vide. Nous nous concentrons maintenant plus spécifiquement sur la lumière visible (dont la longueur d'onde dans le vide varie entre 380 nm et 800 nm), et nous analysons sa propagation dans des milieux transparents autres que le vide.

On observe des phénomènes intéressants lorsque la lumière change de milieu de propagation. Une partie de la lumière est réfléchie vers le premier milieu, et une partie est transmise dans le deuxième milieu, phénomène appelé la *réfraction*. Ce chapitre décrit en détail la réflexion et la réfraction de la lumière.

La réfraction est le résultat de l'interaction du champ électrique de l'onde avec les atomes du milieu, ce qui change le module de la vitesse de propagation de la lumière. La déviation de la lumière qui en résulte dépend de la fréquence de l'onde lumineuse. Ce phénomène est la *dispersion* ; il permet de décomposer la lumière selon les différentes longueurs d'onde, à l'aide d'un prisme. Lorsqu'on observe un arc-en-ciel comme celui qui est illustré en ouverture de chapitre, on est témoin de la dispersion de la lumière du Soleil par les gouttes de pluie.

L'état de polarisation de la lumière influence aussi la réflexion et la réfraction de la lumière lorsque celle-ci change de milieu. Par exemple, quand la lumière non polarisée du Soleil est réfléchie par la surface d'un lac, la lumière réfléchie est partiellement polarisée : le champ électrique oscillant parallèlement à la surface du lac est favorisé par la réflexion.

5.1 La vitesse de la lumière dans les milieux transparents

À la section 4.2, nous avons déterminé le module de la vitesse de la lumière lorsque celle-ci se déplace dans le vide ($c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$) en obtenant l'équation d'onde à partir des équations de Maxwell. Quand la lumière se propage dans un milieu matériel, le champ électrique de l'onde interagit avec les molécules du milieu. Cette interaction modifie la propagation de la lumière. Le champ magnétique a aussi une interaction avec les molécules du milieu, mais celle-ci est très faible pour la majeure partie des matériaux. L'effet du champ magnétique sera donc négligé dans cette étude.

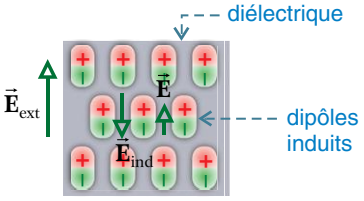


FIGURE 5.1
Le champ électrique $\vec{E}_{ind}$ produit par les dipôles induits est en sens opposé à celui du champ $\vec{E}_{ext}$. Le champ résultant $\vec{E}$ est plus faible dans le diélectrique.

Selon les résultats obtenus au chapitre 3 du tome 2, lorsqu'un champ électrique extérieur est appliqué dans un diélectrique, le diélectrique devient polarisé. En effet, le champ électrique déplace le nuage électronique, ce qui induit des dipôles électriques. Ces dipôles produisent à leur tour un champ électrique, en sens opposé au champ extérieur, comme le montre la figure 5.1. Le champ électrique résultant est donc plus faible que le champ extérieur à l'intérieur du diélectrique. L'effet macroscopique est obtenu en remplaçant la constante ϵ_0 par $\kappa\epsilon_0$, où κ est la constante diélectrique du matériau.

Dans le tome 2, notre étude a porté sur un champ électrique statique qui ne varie pas en fonction du temps. Dans le cas de la lumière visible qui se propage dans un diélectrique, le champ électrique de l'onde oscille très rapidement, à une fréquence f. Ce champ oscillant produit une oscillation des nuages électroniques des atomes du diélectrique. Les atomes deviennent des petits dipôles oscillants, qui produisent de nouvelles ondes électromagnétiques, ayant la même fréquence que l'onde incidente. Par contre, ces ondes ne sont pas en phase avec l'onde initiale. L'onde résultante est la superposition de l'onde initiale et des

ondes produites par les dipôles atomiques oscillants. Comme les ondes ne sont pas en phase, l'interférence produit une onde ayant une plus petite longueur d'onde et une vitesse de propagation plus petite que c.

On peut de nouveau appliquer les lois de Maxwell à une onde plane qui se propage dans un matériau diélectrique transparent. On obtient l'équation d'onde, mais la constante électrique ϵ_0 est multipliée par la constante diélectrique κ:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\kappa\epsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\, c\,. \tag{5.1}$$

En optique, on définit l'*indice de réfraction* n d'un milieu comme le rapport entre le module de la vitesse de la lumière dans le vide et le module de la vitesse de la lumière dans ce milieu:

$$n \equiv \frac{c}{v} = \sqrt{\kappa}\,. \tag{5.2}$$

Indice de réfraction

Le terme est associé à la réfraction, mais ce paramètre caractérise les propriétés optiques d'un matériau. Le tableau 5.1 donne les valeurs de l'indice de réfraction dans différents milieux à une longueur d'onde fixe. À moins d'avis contraire, ces valeurs seront utilisées dans les calculs, quelle que soit la longueur d'onde de la lumière visible.

On remarque que l'indice de réfraction d'un gaz est très près de 1, ce qui montre que le module de la vitesse de la lumière est à peu près le même que dans le cas du vide. En effet, il y a peu d'atomes dans un gaz, et le gaz devient peu polarisé lorsque la lumière le traverse.

L'interaction entre la lumière incidente et les atomes du milieu varie en fonction de la fréquence de la lumière. Pour cette raison, la constante diélectrique et

TABLEAU 5.1

Les valeurs approximatives de l'indice de réfraction de différentes substances à une longueur d'onde dans le vide de 589 nm. Ces valeurs varient en fonction des propriétés physiques des substances (pression, température...).

Substance	Indice	Substance	Indice
Gaz à 0° C *et* 1 atm		*Solide à* 20 °C	
Air	1,000 29	Ambre	1,55
Gaz carbonique	1,000 45	Chlorure de sodium	1,544
Hélium	1,000 036	Diamant	2,419
Hydrogène	1,000 132	Glace (0 °C)	1,31
		Plexiglass	1,51
Liquides à 20 °C		Pyrex	1,47
Disulfure de carbone	1,628	Saphir	1,77
Benzène	1,501	Verre crown	1,52
Eau	1,333	Verre de quartz	1,468
Éthanol	1,361	Verre flint	1,66
Glycérine	1,473	Verre flint au lanthane	1,80
Tétrachlorure de carbone	1,461	Zircon	1,923

l'indice de réfraction dépendent de la fréquence de la lumière. Ceci implique que la vitesse de la lumière dans un milieu n'est pas la même pour la lumière rouge que pour la lumière violette. Ce phénomène est appelé la *dispersion*. Nous allons étudier la dispersion à la section 5.6, ce qui nous permettra de comprendre la formation des arcs-en-ciel.

MISE EN GARDE

Les valeurs de constantes diélectriques données au tableau C.3 de l'annexe C ne peuvent pas être utilisées pour calculer l'indice de réfraction de la lumière. Les valeurs de ce tableau sont valables pour un champ électrique statique, alors que le champ électrique de la lumière varie à une fréquence de l'ordre de 10^{14} Hz. Quand le champ oscille rapidement, le nombre de dipôles atomiques qui se forment n'est pas le même que dans le cas où le champ ne varie pas en fonction du temps.

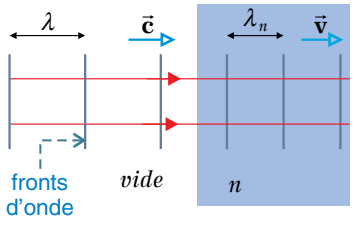


FIGURE 5.2
La vitesse plus faible dans le milieu de droite produit des fronts d'onde plus rapprochés.

Lorsque la lumière se propage dans un milieu matériel, la fréquence ne change pas, mais la longueur d'onde est plus faible que dans le cas de la propagation dans le vide. Comme le montre la figure 5.2, lorsque le module de la vitesse de la lumière est plus faible, les fronts d'onde doivent être plus rapprochés, car l'onde se déplace moins durant une période d'oscillation.

Soit λ la longueur d'onde de la lumière lorsque celle-ci se propage dans le vide, et λ_n la longueur d'onde de la lumière dans un milieu ayant un indice de réfraction n. Selon l'équation 2.20,

$$c = \lambda f \qquad \text{et} \qquad v = \lambda_n f \ .$$

On peut insérer ces deux équations dans l'équation 5.2 :

$$n = \frac{\lambda f}{\lambda_n f}$$

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} . \tag{5.3}$$

Comme l'indice de réfraction de l'air est très près de 1, la longueur d'onde change de façon négligeable par rapport à la longueur d'onde dans le vide. Par contre, si la lumière se propage dans l'eau, le changement de longueur d'onde n'est pas négligeable. Il est donc essentiel d'indiquer le milieu de propagation lorsqu'on donne la longueur d'onde de la lumière. Il sera important de considérer la variation de la longueur d'onde de la lumière lorsque nous étudierons l'interférence de la lumière au chapitre 7.

EXEMPLE 5.1 Une lumière jaune dans l'eau

Dans le vide, la lumière jaune produite par des vapeurs de sodium a une fréquence de $5{,}09 \times 10^{14}$ Hz et une longueur d'onde de 589 nm. Cette lumière se propage dans l'eau.

a. Quelle est la fréquence de la lumière dans l'eau ?
b. Quel est le module de la vitesse de la lumière qui se propage dans l'eau ?
c. Quelle est la longueur d'onde dans l'eau ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

L'indice de réfraction de l'eau est donné au tableau 5.1.

Connues	Inconnues
$f = 5{,}09 \times 10^{14}$ Hz	f_n
$\lambda = 589$ nm	v
$n = 1{,}333$	λ_n

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est que la fréquence ne change pas lorsque la lumière se propage dans un milieu différent du vide. Alors,

$$f_n = f = 5{,}09 \times 10^{14} \text{ Hz} . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 5.2 :

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow v = \frac{c}{n} . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons les valeurs numériques :

$$v = \frac{3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}}{1{,}333} = 2{,}25 \times 10^8 \text{ m/s} .$$

(réponse)

SOLUTION c.

Identifier la clé

La longueur d'onde dans l'eau est obtenue à l'aide de l'équation 5.3 :

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\lambda_n = \frac{589 \text{ nm}}{1{,}333} = 442 \text{ nm} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

On peut vérifier que $\lambda_n f = v$.

5.2 L'approximation de l'optique géométrique

La lumière est une onde électromagnétique, ce que nous avons vu au chapitre 4. Cette onde est une onde transversale qui se propage en trois dimensions. Pour analyser la propagation de la lumière, on doit étudier la propagation des fronts d'onde. Comme le montre la figure 5.3 à la page suivante, une source ponctuelle émet des fronts d'onde sphériques, qui se propagent de façon radiale. On introduit ici la notion de *rayons*, qui permet d'indiquer le sens de propagation de la lumière. Les rayons sont des lignes toujours perpendiculaires aux fronts d'onde. Dans le cas d'une onde sphérique, les rayons sont des lignes radiales.

Pour des points très éloignés de la source, les fronts d'onde sont semblables à des plans. On a alors une onde plane, comme le montre la figure 5.4 (*voir la page suivante*). Cette fois-ci, les rayons sont des lignes parallèles. De même, la lumière produite par un laser a des fronts d'onde plans et des rayons parallèles.

REMARQUE

Un rayon lumineux n'est pas un objet réel. C'est plutôt une ligne mathématique qui nous aide à modéliser la lumière.

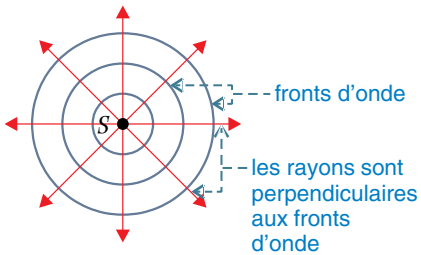


FIGURE 5.3
Une source ponctuelle produit des fronts d'onde sphériques.

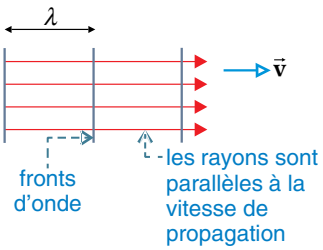


FIGURE 5.4
Loin d'une source, les fronts d'onde sont des plans, et les rayons sont des lignes parallèles.

Le principe de Huygens

FIGURE 5.5
Christiaan Huygens (1629-1695), physicien et astronome néerlandais

Il est possible d'analyser le comportement de la lumière comme une onde en utilisant les équations de Maxwell. Cette méthode permet d'obtenir des résultats conformes à la réalité, mais l'utilisation de ces équations demeure complexe. Un modèle de la lumière a été développé bien avant que l'électromagnétisme soit compris. En effet, l'astronome et physicien néerlandais Christiaan Huygens (1629-1695) (*voir la figure 5.5*) a élaboré un modèle ondulatoire en 1678 pour expliquer la réflexion et la réfraction de la lumière. Ce modèle a été amélioré au 19e siècle par le physicien français Augustin Jean Fresnel (1788-1827) pour expliquer le phénomène de la diffraction de la lumière.

Selon le principe de Huygens, la lumière se propage sous forme de fronts d'onde. On peut trouver un front d'onde subséquent à l'aide d'une construction géométrique, selon le *principe de Huygens* :

> Les points formant un front d'onde se comportent comme des sources d'ondes sphériques secondaires. Les ondes secondaires se déplacent à la vitesse $v = c/n$ dans un milieu transparent. Après un temps t, la nouvelle position du front d'onde correspond à la surface tangente aux ondes secondaires.

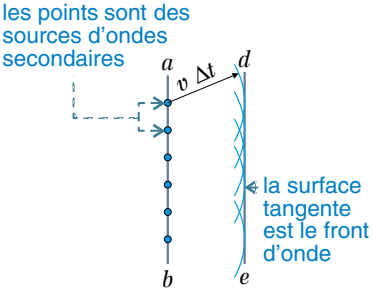


FIGURE 5.6
La construction de Huygens pour obtenir un front d'onde qui se déplace vers la droite

La figure 5.6 montre un front d'onde plan $\overline{ab}$, composé de sources d'ondes secondaires, illustrées par les points. Après un temps Δt, chaque onde secondaire est une onde sphérique ayant un rayon $v\,\Delta t$. La surface tangente aux ondes sphériques est un plan $\overline{de}$, parallèle au front d'onde $\overline{ab}$. Si on choisit un intervalle de temps égal à la période ($\Delta t = T = 1/f$), alors la distance entre deux fronts d'onde successifs correspond à la longueur d'onde.

REMARQUE

Le principe de Huygens demeure un modèle simple pour expliquer la lumière. Il ne permet pas de décrire en détail tous les aspects de la lumière.

La diffraction

Lorsqu'une onde rencontre un obstacle, les fronts d'onde se déforment pour contourner l'obstacle. C'est la *diffraction*. La figure 5.7 montre une onde plane à la surface de l'eau qui rencontre une ouverture. Les ondes ne se déplacent donc pas en ligne droite lorsqu'elles rencontrent des obstacles. La diffraction est un phénomène ondulatoire, qui se manifeste pour toutes les ondes. C'est par la diffraction que vous pouvez entendre un son à travers une porte entrouverte. L'onde sonore passe à travers l'ouverture, se déforme, et inonde la pièce en se

déplaçant dans toutes les directions. Une partie de l'onde sonore se rend jusqu'à vos oreilles, quelle que soit votre position dans la pièce.

La diffraction dépend de la dimension des obstacles par rapport à la longueur d'onde de la lumière. La lumière semble se déplacer en ligne droite lorsque la grandeur des obstacles est beaucoup plus grande que la longueur d'onde de la lumière (*voir la figure 5.8a*). Dans le cas d'une fente dont la largeur est égale à quelques longueurs d'onde, la diffraction produit un étalement non négligeable de l'onde, comme le montre la figure 5.8b. On ne peut plus dire que la lumière se déplace en ligne droite. Lorsque la largeur est environ égale ou plus petite que la longueur d'onde, le front d'onde émergent est sphérique. On peut donc dire qu'une très petite fente se comporte comme une source ponctuelle, qui émet de la lumière dans toutes les directions.

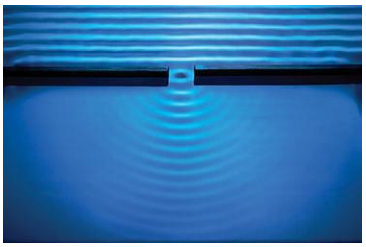


FIGURE 5.7
Une onde plane se propageant vers le bas rencontre un obstacle.

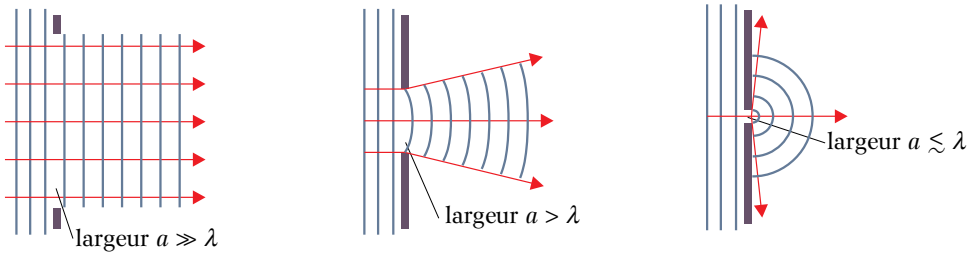


FIGURE 5.8
La diffraction de la lumière qui traverse une fente de largeur a : (a) pour $a \gg \lambda$, la diffraction est négligeable ; (b) pour $a > \lambda$, la lumière ne se déplace pas en ligne droite ; (c) pour $a \lesssim \lambda$, la fente se comporte comme une source ponctuelle.

Le principe de Huygens permet de comprendre qualitativement la relation entre la grandeur de l'obstacle et la forme des fronts d'onde qui traversent ce dernier. Lorsque $a \gg \lambda$, il y a un grand nombre d'ondes secondaires qui passent à travers l'ouverture, comme le montre la figure 5.9a. Le front d'onde, qui correspond à la courbe tangente aux ondes secondaires, est approximativement un plan. Lorsque l'ouverture est plus petite, seulement quelques sources secondaires produisent des ondes qui traversent l'ouverture (*voir la figure 5.9b*). La courbe tangente aux ondes secondaires n'est plus plane, mais elle est courbée sur les côtés. Lorsque la largeur de l'ouverture est plus petite que la longueur d'onde, il n'y a qu'une onde secondaire qui traverse l'ouverture. Le front d'onde est donc sphérique, ce qui est équivalent à une source ponctuelle, comme le montre la figure 5.9c.

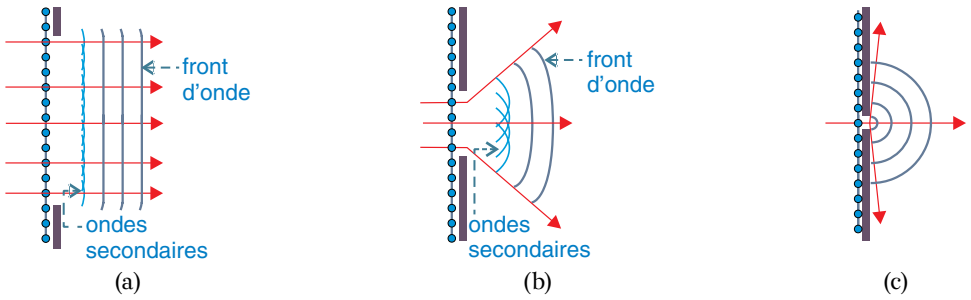


FIGURE 5.9
La construction de Huygens pour la diffraction : (a) pour $a \gg \lambda$, un grand nombre d'ondes secondaires passent à travers l'ouverture ; le front d'onde est un plan ; (b) pour $a > \lambda$, il n'y a qu'un petit nombre d'ondes secondaires qui passent à travers l'ouverture ; le front d'onde est déformé ; (c) pour $a \lesssim \lambda$, seule une onde secondaire passe à travers l'ouverture.

Les expériences courantes avec la lumière ne permettent pas d'observer facilement la diffraction. Par exemple, lorsque la lumière du Soleil passe à travers une fenêtre, cette lumière ne remplit pas la pièce. De plus, l'ombre d'un objet est bien définie. Il y a diffraction, mais son effet est très faible, car la longueur d'onde de la lumière visible (entre 380 nm et 800 nm) est beaucoup plus petite que les dimensions de la fenêtre, comme dans la situation illustrée à la figure 5.8a. Ceci est un exemple où l'*approximation de l'optique géométrique* est valable.

On peut dire que la lumière se propage en ligne droite tant qu'elle ne rencontre pas d'objets dont les dimensions sont semblables à la longueur d'onde de la lumière.

Dans le présent chapitre ainsi que dans le prochain chapitre, nous étudierons des miroirs, des lentilles et des prismes, qui ont des ouvertures de quelques centimètres. L'approximation de l'optique géométrique est alors une bonne approximation pour la lumière visible. Nous allons modéliser la lumière comme un ensemble de rayons lumineux, qui sont des segments de droite. L'aspect ondulatoire de la lumière n'est pas apparent. Aux chapitres 7 et 8, nous analyserons des situations où de petits objets sont éclairés. Les effets ondulatoires comme la diffraction seront alors apparents.

5.3 La réflexion de la lumière

Vous observez la réflexion de la lumière chaque jour. Vous pouvez utiliser un miroir dans une salle de bain pour vérifier que vos cheveux sont bien placés. De même, un rétroviseur permet d'observer les objets situés derrière une voiture sans avoir à tourner complètement la tête. Dans ces situations, la lumière est réfléchie par des surfaces planes. C'est la *réflexion spéculaire*. Comme le montre la figure 5.10, un ensemble de rayons parallèles frappant la surface d'un miroir sont réfléchis en demeurant parallèles.

Pour simplifier l'analyse, on remplace l'ensemble des rayons par un seul rayon incident, comme le montre la figure 5.11. Ce rayon est réfléchi par la surface réfléchissante. On utilise la normale à la surface pour mesurer les angles des rayons d'incidence et de réflexion. Soit θ, l'angle entre le rayon incident et la normale,

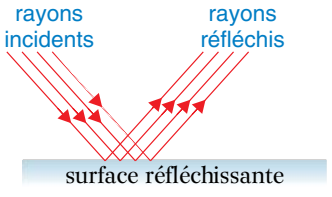


FIGURE 5.10
Une réflexion spéculaire

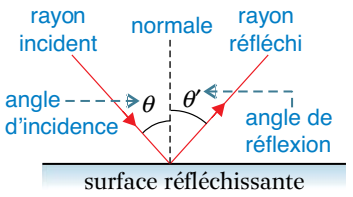


FIGURE 5.11
Les angles des rayons sont mesurés par rapport à la normale à la surface.

qu'on appelle l'*angle d'incidence*. De même, soit θ', l'angle entre le rayon réfléchi et la normale, qu'on appelle l'*angle de réflexion*. Selon la *loi de la réflexion*,

- Le rayon incident et le rayon réfléchi sont dans un même plan, qui est perpendiculaire au plan de la surface. C'est le *plan d'incidence*.
- L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence :

$$\theta = \theta' . \qquad (5.4)$$

La loi de la réflexion peut être démontrée facilement de façon expérimentale. Elle découle aussi du modèle ondulatoire de Huygens, comme nous l'apprendrons dans la sous-section suivante.

La réflexion produite par un miroir permet de changer la direction de propagation de la lumière. On définit l'*angle de déviation* δ (la lettre grecque delta) comme l'angle entre la direction initiale et la direction de la lumière réfléchie. En se basant sur la figure 5.12, on peut voir que la déviation se calcule à l'aide de la géométrie :

$$\delta = 180° - \theta - \theta' = 180° - 2\theta \qquad \text{(réflexion)} . \qquad (5.5)$$

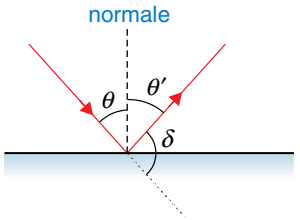


FIGURE 5.12
La réflexion fait dévier le rayon lumineux d'un angle δ.

EXEMPLE 5.2 Une réflexion double

Deux miroirs plans sont placés pour former un angle de 100°. Un rayon est incident à un angle de 40° par rapport à la normale du premier miroir. Quel est l'angle de déviation total produit par le système de miroirs sur le rayon lumineux ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 5.13 illustre le schéma de la situation. L'angle d'incidence sur le premier miroir est θ_1. Ce miroir M_1 réfléchit ce rayon à un angle $\theta'_1 = \theta_1$, selon la loi de la réflexion. Ce rayon est alors incident sur le deuxième miroir à un angle θ_2. Le deuxième miroir le réfléchit à un angle θ_2.

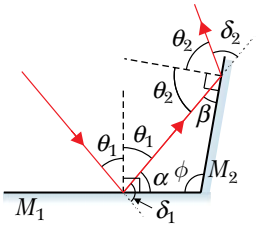


FIGURE 5.13
Le schéma de la situation pour l'exemple 5.2

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\theta_1 = 40°$ $\phi = 100°$	δ

Dans la figure 5.13, l'angle α est complémentaire à l'angle θ_1, et l'angle β est complémentaire à l'angle θ_2 :

$$\alpha = 90° - \theta_1 = 90° - 40° = 50° . \qquad \text{(i)}$$

Les deux miroirs et le rayon forment un triangle, avec les angles internes α, β et ϕ. Comme la somme des angles internes d'un triangle est égale à 180°, on détermine l'angle β :

$$\beta = 180° - \alpha - \phi = 180° - 50° - 100° = 30°. \qquad \text{(ii)}$$

L'angle β est l'angle complémentaire à θ_2 :

$$\theta_2 = 90° - 30° = 60° . \qquad \text{(iii)}$$

Identifier la clé

La **clé** est que chaque réflexion produit une déviation de la lumière d'un angle :

$$\delta = 180° - 2\theta . \qquad \text{(iv)}$$

De plus, les deux déviations sont dans le même sens (en sens antihoraire). La déviation totale est donc la somme des déviations :

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 . \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord chaque déviation en insérant la valeur de θ_1 dans l'équation (iv), puis l'équation (iii) dans l'équation (iv) :

$$\delta_1 = 180° - 2 \times 40° = 100°$$

$$\delta_2 = 180° - 2 \times 60° = 60°.$$

La déviation totale est alors

$$\delta = 100° + 60° = 160°. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La réponse semble correcte, selon le tracé du schéma.

La réflexion diffuse

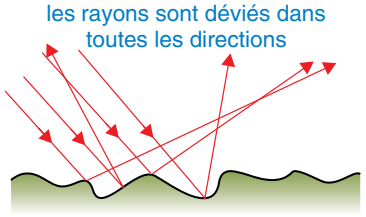


FIGURE 5.14
Une réflexion diffuse, produite par une surface irrégulière

La lumière est aussi réfléchie lorsqu'elle frappe la surface d'un objet quelconque, comme une feuille de papier ou un crayon. Cette réflexion nous permet de voir ces objets. Ces derniers ne sont pas lisses comme un miroir, mais ils possèdent des irrégularités. Lorsqu'un ensemble de rayons frappent la surface de tels objets, chaque rayon est réfléchi selon la loi de la réflexion. Cependant, l'angle d'incidence est différent pour chaque rayon, comme le montre la figure 5.14. Les rayons sont déviés dans différentes directions par rapport à la direction incidente. C'est la *réflexion diffuse*.

Toutes les surfaces ont des irrégularités, même les miroirs. Pour que la réflexion soit diffuse, il faut que les dimensions des irrégularités soient plus grandes que la longueur d'onde de la lumière. La longueur d'onde de la lumière visible est plus petite que 0,8 µm. On peut donc dire que si les irrégularités de la surface sont de l'ordre du micromètre ou plus grandes, alors la réflexion est diffuse. Dans le cas contraire, on obtient une réflexion spéculaire.

La loi de la réflexion selon le principe de Huygens

Le modèle ondulatoire de Huygens permet d'obtenir la loi de la réflexion en analysant comment les fronts d'onde sont réfléchis. La figure 5.15 montre un front d'onde $\overline{ab}$ incident, perpendiculaire aux rayons incidents. L'angle d'incidence est θ, et l'angle de réflexion est θ'. On suppose que l'onde se propage dans un milieu quelconque, à une vitesse dont le module est v.

On considère trois sources d'ondes secondaires le long du front d'onde $\overline{ab}$. Après un temps Δt, l'onde secondaire issue de a se rend jusqu'au point c, et l'onde secondaire issue de b se rend au point d. La distance entre les fronts d'onde $\overline{ab}$ et $\overline{cd}$ est donc $v\,\Delta t$ (*voir la figure 5.15a*). Le front d'onde suivant est le segment $\overline{ef}$ (*voir la figure 5.15b*). On obtient les rayons réfléchis en traçant les lignes perpendiculaires à ce front d'onde.

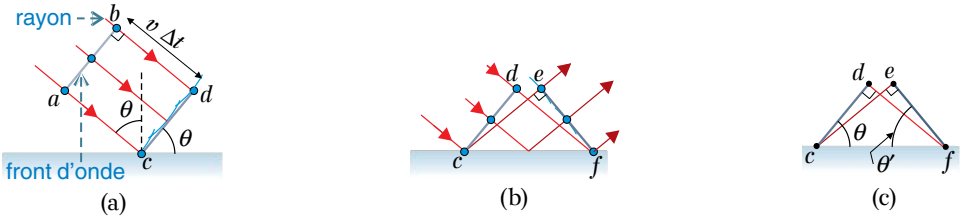


FIGURE 5.15
La construction pour la réflexion d'une onde dont l'angle d'incidence est θ: (a) le front d'onde $\overline{ab}$ génère le front d'onde $\overline{cd}$; (b) le front d'onde $\overline{cd}$ génère le front d'onde $\overline{ef}$; (c) la construction produit les triangles cdf et cef.

La figure 5.15c résume la construction géométrique en présentant les triangles rectangles *cdf* et *cef*. La segment $\overline{df}$ a une longueur $v\,\Delta t$, car ce segment correspond à la distance entre deux fronts d'onde. Pour la même raison, le segment $\overline{ce}$ a une longueur $v\,\Delta t$. Ces triangles partagent la même hypoténuse, le côté $\overline{cf}$. On a alors

$$\sin\theta = \frac{\overline{df}}{\overline{cf}} = \frac{v\,\Delta t}{\overline{cf}}$$
$$\sin\theta' = \frac{\overline{ce}}{\overline{cf}} = \frac{v\,\Delta t}{\overline{cf}}$$
$$\Rightarrow \theta = \theta' .$$

Il s'agit bien de la loi de la réflexion. Le modèle ondulatoire de Huygens permet bien d'établir la relation entre l'angle de réflexion et l'angle d'incidence.

5.4 La réfraction de la lumière

Lorsque la lumière rencontre l'interface entre deux milieux, une partie de la lumière est réfléchie et une partie est transmise dans le deuxième milieu. Par exemple, lorsqu'il fait nuit et que vous êtes à l'intérieur de la maison, vous pouvez voir la lumière d'une lampe réfléchie par la fenêtre. En même temps, un passant à l'extérieur peut voir la lumière de la lampe qui passe à travers le verre de la fenêtre.

Ce phénomène est semblable à ce qui se passe lorsqu'une onde sur une corde arrive au point de jonction entre deux cordes, ce que nous avons vu à la section 2.6. Lorsqu'une onde arrive à un endroit où le module de la vitesse change, il y a une onde réfléchie et une onde transmise. Dans le cas de la lumière, le module de la vitesse de la lumière dépend de l'indice de réfraction, selon le résultat obtenu à la section 5.1. Donc, chaque fois que la lumière rencontre une interface entre deux milieux pour lesquels l'indice de réfraction est différent, il y aura une partie de la lumière réfléchie dans le premier milieu et une partie de la lumière transmise dans le deuxième milieu.

FIGURE 5.16
La lumière issue du crayon est déviée par la réfraction lorsqu'elle traverse l'interface entre l'eau et l'air.

Pour une onde qui se déplace en trois dimensions, le changement de vitesse produit une déviation des fronts d'onde. On parle alors de *réfraction*. Ceci peut être facilement observé en plaçant un crayon dans un récipient d'eau, comme le montre la figure 5.16. Lorsque la lumière se propage de l'eau à l'air, elle est déviée par la réfraction, ce qui donne l'illusion que le crayon est cassé.

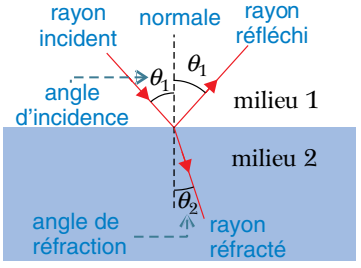


FIGURE 5.17
Un rayon incident rencontre une interface entre deux milieux différents.

Prenons un rayon incident, qui se déplace dans un milieu 1, ayant un indice de réfraction n_1, et qui rencontre l'interface d'un milieu 2, dont l'indice de réfraction est n_2 (*voir la figure 5.17*). Une partie de la lumière est réfléchie selon la loi de la réflexion, à un angle $\theta'_1 = \theta_1$. L'autre partie de la lumière est réfractée dans le deuxième milieu. L'angle du rayon réfracté par rapport à la normale est θ_2 ; c'est l'angle de réfraction. La loi de la réfraction, qui relie θ_1 et θ_2, est

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 . \qquad (5.6)$$

Loi de la réfraction

Cette loi a été découverte de façon indépendante par le mathématicien et physicien néerlandais Willebrord Snell (1580-1626) et par le mathématicien et philosophe français René Descartes (1596-1650). Pour cette raison, on appelle aussi cette relation la *loi de Snell-Descartes*.

La figure 5.18 montre les trois possibilités selon la relation entre l'indice de réfraction du milieu incident et l'indice de réfraction du deuxième milieu :

- $n_2 > n_1$, comme le montre la figure 5.18a (par exemple lorsque la lumière passe de l'air à l'eau) : le rayon réfracté est plus près de la normale que le rayon incident ($\theta_2 < \theta_1$), et une partie de la lumière est réfléchie.
- $n_2 < n_1$, comme on peut le voir à la figure 5.18b (par exemple lorsque la lumière passe de l'eau à l'air) : le rayon réfracté est plus éloigné de la normale que le rayon incident ($\theta_2 > \theta_1$), et une partie de la lumière est réfléchie.
- $n_2 = n_1$, comme le montre la figure 5.18c (ceci peut se produire lorsqu'un solide est placé dans un liquide ayant le même indice) : dans ce cas, les deux milieux ont les mêmes propriétés optiques. Il n'y a pas de réflexion, et le rayon réfracté n'est pas dévié, c'est-à-dire que $\theta_2 = \theta_1$.

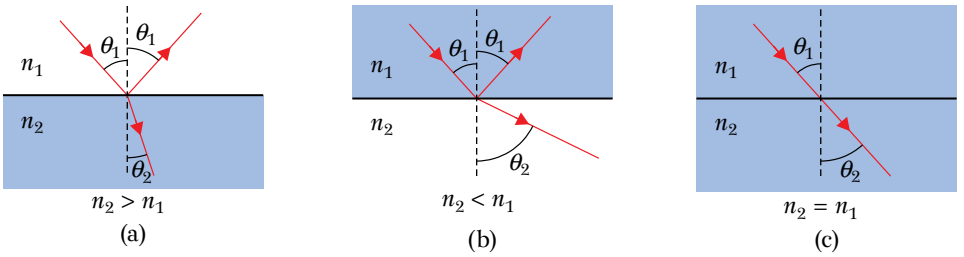


FIGURE 5.18
Les trois possibilités de déviation lors d'une réfraction : (a) le rayon s'approche de la normale ; (b) le rayon s'éloigne de la normale ; (c) il n'y a aucune déviation.

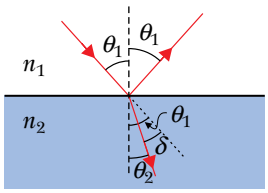


FIGURE 5.19
La lumière est déviée d'un angle δ lors de la réfraction.

La réfraction fait dévier la lumière. L'angle de déviation s'obtient à l'aide de la géométrie. Comme le montre la figure 5.19 dans le cas où $\theta_1 > \theta_2$, l'angle θ_1 correspond à la somme de θ_2 et δ ($\theta_1 = \theta_2 + \delta$). Lorsque $\theta_1 < \theta_2$, on obtient $\theta_2 = \delta + \theta_1$. Donc, de façon générale, l'angle de déviation lors d'une réfraction est

$$\delta = |\theta_1 - \theta_2| \qquad \text{(réfraction)} . \qquad (5.7)$$

Pour obtenir le parcours de la lumière lors de plusieurs réfractions successives, la technique suivante est utile.

TECHNIQUE 5.1 La réfraction de la lumière

1. Tracer un rayon incident pour représenter le trajet de la lumière.
2. Tracer la normale pour chaque interface que la lumière rencontre.
3. Tracer le rayon réfracté, en le faisant dévier dans la bonne direction : l'angle est plus faible dans le milieu ayant un indice de réfraction plus élevé.
4. Numéroter les angles de façon séquentielle, en les mesurant par rapport à la normale.
5. Utiliser la loi de la réfraction pour mettre en relation les angles et les indices de réfraction. Au besoin, utiliser les règles de la géométrie.

EXEMPLE 5.3 La déviation produite par une lame de verre

La lumière issue d'un laser frappe une lame de verre à un angle de 50,0° par rapport à la surface de la lame. Cette dernière a une épaisseur de 5,0 mm, avec des faces parallèles, et elle est composée de verre crown dont l'indice de réfraction est de 1,52.

a. Quel est l'angle de réfraction de la lumière dans le verre ?
b. Quel est l'angle de réfraction de la lumière lorsque celle-ci revient dans l'air ?
c. Quel est le déplacement latéral du rayon lumineux ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 5.20 illustre la situation et présente les quatre premières étapes de la technique 5.1. Remarquez que l'angle $\theta_1 = 90° - 50° = 40°$.

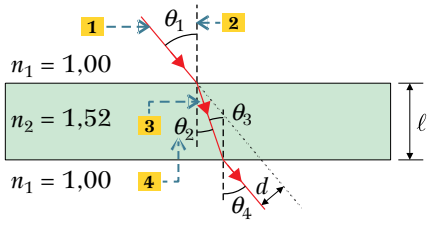


FIGURE 5.20
Le schéma de la situation pour l'exemple 5.3

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues	
$\theta_1 = 40°$	$\ell = 5{,}0$ mm	θ_2	θ_4
$n_1 = 1{,}00$	$n_2 = 1{,}52$	d	

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est la loi de la réfraction, donnée par l'équation 5.6 :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2} . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\theta_2 = \arcsin\left[\frac{1{,}00 \sin(40°)}{1{,}52}\right] = 25° . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

Selon la figure 5.20, les deux normales sont parallèles, car la lame a des faces parallèles. Alors,

$$\theta_3 = \theta_2 = 25° . \qquad \text{(ii)}$$

Identifier la clé

La **clé** est de nouveau la loi de la réfraction, pour la deuxième interface :

$$n_2 \sin\theta_3 = n_1 \sin\theta_4 . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

En insérant l'équation (ii) dans l'équation (iii), nous obtenons

$$n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_4 . \qquad \text{(iv)}$$

Or, selon l'équation (i), $n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1$. L'équation (iv) devient

$$n_1 \sin\theta_1 = n_1 \sin\theta_4 \Rightarrow \sin\theta_1 = \sin\theta_4 .$$

Comme les angles sont compris entre 0° et 90°,

$$\theta_4 = \theta_1 = 40° . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Illustrer la situation

Pour trouver la distance d, nous retraçons le schéma de la situation à la figure 5.21.

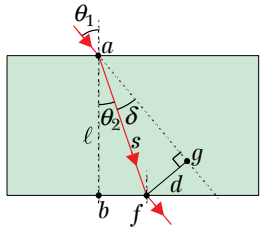


FIGURE 5.21
Le schéma de la situation pour déterminer d

Identifier la clé

La figure 5.21 montre que la distance d est l'un des côtés du triangle rectangle afg. Selon la trigonométrie,

$$d = s \sin\delta , \qquad \text{(v)}$$

où $\delta = \theta_1 - \theta_2$. L'hypoténuse du triangle *afg* est aussi l'hypoténuse du triangle *abf*. Selon la trigonométrie,

$$\cos\theta_2 = \frac{\ell}{s} \Rightarrow s = \frac{\ell}{\cos\theta_2}. \qquad \text{(vi)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons l'équation (vi) dans l'équation (v) :

$$d = \frac{\ell \sin\delta}{\cos\theta_2} = \frac{\ell \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos\theta_2}. \qquad \text{(vii)}$$

Nous insérons ensuite les valeurs dans l'équation (vii) :

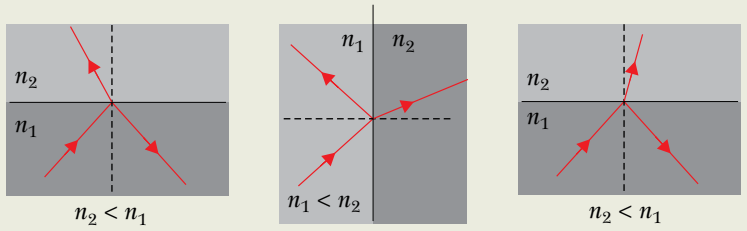
$$d = \frac{5{,}0 \text{ mm} \sin(40° - 25°)}{\cos(25°)} = 1{,}4 \text{ mm}. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'ordre de grandeur semble correct. Tous les angles sont compris entre 0° et 90°, où $\theta_2 < \theta_1$, car l'indice de réfraction du verre est plus élevé que l'indice de l'air. Remarquez qu'une lame ayant des faces parallèles ne change pas la direction de propagation de la lumière, mais elle produit un déplacement latéral *d*. Ce déplacement latéral est proportionnel à l'épaisseur de la lame selon l'équation (vii).

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 5.1

Indiquez si les situations suivantes sont physiquement possibles.



La loi de la réfraction selon le modèle de Huygens

Il est possible d'obtenir la loi de la réfraction en analysant les fronts d'onde transmis d'un milieu à un autre. La déviation des rayons lors de la réfraction est causée par la variation de la vitesse de la lumière lorsque celle-ci change de milieu.

La figure 5.22a illustre la construction de Huygens pour la réfraction. Un front d'onde $\overline{ab}$ est incident sur une interface séparant les milieux d'indices n_1 et n_2. Le module de la vitesse de la lumière est $v_1 = c/n_1$ dans le premier milieu et $v_2 = c/n_2$ dans le deuxième milieu. Les rayons incidents, tracés perpendiculairement au front d'onde, forment un angle θ_1 par rapport à la normale.

On obtient le front d'onde $\overline{de}$ en prenant des ondes secondaires issues des points *a* et *b*. L'onde secondaire issue de *a* parcourt une distance $\overline{ad} = v_2\,\Delta t$, alors que l'onde secondaire issue de *b* parcourt une distance $\overline{be} = v_1\,\Delta t$. On trace ensuite les rayons réfractés perpendiculairement au front d'onde $\overline{de}$. La figure permet d'obtenir les triangles rectangles *aeb* avec un angle θ_1 et le triangle *aed* avec un angle θ_2, comme le montre la figure 5.22b. Ces deux triangles ont la même hypoténuse $\overline{ae}$.

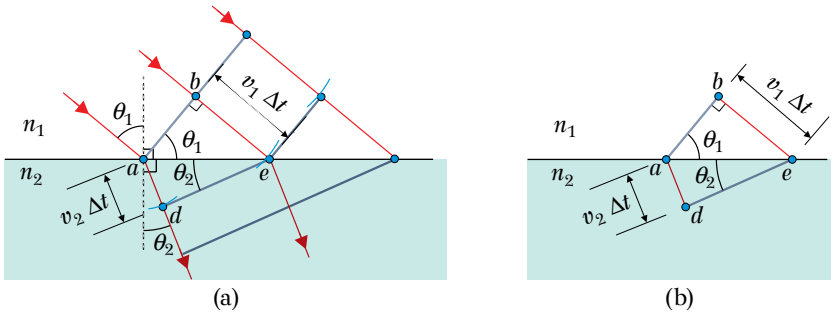


FIGURE 5.22

La construction de Huygens pour obtenir la loi de la réfraction : (a) le front d'onde $\overline{ab}$ génère le front d'onde $\overline{de}$ dans le deuxième milieu ; (b) la construction produit les triangles rectangles abe et ade.

On calcule le sinus de chaque angle :

$$\sin\theta_1 = \frac{v_1\,\Delta t}{\overline{ae}} \Rightarrow \overline{ae} = \frac{v_1\,\Delta t}{\sin\theta_1}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{v_2\,\Delta t}{\overline{ae}} \Rightarrow \overline{ae} = \frac{v_2\,\Delta t}{\sin\theta_2}$$

$$\Rightarrow \frac{v_1\,\Delta t}{\sin\theta_1} = \frac{v_2\,\Delta t}{\sin\theta_2} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\,.$$

En remplaçant v par c/n, on obtient

$$\frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} \Rightarrow n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2\,.$$

Il s'agit bien de la loi de la réfraction. Le changement de direction de la lumière est produit par le changement du module de la vitesse de l'onde lorsque l'onde change de milieu.

5.5 La réflexion totale interne

La figure 5.23 montre un rayon lumineux incident à un angle de 0° sur un prisme de verre. Le rayon entre dans le prisme à un angle de 0° et frappe la deuxième face du prisme à un angle d'incidence $\theta_1 = 45°$. L'indice du verre est $n_1 = 1{,}52$, et l'indice de l'air est $n_2 = 1{,}00$. Pour calculer l'angle de réfraction, on applique la loi de la réfraction (*voir l'équation 5.6*) :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \qquad (5.8)$$

$$1{,}52\,\sin(45°) = 1{,}00\,\sin\theta_2$$

$$1{,}07 = \sin\theta_2\,. \qquad (5.9)$$

Or, il n'y a pas d'angle θ_2 entre 0° et 90° qui respecte cette condition. Le sinus d'un angle réel est toujours plus petit ou égal à 1. Le résultat physique est qu'il n'y a pas de réfraction. Toute la lumière est réfléchie, selon la loi de la réflexion. C'est la *réflexion totale interne*. Ce phénomène se produit lorsque la lumière essaie de passer d'un milieu ayant un indice de réfraction élevé à un milieu ayant un indice de réfraction faible, quand l'angle d'incidence dépasse une valeur particulière.

Lorsque l'angle d'incidence est faible, il y a réfraction, comme dans le cas du rayon rouge illustré à la figure 5.24. Le rayon vert, illustré à la figure 5.24, est

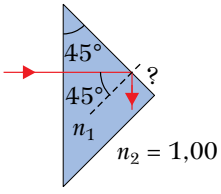


FIGURE 5.23

Un rayon est incident dans un prisme.

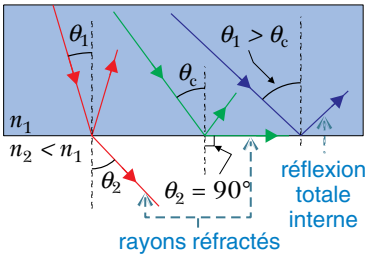


FIGURE 5.24

Le rayon rouge est réfracté. Le rayon vert est incident à θ_c, et il est réfracté à 90°. Le rayon bleu est incident à un angle plus grand que θ_c. Il n'est pas réfracté.

Défi animé 5.1
L'irradiance de la lumière réfléchie lors de la réfraction est-elle constante, peu importe l'angle d'incidence du faisceau ?

réfracté à un angle $\theta_2 = 90°$. L'angle d'incidence qui donne lieu à cette situation est appelé l'*angle critique* θ_c. Lorsque l'angle d'incidence est plus grand que θ_c, comme c'est le cas pour le rayon bleu illustré à la figure 5.24, alors il y a une réflexion totale interne.

On peut calculer l'angle critique en insérant $\theta_1 = \theta_c$ et $\theta_2 = 90°$ dans l'équation de la loi de la réfraction :

$$n_1 \sin\theta_c = n_2 \sin(90°)$$

Angle critique

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}\,. \tag{5.10}$$

REMARQUE

La réflexion totale interne se produit uniquement lorsque l'indice du milieu incident est plus élevé que l'indice du milieu de réfraction ($n_1 > n_2$).

EXEMPLE 5.4 La réflexion totale interne dans un aquarium

Un aquarium est rempli d'eau. À partir de l'air, un rayon lumineux est incident à un angle θ_1. Le rayon réfracté frappe la surface verticale transparente. Pour quel angle d'incidence θ_1 y a-t-il une réflexion totale interne sur la paroi verticale de l'aquarium ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 5.25 illustre le schéma de la situation lorsqu'il y a une réflexion totale interne sur la paroi verticale. On numérote les angles de façon séquentielle. Les milieux 1 et 3 sont de l'air, et le milieu 2 est l'eau.

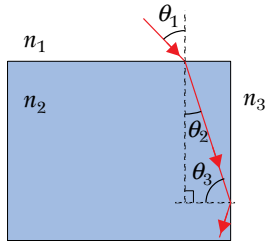


FIGURE 5.25
Le schéma de la situation pour l'exemple 5.4

Décortiquer le problème

L'indice de réfraction de l'eau est obtenu à l'aide du tableau 5.1. Selon la figure 5.25, $\theta_3 = 90° - \theta_2$.

Connues	Inconnue
$n_1 = n_3 = 1{,}000 \quad n_2 = 1{,}333$	θ_1

Identifier la clé

La première **clé** est l'équation 5.10, entre les milieux 2 et 3 :

$$\sin\theta_c = \frac{n_3}{n_2}\,. \tag{i}$$

Il y a réflexion interne si :

$$\theta_3 > \theta_c\,. \tag{ii}$$

La deuxième **clé** est la loi de la réfraction pour relier θ_2 et θ_1 :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2\,. \tag{iii}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'angle critique pour l'interface eau-air à l'aide de l'équation (i) :

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{1{,}000}{1{,}333}\right) = 48{,}61°\,. \tag{iv}$$

Comme $\theta_3 = 90° - \theta_2$, l'inégalité (ii) devient

$$90° - \theta_2 > 48{,}61° \Rightarrow \theta_2 < 41{,}39°\,. \tag{v}$$

Nous insérons ce résultat dans l'équation (iii), sachant que la fonction sinus est une fonction croissante pour $0 < \theta < 90°$:

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 < \sin(41{,}39°)$$
$$\sin\theta_1 < 1{,}333 \times 0{,}6612$$
$$\theta_1 < \arcsin(0{,}8814)$$
$$\theta_1 < 61{,}81° . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Il est normal d'obtenir une inégalité comme réponse, car il y a plusieurs solutions possibles. La réponse est valable tant que la profondeur de l'aquarium est suffisante pour que le rayon atteigne la paroi verticale et non le fond du bassin.

Les applications de la réflexion totale interne

La réflexion totale interne permet l'utilisation de prismes à la place de miroirs dans certains instruments optiques pour faire dévier la lumière par réflexion. En effet, dans le cas du verre, l'angle critique est d'environ 42°. Les prismes ayant des angles de 45° sont simples à fabriquer. Selon l'orientation du prisme, il est possible d'obtenir des images inversées, comme le montre la figure 5.26. Par exemple, on utilise les prismes à l'intérieur des jumelles pour replacer à l'endroit l'image inversée, formée par les lentilles de l'instrument.

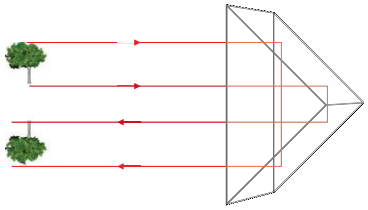


FIGURE 5.26
Un prisme réflecteur peut être utilisé pour inverser une image.

Le principe de la réflexion totale interne est aussi à la base du fonctionnement des fibres optiques. Une fibre optique est un mince fil de verre dans lequel la lumière peut se propager (*voir la figure 5.27*). La lumière entre par un bout de la fibre. La lumière se propage en zigzag dans la fibre, en subissant des réflexions totales internes. Les fibres optiques peuvent donc être utilisées pour transmettre de la lumière d'une source vers un détecteur. Il est possible de courber la fibre optique, de telle sorte que la lumière ne se propage pas en ligne droite, mais qu'elle suive le parcours de la fibre optique. Habituellement, une fibre optique est composée d'un cœur de verre entouré d'une gaine ayant un indice de réfraction plus faible, comme le montre la figure 5.28. La gaine est ensuite entourée d'un plastique protecteur.

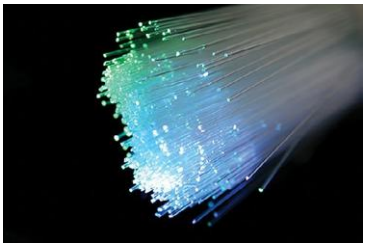


FIGURE 5.27
La lumière se propage dans des fibres optiques.

Les fibres optiques sont utilisées en télécommunication et dans les réseaux informatiques pour transmettre des données. Elles remplacent les fils de cuivre. On trouve aussi les fibres optiques dans les endoscopes utilisés en médecine. Un endoscope permet d'examiner l'intérieur du corps humain sans devoir recourir à la chirurgie.

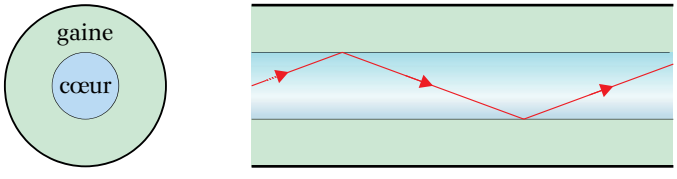
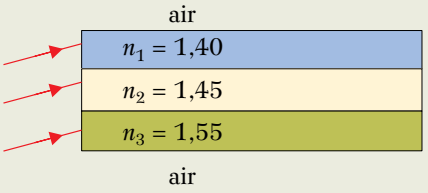


FIGURE 5.28
La lumière subit des réflexions totales internes en se propageant dans une fibre optique.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 5.2

La figure ci-dessous montre trois lames de plastique ayant des indices de réfraction différents, entourées d'air. On envoie de la lumière à l'extrémité gauche de chaque lame. Dans quelle lame la lumière pourra-t-elle se propager sans en sortir ?



L'onde évanescente

La figure 5.29a montre un rayon incident à un angle plus grand que l'angle critique. La lumière subit une réflexion totale interne à cette interface, et il n'y a pas de lumière réfractée. Cependant, le champ électrique et le champ magnétique ne peuvent pas être discontinus à l'interface. Il y a donc des champs à l'intérieur du deuxième milieu, avec une amplitude qui décroît de façon exponentielle. L'onde correspondante est appelée l'*onde évanescente*. Aucune énergie n'est transmise par cette onde.

Si le deuxième milieu a une très faible épaisseur, équivalente à quelques longueurs d'onde de la lumière, l'onde évanescente peut traverser le deuxième milieu, comme le montre la figure 5.29b. La lumière traverse le deuxième milieu. C'est la *réflexion totale frustrée*. La lumière peut donc traverser une mince épaisseur d'un milieu d'indice faible, même si l'angle d'incidence est plus grand que l'angle critique. Nous verrons au chapitre 11 un phénomène ondulatoire semblable pour les ondes de matière, ce qu'on appelle l'*effet tunnel*.

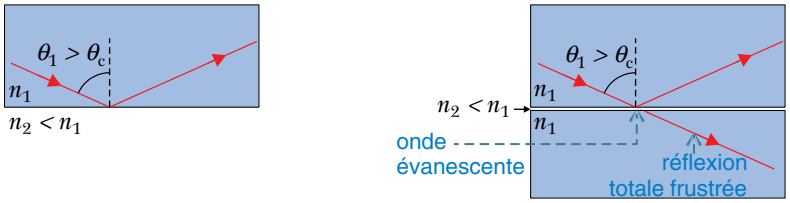


FIGURE 5.29

(a) Un rayon subit une réflexion totale interne. (b) Lorsque le deuxième milieu est très mince, une partie de la lumière traverse le deuxième milieu : c'est la réflexion totale frustrée.

5.6 La dispersion de la lumière

Lorsqu'on éclaire un prisme avec de la lumière blanche, le prisme décompose la lumière selon son spectre. C'est ce qu'on peut voir à la figure 5.30. La lumière qui émerge du prisme montre des raies colorées, du rouge au violet. C'est la *dispersion*.

Le phénomène de la dispersion de la lumière est connu depuis très longtemps. Au départ, on pensait que le prisme modifiait la lumière. C'est Isaac Newton qui a montré que la lumière blanche est plutôt composée de toutes les couleurs du spectre et que le prisme ne fait que décomposer la lumière. Pour arriver à cette conclusion, Newton a utilisé un deuxième prisme, inversé par rapport au premier, pour recomposer la lumière blanche, comme le montre la figure 5.31a. De plus, en ajoutant une barrière munie d'une fente entre les deux prismes, Newton a pu sélectionner une seule couleur, de telle sorte que la lumière émergente du deuxième prisme n'est pas blanche (*voir la figure 5.31b*). Le prisme ne change donc pas la lumière.

FIGURE 5.31
Un prisme décompose la lumière par dispersion : (a) un deuxième prisme permet de recomposer la lumière ; (b) en bloquant une partie de la lumière décomposée, la lumière émergente n'est pas blanche.

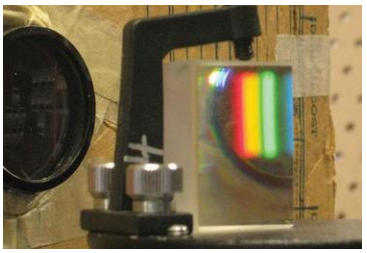


FIGURE 5.30
La lumière blanche est décomposée par le prisme.

La dispersion de la lumière est causée par la variation de l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde de la lumière (donc en fonction de la fréquence). La lumière blanche est composée de lumière de toutes les longueurs d'onde visibles (ou de la plupart des longueurs d'onde), entre 380 nm et 800 nm. Lorsque la lumière blanche est réfractée dans le prisme, l'angle de réfraction est différent pour chaque longueur d'onde. Le violet est plus dévié que le rouge, ce qui indique que l'indice de réfraction est plus élevé pour les courtes longueurs d'onde du spectre visible. Lorsque la lumière revient dans l'air, la deuxième réfraction accentue encore plus la déviation angulaire de chaque longueur d'onde.

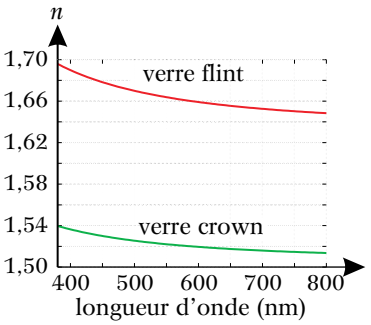


FIGURE 5.32
L'indice de réfraction d'un matériau varie en fonction de la longueur d'onde de la lumière.

De façon générale dans le visible, l'indice de réfraction diminue en fonction de la longueur d'onde, comme le montre la figure 5.32. Cela implique que lors d'une réfraction entre deux milieux, la lumière violette est plus déviée que la lumière rouge ($\delta_{violet} > \delta_{rouge}$). Comme le montre la figure 5.33, lorsque $n_1 < n_2$, la lumière violette s'approche plus de la normale ; en revanche, lorsque $n_1 > n_2$, la lumière violette s'éloigne plus de la normale.

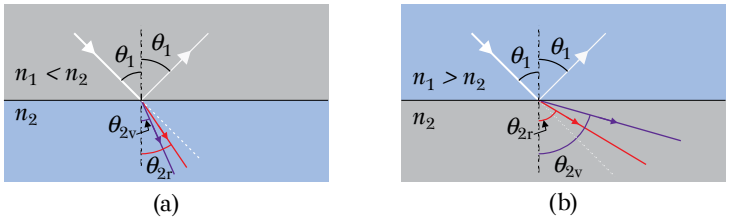


FIGURE 5.33
Le rayon violet est plus dévié que le rayon rouge lors de la réfraction : (a) pour $n_1 < n_2$, le rayon violet s'approche plus de la normale ; (b) pour $n_1 > n_2$, le rayon violet s'éloigne plus de la normale.

EXEMPLE 5.5 La déviation par un prisme

Une lumière est composée d'une lumière rouge et d'une lumière verte. Cette lumière est incidente à un angle de 48,00° sur un prisme équilatéral composé de verre flint, dont l'indice de réfraction est de 1,672 pour la lumière verte et de 1,655 pour la lumière rouge.

a. Quel est l'angle d'émergence de chaque rayon ?

b. Quelle est la déviation de chaque rayon par rapport au rayon incident ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 5.34 illustre la réfraction dans le prisme pour un rayon quelconque. La lumière est incidente sur la première surface à un angle θ_1, et elle est réfractée à un angle θ_2. La lumière est ensuite incidente sur la deuxième surface à un angle θ_3, et elle est réfractée à un angle θ_4. La lumière s'approche de la normale lorsqu'elle entre dans le prisme, et elle s'éloigne de la normale lorsqu'elle revient dans l'air.

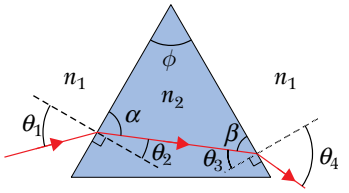


FIGURE 5.34
Le schéma de la situation pour l'exemple 5.5

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues	
$n_v = 1{,}672$	$n_r = 1{,}655$	$\theta_{4,r}$	$\theta_{4,v}$
$n_1 = 1{,}000$		δ_r	δ_v
$\theta_1 = 48{,}00°$	$\phi = 60{,}00°$		

Selon la figure 5.34, l'angle α est l'angle complémentaire à θ_2, et l'angle β est complémentaire à θ_3. De plus, les angles ϕ, α et β sont les angles intérieurs d'un triangle. Ceci permet d'obtenir une relation entre les angles θ_2 et θ_3 :

$$\phi + \alpha + \beta = \phi + (90° - \theta_2) + (90° - \theta_3) = 180°$$
$$\Rightarrow \phi = \theta_2 + \theta_3 \,. \qquad \text{(i)}$$

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est la loi de la réfraction, appliquée à chaque surface :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 \qquad \text{(ii)}$$

$$n_2 \sin\theta_3 = n_1 \sin\theta_4 \Rightarrow \sin\theta_4 = \frac{n_2}{n_1}\sin\theta_3 \,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'angle d'émergence dans le cas de la lumière rouge. Pour la première réfraction,

$$\theta_{2,r} = \arcsin\left[\frac{1{,}000}{1{,}655}\sin(48{,}00°)\right] = 26{,}68° \,.$$

Nous calculons l'angle d'incidence sur la deuxième surface à l'aide de l'équation (i) :

$$\theta_{3,r} = \phi - \theta_{2,r} = 60{,}00° - 26{,}68° = 33{,}32° \,.$$

Nous insérons ce résultat dans l'équation (iii) :

$$\theta_{4,r} = \arcsin\left[\frac{1{,}655}{1{,}000}\sin(33{,}32°)\right] = 65{,}38° \,.$$

(réponse)

Nous faisons le même calcul pour la lumière verte, en utilisant l'indice de réfraction approprié. D'abord, l'angle θ_2,

$$\theta_{2,v} = \arcsin\left[\frac{1{,}000}{1{,}672}\sin(48{,}00°)\right] = 26{,}39° \,.$$

Ensuite, nous calculons $\theta_{3,v}$ à l'aide de l'équation (i) :

$$\theta_{3,v} = \phi - \theta_{2,v} = 60{,}00° - 26{,}39° = 33{,}61° \,.$$

Nous insérons ce résultat dans l'équation (iii) :

$$\theta_{4,v} = \arcsin\left[\frac{1{,}672}{1{,}000}\sin(33{,}61°)\right] = 67{,}75° \,.$$

(réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

Chaque réfraction fait dévier la lumière. Selon l'équation 5.7,

$$\delta_1 = |\theta_1 - \theta_2| = \theta_1 - \theta_2 \qquad \text{(iv)}$$
$$\delta_2 = |\theta_3 - \theta_4| = \theta_4 - \theta_3 \,. \qquad \text{(v)}$$

Les deux déviations de la lumière sont dans le même sens (*en sens horaire dans la figure 5.34*). La déviation totale est donc la somme des déviations :

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \theta_1 - \theta_2 + \theta_4 - \theta_3 = \theta_1 + \theta_4 - (\theta_2 + \theta_3) \ .$$

Selon l'équation (i), $\theta_2 + \theta_3 = \phi$, l'angle au sommet du prisme. La déviation est donc

$$\delta = \theta_1 + \theta_4 - \phi \ . \qquad \text{(vi)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons la déviation de chaque couleur :

$\delta_r = 48{,}00° + 65{,}38° - 60{,}00° = 53{,}38°$ (réponse)

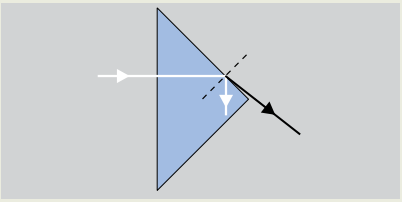
$\delta_v = 48{,}00° + 67{,}75° - 60{,}00° = 55{,}75°$. (réponse)

Valider la réponse

La lumière verte est plus déviée que la lumière rouge, comme il se doit.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 5.3

De la lumière blanche frappe un prisme à incidence normale, comme le montre la figure suivante. Lorsque la lumière frappe la deuxième interface, certaines longueurs d'onde subissent une réflexion totale interne, et certaines longueurs d'onde sont réfractées. Est-ce la lumière rouge ou la lumière violette qui émerge du prisme ?

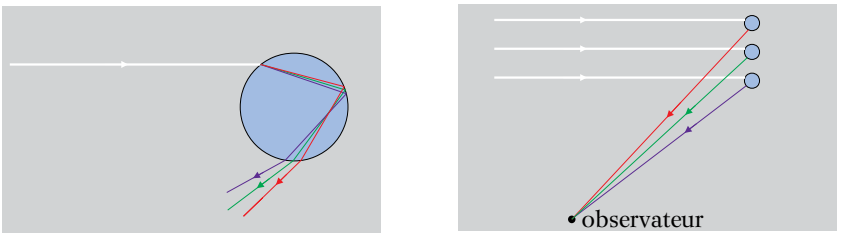


Défi animé 5.2
Comment devez-vous placer un prisme pour obtenir la plus petite déviation uniquement par réfraction du faisceau ?

L'arc-en-ciel

Les arcs-en-ciel qu'on peut observer, lorsque le Soleil est près de l'horizon et qu'il éclaire de la pluie, est le résultat de la réflexion, de la réfraction et de la dispersion. La figure 5.35a (*voir la page suivante*) montre un rayon lumineux, provenant du Soleil, qui est incident sur une goutte d'eau. Une partie de la lumière est réfractée à l'intérieur. Étant donné que l'indice de réfraction varie pour chacune des longueurs d'onde composant la lumière blanche du Soleil, la lumière est décomposée. Il y a alors une petite partie de la lumière qui est réfléchie par la deuxième face de la goutte d'eau, pour être réfractée de nouveau dans l'air. La goutte d'eau a alors séparé la lumière blanche en plusieurs rayons de couleurs différentes, qui se propagent à des angles légèrement différents. La lumière rouge est déviée à environ 42° et la lumière violette à 40° par rapport à la direction initiale de la lumière solaire.

Lorsque vous observez un arc-en-ciel, vous observez la lumière issue d'un grand nombre de gouttes d'eau, comme le montre la figure 5.35b (*voir la page suivante*). La lumière rouge étant plus déviée, vous devez regarder un point plus haut dans le ciel pour que de la lumière rouge entre dans votre œil. Vous observez donc la partie rouge de l'arc-en-ciel dans la partie extérieure de l'arc-en-ciel. Pour ce qui est de la lumière violette, vous devez regarder un point plus bas dans le ciel pour que cette lumière entre dans votre œil, donc cette couleur se retrouve dans la partie intérieure de l'arc-en-ciel.



(a) (b)

FIGURE 5.35
(a) La lumière blanche du Soleil est décomposée par une goutte de pluie. La lumière est déviée, entre 40° (violet) et 42° (rouge). (b) Un observateur voit la lumière issue de plusieurs gouttes d'eau.

Soit A, le point opposé au Soleil. La partie rouge de l'arc-en-ciel correspond aux points formant un angle de 42° par rapport à la direction de ce point, comme le montre la figure 5.36. Si le Soleil n'est pas à l'horizon, le point A est plus bas. Pour localiser un arc-en-ciel, vous devez vous placer dos au Soleil, les deux bras vers votre ombre (donc vers le point A). Ensuite, vous devez soulever votre bras gauche, jusqu'à ce qu'il forme un angle d'environ 42° par rapport à votre bras droit. Votre bras gauche est alors en direction de l'arc-en-ciel.

Dans certaines situations, il est possible d'observer un deuxième arc-en-ciel, au-dessus du premier. C'est l'arc-en-ciel secondaire, qui est produit par la lumière réfléchie deux fois dans les gouttes d'eau. Cet arc-en-ciel est beaucoup plus pâle que l'arc-en-ciel primaire à cause de la deuxième réflexion. Comme le montre la figure 5.37, c'est la lumière rouge qui est la moins déviée, de sorte que cette couleur est celle qui est observée dans le bas de l'arc-en-ciel secondaire. Par rapport à l'arc-en-ciel primaire, l'ordre des couleurs est inversé dans l'arc-en-ciel secondaire (*comparez la figure 5.35a et la figure 5.37*).

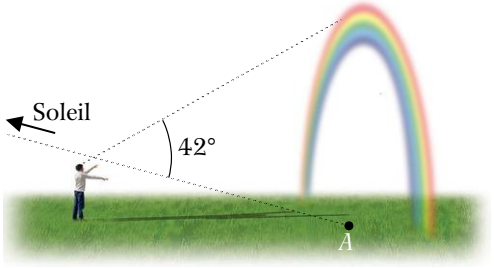


FIGURE 5.36
On observe un arc-en-ciel dans une direction de 42° par rapport à A, le point opposé au Soleil.

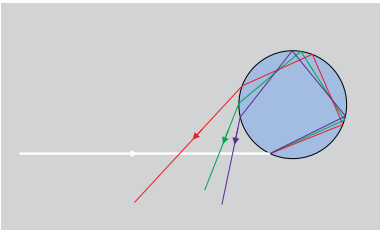


FIGURE 5.37
Un arc-en-ciel secondaire est produit par la lumière réfléchie deux fois dans une goutte d'eau.

5.7 La polarisation par réflexion

À la section 4.6, nous avons vu que la lumière est une onde transversale et que la lumière naturelle, comme la lumière du Soleil, n'est pas polarisée, car sa polarisation change de façon aléatoire. On peut décrire la lumière non polarisée comme une onde composée de deux champs électriques perpendiculaires à la direction de propagation. Lorsque la lumière non polarisée est incidente

sur une interface, par exemple la surface de l'eau, une partie de la lumière est réfractée et une partie est réfléchie. Lorsqu'on analyse la lumière réfléchie, on trouve que l'amplitude du champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence (le plan défini par le rayon d'incidence et le rayon réfléchi) est différente de l'amplitude du champ électrique parallèle au plan d'incidence. La lumière réfléchie est partiellement polarisée. De même, la lumière réfractée est partiellement polarisée.

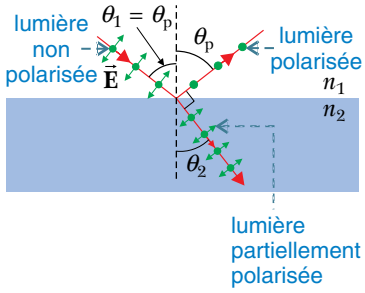


FIGURE 5.38
Lorsque l'angle d'incidence est égal à θ_p, la lumière réfléchie est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.

Pour un angle d'incidence particulier, qu'on appelle l'*angle de polarisation* ou *angle de Brewster*, la lumière réfléchie est complètement polarisée perpendiculairement au plan d'incidence. Dans cette situation, le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont perpendiculaires, comme le montre la figure 5.38. Dans ce cas, on obtient

$$\theta_p + 90° + \theta_2 = 180° \Rightarrow \theta_2 = 90° - \theta_p \, .$$

On peut ensuite insérer ce résultat ainsi que $\theta_1 = \theta_p$ dans l'équation de la loi de la réfraction :

$$n_1 \sin\theta_p = n_2 \sin(90° - \theta_p) \, .$$

Selon une identité trigonométrique, $\sin(90° - \theta_p) = \cos(\theta_p)$. On obtient alors

$$n_1 \sin\theta_p = n_2 \cos\theta_p$$

$$\tan\theta_p = \frac{n_2}{n_1} \, . \qquad (5.11)$$

Loi de Brewster

C'est la loi de Brewster, qui a été découverte par le physicien écossais David Brewster (1781-1868). La lumière réfractée demeure partiellement polarisée parallèlement au plan d'incidence.

Il est possible d'utiliser la réflexion pour fabriquer des polariseurs. Cependant, la fraction de lumière réfléchie est très faible. Pour augmenter la quantité de lumière réfléchie, on utilise plusieurs lames de verre les unes sur les autres. En éclairant le système de lames selon l'angle de polarisation, la lumière réfléchie est polarisée. On recourt aussi à ce principe de polarisation par réflexion dans la fabrication des lasers pour obtenir une lumière polarisée. Dans un laser à gaz, comme les lasers à hélium-néon, le gaz est placé dans un tube dont les extrémités sont orientées selon l'angle de polarisation (ce qu'on appelle une *fenêtre de Brewster*), comme le montre la figure 5.39. La lumière polarisée parallèlement au plan d'incidence n'est pas réfléchie lorsque la lumière sort du tube, alors que la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence est partiellement réfléchie.

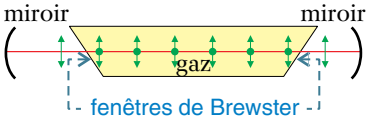


FIGURE 5.39
Les fenêtres de Brewster produisent de la lumière polarisée dans un laser.

La lumière réfléchie par la surface de l'eau d'un lac ou d'une flaque d'eau est partiellement polarisée horizontalement. On peut donc utiliser des lunettes polarisées pour diminuer cette lumière réfléchie. Les lunettes polarisées sont munies d'un polariseur ayant un axe vertical. Elles absorbent la lumière polarisée horizontalement, ce qui diminue les reflets. De plus, en ajoutant un polariseur devant un appareil photo, on peut prendre des photographies d'objets sous l'eau.

EXEMPLE 5.6 L'angle de polarisation

De la lumière se propageant dans l'eau rencontre une surface de verre crown verticale. La lumière réfléchie dans l'eau est polarisée.

a. Dans quelle direction le champ électrique de la lumière réfléchie oscille-t-il ?
b. Quel est l'angle d'incidence ?
c. Quel est l'angle réfracté ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 5.40 illustre la situation. Le rayon incident n'est pas polarisé, alors que le rayon réfléchi doit l'être. Le plan d'incidence correspond au plan de la page.

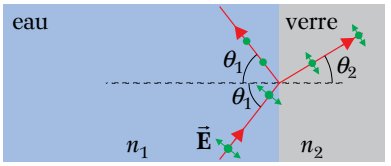


FIGURE 5.40
Le schéma de la situation pour l'exemple 5.6

Décortiquer le problème

Les indices de réfraction sont indiqués au tableau 5.1.

Connues	Inconnues
$n_1 = 1{,}333$	θ_1
$n_2 = 1{,}52$	θ_2

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est que la lumière réfléchie est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.

Résoudre le problème

La direction d'oscillation du champ électrique est alors

horizontale, perpendiculaire au plan de la page.

(réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

Comme la lumière réfléchie est polarisée, l'angle d'incidence θ_1 doit être égal à l'angle de polarisation, donné par la loi de Brewster (*voir l'équation 5.11*) :

$$\theta_1 = \theta_p = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\theta_1 = \theta_p = \arctan\left(\frac{1{,}52}{1{,}333}\right) = 48{,}75° = 48{,}8°.$$

(réponse)

SOLUTION c.

Identifier la clé

La **clé** est la loi de la réfraction :

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2}\right). \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{1{,}333\sin(48{,}75°)}{1{,}52}\right) = 41{,}25° = 41{,}3°.$$

(réponse)

Valider la réponse

On vérifie facilement que $\theta_1 + \theta_2 = 90°$, comme il se doit lorsque l'angle d'incidence est égal à l'angle de polarisation.

5.8 La biréfringence

Jusqu'à présent, notre étude a porté sur la réfraction à travers des substances isotropes, c'est-à-dire que ces dernières se comportent de la même façon, quelle que soit la direction. Par exemple, les atomes de NaCl sont arrangés dans un cristal à structure cubique. La lumière se propage de la même façon dans n'importe quelle direction.

Certains cristaux sont constitués d'atomes arrangés de façon hexagonale ou tétragonale. Dans ces cas, la lumière se propage différemment, selon la direction de propagation et la direction du champ électrique, donc de la polarisation de la lumière. C'est ce qui se produit lorsque la lumière traverse un cristal poli de calcite ($CaCO_3$), comme le montre la photo de la figure 5.41. On observe une image dédoublée. Cette propriété est la *biréfringence*. Lorsqu'on analyse les deux images, on observe que la lumière est polarisée ; chaque image correspond à une polarisation perpendiculaire à l'autre image.

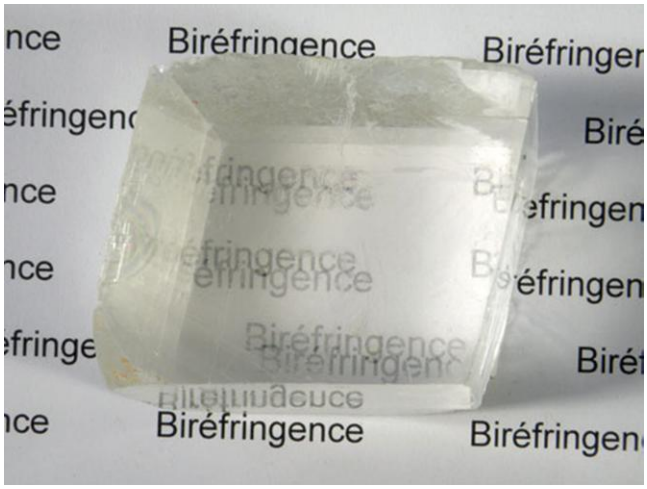


FIGURE 5.41
La biréfringence dans la calcite produit deux images.

La figure 5.42 montre une lumière non polarisée incidente sur une substance biréfringente. La réfraction des deux états de polarisation est différente. Le rayon *o* (le *rayon ordinaire*) est réfracté, selon la loi de la réfraction, et il se propage en ligne droite parce que l'angle d'incidence est nul. Le deuxième rayon, qui est le rayon *e* (le *rayon extraordinaire*), est réfracté différemment. Les deux états de polarisation linéaires sont séparés. La biréfringence peut donc être utilisée pour fabriquer des polariseurs et des diviseurs de faisceau.

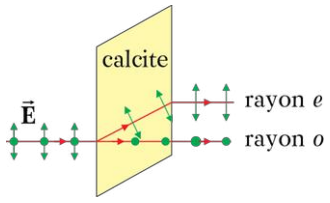


FIGURE 5.42
Un morceau de calcite sépare la lumière non polarisée en deux états de polarisation perpendiculaires.

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié la propagation de la lumière dans des milieux transparents.

LES LOIS ET LES PRINCIPES

- L'**indice de réfraction** d'une substance est le rapport entre le module de la vitesse de la lumière dans le vide et dans la substance :

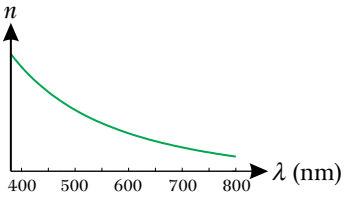
$$n = \frac{c}{v}.$$

- Dans un milieu d'indice n, la longueur d'onde de la lumière est

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n},$$

où λ est la longueur d'onde dans le vide.

- La fréquence de la lumière ne change pas lorsque la lumière change de milieu.
- L'indice de réfraction est plus élevé pour le violet et moins élevé pour le rouge, ce qui produit la **dispersion**.



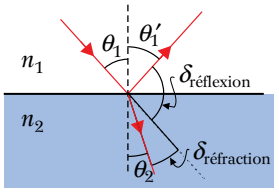
- La **loi de la réflexion** : $\theta_1 = \theta'_1$.

  Les surfaces lisses produisent une réflexion spéculaire, et les surfaces rugueuses produisent une réflexion diffuse.
- La **loi de la réfraction** : $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$.
- La réflexion et la réfraction produisent une **déviation** de la lumière :

$$\delta = 180° - 2\theta \qquad \text{(réflexion)}$$

$$\delta = |\theta_1 - \theta_2|. \qquad \text{(réfraction)}$$

- Par la **dispersion**, la déviation du violet est plus grande que la déviation du rouge lors de la réfraction.



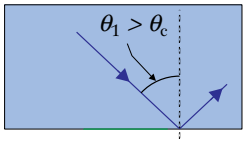
Le **principe de Huygens** permet d'obtenir le front d'onde subséquent : les points d'un front d'onde se comportent comme des sources d'onde sphériques secondaires. Après un temps Δt, le front d'onde est la surface tangente aux ondes secondaires.

LES RÉSULTATS

- Il y a une **réflexion totale interne** lorsque l'angle d'incidence est plus grand que l'**angle critique** :

$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1},$$

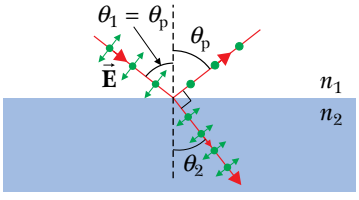
pour $n_2 < n_1$.



- Une **onde évanescente** se propage dans le deuxième milieu. Si ce milieu est très mince, la lumière traverse le second milieu. C'est la **réflexion totale frustrée**.

- Lorsque l'angle d'incidence est égal à l'**angle de polarisation**, la lumière réfléchie est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence. L'angle de polarisation est donné par l'expression :

$$\tan\theta_p = \frac{n_2}{n_1}.$$



- Certains cristaux produisent une réfraction différente selon la polarisation de la lumière. C'est la **biréfringence**.

QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

Section 5.1 La vitesse de la lumière dans les milieux transparents

Q1 Trois ondes lumineuses, ayant la même longueur d'onde dans le vide, traversent des milieux transparents ayant la même longueur L. Les indices de réfraction des milieux sont indiqués à la figure 5.43. Classez les faisceaux lumineux par ordre croissant :

a. de la longueur d'onde dans les milieux respectifs ;

b. de la fréquence dans les milieux respectifs ;

c. du temps nécessaire pour qu'ils traversent les milieux.

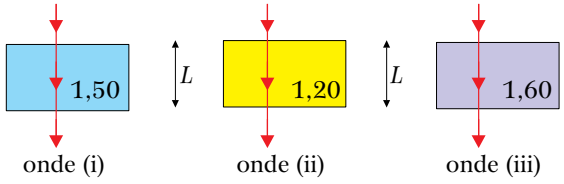


FIGURE 5.43 • Question 1

E2 Déterminez le module de la vitesse d'une onde lumineuse dans un milieu dont la constante diélectrique κ est de 2,02 lorsque la fréquence est de $5{,}09 \times 10^{14}$ Hz.

E3 En utilisant les données du tableau 5.1 de la page 157, déterminez la longueur d'onde de la lumière dans les milieux suivants lorsque la longueur d'onde de la lumière dans le vide est de 589,0 nm :

a. l'eau ;

b. le plexiglas ;

c. le diamant.

E4 Une impulsion lumineuse produite par une source parcourt 5,25 cm dans l'air et frappe perpendiculairement un bloc de verre crown de 2,40 cm d'épaisseur. Combien de temps mettra l'impulsion lumineuse à émerger du bloc de verre depuis son émission ?

Section 5.3 La réflexion de la lumière

Q5 Au cours de l'expédition Apollo 11 sur la Lune, les astronautes y ont déposé un ensemble de 100 miroirs particuliers. Chacun des miroirs est en fait un groupe de trois miroirs formant le coin intérieur d'un cube (perpendiculaires entre eux). Expliquez l'effet que pouvait avoir l'un de ces miroirs sur un rayon lumineux qui l'éclaire.

E6 On place un laser à un angle α par rapport à l'horizontale, de telle sorte qu'il éclaire un miroir au plafond, comme le montre la figure 5.44. Quel est l'angle α si la lumière réfléchie frappe le mur à mi-hauteur ?

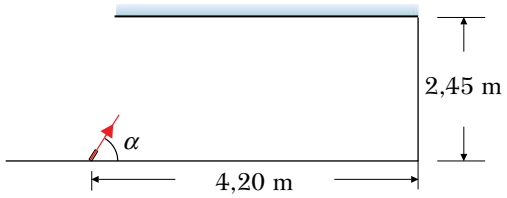


FIGURE 5.44 • Exercice 6

E7 Quel angle d'incidence θ d'un rayon lumineux sur un miroir permet d'obtenir un angle de déviation $\delta = \theta$?

E8 On utilise deux miroirs pour faire dévier un rayon lumineux dans la direction de sa provenance. Quel angle forment les normales des deux miroirs ?

P9 Un rayon lumineux est dirigé vers un assemblage de deux miroirs formant entre eux un angle aigu de 30°. Ce rayon incident est parallèle à l'axe de symétrie de l'assemblage, comme le montre la figure 5.45. Combien de réflexions subit le rayon avant que celui-ci ressorte de l'espace entre les miroirs ?

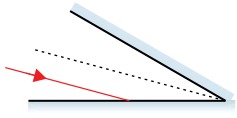


FIGURE 5.45 • Problème 9

P10 Pour mesurer l'angle au sommet ϕ d'un prisme, on éclaire celui-ci avec des rayons incidents parallèles, comme le montre la figure 5.46. On mesure l'angle α que forment les deux rayons réfléchis. Démontrez que $\phi = \alpha/2$?

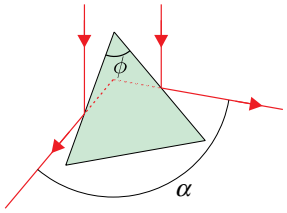


FIGURE 5.46 • Problème 10

P11 Pour mesurer la rotation d'un objet, on colle un miroir sur l'objet, et on éclaire le miroir avec la lumière d'un laser. On observe ensuite le rayon réfléchi. Montrez que lorsque

l'objet tourne d'un angle α, le rayon réfléchi tourne d'un angle 2α par rapport à sa direction initiale.

Section 5.4 La réfraction de la lumière

Q12 On place une règle verticalement dans un récipient rempli d'eau. La règle dépasse la surface de l'eau, comme le montre la figure 5.47. Un rayon lumineux passe tout juste en haut de la règle. Parmi les points illustrés, à quel endroit le rayon lumineux frappe-t-il le fond du récipient ?

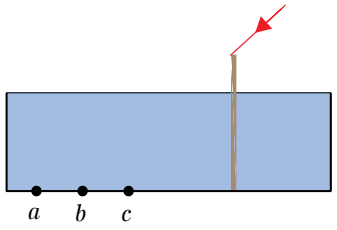


FIGURE 5.47 • Question 12

Q13 La lumière traverse successivement trois lames à faces parallèles, comme le montre la figure 5.48. Classez les lames par ordre croissant de leur indice de réfraction.

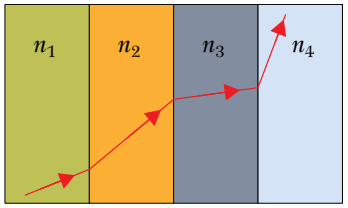


FIGURE 5.48 • Question 13

E14 Lorsque le Soleil se lève sur une mer très calme, à quel angle au-dessus de l'horizontale les poissons voient-ils apparaître le Soleil ?

E15 On cherche à déterminer l'indice de réfraction d'un liquide inconnu. On produit un rayon lumineux incliné à 50,0° par rapport à l'horizontale. On éclaire avec ce rayon un bassin rempli du liquide jusqu'à une hauteur de 23,5 cm. Au fond du bassin, le point éclairé par le rayon se trouve à 5,9 cm du point éclairé lorsque le bassin est vide. Quel est l'indice de réfraction du liquide ?

E16 Une piscine olympique a une profondeur uniforme de 3,00 m et une largeur de 25,0 m. On envoie un rayon lumineux à un angle de 15,0° par rapport à l'horizontale, comme le montre la figure 5.49. À quelle distance x du côté gauche frappe le rayon lumineux :

a. si la piscine est vide ?

b. si la piscine est remplie à moitié d'eau ?

c. si la piscine est remplie d'eau ?

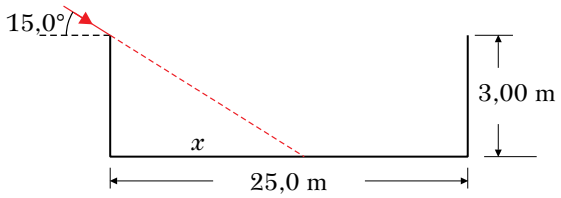


FIGURE 5.49 • Exercice 16

E17 La face d'un prisme de verre crown, dont l'angle au sommet est $\phi = 55{,}0°$, est éclairée à un angle d'incidence $\theta_1 = 38{,}0°$ par un faisceau de lumière parallèle (*voir la figure 5.50*).

a. Calculez le premier angle de réfraction θ_2.

b. Quel est l'angle d'incidence θ_3 sur la deuxième surface du prisme ?

c. Calculez l'angle d'émergence θ_4.

d. Quelle est la déviation totale subie par le faisceau lumineux ayant traversé le prisme ?

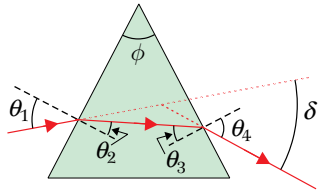


FIGURE 5.50 • Exercice 17

P18 Un rayon lumineux frappe perpendiculairement la face d'un prisme triangulaire droit en quartz dont l'angle adjacent est de 30,0° (*voir la figure 5.51*). Sur la deuxième surface du prisme, le rayon réfracté émerge dans l'air. Le rayon réfléchi est incident sur la troisième surface, et il est réfracté dans l'air. Quel est l'angle α formé par les rayons émergeant du prisme ?

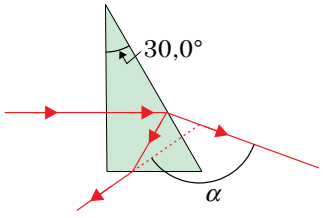


FIGURE 5.51 • Problème 18

P19 Soit un rayon traversant une suite de lames de verre aux faces parfaitement parallèles et aux indices de réfraction différents. Démontrez qu'il émergera dans l'air dans la même direction que la direction incidente avant l'entrée dans la première lame de verre.

P20 Pour mesurer avec précision l'indice de réfraction d'un prisme, on l'éclaire avec une lumière monochromatique, de telle sorte que la déviation δ du rayon lumineux soit

minimale. Cela se produit lorsque l'angle d'émergence est égal à l'angle d'incidence θ (*voir la figure 5.52*). Montrez que dans cette situation, l'indice de réfraction est donné par l'expression :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{min} + \phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)},$$

où ϕ est l'angle au sommet du prisme.

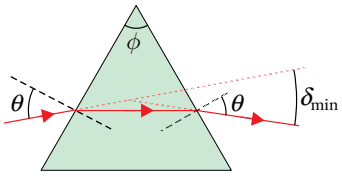


FIGURE 5.52 • Problème 20

Section 5.5 La réflexion totale interne

E21 On veut utiliser un prisme à angle droit pour remplacer un miroir (*voir la figure 5.53*). Le prisme a un angle au sommet $\phi = 45{,}0°$, et il est placé pour que la lumière incidente soit normale à sa face. Quel est le plus petit indice de réfraction pour que la lumière soit complètement réfléchie par la face à 45,0° du prisme ?

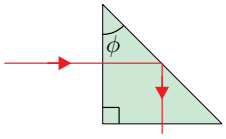


FIGURE 5.53 • Exercice 21

E22 On place une lampe au fond d'une piscine dont la profondeur est de 2,400 m. Les rayons lumineux qui se propagent dans l'air forment un cercle à la surface de l'eau. Quel est le diamètre de ce cercle ?

E23 Une petite source lumineuse est maintenue tout juste au-dessus de la surface d'une piscine profonde de 1,45 m. Quelle est l'aire de la surface au fond de la piscine qui est éclairée ? La piscine est suffisamment large pour que la lumière n'en frappe pas les bords.

P24 Un rayon lumineux pénètre dans une fibre optique par une extrémité où une face plane est perpendiculaire à l'axe de la fibre cylindrique (*voir la figure 5.54*). Cette fibre optique a un indice de réfraction de 1,64 et sa gaine protectrice, un indice de 1,36.

a. Quel est l'angle critique pour ce qui est de la fibre entourée de sa gaine protectrice ?

b. Quel est l'angle θ maximal formé par le rayon incident avec l'axe de la fibre pour que la lumière ne soit pas absorbée par la gaine protectrice ?

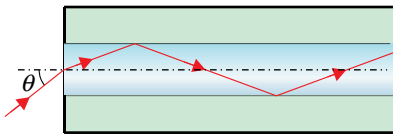


FIGURE 5.54 • Problème 24

P25 On dirige un rayon lumineux vers la face d'un cube transparent. L'angle d'incidence est θ (*voir la figure 5.55*). L'indice de réfraction du cube est de 1,39. Quelle est la valeur de θ permettant à la lumière d'émerger par une face adjacente ?

FIGURE 5.55 • Problème 25

P26 On éclaire un prisme triangulaire à un angle d'incidence θ. Le prisme a un indice de réfraction de 1,40, et l'angle à son sommet est un angle droit. Pour quelles valeurs de θ la lumière peut-elle émerger par la face opposée du prisme, comme le montre la figure 5.56 :

a. si le prisme est dans l'air ?

b. si le prisme est dans l'eau ?

c. si le prisme est dans la glycérine ?

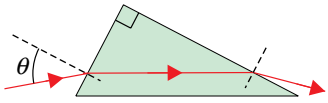


FIGURE 5.56 • Problème 26

Section 5.6 La dispersion de la lumière

Q27 Un faisceau de lumière blanche est incident sur une interface entre l'air et le verre. À partir des points illustrés à la figure 5.57, indiquez la position où se retrouve la lumière rouge et celle où se retrouve la lumière violette :

a. dans la figure 5.57a ;

b. dans la figure 5.57b.

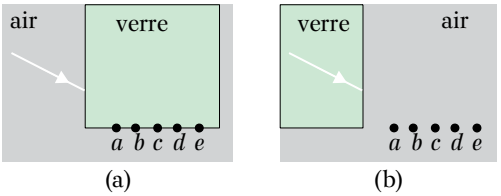


FIGURE 5.57 • Question 27

Q28 Si chaque réfraction donne lieu au phénomène de dispersion, expliquez pourquoi les objets que vous regardez à travers une fenêtre ne sont pas colorés selon les couleurs de l'arc-en-ciel ou les couleurs séparées par un prisme.

Q29 Lorsqu'un arc-en-ciel se produit, un rayon lumineux interagit trois fois avec la surface d'une goutte d'eau. Combien de fois le phénomène de dispersion agit-il dans le parcours ?

E30 Un mince rayon de lumière blanche est dirigé vers la surface lisse d'un étang. Quel est l'angle entre les couleurs rouge (650 nm) et bleue (475 nm) sous la surface si l'angle d'incidence est de 35,00° ? Les indices respectifs de l'eau pour ces longueurs d'onde sont de 1,331 et de 1,336.

E31 Un faisceau de lumière émis par une lampe à décharge contenant de l'hydrogène est incident à un angle de 55,20° sur un prisme dont l'angle au sommet est de 60,00°. La longueur d'onde de la lumière varie entre $\lambda = 410$ nm (violet) et $\lambda = 656$ nm (rouge). Pour ces longueurs d'onde, l'indice de réfraction varie de 1,691 à 1,659. Calculez l'angle de dispersion du faisceau émergent, c'est-à-dire l'angle entre le rayon violet émergent et le rayon rouge émergent.

P32 La loi de Cauchy est une formule empirique permettant de calculer l'indice de réfraction pour les longueurs d'onde du spectre visible dans le cas de milieux transparents. Cette formule a été découverte par le mathématicien Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Selon cette formule, l'indice de réfraction est donné par un développement en série :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \cdots,$$

où A, B, C, ... sont des coefficients empiriques qui dépendent du milieu transparent. Il est souvent suffisant d'utiliser uniquement les deux premiers coefficients. Dans le cas d'un prisme de verre, on mesure que l'indice de réfraction est égal à 1,5327 pour une longueur d'onde de 656,3 nm, et qu'il est égal à 1,5414 pour une longueur d'onde de 486,1 nm.

a. Calculez les coefficients A et B pour ce verre.

b. Quel est l'indice de réfraction pour une longueur d'onde de 589,3 nm ?

P33 Un mince rayon de lumière blanche est incident à un angle de 45,0° sur un bloc en verre de quartz de 5,25 cm d'épaisseur. On observe le déplacement latéral pour une longueur d'onde jaune ($\lambda = 589$ nm) et pour une longueur d'onde bleue ($\lambda = 436$ nm). On mesure que les rayons émergents sont décalés d'une distance $\Delta d = 0{,}15$ mm l'un par rapport à l'autre. Quel est l'indice de réfraction de ce matériau pour la longueur d'onde bleue si l'indice est égal à 1,468 pour la longueur d'onde jaune ?

Section 5.7 La polarisation par réflexion

Q34 Un rayon lumineux subissant deux réflexions successives sur des surfaces en verre peut voir son irradiance entièrement atténuée. Expliquez comment ce phénomène peut se produire.

E35 On éclaire une surface d'eau de telle sorte que le rayon réfléchi est polarisé.

a. Quel est l'angle d'incidence ?

b. À l'angle de polarisation, quel sera l'angle du rayon réfracté par rapport à la normale à la surface ?

E36 Un matériau inconnu produit un rayon réfléchi polarisé avec un angle réfléchi de 56,5° par rapport à la normale. Quel est l'indice de réfraction de ce matériau ?

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

5.1	**a.** Situation impossible	Le rayon réfracté n'est pas du bon côté de la normale.
	b. Situation possible	Le rayon réfracté s'approche de la normale, car $n_2 > n_1$.
	c. Situation impossible	Le rayon réfracté devrait s'éloigner de la normale, car $n_2 < n_1$.
5.2	La lame 3	La lumière doit subir des réflexions totales internes sur chacune des faces de la lame. Pour cela, il faut que la lame soit entourée par des milieux ayant des indices plus faibles.
5.3	La lumière rouge	L'indice de réfraction est plus faible pour le rouge, ce qui implique que l'angle critique est plus élevé pour le rouge. Dans la figure, l'angle d'incidence sur la deuxième surface dépasse l'angle critique du violet, mais pas l'angle critique du rouge.

Chapitre 06

La formation des images

Buts du chapitre

Ce chapitre porte sur les images formées par les miroirs et les lentilles. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- d'obtenir la position et la grandeur d'une image formée par la réflexion des miroirs ou par la réfraction à travers les dioptres et les lentilles ;
- de modéliser l'œil comme un système optique et d'expliquer la façon de corriger les défauts communs de l'œil à l'aide d'une lentille ;
- d'étudier le principe de fonctionnement des instruments d'optique tels que la loupe, le microscope et le télescope.

Préalables

Ce chapitre traite des applications de la réflexion et de la réfraction. Revoyez :

- la réflexion de la lumière, étudiée à la section 5.3 ;
- la réfraction de la lumière, décrite à la section 5.4 ;
- la dispersion de la lumière, vue à la section 5.6.

Une bille de verre forme une image de l’arbre derrière elle.

Le chapitre précédent a permis d'établir les lois qui s'appliquent lorsque la lumière se propage d'un milieu à un autre. La réflexion et la réfraction produisent une déviation de la lumière. Dans le présent chapitre, nous étudions les images formées par la lumière après la réflexion ou la réfraction de celle-ci.

Lorsqu'on place un objet devant un miroir ou une lentille, la lumière issue de l'objet est déviée, et une image de l'objet est formée. Selon la position de l'objet et la forme du miroir ou de la lentille, l'image peut être plus grande ou plus petite. Nous verrons dans ce chapitre comment obtenir la position et la grandeur de l'image.

Différents systèmes optiques produisent des images ou sont utilisés pour détecter ces dernières. C'est le cas de l'œil, dans lequel la lumière est déviée lorsqu'elle passe à travers la cornée, pour ensuite être focalisée par le cristallin et produire une image sur la rétine. De la même façon, un appareil photo et une caméra produisent des images qui sont ensuite détectées par des capteurs. Il est aussi possible d'obtenir des images sur des écrans de cinéma à l'aide de projecteurs. Depuis le 17e siècle, les microscopes et les télescopes ont joué un rôle déterminant dans l'avancement de la science. Ces appareils sont toujours très importants. Par exemple, on trouve des microscopes dans les laboratoires de biologie, et les grands télescopes terrestres et spatiaux permettent des découvertes en astronomie.

6.1 Les objets et les images

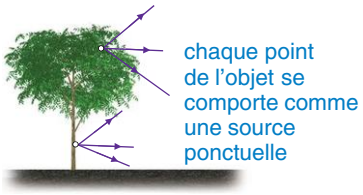


FIGURE 6.1
Un arbre réfléchit la lumière incidente dans toutes les directions.

Lorsque vous observez un objet quelconque, de la lumière provient de l'objet et entre dans vos yeux. Que l'objet émette de la lumière (comme une ampoule ou un écran d'ordinateur) ou qu'il la réfléchisse (comme un arbre ou un livre), il y a un faisceau divergent issu de chaque point de l'objet, comme le montre la figure 6.1. On peut dire que chaque point de l'objet se comporte comme une source ponctuelle, qui émet de la lumière dans toutes les directions. La lumière qui entre dans vos yeux n'est qu'une petite partie de la lumière émise ou réfléchie par l'objet.

Pour bien comprendre ce qu'on entend par *objet* et *image* en optique, supposons que vous placez une loupe (une lentille convergente) à une certaine distance d'une ampoule (*voir la figure 6.2*). En déplaçant la lentille, vous pouvez obtenir une image claire de l'ampoule sur un mur. La lumière incidente à partir de l'ampoule est réfractée lorsqu'elle passe à travers la lentille, ce qui modifie le faisceau lumineux. La lentille produit une image inversée de l'ampoule sur le mur. Chaque point de l'ampoule émet un faisceau divergent. La lentille fait converger les rayons d'un faisceau sur le mur et forme une image. Chaque point de l'image correspond à un point de convergence du faisceau provenant d'un point particulier de l'objet.

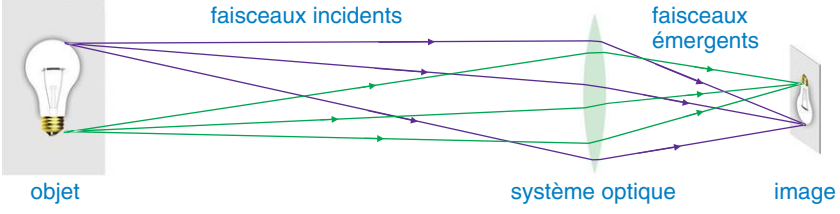
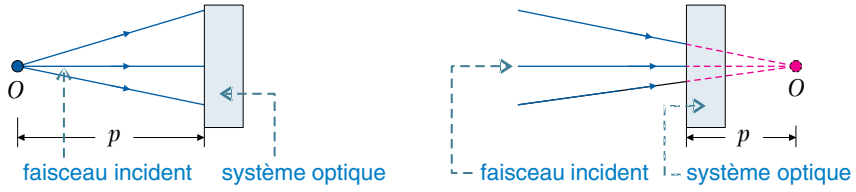


FIGURE 6.2
Une loupe est placée devant une ampoule (l'objet) et forme une image sur un mur.

Un dispositif comme la lentille, qui modifie un faisceau lumineux, est appelé un *système optique*. Les systèmes optiques peuvent ne comporter qu'un seul élément comme une lentille ou un miroir. Ils peuvent aussi être composés de plusieurs éléments, comme c'est le cas pour les microscopes et les télescopes. Étant donné que plusieurs systèmes optiques peuvent être situés les uns à la suite des autres, il est important de définir le point objet et le point image en fonction d'un système optique particulier, sans égard à l'observation de l'image par un observateur.

Lorsqu'un faisceau est incident sur un système optique, comme le montre la figure 6.3, le point objet O (ou simplement l'*objet*) correspond au point de concours de ce faisceau (le point d'intersection des rayons). La distance p entre l'objet et le système objet est la *distance objet*.



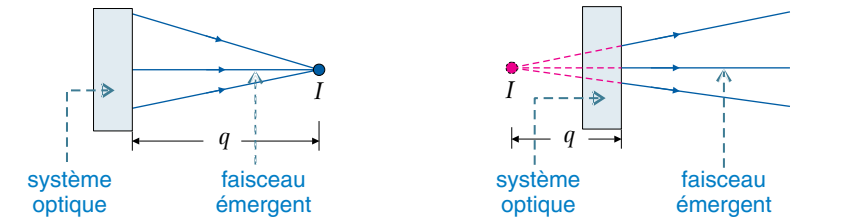
faisceau incident divergent
objet réel
$p > 0$

faisceau incident convergent
objet virtuel
$p < 0$

FIGURE 6.3
Un objet est défini à partir du faisceau incident sur un système optique.

Le faisceau incident peut être un faisceau divergent ou un faisceau convergent. Lorsque le faisceau est divergent, l'objet est du côté du faisceau incident. On dit alors que l'objet est *réel*. Comme le montre la figure 6.1, les objets réels tels que les arbres et les ampoules produisent un faisceau divergent. Il est aussi possible que le faisceau incident sur le système optique soit un faisceau convergent, par exemple si ce faisceau provient d'une lentille convergente. Dans ce cas, le point de concours n'est pas du côté des rayons incidents, mais du côté opposé. On dit que l'objet est *virtuel*, car aucune lumière n'est produite par ce point objet. On utilise la convention de signes selon laquelle la distance objet p est positive dans le cas d'un objet réel, et elle est négative dans le cas d'un objet virtuel.

L'image d'un système optique est obtenue à partir du faisceau émergent (qui sort) du système optique. Le point image I (ou simplement l'*image*) est le point de concours du faisceau émergent. La nature de l'image dépend du type de faisceau lumineux qui émerge du système optique, comme le montre la figure 6.4. La *distance image* q est la distance entre le système optique et l'image.



faisceau émergent convergent
image réelle
$q > 0$

faisceau émergent divergent
image virtuelle
$q < 0$

FIGURE 6.4
Une image est définie à partir du faisceau émergent d'un système optique.

L'image est réelle lorsque le faisceau émergent est un faisceau convergent. Dans cette situation, la lumière converge au point image, et celle-ci peut être observée à l'aide d'un écran placé à la position de l'image. C'est ce type d'image qui a été observé à la figure 6.2, le mur servant d'écran. L'image est alors du côté du faisceau émergent.

Lorsque le faisceau émergent est un faisceau divergent, le point de concours du faisceau se trouve du côté opposé au faisceau émergent. On dit que l'image est *virtuelle*, car aucune lumière ne se rend au point image. Lorsque vous regardez dans un miroir plan, vous observez une image virtuelle produite par le miroir. La lumière semble provenir de points situés derrière le miroir, mais aucune lumière n'est issue de ces points. Ceci montre qu'on peut observer une image virtuelle en regardant dans le système optique qui produit cette image. Comme dans le cas de la distance objet, on utilise la convention de signes selon laquelle la distance image q est positive dans le cas d'une image réelle (I du côté du faisceau émergent), et elle est négative dans le cas d'une image virtuelle (I du côté opposé au faisceau émergent).

REMARQUE

On a examiné des sources ponctuelles. Si la source est étendue, on peut la considérer comme un ensemble de sources ponctuelles. Chacun de ces points est le point de concours d'un faisceau incident. De même, l'image résultante est composée d'un grand nombre de points images. Chacun de ces points images est le point de concours d'un faisceau émergent du système optique.

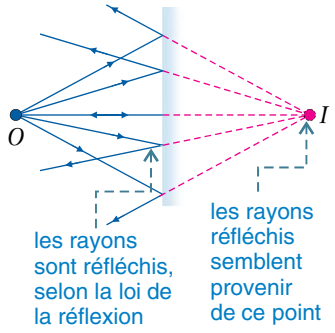


FIGURE 6.5
Un miroir plan réfléchit la lumière provenant d'un objet O. Le miroir produit l'image virtuelle I.

6.2 Les miroirs plans

Les miroirs sont très communs, servant d'accessoires dans les salles de bain ou de composants dans les instruments d'optique. Un miroir plan est une surface plane réfléchissante. Lorsqu'on place un objet devant un miroir, la lumière provenant de l'objet est réfléchie par le miroir, comme le montre la figure 6.5. Le faisceau incident est un faisceau divergent dans le cas d'un objet réel. Chaque rayon du faisceau est réfléchi selon la loi de la réflexion $\theta' = \theta$. Comme le montre la figure 6.5, le faisceau réfléchi est aussi divergent. Les rayons réfléchis semblent provenir du point I, situé derrière le miroir. Le point I est le point image, et cette image est virtuelle, car le faisceau réfléchi est divergent. En effet, il n'y a pas de lumière qui provient réellement du point I.

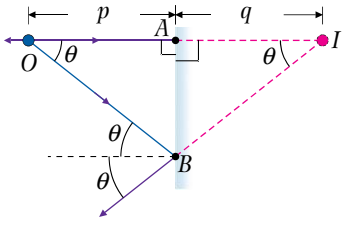


FIGURE 6.6
Un objet est situé à une distance p devant le miroir. L'image virtuelle est à une distance q derrière le miroir.

Pour trouver la position de l'image, on considère deux rayons particuliers faisant partie du faisceau incident, comme le montre la figure 6.6. Le rayon $\overline{OA}$ frappe le miroir à un angle d'incidence $\theta = 0$. Il est réfléchi sur lui-même. Le deuxième rayon $\overline{OB}$ frappe le miroir à un angle d'incidence θ quelconque. Il est réfléchi à un angle $\theta' = \theta$, selon la loi de la réflexion (*voir l'équation 5.4*). Les deux rayons réfléchis forment un faisceau divergent. On trouve la position de l'image en prolongeant ces rayons vers l'arrière du miroir. L'image est virtuelle, car elle n'est pas située du côté des rayons réfléchis.

Comme l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, les triangles OAB et IAB sont isométriques (ils ont les mêmes dimensions), car ils partagent le côté $\overline{AB}$ et leurs angles sont égaux. Alors, les segments $\overline{OA}$ et $\overline{IA}$ sont égaux.

Pour un miroir plan, l'image est située à la même distance que l'objet, mais du côté opposé.

À la figure 6.5, l'objet est réel et l'image est virtuelle. Si l'objet est virtuel, comme on peut le voir à la figure 6.7, l'image est réelle. L'image est donc de nature opposée à l'objet. En utilisant la convention de signes, on obtient la relation entre la distance image et la distance objet :

$$q = -p\,. \tag{6.1}$$

Distance image (miroir plan)

On a analysé la formation de l'image associée à un objet ponctuel. Lorsqu'un objet étendu est placé devant un miroir plan, chaque point de l'objet se comporte comme un objet ponctuel, en émettant de la lumière dans toutes les directions. Chaque point de l'objet étendu a une image, située à la même distance derrière le miroir, comme le montre la figure 6.8. Dans ce cas, la partie de l'objet la plus près du miroir génère une image plus rapprochée du miroir. Le miroir inverse donc l'avant et l'arrière d'un objet. Cette inversion est habituellement perçue comme une inversion de la gauche et de la droite. Par exemple, si vous dessinez votre main gauche, et que vous inversez la paume et le dos de la main, vous obtenez une main droite.

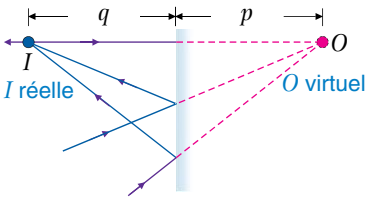


FIGURE 6.7
Un miroir plan produit une image réelle lorsque l'objet est virtuel (faisceau incident convergent).

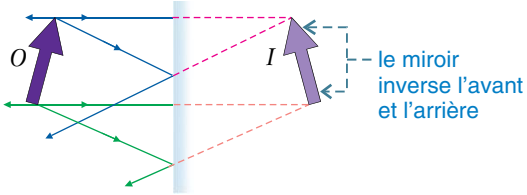
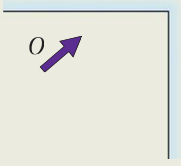


FIGURE 6.8
Un objet étendu est placé devant un miroir. Chaque partie de l'objet est un objet ponctuel. L'image de chaque objet ponctuel est à la même distance, derrière le miroir.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 6.1

Deux miroirs plans sont placés à 90° l'un de l'autre, comme le montre la figure ci-dessous. Un objet *O* est placé devant le miroir. Combien d'images peut-on apercevoir dans les miroirs ?



6.3 Les miroirs sphériques

Les miroirs plans étudiés à la section précédente ne changent pas la forme d'un faisceau incident. Par exemple, des rayons incidents parallèles sont déviés du même angle, et les rayons réfléchis demeurent parallèles. Pour changer la forme du faisceau, le miroir doit être courbé. Les miroirs les plus communs ayant une surface courbe sont les miroirs sphériques. La surface réfléchissante de ces miroirs est une portion de sphère de rayon *R*. Ces miroirs peuvent produire des

images virtuelles plus grandes ou plus petites que les objets. Ils peuvent aussi produire des images réelles. On les utilise entre autres dans les endroits publics pour augmenter le champ de vision.

Le foyer d'un miroir sphérique

La figure 6.9a montre un *miroir concave*. Le point *C* est le centre de courbure du miroir, qui correspond au centre de la sphère. Il est situé devant le miroir, du côté des rayons réfléchis. La ligne qui sépare le miroir en deux parties égales et qui passe par le centre de courbure est l'*axe optique* du miroir. De plus, le point du miroir sur l'axe est le *sommet S*.

À la figure 6.9b, des rayons parallèles à l'axe optique sont incidents sur le miroir. Ces rayons sont issus d'un point objet *O* très éloigné (un objet à l'infini). Chaque rayon est réfléchi, conformément à la loi de la réflexion. Les rayons incidents près du sommet sont déviés vers un point *F*, qu'on appelle le *foyer* du miroir. La distance *f* entre le foyer et le miroir est appelée la *distance focale* du miroir. Le miroir concave est un miroir qui fait converger les rayons incidents.

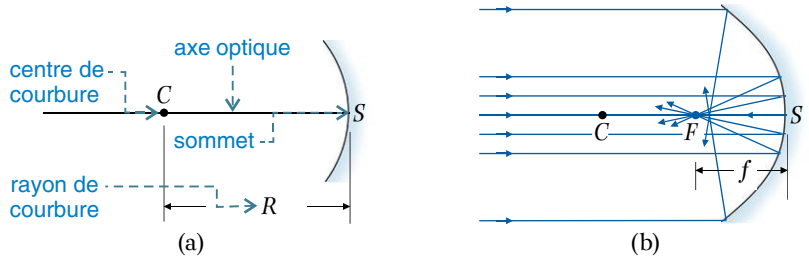


FIGURE 6.9

(a) Un miroir concave sphérique, dont le centre de courbure est devant le miroir. (b) Les rayons incidents qui frappent le miroir près du sommet sont réfléchis vers le foyer.

Les rayons qui frappent le miroir à des points loin de l'axe sont déviés vers un point autre que le foyer. Les images produites par les miroirs sphériques sont déformées. Ce défaut des miroirs sphériques est appelé l'*aberration sphérique*. Pour simplifier l'analyse, on suppose que tous les rayons frappent le miroir à des points près de l'axe optique, avec des petits angles. C'est l'*approximation paraxiale*, aussi appelée, l'*approximation de Gauss*.

Dans le cas d'un *miroir convexe*, le centre de courbure est derrière le miroir, comme le montre la figure 6.10. Lorsqu'un faisceau de rayons parallèles est incident sur un miroir convexe, la réflexion produit un faisceau divergent. Le point image d'un objet à l'infini est alors virtuel, comme le montre la figure 6.10b. Ce point est appelé le foyer; il se trouve derrière le miroir, du côté opposé aux rayons réfléchis.

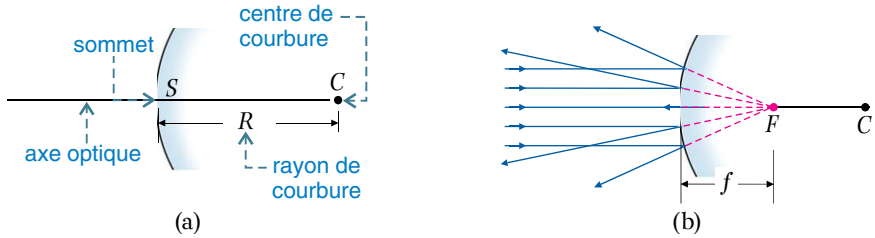


FIGURE 6.10

(a) Un miroir convexe sphérique, dont le centre de courbure est derrière le miroir. (b) Les rayons incidents sont réfléchis et forment un faisceau divergent. Le foyer *F* est virtuel.

L'équation des miroirs sphériques

On place un objet O réel devant un miroir concave, dont le rayon de courbure est R et la distance focale est f. On veut obtenir la position de l'image I ainsi que sa nature. (L'image est-elle réelle ou virtuelle ?) La figure 6.11 montre un objet placé à une distance p du miroir. Pour obtenir la position de l'image, on analyse la réflexion de deux rayons incidents : le premier rayon frappe le miroir à un angle d'incidence nul. Il est donc réfléchi sur lui-même. Le deuxième rayon frappe le miroir au point A, à un angle d'incidence θ quelconque. Pour ce rayon, la normale est le segment qui relie le centre de courbure C et le miroir, car pour une sphère, un segment perpendiculaire à la surface doit passer par le centre. Le deuxième rayon est réfléchi à un angle $\theta' = \theta$, selon la loi de la réflexion. L'image se trouve au point I, le point de concours des deux rayons réfléchis. Dans la figure 6.11, l'objet est réel puisque le faisceau incident est divergent, et l'image est réelle puisque le faisceau réfléchi est convergent.

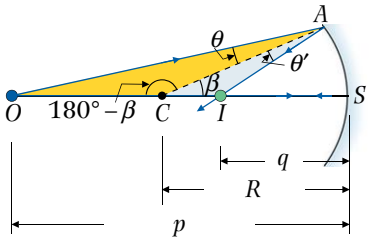


FIGURE 6.11
Les rayons issus du point objet O sont réfléchis par le miroir concave. Le miroir forme une image réelle au point I.

Pour obtenir l'équation reliant la distance objet p et la distance image q, on considère le triangle CAO et le triangle CIA. Pour le triangle CAO (de couleur jaune), la loi des sinus implique que

$$\frac{\sin\theta}{\overline{OC}} = \frac{\sin(180° - \beta)}{\overline{OA}} \Rightarrow \sin\theta = \sin\beta \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}},$$

où on a utilisé l'identité trigonométrique $\sin(180° - \beta) = \sin\beta$. De la même façon, pour le triangle CIA (de couleur bleue),

$$\frac{\sin\theta'}{\overline{CI}} = \frac{\sin\beta}{\overline{IA}} \Rightarrow \sin\theta' = \sin\beta \frac{\overline{CI}}{\overline{IA}}.$$

D'après la loi de la réflexion, $\theta' = \theta$. Ceci implique que

$$\sin\beta \frac{\overline{CI}}{\overline{IA}} = \sin\beta \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}. \tag{6.2}$$

Comme le montre la figure 6.11, $\overline{OC} = p - R$ et $\overline{CI} = R - q$. De plus, lorsque les rayons frappent le miroir avec de petits angles (dans l'approximation des rayons paraxiaux), le point A est très près du point S, ce qui fait que $\overline{OA} \approx \overline{OS} = p$ et $\overline{IA} \approx \overline{IS} = q$. En insérant ces résultats dans l'équation 6.2, on obtient

$$\frac{R-q}{q} = \frac{p-R}{p}$$
$$\frac{R}{q} - 1 = 1 - \frac{R}{p}$$
$$R\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = 2.$$

On écrit habituellement la dernière équation en gardant les paramètres de l'objet et de l'image du côté gauche de l'égalité, et la propriété du miroir, du côté droit de l'égalité. De cette façon, on obtient l'*équation des miroirs* :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}. \tag{6.3}$$

L'équation 6.3 permet d'obtenir la position de l'image pour n'importe quelle position de l'objet. En particulier, si l'objet est à l'infini ($p \to \infty$), l'image doit se trouver au foyer, avec $q = f$. On peut donc trouver la distance focale en fonction du rayon de courbure :

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R}.$$

Distance focale d'un miroir

$$f = \frac{R}{2}. \tag{6.4}$$

L'équation des miroirs sphériques peut s'écrire en fonction de R ou de f :

Équation des miroirs

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}. \tag{6.5}$$

La distance focale dépend uniquement du rayon de courbure du miroir, et non de sa composition. De plus, le miroir réfléchit la lumière de la même façon, quelle que soit sa longueur d'onde. Ces deux propriétés ne sont pas partagées par les lentilles, ce que nous verrons à la section 6.5. Si on place un objet au foyer ($p = f$), on obtient $q \to \infty$. Le faisceau est parallèle, ce qui représente une image à l'infini. Deux définitions équivalentes s'appliquent au foyer d'un miroir :

Le foyer d'un miroir est le point image d'un objet à l'infini. De plus, c'est le point objet d'une image à l'infini.

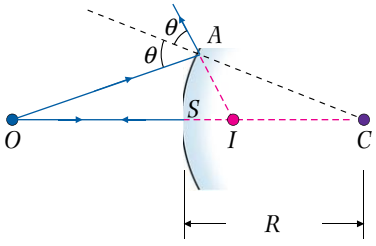


FIGURE 6.12
Les rayons issus du point objet O sont réfléchis par le miroir convexe. Le miroir forme une image virtuelle au point I.

On a démontré l'équation des miroirs sphériques dans le cas d'un miroir concave. Pour un miroir convexe, l'image d'un objet réel est une image virtuelle, car le faisceau réfléchi est divergent (*voir la figure 6.12*). L'image I se retrouve derrière le miroir, et $q < 0$, selon la convention de signes. On pourrait reprendre la loi des sinus pour trouver une équation reliant la distance objet p et la distance image q. Cette équation est identique à l'équation 6.5, si on suppose que le rayon de courbure R et la distance focale f sont des nombres négatifs lorsque le miroir est convexe. On remarque que le centre de courbure C et le foyer F sont du côté des rayons réfléchis lorsque le miroir est concave, et qu'ils sont à l'opposé des rayons réfléchis dans le cas d'un miroir convexe. On ajoute donc à la convention de signes de la section 6.1 celle pour les rayons de courbure et des distances focales.

Pour un miroir sphérique, le signe de R et de f dépend de la position de C et de F par rapport aux rayons réfléchis :

- $R > 0$ et $f > 0$ lorsque C et F sont du côté des rayons réfléchis. Le miroir est alors un miroir concave.
- $R < 0$ et $f < 0$ lorsque C et F sont du côté opposé aux rayons réfléchis, derrière le miroir. Le miroir est alors convexe.

La figure 6.13 résume la convention de signes pour la distance objet, la distance image et la distance focale.

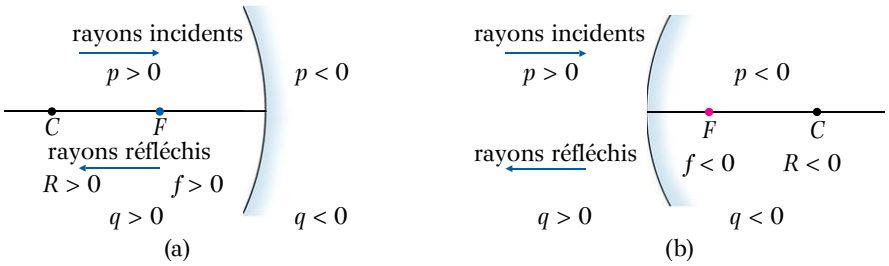


FIGURE 6.13
La convention de signes pour les miroirs : (a) dans le cas du miroir concave ; (b) dans le cas du miroir convexe.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 6.2

On place un objet réel devant un miroir sphérique. Le tableau suivant indique la position de l'objet et le type de miroir. Ajoutez les données manquantes.

Type de miroir	Signe de f	p	Nature de l'image	Position de l'image	Signe de q
concave		$p > f$			
		$0 < p < f$			
convexe		$p > 0$			

Le grandissement

Contrairement aux miroirs plans, les miroirs sphériques produisent des images qui ont une grandeur différente de la grandeur de l'objet. Prenons par exemple un objet O, ayant une hauteur y et placé à une distance p devant un miroir concave (*voir la figure 6.14*). On trouve l'image en traçant de nouveau deux rayons. Le premier rayon incident passe par le centre de courbure et frappe le miroir à un angle d'incidence de 0°. Il est réfléchi sur lui-même. Le deuxième rayon frappe le miroir vis-à-vis du sommet du miroir, avec un angle d'incidence θ. Il est réfléchi à un angle $\theta' = \theta$, selon la loi de la réflexion. L'image se trouve au point de concours des deux rayons réfléchis. Cette image est inversée. Elle a une hauteur $y' < 0$, et elle est située à une distance q du miroir.

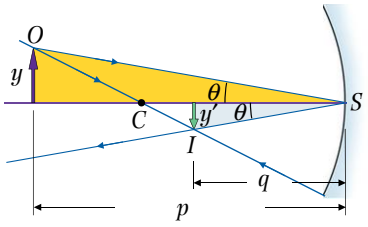


FIGURE 6.14
L'image formée par un miroir sphérique n'a pas la même grandeur que l'objet.

On obtient deux triangles rectangles. Pour le triangle jaune, $\tan\theta = y/p$, alors que pour le triangle de couleur bleue, $\tan\theta = -y'/q$, où le signe négatif est nécessaire, car $y' < 0$, alors que l'angle θ est positif. On définit le *grandissement* comme le rapport des hauteurs de l'image et de l'objet. On obtient

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{q}{p}. \qquad (6.6)$$

Grandissement (miroir sphérique)

En général, la valeur absolue du grandissement indique si l'image est plus grande ou plus petite que l'objet, alors que le signe du grandissement indique si l'image est droite ou inversée :

- L'image est plus grande que l'objet lorsque $|m| > 1$, et elle est plus petite lorsque $|m| < 1$.
- L'image est droite (dans le même sens que l'objet) lorsque $m > 0$, et l'image est inversée lorsque $m < 0$.

L'équation 6.6 montre que pour un objet réel réfléchi par un miroir sphérique, ($p > 0$), une image réelle est inversée alors qu'une image virtuelle est droite.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 6.3

Du côté du passager, le rétroviseur d'une automobile produit des images virtuelles plus petites que les objets. Le miroir est-il concave ou convexe ?

Le tracé des rayons principaux

L'équation 6.5 permet d'obtenir la position formée par un miroir pour un objet situé à une distance p. De plus, l'équation 6.6 permet de calculer la grandeur de l'image par rapport à l'objet. Ces deux équations algébriques sont valables dans l'approximation paraxiale, ce qui implique que la lumière frappe le miroir près du sommet du miroir, avec des angles faibles. On peut aussi trouver la position et la grandeur de l'image par une construction géométrique qui fait intervenir le tracé de trois rayons particuliers, qu'on appelle les *rayons principaux*.

TECHNIQUE 6.1 Les rayons principaux pour les miroirs sphériques

Pour obtenir la position de l'image, on trace les trois rayons suivants.

1. Le rayon incident, parallèle à l'axe optique, qui est réfléchi vers le foyer F (pour un miroir concave), ou qui est réfléchi de telle sorte que son prolongement passe par le foyer F (miroir convexe).
2. Le rayon incident qui passe par le foyer F, ou le rayon dont le prolongement passe par le foyer F. Ce rayon est réfléchi parallèlement à l'axe optique.
3. Le rayon incident qui passe par le centre de courbure C, ou le rayon dont le prolongement passe par le centre de courbure C. Ce rayon est réfléchi sur lui-même, car l'angle d'incidence est de 0°.

Ce tracé est dessiné à l'échelle. Il est correct d'utiliser une échelle différente pour représenter les distances horizontales et les distances verticales. Par convention, on trace en traits pleins les rayons et en traits pointillés les prolongements des rayons. La figure 6.15 montre deux exemples de tracés dans le cas d'un miroir concave. À la figure 6.15a, l'objet est réel, et il est plus éloigné que le centre de courbure. L'image produite est réelle, inversée, et elle est plus petite que l'objet. À la figure 6.15b, l'objet est placé entre le foyer et le miroir. Le faisceau incident est trop divergent pour le miroir. Le faisceau réfléchi est divergent. On trouve l'image en prolongeant les rayons réfléchis vers l'arrière. L'image est virtuelle, droite et plus grande que l'objet.

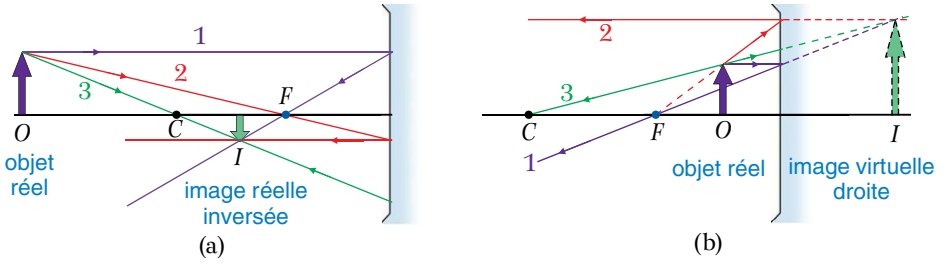


FIGURE 6.15

Le tracé de rayons principaux pour un miroir concave : (a) pour un objet éloigné, l'image est réelle et inversée ; (b) pour un objet plus près que le foyer, l'image est virtuelle, droite et plus grande que l'objet.

REMARQUE

On trace le miroir comme s'il s'agissait d'un miroir plan. En effet, pour que l'approximation paraxiale soit valide, les rayons doivent frapper le miroir près du sommet. La courbure du miroir illustré est très faible.

Pour un miroir convexe, le foyer et le centre de courbure sont derrière le miroir. Les rayons ne passent donc pas réellement par ces points. Les rayons principaux sont tracés pour que leurs prolongements passent par le foyer ou le centre de courbure. La figure 6.16 montre le tracé de rayons dans le cas d'un objet réel placé devant un miroir convexe. L'image est virtuelle, droite et plus petite que l'objet. Pour que l'image soit réelle, avec un faisceau réfléchi qui converge en un point, il faut que le faisceau incident soit déjà convergent. Ceci représente donc un objet virtuel, comme le montre la figure 6.16b. On trace les rayons incidents de telle sorte qu'ils convergeraient à la position de l'objet si le miroir était absent. Ce faisceau ne peut pas venir directement d'un objet ordinaire. C'est plutôt un faisceau issu d'un autre dispositif optique, comme un autre miroir convergent.

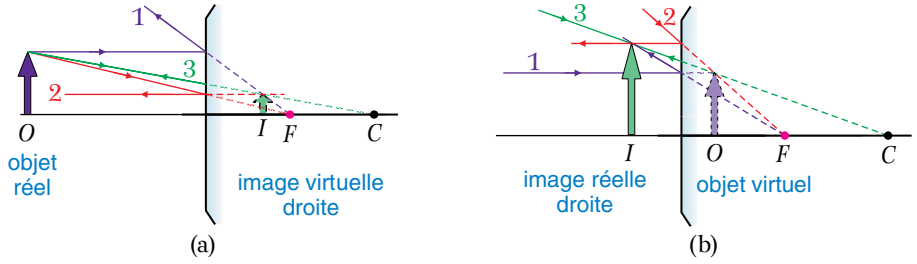


FIGURE 6.16

Le tracé de rayons principaux pour un miroir convexe : (a) pour un objet réel, l'image est virtuelle, droite, et plus petite que l'objet ; (b) pour que l'image soit réelle, il faut que l'objet soit virtuel.

EXEMPLE 6.1 L'image d'un miroir concave

On place un objet de 3,00 mm de hauteur à une distance de 30,0 cm d'un miroir concave. Le miroir a un rayon de courbure de 40,0 cm.

a. L'image est-elle réelle ou virtuelle ?
b. Quelle est la distance entre l'objet et l'image ?
c. Quelle est la grandeur de l'image ?
d. L'image est-elle droite ou inversée ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues	
$y = 3{,}00$ mm	$p = 30{,}0$ cm	d	nature
$R = 40{,}0$ cm		$\lvert y' \rvert$	sens

La distance focale du miroir est positive, car le miroir est concave. Selon l'équation 6.4,

$$f = \frac{R}{2} = \frac{40{,}0 \text{ cm}}{2} = 20{,}0 \text{ cm} . \qquad \text{(i)}$$

SOLUTION a.

Identifier la clé

Nous trouvons la distance image à l'aide de l'équation des miroirs (*voir l'équation 6.5*) :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow q = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{p} \right)^{-1} . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons les valeurs numériques :

$$q = \left(\frac{1}{20{,}00 \text{ cm}} - \frac{1}{30{,}00 \text{ cm}} \right)^{-1} = 60{,}0 \text{ cm} . \quad \text{(iii)}$$

Comme $q > 0$,

l'image est réelle. (réponse)

SOLUTION b.

Illustrer la situation

Nous avons calculé la distance image q à la partie a. Comme $q > 0$, l'image est du côté des rayons réfléchis, comme le montre la figure 6.17.

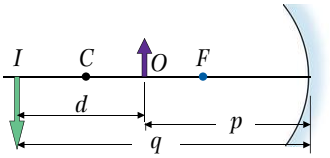


FIGURE 6.17
Les positions qui permettent de calculer d

Résoudre le problème

Selon la figure 6.17, la distance demandée est

$$d = q - p = 60{,}0 \text{ cm} - 30{,}0 \text{ cm} = 30{,}0 \text{ cm} .$$

(réponse)

SOLUTION c.

Identifier la clé

On calcule la hauteur de l'image à l'aide de la formule du grandissement, donnée par l'équation 6.6 :

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{q}{p} \Rightarrow y' = -\frac{q}{p} y . \quad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$y' = -\frac{60{,}0 \text{ cm}}{30{,}0 \text{ cm}} \, 3{,}00 \text{ mm} = -6{,}00 \text{ mm} .$$

On demande la grandeur de l'image, ce qui représente une quantité positive. Alors,

$$|y'| = 6{,}00 \text{ mm} . \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION d.

Identifier la clé

Le signe du grandissement indique le sens de l'image par rapport à l'objet.

Résoudre le problème

Comme $m < 0$,

l'image est inversée. (réponse)

Valider la réponse

L'image doit être réelle, car l'objet est placé plus loin que le foyer, dans le cas d'un miroir concave. De plus, l'image est inversée, ce qui doit être le cas pour une image réelle produite à partir d'un objet réel. On remarque que l'image est plus grande que l'objet, ce qui se produit lorsque $f < p < R$.

EXEMPLE 6.2 Une image et un objet de même grandeur

On place un objet devant un miroir sphérique ayant une distance focale f. On veut obtenir une image ayant la même grandeur que l'objet.

a. À quel endroit doit-on placer l'objet pour que l'image soit inversée ?

b. À quel endroit doit-on placer l'objet pour que l'image ne soit pas inversée ?

SOLUTION a.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$m = -1$	p
f	

Identifier les clés

La première **clé** est l'équation du grandissement :

$$m = -\frac{q}{p} . \quad \text{(i)}$$

La distance image est obtenue à l'aide de la deuxième **clé**, soit l'équation des miroirs :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous isolons d'abord q dans l'équation (ii) :

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{f}-\frac{1}{p}=\frac{p-f}{pf}$$
$$\Rightarrow q=\frac{pf}{p-f}. \qquad \text{(iii)}$$

Nous insérons l'équation (iii) dans l'équation (i) :

$$m=-\frac{\frac{pf}{p-f}}{p}=-\frac{f}{p-f}. \qquad \text{(iv)}$$

Nous insérons ensuite la valeur numérique du grandissement :

$$-1=-\frac{f}{p-f}$$
$$\Rightarrow p-f=f$$
$$\Rightarrow p=2f.$$

Ceci correspond à la position du centre de courbure. Donc,

l'objet doit être au centre de courbure.

(réponse)

Valider la réponse

Nous pouvons vérifier que lorsque $p = 2f$, $q = p$, ce qui produit un grandissement égal à -1. Pour un miroir concave, l'objet doit être réel. Par contre, pour un miroir convexe, l'objet doit être virtuel, de telle sorte qu'il soit situé au centre de courbure, qui se trouve derrière le miroir.

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$m = 1$ $\quad f$	p

Résoudre le problème

Nous remplaçons la valeur du grandissement dans l'équation (iv) :

$$1=-\frac{f}{p-f}$$
$$\Rightarrow p-f=-f$$
$$\Rightarrow p=0.$$

Ceci correspond à la position du miroir. Donc,

l'objet doit être directement sur le miroir.

(réponse)

Valider la réponse

En plaçant l'objet contre le miroir, à une position $p = 0$, le miroir sphérique se comporte comme un miroir plan, car le rayon de courbure du miroir est beaucoup plus grand que la position de l'image. Le miroir plan est équivalent à un miroir sphérique dont le rayon de courbure est très très grand.

6.4 Les dioptres

Après avoir étudié la formation des images par la réflexion de la lumière, on s'intéresse à la formation des images lorsque la lumière est réfractée. La réfraction se produit quand la lumière traverse la frontière entre deux milieux transparents ayant des indices de réfraction différents. Cette frontière est appelée un *dioptre*. Un dioptre produit une image réelle ou une image virtuelle, selon la valeur des indices de réfraction et du type de dioptre. Cette section ne porte que sur les dioptres sphériques, et le cas limite du dioptre plan, dans l'approximation paraxiale.

L'équation des dioptres sphériques

La figure 6.18a (*voir la page suivante*) montre un objet O placé devant un dioptre convexe, et la figure 6.18b montre un objet O devant un dioptre concave. Chacun des dioptres a un rayon de courbure R. Pour différencier les deux dioptres, on utilise de nouveau une convention de signes. Étant donné qu'on s'intéresse à la réfraction de la lumière, on considère le côté des rayons réfractés comme étant le côté positif.

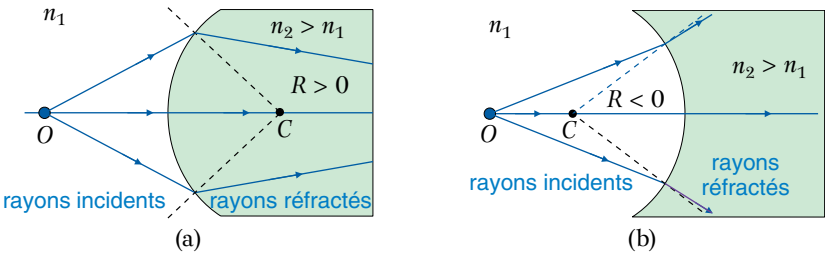


FIGURE 6.18

(a) Un dioptre convexe, avec $R > 0$, car C est du côté des rayons réfractés. (b) Un dioptre concave, avec $R < 0$, car C n'est pas du côté des rayons réfractés.

- Le rayon de courbure du dioptre est positif si le centre de courbure C est du côté des rayons réfractés. Ceci correspond à un dioptre convexe.
- Le rayon de courbure du dioptre est négatif si le centre de courbure C n'est pas du côté des rayons réfractés. Ceci correspond à un dioptre concave.

MISE EN GARDE

Contrairement au cas des miroirs sphériques, le rayon de courbure d'un dioptre est positif lorsqu'une surface est convexe. Ceci est lié au fait qu'on utilise les rayons réfractés, qui ne sont pas du même côté que les rayons incidents.

Soit un objet placé à une distance p devant un dioptre sphérique, comme le montre la figure 6.19. Pour trouver la position de l'image, on considère de nouveau deux rayons issus de l'objet. Le premier rayon frappe le dioptre à un angle d'incidence de 0°. Ce rayon n'est pas dévié lors de la réfraction. On choisit ensuite un deuxième rayon quelconque, qui frappe le dioptre au point A, à un angle d'incidence θ_1. La lumière est réfractée à un angle θ_2. Le point de concours des deux rayons réfractés correspond à l'image. Dans la figure 6.19, l'objet est réel (les rayons incidents divergent), et l'image l'est aussi parce que les rayons réfractés convergent.

On applique d'abord la loi des sinus au triangle CAO (le triangle jaune) :

$$\frac{\sin(180° - \theta_1)}{\overline{OC}} = \frac{\sin\phi}{\overline{OA}} \Rightarrow \sin\theta_1 = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}\sin\phi\,, \tag{6.7}$$

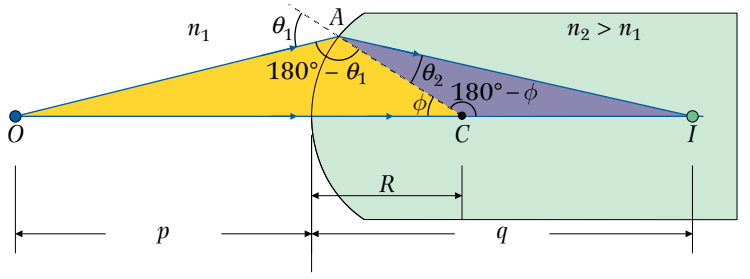


FIGURE 6.19

Un objet O est placé à une distance p du dioptre. La réfraction de la lumière produit une image réelle I, à une distance q du dioptre.

où on a utilisé l'identité trigonométrique $\sin(180° - \theta_1) = \sin\theta_1$. On calcule ensuite le sinus de l'angle de réfraction θ_2 en appliquant la loi des sinus au triangle CIA (le triangle violet) :

$$\frac{\sin\theta_2}{\overline{CI}} = \frac{\sin(180° - \phi)}{\overline{IA}} \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{\overline{CI}}{\overline{IA}}\sin\phi\,. \tag{6.8}$$

On insère ensuite les équations 6.7 et 6.8 dans l'équation de la loi de la réfraction, soit l'équation 5.6 de la page 165, $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$:

$$n_1\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}\sin\phi = n_2\frac{\overline{CI}}{\overline{IA}}\sin\phi\,. \tag{6.9}$$

Selon la figure 6.19, $\overline{OC} = p + R$ et $\overline{CI} = q - R$. De plus, dans l'approximation paraxiale, le point A est très près du point S. On peut alors dire que $\overline{OA} \approx \overline{OS} = p$ et $\overline{IA} \approx \overline{IS} = q$. En insérant ces résultats dans l'équation 6.9, on obtient

$$n_1\left(\frac{p+R}{p}\right) = n_2\left(\frac{q-R}{q}\right)$$

$$n_1 + R\frac{n_1}{p} = n_2 - R\frac{n_2}{q}$$

$$R\left(\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q}\right) = n_2 - n_1\,.$$

On peut présenter cette équation en plaçant R du côté droit de l'équation. On obtient ainsi l'équation des dioptres :

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}\,. \tag{6.10}$$

Équation des dioptres

L'équation 6.10 est valable pour les dioptres sphériques lorsque l'approximation paraxiale peut être utilisée, autant pour les dioptres convexes (avec $R > 0$) que pour les dioptres concaves (avec $R < 0$). On a supposé que $n_2 > n_1$ dans les figures, mais l'équation 6.10 est aussi valable lorsque $n_2 < n_1$. Comme dans le cas des miroirs, $p > 0$ pour un objet réel (situé du côté des rayons incidents), et $p < 0$ pour un objet virtuel (situé du côté opposé aux rayons incidents). De même, les images réelles ($q > 0$) se situent du côté des rayons réfractés, et les images virtuelles se situent du côté opposé aux rayons réfractés. La figure 6.20 présente le résumé de la convention de signes pour les dioptres.

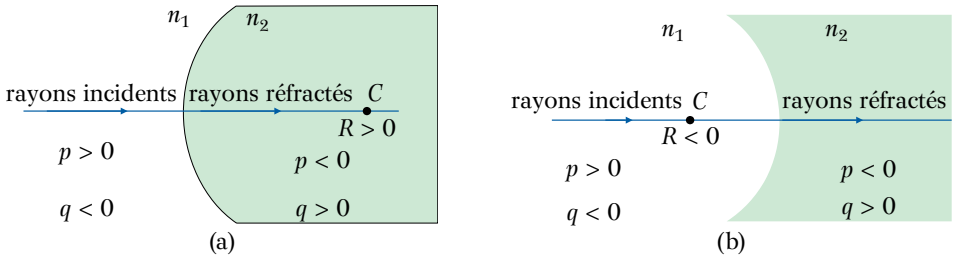
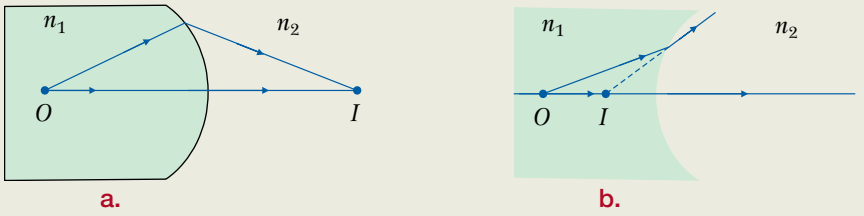


FIGURE 6.20

La convention de signes pour les dioptres : (a) dans le cas du dioptre convexe ; (b) dans le cas du dioptre concave.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 6.4

La figure ci-dessous illustre deux situations où un objet est placé devant un dioptre. Dans chacun des cas, déterminez le signe de q et de R selon la convention de signes.



Le grandissement

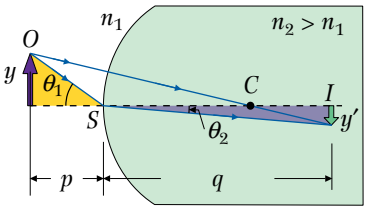


FIGURE 6.21
Le schéma qui permet d'obtenir le grandissement d'un dioptre

L'image formée par un dioptre sphérique peut être plus grande ou plus petite que l'objet. Comme pour les miroirs sphériques, on définit le grandissement comme le rapport de la hauteur de l'image y' et de la hauteur de l'objet y. Pour trouver une équation permettant de calculer le grandissement, on place un objet ayant une hauteur y à une distance p du dioptre. Soit un premier rayon ayant un angle d'incidence de 0°. Ce rayon est réfracté à 0°, et il passe par le centre de courbure du dioptre. Soit un deuxième rayon qui frappe le dioptre au sommet avec un angle d'incidence θ_1. Il est réfracté à un angle θ_2. L'image se trouve au point de concours de ces deux rayons réfractés. Elle a une hauteur y', et elle est à une distance q du dioptre (*voir la figure 6.21*).

Dans le cas du triangle rectangle jaune, on obtient

$$\tan\theta_1 = \frac{y}{p} \Rightarrow y = p\tan\theta_1 .$$

Pour le triangle violet, on obtient

$$\tan\theta_2 = -\frac{y'}{q} \Rightarrow y' = -q\tan\theta_2 .$$

De nouveau, on doit ajouter un signe négatif, car l'image est inversée et $y' < 0$. Le grandissement est alors

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{-q}{p}\frac{\tan\theta_2}{\tan\theta_1} .$$

Dans l'approximation paraxiale, les angles sont faibles, de telle sorte que $\tan\theta \approx \sin\theta$. On obtient alors, en utilisant la loi de la réfraction,

Grandissement (dioptres)

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1}{n_2}\frac{q}{p} . \qquad (6.11)$$

On remarque de nouveau que pour un objet réel, une image réelle est inversée ($m < 0$), et une image virtuelle est droite ($m > 0$).

EXEMPLE 6.3 L'image dans une sphère

Une pièce de monnaie ayant un diamètre de 1,00 cm est placée à l'intérieur d'une sphère de verre. Cette dernière a un rayon de 8,00 cm et un indice de réfraction de 1,52. La pièce de monnaie est placée à une distance de 3,00 cm de la surface.

a. À quel endroit est l'image ?

b. Quel est le diamètre de l'image ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 6.22 montre le schéma de la situation. Comme $n_1 > n_2$, les rayons réfractés s'éloignent de la normale. Le faisceau réfracté est donc un faisceau divergent, et l'image est virtuelle.

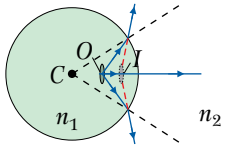


FIGURE 6.22
Le schéma de la situation pour l'exemple 6.3

Décortiquer le problème

Le rayon de courbure est négatif, car C n'est pas du côté des rayons réfractés. La lumière se propage du verre (milieu 1) vers l'air (milieu 2), avec $n_2 = 1{,}000$.

Connues		Inconnues
$p = 3{,}00$ cm	$R = -8{,}00$ cm	q
$n_1 = 1{,}52$	$n_2 = 1{,}000$	y'
$y = 1{,}00$ cm		

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation des dioptres (*voir l'équation 6.10*) :

$$\frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} - \frac{n_1}{p} . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs numériques :

$$\frac{1{,}000}{q} = \frac{1{,}000 - 1{,}52}{-8{,}00\text{ cm}} - \frac{1{,}52}{3{,}00\text{ cm}} = -0{,}442\text{ cm}^{-1}$$

$$q = \frac{1{,}000}{-0{,}442\text{ cm}^{-1}} = -2{,}26\text{ cm} . \qquad \text{(réponse)}$$

L'image se trouve donc à 2,26 cm de la surface, à l'intérieur de la sphère. En effet, l'image est virtuelle, ce qui signifie qu'elle est du côté opposé aux rayons réfractés, donc à l'intérieur de la sphère.

Valider la réponse

L'image est bien virtuelle, et elle est plus près de la surface que l'objet, comme le montre la figure 6.22.

SOLUTION b.

Identifier la clé

Nous trouvons le diamètre de l'image à l'aide de la formule du grandissement, donnée par l'équation 6.11 :

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 q}{n_2 p} \Rightarrow y' = -\frac{n_1 q}{n_2 p}\, y . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$y' = -\left(\frac{1{,}52 \times -2{,}26\text{ cm}}{1{,}000 \times 3{,}00\text{ cm}}\right) 1{,}00\text{ cm} = 1{,}15\text{ cm} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'image est droite, car c'est l'image virtuelle d'un objet réel.

Les dioptres plans

La surface d'une piscine est un exemple de dioptre plan, qu'on peut considérer comme un dioptre sphérique dont le rayon tend vers l'infini. L'équation des dioptres 6.10 permet de calculer simplement la distance image :

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = 0$$

$$q = -\frac{n_2}{n_1} p . \qquad (6.12)$$

Lorsque l'objet est réel, l'image est virtuelle. Par exemple, lorsqu'un objet est dans une piscine, la réfraction produit une image virtuelle, du même côté de l'objet. Si vous regardez dans la piscine, vous verrez l'image de l'objet. Par contre, l'image ne sera pas à la position réelle de l'objet. Le fond d'une piscine semble plus près qu'il ne l'est réellement, car l'image du fond de la piscine se trouve plus près de la surface que le fond. En effet, pour la lumière venant du fond de la piscine et qui est réfractée dans l'air, $n_1 = 1{,}33$, $n_2 = 1{,}00$, de telle sorte que $|q| < p$.

On peut aussi calculer le grandissement en insérant l'équation 6.12 dans l'équation 6.11 :

$$m = -\frac{n_1}{n_2\, p}\left(-\frac{n_2}{n_1}\, p\right) = 1\,. \tag{6.13}$$

Le dioptre plan ne produit pas de changement dans la grandeur de l'image, et celle-ci est droite.

Les associations de dioptres

Lorsque la lumière est réfractée plusieurs fois, on peut analyser la situation en considérant plusieurs dioptres successifs. Pour un objet O_1 placé à une distance p_1 du premier dioptre, ce dernier produit une première image I_1, située à une distance q_1. Cette image devient l'objet O_2 pour le deuxième dioptre. En effet, le point de concours du faisceau incident sur le deuxième dioptre correspond à l'image produite par le premier dioptre. Le deuxième dioptre produit ensuite une image finale I_2.

EXEMPLE 6.4 Il me rapportera une bille de verre

Une bille de verre a un rayon de 12,30 mm et un indice de réfraction de 1,52. On place un objet à une distance de 4,00 m de la bille.

a. Quelle est la position de l'image produite par la première réfraction ?

b. Quelle est la position de l'image finale ?

SOLUTION a.

Illustrer la situation

La figure 6.23 illustre la bille et les rayons. L'objet O_1 est situé à gauche de la figure.

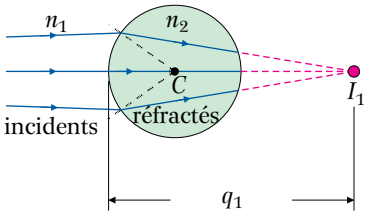


FIGURE 6.23
Les rayons dans le cas de la première réfraction

Décortiquer le problème

Pour le premier dioptre, $R_1 > 0$, car le centre de courbure est du côté des rayons réfractés. La lumière se propage de l'air (milieu 1) au verre (milieu 2).

Connues		Inconnue
$R_1 = 12{,}30$ mm	$p_1 = 4{,}00$ m	q_1
$n_1 = 1{,}000$	$n_2 = 1{,}52$	

Identifier la clé

La **clé** est l'équation des dioptres (6.10) :

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{q_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \Rightarrow \frac{n_2}{q_1} = \frac{n_2 - n_1}{R} - \frac{n_1}{p_1}\,. \tag{i}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs :

$$\frac{1,52}{q_1} = \frac{1,52-1,000}{12,30\text{ mm}} - \frac{1,000}{4000\text{ mm}} = 0,0420\text{ mm}^{-1}$$

$$\Rightarrow q_1 = \frac{1,52}{0,0420\text{ mm}^{-1}} = 36,2\text{ mm} = 36\text{ mm}\,.$$

(réponse)

L'image est réelle, car $q_1 > 0$. Cette image intermédiaire se trouve donc à une distance de 36 mm à droite de la face gauche de la bille de verre.

SOLUTION b.

Illustrer la situation

La figure 6.24 montre le schéma de la situation pour la deuxième réfraction. L'image I_1 devient l'objet O_2 pour le deuxième dioptre.

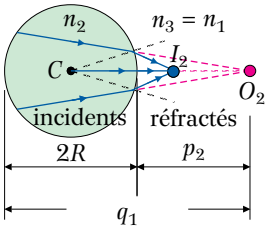


FIGURE 6.24
Les rayons dans le cas de la deuxième réfraction

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$R_2 = -12,30\text{ mm}$ $n_2 = 1,52$	q_2
$n_3 = n_1 = 1,000$	

Les rayons incidents sont dans le milieu 2, et les rayons réfractés sont dans le milieu 3. Puisque le centre de courbure est du côté opposé aux rayons réfractés par le deuxième dioptre, $R_2 < 0$. Étant donné que l'objet O_2 est au-delà du deuxième dioptre, c'est un objet virtuel, avec $p_2 < 0$:

$$p_2 = 2R - q_1 = 2\times 12,30\text{ mm} - 36,2\text{ mm} = -11,6\text{ mm}\,.$$

(ii)

Identifier la clé

La **clé** est de nouveau l'équation des dioptres, la lumière passant du milieu 2 au milieu 3 :

$$\frac{n_2}{p_2} + \frac{n_3}{q_2} = \frac{n_3 - n_2}{R_2} \Rightarrow \frac{n_3}{q_2} = \frac{n_3 - n_2}{R_2} - \frac{n_2}{p_2}\,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\frac{1,000}{q_2} = \frac{1,000-1,52}{-12,30\text{ mm}} - \frac{1,52}{-11,6\text{ mm}} = 0,176\text{ mm}^{-1}$$

$$\Rightarrow q_2 = 5,7\text{ mm}\,.$$

(réponse)

L'image finale est réelle, et elle est située à 5,7 mm à droite du côté droit de la bille de verre.

Valider la réponse

L'image finale est réelle, et elle est très près de la surface de la bille, comme le montre le schéma de la situation de la figure 6.24.

6.5 Les lentilles minces

L'élément le plus souvent utilisé dans les instruments d'optique pour former des images est la lentille. Une lentille est un objet transparent dont les faces sont courbées. La lentille produit une image par réfraction, en faisant dévier la lumière deux fois : la lumière est déviée lorsqu'elle pénètre dans la lentille, et elle est de nouveau déviée en émergeant de la lentille. On peut donc dire que la lentille est un système composé de deux dioptres.

Dans cette section, on étudie la formation des images obtenues avec les lentilles sphériques minces. Chacune des surfaces de la lentille a une surface sphérique, et l'épaisseur de la lentille est beaucoup plus petite que les rayons de courbure. On distingue les lentilles convergentes, qui font converger la lumière, comme celles de la figure 6.25, et les lentilles divergentes, qui font diverger la lumière, comme celles de la figure 6.26 (*voir la page suivante*). Remarquez que les lentilles convergentes sont plus épaisses au centre, alors que les lentilles divergentes sont plus épaisses sur les côtés de la lentille.

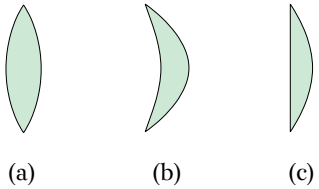
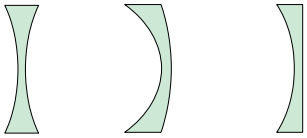


FIGURE 6.25
Des exemples de lentilles convergentes : (a) une lentille biconvexe ; (b) un ménisque convergent ; (c) une lentille plan-convexe.



(a) (b) (c)

FIGURE 6.26
Des exemples de lentilles divergentes : (a) une lentille biconcave ; (b) un ménisque divergent ; (c) une lentille plan-concave.

L'équation des lentilles minces

On veut d'abord trouver une relation entre la distance objet p et la distance image q lorsqu'on place un objet O devant une lentille. La lentille a un indice n_2, et elle est entourée d'un milieu d'indice n_1. Pour trouver cette relation, on considère la lentille comme deux dioptres très rapprochés. Le premier dioptre a un rayon de courbure R_1, et le deuxième dioptre a un rayon de courbure R_2. Pour la lentille biconvexe de la figure 6.27, le centre de courbure C_1 est situé à droite de la lentille, et le centre de courbure du deuxième dioptre est C_2, à gauche de la lentille.

On place un objet $O = O_1$ à une distance $p = p_1$ du premier dioptre. Comme le montre la figure 6.27, la lumière issue de l'objet est réfractée lorsqu'elle pénètre dans la lentille. Le faisceau réfracté est divergent, ce qui signifie que l'image intermédiaire I_1 est virtuelle. Selon l'équation des dioptres (*voir l'équation 6.10 à la page 201*) :

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{q_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}. \tag{6.14}$$

La lumière continue son parcours, et elle est réfractée de nouveau lorsqu'elle sort de la lentille, entre les milieux n_2 et $n_3 = n_1$. L'image I_1 devient l'objet O_2 pour le deuxième dioptre, car la lumière semble venir de ce point. Cet objet est réel, car le faisceau incident sur le deuxième dioptre est un faisceau divergent. Le dioptre produit alors une image réelle I_2. On utilise de nouveau l'équation des dioptres :

$$\frac{n_2}{p_2} + \frac{n_1}{q_2} = \frac{n_1 - n_2}{R_2}. \tag{6.15}$$

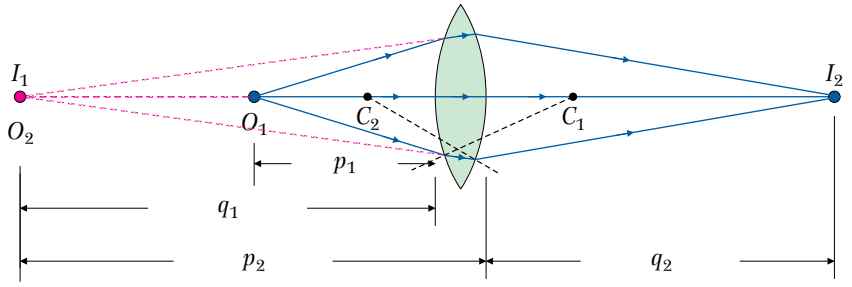


FIGURE 6.27
Pour démontrer l'équation des lentilles, on place un objet O_1 devant une lentille. Celle-ci produit une image au point I_2.

Lorsque la lentille est mince, $q_1 \approx -p_2$. Le signe négatif est le résultat de la convention de signes : l'objet O_2 est réel ($p_2 > 0$), alors que l'image I_1 est virtuelle ($q_1 < 0$). L'équation 6.15 devient alors

$$\frac{n_2}{-q_1} + \frac{n_1}{q_2} = \frac{n_1 - n_2}{R_2}. \tag{6.16}$$

On additionne ensuite les équations 6.14 et 6.16 :

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_1}{q_2} = (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

La distance p_1 correspond à la distance objet par rapport à la lentille, et la distance q_2 correspond à la distance image par rapport à la lentille. Les indices caractérisant p et q ne sont plus nécessaires. On obtient alors l'équation des lentilles :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right). \tag{6.17}$$

Le membre de droite est une caractéristique d'une lentille appelée la *vergence* ou *puissance de la lentille* :

$$V=\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right). \tag{6.18}$$

Dans le système international, la vergence se mesure en m^{-1}, qu'on appelle des *dioptries* (D) :

$$1\ \mathrm{D}=1\ \mathrm{m}^{-1}. \tag{6.19}$$

On a utilisé une lentille biconvexe pour illustrer la démonstration de l'équation des lentilles, mais cette équation est valable pour tous les types de lentilles sphériques minces, dans l'approximation paraxiale. On doit utiliser la même convention de signes que pour les dioptres. Comme le montre la figure 6.28, l'objet est réel ($p > 0$) lorsque l'objet est du côté des rayons incidents, et il est virtuel ($p < 0$) lorsque l'objet est du côté opposé aux rayons incidents. Pour l'image, ce sont les rayons réfractés qui permettent de déterminer le signe. Si l'image est du côté des rayons réfractés, elle est réelle (avec $q > 0$), alors que si l'image est du côté opposé aux rayons réfractés, elle est virtuelle (et $q < 0$). Par ailleurs, les rayons de courbure sont positifs si le centre de courbure est du côté des rayons réfractés. Comme le montre la figure 6.29a, pour une lentille biconvexe, on obtient $R_1 > 0$ (C_1 du côté des rayons réfractés) et $R_2 < 0$ (C_2 du côté opposé aux rayons réfractés). L'équation 6.18 indique que la vergence est positive. Dans le cas d'une lentille biconcave (*voir la figure 6.29b*), $R_1 < 0$ et $R_2 > 0$, ce qui signifie que la vergence est négative. De façon générale,

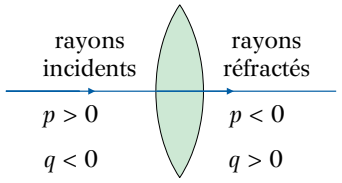


FIGURE 6.28
La convention de signes dans le cas des lentilles

Une lentille convergente a une vergence positive, et une lentille divergente a une vergence négative.

REMARQUE

Comme l'épaisseur de la lentille est négligeable par rapport aux autres distances, on peut mesurer p et q par rapport à n'importe quelle face de la lentille.

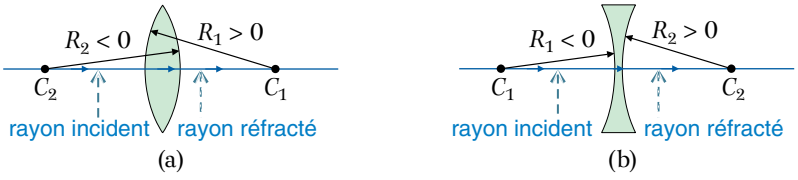


FIGURE 6.29
La convention de signes pour les rayons de courbure d'une lentille : (a) pour ce qui est d'une lentille convergente ($V > 0$) ; (b) pour ce qui est d'une lentille divergente ($V < 0$).

Les foyers et la distance focale

Comme dans le cas des miroirs sphériques, il est intéressant de définir le foyer et la distance focale. En fait, une lentille possède deux foyers, situés à la même distance de chaque côté de la lentille. La figure 6.30 montre les deux foyers d'une lentille convergente. D'abord, le foyer image F_i est le point image d'un objet à l'infini. Lorsqu'un faisceau parallèle à l'axe optique est incident sur la lentille convergente, la lentille fait converger les rayons au foyer image F_i (*voir la figure 6.30a*). Le foyer objet F_o est le point objet qui produit une image à l'infini : si on place un objet au point F_o, la lentille produit un faisceau émergent parallèle à l'axe optique (*voir la figure 6.30b*).

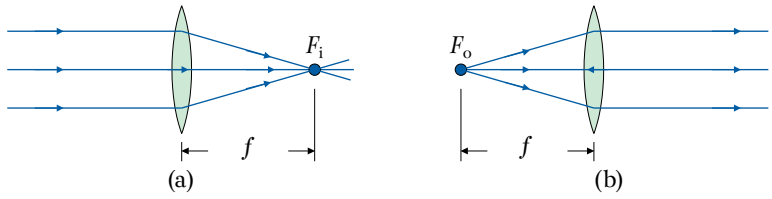


FIGURE 6.30

(a) Le foyer image F_i est le point image d'un objet à l'infini. (b) Le foyer objet F_o est le point objet pour obtenir une image à l'infini.

On définit la *distance focale f* de la lentille comme étant la distance entre un des foyers et la lentille. Soit une lentille, ayant un indice de réfraction $n_2 = n$, placée dans l'air ($n_1 = n_{air} = 1{,}000$). Pour un objet à l'infini ($p \to \infty$), l'image se trouve au foyer image $q = f$. Selon l'équation 6.17,

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = V .$$

La distance focale est donc l'inverse de la vergence :

Formule des opticiens

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = V . \qquad (6.20)$$

L'équation 6.20 est appelée la *formule des opticiens*, car elle permet de calculer les paramètres nécessaires d'une lentille ayant une distance focale précise. Remarquez que la distance focale a le même signe que la vergence.

On vérifie facilement que le foyer objet est placé à la même distance f de la lentille : pour $q \to \infty$ et $p = f$, l'équation 6.17 donne le même résultat pour f.

En insérant la formule des opticiens dans l'équation 6.17, on obtient l'équation des lentilles, qui est identique à l'équation des miroirs :

Équation des lentilles

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} = V . \qquad (6.21)$$

Lorsqu'on éclaire une lentille divergente avec un faisceau incident parallèle, celle-ci fait diverger les rayons. L'image est donc une image virtuelle, comme le montre la figure 6.31a. Le foyer image F_i d'une lentille divergente est du côté des images virtuelles. La distance focale doit être négative selon la convention de signes. De même, pour obtenir un faisceau réfracté parallèle, le faisceau

incident sur une lentille divergente doit être un faisceau convergent, comme le montre la figure 6.31b. Ceci correspond à un objet virtuel. Le foyer objet F_o d'une lentille divergente est du côté des objets virtuels.

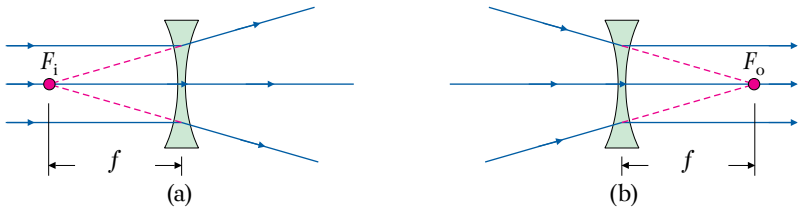


FIGURE 6.31
(a) Le foyer image F_i est l'image virtuelle d'un objet à l'infini. (b) Le foyer objet F_o est l'objet virtuel pour obtenir une image à l'infini.

REMARQUE

De façon courante, c'est la distance focale d'une lentille qui est utilisée en physique pour caractériser une lentille. Les opticiens recourent principalement à la vergence pour caractériser les verres correcteurs de la vue.

Défi animé 6.1
Dans le cas d'une lentille biconvexe, qu'arrive-t-il à la position de l'image quand vous changez soit le rayon de courbure de la lentille, soit l'indice de réfraction ou la dimension de la lentille ?

EXEMPLE 6.5 Une lentille plan-convexe

Un objet est placé à une distance de 60,0 cm d'un écran. On place entre les deux une lentille plan-convexe, pour obtenir une image claire sur l'écran. La lentille a une distance focale de 10,0 cm, et son indice de réfraction est de 1,52.

a. Quel est le rayon de la surface convexe de la lentille ?
b. À quelle distance de l'objet la lentille est-elle placée ?

SOLUTION a.

Illustrer la situation

La figure 6.32 montre la lentille et des rayons incident et réfracté.

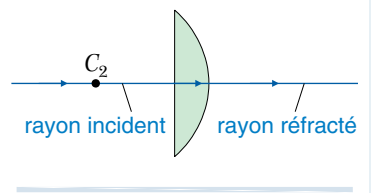


FIGURE 6.32
La lentille plan-convexe

Décortiquer le problème

La surface plane correspond à une surface sphérique dont le rayon est infini. Le centre de courbure C_2 n'est pas du côté des rayons réfractés, donc $R_2 = -R < 0$.

Connues		Inconnue
$f = 10{,}0$ cm	$n = 1{,}52$	R
$R_1 = \infty$	$R_2 = -R$	

Identifier la clé

La **clé** est l'équation des opticiens (*voir l'équation 6.20*) :

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs dans l'équation (i) :

$$\frac{1}{10{,}0\text{ cm}} = (1{,}52 - 1{,}000)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-R}\right)$$

$$\Rightarrow R = 0{,}52 \times 10{,}0\text{ cm} = 5{,}2\text{ cm}.$$

(réponse)

Valider la réponse

Nous avons supposé que les rayons incidents frappaient la surface plane. Nous obtenons le même résultat en supposant que les rayons incidents frappent d'abord la surface convexe. Dans ce dernier cas, nous aurions $R_1 = R$ et $R_2 \to \infty$. Pour cette raison, on donne un rayon positif.

SOLUTION b.

Illustrer la situation

La figure 6.33 illustre la situation.

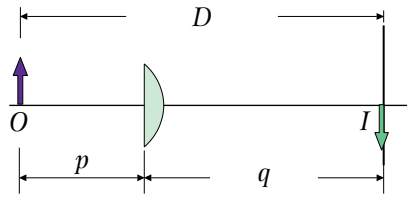


FIGURE 6.33
Le schéma de la situation pour l'exemple 6.5

Décortiquer le problème

L'écran doit être placé à la position de l'image. Selon la figure 6.33,

$$D = p + q \Rightarrow q = D - p\,. \qquad \text{(ii)}$$

Connues	Inconnue
$f = 10{,}0$ cm $\quad D = 60{,}0$ cm	p

Identifier la clé

La **clé** est l'équation des lentilles :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}\,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons l'équation (ii) dans l'équation (iii) :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{D-p} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{(D-p)+p}{p\,(D-p)} = \frac{1}{f}$$

$$Df = pD - p^2$$

$$p^2 - pD + Df = 0\,. \qquad \text{(iv)}$$

Nous remplaçons les valeurs numériques dans l'équation quadratique pour ensuite résoudre celle-ci :

$$p^2 - 60{,}0p + 600 = 0$$

$$p = 12{,}7 \text{ cm ou } p = 47{,}3 \text{ cm}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Il y a deux positions de la lentille qui permettent d'obtenir une image claire sur l'écran. Si nous calculons q, nous trouvons $q = 47{,}3$ cm et $q = 12{,}7$ cm. La deuxième solution correspond à la permutation de la position de l'objet et de celle de l'image. Ceci est normal, car l'équation des lentilles est symétrique sous la permutation de p et de q.

Le grandissement

On place un objet ayant une hauteur y devant une lentille. Celle-ci produit une image, dont la hauteur est y'. Le grandissement correspond de nouveau au rapport des hauteurs y'/y. Étant donné que l'équation des lentilles est identique à l'équation des miroirs, on trouve la même formule pour le grandissement :

Grandissement par une lentille

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{q}{p}\,. \qquad (6.22)$$

Lorsqu'on place un objet réel devant une lentille, l'équation 6.22 montre qu'une image réelle est inversée et qu'une image virtuelle est droite.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 6.5

En regardant à travers une lentille, on observe une image plus grande que l'objet. On éloigne la lentille de l'objet et on place un écran. On observe alors une image sur l'écran.

a. Quel type de lentille est utilisé ?
b. L'image qu'on voit à travers la lentille est-elle réelle ou virtuelle ?
c. L'image qu'on observe sur l'écran est-elle droite ou inversée ?

Le tracé des rayons principaux

Comme dans la situation des miroirs sphériques, il est possible d'obtenir la position d'une image formée par une lentille au moyen d'un tracé des rayons principaux. Ce tracé peut donner la position de l'image s'il est fait à l'échelle. Il est aussi utile de dessiner des tracés de rayons pour obtenir une illustration approximative de la situation.

Le tracé fait intervenir le foyer objet F_o et le foyer image F_i, qu'on doit placer à égale distance de chaque côté de la lentille. Il y a de nouveaux trois rayons principaux, qu'on trace à partir de l'objet.

TECHNIQUE 6.2 Les rayons principaux pour les lentilles minces

On trouve l'image avec le tracé des deux premiers rayons, alors que le troisième rayon permet de vérifier le tracé. Les rayons principaux sont les suivants :

1. Le rayon incident parallèle à l'axe optique est réfracté vers le foyer image F_i (pour une lentille convergente), ou il est réfracté pour que son prolongement passe par le foyer image F_i (pour une lentille divergente).
2. Le rayon incident qui passe par le foyer objet F_o, ou le rayon incident dont le prolongement passe par le foyer objet F_o, est réfracté parallèlement à l'axe optique.
3. Le rayon qui passe par le centre de la lentille n'est pas dévié.

Comme le montre la figure 6.34, le troisième rayon subit une légère déviation latérale, mais cette déviation est négligeable quand la lentille est mince. Lorsque c'est le cas, on trace une ligne au centre de la lentille et on fait dévier les rayons à partir de cette ligne. Par convention, on trace les rayons en traits pleins et les prolongement en traits pointillés.

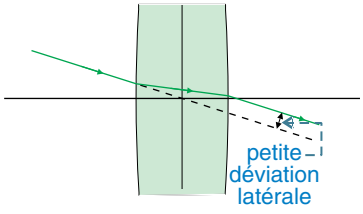


FIGURE 6.34
Le troisième rayon subit une déviation qui est négligeable pour une lentille mince.

La figure 6.35 montre deux exemples de tracés pour un objet réel placé devant une lentille convergente. Pour une telle lentille, le foyer objet est placé du côté des objets réels, c'est-à-dire du côté des rayons incidents. Le foyer image est de l'autre côté, du côté des rayons réfractés. Dans la situation de la figure 6.35a, l'objet est plus éloigné que le foyer objet, de telle sorte que l'image est réelle (les rayons réfractés convergent). La figure 6.35b montre que lorsque l'objet est placé entre le foyer objet et la lentille, les rayons réfractés forment un faisceau divergent, et l'image est virtuelle.

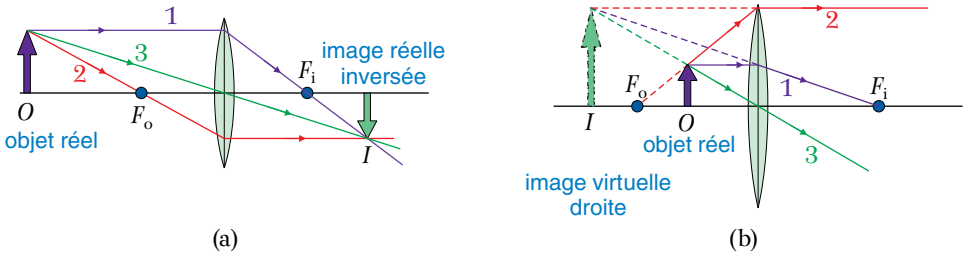


FIGURE 6.35
Le tracé des rayons pour une lentille convergente : (a) un objet réel éloigné produit une image réelle inversée ; (b) un objet réel rapproché produit une image virtuelle droite.

Pour une lentille divergente, la distance focale est négative, et les foyers sont inversés par rapport à la lentille convergente. Le foyer objet est placé du côté des objets virtuels, donc du côté opposé aux rayons incidents. De même, le foyer image est placé du côté opposé aux rayons réfractés, ce qui correspond au côté des images virtuelles. La figure 6.36a montre que pour un objet réel, l'image est virtuelle et droite. Pour que l'image soit réelle, il faut que l'objet soit virtuel, comme le montre la figure 6.36b.

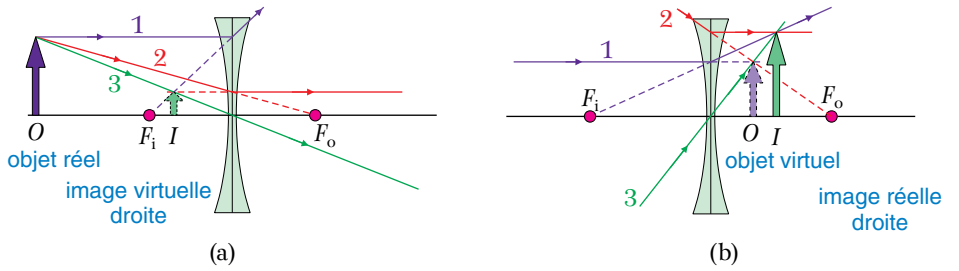


FIGURE 6.36
Le tracé des rayons pour une lentille divergente : (a) un objet réel produit une image virtuelle droite ; (b) un objet virtuel produit une image réelle droite.

EXEMPLE 6.6 Le tracé des rayons

Un objet est placé à une distance de 30 cm d'une lentille convergente dont la distance focale est de 20 cm. Quels sont la position, la nature et le sens de l'image ?

SOLUTION

Illustrer la situation

Nous représentons la lentille et ses foyers : le foyer objet F_o est placé à 20 cm du côté des rayons incidents, et le foyer image F_i est placé à 20 cm de la lentille, du côté des rayons réfractés. Nous avons placé des graduations sur l'axe optique tous les 10 cm.

Nous traçons les rayons principaux issus de l'objet. Nous trouvons l'image au point de concours des rayons réfractés. L'image est inversée. Elle est réelle, car les rayons réfractés forment un faisceau convergent. L'image se trouve à six divisions à droite de la lentille.

Selon la figure 6.37,

l'image est à 60 cm à droite de la lentille, (réponse)

et l'image est réelle et droite. (réponse)

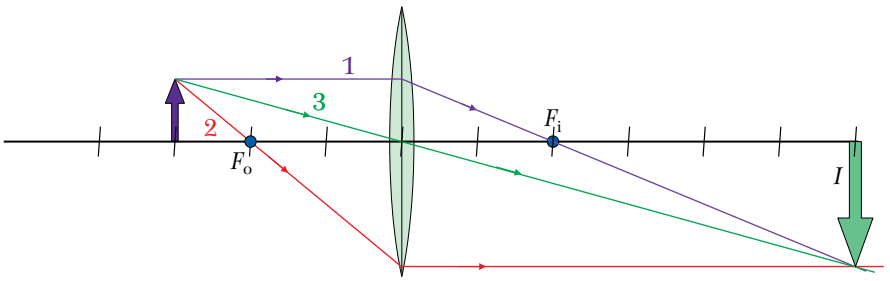


FIGURE 6.37
Le tracé des rayons pour l'exemple 6.6

Les systèmes de lentilles

Bon nombre de systèmes optiques sont composés de plusieurs lentilles, l'une à la suite de l'autre. Lorsqu'un objet O_1 est situé devant la première lentille, celle-ci produit une image I_1. Pour la deuxième lentille, la lumière semble provenir de l'image I_1. Donc, l'image I_1 de la première lentille devient l'objet O_2 de la deuxième lentille. Celle-ci produit ensuite une image I_2. Si l'image I_1 est virtuelle ou si elle se trouve devant la deuxième lentille, l'objet O_2 est un objet réel (avec $p_2 > 0$), car la lumière incidente sur la deuxième lentille forme un faisceau divergent. Par contre, si l'image I_1 se trouve au-delà de la deuxième lentille, ceci produit un faisceau convergent, et l'objet O_2 est virtuel (avec $p_2 < 0$).

Pour un objet initial ayant une hauteur y, l'image intermédiaire a une hauteur y', étant donné que la première lentille produit un grandissement $m_1 = y'/y$. La deuxième lentille produit un deuxième grandissement $m_2 = y''/y'$, où y'' est la hauteur de l'image finale. Le grandissement total produit par le système de lentilles est

$$m = \frac{y''}{y} = m_1 m_2 \ , \tag{6.23}$$

où $m_1 = -q_1/p_1$ et $m_2 = -q_2/p_2$.

EXEMPLE 6.7 La combinaison de deux lentilles

Une lentille divergente a une distance focale de 20,0 cm. On place une lentille convergente, ayant une distance focale de 15,0 cm, à une distance de 25,0 cm à gauche de la lentille divergente. Un objet est placé à une distance de 30,0 cm à droite de la lentille divergente.

a. À quel endroit est l'image finale ?

b. L'image finale est-elle droite ou inversée ?

c. On veut remplacer ce système de lentilles par une seule lentille placée à mi-chemin entre les deux premières. Quelle est la distance focale de cette nouvelle lentille pour que l'image soit produite au même endroit ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 6.38 montre un tracé de rayons principaux approximatif pour la formation des images par les lentilles. Nous utilisons seulement deux rayons issus de l'objet initial et de l'objet intermédiaire pour ne pas alourdir le schéma. À partir de O_1, nous employons les rayons 1 et 3. L'image intermédiaire I_1 est une image virtuelle, du côté des rayons incidents. Cette image devient l'objet O_2 pour la deuxième lentille. Cet objet est réel, car il est du côté des rayons incidents. La lentille L_2 produit une image finale I_2 réelle, à gauche du système. L'image finale est inversée.

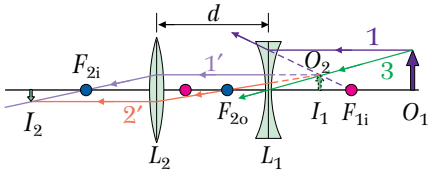


FIGURE 6.38
Le tracé des rayons approximatifs

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues	
$f_1 = -20{,}0$ cm	$f_2 = 15{,}0$ cm	q_2	sens
$d = 25{,}0$ cm	$p_1 = 30{,}0$ cm	f'	

SOLUTION a.

Identifier les clés

La première **clé** est l'équation des lentilles (*voir l'équation 6.21*), que nous utilisons deux fois :

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f_1} \Rightarrow q_1=\left(\frac{1}{f_1}-\frac{1}{p_1}\right)^{-1} \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f_2} \Rightarrow q_2=\left(\frac{1}{f_2}-\frac{1}{p_2}\right)^{-1}. \qquad \text{(ii)}$$

La deuxième **clé** est que l'image I_1 devient l'objet O_2. Selon la figure 6.38, la distance p_2 est

$$p_2 = d + |q_1| = d - q_1\,, \qquad \text{(iii)}$$

où nous avons tenu compte du fait que l'image I_1 est virtuelle, de telle sorte que $|q_1| = -q_1$.

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord la position de l'image intermédiaire à l'aide de l'équation (i) :

$$q_1=\left(\frac{1}{-20{,}0\text{ cm}}-\frac{1}{30{,}0\text{ cm}}\right)^{-1}=-12{,}0\text{ cm}\,. \qquad \text{(iv)}$$

L'image est virtuelle, à droite de L_1, comme le montre la figure 6.38. La distance p_2 est alors

$$p_2 = d - q_1 = 25{,}0\text{ cm} - (-12{,}0\text{ cm}) = 37{,}0\text{ cm}\,.$$

L'objet est réel et $p_2 > d$, comme le montre la figure 6.38. La distance de l'image finale est

$$q_2=\left(\frac{1}{15{,}0\text{ cm}}-\frac{1}{37{,}0\text{ cm}}\right)^{-1}=25{,}2\text{ cm}\,.$$

Donc,

l'image est à 25,2 cm à gauche de L_2. (réponse)

Valider la réponse

L'image finale est bien réelle, et elle est placée à gauche de L_2, comme le montre la figure 6.38.

SOLUTION b.

Identifier la clé

Le sens de l'image est donné par le signe du grandissement. Le grandissement total est

$$m = m_1 m_2 = \left(\frac{-q_1}{p_1}\right)\left(\frac{-q_2}{p}\right)=\frac{q_1 q_2}{p_1 p_2}\,. \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons les valeurs numériques trouvées en **a.** :

$$m=\frac{-12{,}0\text{ cm}\times 25{,}2\text{ cm}}{30{,}0\text{ cm}\times 37{,}0\text{ cm}}=-0{,}273\,.$$

Comme le signe est négatif,

l'image finale est inversée. (réponse)

Valider la réponse

L'image finale est bien inversée, comme le montre la figure 6.38.

SOLUTION c.

Illustrer la situation

La figure 6.39 montre le nouveau schéma de la situation. La nouvelle lentille doit être convergente pour produire une image réelle à partir d'un objet réel. L'objet initial et l'image finale ne changent pas de position. Par contre, l'image n'a pas la même grandeur lorsqu'une seule lentille est utilisée.

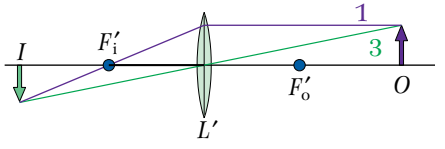


FIGURE 6.39
Le système équivalent

Décortiquer le problème

La lentille L' est placée entre les deux anciennes lentilles, qui étaient séparées par une distance $d = 25{,}0$ cm. Nous obtenons la distance objet p et la distance image q en ajoutant $d/2$.

Connues	Inconnue
$p = p_1 + d/2 = 42{,}5$ cm $q = q_2 + d/2 = 37{,}7$ cm	f'

Identifier la clé

La **clé** est de nouveau l'équation des lentilles :

$$f=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^{-1}. \qquad \text{(vi)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$f=\left(\frac{1}{42{,}5\text{ cm}}+\frac{1}{37{,}7\text{ cm}}\right)^{-1}=20{,}0\text{ cm}\,.\text{ (réponse)}$$

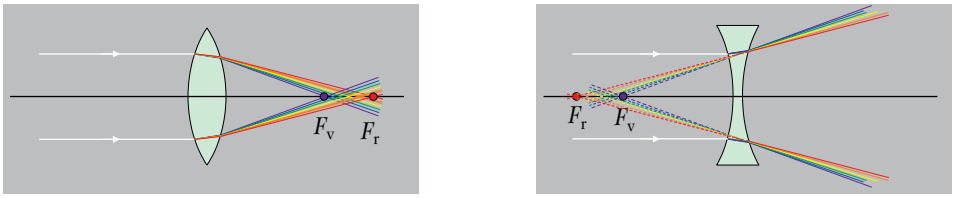
Valider la réponse

La lentille de remplacement est bien une lentille convergente, avec $f > 0$.

Les aberrations dans les lentilles

Les lentilles produisent des images grâce à la réfraction. Ce sont des objets dispersifs, c'est-à-dire que l'indice de réfraction est différent pour chaque couleur du spectre. Ceci implique que la distance focale d'une lentille est différente pour chaque composante du spectre visible. La figure 6.40 illustre ce phénomène pour une lentille convergente et pour une lentille divergente.

Dans le cas d'une lentille convergente (*voir la figure 6.40a*), le foyer image F_o pour la lumière rouge F_r est plus à droite que le foyer image F_v pour la lumière violette, puisque l'indice de réfraction est plus faible pour la lumière rouge. Si on place un écran pour voir l'image, certaines couleurs seront floues. C'est l'*aberration chromatique*. Dans le cas d'une lentille divergente, les foyers sont virtuels. Le foyer image de la lumière rouge F_r se trouve plus à gauche que le foyer image F_v pour la lumière violette, comme le montre la figure 6.40b.



(a) (b)

FIGURE 6.40
L'aberration chromatique : (a) dans le cas d'une lentille convergente ; (b) dans le cas d'une lentille divergente.

Les lentilles sphériques sont aussi sujettes aux *aberrations sphériques*, comme c'est le cas pour les miroirs sphériques. Les rayons qui frappent la lentille à des points éloignés du centre de l'axe ne sont pas déviés au même endroit que les rayons qui frappent près du centre. Ce phénomène produit de nouveau des images floues.

Pour diminuer les deux types d'aberration, les fabricants d'appareils optiques utilisent des combinaisons de lentilles convergentes et divergentes, formées de matériaux différents. Cet agencement minimise l'aberration chromatique, car la lentille convergente et la lentille divergente ont des aberrations chromatiques en sens opposés. La figure 6.41 montre un exemple d'une *lentille achromatique* qu'on appelle le *doublet de Fraunhofer*. Celui-ci est composé d'une lentille biconvexe en verre crown et d'une lentille plan-concave en verre flint.

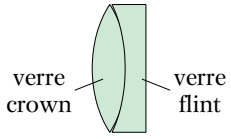


FIGURE 6.41
Un doublet de Fraunhofer est une lentille achromatique.

6.6 L'œil

Un œil humain peut être considéré comme un système optique constitué d'un dioptre et d'une lentille ayant une distance focale variable. À partir d'un objet placé près de l'œil, celui-ci produit une image réelle inversée à une position fixe où se trouve la rétine, qui joue le rôle d'écran où la lumière est détectée. La figure 6.42 (*voir la page suivante*) montre les principaux éléments de l'œil.

La lumière entre dans l'œil en passant à travers la *cornée*. Celle-ci est un dioptre sphérique, dont le rayon de courbure est d'environ 6,8 mm et l'indice de réfraction, de 1,376. De l'autre côté de la cornée se trouve l'*humeur aqueuse*, une substance liquide dont l'indice de réfraction est de 1,336. Dans l'humeur aqueuse se

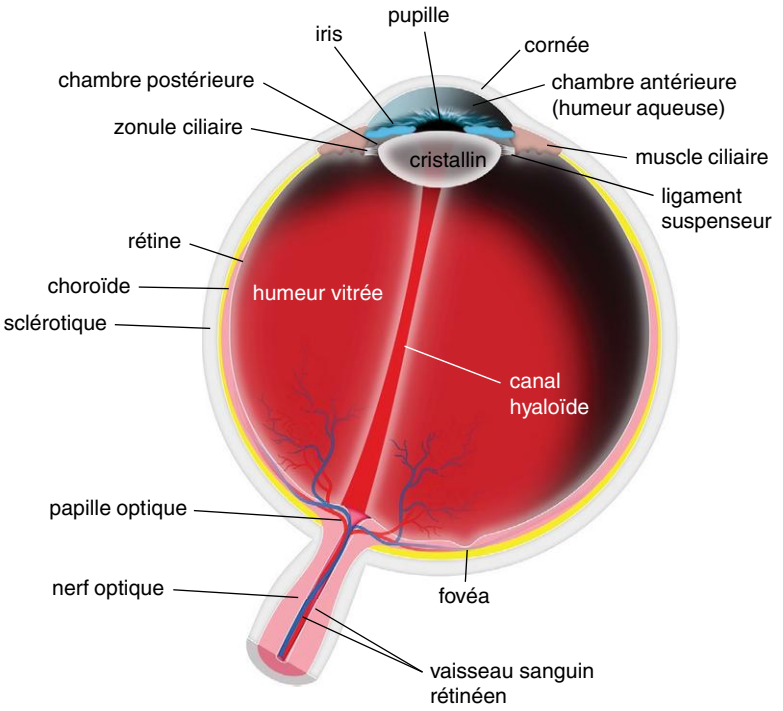


FIGURE 6.42
Une vue schématique de l'œil humain

trouve un diaphragme appelé l'*iris*, qui contrôle la grandeur de la *pupille* pour limiter la quantité de lumière qui se rend à la rétine. Le diamètre peut ainsi varier de 2 mm en lumière intense, jusqu'à 8 mm dans la noirceur. L'iris est la partie colorée de l'œil.

Tout de suite derrière l'iris se trouve le *cristallin*. Celui-ci se comporte comme une lentille dont la forme peut changer sous l'effet des muscles ciliaires, ce qui permet de changer la distance focale du cristallin. L'indice de réfraction varie de 1,386 dans les parties extérieures à 1,406 vers le centre. Derrière le cristallin se trouve une substance gélatineuse qu'on appelle l'*humeur vitrée,* dont l'indice de réfraction est de 1,337.

La lumière frappe finalement la *rétine*, qui est couverte de cellules photosensibles, les *cônes* et les *bâtonnets*. Ces cellules absorbent la lumière et la transforment en un signal électrique, qui est transmis au cerveau par le nerf optique. Les bâtonnets sont des cellules ayant un temps de réponse très court, et ils sont très sensibles à la lumière. Ils sont responsables de la vision de nuit. Les cônes sont des cellules qui ont besoin de beaucoup plus de lumière, mais ils perçoivent les couleurs. Ils sont responsables de la vision de jour. C'est le cerveau qui interprète le signal électrique pour nous donner la sensation de voir.

La lumière subit plusieurs déviations à l'intérieur de l'œil. La principale déviation est produite lorsque la lumière passe de l'air à la cornée, dont l'indice de réfraction est bien différent de celui de l'air. La déviation de la lumière à l'intérieur du cristallin est complexe, car l'indice de réfraction varie à l'intérieur de ce dernier. Pour analyser la formation des images et les défauts principaux de l'œil, il suffit d'utiliser un modèle simple. Ce modèle consiste à remplacer l'œil par une lentille convergente variable et un écran placé à une distance fixe $\ell \approx 24$ mm (*voir la figure 6.43*).

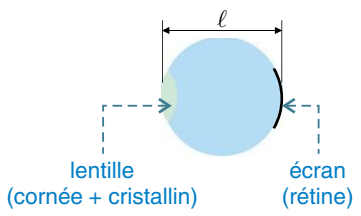


FIGURE 6.43
Le modèle simple de l'œil comprend une lentille variable et un écran.

L'accommodation

Pour qu'une personne voie un objet devant elle, il faut que l'œil forme une image réelle sur la rétine. La rétine étant à une position fixe par rapport à la cornée, la vergence de l'œil doit changer lorsque la distance de l'objet observé change. C'est l'*accommodation*. Pour ce faire, le cristallin change de forme par l'action des muscles ciliaires. Lorsque le cristallin est aplati, la vergence de l'œil est minimale ($V_{\text{œil}} = V_{\text{min}}$), ce qui permet d'observer un objet éloigné. Le point le plus éloigné qu'un œil peut voir clairement est appelé le *punctum remotum* (ou simplement PR), et il est situé à une distance d_{PR} (*voir la figure 6.44a*). En se basant sur l'équation 6.21, on calcule la vergence minimale de l'œil :

$$\frac{1}{d_{\text{PR}}} + \frac{1}{\ell} = V_{\text{min}} \,. \tag{6.24}$$

Pour qu'un point plus rapproché que le PR soit observé clairement, il faut que le cristallin devienne bombé, de telle sorte que la vergence de l'œil augmente (la distance focale diminue). Lorsque la vergence de l'œil est maximale, le point objet observé est appelé le *punctum proximum* (PP), situé à une distance d_{PP} (*voir la figure 6.44b*). On obtient alors

$$\frac{1}{d_{\text{PP}}} + \frac{1}{\ell} = V_{\text{max}} \,. \tag{6.25}$$

L'œil peut donc voir des objets situés entre le PR et le PP. Cette région est appelée la *profondeur de champ* de l'œil. On définit aussi l'amplitude d'accommodation comme la différence entre la vergence maximale et la vergence minimale :

$$A_{\text{acc}} = V_{\text{max}} - V_{\text{min}} = \frac{1}{d_{\text{PP}}} - \frac{1}{d_{\text{PR}}} \,. \tag{6.26}$$

L'amplitude d'accommodation est une caractéristique du cristallin. Elle représente les limites d'accommodation que peut produire le cristallin lorsque celui-ci se bombe. Cette amplitude diminue graduellement avec l'âge.

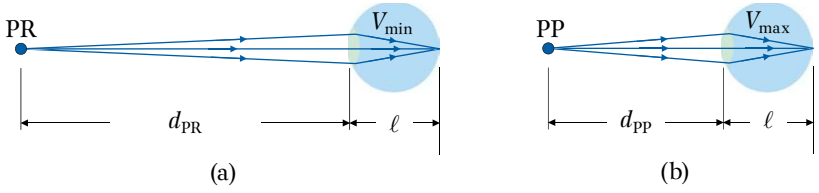


FIGURE 6.44

(a) Lorsque la vergence est minimale, l'œil produit une image claire pour un point au PR. (b) Lorsque la vergence est maximale, l'œil produit une image d'un point situé au PP.

Les défauts de l'œil

Un œil normal sans défaut peut voir sans accommodation des objets très éloignés, qu'on peut considérer comme étant à l'infini. On dit alors que l'œil est *emmetrope*. Le PR est à l'infini, de telle sorte que l'œil produit une image claire sur la rétine pour un faisceau incident parallèle, comme le montre la figure 6.45.

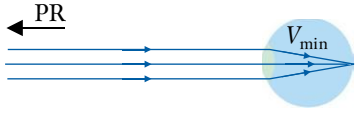


FIGURE 6.45

Pour un œil emmetrope, le PR est à l'infini.

Le défaut de l'œil le plus courant est la *myopie*. Un œil myope est trop convergent, car la cornée est trop courbée ou l'œil est trop long. L'image d'un objet

à l'infini se forme devant la rétine, comme le montre la figure 6.46a. Les rayons lumineux forment une tache sur la rétine, ce qui est équivalent à une image floue. Pour que l'image soit claire sur la rétine, il faut que l'objet soit à une position rapprochée. Le PR d'un œil myope est à une distance $d_{PR} < \infty$, comme le montre la figure 6.46b.

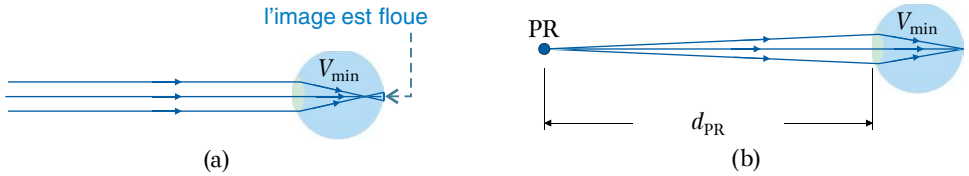


FIGURE 6.46
(a) Pour un œil myope, l'image d'un objet à l'infini se forme devant la rétine. (b) Le PR d'un œil myope se trouve à une distance $d_{PR} < \infty$.

Lorsque l'œil n'est pas assez convergent à cause d'une trop faible courbure de la cornée ou d'un œil trop court, l'œil a besoin d'accommoder pour produire une image d'un objet à l'infini. C'est l'*hypermétropie*. Sans accommodation, l'image d'un objet à l'infini est située derrière la rétine. La lumière qui intercepte la rétine forme alors une image floue, comme le montre la figure 6.47a. Pour que l'image se forme sur la rétine à la vergence minimale, il faut que le faisceau incident soit convergent, ce qui correspond à un objet virtuel (avec $d_{PR} < 0$). Le PR d'un œil hypermétrope est donc derrière la rétine, comme le montre la figure 6.47b. L'œil hypermétrope peut voir des objets à l'infini en accommodant. Cependant, il aura de la difficulté à voir des objets rapprochés.

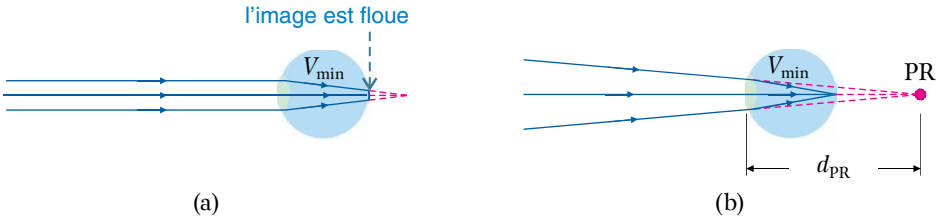


FIGURE 6.47
(a) Pour un œil hypermétrope, l'image d'un objet à l'infini se forme derrière la rétine. (b) Le PR d'un œil hypermétrope se trouve à une distance $d_{PR} < 0$, derrière la rétine.

On peut corriger la myopie et l'hypermétropie en plaçant une lentille devant l'œil. Pour simplifier l'analyse, on néglige ici la distance entre la lentille et l'œil en supposant que la lentille est directement sur l'œil. Pour un objet placé devant la lentille, celle-ci produit une image. Cette image devient l'objet pour l'œil. On calcule la vergence de la lentille correctrice de telle sorte que l'image qu'elle produit se situe au PR de l'œil.

L'œil myope est trop convergent. On doit donc utiliser une lentille divergente. Pour corriger correctement la myopie, il faut que la lentille produise une image virtuelle au PR de la personne lorsque l'objet est à l'infini, comme le montre la figure 6.48a. L'image virtuelle devient un objet réel pour l'œil.

Sans accommodation, la vergence de l'œil hypermétrope est trop faible. On ajoute donc une lentille convergente pour corriger l'hypermétropie. Pour un objet à l'infini, la lentille convergente doit produire une image réelle au PR de l'œil, comme le montre la figure 6.48b. Cette image devient l'objet virtuel pour l'œil.

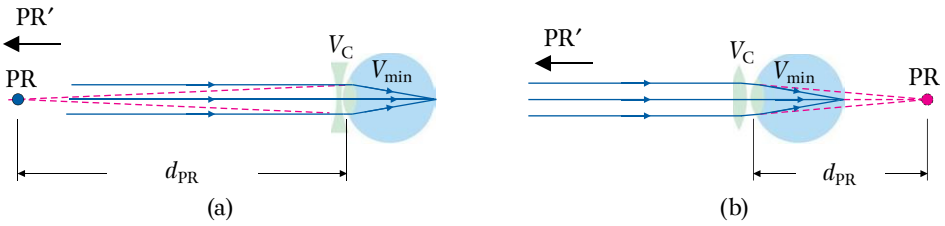


FIGURE 6.48
Des verres correcteurs permettent de corriger la myopie et l'hypermétropie, de telle sorte que le PR′ (le punctum remotum corrigé) soit à l'infini. (a) Une lentille divergente produit une image virtuelle au PR de l'œil myope. (b) Une lentille convergente produit une image réelle au PR de l'œil hypermétrope.

L'ajout d'un verre correcteur approprié permet de déplacer le PR jusqu'à l'infini. Le verre correcteur a aussi un effet sur le PP. Dans le cas de l'œil myope, l'ajout d'une lentille divergente éloigne à la fois le PR et le PP. Pour l'œil hypermétrope, la lentille convergente approche le PR et le PP de l'œil. Dans les deux cas, l'amplitude d'accommodation n'est pas modifiée, car cette dernière est une caractéristique liée au cristallin.

Un verre correcteur permet de corriger les défauts de l'œil en déplaçant le PR à l'infini. Le PP est aussi modifié, mais l'amplitude d'accommodation ne change pas.

Si les points corrigés par la lentille sont notés PP′ et PR′, on obtient

$$A_{acc} = \frac{1}{d_{PP}} - \frac{1}{d_{PR}} = \frac{1}{d_{PP'}} - \frac{1}{d_{PR'}}. \qquad (6.27)$$

La myopie et l'hypermétropie sont deux défauts opposés, en lien avec la courbure de l'œil. Il existe un troisième défaut, qui peut être combiné à la myopie ou à l'hypermétropie. C'est l'*astigmatisme*. Ce défaut est causé par une cornée qui n'est pas sphérique. La réfraction par la cornée dépend alors de l'endroit où les rayons la frappent. L'astigmatisme produit des images déformées : une série de lignes parallèles va paraître courbe pour un œil astigmate. Pour corriger ce défaut, il faut utiliser des lentilles cylindriques.

REMARQUE
Dans les calculs, les distances doivent être exprimées en mètres pour que la vergence ou l'amplitude d'accommodation soient en dioptries.

EXEMPLE 6.8 Besoin de lunettes

Une personne peut voir les objets placés à une distance entre 10,0 cm et 20,0 cm.

a. Quel défaut a-t-elle ?
b. Quelle est la vergence de la lentille nécessaire pour corriger sa vue ?
c. Quelle est la distance de son PP lorsque cette personne porte ses verres ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$d_{PR} = 0{,}200$ m	défaut
$d_{PP} = 0{,}100$ m	V_C
$d_{PR'} = \infty$	$d_{PP'}$

SOLUTION a.

Identifier la clé

Comme le PR est plus près que l'infini,

la personne est myope. (réponse)

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

Le PR corrigé doit être à l'infini. Pour un objet à l'infini ($p \to \infty$), la lentille doit produire une image virtuelle au PR de la personne ($q = -d_{PR} = -20{,}0$ cm).

Identifier la clé

La **clé** est l'équation des lentilles (*voir l'équation 6.21*) :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = V_C \,. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Pour que la vergence soit en dioptries, nous devons exprimer les distances en mètres. Nous obtenons

$$V_C = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-0{,}200\ \text{m}} = -5{,}00\,\text{D} \,. \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La lentille est divergente, comme il se doit pour corriger la myopie.

SOLUTION c.

Décortiquer le problème

Nous cherchons la distance pour voir un objet de telle sorte que la lentille correctrice produise une image virtuelle au PP de la personne, donc que $p = d_{PP'}$ et $q = -d_{PP} = -0{,}100$ m.

Identifier la clé

La **clé** est de nouveau l'équation (i) :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{d_{PP'}} + \frac{1}{-d_{PP}} = V_C \,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$d_{PP'} = \left(V_C - \frac{1}{-d_{PP}} \right)^{-1}$$

$$= \left(-5{,}00\ \text{m}^{-1} - \frac{1}{-0{,}100\ \text{m}} \right)^{-1}$$

$$d_{PP'} = 0{,}200\ \text{m} = 20{,}0\ \text{cm} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La lentille éloigne le PR et le PP, comme il se doit. Nous pouvons vérifier que l'amplitude d'accommodation est la même, avec ou sans verre correcteur :

$$A_{acc} = \frac{1}{d_{PP}} - \frac{1}{d_{PR}} = \frac{1}{0{,}100\ \text{m}} - \frac{1}{0{,}200\ \text{m}} = 5{,}00\ \text{D}$$

$$A_{acc} = \frac{1}{d_{PP'}} - \frac{1}{d_{PR'}} = \frac{1}{0{,}200\ \text{m}} - \frac{1}{\infty} = 5{,}00\ \text{D} \,.$$

La presbytie

Les défauts qui ont été étudiés précédemment sont la conséquence de la courbure de la cornée, et ils ont une influence sur la position du PR. La *presbytie* est causée par la perte d'élasticité du cristallin avec l'âge. Ce processus normal fait diminuer la vergence maximale de l'œil. Ceci diminue l'amplitude d'accommodation et produit un éloignement du PP. Lorsque le PP se trouve plus loin que 25,0 cm, il convient de prescrire une lentille correctrice convergente, car l'œil n'est plus assez convergent pour produire des images claires d'objets rapprochés.

L'amplitude d'accommodation diminue graduellement avec l'âge. À partir d'environ 40 ans, une personne a besoin de verres correcteurs pour voir les objets rapprochés. Cette perte d'élasticité du cristallin se poursuit jusqu'à environ 65 ans.

La figure 6.49a montre qu'un œil presbyte a un PP éloigné, même si la vergence de l'œil est maximale. Pour voir un objet plus rapproché, on ajoute une lentille convergente. Comme le montre la figure 6.49b, la lentille correctrice produit une image virtuelle à la position du PP de la personne. Cette image devient l'objet pour l'œil. Comme il est au PP, l'œil produit une image claire sur la rétine. La lentille convergente rapproche aussi le PR, qui ne sera plus à l'infini pour une personne emmétrope. Pour cette raison, les personnes presbytes portent des lunettes de lecture pour voir les objets de près et elles les enlèvent pour voir des objets éloignés.

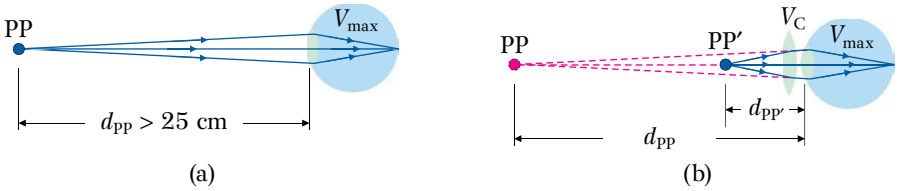


FIGURE 6.49

(a) Pour un œil presbyte, la vergence maximale demeure faible, et le PP est éloigné de l'œil. (b) Pour corriger la presbytie, on ajoute un verre correcteur convergent, qui produit une image virtuelle au PP de l'œil.

Une personne myope a un PP très rapproché lorsqu'elle ne porte pas de verre correcteur, car ses yeux sont très convergents. Elle peut donc voir des objets rapprochés lorsqu'elle enlève ses verres correcteurs. Par contre, en corrigeant la myopie, le verre correcteur éloigne le PP.

Il est possible de corriger la myopie et la presbytie en même temps (ou l'hypermétropie et la presbytie) en utilisant des verres multifocaux ou des verres à foyers progressifs. La partie supérieure corrige la vision de loin (la myopie ou l'hypermétropie), alors que la partie inférieure du verre corrige la presbytie.

6.7 Les instruments d'optique

Les instruments d'optique sont conçus pour améliorer les observations faites avec les yeux. Nous voulons dans cette section comprendre le principe de fonctionnement des instruments tels que la loupe, le microscope et le télescope. Pour simplifier, on suppose que ces instruments sont constitués de miroirs et de lentilles sphériques minces. En réalité, pour améliorer le rendement et diminuer les aberrations, les instruments modernes sont plutôt composés de lentilles composées qui ne sont pas sphériques.

La loupe

Pour mieux voir un objet, on peut le rapprocher de nos yeux. Plus l'objet est proche, plus il sous-tend un angle θ important, et plus l'image sur la rétine est grande.

Par contre, si l'objet est placé en deçà du PP, l'objet paraît flou, car l'image ne se trouve pas sur la rétine. L'œil n'est pas assez convergent pour produire une image sur la rétine. Pour pouvoir approcher un objet plus près que le PP, l'œil a besoin d'une lentille convergente. C'est le rôle de la loupe, qui est simplement une lentille convergente (*voir la figure 6.50*). La loupe produit une image virtuelle qui devient l'objet pour l'œil.

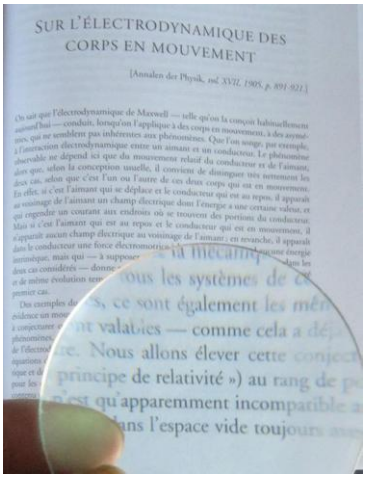


FIGURE 6.50

Une loupe permet de voir une image agrandie des objets.

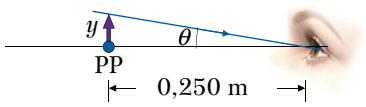


FIGURE 6.51
Un objet est placé au PP. Il sous-tend un angle θ.

Soit un objet placé à une distance de 0,250 m, qui représente la distance du PP d'un œil normal (*voir la figure 6.51*). L'objet a une hauteur y, et il sous-tend un angle θ, où $\tan\theta = y/(0{,}250\text{ m})$. En plaçant une loupe directement sur l'œil, il est possible d'approcher l'objet, de telle sorte que l'image se trouve plus loin que le PP. L'objet doit être placé entre la lentille et le foyer objet F_o, de telle sorte que l'image produite par la loupe soit virtuelle. L'angle sous-tendu est maintenant θ', où $\tan\theta' = y/p$ et p est la distance objet (*voir la figure 6.52*).

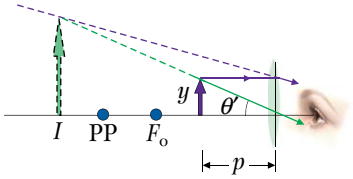


FIGURE 6.52
Une loupe permet d'observer l'image virtuelle d'un objet avec un angle θ'.

On définit le *grossissement* de la loupe comme le rapport entre θ' (l'angle sous-tendu par l'image que produit la loupe) et θ (l'angle sous-tendu par l'objet observé à l'œil nu) :

$$G = \frac{\theta'}{\theta}. \qquad (6.28)$$

Les angles sont petits, sinon la loupe serait inutile pour observer l'objet. On peut donc utiliser l'approximation des petits angles pour la tangente : $\tan\theta \approx \theta$ et $\tan\theta' \approx \theta'$. Le grossissement de la loupe est alors

$$G \approx \frac{\tan\theta'}{\tan\theta} = \frac{y/p}{y/0{,}250\text{ m}}$$

$$G = \frac{0{,}250\text{ m}}{p} \quad \text{(loupe)}. \qquad (6.29)$$

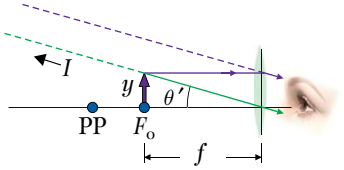


FIGURE 6.53
Pour le grossissement commercial, l'image de la loupe est à l'infini.

Le grossissement dépend de la position de l'objet. Il est plus grand si on place l'objet plus près de la lentille en gardant l'image à une position plus éloignée que le PP. Pour comparer le grossissement de différentes loupes, on définit le *grossissement commercial* en fixant les conditions d'utilisation. L'image produite par la loupe doit être à l'infini, comme le montre la figure 6.53. Pour ce faire, on place l'objet au foyer objet de la lentille, de telle sorte que $p = f$. Le grossissement commercial est donc

$$G_{com} = \frac{0{,}250\text{ m}}{f} \quad \text{(loupe)}. \qquad (6.30)$$

On voit que plus la distance focale est faible, plus le grossissement est élevé. Il est possible d'obtenir un grossissement jusqu'à environ 4, sans que les aberrations soient trop importantes. Pour un grossissement plus élevé, il faut utiliser des lentilles composées plutôt qu'une seule lentille.

EXEMPLE 6.9 Le grossissement d'une loupe

Un philatéliste utilise une loupe ayant une vergence de 8,0 D. Il place la loupe contre son œil, et il ajuste la distance d'un timbre de manière telle que l'image produite par la lentille soit à une distance de 40,0 cm de la loupe. Quel est le grossissement de la loupe ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

La loupe produit une image virtuelle ($q < 0$).

Connues	Inconnue
$V = 8{,}0$ D $\quad q = -40{,}0$ cm	G

Identifier les clés

La première **clé** est l'équation 6.29 qui permet de calculer le grossissement de la loupe :

$$G = \frac{0{,}250\text{ m}}{p}. \qquad \text{(i)}$$

La deuxième **clé** est l'équation des lentilles :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=V \Rightarrow p=\left(V-\frac{1}{q}\right)^{-1}. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons la distance objet :

$$p=\left(8{,}0\ \text{D}\ -\frac{1}{-0{,}40\ \text{m}}\right)^{-1}=0{,}095\ \text{m}\,.$$

En insérant ce résultat dans l'équation (i), nous obtenons

$$G=\frac{0{,}250\ \text{m}}{0{,}095\ \text{m}}=2{,}6\,. \qquad \text{(réponse)}$$

MISE EN GARDE

Nous devons exprimer les mesures en mètres, car la vergence est exprimée en dioptries, ce qui correspond à m^{-1}.

Valider la réponse

Le grossissement est plus grand que 1 (il serait inutile d'utiliser une loupe qui produit une image plus petite). L'ordre de grandeur semble correct. Les unités se simplifient dans le calcul, et le grossissement n'a pas d'unités.

Le microscope

Pour obtenir un grossissement plus important, le microscope (*voir la figure 6.54*) est muni de deux lentilles convergentes, de l'objectif (près de l'objet) et de l'oculaire (près de l'œil), dont les foyers sont séparés par une distance ℓ, appelée la *longueur optique*. La distance entre les deux lentilles est alors $d = f_{\text{ob}} + \ell + f_{\text{oc}}$ (*voir la figure 6.55*). On place un objet tout juste au-delà du foyer objet $F_{\text{o,ob}}$ de l'objectif. Celui-ci produit une image intermédiaire I_{ob} inversée et plus grande que l'objet (*voir la figure 6.55*). Cette image devient l'objet O_{oc} pour l'oculaire. Ce dernier est placé pour que l'image intermédiaire se retrouve entre l'oculaire et le foyer objet de ce dernier. L'oculaire produit alors une image virtuelle plus grande. On peut dire que l'oculaire est équivalent à une loupe.

FIGURE 6.54

Un microscope utilisé dans le milieu scolaire

Comme pour la loupe, on calcule le grossissement G :

$$G=\frac{\theta'}{\theta}\,,$$

où $\theta \approx \tan\theta = y/(0{,}250\ \text{m})$ est l'angle sous-tendu par l'objet lorsque celui-ci est à 0,250 m de l'œil. L'angle θ' est l'angle sous-tendu par l'image que produit

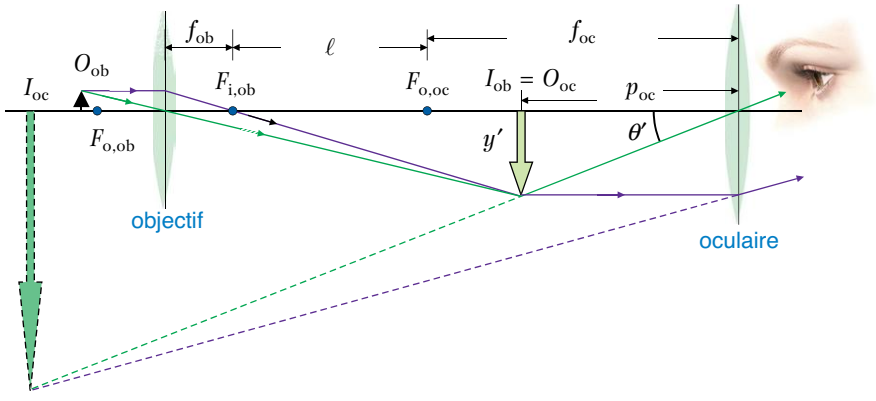


FIGURE 6.55

Un microscope est muni de deux lentilles : l'objectif et l'oculaire. L'objectif produit une image intermédiaire inversée. L'oculaire se comporte comme une loupe en produisant une image virtuelle.

le microscope. Selon la figure 6.55, $\theta' \approx \tan\theta' = y'/p_{oc}$. Le grossissement du microscope est

$$G = \frac{y'/p_{oc}}{y/(0{,}250\text{ m})} = \frac{y'}{y}\frac{0{,}250\text{ m}}{p_{oc}} = m_{obj}G_{oc}\ . \qquad (6.31)$$

Cette équation montre que le grossissement du microscope est égal au produit du grandissement de l'objectif et du grossissement de l'oculaire. Selon l'équation 6.22, $m_{ob} = -q_{ob}/p_{ob}$. Le grossissement du microscope est donc

$$G = -\frac{q_{ob}}{p_{ob}}\frac{0{,}250\text{ m}}{p_{oc}} \qquad \text{(microscope)}\ . \qquad (6.32)$$

Le signe négatif indique que l'image finale est inversée par rapport à l'objet. Les microscopes produisent des images inversées. Pour cette raison, si vous déplacez l'échantillon vers la droite, l'image que vous observez dans le microscope se déplacera vers la gauche.

Le grossissement commercial est obtenu en déplaçant l'oculaire de telle sorte que l'image intermédiaire I_{ob} se retrouve au foyer objet de l'oculaire ($p_{oc} = f_{oc}$), ce qui produit une image finale à l'infini. La distance image $q_{ob} = f_{ob} + \ell$, car ℓ correspond à la distance entre le foyer de l'objectif et le foyer de l'oculaire. On peut exprimer le grandissement de l'objectif à l'aide de l'équation des lentilles (*voir l'équation 6.21*) :

$$\frac{1}{p_{ob}} = \frac{1}{f_{ob}} - \frac{1}{q_{ob}} = \frac{q_{ob} - f_{ob}}{q_{ob}f_{ob}}$$

$$m_{ob} = -\frac{q_{ob}}{p_{ob}} = \frac{q_{ob} - f_{ob}}{f_{ob}} = \frac{\ell}{f_{ob}}\ .$$

En insérant ce résultat, en plus de $p_{oc} = f_{oc}$ dans l'équation 6.32, on obtient le grossissement commercial du microscope :

$$G_{com} = -\frac{\ell}{f_{ob}}\frac{0{,}250\text{ m}}{f_{oc}} \qquad \text{(microscope)}\ . \qquad (6.33)$$

On remarque que le grossissement est plus élevé lorsque les distances focales de l'objectif et de l'oculaire sont faibles.

EXEMPLE 6.10 Le microscope

Un microscope est composé d'un objectif ayant une distance focale de 7,00 mm et d'un oculaire ayant une distance focale de 2,50 cm. La longueur optique est de 15,0 cm. L'image finale se trouve au PP d'un œil normal, soit 0,250 m.

a. Quelle est la distance entre l'objet et l'objectif ?

b. Quel est le grossissement du microscope ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 6.56 montre le schéma comportant les deux lentilles, l'image finale I_{oc} et l'image intermédiaire I_{ob} qui est aussi l'objet O_{oc}.

Décortiquer le problème

La distance entre les deux lentilles est

$$d = f_{ob} + \ell + f_{oc} = 0{,}700\ \text{cm} + 15{,}0\ \text{cm} + 2{,}50\ \text{cm}$$
$$= 18{,}2\ \text{cm}\ . \qquad \text{(i)}$$

L'image finale est une image virtuelle, donc $q_{oc} < 0$.

Connues		Inconnues
$f_{ob} = 0{,}700$ cm	$f_{oc} = 2{,}50$ cm	p_{ob}
$\ell = 15{,}0$ cm	$q_{oc} = -0{,}250$ m	G

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation des lentilles :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}\ , \qquad \text{(ii)}$$

que nous appliquons dans le cas de l'oculaire et dans celui de l'objectif.

Résoudre le problème

Nous commençons par trouver la distance objet pour l'oculaire :

$$p_{oc} = \left(\frac{1}{f_{oc}} - \frac{1}{q_{oc}}\right)^{-1}$$
$$= \left(\frac{1}{2{,}50\ \text{cm}} - \frac{1}{-25{,}0\ \text{cm}}\right)^{-1}$$
$$= 2{,}27\ \text{cm}\ . \qquad \text{(iii)}$$

Selon la figure 6.56, $d = q_{ob} + p_{oc} = 18{,}2$ cm. Ceci permet de calculer la distance $q_{ob} = 15{,}93$ cm. Nous insérons ce résultat dans l'équation des lentilles appliquée à l'objectif :

$$p_{ob} = \left(\frac{1}{f_{ob}} - \frac{1}{q_{ob}}\right)^{-1}$$
$$= \left(\frac{1}{0{,}700\ \text{cm}} - \frac{1}{15{,}93\ \text{cm}}\right)^{-1}$$
$$p_{ob} = 0{,}732\ \text{cm} = 7{,}32\ \text{mm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 6.32 :

$$G = -\frac{q_{ob}}{p_{ob}}\frac{0{,}250\ \text{m}}{p_{oc}}\ . \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons les valeurs numériques dans l'équation (iv) :

$$G = -\frac{15{,}93\ \text{cm}}{0{,}732\ \text{cm}}\frac{25{,}0\ \text{cm}}{2{,}27\ \text{cm}} = -239\ .$$

(réponse)

Valider la réponse

La distance p_{ob} est très légèrement plus grande que f_{ob}, comme il se doit pour que l'image intermédiaire soit réelle et beaucoup plus grande que l'objet. L'ordre de grandeur du grossissement semble correct.

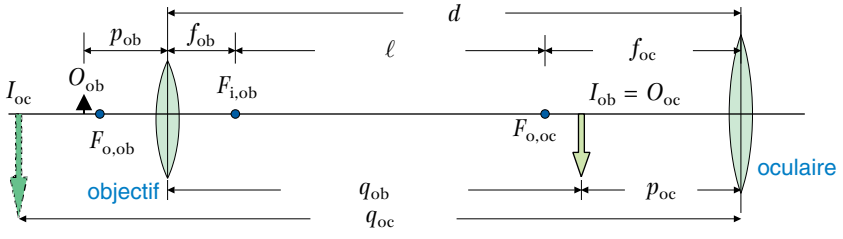


FIGURE 6.56
Le schéma de la situation pour l'exemple 6.10

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 6.6

Dans un microscope, l'oculaire peut être déplacé légèrement. L'objectif produit une image intermédiaire réelle de l'objet. Par rapport à l'oculaire, à quelle distance d de l'oculaire l'image intermédiaire doit-elle être placée pour qu'on puisse l'observer ?

(i) $d < f_{oc}$
(ii) $d = f_{oc}$
(iii) $d > f_{oc}$
(iv) Cela n'a pas d'importance.

La lunette astronomique et le télescope

Il existe plusieurs instruments d'optique servant à mieux voir des objets éloignés : les jumelles, les longues-vues, les lunettes astronomiques et les télescopes, comme le télescope spatial Hubble illustré à la figure 6.57. On analyse le fonctionnement de la lunette astronomique, qui est plus simple. Celle-ci est conçue pour l'observation des objets célestes. Elle comprend deux lentilles convergentes, l'objectif et l'oculaire.

FIGURE 6.57
Le télescope spatial Hubble

La figure 6.58 montre le schéma d'une lunette astronomique (ou télescope réfracteur) qui observe un objet éloigné. Lorsqu'on regarde l'objet à l'œil nu, celui-ci sous-tend un angle θ. Comme les rayons incidents sont parallèles, l'objectif produit une image réelle à son foyer image $F_{i,ob}$. L'oculaire joue ensuite le rôle d'une loupe, en formant une image virtuelle plus grande que l'image intermédiaire. L'image finale sous-tend un angle θ' .

Selon la figure 6.58, le grossissement du télescope est

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{y'/p_{oc}}{y'/f_{ob}} = -\frac{f_{ob}}{p_{oc}} \qquad \text{(télescope)} . \qquad (6.34)$$

Le signe négatif indique que l'image est inversée.

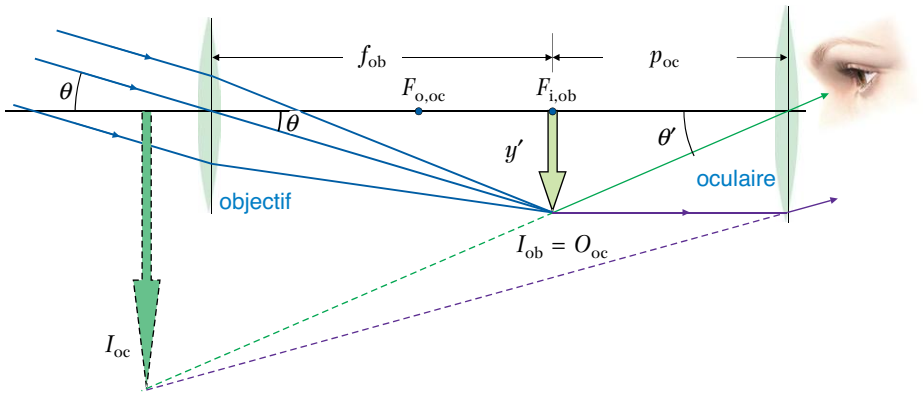


FIGURE 6.58
Une lunette astronomique est muni de deux lentilles convergentes pour produire une image virtuelle, qui sous-tend un angle θ' plus grand que l'angle θ vu à l'œil nu.

Le grossissement commercial est défini pour une image finale à l'infini, ce qui se produit lorsqu'on place l'image intermédiaire au foyer objet de l'oculaire ($p_{oc} = f_{oc}$). On obtient

$$G_{com} = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}} \qquad \text{(télescope)} . \qquad (6.35)$$

Dans cette situation, le foyer image de l'objectif et le foyer objet de l'oculaire coïncident. La longueur du télescope est alors $L = f_{ob} + f_{oc}$.

On remarque que pour avoir un grossissement important, on a besoin d'un objectif ayant une grande distance focale et un oculaire ayant une petite distance focale. La grande distance focale de l'objectif nécessite une lunette longue.

La lunette astronomique produit une image inversée, ce qui n'est pas une complication si on veut observer la Lune, mais qui pose problème si on veut observer un oiseau dans un arbre. Plusieurs méthodes permettent d'obtenir une image droite. Il est possible d'utiliser une lentille divergente comme oculaire. On obtient alors une *lunette de Galilée*, comme le montre la figure 6.59. Dans cette lunette, on fait coïncider le foyer objet de l'objectif et le foyer image de l'oculaire, pour que l'image finale soit à l'infini. L'image intermédiaire est un objet virtuel pour l'oculaire, car il est au-delà de l'oculaire. L'équation 6.35 permet aussi de calculer le grossissement commercial de la lunette de Galilée.

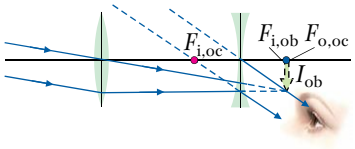


FIGURE 6.59
Une lunette de Galilée produit une image droite. Elle est munie d'une lentille convergente et d'une lentille divergente.

Une *lunette terrestre* (ou longue-vue) est équipée de deux lentilles convergentes comme objectif et comme oculaire. Une troisième lentille convergente est placée entre l'objectif et l'oculaire pour redresser l'image. Cette méthode a pour désavantage le fait d'obtenir une lunette assez longue.

Dans les jumelles, le grossissement est produit de la même façon que dans une lunette astronomique, avec deux lentilles convergentes. Pour obtenir une image droite, on ajoute, entre les deux lentilles, deux prismes réflecteurs qui inversent l'image à l'aide de réflexions totales internes. Les jumelles sont habituellement décrites avec deux nombres, comme 10×25 ou 8×42. Le premier nombre ($8\times$) donne le grossissement, et le deuxième (42) indique le diamètre de l'objectif, exprimé en millimètres.

Pour les astronomes, le grossissement est un facteur important, mais il n'est pas le seul. Pour observer des objets ayant une faible irradiance, l'instrument doit

capter le plus de lumière possible. Il faut donc un télescope ayant un très grand diamètre. Il est très difficile de fabriquer une très grande lentille, car le poids important de la lentille la déforme. Le plus grand télescope réfracteur existant est situé à l'observatoire de Yerkes, au Wisconsin. Son objectif est une lentille de 102 cm de diamètre.

À la place d'une lentille, un télescope réflecteur est muni d'un miroir concave comme objectif et d'une lentille comme oculaire. Pour éliminer les aberrations sphériques, un télescope comporte un miroir parabolique. Il est possible de fabriquer de grands miroirs, car contrairement aux lentilles, on peut fixer le dos du miroir solidement sur des supports. Les plus grands télescopes sont équipés d'un miroir composé de plusieurs miroirs hexagonaux.

Les télescopes peuvent être conçus selon différentes géométries, par exemple le télescope newtonien ou le télescope de type Cassegrain. Le télescope newtonien est muni d'un miroir plan placé à 45° pour diriger la lumière sur le côté du télescope (*voir la figure 6.60a*). Le télescope de type Cassegrain, présenté à la figure 6.60b, est plutôt doté d'un miroir secondaire convexe, pour diriger la lumière vers l'arrière du télescope.

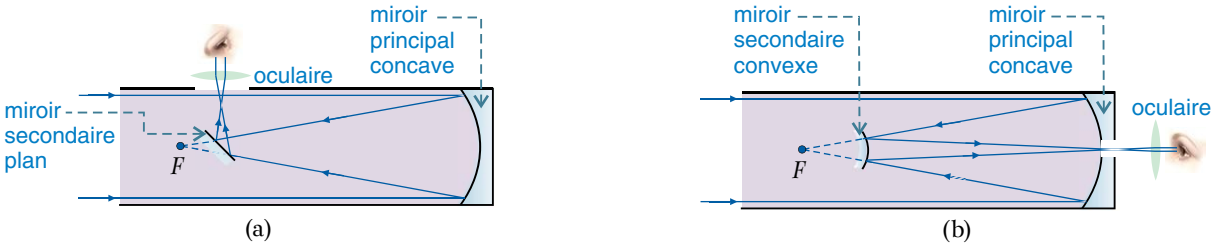


FIGURE 6.60
Deux types de télescopes réflecteurs : (a) le télescope newtonien ; (b) le télescope de type Cassegrain.

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié la formation des images par les miroirs, les dioptres et les lentilles.

LES DÉFINITIONS

- Le **point objet** O est le point de concours du faisceau incident. L'objet est réel lorsque le faisceau est divergent, et l'objet est virtuel lorsque le faisceau est convergent.
- Le **point image** I est le point de concours du faisceau émergent (le faisceau réfléchi ou le faisceau réfracté). L'image est réelle lorsque le faisceau est convergent, et l'image est virtuelle lorsque le faisceau est divergent.
- Le **foyer image** est le point image d'un objet à l'infini (faisceau incident parallèle).
- Le **foyer objet** est le point objet produisant une image à l'infini (faisceau émergent parallèle). Les deux foyers coïncident pour un miroir sphérique.

LA CONVENTION DE SIGNES

- L'objet est réel ($p > 0$) lorsque O est du côté des rayons incidents. L'objet est virtuel ($p < 0$) lorsque O est du côté opposé aux rayons incidents.
- L'image est réelle ($q > 0$) lorsque I est du côté des rayons émergents. L'image est virtuelle ($q < 0$) lorsque I est du côté opposé aux rayons émergents.
- La distance focale est positive pour un élément convergent, et elle négative pour un élément divergent.
- $R > 0$ si le centre de courbure C est du côté des rayons émergents, et $R < 0$ si le centre de courbure C est du côté opposé aux rayons émergents.

LES RÉSULTATS

- Les **miroirs** et les **lentilles**
  - La formation des images :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}\,.$$

  - La distance focale :

$$f=\frac{R}{2} \qquad \text{(miroirs)}$$

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=V\,. \qquad \text{(lentille)}$$

  - Le grandissement :

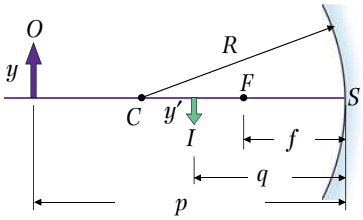
$$m=\frac{y'}{y}=-\frac{q}{p}\,.$$

- Les **dioptres**
  - La formation des images :

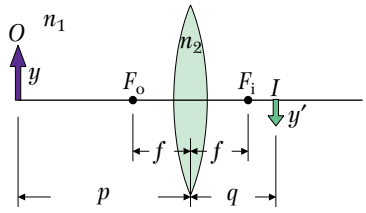
$$\frac{n_1}{p}+\frac{n_2}{q}=\frac{n_2-n_1}{R}\,.$$

  - Le grandissement :

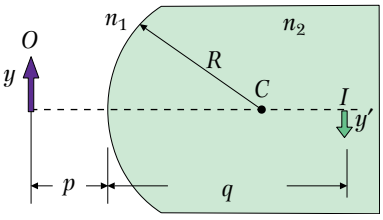
$$m=\frac{y'}{y}=-\frac{n_1 q}{n_2 p}\,.$$



miroir



lentille



dioptre

LES APPLICATIONS

L'œil

- Le PR est le point le plus éloigné, et le PP est le point le plus rapproché permettant une vision nette :

$$A_{\text{acc}}=\frac{1}{d_{\text{PP}}}-\frac{1}{d_{\text{PR}}}\,.$$

- La myopie : $d_{\text{PR}} < \infty$.
- L'hypermétropie : $d_{\text{PR}} < 0$.
- La presbytie : $d_{\text{PP}} > 0{,}250$ m.

Les instruments d'optique

$$G=\frac{\theta'}{\theta} \qquad G_{\text{com}} = G \text{ lorsque } I \text{ est à l'infini}\,.$$

$$G=\frac{0{,}250\text{ m}}{p} \qquad G_{\text{com}}=\frac{0{,}250\text{ m}}{f} \qquad \text{(loupe)}\,.$$

$$G=-\frac{q_{\text{ob}}}{p_{\text{ob}}}\frac{0{,}250\text{ m}}{p_{\text{oc}}} \qquad G_{\text{com}}=-\frac{\ell}{f_{\text{ob}}}\frac{0{,}250\text{ m}}{f_{\text{oc}}} \qquad \text{(microscope)}\,.$$

$$G=-\frac{f_{\text{ob}}}{p_{\text{oc}}} \qquad G_{\text{com}}=-\frac{f_{\text{ob}}}{f_{\text{oc}}} \qquad \text{(télescope)}\,.$$

QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

Section 6.2 Les miroirs plans

E1 Vous vous placez à 1,60 m devant un miroir plan pour voir votre reflet. À quelle distance de vous semblera se trouver votre image ?

E2 Une personne mesurant 174 cm se tient à 3,50 m devant un miroir plan vertical accroché au mur. Déterminez la dimension verticale minimale du miroir permettant à la personne de se voir entièrement, en supposant que le miroir est à la bonne hauteur.

E3 Dans un salon de coiffure, des miroirs plans sont placés face à face sur les murs opposés. La distance entre les miroirs est de 4,00 m. Vous êtes placé à une distance de 1,50 m d'un miroir, et vous observez les images multiples formées dans ce miroir. Quelle est la distance entre vous et les trois images de vous les plus rapprochées que vous observez dans le miroir ?

P4 Un écran est placé à une distance de 5,00 m d'un miroir plan. On place, entre l'écran et le miroir, une petite source lumineuse S émettant à une puissance de 1,20 W (*voir la figure 6.61*). La source est placée à une distance de 3,00 m de l'écran. Quelle est l'irradiance pour un point sur l'écran vis-à-vis de la source ?

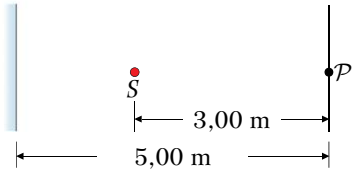


FIGURE 6.61 • Problème 4

Section 6.3 Les miroirs sphériques

Q5 Jérémie prétend que pour produire un éclairage étendu, les lampadaires de rue sont constitués d'un miroir sphérique et d'une source lumineuse placée au foyer, le tout recouvert d'un verre transparent. A-t-il raison ? Expliquez votre réponse.

Q6 Une antenne satellite de télévision est constituée d'une coupole sphérique ainsi que d'un capteur placé devant pour capter la réflexion des ondes par la coupole. À quelle distance du centre de la coupole le capteur doit-il être placé ?

Q7 Au musée des sciences, Caroline s'approche d'un grand miroir sphérique d'un rayon de courbure R. À quelle distance du miroir doit-elle placer son œil pour voir en tout point du miroir le reflet de sa pupille ?

Q8 Une pièce de monnaie est placée sur le sommet d'un miroir sphérique. On éloigne graduellement la pièce en mesurant la distance $d = |q|$ entre son image et le miroir. Parmi les courbes illustrées à la figure 6.62, déterminez celle qui représente la situation :

a. d'un miroir concave ;

b. d'un miroir convexe.

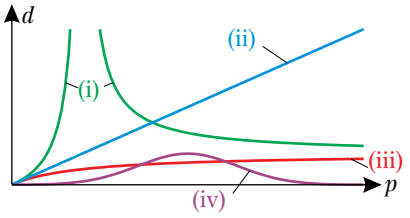


FIGURE 6.62 • Question 8

E9 La distance focale d'un miroir concave est de 25,0 cm. Un objet réel de 35 mm de hauteur se trouve à 88,0 cm devant le miroir.

a. Déterminez la distance image.

b. Quel est le grandissement ?

c. Déterminez la hauteur de l'image.

d. L'image est-elle droite ou inversée ?

E10 Un objet est placé devant un miroir convexe. Le miroir produit une image droite à 15,2 cm de sa surface, et la taille de l'image est 2,45 fois plus petite que l'objet.

a. À quelle distance du miroir se trouve l'objet ?

b. Quelle est la distance focale de ce miroir ?

E11 Un objet réel est placé à une distance $d = 2{,}5|f|$ d'un miroir sphérique. À l'aide d'un tracé des rayons principaux, trouvez la position de l'image dans le cas :

a. d'un miroir concave ;

b. d'un miroir convexe.

E12 Au Canada, les miroirs d'auto du côté du passager doivent être convexes et avoir un rayon de courbure entre 890 mm et 1800 mm, ce qui est à l'origine de l'expression : *Objects in mirror are closer than they appear.* Soit un tel miroir ayant un rayon de courbure de 1,800 m.

a. À quelle distance du miroir apparaît une voiture se trouvant à 5,50 m du miroir ?

b. Comment peut-on concilier ce résultat avec l'affirmation selon laquelle les objets sont plus près qu'ils ne le paraissent ?

E13 Un miroir sphérique convexe permet à un commis de dépanneur de voir des allées qui demeureraient

invisibles à ses yeux autrement. Devant un tel miroir dont le rayon de courbure est de 35,0 cm, un client se trouve à 6,40 m du miroir, et la caisse se trouve à 13,5 m du même miroir.

a. Quelle sera la distance entre le caissier et l'image du client ?

b. Quel est le grandissement produit par le miroir ?

P14 Un objet est placé à 75,0 cm d'un miroir sphérique. L'image produite est 26 % plus grande. Déterminez la distance focale du miroir :

a. si l'image est virtuelle ;

b. si l'image est réelle.

P15 Les feux de croisement d'une automobile sont constitués d'un miroir sphérique et d'une ampoule. Le miroir focalise la lumière de l'ampoule à une distance de 15,0 m devant celle-ci lorsqu'elle se trouve à 5,0 mm devant le foyer du miroir. Quel est le rayon de courbure du miroir utilisé ?

P16 Un miroir convexe M_1 ayant une distance focale de 30,0 cm est placé vis-à-vis de la marque de 0,0 cm d'un mètre en bois. Une source lumineuse est placée à l'autre extrémité du mètre. Un deuxième miroir M_2, concave celui-là, avec une distance focale de 20,0 cm, est placé à la marque de 60,0 cm, comme le montre la figure 6.63.

a. Quelle est la distance image pour l'image formée par le miroir convexe ?

b. Quelle est la distance objet pour l'objet du miroir concave ?

c. Quelle est la position de l'image finale par rapport à la graduation du mètre ?

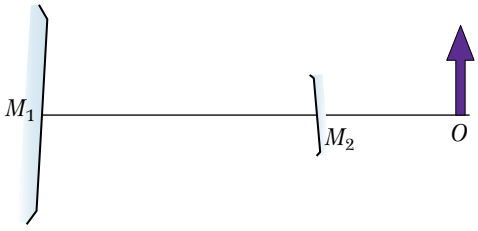


FIGURE 6.63 • Problème 16

P17 Un point lumineux se trouvant à une distance p d'un miroir se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}_O$ le long de l'axe optique du miroir. Celui-ci a une distance focale f. Calculez la vitesse de l'image formée par le miroir.

Section 6.4 Les dioptres

Q18 La figure 6.64 montre quatre situations où un objet réel est placé devant un dioptre. Dans chacune des situations, $n_1 < n_2$.

a. Pour quelles situations l'image est-elle réelle ?

b. Pour quelles situations l'image est-elle virtuelle ?

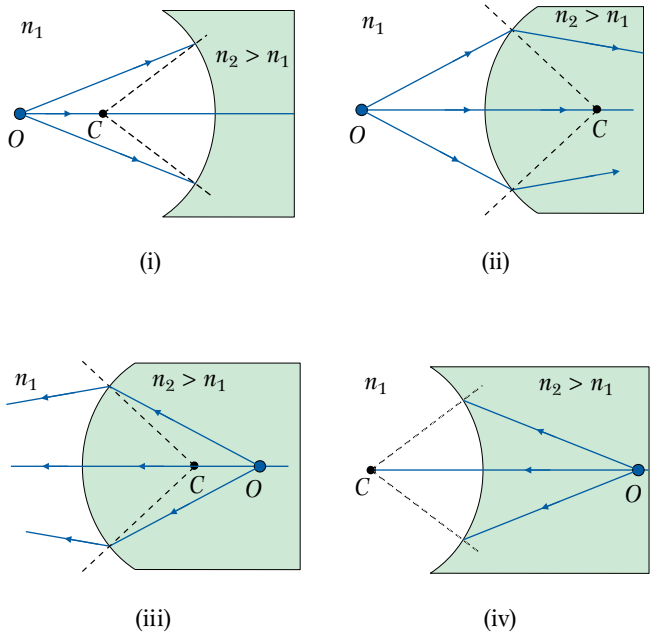


FIGURE 6.64 • Question 18

Q19 La figure 6.65 montre un objet O placé devant un dioptre sphérique et l'image I formée par le dioptre. Parmi les énoncés suivants, lesquels permettent de produire une image plus près de la surface du dioptre ?

(i) Le rayon de courbure R est augmenté.

(ii) Le rayon de courbure R est diminué.

(iii) L'objet est rapproché du dioptre.

(iv) L'objet est éloigné du dioptre.

(v) L'indice de réfraction n_2 est augmenté.

(vi) L'indice de réfraction n_2 est diminué, si on garde $n_2 > n_1$.

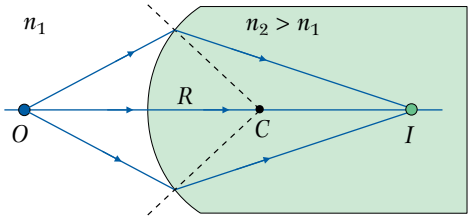


FIGURE 6.65 • Question 19

E20 Un plongeur se trouve à une profondeur de 3,10 m dans une piscine. À quelle profondeur semble-t-il se trouver pour une personne à l'extérieur de l'eau, qui se trouve directement au-dessus de lui sur le tremplin de la piscine ?

E21 Un poisson est placé dans un bocal ayant un rayon de courbure de 20,0 cm. Il se trouve à une distance de 5,0 cm de la surface. Pour regarder le poisson, vous placez votre œil à une distance de 30,0 cm à gauche de la surface du bocal.

a. À quelle distance derrière la surface voyez-vous le poisson ?

b. Quel est le grandissement du poisson ?

c. À quelle distance de la surface le poisson vous voit-il ?

E22 Une sphère de plastique a un rayon de 25,0 cm. Lorsqu'on regarde la sphère, on voit une bulle à une distance de 8,0 cm de la surface. En réalité, cette bulle se trouve à 10,0 cm de la surface. Quel est l'indice de réfraction de la sphère ?

P23 En visite au zoo de Saint-Félicien, vous regardez un ours polaire à travers la paroi de verre verticale d'un bassin d'eau. Le verre de la paroi a une épaisseur de 5,25 cm et un indice de réfraction de 1,60. L'ours se trouve à 60,0 cm de la paroi intérieure du bassin. À quelle distance de la paroi extérieure voyez-vous l'image de l'ours ?

P24 Un objet O est placé à une distance de 12,0 cm d'un morceau de plastique dont l'indice de réfraction est de 1,43 (*voir la figure 6.66*). La première face du morceau de plastique a un rayon de courbure $R_1 = 5{,}00$ cm et la deuxième, un rayon de courbure $R_2 = 8{,}00$ cm. Le morceau de plastique a une longueur $L = 25{,}0$ cm.

a. Quelle est la position de l'image finale ?

b. Quel est le grandissement total ?

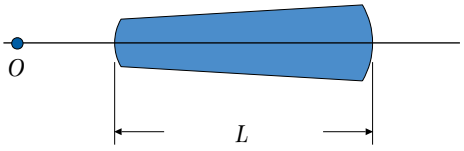


FIGURE 6.66 • Problème 24

P25 Un miroir sphérique concave est placé au fond d'un bassin rempli d'eau. Le miroir a un rayon de courbure de 28,0 cm, et le bassin a une profondeur de 60,0 cm. On place un objet lumineux de 1,2 cm de largeur à une distance de 20,0 cm du miroir, dans le bassin.

a. Pour une personne directement au-dessus du bassin, à quel endroit est l'image finale ?

b. Quelle est la largeur de l'image finale ?

Section 6.5 Les lentilles minces

Q26 Une lentille convergente et un miroir concave ont tous les deux une distance focale f lorsqu'ils sont placés dans l'air. La lentille est composée de verre ayant un indice de 1,52. On place la lentille et le miroir dans l'eau ($n = 1{,}33$). Lequel a une distance focale plus faible ?

Q27 La figure 6.67 montre quatre lentilles fabriquées avec un matériau ayant le même indice de réfraction. Les surfaces sphériques ont le même rayon de courbure. Classez les lentilles par ordre croissant de la vergence (de la plus négative à la plus positive).

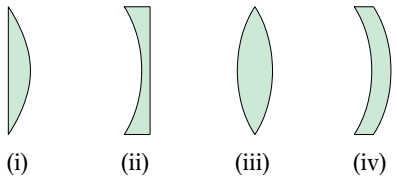


FIGURE 6.67 • Question 27

Q28 Une lentille convergente a une distance focale f. Déterminez la distance objet pour obtenir les situations suivantes.

a. L'image est à une distance infinie.

b. L'image est réelle.

c. Le grandissement est égal à –1.

d. L'image est virtuelle.

Q29 Une lentille divergente a une distance focale $f < 0$. Déterminez la distance objet pour obtenir les situations suivantes.

a. L'image est à une distance infinie.

b. L'image est réelle.

c. Le grandissement est égal à –1.

d. L'image est virtuelle.

E30 Un objet est placé à une distance $p = 3f$ d'une lentille convergente.

a. Dessinez le tracé de rayons principaux reliant l'objet à son image.

b. Quel est le grandissement ?

E31 Un objet réel est placé à une distance de 20,0 cm d'une lentille divergente ayant une distance focale de 30,0 cm. À l'aide du tracé des rayons principaux, déterminez la distance image.

E32 Une source lumineuse, dont la hauteur est de 4,1 cm, est placée à 7,80 cm à gauche d'une lentille convergente de 18,0 cm de distance focale. Déterminez :

a. la position de l'image ;

b. le grandissement produit par la lentille ;

c. la hauteur de l'image.

E33 La lentille de la figure 6.68a est composée de verre crown dont l'indice de réfraction est de 1,52. La surface de gauche a un rayon de courbure de 8,24 cm, et la surface de droite a un rayon de courbure de 4,50 cm.

a. Quelle est la vergence de la lentille ?

b. On place un objet à une distance de 25,0 cm à gauche de la lentille. À quel endroit l'image se trouve-t-elle ?

FIGURE 6.68 • Exercices 33 et 34

E34 La figure 6.68b montre une lentille biconcave, dont l'indice de réfraction est de 1,460, et chaque surface a un rayon de 6,50 cm. On place un objet à une distance de 20,0 cm à droite de la lentille. Cet objet a une hauteur de 1,8 cm.

a. Quelle est la distance focale de la lentille ?

b. Quelle est la position de l'image par rapport à la lentille ?

c. L'image est-elle réelle ou virtuelle ?

d. Quelle est la hauteur de l'image ?

E35 Quelle est la distance focale d'une lentille produisant une image à 27,6 cm de celle-ci, du même côté qu'un objet réel, lorsque ce dernier est placé à 19,2 cm de la lentille ?

E36 Déterminez la distance objet pour qu'une lentille de 12,5 cm de distance focale produise une image :

a. 40 % plus grande ;

b. 40 % plus petite.

P37 On utilise une lentille convergente de 6,85 cm de distance focale comme loupe pour observer un petit tube de 13,5 mm de longueur. Le tube est placé parallèlement à l'axe optique, de telle sorte que le point le plus près de la lentille est à 3,50 cm de sa surface. Quelle est la longueur apparente du tube, lorsque celui-ci est vu à travers la lentille ?

P38 On place un écran à une distance de 120,0 cm d'une petite ampoule. On insère entre les deux une lentille ayant une distance focale de 25,0 cm. À quelles distances de l'ampoule doit-on placer la lentille pour obtenir une image claire sur l'écran ?

P39 Un objet est placé à une distance de 1,500 m d'un écran. Une lentille est placée entre l'objet et la lentille pour produire une image réelle, 2,80 plus grande que l'objet.

a. À quelle distance de l'objet doit-on placer la lentille ?

b. Quelle est la distance focale de la lentille ?

P40 Un objet de 2,10 cm de hauteur se trouve à gauche d'une paire de lentilles distantes de 50,0 cm et alignées avec l'objet. La première lentille se trouve à 36,5 cm de l'objet, et sa distance focale est de 22,5 cm. La seconde lentille a une distance focale de –15,0 cm. Déterminez :

a. la position de l'image produite par la première lentille ;

b. la distance objet pour la seconde lentille ;

c. la distance totale entre l'objet initial et l'image finale ;

d. le grandissement total.

P41 Une lentille convergente, dont la distance focale est de 20,0 cm, est placée à une distance de 10,0 cm à droite d'un objet ayant une hauteur de 1,4 cm. Une deuxième lentille, dont la distance focale est de 30,0 cm, est placée à une distance de 24,0 cm à droite de la première lentille.

a. Quelle est la position de l'image finale, par rapport à la deuxième lentille ?

b. Quelle est la hauteur de l'image finale ?

c. L'image finale est-elle droite ou inversée ?

P42 Une lentille ayant une vergence V_1 est placée en contact avec une deuxième lentille dont la vergence est V_2. Montrez que ce système peut être remplacé par une seule lentille dont la vergence est

$$V_{\text{éq}} = V_1 + V_2 \, .$$

P43 Vous avez deux lentilles convergentes identiques, dont la distance focale est f. Vous placez un objet réel à une distance $p_1 = 4f$ à gauche de la première lentille. À quelle distance à droite de la première lentille devez-vous placer la seconde lentille pour maximiser la grandeur de l'image finale ?

P44 Un système optique est constitué d'une lentille convergente, dont la distance focale est de 25,0 cm, et d'un miroir concave, dont le rayon de courbure est de 30,0 cm. Le miroir est placé à une distance d = 20,0 cm à droite de la lentille (*voir la figure 6.69*). Un objet réel est placé à une distance de 40,0 cm à gauche de la lentille.

a. Quelle est la position de l'image finale par rapport à la lentille ?

b. L'image finale est-elle réelle ou virtuelle ?

c. L'image finale est-elle droite ou inversée ?

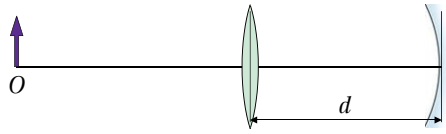


FIGURE 6.69 • Problème 44

P45 Pour mesurer la distance focale d'une lentille convergente, on place un écran à une distance D fixe. Il y a deux positions de la lentille qui permettent d'obtenir une image claire sur l'écran (*voir la figure 6.70 à la page suivante*). Soit d la distance entre ces deux positions de la lentille. Montrez que la distance focale est donnée par l'expression suivante :

$$f = \frac{D^2 - d^2}{4D} \, .$$

Il s'agit de la méthode de Bessel.

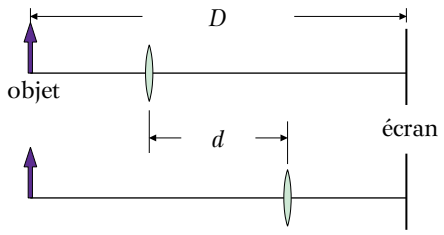


FIGURE 6.70 • Problème 45

Section 6.6 L'œil

E46 Une personne ne voit clairement les objets que si ces derniers sont situés au-delà de 65,0 cm. De plus, elle a besoin d'accommodation pour bien voir des objets éloignés.

a. Quel est le défaut de vision de cette personne ?

b. Quelle est la vergence de la lentille qui ramènera son PP à 25,0 cm ?

E47 Étienne porte des lunettes dont la vergence est de −3,25 D. Sans ses lunettes, son PP se trouve à 19,5 cm devant ses yeux.

a. Quelle est la distance focale des verres de ses lunettes ?

b. Où se trouve le PR d'Étienne, si ce dernier ne porte pas ses lunettes ?

c. Où se trouve le PP d'Étienne, si ce dernier porte ses lunettes ?

P48 Une personne voit clairement des objets situés entre 17,4 cm et 26,7 cm. Elle a besoin de verres à foyers progressifs, avec une vergence corrigeant la myopie et une vergence corrigeant la presbytie.

a. Quelle est son amplitude d'accommodation ?

b. Quelle est la vergence de la partie supérieure des verres correcteurs lui permettant de voir des objets à l'infini ?

c. Avec ces verres correcteurs, quelle est la distance du PP ?

d. Quelle est la vergence de la partie inférieure des verres pour que son PP corrigé soit à une distance de 25,0 cm ?

Section 6.7 Les instruments d'optique

E49 Une loupe dont le grandissement commercial est de 2,25 est utilisée pour allumer un feu avec la lumière du Soleil. À quelle distance doit-on placer la loupe de l'objet à allumer ?

E50 Une loupe a un grossissement commercial de 2,50. Quel est le grossissement obtenu si on ajuste la distance entre celle-ci et l'objet de telle sorte que l'image se trouve à 25,0 cm de la loupe ?

E51 Pour observer la Lune, un astronome amateur construit son propre télescope à partir d'une lentille de 2,400 m de distance focale et d'une autre de 12,5 cm de distance focale.

a. Quel est le grossissement du télescope assemblé si l'image apparaît à l'infini ?

b. Quelle est alors la longueur du télescope ?

E52 Une lunette de Galilée produit un grossissement de 9,50 avec un oculaire dont la distance focale est de −8,25 cm. Quelle est la distance focale de l'objectif qui produira une image finale à l'infini ?

P53 On observe Jupiter avec un télescope dont le miroir a une distance focale de 650 mm et l'oculaire, une distance focale de 6,0 mm. Jupiter se trouve à une distance de 630×10^6 km de la Terre, et son diamètre est de 143×10^3 km. Quel est l'angle sous-tendu par l'image vue dans le télescope, si cette image est située à l'infini ?

P54 Un microscope est constitué d'un objectif d'une distance focale de 7,50 mm et d'un oculaire d'une distance focale de 36,5 mm. Le microscope produit au PP d'un œil normal une image d'un échantillon de cellules se trouvant à 8,0 mm sous l'objectif.

a. Quelle est la longueur optique du microscope ?

b. Quel est le grossissement de ce microscope ?

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

6.1 Il y a trois images.

Le miroir vertical produit une image. Le miroir horizontal produit une image. Il y a aussi une image produite par la réflexion double de la lumière.

6.2

Type de miroir	Signe de f	p	Nature de l'image	Position de l'image	Signe de q
concave	positif	$p > f$	réelle	devant le miroir	positif
		$0 < p < f$	virtuelle	derrière le miroir	négatif
convexe	négatif	$p > 0$	virtuelle	derrière le miroir	négatif

La distance focale d'un miroir concave est positive, car le foyer est du côté des rayons réfléchis. C'est le contraire dans le cas d'un miroir convexe. La position de l'image peut être calculée à l'aide de l'équation des miroirs, qui peut s'écrire

$$q = \frac{pf}{p - f}.$$

6.3 Le miroir est convexe.

Un miroir convexe ($f < 0$) produit des images virtuelles plus petites, car il est divergent. On peut le montrer de façon algébrique en calculant le grandissement :

$$m = -\frac{q}{p} = \frac{-f}{-f + p}.$$

Lorsque $p > 0$ et $f < 0$, $|m| < 1$.

6.4 **a.** $q > 0$ et $R < 0$

Les rayons réfractés sont à droite du dioptre. L'image se trouve du même côté que les rayons réfractés. Elle est réelle. Le centre de courbure du dioptre est du côté opposé aux rayons réfractés. Le rayon est négatif selon la convention de signes.

b. $q < 0$ et $R > 0$

Les rayons réfractés sont à droite du dioptre. L'image se trouve du côté opposé. Elle est virtuelle. Le centre de courbure est à droite, donc du côté des rayons réfractés.

6.5 **a.** La lentille est convergente.

L'objet est réel. Au départ, on observe une image virtuelle en regardant dans la lentille. Lorsqu'on éloigne la lentille de l'objet, on observe une image réelle. La lentille fait donc converger la lumière issue de l'objet. Elle est convergente.

b. L'image est virtuelle.

On regarde dans la lentille pour voir l'image. Elle est donc du côté opposé aux rayons réfractés. Elle est virtuelle.

c. L'image est inversée.

L'image est réelle, car la lumière converge sur l'écran. Lorsque $p > 0$ et $q > 0$, $m < 0$.

6.6 (i) ou (ii)

L'oculaire joue le rôle d'une loupe, en produisant une image virtuelle de l'image intermédiaire. Pour ce faire, il faut que l'image soit entre l'oculaire et son foyer objet. Il est aussi possible de placer l'image intermédiaire au foyer objet, de telle sorte que l'image finale se trouve à l'infini.

Chapitre 07

L'interférence de la lumière

Buts du chapitre

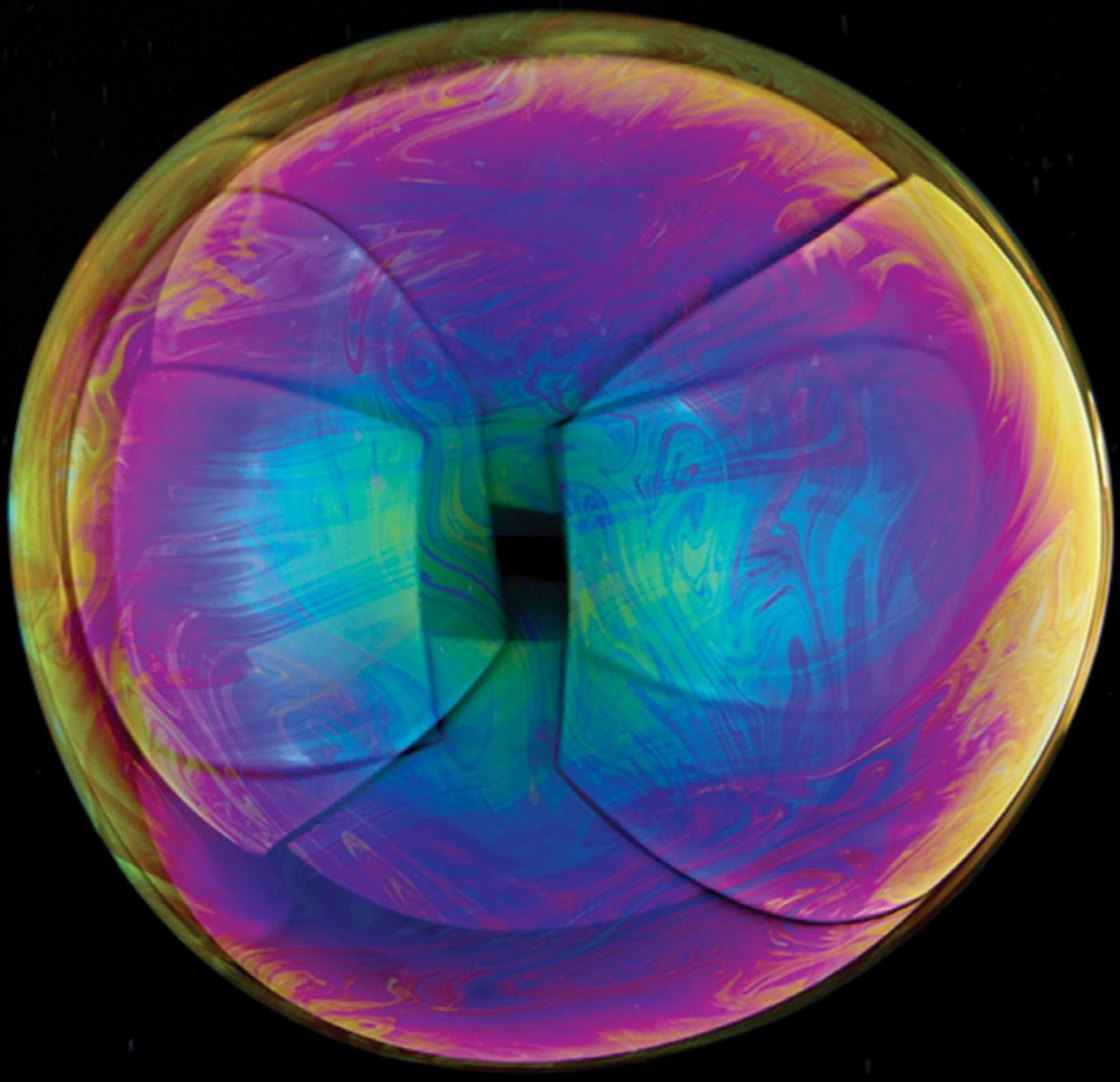
Ce chapitre porte sur l'interférence de la lumière. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- d'obtenir les conditions d'interférence de la lumière ;
- d'expliquer les résultats de l'expérience de Young ;
- d'analyser l'interférence produite par réflexion dans les pellicules minces ;
- de décrire le fonctionnement de l'interféromètre de Michelson.

Préalables

Ce chapitre applique l'interférence aux ondes lumineuses. Revoyez :

- l'interférence des ondes et l'interférence des ondes sonores, étudiées aux sections 2.8 et 3.5 ;
- les propriétés d'une onde après une réflexion, présentées à la section 2.6 ;
- les propriétés des ondes électromagnétiques, la propagation et la diffraction de la lumière, expliquées aux sections 4.1, 5.1 et 5.2 ;
- l'énergie transportée par la lumière, calculée à la section 4.4.



La lumière réfléchie par une bulle de savon est colorée. Chaque couleur correspond à une interférence constructive pour une longueur d'onde particulière.

L'orgue et la goutte de miel

La lumière est un phénomène connu de tous, mais sa nature n'a pas été sérieusement examinée avant le XVII^e siècle. Plusieurs écoles de pensée se sont alors affrontées. René Descartes compare un rayon de lumière à un bâton de marche qui réagit aux irrégularités d'un chemin : la vue résulte d'une force transmise par des particules incompressibles. D'autres philosophes, jusqu'à Christiaan Huygens en 1690, considèrent la lumière comme une vibration qui se propage dans un milieu distinct : l'éther.

Les vaguelettes de Huygens ne permettent toutefois pas d'expliquer la décomposition des couleurs analysée par Newton. Dans son ouvrage sur l'optique, le savant anglais défend la théorie corpusculaire. Newton réduit les rayons lumineux à des courants de «globules» ou corpuscules qui se déplacent en ligne droite. Durant le reste du XVIII^e siècle, la supériorité de la physique newtonienne suscite l'adhésion à des théories mécaniques ou corpusculaires inspirées par Descartes ou Newton. Les idées de Huygens sont délaissées.

C'est un peu à cause de Napoléon que le vent tourne. La théorie ondulatoire de la lumière va triompher grâce à un médecin britannique, Thomas Young (1773-1829), et à un ingénieur français, Augustin Jean Fresnel (1788-1827). Ce dernier sort de la nouvelle École polytechnique en 1806. Tout en supervisant la construction de ports, de canaux et de routes, il rêve d'éclaircir des questions de physique. Et il déteste l'Empereur.

En 1815, quand Napoléon reprend le pouvoir en France, Fresnel se porte volontaire pour le combattre. Chassé de son poste d'ingénieur, il retourne dans son village natal et entreprend des recherches en optique. Faute d'argent, il étudie la diffraction avec une lentille faite d'une goutte de miel bouchant un trou percé dans une feuille de cuivre. La défaite de Napoléon à Waterloo permet à Fresnel de reprendre son travail d'ingénieur, mais il a eu le temps de procéder à des expériences qui confirment la théorie ondulatoire.

Sans le savoir, Fresnel a reproduit les expériences d'un médecin anglais, Thomas Young. Ce dernier est un jeune prodige qui, très tôt, s'intéresse au fonctionnement de la vue et de l'ouïe. En 1795, Young étudie la médecine et plus particulièrement la voix humaine. Pour mieux la comprendre, il analyse l'acoustique des tuyaux d'orgue et considère l'interférence destructive des ondes sonores. Entre 1801 et 1807, il démontre que l'interférence des ondes lumineuses peut expliquer les franges de diffraction ainsi que les couleurs produites par la superposition de minces plaques de verre. Il impose le terme d'«onde» (*undulation*).

Young n'offre qu'un modèle mathématique rudimentaire. Fresnel s'attaque donc au calcul des phénomènes ondulatoires. En 1818, un jury qui compte des partisans de la théorie corpusculaire récompense son succès. Les effets optiques inédits qui sont prédits par la théorie ondulatoire se multiplient, mais les critiques ne désarmeront pas avant la mesure, en 1850, de la vitesse de la lumière dans l'eau. Conformément à la théorie de Young et Fresnel, le module de la lumière est plus bas dans l'eau que dans l'air.

Les dernières années de Fresnel sont consacrées à l'amélioration des phares. Même si le principe des «lentilles de Fresnel» est connu depuis le siècle précédent, leur réalisation technique exige un labeur épuisant. L'ingénieur meurt en 1827, mais il a établi la valeur d'une innovation encore utilisée aujourd'hui. Entre-temps, il a pressenti que la lumière se compose d'ondes transversales et a déduit l'existence d'un milieu de transmission élastique. Ses successeurs s'entêteront à caractériser les propriétés de ce mystérieux éther. Pour les uns, l'éther ressemble à un treillis rigide. Pour les autres, il s'apparente à une gelée ou à une éponge gonflée de tourbillons infimes. La question de son existence ne sera pas tranchée avant qu'Einstein ne la réfute.

Thomas Young (1773-1829) et Augustin Fresnel (1788-1827)

La nature ondulatoire de la lumière n'est pas facile à distinguer à l'échelle humaine. Avec une longueur d'onde plus petite que le micromètre, l'approximation de l'optique géométrique est valable dans beaucoup de situations communes. Ainsi, nous avons pu étudier la formation des images au chapitre 6 sans vraiment avoir besoin de considérer le champ électrique constituant la lumière.

Le phénomène d'interférence des ondes est une caractéristique très spécifique aux ondes. Comme nous l'avons vu aux chapitres 2 et 3, la superposition de deux ondes ayant la même fréquence peut produire une onde avec une grande amplitude (une interférence constructive) ou, au contraire, une onde ayant une très faible amplitude (une interférence destructive). La production d'une interférence à partir de la lumière est ardue, à cause de la faible longueur d'onde de la lumière et de la difficulté d'avoir deux sources lumineuses ayant un déphasage constant. C'est le physicien Thomas Young qui a réussi à produire une telle interférence. Cette expérience, réalisée plusieurs décennies avant les travaux de Maxwell en électromagnétisme, a montré que la lumière est bel et bien une onde.

L'interférence de la lumière est bien présente dans la vie de tous les jours. Une interférence se produit lorsque la lumière est réfléchie par des pellicules minces, comme la bulle de savon illustrée en ouverture de chapitre. Selon l'épaisseur de la bulle de savon, l'interférence peut être constructive pour une longueur d'onde particulière. On perçoit alors la couleur associée à cette longueur d'onde. Le même phénomène produit les couleurs qu'on peut observer lorsqu'une pellicule d'huile se forme à la surface de l'eau ou les couleurs de papillons comme le papillon morpho qu'on peut voir à la figure 7.1.

FIGURE 7.1
Les couleurs du papillon morpho sont le résultat de l'interférence de la lumière réfléchie.

L'interférence de la lumière est très importante pour les scientifiques, car elle permet de mesurer précisément des distances et des longueurs d'onde. Par exemple, l'interféromètre de Michelson produit une interférence entre deux faisceaux lumineux issus d'une même source. Au moyen de miroirs mobiles, on peut faire varier le parcours de la lumière et changer le résultat de l'interférence. Ce type d'appareils est utilisé autant en chimie pour identifier une substance particulière que dans des observatoires d'ondes gravitationnelles.

7.1 Les conditions d'interférence

Comme la lumière est une onde, on doit pouvoir produire des interférences en combinant deux faisceaux lumineux de même fréquence. La première expérience montrant l'interférence de la lumière a été faite par le physicien anglais Thomas Young en 1801. Le résultat de son expérience est illustré à la figure 7.2. C'est une *figure d'interférence* (aussi appelée *patron d'interférence*) qui montre une succession de régions brillantes (les *franges brillantes*, où l'interférence est constructive) et des régions sombres (les *franges sombres*, où l'interférence est destructive). Nous allons analyser en détail l'expérience de Young à la section 7.2. Pour l'instant, nous voulons trouver une méthode générale d'analyse afin de trouver les endroits où l'interférence est constructive et les endroits où l'interférence est destructive.

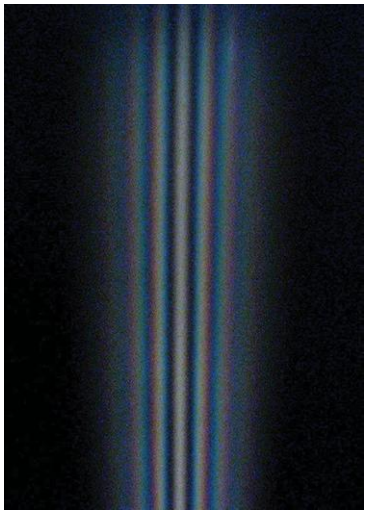


FIGURE 7.2
La figure d'interférence dans l'expérience de Young

La cohérence

Dans l'étude de l'interférence des ondes sonores réalisée à la section 3.5, nous avons vu que deux ondes ayant la même fréquence produisent de l'interférence

lorsqu'elles se superposent. Le résultat dépend du déphasage, c'est-à-dire de la différence de phase entre les deux ondes qui se superposent. Dans le cas des ondes sonores, nous avons analysé des situations où les sources avaient un déphasage initial $\Delta\phi$, auquel s'ajoutait un déphasage produit par une différence de marche Δr, lorsque les deux ondes parcourent des distances différentes. La lumière étant une onde, on doit pouvoir produire des interférences en combinant deux faisceaux lumineux. Le résultat dépend aussi du déphasage entre les deux ondes.

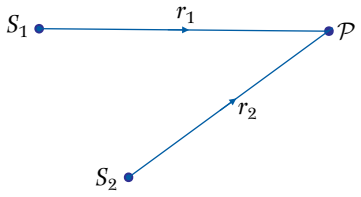


FIGURE 7.3
Deux ondes lumineuses se superposent au point $\mathcal{P}$.

Soit deux sources lumineuses ponctuelles S_1 et S_2 qui émettent à la même fréquence, comme le montre la figure 7.3. Chaque source émet une onde électromagnétique; ces ondes se superposent au point $\mathcal{P}$. Le champ électrique de chaque onde peut s'écrire, selon l'équation 4.7 de la page 124 :

$$\vec{\mathbf{E}}_1 = \vec{\mathbf{E}}_{1\mathrm{m}} \sin\left(k_1 r_1 - \omega t + \phi_1\right) \tag{7.1}$$

$$\vec{\mathbf{E}}_2 = \vec{\mathbf{E}}_{2\mathrm{m}} \sin\left(k_2 r_2 - \omega t + \phi_2\right), \tag{7.2}$$

où ϕ_1 et ϕ_2 représentent la phase initiale de chaque onde. Le déphasage entre les deux ondes est

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = (k_2 r_2 - \omega t + \phi_2) - (k_1 r_1 - \omega t + \phi_1)$$

$$\Delta\Phi = (k_2 r_2 - k_1 r_1) + (\phi_2 - \phi_1). \tag{7.3}$$

Dans l'équation 7.3, le premier terme entre parenthèses correspond au déphasage produit par la différence de marche, et le deuxième terme entre parenthèses vient du déphasage initial entre les sources.

Lorsqu'on a étudié les interférences sonores, il a été possible de contrôler le déphasage initial. Pour la lumière, la phase initiale ne peut pas être contrôlée. Par exemple, la lumière produite par une ampoule résulte de phénomènes aléatoires au niveau atomique. La constante de phase change donc de façon aléatoire après un temps très court, de l'ordre de la nanoseconde. Si on éclaire un mur avec deux sources lumineuses indépendantes, le déphasage initial $\phi_2 - \phi_1$ change de manière continue et très rapide. La figure d'interférence change si rapidement qu'il est impossible de l'observer. On observe simplement la superposition de deux faisceaux, sans franges brillantes ou sombres. On dit que les sources sont *incohérentes*.

Pour produire une interférence, on a besoin de deux *sources cohérentes*, dont le déphasage initial $\phi_2 - \phi_1$ demeure constant. Ceci est possible si les deux ondes lumineuses sont issues d'un même front d'onde. Dans l'expérience de Young, on se sert de la diffraction pour séparer un front d'onde en deux sources cohérentes, qui parcourent des distances différentes. Dans les pellicules minces, le front d'onde est séparé en deux fronts d'onde lorsque la lumière rencontre un dioptre : une partie de la lumière est réfléchie et une partie est réfractée.

Le *temps de cohérence* correspond à l'intervalle de temps moyen durant lequel les fronts d'onde ont la même phase initiale. En le multipliant par la vitesse de la lumière, on obtient la *distance de cohérence* ℓ_c, qui représente la distance moyenne pour que les fronts d'onde demeurent cohérents. Lorsque deux ondes issues du même front d'onde se superposent, on observe une figure d'interférence seulement si la différence de marche est plus petite que la longueur de cohérence. Pour la lumière émise de façon naturelle, comme la lumière du Soleil ou celle qui est émise par des lampes, la longueur de cohérence est de quelques millimètres. La lumière émise par les lasers est très cohérente, avec des

distances de cohérence de plusieurs dizaines de mètres, selon le type de laser. Pour cette raison, on utilise des lasers comme source de lumière pour produire facilement des figures d'interférence.

Le déphasage lié à la différence de marche

Par rapport aux interférences des ondes sonores déjà étudiées, l'interférence de la lumière fait intervenir deux nouveaux facteurs importants. D'abord, la lumière est une onde transversale, de telle sorte que l'onde est décrite par un vecteur perpendiculaire à la direction de propagation, le champ électrique. Lorsque deux ondes lumineuses se superposent, l'onde résultante doit être calculée au moyen d'une somme vectorielle. Pour obtenir une interférence destructive (avec une amplitude très faible), les champs électriques doivent avoir la même direction et des sens opposés. On peut donc affirmer le principe suivant :

Pour produire de l'interférence, deux faisceaux lumineux doivent avoir le même état de polarisation.

Les deux faisceaux peuvent être non polarisés, ou polarisés parallèlement à un même axe. Par contre, un faisceau polarisé verticalement et un faisceau polarisé horizontalement ne produisent pas d'interférence lorsqu'ils se superposent. Nous allons seulement étudier des situations où les deux faisceaux ont le même état de polarisation. Nous laissons alors tomber la notation vectorielle pour le champ électrique. De plus, nous étudions uniquement les sources cohérentes, avec $\phi_1 = \phi_2 = 0$.

Le deuxième facteur supplémentaire est lié à la longueur d'onde. Comme nous l'avons vu à la section 5.1, la longueur d'onde dépend de l'indice de réfraction du milieu de propagation. Pour un milieu dont l'indice de réfraction est n, la longueur d'onde de la lumière est λ_n, obtenue à l'aide de l'équation 5.3 de la page 158 :

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}, \tag{7.4}$$

où λ représente la longueur d'onde de la lumière dans le vide.

REMARQUE

À moins d'avis contraire, lorsqu'on donne une longueur d'onde de la lumière, celle-ci correspond à λ, la longueur d'onde de la lumière dans le vide, et non à λ_n, la longueur d'onde dans un milieu d'indice de réfraction n.

Prenons deux sources cohérentes, qui émettent de la lumière monochromatique, ayant la même fréquence angulaire ω, la même constante de phase $\phi = 0$ et la même polarisation. L'onde 1 parcourt une distance r_1 dans un milieu d'indice n_1, et l'onde 2 parcourt une distance r_2 dans un milieu d'indice n_2. Les deux ondes se superposent en un point $\mathcal{P}$, comme le montre la figure 7.4. Les deux ondes sont représentées par les champs électriques suivants :

$$E_1 = E_{1\text{m}} \sin(k_1 r_1 - \omega t) = E_{1\text{m}} \sin\left(\frac{2\pi r_1}{\lambda_1} - \omega t\right)$$

$$E_2 = E_{2\text{m}} \sin(k_2 r_2 - \omega t) = E_{2\text{m}} \sin\left(\frac{2\pi r_2}{\lambda_2} - \omega t\right).$$

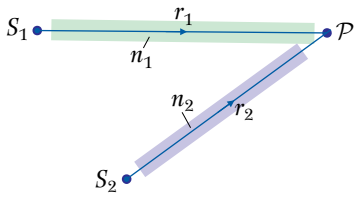


FIGURE 7.4
Deux ondes lumineuses se propagent dans des milieux différents et se superposent au point $\mathcal{P}$.

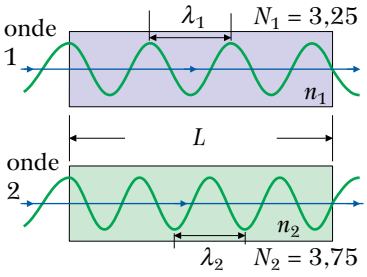


FIGURE 7.5
Deux ondes traversent des milieux différents. Il y a un déphasage $N_2 - N_1 = 1/2$ à la sortie des milieux.

En tenant compte de la différence de marche et des milieux différents dans lesquels se propagent les ondes, le déphasage entre les deux ondes est

$$\Delta\Phi = 2\pi\left(\frac{r_2}{\lambda_2} - \frac{r_1}{\lambda_1}\right) = 2\pi\left(\frac{r_2 n_2}{\lambda} - \frac{r_1 n_1}{\lambda}\right). \tag{7.5}$$

Regardons plus en détail le terme entre parenthèses. La figure 7.5 montre deux faisceaux, initialement en phase, qui traversent deux lames de plastique différentes, ayant respectivement un indice de réfraction n_1 et n_2, avec $n_2 > n_1$. On suppose que les deux lames ont la même longueur L (donc, $r_1 = r_2 = L$). Le facteur r/λ_n représente le nombre de longueurs d'onde contenues dans la distance r. Ainsi, pour chaque faisceau, on définit le nombre de longueurs d'onde contenues dans une distance r:

$$N \equiv \frac{r}{\lambda_n} = \frac{nr}{\lambda}. \tag{7.6}$$

Ce facteur N est un nombre réel positif sans unité. On peut alors dire que $N_2 - N_1$ représente le déphasage, exprimé en fonction de la longueur d'onde. On trouve le déphasage habituel, exprimé en radians, en multipliant cette expression par 2π:

$$\Delta\Phi = 2\pi\ (N_2 - N_1). \tag{7.7}$$

À la section 2.8, nous avons trouvé le déphasage nécessaire pour les interférences constructives ($\Delta\Phi = 2m\pi$) et pour des interférences destructives ($\Delta\Phi = [2m+1]\pi$). Ces conditions peuvent être réécrites en fonction du déphasage exprimé en fonction de la longueur d'onde. On obtient une interférence constructive (un maximum de lumière, donc une frange brillante) lorsque

Condition d'interférence constructive

$$N_2 - N_1 = m_c \qquad (m_c = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{7.8}$$

ce qui correspond à un déphasage égal à un nombre entier de longueurs d'onde. On obtient une interférence destructive (un minimum de lumière, donc une frange sombre) lorsque

Condition d'interférence destructive

$$N_2 - N_1 = m_d + \frac{1}{2} \qquad (m_d = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{7.9}$$

ce qui correspond à un déphasage égal à un multiple impair de demi-longueurs d'onde. Si ni l'une ni l'autre des conditions n'est respectée, l'interférence est intermédiaire.

REMARQUE

Les entiers m_c et m_d sont appelés respectivement l'*ordre d'interférence constructive* et l'*ordre d'interférence destructive*. Lorsqu'on utilise un écran pour observer une figure d'interférence, on observe plusieurs franges brillantes et sombres en même temps. Les franges sont numérotées en indiquant leur ordre, m_c ou m_d.

MISE EN GARDE

L'utilisation de $N_2 - N_1$ simplifie le calcul des conditions d'interférence, car on laisse tomber le facteur 2π, et elle permet une interprétation plus physique des conditions d'interférence. Cependant, il est essentiel d'utiliser le déphasage $\Delta\Phi$ (en radians) lorsqu'on veut calculer l'amplitude de l'onde ou l'irradiance de la lumière.

EXEMPLE 7.1 Le déphasage en changeant de milieu

Deux ondes lumineuses, initialement en phase et ayant la même amplitude, se propagent dans l'air. La longueur d'onde des ondes est de 632,8 nm. La première onde rencontre une lame de verre dont l'épaisseur est de 4,75 µm et l'indice de réfraction, de 1,53. La deuxième onde rencontre une lame de plastique dont l'épaisseur est de 4,16 µm et l'indice de réfraction, de 1,30. On place une lentille après les lames pour que les deux ondes se superposent au foyer de cette dernière.

a. Quel est le déphasage entre les deux ondes lorsque la première onde revient dans l'air ? Exprimez votre réponse en fonction de la longueur d'onde.

b. Quel type d'interférence observe-t-on au foyer de la lentille ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 7.6 montre le schéma de la situation. Les deux ondes parcourent la même distance située entre les deux lignes pointillées ($r_1 = r_2 = L_1$), mais dans des milieux différents.

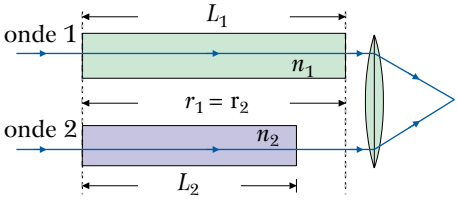


FIGURE 7.6
Le schéma de la situation pour l'exemple 7.1

Décortiquer le problème

Nous exprimons toutes les distances dans la même unité, le micromètre.

Connues		Inconnues
$L_1 = 4{,}75$ µm	$n_1 = 1{,}53$	$N_2 - N_1$
$L_2 = 4{,}16$ µm	$n_2 = 1{,}30$	type d'interférence
$\lambda = 0{,}6328$ µm		

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** pour calculer $N_2 - N_1$ consiste à déterminer N à l'aide de l'équation 7.6. Pour l'onde 1,

$$N_1 = \frac{r_1}{\lambda_1} = \frac{n_1 L_1}{\lambda}. \qquad \text{(i)}$$

Dans le cas de l'onde 2, nous devons diviser le parcours en deux parties : une longueur L_2 où l'onde se propage dans le plastique d'indice n_2 et une longueur $L_1 - L_2$ où l'onde se propage dans l'air :

$$N_2 = \frac{n_2 L_2}{\lambda} + \frac{n_{\text{air}}\,(L_1 - L_2)}{\lambda}. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons le nombre de longueurs d'onde pour chacune des ondes :

$$N_1 = \frac{1{,}53 \times 4{,}75\ \mu\text{m}}{0{,}6328\ \mu\text{m}} = 11{,}5 \qquad \text{(iii)}$$

$$N_2 = \frac{1{,}30 \times 4{,}16\ \mu\text{m}}{0{,}6328\ \mu\text{m}} + \frac{1{,}00\,(4{,}75\ \mu\text{m} - 4{,}16\ \mu\text{m})}{0{,}6328\ \mu\text{m}}$$

$$N_2 = 9{,}48. \qquad \text{(iv)}$$

Le déphasage exprimé en fonction de la longueur d'onde est

$$N_2 - N_1 = 9{,}48 - 11{,}5 = -2{,}0\ . \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

Nous obtenons le type d'interférence selon le résultat du déphasage. Comme $N_2 - N_1$ est égal à un entier, l'équation 7.8 indique que

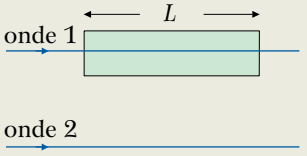
l'interférence est constructive. (réponse)

Valider la réponse

Le résultat de $N_2 - N_1$ est bien un nombre sans unité, car les unités de longueur se simplifient. Remarquez qu'il est possible de faire les calculs en utilisant d'autres unités que celles du SI. En écrivant explicitement les unités, nous nous assurons que ces unités se simplifient correctement.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 7.1

La figure suivante montre deux ondes initialement en phase. L'onde 2 se propage dans l'air, alors que l'onde 1 rencontre un milieu transparent, d'indice de réfraction n et de longueur $L = 1{,}50$ µm. La longueur d'onde est $\lambda = 600$ nm. Le tableau suivant fournit quatre indices de réfraction possibles du milieu transparent. Dans quelle situation les ondes seront-elles en opposition de phase après le passage de l'onde 1 dans le milieu transparent ?



Situation	n
(i)	1,30
(ii)	1,40
(iii)	1,50
(iv)	1,60

L'effet de la réflexion sur le déphasage

À la section 2.6, nous avons étudié le comportement d'une onde sur une corde lorsque l'onde rencontre une discontinuité dans la corde. Nous avons vu que cela produisait une réflexion de l'onde et que, lorsque l'impédance de la deuxième corde est plus élevée que celle de la première, l'onde réfléchie est inversée par rapport à l'onde incidente. De plus, l'onde transmise a toujours le même sens que l'onde incidente. Le même phénomène se produit lorsque la lumière est réfléchie par un miroir ou qu'elle est réfléchie en rencontrant un dioptre.

La figure 7.7 montre une onde lumineuse incidente sur un miroir plan. La surface réfléchissante d'un miroir est composée d'une surface métallique plane. Nous avons vu au chapitre 3 du tome 2 que le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre et qu'à la surface, le champ électrique a une composante tangentielle nulle. En effet, les électrons de conduction se déplacent rapidement, et ils engendrent un champ induit opposé au champ extérieur, de telle sorte que le champ résultant est nul. Lorsqu'une onde électromagnétique est incidente sur le miroir, le champ de cette onde est tangent à la surface du miroir. Pour que la composante tangentielle du champ résultant soit nulle, il faut qu'il y ait une onde réfléchie inversée par rapport à l'onde incidente. Le miroir se comporte comme l'extrémité attachée d'une corde. On dit que la réflexion est dure.

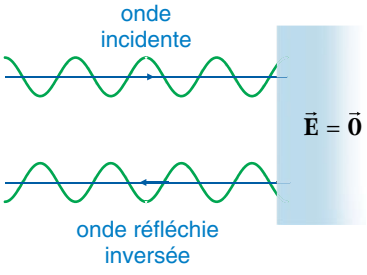


FIGURE 7.7
L'onde réfléchie par un miroir est inversée. C'est une réflexion dure.

Lorsque la lumière est incidente sur un dioptre séparant deux milieux d'indice de réfraction différents, une partie de la lumière est transmise dans le second milieu (la lumière réfractée), et une partie est réfléchie dans le premier milieu. Ceci correspond au comportement d'une onde sur une corde qui arrive vis-à-vis de la jonction de deux cordes différentes. L'onde lumineuse réfléchie peut être inversée, selon l'impédance des milieux. Pour les ondes lumineuses, c'est l'indice de réfraction qui joue le rôle d'impédance caractéristique. Supposons que l'onde incidente se propage dans un milieu d'indice n_1 et que l'onde transmise se propage dans un milieu d'indice n_2. Comme le montre la figure 7.8a, lorsque $n_2 > n_1$, l'onde réfléchie est inversée ; c'est une réflexion dure. Par contre, lorsque $n_2 < n_1$, comme on peut le voir à la figure 7.8b, l'onde réfléchie n'est pas inversée ; c'est une réflexion molle. L'onde transmise ne subit aucune inversion, quels que soient les indices de réfraction des milieux, comme le montre la figure 7.8.

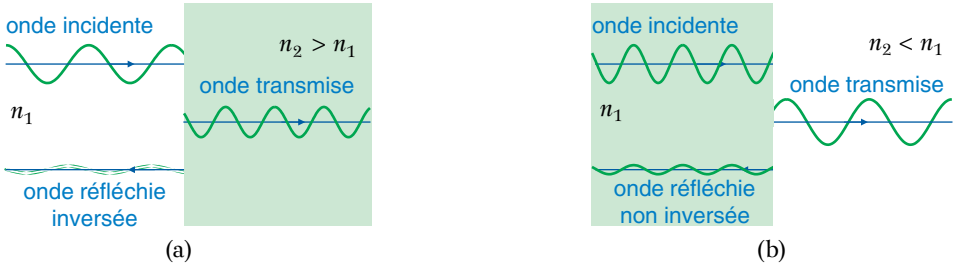


FIGURE 7.8

(a) Lorsque $n_1 < n_2$, l'onde réfléchie est inversée (réflexion dure). (b) Lorsque $n_1 > n_2$, l'onde réfléchie n'est pas inversée (réflexion molle). L'onde transmise n'est jamais inversée.

L'inversion de l'onde lors d'une réflexion dure est un facteur important dans le résultat de l'interférence de deux ondes. En effet, l'inversion d'une onde sinusoïdale est équivalente à un déphasage $\Delta\Phi_{\text{réfl}} = \pi$ rad, c'est-à-dire d'une demi-longueur d'onde. On doit ajouter $N_{\text{réfl}} = \frac{1}{2}$ au nombre de longueurs d'onde N d'une onde, lorsque cette dernière subit une réflexion dure. Dans le cas d'une réflexion molle ($n_2 < n_1$), il n'y a pas de déphasage supplémentaire pour l'onde réfléchie ($N_{\text{réfl}} = 0$). En considérant la réflexion, la distance parcourue par l'onde et l'indice de réfraction du milieu de propagation, on peut calculer le nombre de longueurs d'onde de la façon suivante :

$$N = \frac{nr}{\lambda} + N_{\text{réfl}} = \begin{cases} \dfrac{nr}{\lambda} + \dfrac{1}{2} & \text{(réflexion dure)} \\ \dfrac{nr}{\lambda} + 0 & \text{(réflexion molle)}. \end{cases} \tag{7.10}$$

Si une onde subit plusieurs réflexions dures, on ajoute $\frac{1}{2}$ à N pour chaque réflexion dure.

REMARQUE

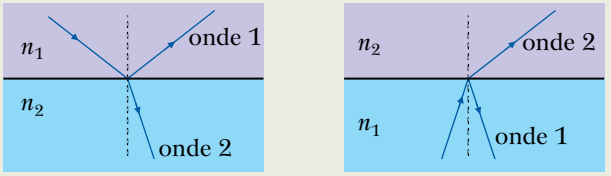
On a supposé qu'une inversion est équivalente à un déphasage de $+\pi$ rad. On pourrait aussi dire qu'une inversion est équivalente à un déphasage de $-\pi$ rad, donc $N_{\text{réfl}} = -\frac{1}{2}$. Cette deuxième possibilité donne les mêmes résultats.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 7.2

La figure ci-dessous illustre deux situations où une onde est incidente sur un dioptre. Dans chacune des situations, déterminez :

a. si l'onde 1 est inversée ou non ;

b. si l'onde 2 est inversée ou non.



7.2 L'expérience de Young

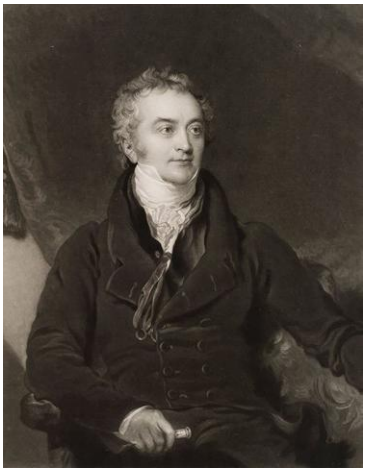


FIGURE 7.9
Thomas Young (1773-1829), médecin, physicien et égyptologue britannique

La première expérience sur l'interférence de la lumière a été menée en 1801 par Thomas Young (*voir la figure 7.9*). Dans cette expérience, la lumière frappe un écran opaque muni de deux fentes étroites et très rapprochées. Un écran est placé derrière les fentes pour observer la figure d'interférence.

À l'époque de Young, la source lumineuse était une première fente éclairée par le Soleil. Aujourd'hui, on produit une figure d'interférence de Young en utilisant la lumière d'un laser. La figure 7.10 montre la figure d'interférence produite par un laser à hélium-néon qui traverse deux fentes de Young. On obtient une succession de régions brillantes (les franges brillantes) séparées par des régions sombres (les franges sombres). Ces franges sont équidistantes dans l'expérience de Young. Le centre d'une frange brillante correspond à une interférence constructive (un maximum), et le centre d'une frange sombre représente une interférence destructive (un minimum). Pour les autres points, l'interférence est intermédiaire.

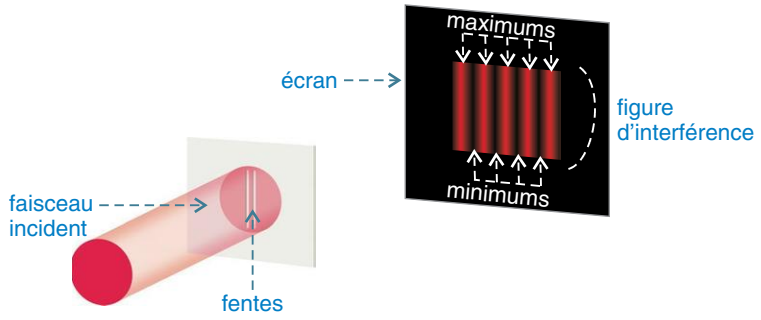


FIGURE 7.10
Dans l'expérience de Young, la lumière monochromatique passe à travers deux fentes étroites et rapprochées. Une figure d'interférence est observée sur l'écran.

Comme le montre la figure 7.11, la lumière incidente sur les fentes est une onde plane, avec des fronts d'onde parallèles. La largeur des fentes est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde de la lumière, de telle sorte que la lumière est diffractée en passant à travers les fentes. Les deux fentes se comportent comme des sources ponctuelles initialement en phase, étant donné qu'elles sont éclairées par le même front d'onde. Les fronts d'onde sphériques issus de chacune des fentes se superposent sur l'écran, ce qui produit de l'interférence, comme le

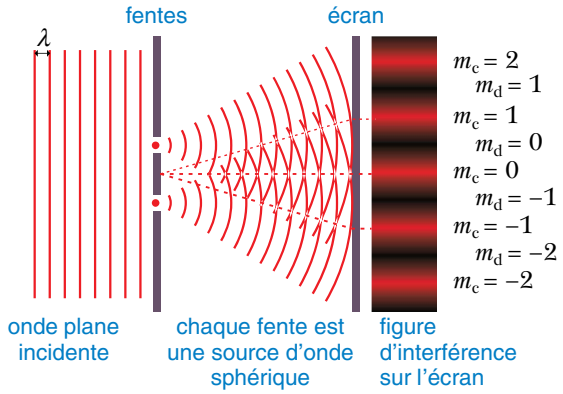


FIGURE 7.11
Une vue en plongée du montage de l'expérience de Young. Les ondes issues des fentes se superposent et produisent une figure d'interférence, avec des maximums et des minimums.

montre la figure 7.11. Les maximums observés sont aux endroits où les ondes sont en phase, alors que les minimums sont aux endroits où les deux ondes sont en opposition de phase.

La position des franges

On obtient la position des franges brillantes (les maximums d'interférence) et des franges sombres (les minimums d'interférence) en analysant le déphasage des ondes qui se superposent sur l'écran. La figure 7.12 montre les données géométriques du montage selon une vue en plongée. Les fentes S_1 et S_2 sont séparées par une distance d, et on suppose que leur largeur est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde de la lumière, de telle sorte que la lumière est diffractée. Nous verrons l'effet de la largeur des fentes lors de l'étude de la diffraction au chapitre 8. L'écran est placé à une distance L. On ajoute l'axe des y parallèlement à l'écran, en plaçant l'origine vis-à-vis du point central de l'écran, c'est-à-dire le point se trouvant à égale distance des deux fentes. La position d'un point $\mathcal{P}$ sur l'écran peut être caractérisée par sa coordonnée y ou par l'angle θ; selon la figure 7.12 :

$$\tan\theta = \frac{y}{L}\,. \tag{7.11}$$

Dans l'expérience de Young, le déphasage entre les deux ondes est produit uniquement par la différence de marche, car les deux ondes se propagent dans le même milieu (l'air, avec $n_{\text{air}} = 1{,}000$), et aucune onde ne subit de réflexion.

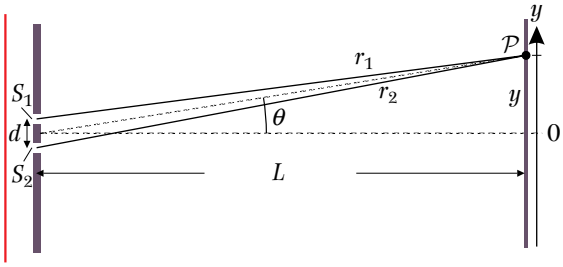


FIGURE 7.12
Dans l'expérience de Young, les fentes S_1 et S_2 sont séparées par une distance d, et l'écran est situé à une distance L. Un point $\mathcal{P}$ est à une hauteur y sur l'écran.

Soit r_1, la distance entre la fente S_1 et le point $\mathcal{P}$, et r_2, la distance entre la fente S_2 et le point $\mathcal{P}$. Selon l'équation 7.10, le nombre de longueurs d'onde pour chaque onde est

$$N_1 = \frac{n_{\text{air}} r_1}{\lambda} = \frac{r_1}{\lambda}$$
$$N_2 = \frac{n_{\text{air}} r_2}{\lambda} = \frac{r_2}{\lambda}.$$

Le déphasage entre les ondes issues de chaque fente, exprimé en fonction de la longueur d'onde, est

$$N_2 - N_1 = \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \frac{\Delta r}{\lambda}. \tag{7.12}$$

Comme on s'y attendait, le déphasage dépend de la différence de marche Δr. Selon la figure 7.13, on peut écrire r_1 et r_2 en fonction de l'angle θ et de la distance $r = \sqrt{L^2 + y^2}$ entre le point $\mathcal{P}$ et le point situé à mi-chemin entre les deux fentes. Selon la loi des cosinus,

$$r_1 = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - rd\cos(90° - \theta)} = r\sqrt{1 - \frac{d}{r}\sin\theta + \frac{d^2}{4r^2}}$$
$$r_2 = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - rd\cos(90° + \theta)} = r\sqrt{1 + \frac{d}{r}\sin\theta + \frac{d^2}{4r^2}},$$

où on a utilisé les identités trigonométriques $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$ et $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$ (*voir l'annexe E*).

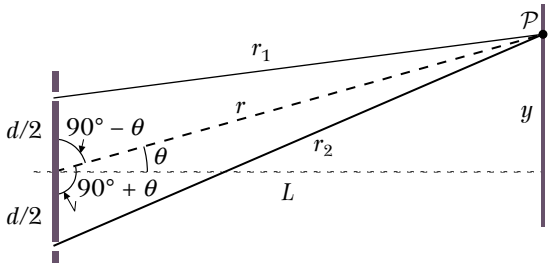


FIGURE 7.13
Pour calculer la différence de marche, on exprime r_1 et r_2 en fonction de r et de θ.

Dans l'expérience de Young avec de la lumière visible, on doit utiliser des fentes très rapprochées et placer l'écran à une grande distance pour pouvoir observer la figure d'interférence, ce qui implique que $d \ll r$. On peut alors utiliser l'approximation du binôme ($\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$) pour remplacer les racines carrées par des expressions plus simples. Les distances de parcours r_1 et r_2 sont alors données par les équations :

$$r_1 \approx r\left(1 - \frac{d\sin\theta}{2r}\right) = r - \frac{d}{2}\sin\theta \tag{7.13}$$

$$r_2 \approx r\left(1 + \frac{d\sin\theta}{2r}\right) = r + \frac{d}{2}\sin\theta. \tag{7.14}$$

On trouve la différence de marche à l'aide des équations 7.13 et 7.14 :

$$r_2 - r_1 \approx \left(r + \frac{d}{2}\sin\theta\right) - \left(r - \frac{d}{2}\sin\theta\right)$$

$$\Delta r \approx d\sin\theta\,. \tag{7.15}$$

La figure 7.14 montre les fentes et la différence de marche dans une vue agrandie. Étant donné que l'écran est très éloigné, les lignes r_1 et r_2 sont approximativement parallèles.

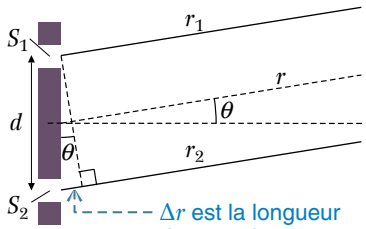


FIGURE 7.14
La différence de marche dans l'expérience de Young

À l'aide de la différence de marche, on calcule le déphasage entre les deux ondes en utilisant l'équation 7.12 :

$$N_2 - N_1 = \frac{d\sin\theta}{\lambda}\,. \tag{7.16}$$

La position du point $\mathcal{P}$ correspond à une interférence constructive (le centre d'une frange brillante) lorsque $N_2 - N_1 = m_c$, ce qui correspond à une différence de marche égale à un multiple de la longueur d'onde :

$$\frac{d\sin\theta}{\lambda} = m_c$$

$$d\sin\theta = m_c\lambda \quad (m_c = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\,. \tag{7.17}$$

Maximums dans l'expérience de Young

Le point $\mathcal{P}$ est à une position d'interférence destructive (le centre d'une frange sombre) lorsque $N_2 - N_1 = m_d + \frac{1}{2}$, où m_d est un nombre entier, ce qui correspond à une différence de marche égale à un multiple demi-entier de la longueur d'onde :

$$d\sin\theta = \left(m_d + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m_d = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\,. \tag{7.18}$$

Minimums dans l'expérience de Young

Les franges d'interférence sont numérotées selon l'entier m_c ou m_d, qu'on appelle l'*ordre d'interférence*, comme on l'a fait à la figure 7.11. L'ordre 0 de l'interférence constructive se produit à $\theta = 0$, quelle que soit la longueur d'onde de la lumière. Cet endroit est le centre de l'écran, de telle sorte que les deux ondes parcourent la même distance ($\Delta r = 0$). Elles sont donc en phase, et l'interférence est constructive. Dans le cas des autres franges brillantes et de toutes les franges sombres, leur position change en fonction de la longueur d'onde de la lumière utilisée.

Les équations 7.17 et 7.18 permettent de calculer l'angle θ associé à une interférence constructive et à une interférence destructive. Il est ensuite possible de calculer la position y sur l'écran à l'aide de l'équation 7.11. Pour les franges près du centre, l'angle θ est faible, et on peut simplifier le résultat en utilisant l'approximation des petits angles :

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{y}{L}\,.$$

En insérant cette approximation dans les équations 7.17 et 7.18, on peut isoler la position y_{m_c} du maximum d'ordre m_c et y_{m_d}, la position du minimum d'ordre m_d :

$$y_{m_c} = \frac{m_c\lambda}{d}L \qquad \text{(maximums)} \tag{7.19}$$

$$y_{m_d} = \frac{\left(m_d + \frac{1}{2}\right)\lambda}{d}L \qquad \text{(minimums)}\,. \tag{7.20}$$

À partir de ces équations, on peut calculer la distance Δy entre deux maximums successifs (qui est aussi égale à la distance entre deux minimums successifs) :

$$\Delta y = y_{m_c+1} - y_{m_c} = \frac{(m_c + 1)\,\lambda L}{d} - \frac{m_c \lambda L}{d} = \frac{\lambda L}{d}\,. \tag{7.21}$$

L'ordre m_c se simplifie, ce qui implique que la distance entre les franges ne varie pas, lorsque l'approximation des petits angles est valable. On observe en effet que les franges sont équidistantes sur l'écran. On remarque aussi que la distance entre les franges augmente si on rapproche les fentes (d plus faible), qu'on augmente la longueur d'onde ou qu'on éloigne l'écran des fentes.

EXEMPLE 7.2 La mesure d'une longueur d'onde

Un faisceau monochromatique ayant une longueur d'onde inconnue frappe un système de deux fentes. La distance entre les fentes est de 200 µm, et l'écran d'observation est placé à une distance de 1,80 m des fentes. Sur la figure d'interférence, on observe un groupe de 9 franges brillantes et on mesure une distance de 42,5 mm entre la première frange et la neuvième frange. Quelle est la longueur d'onde de la lumière ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$d = 200 \times 10^{-6}$ m	λ
$L = 1{,}80$ m	

De façon expérimentale, il est plus facile de mesurer la distance entre plusieurs franges que d'identifier une frange d'un ordre particulier. Lorsque nous observons 9 franges brillantes (par exemple, de $m_c = -4$ à $m_c = 4$), il y a 8 interfranges. La distance de 42,5 mm correspond donc à 8 Δy :

$$8\,\Delta y = 42{,}5 \text{ mm}\,. \tag{i}$$

Identifier la clé

La **clé** est que les franges sont équidistantes et que la distance entre deux franges successives est donnée par l'équation 7.21 :

$$\Delta y = \frac{\lambda L}{d}\,.$$

Résoudre le problème

Nous isolons λ :

$$\lambda = \frac{\Delta y\, d}{L}\,. \tag{ii}$$

Nous insérons ensuite les valeurs numériques, en exprimant toutes les valeurs en mètres :

$$\lambda = \frac{\dfrac{42{,}5 \times 10^{-3}\text{ m}}{8} \times 200 \times 10^{-6}\text{ m}}{1{,}80\text{ m}}$$

$$\lambda = 5{,}90 \times 10^{-7}\text{ m} = 590\text{ nm}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La longueur d'onde obtenue est bien dans le domaine du visible (entre 380 nm et 800 nm). L'interférence permet de calculer la longueur d'onde de la lumière à partir de mesures de distance.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 7.3

On éclaire un système de deux fentes avec une lumière composée de deux longueurs d'onde. La frange centrale a la même couleur que la lumière observée directement. De chaque côté de la frange centrale, on observe sur l'écran des franges brillantes rouges et violettes. Quelle est la couleur de la frange la plus rapprochée de la frange centrale ?

L'irradiance de la figure d'interférence

Afin d'obtenir la position des maximums et des minimums sur l'écran, on a calculé le déphasage entre les ondes issues de chaque fente. On peut aussi calculer l'irradiance pour n'importe quel point sur l'écran. Pour cela, on doit d'abord calculer le module du champ électrique résultant pour un point quelconque sur l'écran.

Dans l'expérience de Young, les deux fentes ont la même largeur, et elles sont éclairées par le même front d'onde. On peut donc dire que les ondes issues des deux fentes ont la même amplitude et la même fréquence, qu'elles sont initialement en phase et qu'elles ont la même polarisation. Pour un point $\mathcal{P}$ sur l'écran, le champ électrique de chaque onde est

$$E_1 = E_m \sin(kr_1 - \omega t)$$
$$E_2 = E_m \sin(kr_2 - \omega t).$$

Les ondes ont le même nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$, étant donné que les ondes se propagent dans le même milieu, l'air. Le module du champ résultant est

$$E = E_1 + E_2 = E_m \left[\sin(kr_1 - \omega t) + \sin(kr_2 - \omega t)\right] \tag{7.22}$$

$$= 2E_m \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right) \sin\left(k\frac{r_1 + r_2}{2} - \omega t\right), \tag{7.23}$$

où on a utilisé l'identité trigonométrique (*voir l'annexe E*) :

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\left[(\beta - \alpha)/2\right] \sin\left[(\alpha + \beta)/2\right].$$

L'onde résultante est une onde sinusoïdale dont l'amplitude dépend du déphasage entre les deux ondes :

$$E_{max} = 2E_m \cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right). \tag{7.24}$$

Le déphasage entre les deux ondes dépend de la différence de marche $\Delta r = r_2 - r_1$:

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = k(r_2 - r_1) = 2\pi\frac{\Delta r}{\lambda}. \tag{7.25}$$

Dans l'expérience de Young, la différence de marche est $\Delta r = d \sin\theta$. Le déphasage entre les deux ondes est donc

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda}. \tag{7.26}$$

Selon l'équation 4.31 de la page 137, l'irradiance en un point est proportionnelle au carré de l'amplitude du champ électrique. L'irradiance sur l'écran $I_{(2)}$, lorsque deux fentes sont éclairées, est

$$I_{(2)} = \frac{1}{2\mu_0 c} E_{max}^2 = \frac{1}{2\mu_0 c}\left[4E_m^2 \cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\right].$$

Cette expression fait intervenir l'amplitude E_m du champ électrique traversant une seule fente. Cette amplitude est difficile à mesurer. Il est plus simple de mesurer l'irradiance $I_{(1)}$ sur l'écran lorsqu'une seule fente est présente. Dans

cette situation, l'amplitude du champ résultant a la même valeur E_m pour tous les points sur l'écran. L'irradiance avec seulement une fente est donc $I_{(1)} = E_m^2/(2\mu_0 c)$. On obtient alors l'irradiance pour une figure d'interférence produite par deux fentes :

Irradiance pour deux fentes

$$I_{(2)} = 4I_{(1)} \cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right), \tag{7.27}$$

où le déphasage est

Déphasage dans l'expérience de Young

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda}. \tag{7.28}$$

La figure 7.15 illustre le graphique de l'irradiance en fonction du déphasage $\Delta\Phi$. Il est à remarquer que l'irradiance est $I_{(2)} = 4I_{(1)}$ vis-à-vis des maximums (lorsque $\Delta\Phi = 2m_c\pi$) et que l'irradiance est nulle vis-à-vis des minimums (lorsque $\Delta\Phi = (2m_d + 1)\pi$). Dans le cas de sources ponctuelles en phase, on additionne l'amplitude des ondes et non l'irradiance des ondes.

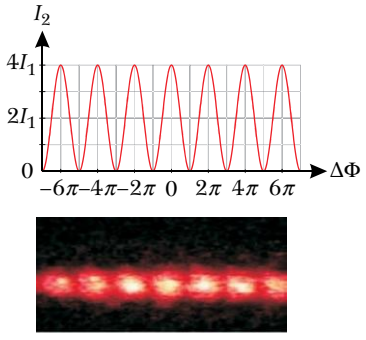


FIGURE 7.15
Le graphique de l'irradiance en fonction du déphasage, accompagné de la figure d'interférence dans l'expérience de Young

REMARQUE

On a ajouté un indice à I ($I_{(1)}$ ou $I_{(2)}$), pour bien indiquer le nombre de fentes utilisé.

MISE EN GARDE

Le déphasage $\Delta\Phi$ est en radians, alors que l'angle θ peut être mesuré en degrés. Lorsque vous utilisez une calculatrice, vous devez être vigilants et choisir le bon mode (radians ou degrés) pour calculer les fonctions trigonométriques.

7.3 L'interférence produite par les pellicules minces

Lorsqu'on regarde la lumière réfléchie par des bulles de savon, on remarque des teintes colorées. Ce phénomène est produit par l'interférence. Les longueurs d'onde associées aux couleurs observées sont sujettes à des interférences plutôt constructives, et les couleurs absentes sont associées à des longueurs d'onde subissant des interférences plutôt destructives. Le même phénomène se produit lorsqu'on observe des couleurs lors de la réflexion de la lumière sur une pellicule d'huile flottant sur l'eau.

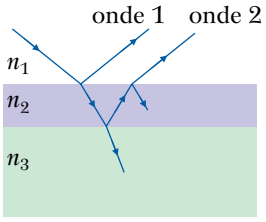


FIGURE 7.16
Une pellicule sépare une onde incidente en deux ondes qui peuvent produire de l'interférence.

La figure 7.16 montre une pellicule transparente comme une fine couche d'huile qui flotte à la surface de l'eau. La lumière est incidente sur la face supérieure. À chaque interface, la lumière est partiellement réfléchie et partiellement réfractée. L'interférence est produite par la superposition des ondes réfléchies par chacune des surfaces. De nouveau, un front d'onde est séparé en deux parties (ici par la réflexion partielle), et les ondes 1 et 2 sont cohérentes, pourvu que la pellicule soit mince, avec une épaisseur de quelques longueurs d'onde.

L'interférence peut être constructive ou destructive selon le déphasage entre les deux rayons. Dans la situation actuelle, le déphasage est produit par trois facteurs :

- L'onde 2 parcourt une distance plus grande que l'onde 1.
- L'onde 2 se propage dans un milieu ayant un indice de réfraction différent.
- Il y a des réflexions.

REMARQUE

La lumière subit d'autres réflexions dans la pellicule, ce qui produit d'autres ondes qui reviennent dans le milieu 1. On peut négliger ces ondes, car leur amplitude est beaucoup plus faible que pour les ondes 1 et 2 illustrées à la figure 7.16.

Pour obtenir les conditions d'interférence, on analyse la situation illustrée à la figure 7.17. Une lumière ayant une longueur d'onde λ est incidente sur une pellicule d'épaisseur L, dont l'indice de réfraction est n_2. On suppose que l'indice de réfraction est n_1 du côté incident et n_3 pour le troisième milieu. Dans le but de simplifier l'analyse, on considère que l'angle d'incidence θ est très près de 0°. Dans les schémas, on trace le rayon incident avec un angle non nul pour plus de clarté.

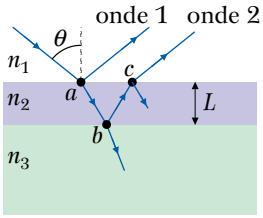


FIGURE 7.17
Une pellicule d'épaisseur L divise par réflexion partielle une onde incidente en deux ondes qui se superposent.

La lumière est d'abord incidente au point a. Une partie de la lumière est réfléchie (l'onde 1), et une partie est réfractée dans la pellicule. Au point b, il y a de nouveau une réflexion et une réfraction. L'onde 2 est émergente dans le milieu 1 après la réfraction au point c. On laisse tomber la lumière réfractée au point b et la lumière réfléchie au point c. Les ondes 1 et 2 se superposent dans le milieu incident.

On obtient le déphasage en fonction de la longueur d'onde en calculant le nombre de longueurs d'onde N, en utilisant l'équation 7.10. Les deux ondes parcourent la même distance dans le milieu d'indice 1, si on suppose que $\theta = 0°$. L'onde 1 est réfléchie au point 1. Il y a un déphasage $N_{\text{réfl}} = \frac{1}{2}$ seulement si la réflexion est une réflexion dure (avec $n_1 < n_2$) :

$$N_1 = N_{\text{réfl}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & (\text{si } n_1 < n_2) \\ 0 & (\text{si } n_1 > n_2)\,. \end{cases} \tag{7.29}$$

L'onde 2 effectue un aller-retour dans la pellicule ($r_2 = 2L$), et elle subit une réflexion au point b, entre les milieux d'indice n_2 et n_3. Le nombre de longueurs d'onde est

$$N_2 = \frac{n_2 r_2}{\lambda} + N_{\text{réfl}} = \begin{cases} \frac{2Ln_2}{\lambda} + \frac{1}{2} & (\text{si } n_2 < n_3) \\ \frac{2Ln_2}{\lambda} & (\text{si } n_2 > n_3)\,. \end{cases} \tag{7.30}$$

Selon l'équation 7.8, la superposition des deux ondes produit une interférence constructive si :

$$N_2 - N_1 = m_c\,, \tag{7.31}$$

où m_c est un entier. De même, l'équation 7.9 permet d'obtenir la condition pour que l'interférence soit destructive :

$$N_2 - N_1 = m_d + \frac{1}{2}\,. \tag{7.32}$$

FIGURE 7.18
Une bulle de savon d'épaisseur variable

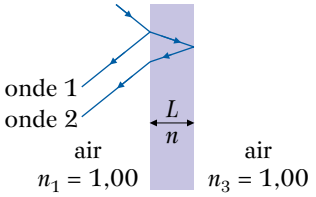


FIGURE 7.19
Le schéma pour analyser l'interférence produite par la réflexion de la lumière par une bulle de savon flottant dans l'air

Pour comprendre comment fonctionnent les dernières équations, prenons une bulle de savon flottant dans l'air. On éclaire la bulle avec une lumière blanche, et on observe la lumière réfléchie. La figure 7.18 montre une bulle de savon dont l'épaisseur augmente vers le bas à cause de la force gravitationnelle. La figure 7.19 montre les rayons lumineux pour une certaine épaisseur L de la bulle qui flotte dans les airs. Celle-ci a un indice de réfraction $n_2 = n$, et elle est entourée d'air $n_1 = n_3 = 1{,}00$. Le premier rayon subit une réflexion dure, car $1 < n$, donc $N_1 = \frac{1}{2}$. Le deuxième rayon subit une réflexion molle ($n > n_3 = 1$), et il parcourt une distance $2L$. Le déphasage est

$$N_2 - N_1 = \frac{2Ln}{\lambda} - \frac{1}{2}.$$

On calcule d'abord les épaisseurs produisant des interférences destructives, ce qui correspond à un déphasage égal à un demi-entier :

$$N_2 - N_1 = \frac{2Ln}{\lambda} - \frac{1}{2} = m_d + \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow L = \frac{(m_d + 1)\,\lambda}{2n},$$

où $m_d \geq -1$ est un entier, de telle sorte que l'épaisseur L est positive. Pour $m = -1$, on trouve que $L = 0$ correspond à une interférence destructive, quelle que soit la longueur d'onde. L'épaisseur ne peut pas être exactement égale à 0, mais lorsque $L \lessapprox 0{,}1\lambda$, la différence de marche entre les deux ondes est négligeable. Comme l'onde 1 subit une réflexion dure et que l'onde 2 subit une réflexion molle, les deux ondes sont alors en opposition de phase, et l'interférence est destructive. C'est ce qui se produit dans la partie supérieure de la bulle de savon de la figure 7.18, qui paraît sombre.

L'interférence est constructive pour une épaisseur L, de sorte que :

$$N_2 - N_1 = \frac{2Ln}{\lambda} - \frac{1}{2} = m_c$$
$$\Rightarrow L = \frac{\left(m_c + \frac{1}{2}\right)\lambda}{2n}.$$

Lorsque l'épaisseur de la bulle augmente, il y a d'abord une interférence constructive pour les faibles longueurs d'onde, comme le violet et le bleu. C'est ce qu'on voit dans la bulle de savon illustrée à la figure 7.18. On remarque ensuite une région blanche. Pour cette épaisseur, l'interférence est intermédiaire plutôt constructive pour la plupart des longueurs d'onde. On remarque ensuite des franges de couleur orange et de couleur rouge. À ce niveau, l'interférence est constuctive pour ces longueurs d'onde, alors que le violet et le bleu produisent des interférences destructives. Vers le bas de la bulle, les franges d'interférence sont moins bien définies, car pour une épaisseur plus grande, il y a moins de cohérence entre les deux ondes qui produisent l'interférence.

Lorsqu'une fine couche d'huile flotte sur l'eau, on observe aussi différentes teintes. Celles-ci correspondent à des interférences constructives pour ces couleurs, alors que les autres couleurs de la lumière blanche sont peu présentes parce qu'elles subissent des interférences destructives.

Les fabricants de lentilles utilisent les pellicules minces pour obtenir des couches antireflet (une interférence destructive) sur les lentilles. Il n'est pas possible de produire une pellicule qui élimine les réflexions pour toutes les longueurs d'onde. Le fabricant choisit donc une longueur d'onde qui sera complètement absente de la réflexion. Les autres couleurs subissent des interférences intermédiaires plutôt destructives. Il est aussi possible d'ajouter une couche mince sur des miroirs pour augmenter leur réflexion. Par exemple, lorsque des miroirs sont utilisés avec un laser ayant une longueur d'onde fixe, on peut ajouter une pellicule sur le miroir qui produit une interférence constructive.

EXEMPLE 7.3 Une couche antireflet

Certains appareils photo possèdent des lentilles sur lesquelles est ajoutée une couche antireflet, de telle sorte que la lumière de 500 nm est complètement transmise par la lentille. La couche est composée de MgF_2, dont l'indice de réfraction est de 1,38. La lentille a un indice de réfraction égal à 1,52. Quelle est l'épaisseur minimale pour que la lumière de 500 nm soit absente de la lumière réfléchie ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 7.20 montre le rayon incident qui se divise en deux ondes lors de la réflexion sur la couche mince.

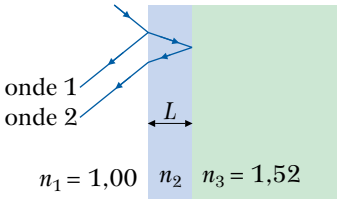


FIGURE 7.20
Le schéma de la situation pour l'exemple 7.3

Décortiquer le problème

Connues		Inconnue
$n_1 = 1{,}00$	$n_2 = 1{,}38$	L_{min}
$n_3 = 1{,}52$	$\lambda = 500$ nm	

La première réflexion est une réflexion dure, car $n_1 < n_2$. Selon l'équation 7.29,

$$N_1 = \frac{1}{2}. \qquad \text{(i)}$$

La deuxième réflexion est aussi une réflexion dure, car $n_2 < n_3$. Le nombre de longueurs d'onde pour l'onde 2 est calculé à l'aide de l'équation 7.30 :

$$N_2 = \frac{2Ln_2}{\lambda} + \frac{1}{2}. \qquad \text{(ii)}$$

Identifier la clé

La **clé** est que les deux ondes doivent produire une interférence destructive. Ceci se produit lorsque le déphasage entre les deux ondes est

$$N_2 - N_1 = m_d + \frac{1}{2}. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons les équations (i) et (ii) dans l'équation (iii), et nous isolons L :

$$\left(\frac{2Ln_2}{\lambda} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = m_d + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow L = \left(m_d + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2n_2}.$$

L'épaisseur minimale correspond à $m_d = 0$, car les valeurs négatives de m_d donneraient une épaisseur L négative. Nous obtenons alors

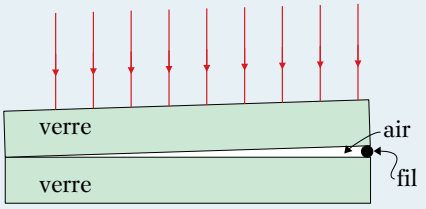
$$L_{min} = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{500 \text{ nm}}{4 \times 1{,}38} = 90{,}6 \text{ nm}. \text{ (réponse)}$$

Valider la réponse

Nous trouvons une très faible épaisseur, comme il se doit, pour que les deux ondes soient cohérentes.

EXEMPLE 7.4 Une pellicule d'air

On place un fil ayant un diamètre $d = 29{,}0\ \mu m$ entre deux lames de verre, comme le montre la figure ci-dessous. La lame supérieure est éclairée par une lumière monochromatique ayant une longueur d'onde de 656 nm. L'espace entre les deux lames est une pellicule d'air d'épaisseur variable. On observe une série de franges brillantes et de franges sombres dans la lumière réfléchie. Combien de franges brillantes peut-on observer ?



SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 7.21 illustre une partie de la pellicule d'air et les ondes dans une vue agrandie. À cet endroit, la pellicule d'air a une épaisseur L, avec $0 \le L \le d$.

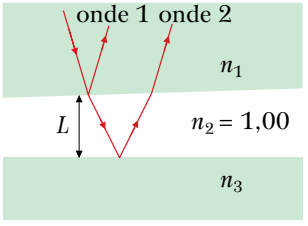


FIGURE 7.21
Le schéma de la situation pour l'exemple 7.4

Décortiquer le problème

La pellicule a un indice de réfraction plus petit que l'indice de réfraction du verre, c'est-à-dire que $n_2 < n_1$ et $n_2 < n_3$.

Connues	Inconnue
$d = 29{,}0\ \mu m$	nombre de franges
$\lambda = 656\ nm = 0{,}656\ \mu m$	
$n_2 = 1{,}00$	

La première réflexion est une réflexion molle. Selon l'équation 7.29,

$$N_1 = 0\ . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième réflexion est une réflexion dure. Selon l'équation 7.30,

$$N_2 = \frac{2Ln_2}{\lambda} + \frac{1}{2}\ . \qquad \text{(ii)}$$

Identifier les clés

La première **clé** est l'équation 7.31, qui permet d'obtenir une interférence constructive :

$$N_2 - N_1 = \frac{2Ln_2}{\lambda} + \frac{1}{2} = m_c\ . \qquad \text{(iii)}$$

La deuxième **clé** est que l'épaisseur de la couche d'air est comprise dans l'intervalle :

$$0 \le L \le d\ . \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Pour trouver les valeurs possibles de l'ordre m_c, nous isolons d'abord L dans l'équation (iii) :

$$L = \frac{\left(m_c - \frac{1}{2}\right)\lambda}{2n_2}\ . \qquad \text{(v)}$$

Nous insérons ensuite l'équation (v) dans l'intervalle (iv) :

$$0 \le \frac{\left(m_c - \frac{1}{2}\right)\lambda}{2n_2} \le d\ . \qquad \text{(vi)}$$

La limite inférieure de m_c est obtenue :

$$0 \le \frac{\left(m_c - \frac{1}{2}\right)\lambda}{2n_2} \Rightarrow m_c \ge \frac{1}{2}\ .$$

Comme m_c est un entier, la plus petite valeur possible est $m_c = 1$. Nous trouvons ensuite la limite supérieure de l'intervalle :

$$\frac{\left(m_c - \frac{1}{2}\right)\lambda}{2n_2} \leq d$$

$$\Rightarrow m_c \leq \frac{2n_2 d}{\lambda} + \frac{1}{2}$$

$$m_c \leq \frac{2 \times 1{,}00 \times 29{,}0\ \mu\text{m}}{0{,}656\ \mu\text{m}} + \frac{1}{2}$$

$$m_c \leq 88{,}9\ .$$

La plus grande valeur de m_c est donc 88. Comme m_c peut varier entre 1 et 88,

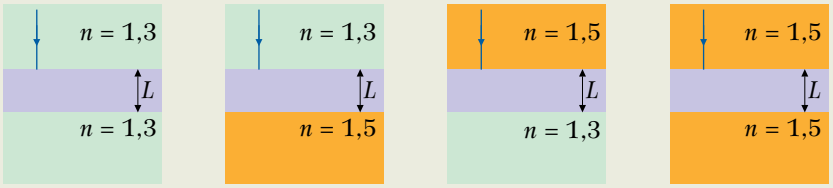
il y a 88 franges brillantes. (réponse)

Valider la réponse

Nous obtenons un nombre sans unité, car c'est le nombre de franges que nous recherchons.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 7.4

La figure suivante illustre quatre situations où une lumière monochromatique de longueur d'onde λ est incidente sur une pellicule mince. Dans chacune des situations, l'épaisseur de la pellicule mince est $L = \lambda/2{,}80$, et son indice de réfraction est de 1,40. Pour quelles situations la lumière réfléchie est-elle absente ?



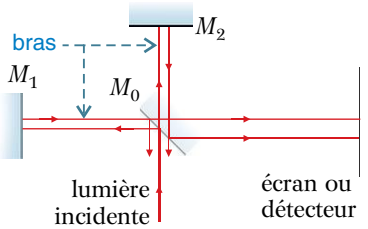
(i) (ii) (iii) (iv)

7.4 L'interféromètre de Michelson

Un *interféromètre* est un appareil qui utilise l'interférence de la lumière pour effectuer des mesures précises. L'interféromètre de Michelson a été inventé par le physicien américain Albert Abraham Michelson (1852-1931), en 1887. Avec son collègue Edward Morley, Michelson a tenté de mesurer la variation du module de la vitesse de la lumière selon le mouvement de la source en utilisant cet instrument. L'expérience de Michelson-Morley n'a pas été concluante, car le module de la vitesse de la lumière ne dépend pas du mouvement de la source ou du détecteur, ce que nous verrons au chapitre 9.

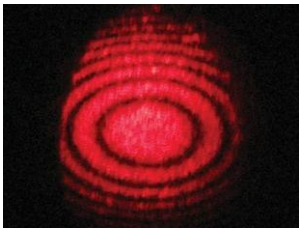
La figure 7.22a à la page suivante montre un interféromètre de Michelson utilisé dans le milieu scolaire. Il est composé d'un *séparateur de faisceau* M_0, et de deux miroirs plans M_1 et M_2. Le séparateur de faisceau est un miroir semi-réfléchissant : il réfléchit la moitié de la lumière incidente et laisse passer l'autre moitié de la lumière incidente. Comme le montre la figure 7.22b à la page suivante, on éclaire le séparateur de faisceau à un angle de 45°, avec une lumière ayant une longueur d'onde λ. Le miroir M_0 divise le faisceau en deux : un premier faisceau se rend au miroir M_1 et il est réfléchi sur lui-même. De même, le deuxième faisceau se rend

(a)

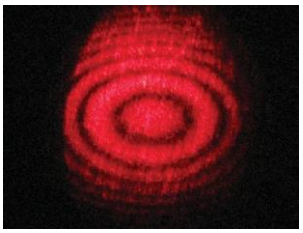


(b)

FIGURE 7.22
(a) Un interféromètre de Michelson. (b) Une vue en plongée de l'interféromètre.



(a)



(b)

FIGURE 7.23
Deux figures d'interférence produite par un interféromètre de Michelson éclairé avec un laser à hélium-néon. Le miroir M_1 a été déplacé entre les images (a) et (b), ce qui a légèrement changé la figure d'interférence.

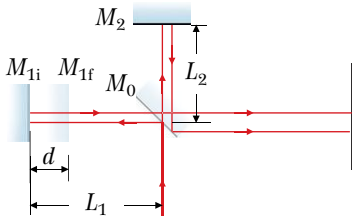


FIGURE 7.24
Le miroir M_1 est déplacé de la position M_{1i} à la position M_{1f}, ce qui produit un déplacement Δm des franges.

au miroir M_2 et il est réfléchi sur lui-même. Les deux faisceaux reviennent vers le séparateur de faisceau M_0. Une partie du premier faisceau passe à travers M_0, et une partie du deuxième faisceau est réfléchie par M_0. Ces deux parties de faisceaux se superposent sur l'écran ou dans un détecteur. Les deux faisceaux ne sont pas exactement parallèles ; ils divergent légèrement. Ils produisent une figure d'interférence comportant des franges circulaires, comme le montre la figure 7.23. Un cercle sombre est formé par les points ayant le même ordre d'interférence destructive, et un cercle très brillant est formé par les points ayant le même ordre d'interférence constructive. Les *bras de l'interféromètre* sont les parties situées respectivement entre M_0 et les miroirs M_1 et M_2. C'est dans les bras que se produit le déphasage entre les deux faisceaux.

Pour commencer l'analyse, on calcule le déphasage (exprimé en fonction de la longueur d'onde) entre les deux faisceaux lorsque le miroir M_1 est à une position initiale M_{1i} (*voir la figure 7.24*). La réflexion ne produit pas de déphasage dans l'interféromètre de Michelson, car chaque faisceau subit le même nombre de réflexions (deux réflexions dures chacun). Selon la figure 7.24, les bras ont respectivement une longueur L_1 et L_2. Chaque faisceau parcourt un aller-retour dans l'air (avec $n_1 = n_2 = 1{,}00$). Le déphasage entre les deux ondes pour une frange brillante est

$$N_2 - N_{1i} = \frac{2L_2}{\lambda} - \frac{2L_1}{\lambda} = m_{ci} \ ,$$

où m_{ci} est l'ordre initial d'interférence constructive.

Le miroir M_1 peut être déplacé à l'aide d'une vis micrométrique. Ce déplacement change le déphasage entre les deux faisceaux, ce qui modifie la figure d'interférence, comme le montre la figure 7.23. Supposons que le miroir M_1 est déplacé d'une distance d, de telle sorte qu'il se trouve à la position M_{1f}, comme on peut le voir à la figure 7.24. Le déphasage pour le même point sur l'écran est maintenant

$$N_2 - N_{1f} = \frac{2L_2}{\lambda} - \frac{2\,(L_1 - d)}{\lambda} = m_{cf} \ ,$$

où m_{cf} est le nouvel ordre d'interférence.

On peut fixer sur l'écran un point de référence et compter le nombre de franges brillantes qui passent vis-à-vis de ce point pendant le déplacement du miroir M_1. Ceci correspond à $\Delta m = |m_{cf} - m_{ci}|$:

$$\Delta m = N_{1f} - N_{1i} = \frac{2d}{\lambda} . \tag{7.33}$$

Si on connaît la longueur d'onde de la lumière, l'interféromètre permet de mesurer une très faible distance, du même ordre de grandeur que la longueur d'onde. Il est aussi possible de mesurer une longueur d'onde inconnue si on connaît la distance d.

L'interféromètre est un élément essentiel dans un spectromètre à transformée de Fourier, utilisé en chimie pour identifier les constituants d'un échantillon. Dans cet appareil, on éclaire un échantillon avec une lumière infrarouge. L'échantillon absorbe certaines longueurs d'onde particulières. La lumière est ensuite dirigée dans un interféromètre de Michelson. Le miroir M_1 est déplacé à vitesse constante, et la figure d'interférence est mesurée à l'aide d'un détecteur. Un ordinateur calcule ensuite la transformée de Fourier (une opération mathématique faisant intervenir une intégrale) sur le signal obtenu par le détecteur pour donner le spectre d'absorption.

L'interféromètre de Michelson permet aussi de mesurer l'indice de réfraction d'un gaz. Pour ce faire, on insère une cellule de longueur ℓ, qui contient un gaz d'indice de réfraction n, dans l'un des bras de l'interféromètre, comme le montre la figure 7.25. Le faisceau 2 parcourt une distance $2\,(L_2 - \ell)$ dans l'air et une distance 2ℓ dans le gaz ayant un indice n inconnu.

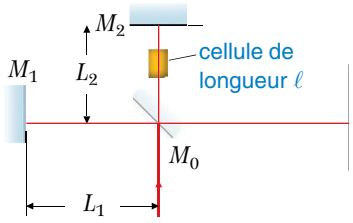


FIGURE 7.25
On ajoute une cellule de longueur ℓ pour mesurer l'indice de réfraction.

Le déphasage pour un point sur l'écran est

$$N_{2i} - N_1 = \frac{2\left[(L_2 - \ell)\, n_{air} + \ell n\right]}{\lambda} - \frac{2L_1 n_{air}}{\lambda} = m_{ci} .$$

Ensuite, en faisant graduellement le vide dans la cellule, on compte le nombre de franges Δm qui défilent vis-à-vis d'un point fixe de l'écran. Dans la cellule, l'indice de réfraction est maintenant exactement égal à 1. Le nouveau déphasage est

$$N_{2f} - N_1 = \frac{2\left[(L_2 - \ell)\, n_{air} + \ell\right]}{\lambda} - \frac{2L_1 n_{air}}{\lambda} = m_{cf} .$$

On soustrait les deux dernières équations pour obtenir $\Delta m = |m_{cf} - m_{ci}|$:

$$\Delta m = |N_{2f} - N_{2i}| \tag{7.34}$$

$$\Delta m = \frac{2\ell\,(n-1)}{\lambda} . \tag{7.35}$$

Cette méthode permet de mesurer un indice de réfraction très près de 1, car le nombre de franges qui défilent est proportionnel à $n - 1$.

L'interféromètre de Michelson est aussi au cœur des détecteurs d'ondes gravitationnelles. Le laboratoire LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave

Observatory) consiste en deux observatoires, l'un en Louisiane et l'autre dans l'État de Washington. Chaque observatoire possède un interféromètre de Michelson avec des bras de 4 km de longueur. Les bras sont ajustés pour produire une interférence destructive. Si une onde gravitationnelle est incidente, elle va déformer l'espace-temps de façon différente dans les deux bras, et les deux faisceaux ne seront plus exactement en opposition de phase. Les deux observatoires de LIGO ont fonctionné entre 2002 et 2010, sans pouvoir mesurer directement une onde gravitationnelle. Des travaux sont en cours jusqu'en 2015 pour augmenter la sensibilité des observatoires.

D'autres types d'interféromètres existent, avec des géométries et des applications différentes. Par exemple, l'interféromètre de Mach-Zehnder est muni de deux miroirs plans et de deux séparateurs de faisceau (*voir la figure 7.26*). En plaçant un objet dans l'un des faisceaux, on produit un changement dans la figure d'interférence. Cet interféromètre est utilisé pour analyser des gaz en mouvement ou des plasmas. Il est aussi utile dans les expériences sur la dualité onde-particule, un sujet que nous aborderons au chapitre 10.

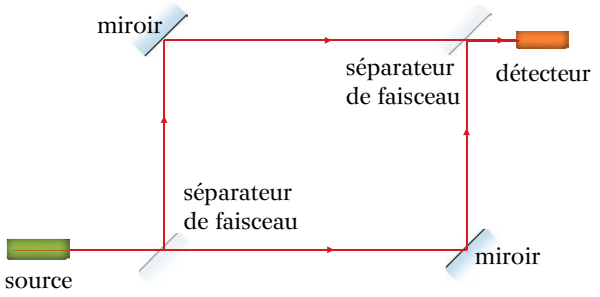


FIGURE 7.26
Un interféromètre de Mach-Zehnder

EXEMPLE 7.5 L'indice de réfraction de l'air

Pour mesurer l'indice de réfraction de l'air, on place une cellule de 2,50 cm dans un bras d'un interféromètre de Michelson. On utilise la lumière d'un laser à hélium-néon, dont la longueur d'onde est de 632,8 nm. On fait le vide et on compte 23 franges qui défilent vis-à-vis d'un point fixe de l'écran. Quel est l'indice de réfraction de l'air ?

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\ell = 2{,}50$ cm $\quad \lambda = 632{,}8$ nm	n
$\Delta m = 23$	

Identifier la clé

La **clé** est qu'en faisant le vide, nous changeons le déphasage entre les deux faisceaux qui se propagent dans les bras de l'interféromètre :

$$\Delta m = |N_f - N_i| = \left|\frac{2\ell}{\lambda} - \frac{2\ell n}{\lambda}\right|. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous isolons n et remplaçons les valeurs numériques :

$$\Delta m = \frac{2\ell(n-1)}{\lambda}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\lambda \Delta m}{2\ell} + 1$$

$$n = \frac{632{,}8 \times 10^{-9}\ \text{m} \times 23}{2 \times 0{,}0250\ \text{m}} + 1 = 1{,}000\,29\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'indice de réfraction est très légèrement plus grand que 1, comme il se doit. C'est la valeur qui apparaît dans le tableau 5.1.

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'interférence de la lumière.

LES LOIS ET LES PRINCIPES

- Pour obtenir une interférence de la lumière, il faut que les **sources soient cohérentes**, c'est-à-dire que le déphasage entre les ondes soit constant.
- Pour produire une interférence, deux ondes lumineuses doivent avoir la **même polarisation**.
- Le type d'interférence dépend du déphasage entre les deux ondes :

$$\Delta\Phi = 2\pi\,(N_2 - N_1)$$

$$N = \frac{rn}{\lambda} + N_{\text{réfl}}\,,$$

où N représente le **nombre de longueurs d'onde**.

- $N_{\text{réfl}}$ dépend du type de réflexion subie par l'onde :

$$N_{\text{réfl}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{(dure)} \\ 0 & \text{(molle)} \end{cases}.$$

- Pour une **interférence constructive** :

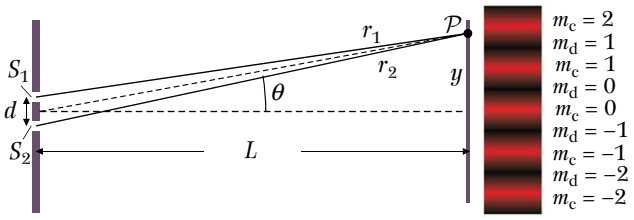
$$N_2 - N_1 = m_{\text{c}} \qquad (m_{\text{c}} = 0, \pm 1, \ldots)\,.$$

- Pour une **interférence destructive** :

$$N_2 - N_1 = m_{\text{d}} + \frac{1}{2} \qquad (m_d = 0, \pm 1, \ldots)\,.$$

LES RÉSULTATS

Dans l'**expérience de Young**, un front d'onde est divisé en deux par deux fentes très minces, séparées par une distance d. Les deux ondes issues des fentes produisent une figure d'interférence sur un écran.



- L'interférence est constructive (frange brillante) lorsque :

$$d\sin\theta = m_{\text{c}}\lambda \qquad (m_{\text{c}} = 0, \pm 1, \ldots)\,.$$

- L'interférence est destructive (frange sombre) lorsque :

$$d\sin\theta = \left(m_{\text{d}} + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (m_{\text{d}} = 0, \pm 1, \ldots)\,.$$

- Pour les franges près du centre,

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{y}{L}\,.$$

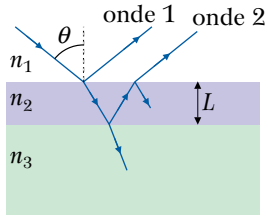
- L'irradiance d'un point sur l'écran, lorsqu'on éclaire deux fentes, est

$$I_{(2)} = 4I_{(1)}\cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right),$$

où $\Delta\Phi$ est le déphasage entre les deux ondes :

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda}\,.$$

On observe une interférence dans la lumière réfléchie par une **pellicule mince**. Le faisceau est divisé en deux parties par la réflexion et la réfraction.



- Le nombre de longueurs d'onde pour chaque onde est (pour $\theta \approx 0°$) :

$$N_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (\text{si } n_1 < n_2) \\ 0 & (\text{si } n_1 > n_2) \end{cases}$$

$$N_2 = \begin{cases} \dfrac{2Ln_2}{\lambda} + \dfrac{1}{2} & (\text{si } n_2 < n_3) \\ \dfrac{2Ln_2}{\lambda} & (\text{si } n_2 > n_3)\,. \end{cases}$$

LES APPLICATIONS

L'**interféromètre de Michelson** est un appareil qui utilise l'interférence. Un changement dans l'un des bras produit un défilement de Δm franges :

$$\Delta m = |N_{\text{f}} - N_{\text{i}}|\,.$$

QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

Section 7.1 Les conditions d'interférence

Q1 Peut-on produire de l'interférence à partir de la lumière de deux chandelles ? Expliquez votre réponse.

Q2 La figure 7.27 montre deux rayons de longueur d'onde λ qui sont en opposition de phase avant de pénétrer dans des lames d'indice de réfraction différent, où $n_1 = 1{,}40$ et $n_2 = 1{,}60$. Quelle est la plus petite longueur L faisant en sorte que les rayons soient en phase à la sortie des lames ?

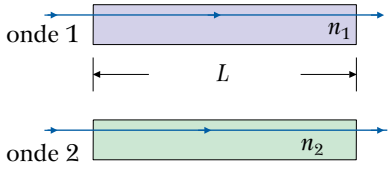


FIGURE 7.27 • Question 2

Q3 La figure 7.28 montre deux rayons lumineux de longueur d'onde $\lambda = d$, initialement en phase. Après que les rayons ont subi les réflexions, déterminez :

a. la différence de marche ;

b. le déphasage, exprimé en fonction de la longueur d'onde ;

c. le type d'interférence obtenu si les deux rayons se superposent.

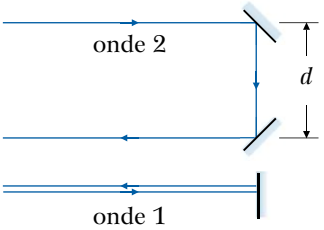


FIGURE 7.28 • Question 3

E4 Deux sources cohérentes et ponctuelles émettent des micro-ondes initialement en phase. La longueur d'onde des ondes est de 2,90 cm. L'une des sources se trouve à une distance de 75,00 cm du point étudié. Déterminez le type d'interférence observée pour les distances de la deuxième source suivantes :

a. 75,00 cm ;

b. 80,00 cm ;

c. 105,45 cm ;

d. 133,00 cm.

E5 Deux rayons sont initialement en phase lorsqu'ils traversent des lames de verre ou de plastique de longueur $L = 2{,}50$ µm ou de longueur $2L$, comme le montre la figure 7.29. La longueur d'onde de la lumière est de 650 nm, et les indices de réfraction des lames sont $n_1 = 1{,}20$, $n_2 = 1{,}69$ et $n_3 = 1{,}40$.

a. Calculez le nombre de longueurs d'onde N_1 contenues dans la longueur $2L$ pour le rayon 1.

b. Calculez le nombre de longueurs d'onde N_2 contenues dans la longueur $2L$ pour le rayon 2.

c. Quel est le déphasage des deux ondes, exprimé en fonction de la longueur d'onde ?

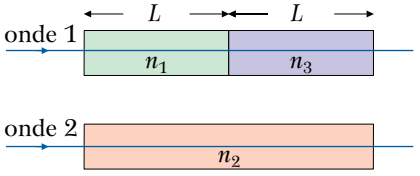


FIGURE 7.29 • Exercice 5

P6 Deux sources de micro-ondes émettent en phase à une fréquence de 5,00 GHz. Elles sont séparées par une distance $d = 15{,}00$ cm. On place un détecteur à une distance D de la source S_1, comme le montre la figure 7.30.

a. À quelles distances D observe-t-on une interférence constructive ?

b. À quelles distances D observe-t-on une interférence destructive ?

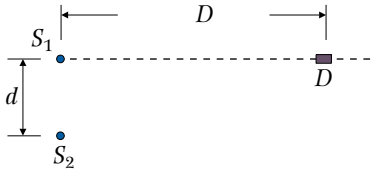


FIGURE 7.30 • Problème 6

P7 Une onde lumineuse ayant une longueur d'onde dans le vide de 446,5 nm se propage dans l'eau ($n_2 = 1{,}333$), elle est réfléchie par une surface de verre ($n_3 = 1{,}52$), puis elle est réfléchie par la surface supérieure pour ensuite être réfractée dans le verre (*voir la figure 7.31*). Une deuxième onde ayant la même longueur d'onde se propage parallèlement à la première, et elle est réfractée dans le verre. L'épaisseur d'eau est $L = 3{,}40$ µm, et l'angle θ est égal à 40,0°.

a. Déterminez le nombre de longueurs d'onde dans le trajet de l'onde 1.

b. Déterminez le nombre de longueurs d'onde dans le trajet de l'onde 2.

c. Si les ondes sont initialement en phase, quel est le déphasage en fonction de la longueur d'onde des ondes dans le verre ?

d. Quel type d'interférence obtient-on si les ondes se superposent ?

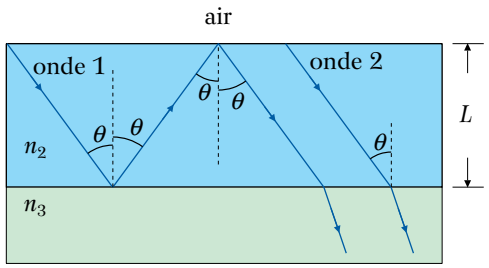


FIGURE 7.31 • Problème 7

Section 7.2 L'expérience de Young

Q8 Soit Δy, la distance entre deux franges brillantes consécutives sur la figure d'interférence dans l'expérience de Young. Indiquez de quelle façon Δy varie lorsque les modifications suivantes sont apportées :

a. on augmente la distance entre les fentes et l'écran ;

b. on augmente la distance entre les deux fentes ;

c. on augmente la longueur d'onde qui éclaire les fentes ;

d. on fait l'expérience dans l'eau.

E9 On réalise l'expérience de Young avec un montage dans lequel deux fentes minces sont distantes de 0,250 mm et se trouvent à 1,28 m d'un écran. On aperçoit sur l'écran des franges brillantes distantes de 3,35 mm les unes des autres. Quelle est la longueur d'onde de lumière qui éclaire les fentes ?

E10 Un laser vert dont la longueur d'onde est de 532 nm éclaire deux fentes distantes de 1,00 mm l'une de l'autre.

a. À quelle distance doit se trouver l'écran derrière la paire de fentes pour que le maximum d'ordre 2 se trouve à 5,00 mm du centre de la figure d'interférence ?

b. Quel est l'angle entre l'axe central du montage et la droite joignant le centre des fentes au maximum d'ordre 2 ?

E11 Une paire de fentes, distantes de 0,425 mm, est éclairée par une lumière bleue (λ_1 = 468 nm) et une lumière rouge (λ_2 = 634 nm). L'écran se trouve à 1,82 m des deux fentes. Quelle est la distance entre le maximum d'ordre 3 du bleu et le maximum d'ordre 3 du rouge ?

E12 Un montage expérimental est mis en place pour évaluer la longueur d'onde d'une source monochromatique. On éclaire de sa lumière une paire de fentes distantes de 0,500 mm et se trouvant à 1,50 m d'un écran. On mesure qu'une distance de 1,54 cm sépare les maximums d'ordre –5 et d'ordre 5. Quelle est la longueur d'onde de la lumière éclairant les fentes ?

E13 La figure 7.32 montre l'irradiance mesurée sur un écran placé à une distance L = 2,000 m d'un système de deux fentes séparées d'une distance de 0,150 mm.

a. Quelle est la longueur d'onde de la lumière ?

b. On couvre l'une des deux fentes pour que la lumière passe à travers une seule fente. Quelle est l'irradiance au centre de l'écran ?

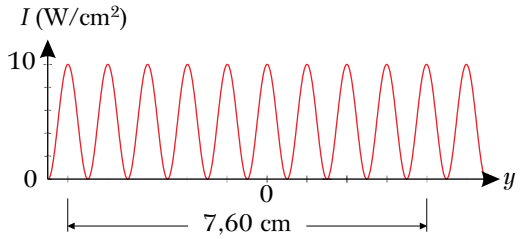


FIGURE 7.32 • Exercice 13

E14 Deux minces fentes distantes de 0,150 mm sont éclairées par une lumière de 625 nm, de telle sorte qu'une figure d'interférence apparaît sur un écran situé à 4,30 m des fentes. Par rapport à l'irradiance au centre de la figure, déterminez le pourcentage de l'irradiance atteignant un point de l'écran situé :

a. à 5,00 mm du centre ;

b. à 10,55 mm du centre ;

c. à 17,92 mm du centre.

P15 Deux sources de micro-ondes ponctuelles émettent en phase et dans toutes les directions, chacune à une puissance moyenne de 55,0 mW. Elles sont séparées de 1,20 cm (*voir la figure 7.33*), et la fréquence des ondes est de 58,8 GHz.

a. Quelle est l'irradiance en un point $\mathcal{P}_1$ situé à 1,35 m de ces deux sources ?

b. Quelle est l'irradiance en un point $\mathcal{P}_2$ situé à une distance y = 20,0 cm au-dessus du point $\mathcal{P}_1$?

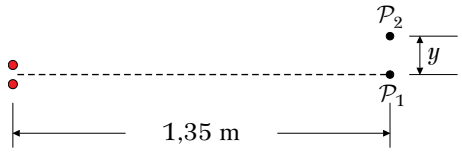


FIGURE 7.33 • Problème 15

P16 Soit la figure d'interférence de l'expérience de Young dont les paramètres sont λ = 578 nm, d = 0,400 mm et L = 1,950 m. Déterminez à quelle distance, en s'éloignant du centre de la figure, on observe :

a. une irradiance égale à 40 % de celle du centre, pour la première fois ;

b. une irradiance égale à 75 % de celle du centre, pour la troisième fois ;

c. une irradiance nulle pour la deuxième fois.

P17 Une source éclaire une paire de fentes alternativement et à haute fréquence avec des longueurs d'onde de 480 nm (bleu), de 540 nm (vert) et de 660 nm (rouge), de telle sorte que le maximum central apparaît blanc (par superposition des trois couleurs). Une distance de 0,240 mm sépare le centre des deux fentes, et l'écran se trouve à 1,150 m des fentes. Déterminez la distance du centre pour obtenir :

a. une première frange de couleur cyan (une superposition des maximums du bleu et du vert) ;

b. une première frange de couleur magenta (une superposition des maximums du bleu et du rouge).

P18 On éclaire deux fentes avec une lumière ayant une longueur d'onde $\lambda = 632{,}8$ nm. Après avoir observé la figure d'interférence, on place devant la deuxième fente une pellicule plastique dont l'indice de réfraction est de 1,43. On remarque qu'alors la nouvelle frange centrale correspond à la frange $m = 14$ de la figure initiale (*voir la figure 7.34*). Quelle est l'épaisseur de la pellicule plastique ?

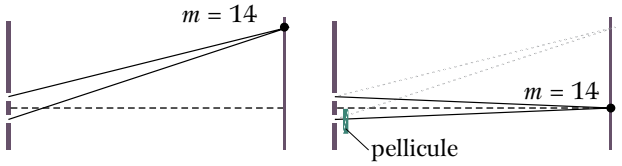


FIGURE 7.34 • Problème 18

Section 7.3 L'interférence produite par les pellicules minces

Q19 Expliquez pourquoi les franges de couleur sur la surface d'une bulle de savon se déplacent ou changent de forme constamment.

Q20 Vous apercevez à la surface d'une flaque d'eau des franges de couleur formant à peu près des cercles. Que vous apprend cette disposition des franges de couleur sur la pellicule à la surface de l'eau ?

Q21 La figure 7.35 montre quatre situations où la lumière de longueur d'onde λ est incidente sur une pellicule mince située entre deux milieux épais. La pellicule a une épaisseur $L = \lambda/1{,}40$. L'indice de réfraction de chaque milieu est indiqué sur la figure. Dans quelles situations y a-t-il une interférence destructive pour la lumière réfléchie ?

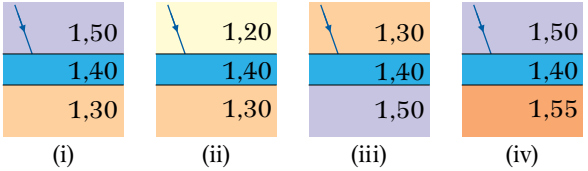


FIGURE 7.35 • Question 21

Q22 La lumière traverse une pellicule d'épaisseur L flottant à la surface de l'eau, comme le montre la figure 7.36. La pellicule a un indice de réfraction n plus petit que l'indice de réfraction de l'eau.

a. Quel est le nombre de longueurs d'onde entre les deux lignes pointillées pour le rayon r_1 ?

b. Quel est le nombre de longueurs d'onde entre les deux lignes pointillées pour le rayon r_2 ?

c. Quel est le déphasage entre les deux rayons, exprimé en fonction de la longueur d'onde ?

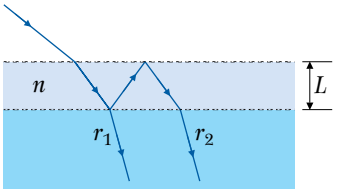


FIGURE 7.36 • Question 22

E23 Une fine couche de fluorure de lithium ($n = 1{,}36$) sert de couche de traitement antireflet pour une paire de lunettes. L'épaisseur de cette couche est de 101 nm, et l'indice de réfraction du verre est de 1,58. On éclaire perpendiculairement la surface du verre avec des rayons lumineux violet ($\lambda = 400$ nm), vert ($\lambda = 550$ nm) et rouge ($\lambda = 680$ nm). Déterminez le déphasage exprimé en fonction de la longueur d'onde entre les rayons réfléchis sur chacune des faces de la couche mince :

a. pour la lumière violette ;

b. pour la lumière verte ;

c. pour la lumière rouge.

E24 Une équipe de chimistes est parvenue à produire une pellicule d'un nouveau polymère d'une épaisseur de 800 nm. Lorsqu'elle est éclairée par la lumière du jour, la lumière réfléchie ayant une longueur d'onde de 626 nm est amplifiée au 3^{e} ordre.

a. Quel est l'indice de réfraction du polymère ?

b. À quel ordre d'interférence constructive est amplifiée la lumière à 487 nm ?

E25 On applique à la surface du verre ($n = 1{,}52$) une couche de silice de 500 nm d'épaisseur ($n = 1{,}28$).

a. Déterminez la longueur d'onde qui est absente de la lumière réfléchie ?

b. Quelles sont les longueurs d'onde présentant une interférence constructive dans la lumière réfléchie ?

P26 Une pellicule d'eau savonneuse ($n = 1{,}333$) est entourée d'air. La pellicule est éclairée par une lumière blanche. La lumière réfléchie présente une interférence constructive à une longueur d'onde de 640 nm et une interférence destructive à une longueur d'onde de 480 nm. L'interférence est intermédiaire pour les autres longueurs d'onde du visible. Quelle est l'épaisseur de la couche savonneuse ?

P27 Deux lames de verre identiques de 6,50 cm de longueur se touchent à l'une de leurs extrémités, alors que leur autre extrémité est séparée par l'épaisseur d'un cheveu. La lumière blanche d'un fluorescent dans la pièce permet d'apercevoir des franges d'interférence de différentes couleurs. Dans la couleur verte, on compte 87 franges brillantes d'un bout à l'autre des lames, de telle sorte qu'il y a une frange brillante tout juste à côté du cheveu. La lumière verte produite par ce fluorescent a une longueur d'onde de 546 nm. Quel est le diamètre du cheveu ?

P28 Dans un contenant d'eau flotte un mince film d'un liquide dont l'indice de réfraction est $n = 1{,}27$. On éclaire la surface de l'eau avec une lumière jaune à 589 nm, et on aperçoit sur une partie de la surface des franges claires et sombres disposées alternativement de façon régulière à raison de 17 franges par centimètre.

a. Que signifie la présence de franges, comparativement à une surface de couleur uniforme ?

b. Quel est l'angle entre les deux surfaces du liquide étudié, dans la direction perpendiculaire aux franges ?

P29 Un coin d'air entre deux lames de verre éclairées perpendiculairement avec de la lumière de 580 nm produit des franges d'interférence. On observe le long de l'assemblage 5 franges par centimètre. On insère ensuite entre les deux lames de verre une huile synthétique dont on veut connaître les propriétés optiques, sans changer la géométrie. On observe alors 32 franges sur une distance de 4,7 cm. Quel est l'indice de réfraction de cette huile ?

P30 Une couche d'un liquide inconnu est déposée sur la surface d'une lame de verre. L'indice de réfraction du liquide est plus faible que l'indice de réfraction du verre. La couche a une épaisseur de 350 nm, et elle est éclairée avec de la lumière blanche. Dans la lumière réfléchie, on observe que la longueur d'onde $\lambda = 510$ nm est très brillante et que la longueur d'onde $\lambda = 680$ nm est absente de la lumière réfléchie.

a. Quel est l'indice de réfraction de la couche ?

b. Quelle autre longueur d'onde du visible est aussi absente de la lumière réfléchie ?

P31 Une couche d'huile flotte à la surface de l'eau. Cette couche d'huile a un indice de réfraction de 1,25 et une épaisseur de 1,05 µm. La couche est éclairée par la lumière du Soleil.

a. Un pilote d'hélicoptère se trouve directement au-dessus de la couche d'huile. Quelles sont les longueurs du spectre visible produisant une interférence constructive ?

b. Un plongeur se trouve directement en dessous de la couche d'huile. Quelles sont les longueurs du spectre visible produisant une interférence constructive ?

P32 Une figure d'interférence est obtenue en éclairant une lentille plan-convexe, dont le rayon de courbure est R, placée sur une lame de verre (*voir la figure 7.37*). Pour une lumière monochromatique ayant une longueur d'onde λ, on observe dans la lumière réfléchie une série de cercles concentriques, appelés les *anneaux de Newton*. L'interférence est causée par la couche d'air entre la surface de la lentille et la surface de la lame de verre.

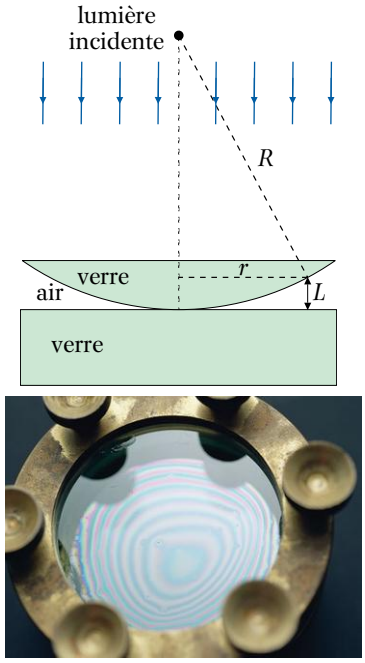


FIGURE 7.37 • Problème 32

a. Déterminez l'épaisseur L de la couche d'air entre la lentille et la lame, correspondant à un anneau brillant de rayon r.

b. Déterminez le rayon r des anneaux brillants, en supposant que $r \ll R$. (Indice : Vous aurez besoin de l'approximation du binôme.)

c. Si on utilise une lumière ayant une longueur d'onde de 589 nm et une lentille dont le rayon de courbure est de 10,0 cm, quel est le rayon du premier anneau brillant ?

Section 7.4 L'interféromètre de Michelson

Q33 De quelle manière est modifiée la figure d'interférence produite sur l'écran lorsqu'on remplace progressivement l'air dans l'un des bras d'un interféromètre par un gaz dont l'indice de réfraction est plus élevé que celui de l'air ?

Q34 La figure 7.38 montre la figure d'interférence produite par un interféromètre de Michelson éclairé avec de la lumière rouge. Décrivez la figure d'interférence produite si on utilise de la lumière blanche.

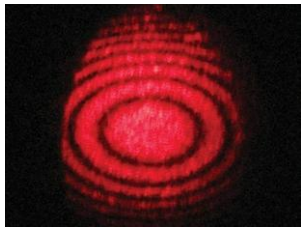


FIGURE 7.38 • Question 34

Q35 Pour une longueur d'onde λ donnée, de quelle distance doit-on modifier la longueur de l'un des bras de l'interféromètre pour inverser la position des franges claires et sombres sur l'écran ?

E36 Un rayon laser dont on désire déterminer la longueur d'onde est dirigé dans un interféromètre. On constate qu'on doit déplacer le miroir mobile de 10,1 µm pour produire un décalage de 50 franges sur l'écran. Quel est la longueur d'onde du laser ?

E37 À l'extrémité de l'un des bras de l'interféromètre, le déplacement du miroir d'une distance d produit un décalage de 120 franges si on utilise une lumière de 589 nm. Combien de franges défilent lorsqu'on éclaire l'interféromètre avec une lumière de 497 nm, si on déplace de la même distance le miroir ?

E38 Pour mesurer l'indice de réfraction de l'hélium, on insère ce gaz dans une cellule ayant une longueur de 10,5 cm dans un bras d'un interféromètre de Michelson. On utilise une lumière ayant une longueur d'onde de 589,29 nm. En faisant le vide dans la cellule, on observe un défilement de 13 franges. Quel est l'indice de réfraction de l'hélium à cette longueur d'onde ?

P39 On utilise un interféromètre de Michelson pour évaluer la variation de l'indice de réfraction de l'eau entre 20,0 °C et 100,0 °C. On insère dans l'un des bras de l'interféromètre une cellule remplie d'eau à 20,0 °C et dont les faces sont perpendiculaires au rayon. L'intérieur de la cellule mesure 1,000 cm d'une face à l'autre. On utilise la lumière jaune d'une lampe au sodium ($\lambda = 589{,}29$ nm) pour effectuer les mesures. On chauffe l'eau jusqu'à 100,0 °C, et on observe graduellement un décalage de 475 franges sur l'écran. Quelle est la variation de l'indice de réfraction de l'eau entre 20,0 °C et 100,0 °C ?

P40 On éclaire un interféromètre de Michelson avec une lumière dont la longueur d'onde est de 656 nm. On place dans l'un des bras une mince lame de rubis ($n = 1{,}76$) perpendiculairement au rayon lumineux. On incline graduellement la lame jusqu'à un angle de 45°. Pendant la rotation, on observe un défilement de 118 franges dans le télescope de l'appareil. Quelle est l'épaisseur de la lame de rubis ?

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

7.1 La situation (iv)

Le déphasage en fonction de la longueur d'onde est

$$N_2 - N_1 = \frac{L}{\lambda} - \frac{Ln}{\lambda}.$$

Dans la situation (iv), $N_2 - N_1 = -1{,}5$, ce qui correspond à des ondes en opposition de phase.

7.2 **a.** L'onde 1 est inversée seulement dans la situation (i).

Dans la situation (i), le rayon réfracté s'approche de la normale, ce qui indique que $n_1 < n_2$. La réflexion est dure, donc l'onde réfléchie est inversée. Dans la situation (ii), le rayon réfracté s'éloigne de la normale, ce qui indique que $n_1 > n_2$. La réflexion est molle, ce qui fait que l'onde réfléchie n'est pas inversée.

b. L'onde 2 n'est pas inversée dans chacune des situations.

L'onde 2 est l'onde transmise, qui n'est jamais inversée.

7.3 La frange est violette.

Le maximum d'ordre 1 se trouve à la position $y = \lambda L/d$. La lumière violette a une longueur d'onde plus petite que la lumière rouge, donc la position y est plus faible pour la lumière violette.

7.4 Les situations (i) et (iv)

On veut une interférence destructive, donc $N_2 - N_1 = m_d + \frac{1}{2}$. L'onde 2 parcourt une distance supplémentaire $r_2 = 2L = \lambda/1{,}40 = \lambda_{n_2}$, ce qui fait que $2Ln_2/\lambda = 1$ dans chacune des situations. Pour obtenir une interférence destructive, il faut donc une réflexion dure et une réflexion molle pour produire une opposition de phase. L'onde 1 subit une réflexion dure dans les situations (i) et (ii). L'onde 2 subit une réflexion dure dans les situations (ii) et (iv). Donc, les situations (i) et (iv) produisent une interférence destructive.

Chapitre 08

La diffraction de la lumière

Buts du chapitre

Ce chapitre présente la diffraction de la lumière. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de calculer la position des minimums dans la figure de diffraction d'une fente rectangulaire et d'une ouverture circulaire ;
- d'utiliser le critère de Rayleigh pour obtenir la limite de résolution d'un instrument d'optique ;
- d'analyser la figure de diffraction produite par deux fentes rapprochées ;
- de calculer la position des raies de diffraction produites par un réseau.

Préalables

Ce chapitre porte de nouveau sur la nature ondulatoire de la lumière. Revoyez :

- le principe de Huygens, présenté à la section 5.2 ;
- l'expérience de Young, étudiée à la section 7.2 ;
- les propriétés des ondes électromagnétiques, expliquées à la section 4.1.

Un disque Blu-ray réfléchit la lumière comme un réseau de diffraction en séparant la lumière selon son spectre.

La diffraction est un phénomène ondulatoire qui se produit autant dans le cas des ondes sonores que dans celui de la lumière. Lorsqu'une onde rencontre un obstacle, elle contourne l'obstacle, en plus de pouvoir être absorbée ou réfléchie par l'obstacle. La diffraction se produit aussi lorsque la lumière passe à travers une ouverture : l'onde se déforme en passant à travers une ouverture. L'effet de la diffraction est important lorsque la longueur d'onde et la dimension de l'obstacle sont du même ordre de grandeur. Étant donné que la longueur d'onde de la lumière visible est plus petite que le micromètre, la diffraction a des effets très évidents seulement pour de très petites ouvertures.

Dans ce chapitre, nous allons étudier la diffraction de la lumière lorsque celle-ci passe à travers une fente étroite. Pour faire une étude simple du phénomène, nous allons utiliser le principe de Huygens, en remplaçant un front d'onde plane par des petites sources d'ondes sphériques. Les ondes issues de ces sources produisent une onde qui n'est plus une onde plane après la rencontre d'un obstacle. De plus, ces ondes se superposent et produisent des interférences.

Au chapitre 6, nous avons étudié les instruments d'optique dans l'approximation de l'optique géométrique, en supposant que la lumière se déplaçait en ligne droite. Le phénomène de diffraction produit des images déformées : les points-image sont en réalité des disques ayant une certaine dimension. Ce fait influe sur la capacité d'un instrument à bien distinguer deux images rapprochées.

Le réseau de diffraction est une application très importante de la diffraction. En produisant un réseau qui contient un très grand nombre de petites fentes, il est possible de décomposer la lumière en spectre. En effet, la lumière qui passe à travers un réseau produit une interférence constructive à certains angles seulement, selon la longueur d'onde de la lumière. On peut obtenir le même résultat pour de la lumière réfléchie, comme on peut le voir sur la photographie en ouverture de chapitre : un disque Blu-ray est composé d'un grand nombre de petites aspérités, ce qui permet de coder des informations. Ces aspérités sont très rapprochées. La lumière réfléchie subit une interférence constructive pour la lumière bleue à un certain angle et pour la lumière verte à un autre angle.

8.1 Les figures de diffraction

La diffraction est causée par la déformation des fronts d'onde lorsque ceux-ci rencontrent un obstacle. En plaçant un écran derrière un trombone éclairé par un laser, on obtient la photographie de la figure 8.1. On remarque, tout près de la zone d'ombre, une figure complexe de franges brillantes et de franges sombres, et non simplement une ombre bien définie. C'est une *figure de diffraction*. Les fronts d'onde contournent l'objet et se superposent, ce qui produit des interférences constructives et des interférences destructives.

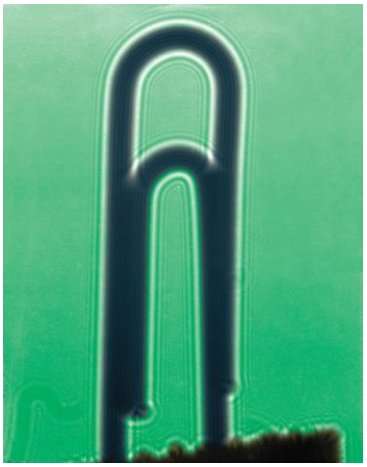


FIGURE 8.1
La figure de diffraction produite par un trombone éclairé par un laser

Vous pouvez observer des figures de diffraction lorsque vous être éblouis par une forte lumière. Dans cette situation, vous pouvez voir ce qui ressemble à de petits cheveux qui flottent dans votre champ de vision. Ces filaments, qu'on appelle des *flotteurs*, représentent des figures de diffraction qui apparaissent lorsque la lumière rencontre des dépôts cellulaires dans l'humeur aqueuse.

La figure de diffraction qu'on obtient dépend de l'objet éclairé. Pour cette raison, la diffraction est utile dans différents domaines, comme l'analyse d'empreintes digitales et la mesure des dimensions des cellules. Lorsque la source de lumière est près de l'objet éclairé, les fronts d'onde sont sphériques, et le résultat est une figure de diffraction complexe. C'est le domaine de la *diffraction de Fresnel*,

d'après le physicien français Augustin Fresnel (*voir la figure 8.2*). Fresnel était un ardent défenseur de la théorie ondulatoire de la lumière ; ses expériences sur la diffraction, l'interférence ainsi que la polarisation ont permis à cette théorie d'être acceptée au 19e siècle.

La figure de diffraction est plus simple lorsque l'objet est éloigné de la source et qu'on observe la figure de diffraction à un endroit éloigné de l'objet. C'est la *diffraction de Fraunhofer*. Dans ce cas, la lumière est une onde plane. Cette désignation vient du physicien et opticien allemand Joseph von Fraunhofer (1787-1826), qui a inventé le spectroscope et qui a étudié les raies d'absorption du Soleil à l'aide de réseaux de diffraction. Dans ce volume, nous limitons notre étude à la diffraction de Fraunhofer.

FIGURE 8.2
Augustin Fresnel (1788-1827), physicien français

8.2 La diffraction par une fente étroite

Pour commencer l'étude de la diffraction, on éclaire une fente rectangulaire dont la largeur est a avec une lumière monochromatique ayant une longueur d'onde λ. On place un écran d'observation à une distance L. La figure 8.3 illustre le montage et la figure de diffraction. On observe sur l'écran une région centrale éclairée, qu'on appelle le *pic central*, et de chaque côté, des régions légèrement éclairées, qu'on appelle les *maximums secondaires*. Entre les régions éclairées, on observe des franges sombres, qui représentent les minimums de diffraction. On observe que plus la fente est étroite, plus le pic central est large.

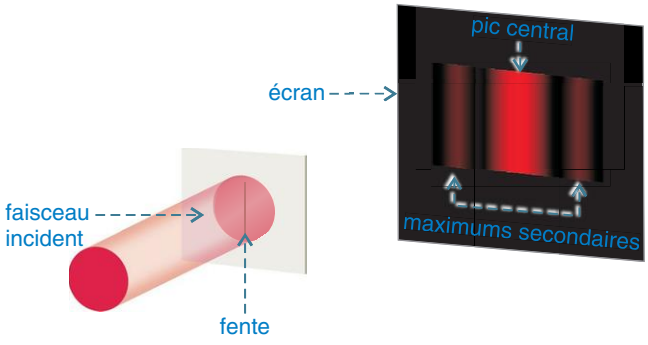


FIGURE 8.3
La figure de diffraction par une fente rectangulaire

La figure 8.4 montre une vue en plongée du montage, avec une fente de largeur a éclairée avec une onde de longueur d'onde λ. Comme dans le cas de

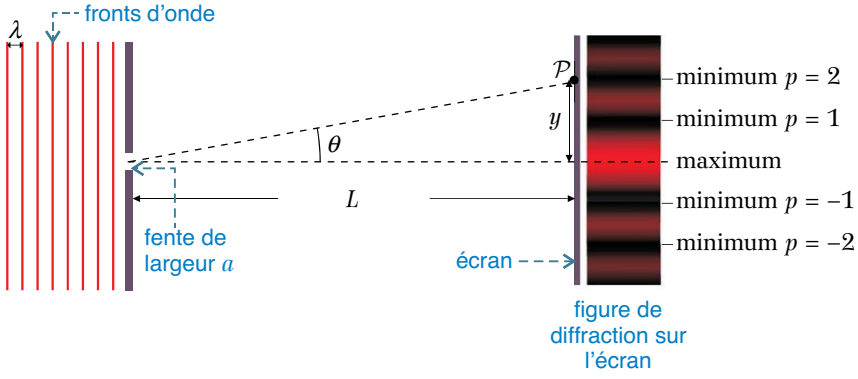


FIGURE 8.4
Une vue en plongée du montage de l'expérience sur la diffraction par une fente

l'expérience de Young, on dénote la position d'un point $\mathcal{P}$ sur l'écran à l'aide de la position angulaire θ,

$$\tan\theta = \frac{y}{L}\,, \tag{8.1}$$

où y est la distance entre le point $\mathcal{P}$ et le centre de la figure de diffraction.

Pour analyser la diffraction, on utilise le principe de Huygens : un front d'onde est remplacé par des petites sources d'ondes sphériques secondaires. À la figure 8.5, on a tracé huit sources d'ondes secondaires. La figure de diffraction observée sur l'écran est le résultat de la superposition de ces ondes, avec des interférences constructives (le point central et les maximums secondaires) et des interférences destructives (les minimums de diffraction).

On commence par analyser le point $\mathcal{P}$ sur l'écran vis-à-vis du centre de la fente, ce qui correspond à $\theta = 0$. Pour ce point, les ondes secondaires parcourent approximativement la même distance, comme le montre la figure 8.6. Les ondes secondaires sont en phase lorsqu'elles se superposent sur l'écran. L'interférence est constructive à ce point, de telle sorte qu'on obtient le maximum central de la figure de diffraction :

$$\theta = 0° \text{ (maximum central)}\,. \tag{8.2}$$

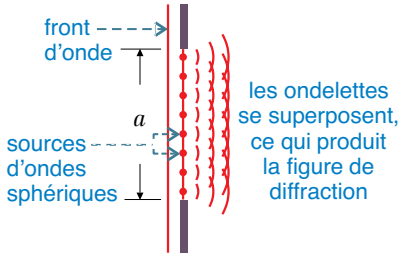


FIGURE 8.5
On remplace un front d'onde par huit sources d'onde sphériques.

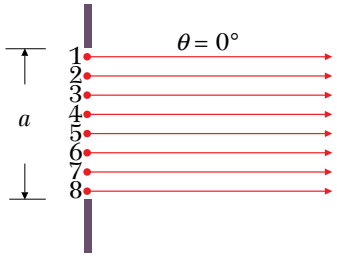


FIGURE 8.6
Pour $\theta = 0°$, les ondes secondaires sont en phase, car la différence de marche est nulle.

REMARQUE

Dans la figure 8.6, les rayons semblent parallèles, car la distance entre l'écran et la fente est beaucoup plus grande que la largeur de celle-ci. En fait, ces rayons convergent vers le point central de l'écran. Le même effet se produit aux figures 8.7 et 8.8, où les rayons semblent parallèles.

Pour les autres points sur l'écran, les ondes secondaires ne parcourent pas la même distance. Il y a un déphasage causé par la différence de marche. On calcule d'abord la différence de marche entre les ondes issues des sources 1 et 5. La différence de marche se calcule de la même façon que dans l'expérience de Young. Étant donné que la distance entre ces deux sources est de $a/2$, la différence de marche est

$$\Delta r_{15} = r_5 - r_1 = \frac{a}{2}\sin\theta\,.$$

On obtient un minimum lorsque les ondes sont en opposition de phase pour un point sur l'écran, ce qui se produit quand la différence de marche est de $\lambda/2$. On obtient alors

$$\frac{a}{2}\sin\theta = \frac{\lambda}{2}$$
$$a\sin\theta = \lambda\,. \tag{8.3}$$

La superposition de ces deux ondes produit donc une interférence destructive. Selon la figure 8.7, la différence de marche est la même entre les ondes issues des ondes 2 et 6, de même que pour les ondes issues des sources 3 et 7 et des ondes issues des sources 4 et 8. Les ondes s'annulent deux à deux lorsque l'angle θ correspond à la condition 8.3. Ce point est le premier minimum de diffraction.

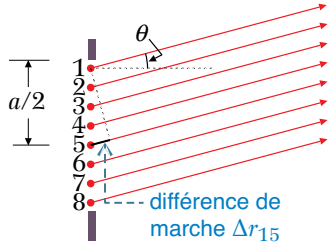


FIGURE 8.7
La différence de marche entre les ondes issues des sources 1 et 5 est $\Delta r_{15} = \frac{a}{2}\sin\theta$.

Pour obtenir le deuxième minimum, on doit de nouveau trouver une façon de regrouper les ondes de telle sorte qu'elles s'annulent deux à deux. Ceci est possible lorsque l'angle θ est tel que l'onde issue de la source 1 est en opposition de phase avec l'onde issue de la source 3, comme à la figure 8.8. Ces deux sources sont séparées par une distance $d = a/4$, et leur différence de marche est

$$\Delta r_{13} = r_3 - r_1 = \frac{a}{4}\sin\theta\,.$$

Cette différence de marche produit une interférence destructive si elle est égale à une demi-longueur d'onde :

$$\frac{a}{4}\sin\theta = \frac{\lambda}{2}$$
$$a\sin\theta = 2\lambda\,. \tag{8.4}$$

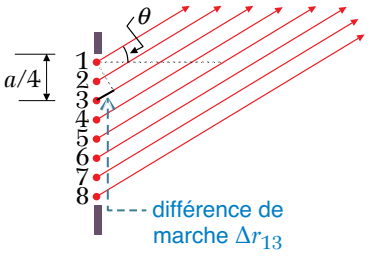


FIGURE 8.8
La différence de marche entre les ondes issues des sources 1 et 3 est $\Delta r_{13} = \frac{a}{4}\sin\theta$.

La même différence de marche sépare les ondes issues des sources 2 et 4, de même qu'entre les sources 5 et 7 et les sources 6 et 8. Les ondes s'annulent deux à deux, de telle sorte que l'interférence est destructive lorsque l'angle θ respecte la condition 8.4. C'est bien le deuxième minimum de diffraction.

On peut généraliser les équations 8.3 et 8.4 à n'importe quel minimum de diffraction :

$$a\sin\theta = p\lambda \qquad (p = \pm 1, \pm 2, \ldots)\,, \tag{8.5}$$

Minimums de diffraction

où p est un entier non nul, et $-90° \leq \theta \leq 90°$.

REMARQUE

L'entier $p = 0$ correspond à $\theta = 0$, le centre de la figure de diffraction, où il y a le maximum de diffraction, et non un minimum.

Les maximums secondaires se trouvent approximativement à mi-chemin entre deux minimums de diffraction. Le pic central correspond à la région centrale de l'écran où il y a de la lumière. Cette région s'étend entre le minimum $p = -1$ et $p = 1$. En insérant ces valeurs dans l'équation 8.5, on peut dire que le pic central est la région pour laquelle le sinus de l'angle θ répond à la condition suivante :

$$-\lambda < a\sin\theta < \lambda\,. \tag{8.6}$$

Défi animé 8.1
De quelle façon la présence d'un système à une fente modifie-t-elle l'intensité lumineuse sur un écran ?

On remarque, avec cette inégalité, que plus la largeur a de la fente est faible, plus l'angle correspondant au premier minimum est grand, ce qui produit un large pic central. De plus, si $a < \lambda$, tous les angles plus petits que 90° respectent l'inégalité. Ceci veut dire que le pic central prend tout l'espace. La fente est alors équivalente à une source ponctuelle.

MISE EN GARDE

On a utilisé l'approximation des petits angles $\sin\theta \approx \tan\theta$ dans l'expérience de Young pour les franges près du centre. Pour la diffraction, cette approximation n'est pas toujours valable, même pour les faibles valeurs de p. En effet, lorsque a est faible, le premier minimum peut se produire à un angle θ plus grand que 10°. Dans certaines situations, on peut poser l'hypothèse que l'angle est petit. Il faut alors vérifier, à la fin du problème, si l'hypothèse est respectée et si l'approximation est valable.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 8.1

On éclaire une fente rectangulaire avec une lumière rouge. On observe sur un écran la figure de diffraction, avec le pic central et les maximums secondaires. On remplace la lumière par une lumière verte, sans changer les autres paramètres de l'expérience.

a. Comment la largeur du pic central varie-t-elle ?

b. Comment les maximums secondaires se déplacent-ils ?

EXEMPLE 8.1 La diffraction par une fente

La lumière d'un laser à hélium-néon ($\lambda = 632{,}8$ nm) passe à travers une fente rectangulaire. On place un écran à une distance de 1,70 m de la fente. Le pic central a une largeur de 12,6 cm. Quelle est la largeur de la fente ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Le pic central est la région située entre les minimums de diffraction d'ordre $p = 1$ et $p = -1$.

Connues	Inconnue
$\lambda = 632{,}8$ nm	a
$L = 1{,}70$ m	
$y_1 - y_{-1} = 0{,}126$ m	

La figure de diffraction est symétrique, ce qui implique que la distance entre le centre de la figure et le premier minimum est

$$y_1 = \frac{0{,}126\text{ m}}{2} = 0{,}0630\text{ m}. \qquad \text{(i)}$$

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 8.5, qui permet de calculer l'angle des minimums de diffraction :

$$a\sin\theta = p\lambda, \qquad \text{(ii)}$$

où θ est relié à y par l'équation 8.1 :

$$\tan\theta = \frac{y}{L}. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous pouvons utiliser l'approximation des petits angles ($\tan\theta \approx \sin\theta$), étant donné que y est de l'ordre du centimètre et que L est de l'ordre du mètre. Nous obtenons alors, en insérant l'équation (iii) dans l'équation (ii) pour l'ordre $p = 1$,

$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a} \approx \frac{y_1}{L}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\lambda L}{y_1}$$

$$a = \frac{632{,}8\times10^{-9}\text{ m}\times 1{,}70\text{ m}}{0{,}0630\text{ m}}$$

$$a = 1{,}708\times10^{-5}\text{ m} = 17{,}1\,\mu\text{m}. \qquad \text{(réponse)}$$

REMARQUE

Nous aurions pu faire le calcul sans l'approximation des petits angles. Le résultat aurait été $a = 17{,}09\ \mu m = 17{,}1\ \mu m$, ce qui est le même résultat que la réponse, étant donné que celle-ci est écrite avec trois chiffres significatifs.

Valider la réponse

Nous obtenons une petite largeur, mais qui est quand même plus grande que la longueur d'onde de la lumière. Toutes les longueurs ont été exprimées en mètres, de telle sorte que le résultat est bien exprimé en mètres.

8.3 L'irradiance de la figure de diffraction

Pour obtenir l'irradiance pour un point sur l'écran, on doit d'abord calculer l'amplitude du champ résultant pour ce point. Ainsi, on doit calculer la somme des amplitudes issues d'un grand nombre d'ondes, qui sont produites par des sources d'ondes secondaires du modèle de Huygens. Soit une fente de largeur a éclairée par une lumière ayant une longueur d'onde λ, comme le montre la figure 8.9. L'irradiance, pour un point sur l'écran à un angle θ par rapport au centre de la fente, est

$$I = I_{max}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2, \tag{8.7}$$

où I_{max} représente l'irradiance au centre de la figure de diffraction. Le paramètre α est relié au déphasage des points aux extrémités de la fente :

$$\alpha = \frac{\Delta\Phi}{2} = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}. \tag{8.8}$$

Ce paramètre se mesure en radians.

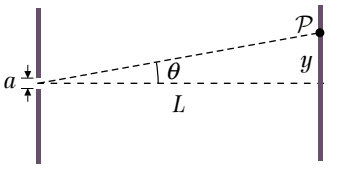


FIGURE 8.9
Un point $\mathcal{P}$ sur l'écran est donné par l'angle θ.

Comme le montre la figure 8.10, l'irradiance est maximale à $\alpha = 0$ rad, ce qui correspond au centre de l'écran ($\theta = 0°$). L'irradiance diminue ensuite rapidement de chaque côté de $\alpha = 0$ rad. On remarque ensuite les minimums de diffraction, où $I = 0$ et entre ces minimums, la fonction passe par des maximums secondaires, où l'irradiance demeure faible.

On peut analyser quantativement la fonction de l'irradiance en fonction du paramètre α. D'abord, le point de l'écran vis-à-vis du centre de la fente est représenté par $\theta = 0°$, ce qui correspond à $\alpha = 0$ rad. À cet endroit, $I = I_{max}$, car $(\sin\alpha)/\alpha$ tend vers 1 lorsque α tend vers 0.

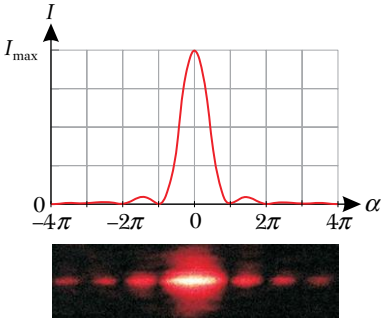


FIGURE 8.10
L'irradiance en fonction du paramètre α pour la diffraction par une fente rectangulaire accompagnée de la figure de diffraction observée sur l'écran.

Les minimums de diffraction se retrouvent aux endroits où $I = 0$. Ceci se produit lorsque $\sin\alpha = 0$ (à l'exception de $\alpha = 0$ rad) :

$$\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = p\pi \quad (p = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$
$$\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = p\pi$$
$$a\sin\theta = p\lambda \quad (p = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

C'est bien la position angulaire des minimums de diffraction, donnée par l'équation 8.5.

Pour obtenir la position des maximums, on doit dériver l'équation 8.7 par rapport à α et égaler le résultat à zéro. La dérivée est

$$\frac{dI}{d\alpha} = 2I_{max}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\left[\frac{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{\alpha^2}\right].$$

La dérivée est nulle lorsque $\sin\alpha = 0$, ce qui correspond aux minimums déjà calculés. Pour obtenir les maximums, il faut que le numérateur de la partie entre crochets soit nul :

$$\alpha\cos\alpha - \sin\alpha = 0$$

$$\alpha = \tan\alpha\,. \tag{8.9}$$

C'est une équation qui ne peut être résolue de façon algébrique. On ne peut que trouver une solution approchée à l'aide d'une méthode graphique ou de méthodes numériques. On trouve

$$\alpha = 0,\ \pm 1{,}430\pi,\ \pm 2{,}459\pi,\ \ldots \tag{8.10}$$

On trouve la position angulaire des maximums en insérant l'équation 8.8 dans l'équation 8.10 :

$$\frac{a}{\lambda}\sin\theta = 0,\ \pm 1{,}430,\ \pm 2{,}459,\ \ldots \tag{8.11}$$

On trouve la position centrale $\theta = 0°$ comme maximum. Tel qu'on l'a indiqué précédemment, les maximums secondaires se retrouvent approximativement à mi-chemin entre deux minimums de diffraction. L'équation précédente montre que les maximums secondaires sont légèrement décalés vers le centre de la figure de diffraction par rapport à la position à mi-chemin entre deux minimums.

La figure 8.11 montre la figure d'irradiance en fonction de la position angulaire θ d'un point sur l'écran pour quatre fentes étroites. Pour $a = 50\lambda$, le pic central est étroit, et les maximums secondaires se retrouvent près du centre. À mesure

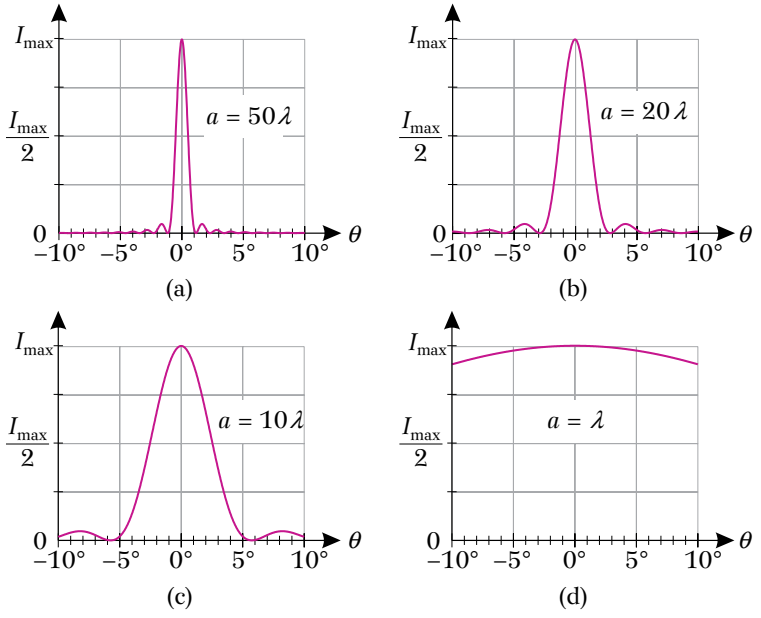


FIGURE 8.11

L'irradiance en fonction de la position angulaire sur l'écran pour quatre valeurs de la largeur de la fente : (a) $a = 50\lambda$; (b) $a = 20\lambda$; (c) $a = 10\lambda$; (d) $a = \lambda$.

que la fente devient plus étroite, le pic central s'élargit, et les maximums secondaires s'éloignent du centre. Quand $a = \lambda$, l'irradiance diminue à peine lorsqu'on s'éloigne du centre. Pour cette largeur, le premier minimum se retrouve à 90°, ce qui veut dire que tout l'écran est éclairé. L'étalement de la lumière est total pour une fente ayant une largeur égale ou inférieure à la longueur d'onde.

MISE EN GARDE

Dans l'équation 8.8, l'angle θ est habituellement exprimé en degrés, car c'est un angle qu'on mesure avec un rapporteur d'angles. Par contre, α est une phase et s'exprime toujours en radians. Vous devez être prudents lorsque vous utilisez une calculatrice pour calculer des fonctions trigonométriques.

EXEMPLE 8.2 L'irradiance à 7,00°

On éclaire une fente rectangulaire ayant une largeur de 2,50 µm avec de la lumière jaune, dont la longueur d'onde est de 589 nm. Calculez le rapport I/I_{max} pour un point sur l'écran dont la position angulaire est de 7,00° par rapport au centre de la figure de diffraction.

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$a = 2{,}50$ µm	I/I_{max}
$\lambda = 589$ nm	
$\theta = 7{,}00°$	

Identifier la clé

La clé est l'équation 8.7 :

$$I = I_{max}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2, \qquad \text{(i)}$$

où le paramètre α est donné par l'équation 8.8 :

$$\alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord le facteur α en insérant les valeurs dans l'équation (ii) :

$$\alpha = \frac{\pi \times 2{,}50 \times 10^{-6}\ \text{m}\ \sin(7{,}00°)}{589 \times 10^{-9}\ \text{m}} = 0{,}517\pi$$
$$= 1{,}625\ \text{rad}. \qquad \text{(iii)}$$

Nous calculons ensuite I/I_{max} à l'aide de l'équation (i) :

$$\frac{I}{I_{max}} = \left[\frac{\sin(1{,}625\ \text{rad})}{1{,}625\ \text{rad}}\right]^2 = 0{,}378. \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le paramètre α a bien été exprimé en radians pour pouvoir calculer le rapport I/I_{max}. Nous remarquons que le point est compris dans le pic central, car $\alpha < \pi$.

8.4 La diffraction par une ouverture circulaire

La plupart des instruments d'optique sont constitués d'éléments ayant une ouverture circulaire. Les lentilles qu'on utilise dans les appareils photo, les microscopes et les télescopes sont habituellement circulaires. De même, l'œil a une ouverture circulaire, la pupille. Au chapitre 6, nous avons analysé la formation des images par ces instruments en supposant que la lumière se déplace en ligne droite. Dans les faits, la lumière subit une diffraction en entrant dans une ouverture circulaire, car les fronts d'onde sont déformés par l'ouverture. L'image formée par un instrument correspond à une figure de diffraction de

l'ouverture. Pour cette raison, il est important d'étudier la diffraction produite par une ouverture circulaire.

Prenons un faisceau lumineux ayant une longueur d'onde λ qui rencontre une ouverture circulaire, dont le diamètre est D. On place un écran derrière l'ouverture, comme le montre la figure 8.12. On observe une figure de diffraction, constituée d'un disque très lumineux au centre (le pic central), qui est aussi appelé la *tache d'Airy*, et de cercles concentriques moins intenses (les maximums secondaires). Entre les maximums, on observe des cercles sombres (les franges sombres).

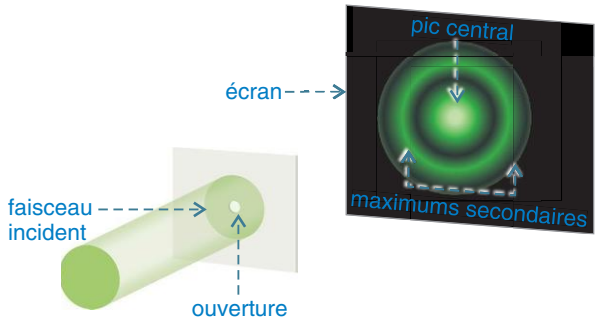


FIGURE 8.12
La lumière verte est diffractée en passant par une ouverture circulaire.

Lorsqu'elle passe par l'ouverture circulaire, la lumière s'étale en hauteur et en largeur, ce qui forme une figure de diffraction circulaire. La figure 8.13 montre une vue en plongée du montage, avec l'irradiance pour les points sur l'écran. Le centre de la figure $\theta = 0°$ est le point le plus brillant. Une analyse mathématique avancée, qui dépasse le cadre de ce volume, permet d'obtenir la position angulaire des minimums. Le premier minimum est obtenu par l'équation

Premier minimum (ouverture circulaire)

$$\sin\theta_1 = \frac{1{,}22\lambda}{D}, \tag{8.12}$$

où D est le diamètre de l'ouverture et λ, la longueur d'onde de la lumière. La position des premiers minimums de chaque côté du maximum central définit la largeur angulaire du pic central $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_{-1} = 2\theta_1$. Comme dans le cas de la diffraction par une fente rectangulaire, la largeur du pic central augmente lorsque la grandeur de l'ouverture est réduite.

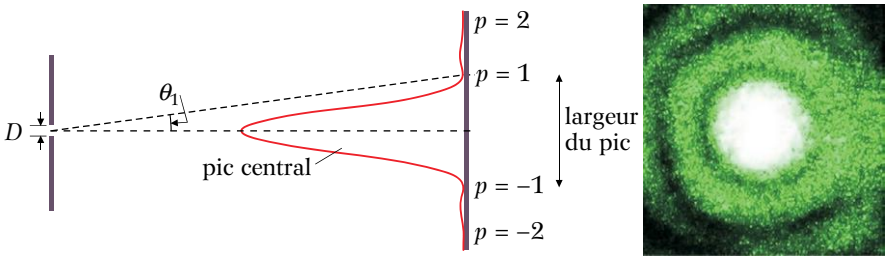


FIGURE 8.13
Une vue en plongée du montage avec l'irradiance et la figure de diffraction pour une ouverture circulaire

EXEMPLE 8.3 Le diamètre du pic central

Un laser émet une lumière dont la longueur d'onde est de 510 nm. Cette lumière passe à travers une ouverture circulaire dont le diamètre est de 0,400 mm. On place un écran à une distance de 3,00 m de la fente. Quel est le diamètre du pic central sur l'écran ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 8.14 illustre le montage et le pic central de diffraction.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$D = 4{,}00 \times 10^{-4}$ m	D_{pic}
$\lambda = 510$ nm	
$L = 3{,}00$ m	

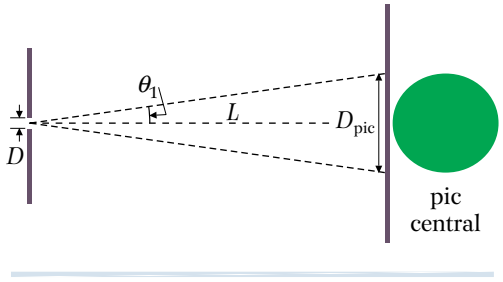


FIGURE 8.14
Le montage et le pic central pour l'exemple 8.3

Selon la figure 8.14, le diamètre du pic central se calcule à partir de la position angulaire du premier minimum :

$$\tan\theta_1 = \frac{D_{\text{pic}}/2}{L} \Rightarrow D_{\text{pic}} = 2L\tan\theta_1 . \qquad \text{(i)}$$

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 8.12, qui permet de calculer l'angle du premier minimum :

$$\sin\theta_1 = \frac{1{,}22\lambda}{D} . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'angle θ_1 :

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{1{,}22 \times 510 \times 10^{-9}\ \text{m}}{4{,}00 \times 10^{-4}\ \text{m}}\right) = 0{,}089\,12^\circ .$$

Nous calculons ensuite le diamètre du pic central à l'aide de l'équation (i) :

$$D_{\text{pic}} = 2 \times 3{,}00\ \text{m} \tan(0{,}089\,12^\circ) = 0{,}009\,33\ \text{m}$$
$$D_{\text{pic}} = 9{,}33\ \text{mm} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le diamètre du pic central est petit, car le diamètre de la fente est beaucoup plus grand que la longueur d'onde de la lumière. La diffraction est faible. Remarquez que nous aurions pu utiliser l'approximation des petits angles $\sin\theta \approx \tan\theta$, car l'angle θ_1 est très faible.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 8.2

Une lumière blanche éclaire une ouverture circulaire, et la figure de diffraction est observée sur un écran. La figure comprend un disque central brillant et des anneaux moins intenses, qui représentent les maximums secondaires. Quelle couleur apparaît sur le bord intérieur du premier anneau ?

8.5 Le pouvoir de résolution des instruments d'optique

À la section 6.7, nous avons étudié les instruments d'optique en utilisant l'approximation de l'optique géométrique. En supposant que la lumière se déplaçait en ligne droite, nous avons analysé la formation des images et calculé le

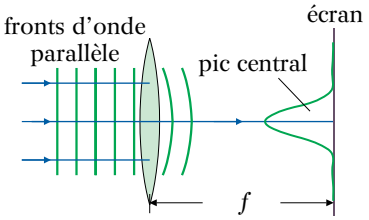


FIGURE 8.15
Un faisceau parallèle est incident sur une lentille. On observe une figure de diffraction sur l'écran placé au foyer image.

grossissement. Étant donné que la lumière est en réalité une onde, de la diffraction se produit lorsque la lumière traverse une lentille ou frappe un miroir, ce qui établit une limite pour pouvoir distinguer clairement les objets.

Pour commencer l'analyse, on étudie un faisceau parallèle incident sur une lentille circulaire, comme le montre la figure 8.15. Selon les résultats obtenus à la section 6.5, la lumière est déviée vers le foyer image F_i. On place donc l'écran à une distance égale à la distance focale f de la lentille. En raison de la diffraction, la lumière ne forme pas un point au foyer, mais plutôt une figure de diffraction comme celle de la figure 8.13, avec un pic central et des maximums secondaires. La lumière ne forme pas un point mais un disque. Le diamètre du pic central dépend du diamètre de la lentille : plus le diamètre de la lentille est petit et plus le pic central est large.

On peut calculer le rayon du pic central à l'aide du résultat de la section 8.4. Le premier minimum se trouve à un angle θ_1, donné par l'équation 8.12 :

$$\sin\theta_1 = \frac{1{,}22\lambda}{D}. \tag{8.13}$$

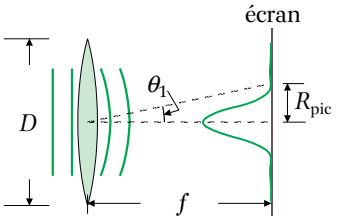


FIGURE 8.16
Le calcul du rayon du pic central

Cet angle est très faible, car le diamètre de la lentille est beaucoup plus grand que la longueur d'onde de la lumière (entre 380 nm et 800 nm pour la lumière visible). On peut alors utiliser l'approximation des petits angles $\sin\theta \approx \tan\theta$.

De plus, selon la figure 8.16, $\tan\theta_1 = R_{pic}/f$. En isolant le rayon du pic central, on obtient

$$R_{pic} = \frac{1{,}22\lambda f}{D}. \tag{8.14}$$

Regardons maintenant la situation lorsque la lumière issue de deux objets différents frappe la lentille. La figure 8.17 montre un seul rayon issu de chaque objet pour ne pas surcharger la figure. On a choisi le rayon qui frappe le centre de la lentille et qui n'est pas dévié, selon le tracé des rayons principaux. Les rayons sont séparés par un angle β. On place de nouveau un écran à une distance f. On observe sur celui-ci la superposition des figures de diffraction. La figure 8.17 montre deux situations possibles. Lorsque l'angle β est suffisamment grand, les deux pics centraux sont bien séparés, et on observe deux images bien distinctes (*voir la figure 8.17a*). Cependant, lorsque l'angle β est trop petit, les deux pics centraux se superposent, comme le montre la figure 8.17b. Dans ce dernier cas, on ne distingue pas deux images, mais seulement une seule.

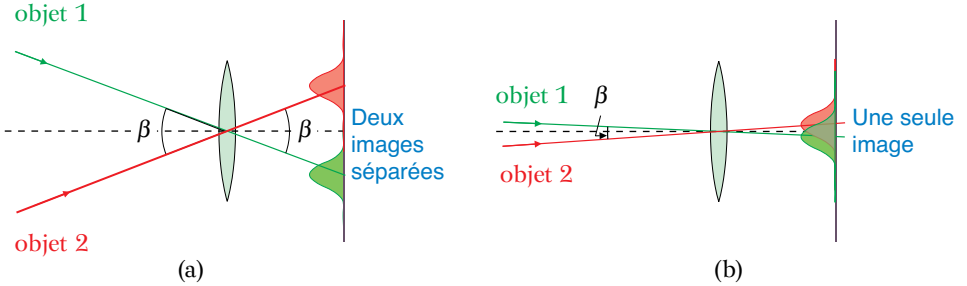


FIGURE 8.17
Deux objets éloignés sont observés à l'aide d'une lentille. (a) La séparation angulaire β est assez grande pour que les images soient séparées. (b) La séparation angulaire β est trop faible, et on observe une seule image.

On peut se demander quelle est la séparation angulaire minimale pour que les deux images puissent être séparées, c'est-à-dire qu'elles soient distinctes. Cet angle correspond à θ_1, l'angle du premier minimum de diffraction, de telle sorte que le maximum de diffraction de l'image 1 arrive vis-à-vis du premier minimum de diffraction de l'image 2. C'est le *critère de Rayleigh* :

$$\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D}, \tag{8.15}$$

Critère de Rayleigh pour le pouvoir de résolution

où on a utilisé l'approximation des petits angles $\sin\theta \approx \theta$, étant donné que cet angle est très faible. Ceci fait que l'équation 8.15 donne la séparation minimale en radians.

L'angle θ_R est appelé le *pouvoir de résolution* de l'instrument. Dans le cas de l'œil, le diamètre qui entre en ligne de compte est celui de la pupille. Le pouvoir de résolution est meilleur lorsque la lumière est faible, de telle sorte que la pupille a le plus gros diamètre. Si deux points lumineux ont une séparation angulaire plus faible que θ_R, ils produisent des images qui se superposent sur la rétine. Lorsque vous regardez un écran de télévision, l'image couleur est produite seulement par des pixels rouges, verts et bleus. La séparation angulaire des pixels est plus petite que θ_R, de telle sorte que vous observez une seule image formée par les couleurs mélangées.

Le pouvoir de résolution est meilleur pour un instrument dont l'ouverture est la plus grande possible. C'est une des raisons pour lesquelles on construit des télescopes de grand diamètre (cela augmente aussi la quantité de lumière qui frappe le télescope). Les radiotélescopes sont des appareils qui détectent des ondes radio dont la longueur d'onde est beaucoup plus grande que celle de la lumière visible. Pour avoir la même résolution qu'un télescope optique, un radiotélescope doit avoir un diamètre beaucoup plus grand.

Le pouvoir de résolution est aussi un facteur important dans le cas des microscopes. Pour distinguer des points très rapprochés, θ_R doit être le plus faible possible, sans égard au grossissement utilisé. Pour cette raison, certains microscopes fonctionnent avec de la lumière violette ou même avec de l'ultraviolet. En diminuant la longueur d'onde, on diminue θ_R.

EXEMPLE 8.4 Le pouvoir de résolution du télescope Hubble

Le télescope spatial Hubble possède un miroir de 2,40 m de diamètre dont la distance focale est de 57,6 m.

a. Quel est son pouvoir de résolution à une longueur d'onde de 550 nm, selon le critère de Rayleigh ?

b. Pour quelle distance maximale pourrait-il distinguer une étoile et une planète, celle-ci étant située à une distance de 1,0 ua de l'étoile ? Exprimez votre réponse en années-lumière.

c. Quelle serait la distance entre les images de la planète et de l'étoile sur un détecteur placé au foyer du miroir principal ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues
$D = 2{,}40$ m	$\lambda = 550$ nm	θ_R
$f = 57{,}6$ m	$d = 1{,}00$ ua	$d, \Delta x$

SOLUTION a.

Identifier la clé

Nous pouvons résoudre ce problème à l'aide du critère de Rayleigh, obtenu à l'aide de l'équation 8.15 :

$$\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D}, \qquad \text{(i)}$$

ce qui donne un angle en radians.

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\theta_R = \frac{1{,}22 \times 550 \times 10^{-9}\ \text{m}}{2{,}40\ \text{m}} = 2{,}796 \times 10^{-7}\ \text{rad}$$

$$\theta_R = 2{,}80 \times 10^{-7}\ \text{rad}. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Illustrer la situation

La figure 8.18 illustre les rayons lumineux issus des deux sources lumineuses frappant le centre du miroir. L'angle entre les deux rayons est θ_R.

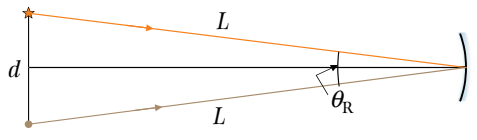


FIGURE 8.18
Le schéma de la situation pour l'exemple 8.4b

Décortiquer le problème

La figure 8.18 montre un triangle isocèle, que nous pouvons diviser en deux triangles rectangles. Pour un triangle rectangle, la hauteur est $d/2$ et l'angle à droite, $\theta_R/2$.

En se référant à l'annexe C, nous exprimons l'unité astronomique et l'année-lumière en mètres :

$$1\ \text{ua} = 1{,}496 \times 10^{11}\ \text{m}$$
$$1\ \text{al} = 9{,}461 \times 10^{15}\ \text{m}.$$

Identifier la clé

Selon la trigonométrie et l'approximation des petits angles ($\sin\theta \approx \theta$),

$$\sin\left(\frac{\theta_R}{2}\right) = \frac{d/2}{L}$$
$$\frac{\theta_R}{2} \approx \frac{d/2}{L}$$
$$\Rightarrow L = \frac{d}{\theta_R}. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs dans l'équation (ii) :

$$L = \frac{1\ \text{ua} \times 1{,}496 \times 10^{11}\ \text{m/ua}}{2{,}796 \times 10^{-7}\ \text{rad}}$$

$$L = 5{,}351 \times 10^{17}\ \text{m} \times \frac{1\ \text{al}}{9{,}461 \times 10^{15}\ \text{m}} = 56{,}6\ \text{al}.$$

(réponse)

SOLUTION c.

Illustrer la situation

La figure 8.19 montre les figures de diffraction produites lorsque la lumière frappe le miroir. L'angle entre les deux centres de pics centraux est de nouveau θ_R.

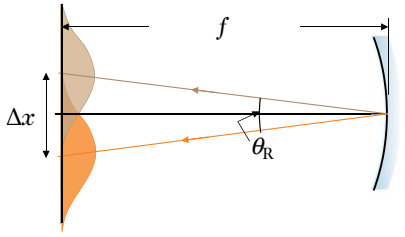


FIGURE 8.19
Le schéma de la situation pour l'exemple 8.4c

Décortiquer le problème

Nous obtenons de nouveau un triangle isocèle, qui peut être considéré comme deux triangles rectangles, chacun ayant une hauteur $\Delta x/2$ et l'angle $\theta_R/2$.

Identifier la clé

La **clé** est de nouveau la trigonométrie, avec l'approximation des petits angles :

$$\frac{\Delta x/2}{f} = \tan\left(\frac{\theta_R}{2}\right) \approx \frac{\theta_R}{2}$$
$$\Rightarrow \Delta x = f\theta_R. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs :

$$\Delta x = 57{,}6\ \text{m} \times 2{,}796 \times 10^{-7}\ \text{rad} = 16{,}1\ \mu\text{m}.$$

(réponse)

Valider la réponse

L'ordre de grandeur des réponses semble correct. Il est clair que les pixels du détecteur doivent être plus petits que 16 µm pour que les images puissent être séparées dans l'appareil de mesure.

8.6 La diffraction par deux fentes

Lorsque nous avons étudié l'expérience de Young à la section 7.2, nous avons supposé que les fentes étaient très étroites, de telle sorte que la diffraction produisait un étalement complet de la lumière. Dans cette situation, l'irradiance produite par une fente varie de façon négligeable pour tous les points de l'écran. Ceci est correct si la largeur des fentes est semblable à la longueur d'onde de la lumière.

Habituellement, les fentes utilisées dans l'expérience de Young ont une largeur plus grande que la longueur d'onde de la lumière. L'irradiance produite par une fente est alors semblable à celle qui a été étudiée à la section 8.2 : il y a étalement de la lumière, avec des minimums de diffraction et des maximums secondaires. Le résultat est une figure d'interférence (avec des maximums et des minimums) dont l'irradiance varie d'un maximum à l'autre. La figure 8.20 illustre le graphique de l'irradiance en fonction de la position angulaire θ sur l'écran, avec ce qui est vu sur l'écran. On remarque que les maximums d'interférence sont de moins en moins intenses en s'éloignant du centre $\theta = 0°$.

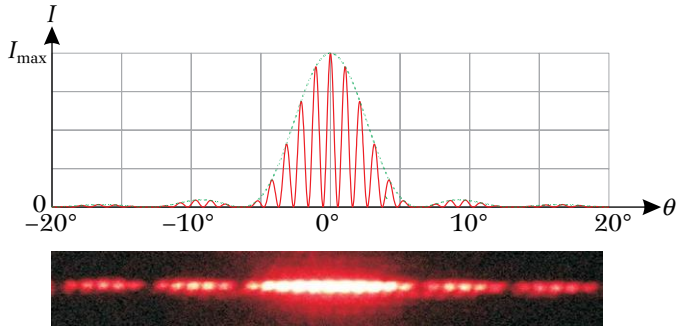


FIGURE 8.20
L'irradiance et la figure de diffraction produite par deux fentes, où $d = 30\lambda$ et $a = 5\lambda$

Soit deux fentes de largeur a séparées par une distance d. Les fentes sont éclairées par une lumière ayant une longueur d'onde λ, et on place un écran à une distance L. On dénote un point sur l'écran par la position angulaire θ ou par sa distance y par rapport au centre de la figure, de telle sorte que

$$\tan\theta = \frac{y}{L}. \tag{8.16}$$

On trouve l'expression de l'irradiance en multipliant l'irradiance de l'expérience de Young (*voir l'équation 7.27 de la page 252*) et l'irradiance pour la diffraction (*voir l'équation 8.7 de la page 275*) par une fente rectangulaire :

$$I = I_{max} \cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2, \tag{8.17}$$

où I_{max} représente l'irradiance au centre de l'écran (lorsque $\theta = 0°$). Les paramètres α et $\Delta\Phi$ sont reliés au déphasage pour la largeur d'une fente et pour le déphasage entre les deux fentes :

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda} \tag{8.18}$$

$$\alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}. \tag{8.19}$$

Les maximums d'interférence sont situés aux angles θ où $\Delta\Phi = 2\pi m_c$, ce qui correspond aux angles θ qui répondent à la condition :

$$d\sin\theta = m_c\lambda \quad (m_c = 0, \pm 1, \ldots)\,. \tag{8.20}$$

Les minimums d'interférence se produisent lorsque $\Delta\Phi = (2m_d + 1)\pi$, ce qui correspond aux angles :

$$d\sin\theta = \left(m_d + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m_d = 0, \pm 1, \ldots)\,. \tag{8.21}$$

Pour la diffraction, le maximum central se trouve à la position angulaire $\theta = 0°$, alors que les minimums se produisent lorsque

$$a\sin\theta = p\lambda \quad (p = \pm 1, \pm 2, \ldots)\,. \tag{8.22}$$

À la figure 8.20, on remarque que le sixième maximum d'interférence est absent. Cela se produit parce que ce maximum arrive exactement vis-à-vis du premier minimum de diffraction. La même chose se produit pour les maximums d'interférence d'ordre $p = -6$, $p = 12$, $p = -12$, ... On obtient ce résultat lorsque la distance entre les fentes est un multiple de la largeur des fentes (dans le présent cas, $d = 6a$).

EXEMPLE 8.5 Les maximums dans le pic central

On éclaire un système de deux fentes avec une lumière monochromatique. Les fentes ont une largeur de 40,0 µm, et elles sont séparées par une distance de 200 µm. Combien de franges brillantes observe-t-on dans le pic central de diffraction ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$a = 40{,}0$ µm $\quad d = 200$ µm	N

Identifier les clés

La première **clé** est que le pic central se situe entre les premiers minimums de diffraction ($p = -1$ et $p = +1$). Selon l'équation 8.6,

$$-\lambda < a\sin\theta < \lambda\,. \tag{i}$$

La deuxième **clé** est que les franges brillantes correspondent aux maximums d'interférence, donnés par l'équation 8.20 :

$$d\sin\theta = m_c\lambda \Rightarrow \sin\theta = \frac{m_c\lambda}{d}\,. \tag{ii}$$

Résoudre le problème

Nous insérons l'équation (ii) dans l'équation (i) :

$$-\lambda < \frac{am_c\lambda}{d} < \lambda$$

$$-\frac{d}{a} < m_c < \frac{d}{a}\,.$$

Comme $d/a = 200$ µm$/40{,}0$ µm $= 5{,}00$, nous obtenons l'inégalité :

$$-5{,}00 < m_c < 5{,}00\,, \tag{iii}$$

où m_c est un entier. Les valeurs possibles de m_c sont

$$m_c = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\,.$$

Donc,

il y a 9 franges brillantes. (réponse)

Valider la réponse

Nous remarquons que les maximums d'interférence $m_c = \pm 5$ ne font pas partie du pic central, car ils sont exactement vis-à-vis du premier minimum de diffraction. De plus, le résultat est indépendant de la longueur d'onde de la lumière. Si nous diminuons la longueur d'onde, cela rapproche les franges brillantes les unes des autres, mais en même temps, cela rend le pic central plus étroit.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 8.3

Dans deux expériences de la diffraction par deux fentes, on utilise la même source de lumière monochromatique et des fentes séparées par la même distance d. Dans la première expérience, on observe cinq franges brillantes dans le pic central, alors que dans la deuxième expérience, on mesure neuf franges brillantes dans le pic central de diffraction.

a. Dans quelle expérience la distance entre les franges est-elle la plus petite ?

b. Dans quelle expérience utilise-t-on des fentes plus étroites ?

8.7 Les réseaux de diffraction

À la section 7.2, nous avons vu qu'il est possible de mesurer la longueur d'onde de la lumière à l'aide de l'expérience de Young : on éclaire les deux fentes avec la lumière de longueur d'onde inconnue, et on place un écran à une distance L connue. On observe sur l'écran des franges brillantes, séparées par une distance Δy donnée par l'expression :

$$\Delta y = \frac{\lambda L}{d},$$

où d est la distance entre les fentes. En mesurant la distance entre les franges brillantes, on peut donc calculer la longueur d'onde. Le défaut de cette méthode est lié à la précision des mesures. En effet, les franges brillantes étant très rapprochées, il est difficile de mesurer cette distance avec précision.

Pour améliorer la situation, on peut utiliser des fentes plus rapprochées. Ceci produit des maximums plus éloignés, comme le montre la figure 8.21 pour trois valeurs de d en fonction de λ. En diminuant la distance d, la distance entre les franges augmente, mais celles-ci deviennent plus larges. Il est difficile de mesurer avec précision la distance entre le centre des franges.

Pour réduire la largeur des franges, on utilise un système constitué d'un grand nombre de fentes. Lorsqu'on augmente le nombre de fentes, le graphique de l'irradiance en fonction de la position angulaire devient plus complexe, avec des maximums principaux plus étroits et des petits maximums secondaires, comme

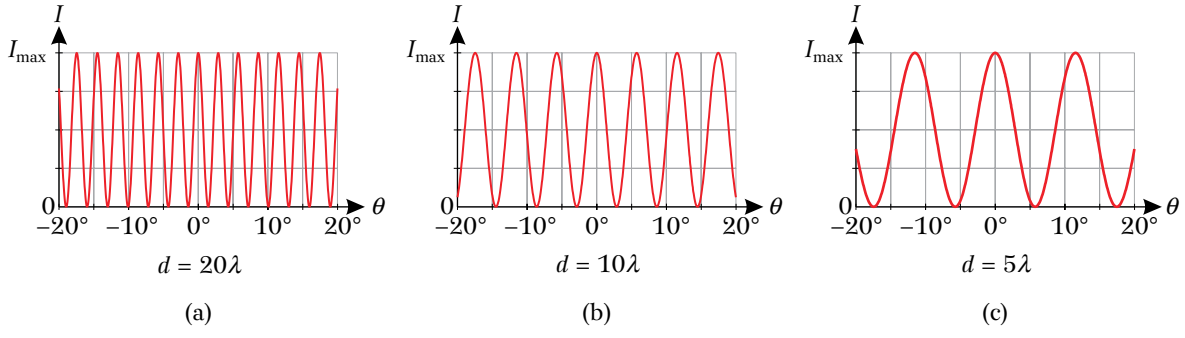


FIGURE 8.21

L'irradiance en fonction de la position angulaire dans le cas de l'interférence à travers deux fentes pour trois valeurs de la distance entre les fentes : (a) pour $d = 20\lambda$, les maximums sont rapprochés ; (b) pour $d = 10\lambda$, les maximums sont plus éloignés et plus larges ; (c) pour $d = 5\lambda$, les maximums sont très larges.

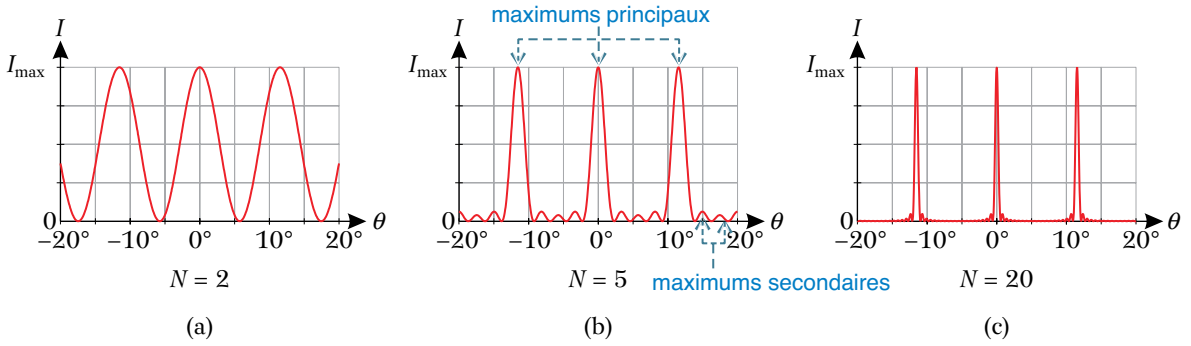


FIGURE 8.22

L'irradiance en fonction de la position angulaire dans le cas de l'interférence à travers un système de N fentes équidistantes : (a) pour $N = 2$, les maximums sont larges ; (b) pour $N = 5$, les maximums sont plus étroits, et il y a des maximums secondaires ; (c) pour $N = 20$, les maximums principaux sont très étroits, et les maximums secondaires sont très faibles.

l'illustre la figure 8.22b. Avec l'augmentation du nombre de fentes, les maximums deviennent très étroits, et les maximums secondaires ont une irradiance qui devient négligeable (*voir la figure 8.22c*).

Pour cette raison, on peut mesurer précisément la longueur d'onde d'une lumière en utilisant un *réseau de diffraction*. Ce dispositif consiste en un système contenant un très grand nombre de fentes équidistantes, de l'ordre de plusieurs milliers de fentes. Le *pas du réseau* correspond à la distance d entre deux fentes successives. Les fabricants de réseaux donnent habituellement n, le nombre de fentes par unité de longueur, par exemple le nombre de fentes par millimètre (aussi appelé le *nombre de lignes par millimètre*). Dans ce cas, on trouve le pas du réseau à l'aide de l'expression :

$$d = \frac{1}{n}. \tag{8.23}$$

La figure 8.23 montre un réseau éclairé par une onde plane. La lumière est diffractée par chaque ouverture. La superposition de toutes ces ondes produit des raies brillantes bien séparées. Ces raies correspondent à des positions d'interférence constructives entre les ondes issues des ouvertures.

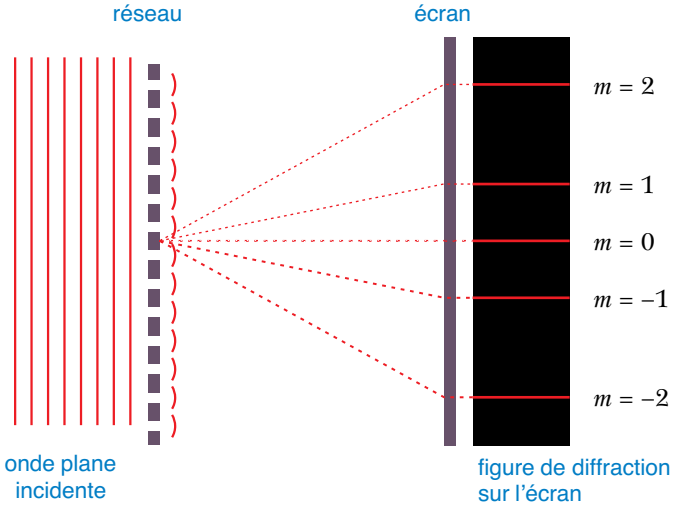


FIGURE 8.23

Un réseau de diffraction produit une figure de diffraction composée de raies bien définies et bien séparées.

Pour analyser la situation, on considère les ondes issues de quelques fentes, comme le montre la figure 8.24. On calcule la différence de marche entre deux ondes $\Delta r = d \sin\theta$. Il y a une interférence constructive lorsque cette différence de marche est un multiple de la longueur d'onde :

$$d \sin\theta = m\lambda \, . \qquad (8.24)$$

Maximums (réseaux)

Chaque valeur de m, qu'on appelle l'*ordre*, correspond à une raie brillante sur l'écran, comme le montre la figure 8.23. L'ordre $m = 0$ se situe au centre de la figure, et il correspond à une différence de marche nulle. Cette raie est présente au centre de l'écran, quelle que soit la longueur d'onde utilisée. On trouve ensuite de chaque côté les raies $m = \pm 1$. Selon l'équation 8.24, plus la longueur d'onde est grande et plus la raie se retrouve éloignée du centre. On retrouve ensuite les ordres supérieurs.

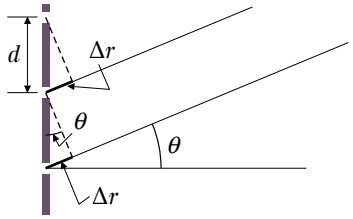


FIGURE 8.24
La différence de marche pour les ondes issues de deux fentes successives

MISE EN GARDE

On ne peut pas utiliser l'approximation des petits angles dans les expériences avec les réseaux, car l'angle θ peut être plus grand que 10°.

EXEMPLE 8.6 Un laser éclaire un réseau

Un laser éclaire un réseau de 300 fentes/mm. On place un écran à une distance de 50,0 cm du réseau. On observe sur l'écran des points lumineux, qui correspondent aux différents ordres de diffraction. Le premier ordre de diffraction se retrouve à une distance de 7,90 cm de l'ordre zéro.

a. Quelle est la longueur d'onde du laser ?
b. Quelle est la distance entre le deuxième ordre et le centre ?
c. Combien d'ordres positifs peut-on observer ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 8.25 illustre le schéma de la situation.

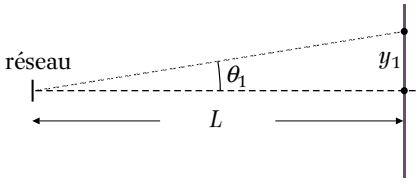


FIGURE 8.25
Le schéma de la situation pour l'exemple 8.6

Décortiquer le problème

Le pas du réseau est

$$d = \frac{1\text{ mm}}{300} = 3{,}333 \times 10^{-3}\text{ mm} = 3{,}33 \times 10^{-6}\text{ m} \, . \quad \text{(i)}$$

Connues	Inconnues
$L = 0{,}500$ m	λ
$y_1 = 0{,}079\,0$ m	y_2
	$m_{\max}$

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 8.24 pour l'ordre $m = 1$:

$$d \sin\theta_1 = \lambda \, , \qquad \text{(ii)}$$

où θ_1 est obtenu selon la géométrie illustrée à la figure 8.25 :

$$\tan\theta_1 = \frac{y_1}{L} \, . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'angle en remplaçant les valeurs dans l'équation (iii) :

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{0{,}0790\ \text{m}}{0{,}500\ \text{m}}\right) = 8{,}98° . \qquad \text{(iv)}$$

Nous calculons ensuite la longueur d'onde à l'aide de l'équation (ii) :

$$\lambda = 3{,}33 \times 10^{-6}\ \text{m}\ \sin(8{,}98°) = 5{,}202 \times 10^{-7}\ \text{m}$$
$$\lambda = 520\ \text{nm} . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

Pour l'ordre 2, l'équation 8.24 est

$$d \sin\theta_2 = 2\lambda .$$

Résoudre le problème

Nous calculons l'angle du deuxième ordre :

$$\sin\theta_2 = \frac{2 \times 5{,}202 \times 10^{-7}\,\text{m}}{3{,}333 \times 10^{-6}\ \text{m}} = 0{,}3121$$
$$\theta_2 = \arcsin(0{,}3121) = 18{,}19° . \qquad \text{(v)}$$

Nous calculons ensuite la distance y_2 en adaptant l'équation (iii) au deuxième ordre :

$$\tan\theta_2 = \frac{y_2}{L} \Rightarrow y_2 = L\tan\theta_2$$
$$y_2 = 0{,}500\ \text{m}\tan(18{,}19°) = 16{,}4\ \text{cm} . \text{ (réponse)}$$

SOLUTION c.

Identifier la clé

La **clé** est que dans l'équation 8.24, $\sin\theta \leq 1$, ce qui correspond à un angle qui ne dépasse pas 90°. Cela implique l'inégalité suivante :

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{d} \Rightarrow \frac{m\lambda}{d} \leq 1$$
$$m \leq \frac{d}{\lambda}$$
$$m \leq \frac{3{,}333 \times 10^{-6}\ \text{m}}{5{,}202 \times 10^{-7}\ \text{m}}$$
$$m \leq 6{,}40 .$$

Étant donné que m est un entier, sa valeur maximale est 6. Donc,

il y a 6 ordres positifs. (réponse)

Valider la réponse

La longueur d'onde obtenue est bien dans le domaine du visible ; on peut ainsi observer avec les yeux. Le deuxième ordre est plus éloigné que le premier ordre. La réponse obtenue à la partie **c.** a du sens.

Le spectromètre à réseau

Lorsqu'on éclaire un réseau avec une lumière polychromatique, le réseau produit la raie centrale avec toutes les couleurs superposées, puis des raies de chaque côté où la lumière est décomposée selon son spectre. Par exemple, la figure 8.26 montre ce qu'on observe sur l'écran lorsqu'on éclaire un réseau de 600 fentes/mm avec une lampe à hydrogène. Cette lumière ne contient que quatre longueurs d'onde visibles (rouge, cyan, bleu-violet et violette). Le résultat est une raie magenta au centre (l'ordre 0 avec les quatre longueurs d'onde superposées), puis des raies violette, bleu-violet, cyan et rouge formant l'ordre 1 et l'ordre –1 de chaque côté. Le spectre se répète selon l'ordre 2 et –2, alors que les ordres –3 et 3 ne contiennent que trois raies. De plus, l'ordre 2 et l'ordre 3 se chevauchent : la raie rouge du deuxième ordre est plus éloignée du centre de la figure que la raie violette et que la raie bleu-violet du troisième ordre.

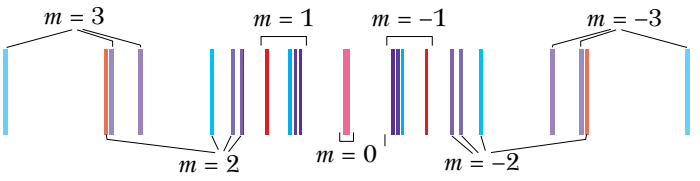


FIGURE 8.26

La figure de diffraction que produit un réseau éclairé par une lumière à hydrogène

Nous verrons au chapitre 12 que chaque atome émet un spectre de longueurs d'onde caractéristique lorsqu'il est soumis à une haute tension dans un tube à décharges. Pour mesurer précisément les longueurs d'onde, on place un réseau sur un *spectromètre*, comme le montre la figure 8.27. La lumière provenant d'une substance éclaire le réseau placé au centre du plateau. Le réseau décompose la lumière selon son spectre, qui est observé au moyen d'une lunette. L'angle θ est mesuré précisément pour une raie donnée, et la longueur d'onde correspondante est calculée à partir de l'équation 8.24.

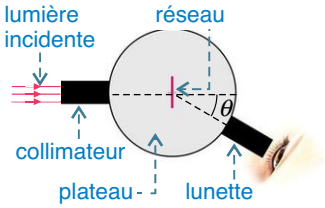


FIGURE 8.27
Un spectromètre à réseau

On a étudié les réseaux au travers desquels passe la lumière. Il est aussi possible de fabriquer des réseaux qui fonctionnent par réflexion, comme le montre la figure 8.28. Le réseau est alors une surface réfléchissante munie d'un grand nombre de rainures. Lorsqu'on éclaire le réseau avec de la lumière, les rainures se comportent comme des sources ponctuelles. La superposition des ondes donne une figure de diffraction identique à celle de la figure 8.26 : la raie d'ordre 0 au centre (selon la loi de la réflexion $\theta' = \theta = 0°$), puis de chaque côté, des ordres supérieurs.

Les disques numériques comme les CD, les DVD et les Blu-ray se comportent comme des réseaux de diffraction lorsqu'on les éclaire avec de la lumière. Ces disques sont composés d'une surface réfléchissante dans laquelle on a gravé des millions de petits trous au moyen d'un laser. La présence ou non d'un trou à un endroit particulier correspond à un 0 ou à un 1 dans le codage de l'information. La distance entre les rainures dépend du type de disque. Cette distance est de 1,6 µm dans le cas des CD, de 0,74 µm pour les DVD et de 0,30 µm pour les Blu-ray. En ayant une plus petite distance entre les rainures, un Blu-ray peut enregistrer une plus grande quantité d'information que les DVD et les CD. Les lecteurs de Blu-ray utilisent un laser de courte longueur d'onde ($\lambda = 405$ nm, de couleur violette et non bleue, comme le nom semble l'indiquer).

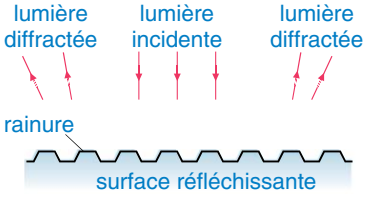


FIGURE 8.28
Une surface réfléchissante munie de rainures se comporte comme un réseau de diffraction.

Il est intéressant de comparer la lumière réfléchie par un CD à celle qui l'est par un Blu-ray. Dans le cas d'un CD, on remarque que toutes les couleurs du spectre sont présentes, car la distance entre les rainures (le pas du réseau) est plus grande que la longueur d'onde de la lumière visible. On observe le premier ordre de diffraction pour toutes les couleurs du spectre. Par contre, le Blu-ray produit un spectre qui ne contient pas de rouge ni de jaune. Ces couleurs ne produisent pas de maximum de premier ordre, car la distance entre les rainures est plus petite que la longueur d'onde de la lumière dans le Blu-ray (dont l'indice de réfraction est de 1,58).

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 8.4

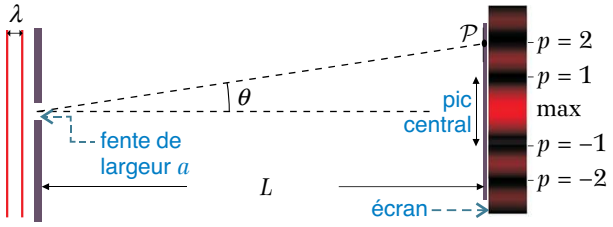
La lumière réfléchie par un DVD produit des arcs de cercle colorés, qui correspondent au premier ordre de diffraction pour chacune des couleurs du spectre. Pour quelle couleur le rayon de l'arc de cercle est-il le plus grand ?

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié la diffraction de la lumière, lorsque celle-ci rencontre des obstacles.

LES RÉSULTATS

Une **fente rectangulaire** de largeur a produit une figure de diffraction composée d'un pic central et de maximums secondaires. Les maximums sont séparés par des minimums de diffraction.



- Le maximum central est à $\theta = 0°$.
- Les minimums de diffraction ont une position angulaire obtenue par la relation :

$$a\sin\theta = p\lambda \quad (p = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

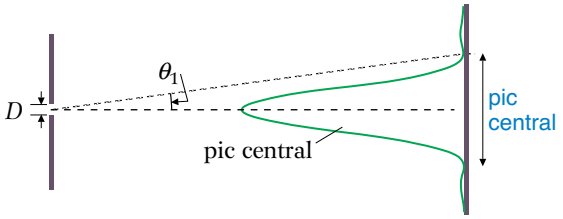
- Le pic central se situe entre les minimums $p = 1$ et $p = -1$.
- Les maximums secondaires sont environ à mi-chemin entre les minimums de diffraction.
- L'irradiance d'un point quelconque est

$$I = I_{\max}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2,$$

où

$$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}.$$

Une **ouverture circulaire**, dont le diamètre est D, produit une figure de diffraction composée d'un disque central brillant, entouré de maximums secondaires formant des anneaux.



- Le premier minimum se produit à une position angulaire θ_1 :

$$\sin\theta_1 = \frac{1{,}22\lambda}{D}.$$

Un système de **deux fentes rectangulaires**, de largeur a et séparées par une largeur d, produit une figure de diffraction, avec des maximums et des minimums d'interférence.

- Les maximums d'interférence :

$$d\sin\theta = m_c\lambda \quad (m_c = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

- Les minimums d'interférence :

$$d\sin\theta = \left(m_d + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m_d = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

- Les minimums de diffraction :

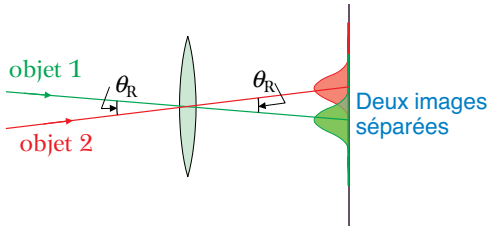
$$a\sin\theta = p\lambda \quad (p = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

LES APPLICATIONS

- Selon le **critère de Rayleigh**, la séparation angulaire minimale entre deux objets produisant deux images distinctes est

$$\theta_R = \frac{1{,}22\lambda}{D}.$$

Pour cette séparation angulaire, le premier minimum de diffraction de l'image 1 arrive vis-à-vis du maximum central de l'image 2.



Un **réseau de diffraction** est composé d'un grand nombre de fentes.

- Le pas du réseau d est la distance entre deux fentes successives.
- La position angulaire des maximums est obtenue par l'expression :

$$d\sin\theta = m\lambda,$$

avec $90° \leq \theta \leq 90°$.

- Lorsqu'une lumière polychromatique est incidente sur le réseau, celui-ci décompose la lumière selon son spectre. Les plus faibles longueurs d'onde se retrouvent plus près du centre de la figure de diffraction.

QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • **R** problèmes récapitulatifs • solution disponible

Section 8.1 Les figures de diffraction

Q1 Lorsqu'un arbre est éclairé par le Soleil, peut-on observer sur son ombre au sol des effets liés au phénomène de diffraction ? Expliquez votre réponse.

Section 8.2 La diffraction par une fente étroite

Q2 La figure de diffraction produite par une fente rectangulaire peut être modifiée par différents facteurs. Indiquez si les modifications suivantes augmentent, réduisent ou n'affectent pas la largeur du pic central de la figure de diffraction.

a. L'écran est rapproché de la fente.

b. La fente est élargie.

c. La lumière passe du bleu au rouge.

d. L'expérience est effectuée dans l'eau plutôt que dans l'air.

Q3 La figure 8.29 montre quatre fentes rectangulaires qui sont éclairées avec une lumière dont la longueur d'onde est λ. Classez les fentes par ordre croissant :

a. de la largeur du pic central ;

b. de la hauteur du pic central.

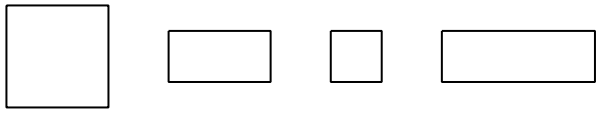


FIGURE 8.29 • Question 3

E4 Une fente d'une largeur de 40,0 µm est éclairée par une lumière verte de 553 nm. Un écran se trouve à 75,0 cm derrière la fente.

a. Quel est l'angle entre le centre de la figure et le premier minimum de diffraction ?

b. Quelle est la largeur du pic central ?

E5 Une fente rectangulaire est éclairée avec une lumière provenant d'une lampe au sodium dont la longueur d'onde est de 589 nm. Un écran est situé à une distance de 1,70 m de la fente. Le premier minimum et le troisième minimum de diffraction sont distants de 6,7 mm. Quelle est la largeur de la fente ?

E6 Une fente de largeur a est éclairée par une lumière ayant une longueur d'onde λ. Quelle est la longueur d'onde minimale pour que la figure de diffraction ne présente aucun minimum de diffraction ?

E7 Une fente rectangulaire est éclairée avec une lumière de 550 nm. Le pic central de diffraction a une largeur de 28,7°. Quelle est la largeur de la fente ?

P8 Une fente de 4,60 µm est éclairée avec une lumière de 656 nm. On place un écran derrière la fente et une lentille mince convergente entre les deux. La lentille a une distance focale de 50,0 cm.

a. À quelle distance de la lentille doit-on placer l'écran pour que la lumière issue de la diffraction soit focalisée sur l'écran ?

b. Quelle est la largeur du pic central ?

P9 Une lumière de 632 nm éclaire une fente rectangulaire de 3,00 µm de largeur. Un écran est placé à une distance de 2,00 m derrière la fente.

a. Quelle est la largeur du pic central ?

b. Quelle est la largeur du premier pic secondaire ?

c. Quelle est la largeur du deuxième pic secondaire ?

P10 Une lumière, dont la longueur d'onde est λ, éclaire une fente étroite, dont la largeur est $a = 5{,}1\lambda$.

a. Combien de minimums de diffraction peuvent être observés ?

b. Combien de maximums secondaires de diffraction peuvent être observés ?

Section 8.3 L'irradiance de la figure de diffraction

E11 Démontrez, à partir de l'équation 8.7, que le deuxième point d'irradiance nulle, en s'éloignant du centre de la figure de diffraction, se présente lorsque $\theta = \arcsin\left(\frac{2\lambda}{a}\right)$.

E12 Une fente rectangulaire large de 0,050 mm est éclairée par la lumière rouge d'une lampe à hydrogène ($\lambda = 656$ nm), et une figure de diffraction est produite sur un écran distant de 2,20 m de la fente. Pour un point à 22,0 mm du centre de la figure, déterminez :

a. l'angle θ ;

b. le déphasage α ;

c. le rapport I/I_{max}.

P13 On désigne par I_{m1} l'irradiance du premier maximum secondaire (lorsque $\alpha = 1{,}430\pi$) et par I_{m2} l'irradiance du second maximum secondaire (lorsque $\alpha = 2{,}459\pi$). Calculez :

a. le rapport I_{m1}/I_{max} ;

b. le rapport I_{m2}/I_{max} ;

c. le rapport I_{m2}/I_{m1}.

Section 8.4 La diffraction par une ouverture circulaire

Q14 De la lumière blanche est diffractée par une petite ouverture circulaire. On observe un disque central entouré d'anneaux secondaires moins intenses. Les longueurs d'onde ne sont pas diffractées de façon équivalente.

a. Quelle couleur est visible près de la partie extérieure du disque central ?

b. Quelle couleur est visible dans la partie intérieure du premier anneau secondaire ?

E15 Pour faire la noirceur totale dans votre chambre, vous voilez la fenêtre avec une toile opaque. Cette toile est malheureusement percée d'un trou d'aiguille de 0,30 mm de diamètre, ce qui produit une figure de diffraction sur le mur à 5,40 m de la fenêtre lorsque le Soleil éclaire le trou en fin de journée. Considérez le Soleil comme une source ponctuelle, et tenez compte de sa couleur orangée à $\lambda = 605$ nm en fin de journée.

a. Quel est le diamètre du pic central ?

b. Quel diamètre du trou d'aiguille donnerait un pic central deux fois plus grand ?

E16 Pour déterminer la longueur d'onde d'une lumière monochromatique, on dirige cette lumière vers une ouverture circulaire dont le diamètre est de 220 µm. On observe, sur un écran situé à 1,15 m derrière l'ouverture, que le diamètre du premier anneau sombre autour du centre est de 7,44 mm. Quelle est la longueur d'onde du rayonnement utilisé ?

P17 La lumière d'un laser diverge à cause de la diffraction produite lorsque la lumière passe à travers l'ouverture de l'appareil. Un laser à hélium-néon a une puissance de 0,80 mW et une longueur d'onde de 632,8 nm. Son ouverture a un diamètre de 0,600 mm. L'angle entre les premiers minimums de chaque côté du maximum de diffraction est appelé l'*angle de divergence* du laser et il est désigné par Θ.

a. Quel est l'angle de divergence de ce laser ? Exprimez la réponse en milliradians.

b. Quel est le diamètre du pic central de diffraction si on place un écran à une distance de 10,0 m ?

c. On peut démontrer que 84 % de l'énergie du laser se retrouve dans le pic central. Quelle est l'irradiance moyenne du pic central sur l'écran ?

Section 8.5 Le pouvoir de résolution des instruments d'optique

Q18 Les pupilles des yeux d'un chat ne s'agrandissent pas que dans la noirceur, mais aussi lorsque le prédateur est en situation de chasse (excitation émotive). Expliquez en quoi cela peut lui être réellement utile pour chasser.

Q19 L'angle β entre deux objets est trop faible pour que vous soyez capable de les distinguer comme deux objets distincts. Parmi les possibilités suivantes, indiquez celles qui permettent de distinguer les objets.

(i) Il faut diminuer l'irradiance, de telle sorte que la pupille devienne plus grande.

(ii) Il faut augmenter l'irradiance, de telle sorte que la pupille devienne plus petite.

(iii) Il faut s'éloigner des objets, afin que β diminue.

(iv) Il faut se rapprocher des objets, afin que β augmente.

E20 Une pupille normale a un diamètre pouvant aller de 1,00 mm à 7,00 mm. Déterminez l'angle minimal qu'un objet doit intercepter dans le champ de vision de l'œil pour que l'on commence à en distinguer les contours, lorsque le diamètre de la pupille est :

a. maximal ;

b. minimal.

(Considérez la longueur d'onde du pic de sensibilité de la rétine, soit le vert, à environ 550 nm.)

E21 Certains sceptiques doutent que l'Homme soit réellement allé sur la Lune. Ils avancent entre autres arguments que si on y avait effectivement laissé de gros objets comme des véhicules lunaires, on en aurait des images prises depuis la Terre. Calculez la longueur minimale que doit avoir un objet pour qu'on en distingue les deux extrémités à partir de la Terre avec un télescope dont le diamètre de l'objectif est de 4,00 m. (La distance Terre-Lune est de $3{,}84 \times 10^5$ km. Supposez une longueur d'onde de 550 nm.)

E22 En plein jour, en automobile sur une section de route très droite, vous apercevez au loin les feux de jour d'une automobile venant en sens inverse. Les phares sont au xénon, dont le maximum d'émission a une longueur d'onde de 450 nm, et ils sont distants de 1,7 m. Déterminez la distance maximale entre vous et cette automobile pour pouvoir distinguer les deux phares :

a. si votre pupille a un diamètre de 2,2 mm ;

b. si vous observez la route au loin avec des jumelles, dont les objectifs ont un diamètre de 7,5 cm.

(Supposez que seul l'effet de la diffraction limite le pouvoir de résolution.)

P23 Un astronome amateur utilise un télescope muni d'un miroir de 150 mm de diamètre et dont la distance focale est de 0,750 m. On suppose que la longueur d'onde de la lumière est de 550 nm.

a. Quel est le diamètre de la figure de diffraction d'une étoile observée au foyer du miroir ?

b. Quel est le plus petit angle entre deux étoiles pour que celles-ci soient distinctes ?

c. Quelle est alors la distance entre le centre des deux images sur un écran placé au foyer du miroir ?

R24 L'objectif d'un microscope a une distance focale de 3,50 mm et un diamètre de 10,0 mm. L'oculaire a une distance focale de 15,0 mm, et la longueur optique est

de 200 mm. La longueur d'onde de la lumière utilisée est de 550 nm.

a. Quel est le grossissement commercial de ce microscope ?

b. Quelle est la plus petite largeur que peut distinguer ce microscope lorsque l'image finale est à l'infini ? Considérez la diffraction que produit l'objectif.

c. Quel est alors l'angle sous-tendu par l'image observée au microscope ?

Section 8.6 La diffraction par deux fentes

Q25 La figure 8.30 montre l'irradiance pour la figure de diffraction produite par deux systèmes de deux fentes. La longueur d'onde de la lumière est la même dans les deux situations. Déterminez le système :

a. dont la distance d entre les fentes est la plus faible ;

b. dont la largeur a des fentes est la plus faible ;

c. dont le rapport d/a est le plus faible.

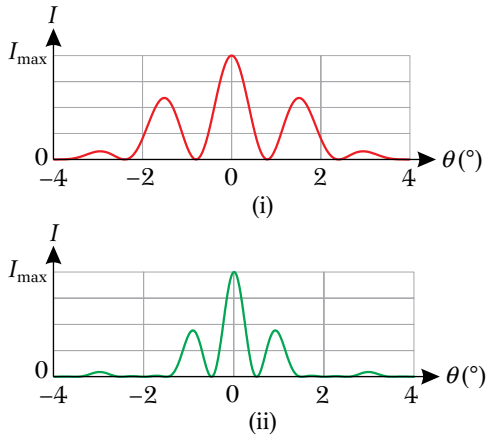


FIGURE 8.30 • Question 25

E26 On réalise l'expérience de Young avec deux fentes distantes de 0,40 mm, chacune ayant une largeur de 0,080 mm. On utilise la lumière d'un laser rouge pour lequel $\lambda = 632{,}8$ nm. La figure est projetée vers un écran à une distance de 80,0 cm des fentes.

a. Combien de franges brillantes observe-t-on dans le pic central de diffraction ?

b. Combien de franges brillantes observe-t-on dans le premier pic secondaire de diffraction ?

E27 Démontrez qu'à l'exception du pic central, tous les pics de diffraction contiennent le même nombre de franges brillantes d'interférence.

E28 Un système de deux fentes est éclairé avec une lumière dont la longueur d'onde est de 589 nm. Le système possède deux fentes de 100 µm de largeur, séparées par une distance de 400 µm. On place un écran à une distance de 1,60 m.

a. Quelle est la distance entre deux franges brillantes ?

b. Quelle est la largeur du pic central ?

c. Quelle est la largeur d'un pic secondaire ?

d. Combien de franges brillantes trouve-t-on dans le pic central ?

E29 La lumière de 546 nm est incidente sur un système de deux fentes. La largeur des fentes est de 15,0 µm, et celles-ci sont séparées par une distance de 40,0 µm. Un écran est placé à une distance de 1,30 m. Au centre de la figure de diffraction, l'irradiance est de 1,05 mW/m^2. Calculez l'irradiance pour un point dont la position angulaire est de 1,20°.

P30 L'expérience de Young est reproduite avec des ondes sonores. Un haut-parleur oscillant à la fréquence de 2500 Hz est placé devant un mur où se trouvent deux ouvertures verticales larges de 40,0 cm et distantes de 1,15 m (centre à centre). On déplace un micro le long d'une droite parallèle au mur, à 16,0 m derrière les fentes. Déterminez le pourcentage d'intensité sonore par rapport au maximum central, à une distance de 3,00 m du centre de la figure. (Le module de la vitesse du son est de 343 m/s.)

P31 Deux fentes de 0,100 mm de largeur, dont les centres sont séparés par une distance de 0,729 mm, sont éclairées par une lumière composée de deux longueurs d'onde. Les fentes sont les seules ouvertures dans une boîte cubique de 22,5 cm de côté. Les deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont telles que $\lambda_2 - \lambda_1 = 300$ nm. Le second minimum de diffraction pour la première longueur d'onde ($p_1 = 2$) arrive vis-à-vis du neuvième maximum d'interférence de la seconde longueur d'onde ($m_2 = 9$). Déterminez les deux longueurs d'onde.

P32 Un laser dont la longueur d'onde est de 534,5 nm éclaire une fente ayant une largeur $\ell = 0{,}765$ mm. Un écran est situé à 1,35 m derrière la fente. On place devant la fente un mince filament, de manière à ce que le filament sépare la fente initiale en deux fentes de même largeur. Sur l'écran, on observe le premier minimum de diffraction à 2,65 mm du centre et le troisième maximum d'interférence à 4,39 mm du centre. Quelle est l'épaisseur du filament placé devant la fente ?

Section 8.7 Les réseaux de diffraction

Q33 De la lumière blanche est incidente sur un réseau de diffraction. Un écran est placé derrière le réseau pour qu'on puisse observer la figure de diffraction. On observe un point central blanc et, de chaque côté, des taches colorées.

a. Dans la première tache à gauche du point blanc, quelle couleur se trouve à gauche ?

b. Dans la première tache à droite du point blanc, quelle couleur se trouve à gauche ?

Q34 La figure 8.31 (*voir la page suivante*) montre la figure de diffraction au premier ordre produite par quatre réseaux de diffraction différents. Les réseaux sont éclairés

avec la même source lumineuse. Classez les réseaux par ordre croissant de leur pas.

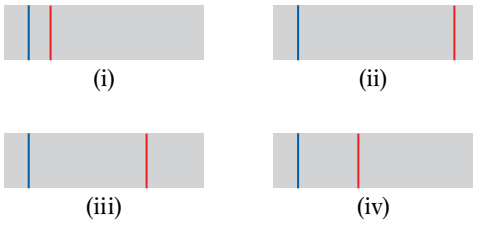


FIGURE 8.31 • Question 34

E35 Une lumière infrarouge de longueur d'onde 1,062 µm est dirigée vers un réseau de 145 lignes par millimètre. Combien d'ordres de diffraction sont présents de l'autre côté du réseau ?

E36 Un réseau constitué d'une lame de verre large de 1,20 cm est éclairé avec de la lumière monochromatique $\lambda = 645$ nm. On observe que la raie du 4^{e} ordre forme un angle de 37,5° par rapport à l'axe du montage. Combien y a-t-il de fentes sur l'ensemble de la largeur du réseau ?

E37 Un réseau de 500 lignes/mm est placé devant un rayon laser, et on observe sur un mur, à 3,28 m au-delà du réseau, une série de points lumineux. La distance entre le point central et le premier point à droite est de 85,8 cm. Quelle est la longueur d'onde du laser ?

E38 Un réseau de 3000 lignes/cm est éclairé avec de la lumière blanche (400 nm à 700 nm). À partir de quel ordre observe-t-on un chevauchement avec l'ordre suivant ?

E39 Une lampe au mercure émet un spectre qui contient de la lumière violette ($\lambda_v = 404{,}7$ nm) et de la lumière rouge ($\lambda_r = 615{,}0$ nm). Un réseau de 600,0 lignes/mm est utilisé pour décomposer le spectre.

a. Quel est l'angle entre les deux raies au premier ordre ?

b. Quel est l'angle entre les deux raies au deuxième ordre ?

c. Combien d'ordres positifs complets peut-on observer ?

P40 Le spectre d'une lumière à hydrogène contient des longueurs d'onde visibles entre 410 nm et 656 nm. On utilise un réseau pour analyser le spectre. Combien de lignes par millimètre possède un réseau si le spectre est dispersé de 12,5° au premier ordre de diffraction, c'est-à-dire que $\theta_r - \theta_v = 12{,}5°$?

P41 Un réseau, dont le pas est d, est éclairé par une lumière dont la longueur d'onde est λ. Les rayons incidents forment un angle d'incidence ϕ par rapport à la normale au réseau (*voir la figure 8.32*).

a. Montrez que les maximums se retrouvent aux angles θ donnés par l'équation :

$$d\,(\sin\theta + \sin\phi) = m\lambda\,,$$

où $m = 0, \pm 1, \ldots$

b. Calculez l'angle $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_{-1}$ entre les maximums d'ordre $m = 1$ et $m = -1$ pour un réseau de 600,0 lignes/mm éclairé par une lumière de 632,8 nm à un angle $\phi = 10{,}0°$.

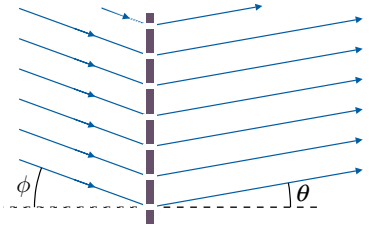


FIGURE 8.32 • Problème 41

P42 Deux réseaux, dont le pas est de 6,50 µm, sont collés l'un contre l'autre, de sorte que les fentes sont perpendiculaires. Ils sont éclairés avec une lumière bleue ($\lambda = 462$ nm) qui les traverse successivement. Des points lumineux en largeur et en hauteur sont observés sur un écran circulaire de 18,6 cm de diamètre et situé à 38,0 cm derrière les réseaux. L'écran est placé de sorte que le point correspondant à l'ordre 0 soit situé au centre. Combien de points brillants se trouvent sur l'écran ?

R43 Les disques DVD se comportent comme des réseaux de diffraction par réflexion. Ils sont composés d'une surface réfléchissante protégée par une surface de plastique dont l'indice de réfraction est de 1,55. L'information est enregistrée en gravant des trous, et elle est lue à l'aide d'un laser dont la longueur d'onde est de 650 nm. La distance entre les trous (le pas du réseau) est de 740 nm. La lumière du laser est incidente à 0° sur la surface du disque.

a. Quelle est la longueur d'onde du laser dans le plastique ?

b. À quel angle de réflexion le premier ordre de diffraction se produit-il dans le plastique ?

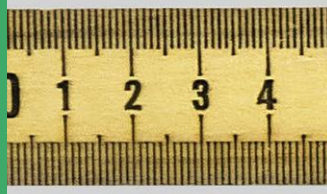
c. À quel angle le premier ordre de diffraction est-il observé dans l'air ?

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

8.1 **a.** Le pic central devient plus étroit.	La lumière verte a une longueur d'onde plus petite que la lumière rouge. Pour une longueur d'onde λ plus petite, la position angulaire du premier minimum est plus faible, selon $a \sin\theta = \lambda$.
b. Les maximums secondaires se rapprochent du centre.	Pour une longueur d'onde λ plus faible, tous les minimums se retrouvent à des angles plus petits, selon $a \sin\theta = p\lambda$. Un maximum secondaire se trouve entre deux minimums.
8.2 La couleur violette	Le premier anneau correspond au premier maximum secondaire. La position angulaire d'un maximum secondaire est plus faible pour une petite longueur d'onde. C'est la lumière violette qui a la plus petite longueur d'onde dans le domaine du visible.
8.3 **a.** La distance est la même dans les deux expériences.	La distance entre les franges brillantes dépend de la distance d entre les fentes. Les fentes sont séparées par la même distance dans les deux expériences.
b. La deuxième expérience	Le pic central est plus large dans la deuxième expérience, car il contient plus de franges brillantes, et les franges sont séparées par la même distance dans les deux expériences. La largeur du pic central est plus large lorsque la largeur a des fentes est plus faible.
8.4 La couleur rouge	Un cercle de plus grand rayon correspond à un ordre dont l'angle θ est plus grand. Selon l'équation des réseaux, $d \sin\theta = m\lambda$. L'angle θ est plus grand pour une grande longueur d'onde, donc pour la couleur rouge.

Chapitre 09

La relativité restreinte



Buts du chapitre

Ce chapitre porte sur la théorie de la relativité restreinte. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de poser les postulats d'Einstein ;
- de comprendre ce que sont la dilatation du temps et la contraction des longueurs ;
- de calculer le décalage Doppler pour la lumière ;
- d'utiliser les transformations de Lorentz ;
- de calculer la quantité de mouvement et l'énergie d'une particule relativiste.

Préalables

Ce chapitre généralise plusieurs concepts abordés en mécanique. Revoyez :

- la notion de référentiel inertiel, établie à la section 5.4 du tome 1 et le mouvement relatif, étudié à la section 4.6 du tome 1 ;
- la quantité de mouvement, définie à la section 10.1 du tome 1 et l'énergie cinétique, définie à la section 8.2 du tome 1 ;
- l'effet Doppler, étudié dans le cas des ondes sonores à la section 3.8.

La relativité restreinte nous oblige à changer notre façon de considérer l'espace et le temps.

UN PEU D'HISTOIRE

L'année miraculeuse d'Einstein

À l'époque d'Einstein comme aujourd'hui, la publication d'un article dans une revue scientifique réputée est une étape importante dans la reconnaissance d'un chercheur par son milieu. Au cours de l'année 1905, alors qu'il a 26 ans, Albert Einstein publie non pas un, mais bien quatre articles dans la revue *Annalen der Physik*, en plus de mettre la touche finale à sa thèse de doctorat. Pour cette raison, l'année 1905 est considérée comme l'année miraculeuse du jeune chercheur. Ses découvertes, cependant, tiennent bien plus de son travail et de sa volonté d'être reconnu que du miracle.

En poste à titre d'expert technique à l'Institut fédéral de la propriété intellectuelle de Berne, en Suisse, Einstein ne fait alors pas partie de la communauté scientifique à proprement parler, et n'a que très rarement accès aux bibliothèques universitaires ni même à des collègues avec qui discuter de ses théories. Avant 1905, il avait bien contribué à quelques reprises à la revue *Annalen der Physik*, mais ne jouissait pas encore d'une réputation de scientifique. Les cinq grands écrits de l'année allaient mettre fin à cette méconnaissance.

Einstein termine sa thèse de doctorat en avril 1905 et la présente à l'Université de Zurich en juillet. Il y décrit une nouvelle méthode pour déterminer le nombre d'Avogadro et la taille des molécules en utilisant l'hydrodynamique classique et la théorie de la diffusion.

Le premier article soumis par Einstein développe la théorie des quanta de lumière. Se basant sur la notion de quanta d'énergie évoquée par Max Planck en 1900, Einstein pose l'hypothèse que l'énergie lumineuse n'est pas distribuée de façon continue dans une onde, mais qu'elle est plutôt concentrée en paquets, ce qu'on nomme aujourd'hui les photons. Cet article, qu'Einstein lui-même qualifiait de révolutionnaire au moment où il le rédigeait, a été reçu avec certaines réserves par la communauté scientifique, notamment par Planck lui-même. Ce dernier voyait chez Einstein, et dans cet article en particulier, la prise d'un risque créatif dans le but de produire quelque chose de nouveau. La vérification expérimentale subséquente des prédictions d'Einstein a cependant valu à son auteur le prix Nobel de physique en 1921.

Le sujet du deuxième article est connexe à sa thèse de doctorat. Cet article étudie le mouvement de petites particules en suspension dans un liquide. En utilisant la thermodynamique et la théorie cinétique de la chaleur, il explique le mouvement brownien, qui correspond au mouvement aléatoire de particules en suspension dans un fluide. Pour Einstein, ce mouvement est causé par l'impact des atomes et des molécules. La vérification expérimentale des équations d'Einstein par le physicien et chimiste français Jean Perrin (1870-1942) a démontré de façon concluante l'existence réelle des atomes, qui étaient alors considérés seulement comme un modèle.

Sur l'électrodynamique des corps en mouvement, troisième article écrit par Einstein en 1905, modifie radicalement la perception de l'espace et du temps qu'ont les scientifiques de l'époque. Cet article présente la théorie de la relativité restreinte, basée sur deux postulats simples et abandonnant le concept d'éther. La théorie d'Einstein sera très rapidement un sujet de discussion et d'étude chez les physiciens germanophones, même si elle restera controversée.

Après la publication de ce troisième article, Einstein découvre que le principe de la relativité et les équations de Maxwell impliquent que la masse représente l'énergie totale d'un corps. C'est la découverte de la fameuse équation $E_0 = mc^2$, qui est présentée dans un quatrième article. Cette petite équation implique qu'on peut obtenir une grande quantité d'énergie à partir d'une très petite variation de la masse d'un corps, mais n'indique pas comment produire cette variation de masse. Einstein propose de vérifier cette découverte révolutionnaire par la mesure de la radioactivité des sels de radium.

Les physiciens considèrent que la découverte de la mécanique quantique et de la théorie de la relativité sont deux révolutions dans le domaine de la physique au 20^{e} siècle. Il est fascinant de constater que des articles fondateurs concernant ces deux sujets ont été publiés la même année, par la même personne, en plus de contribuer à l'acceptation de l'existence des atomes.

Albert Einstein (1879-1955)

Lors de l'étude de la cinématique effectuée dans le tome 1, nous avons décrit le mouvement des objets en donnant leur position en fonction du temps. La position peut être mesurée, à l'aide d'une règle et le temps, à l'aide d'un chronomètre, ou au moyen d'appareils électroniques plus sophistiqués. L'espace et le temps semblent être des quantités indépendantes. La mesure de la distance entre deux points ne devrait pas influer sur la mesure du temps pour qu'un objet se déplace entre ces points. En 1905, Albert Einstein a montré que certains principes étaient en conflit avec cette affirmation, ce qui l'a mené à élaborer la théorie de la relativité restreinte.

À première vue, les résultats de la théorie de la relativité restreinte semblent éloignés des applications dans la vie courante. En réalité, les effets relativistes deviennent importants lorsque la vitesse des objets s'approche de la vitesse de la lumière dans le vide. Cependant, cette théorie est nécessaire pour assurer le fonctionnement des appareils utilisant le système de positionnement global (GPS). De plus, le fait qu'un objet de masse m possède une énergie au repos (selon la célèbre équation $E_0 = mc^2$) est à la base du fonctionnement des centrales nucléaires, une façon d'obtenir de l'énergie électrique sans émission de gaz à effet de serre. Dans le domaine médical, les appareils à tomographie par émission de positrons utilisent l'annihilation des positrons et des électrons pour visualiser la concentration d'un isotope traceur et surveiller l'activité des cellules (*voir la figure 9.1*).

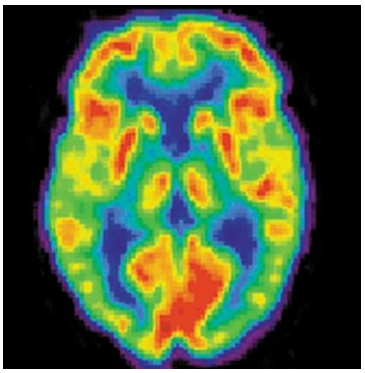


FIGURE 9.1
Une image du cerveau réalisée à l'aide d'une tomographie à effet de positrons. Les régions en rouge indiquent une accumulation plus grande du traceur (le ^{18}F-FDG).

La relativité restreinte a la réputation d'être un sujet difficile. La difficulté ne vient pas du formalisme mathématique, mais plutôt du fait que ces résultats semblent différents de notre expérience courante. Par exemple, la relativité indique que le temps n'est pas absolu. C'est une quantité qui dépend du référentiel utilisé, une quantité relative. Il en va de même pour la distance entre deux objets.

Dans ce chapitre, nous allons établir les liens entre les observations effectuées dans des référentiels inertiels, c'est-à-dire des référentiels qui se déplacent à vitesse constante. Comme dans le cas de la dynamique newtonnienne, la relativité restreinte n'est pas limitée aux référentiels inertiels. Il est possible de décrire les phénomènes en utilisant des référentiels accélérés, mais cela complique l'analyse, en ajoutant des forces fictives. Par contre, la relativité restreinte est valable uniquement lorsque le champ gravitationnel est négligeable. Pour décrire des situations faisant intervenir la gravitation, on doit utiliser la théorie de la relativité générale, une théorie où la force gravitationnelle est remplacée par la courbure de l'espace-temps (*voir la section 13.7 du tome 1*).

9.1 La relativité galiléenne

Le concept de relativité n'a pas été introduit par Einstein. En effet, il est déjà présent dans la théorie de Newton. Certaines quantités comme la vitesse et l'énergie cinétique sont des quantités relatives : leur mesure dépend du référentiel utilisé. Selon les résultats obtenus à la section 4.6 du tome 1, la vitesse d'un objet dépend de la vitesse du référentiel dans lequel elle est mesurée. Il existe des relations entre les mesures faites dans des référentiels différents. Ceci correspond à la relativité galiléenne. Il est important de connaître les résultats de la relativité galiléenne avant de passer à l'étude de la relativité d'Einstein.

Les référentiels inertiels

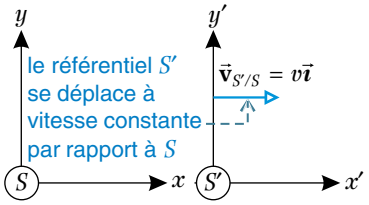


FIGURE 9.2
Deux référentiels inertiels S et S'

Comme nous l'avons vu à la section 5.4 du tome 1, il est nécessaire d'utiliser un référentiel pour pouvoir mesurer les quantités comme la position et la vitesse. Un référentiel correspond à un système de coordonnées dans lequel on peut prendre des mesures. On suppose que les appareils de mesure sont au repos par rapport au référentiel. La figure 9.2 montre deux référentiels : le référentiel S, qu'on appelle le *référentiel du laboratoire*, et le référentiel S' qui se déplace par rapport au référentiel S. Les axes des deux référentiels sont choisis de manière à ce qu'ils soient parallèles les uns aux autres et de telle sorte que la vitesse de S' par rapport à S soit $\vec{\mathbf{v}}_{S'/S} = v\vec{\imath}$. De plus, on suppose que des horloges synchronisées sont utilisées dans les deux référentiels, et que $t = t' = 0$ lorsque les origines des référentiels coïncident.

À la section 5.4 du tome 1, nous avons défini un *référentiel inertiel* comme un référentiel auquel la première loi de Newton s'applique. Dans un référentiel inertiel, un objet ne subissant aucune force demeure immobile ou se déplace à vitesse constante. De plus, un référentiel est inertiel s'il se déplace à vitesse constante par rapport à un autre référentiel inertiel. Un référentiel accéléré n'est pas un référentiel inertiel. On suppose que les référentiels S et S' sont des référentiels inertiels. Il est possible de décrire le mouvement des particules en utilisant des référentiels accélérés. On doit alors ajouter des forces fictives, comme la force centrifuge ou la force de Coriolis (*voir la section 7.5 du tome 1*).

Les transformations de Galilée

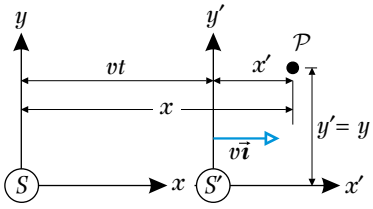


FIGURE 9.3
La position du point $\mathcal{P}$ est mesurée dans les deux référentiels.

On veut comparer les mesures prises dans chacun des référentiels. Pour ce faire, on étudie le mouvement d'une particule en fonction de chacun des référentiels S et S'. Pour commencer, on suppose qu'à un temps t particulier, la particule se trouve au point $\mathcal{P}$. Dans le référentiel S, les coordonnées sont $(x\,;y\,;z)$, alors que dans le référentiel S', les coordonnées sont $(x';y';z')$, comme le montre la figure 9.3. Étant donné qu'après un temps t, le référentiel S' a un déplacement horizontal $\Delta x_{S'} = vt$, les coordonnées mesurées dans chaque référentiel sont reliées par les équations :

$$\begin{aligned} x' &= x - vt & \qquad x &= x' + vt \\ y' &= y & \qquad y &= y' \\ z' &= z & \qquad z &= z'. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Les coordonnées y et z sont les mêmes, étant donné que le référentiel S' a une vitesse parallèle à l'axe des x. Les équations 9.1 représentent les *transformations de Galilée* pour la position. Ces équations permettent de calculer facilement la position d'une particule dans un référentiel lorsque sa position dans l'autre référentiel est connue.

Pour obtenir la vitesse du point $\mathcal{P}$, on doit calculer la dérivée par rapport au temps. On représente par $\vec{\mathbf{u}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t}$ la vitesse du point $\mathcal{P}$ par rapport au référentiel S, et on désigne par $\vec{\mathbf{u}}' = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}'}{\mathrm{d}t}$ la vitesse par rapport au référentiel S'. En dérivant les équations 9.1 par rapport au temps, on obtient

$$\begin{aligned} u'_x &= u_x - v & \qquad u_x &= u'_x + v \\ u'_y &= u_y & \qquad u_y &= u'_y \\ u'_z &= u_z & \qquad u_z &= u'_z. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Ces équations sont les transformations de Galilée pour la vitesse. La figure 9.4 montre la vitesse du point $\mathcal{P}$ mesurée dans chacun des référentiels.

REMARQUE

Dans ce chapitre, on utilise $\vec{\mathbf{v}}$ pour décrire la vitesse d'un référentiel par rapport à un autre et $\vec{\mathbf{u}}$ pour décrire la vitesse d'une particule.

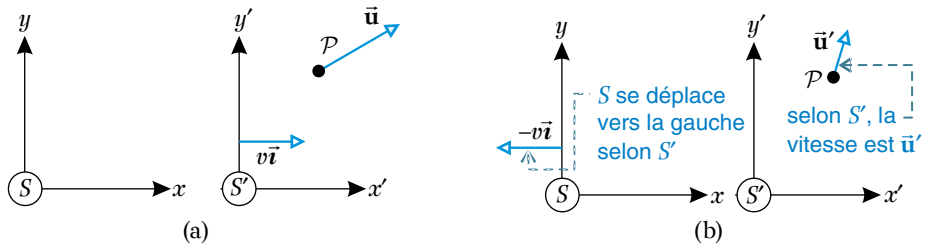


FIGURE 9.4

(a) Selon le référentiel S, le référentiel S' se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = v\vec{\imath}$, et le point $\mathcal{P}$ se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{u}}$. (b) Selon le référentiel S', le référentiel S se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}' = -v\vec{\imath}$, et le point $\mathcal{P}$ se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{u}}'$.

Le principe de relativité de Galilée

La position et la vitesse sont des *quantités relatives*, car leurs valeurs dépendent du référentiel. Les *invariants* sont des quantités qui ne changent pas de valeur lorsqu'on change de référentiel. Prenons par exemple une distance $d = x_2 - x_1$ mesurée dans le référentiel S. On obtient la distance $d' = x_2' - x_1'$ mesurée dans le référentiel S' à l'aide des transformations des équations 9.1 :

$$d = x_2 - x_1 = (x_2' + vt) - (x_1' + vt) = x_2' - x_1' = d' . \tag{9.3}$$

Donc, la distance est un invariant dans la relativité de Galilée. L'accélération d'une particule est aussi un invariant. En effet, en calculant la dérivée par rapport au temps de l'équation 9.2, on obtient

$$\begin{aligned} a_x' &= \frac{\mathrm{d}u_x'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = a_x \\ a_y' &= \frac{\mathrm{d}u_y'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} = a_y \\ a_z' &= \frac{\mathrm{d}u_z'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t} = a_z , \end{aligned} \tag{9.4}$$

étant donné que le référentiel S' est un référentiel inertiel, dont la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ est constante.

La figure 9.5 à la page suivante montre une plate-forme qui se déplace à vitesse constante (le référentiel S') par rapport au sol (le référentiel S). On place sur la plate-forme un bloc attaché à l'extrémité d'un ressort. Le bloc est déplacé de telle sorte que le ressort est étiré d'une distance $\Delta L'$. Supposons que la surface est horizontale et sans frottement. Le ressort exerce une force $\vec{\mathbf{F}}' = -k\,\Delta L'\,\vec{\imath}$. Selon la deuxième loi de Newton,

$$F_{\text{rés},x'} = -k\,\Delta L' = ma_x' . \tag{9.5}$$

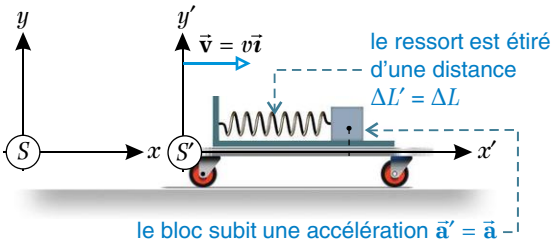


FIGURE 9.5
Dans les deux référentiels, le bloc subit la même force et la même accélération. La deuxième loi de Newton s'applique dans S et dans S'.

Dans le référentiel S, le ressort est étiré de la même distance ($\Delta L' = \Delta L$), car la distance est un invariant. De plus, l'accélération du bloc est la même parce que le référentiel S' est un référentiel inertiel, dont l'accélération est nulle. On obtient alors, dans S,

$$F_{\text{rés},x} = -k\,\Delta L = ma_x\,. \tag{9.6}$$

La deuxième loi de Newton $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ s'écrit de la même façon dans les deux référentiels inertiels. C'est un exemple du principe de relativité de Galilée.

Principe de relativité de Galilée

Les lois de la mécanique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels.

Il est important de comprendre que ce sont les lois qui ne changent pas d'un référentiel à l'autre. Les quantités apparaissant dans les lois peuvent être des quantités relatives ou des invariants. Par exemple, le principe de conservation de la quantité de mouvement met en relation la quantité de mouvement initiale et la quantité de mouvement finale d'un système. La quantité de mouvement est une quantité relative, qui dépend du référentiel. Cependant, le principe de conservation de la quantité de mouvement est valide dans tous les référentiels, selon le principe de relativité de Galilée.

EXEMPLE 9.1 La relativité dans une collision parfaitement inélastique

Une collision parfaitement inélastique se produit entre un objet de masse $m_1 = 0{,}350$ kg et un objet de masse $m_2 = 0{,}250$ kg. Dans le référentiel S, l'objet 1 se déplace vers la droite à 4,0 m/s, et le deuxième objet se déplace vers la gauche à 3,0 m/s. La même collision est observée dans un référentiel S' qui se déplace à une vitesse de 4,0 m/s vers la droite, par rapport à S.

a. Calculez les quantités de mouvement des objets avant la collision, selon S.
b. Quelle est la vitesse du système après la collision, selon S ?
c. Calculez les quantités de mouvement avant la collision, selon S'.
d. Quelle est la quantité de mouvement du système après la collision, selon S' ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 9.6 illustre la situation selon le référentiel S.

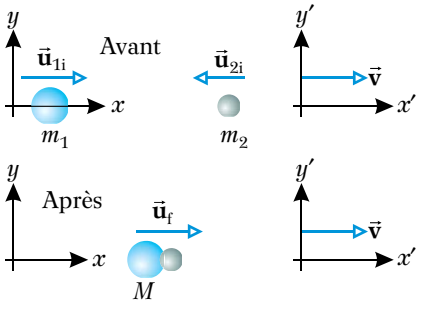


FIGURE 9.6
Le schéma de la situation dans le référentiel S, avant et après la collision

Décortiquer le problème

Connues

$m_1 = 0{,}350$ kg $\quad m_2 = 0{,}250$ kg

$\vec{u}_{1i} = 4{,}0\ \text{m/s}\,\vec{i} \quad \vec{u}_{2i} = -3{,}0\ \text{m/s}\,\vec{i}$

$\vec{v} = 4{,}0\ \text{m/s}\,\vec{i}$

Inconnues

$\vec{p}_{1i} \quad \vec{p}_{2i}$

$\vec{u}_f$

$\vec{p}'_{1i} \quad \vec{p}'_{2i}$

$\vec{P}'_f$

Une collision parfaitement inélastique est une collision où les deux objets restent liés et se déplacent à la même vitesse $\vec{u}_{1f} = \vec{u}_{2f} = \vec{u}_f$.

SOLUTION a.

Identifier la clé

La quantité de mouvement d'une particule est

$$\vec{p} = m\vec{u}. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons les valeurs numériques pour chaque objet :

$$\vec{p}_{1i} = 0{,}350\ \text{kg} \times 4{,}0\ \text{m/s}\,\vec{i} = 1{,}4\ \text{kg}\cdot\text{m/s}\,\vec{i}$$

(réponse)

$$\vec{p}_{2i} = 0{,}250\ \text{kg} \times -3{,}0\ \text{m/s}\,\vec{i} = -0{,}75\ \text{kg}\cdot\text{m/s}\,\vec{i}\ .$$

(réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est le principe de conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{P}_f = (m_1 + m_2)\ \vec{u}_f\ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous isolons $\vec{u}_f$ dans l'équation (ii), puis nous insérons les valeurs :

$$\vec{u}_f = \frac{\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{u}_f = \frac{1{,}4\ \text{kg}\cdot\text{m/s}\,\vec{i} - 0{,}75\ \text{kg}\cdot\text{m/s}\,\vec{i}}{0{,}350\ \text{kg} + 0{,}250\ \text{kg}} = 1{,}1\ \text{m/s}\,\vec{i}\ .$$

(réponse)

SOLUTION c.

Illustrer la situation

Dans le référentiel S', le référentiel S se déplace vers la gauche, l'objet 1 est initialement immobile et l'objet 2 se déplace initialement vers la gauche. La figure 9.7 illustre la situation pour S'.

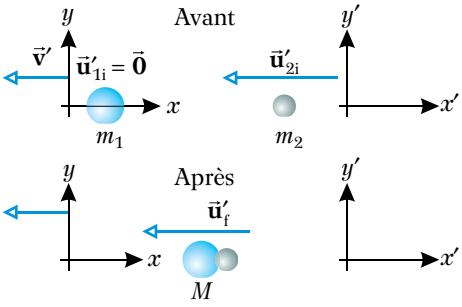


FIGURE 9.7
Le schéma de la situation dans le référentiel S', avant et après la collision

Identifier la clé

Nous obtenons la quantité de mouvement des objets dans le référentiel S en utilisant l'équation 9.2 pour transformer les vitesses :

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}, \qquad \text{(iii)}$$

et ensuite l'équation (i) pour calculer la quantité de mouvement.

Résoudre le problème

La vitesse des objets dans le référentiel S' est

$$\vec{u}'_{1i} = 4{,}0\ \text{m/s}\,\vec{i} - 4{,}0\ \text{m/s}\,\vec{i} = 0{,}0\ \text{m/s}\,\vec{i}$$

$$\vec{u}'_{2i} = -3{,}0\ \text{m/s}\,\vec{i} - 4{,}0\ \text{m/s}\,\vec{i} = -7{,}0\ \text{m/s}\,\vec{i}$$

$$\vec{p}'_{1i} = 0{,}350\ \text{kg} \times 0{,}0\ \text{m/s}\,\vec{i} = 0{,}0\ \text{kg}\cdot\text{m/s}\,\vec{i}$$

(réponse)

$$\vec{\mathbf{p}}'_{2i} = 0{,}250\ \text{kg} \times -7{,}0\ \text{m/s}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} = -1{,}75\ \text{kg} \cdot \text{m/s}\,\vec{\boldsymbol{\imath}}. \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION d.

Identifier la clé

Nous utilisons la même méthode que dans la partie c., en transformant la vitesse finale du système

$$\vec{\mathbf{u}}'_f = \vec{\mathbf{u}}_f - \vec{\mathbf{v}}, \quad \text{(iv)}$$

puis en calculant la quantité de mouvement à l'aide de l'équation (i) :

$$\vec{\mathbf{u}}'_f = 1{,}1\ \text{m/s}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} - 4{,}0\ \text{m/s}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} = -2{,}92\ \text{m/s}\,\vec{\boldsymbol{\imath}}$$

$$\vec{\mathbf{P}}'_f = (0{,}350\ \text{kg} + 0{,}250\ \text{kg})\ (-2{,}92\ \text{m/s}\,\vec{\boldsymbol{\imath}})$$

$$\vec{\mathbf{P}}'_f = -1{,}75\ \text{kg} \cdot \text{m/s}\,\vec{\boldsymbol{\imath}}. \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La quantité de mouvement est aussi conservée dans le référentiel S' : la quantité de mouvement du système est de –1,75 kg · m/s avant la collision et après la collision. Les objets ont des quantités de mouvement différentes dans les deux référentiels, mais le principe de conservation de la quantité de mouvement est valide dans les deux référentiels :

$$\vec{\mathbf{p}}_{1i} + \vec{\mathbf{p}}_{1f} = \vec{\mathbf{P}}_f \quad \text{(dans } S\text{)}$$

$$\vec{\mathbf{p}}'_{1i} + \vec{\mathbf{p}}'_{1f} = \vec{\mathbf{P}}'_f \quad \text{(dans } S'\text{)}\ .$$

9.2 Les postulats d'Einstein

L'électromagnétisme et le principe de relativité de Galilée

Les équations de Maxwell, que nous avons vues à la section 10.9 du tome 2, décrivent correctement les phénomènes électriques et magnétiques. Par contre, cette théorie soulève des questions lorsqu'on essaie d'appliquer le principe de relativité de Galilée. Par exemple, les équations de Maxwell impliquent que les ondes électromagnétiques se propagent dans le vide à une vitesse dont le module est $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Mais si la vitesse est une quantité relative, dans quel référentiel le module de la vitesse de la lumière c est-il valable ?

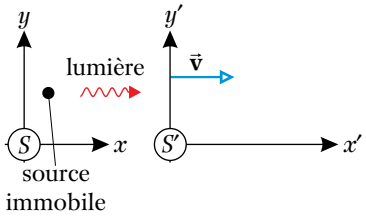


FIGURE 9.8
Dans un référentiel S', on mesure le module de la vitesse d'une onde lumineuse émise par une source immobile dans le référentiel S.

Supposons que les transformations de Galilée s'appliquent à la vitesse de la lumière, avec $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ dans le référentiel S. Dans un référentiel S' qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ par rapport à S (*voir la figure 9.8*), le module de la vitesse de la lumière sera $c' = c - v$. Si les équations de Maxwell sont valides dans tous les référentiels, cela implique que la valeur de ϵ_0 et celle de μ_0 doivent dépendre du référentiel. Mais alors, la loi de Coulomb produirait une force différente entre deux charges électriques, et la loi de Biot-Savart produirait une force différente entre deux fils parcourus par un courant lorsqu'on utilise un référentiel inertiel en mouvement. Une autre possibilité est que les équations de Maxwell sont valides uniquement dans un référentiel, qu'on appelle le *référentiel absolu*. C'est la voie qu'ont empruntée les physiciens du 19e siècle. À cette époque, le principe de relativité était limité aux lois de la mécanique. Pour l'électromagnétisme, les référentiels n'étaient pas équivalents pour décrire la physique. Il existait un référentiel absolu, qu'on appelait l'*éther*.

Un autre problème est relié à la propagation de l'onde électromagnétique. Nous avons vu à la section 4.1 qu'une onde électromagnétique se propage grâce à l'induction : un champ électrique variable produit un champ magnétique non uniforme, et un champ magnétique variable produit un champ électrique non uniforme. Supposons qu'un observateur se déplace à la même vitesse que la lumière, à côté d'une onde électromagnétique. Dans ce référentiel, le champ électrique et le champ magnétique sont statiques ; ils ne varient pas dans le temps. Mais si ces champs sont statiques, comment peuvent-ils générer les champs non uniformes constituant l'onde électromagnétique ? Dans ce référentiel, il n'y aurait pas d'onde, donc pas de lumière.

Les postulats d'Einstein

C'est en 1905 qu'Albert Einstein (*voir la figure 9.9*), travaillant alors à l'Office fédéral des brevets à Berne, a formulé une nouvelle théorie de la relativité, qu'il a appelée la théorie de la *relativité restreinte*. Einstein s'est guidé sur le résultat de l'induction électromagnétique que nous avons étudié au chapitre 10 du tome 2. Comme le montre la figure 9.10a, on approche à vitesse constante un aimant d'une boucle conductrice, ce qui produit un courant induit i_{ind} dans la boucle. Ce courant est produit par un champ électrique induit qui exerce une force électrique $\vec{\mathbf{F}}_e = q\vec{\mathbf{E}}$ sur les électrons de conduction. Comme le montre la figure 9.10b, on avance plutôt la boucle de l'aimant à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}' = -\vec{\mathbf{v}}$. Le courant induit i_{ind} dans la boucle est le même que dans la situation précédente, même s'il s'agit maintenant d'une force magnétique qui fait circuler les électrons de conduction. En effet, dans la deuxième situation, les électrons ont une vitesse $\vec{\mathbf{v}}' = -\vec{\mathbf{v}}$ (la vitesse de la boucle), et ils subissent une force magnétique $\vec{\mathbf{F}}_m = q\vec{\mathbf{v}}' \times \vec{\mathbf{B}}$. L'interprétation des deux expériences est différente, mais le résultat est le même. On obtient le même courant induit, quel que soit le référentiel utilisé.

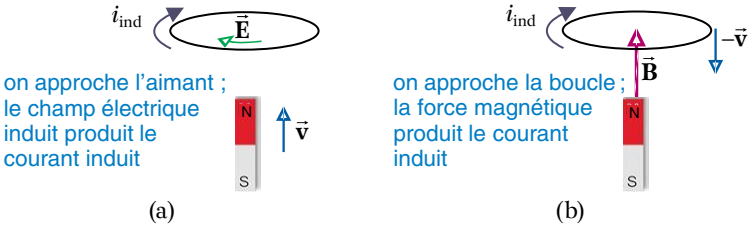


FIGURE 9.10
Le courant induit dépend de la vitesse relative v entre la boucle et l'aimant. (a) On approche l'aimant, ce qui induit un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$; la force électrique produit le courant i_{ind}. (b) On approche la boucle ; la force magnétique exercée par l'aimant produit le courant i_{ind}.

FIGURE 9.9
Albert Einstein (1879-1955) a publié la théorie de la relativité restreinte en 1905.

À partir de ce résultat et du fait qu'aucune expérience n'avait pu démontrer l'existence d'un référentiel absolu, Einstein a posé deux postulats, qui sont à la base de la théorie de la relativité restreinte.

Principe de relativité d'Einstein

Les lois de la physique sont les mêmes pour tous les référentiels inertiels.

Donc, selon Einstein, il n'existe pas de référentiel préférentiel où les lois de Maxwell s'appliquent. De plus, une expérience de physique ne peut pas être utilisée pour savoir si on se déplace à vitesse constante ou si on est immobile.

Le deuxième postulat permet de corriger l'incohérence entre la vitesse de la lumière et les transformations de Galilée pour la vitesse.

Postulat de la vitesse de la lumière

La lumière se propage dans le vide avec une vitesse dont le module est c. Le module de cette vitesse est le même pour tous les référentiels inertiels :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}\,.$$

REMARQUE

Dans le présent chapitre, on utilise la valeur $c = 2{,}998 \times 10^8$ m/s plutôt que $3{,}00 \times 10^8$ m/s dans les calculs numériques, car il est important d'utiliser une valeur plus précise pour c. Dans plusieurs calculs, on exprime le module de la vitesse des objets en fonction de c, par exemple $v = 0{,}90\,c$.

Des vérifications expérimentales

Le principe de relativité d'Einstein est simple à accepter. Il généralise de façon évidente le principe de relativité de Galilée. Par contre, le postulat de la constance de la vitesse de la lumière va à l'encontre de l'expérience courante sur la transformation de la vitesse entre deux référentiels inertiels.

Supposons par exemple qu'une personne est assise dans une voiture qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{u}} = u\vec{\imath}$. La personne lance un projectile vers l'avant à une vitesse $\vec{\mathbf{u}}'_1 = u'\vec{\imath}$ et un projectile vers l'arrière à une vitesse $\vec{\mathbf{u}}'_2 = -u'\vec{\imath}$ (*voir la figure 9.11*). Selon les transformations de Galilée pour la vitesse (*voir l'équation 9.2*), un observateur devant la voiture mesurera une vitesse $\vec{\mathbf{u}}_1 = (u' + v)\,\vec{\imath}$, alors qu'un observateur derrière la voiture mesurera une vitesse $\vec{\mathbf{u}}_2 = (v - u')\,\vec{\imath}$. Pour les personnes à l'extérieur de la voiture, le projectile lancé vers l'avant a une plus grande vitesse que le projectile lancé vers l'arrière.

Supposons qu'on fait le même genre d'expérience avec de la lumière. La figure 9.12 montre un vaisseau spatial se déplaçant à une vitesse dont le module est $v = 0{,}7\ c$, entre la Terre et Mars. Selon les transformations de Galilée, l'observateur sur Mars va mesurer $c' = c + v$ comme module de la vitesse de la lumière, alors qu'un observateur sur Terre va mesurer une vitesse $c'' = c - v$. Selon le deuxième postulat d'Einstein, les observateurs sur Mars et sur Terre vont mesurer le même module de la vitesse de la lumière, c.

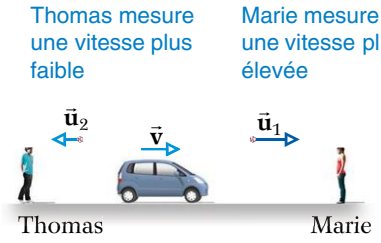


FIGURE 9.11
Deux projectiles sont lancés à partir d'une voiture qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$. Le projectile qui se déplace vers Marie a une plus grande vitesse que le projectile qui se déplace vers Thomas.

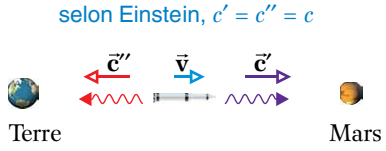


FIGURE 9.12
Un vaisseau spatial se déplace vers Mars avec une vitesse dont le module est $v = 0{,}7\ c$. La lumière émise par le vaisseau se déplace à une vitesse dont le module est c, selon n'importe quel observateur.

La dernière expérience ne peut pas être effectuée, car on ne possède pas la technologie permettant d'accélérer des objets macroscopiques à des vitesses qui s'approchent de la vitesse de la lumière. Il est par contre possible d'utiliser la vitesse de la Terre par rapport au Soleil et de réaliser des expériences sensibles. Des versions de l'interféromètre de Michelson ont servi dans les expériences de Michelson-Morley et dans l'expérience de Kennedy-Thorndike, pour tenter de mesurer le changement du module de la vitesse de la lumière d'un référentiel à un autre. Les résultats de ces expériences ont montré que le module de la vitesse de la lumière ne dépend pas du référentiel.

Les particules subatomiques comme les électrons et les protons peuvent se déplacer à des vitesses qui s'approchent de la vitesse de la lumière. De plus, certaines de ces particules sont instables ; elles se décomposent en d'autres particules. C'est le cas de la particule π^0, appelée le *pion neutre*. Cette particule se

désintègre en émettant deux rayons gamma, donc de la lumière de très petite longueur d'onde :

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma \ .$$

En 1964, une équipe du CERN (le laboratoire européen en physique subatomique, situé en Suisse) a produit des pions qui se déplaçaient à une vitesse dont le module est $v = 0{,}99975\ c$. Dans le référentiel du pion, les rayons gamma sont émis de chaque côté, à une vitesse dont le module est c. La mesure du module de la vitesse des rayons gamma a été effectuée dans le référentiel du laboratoire. Le résultat est en parfait accord avec le postulat d'Einstein : le module de la vitesse de la lumière est c, autant pour un observateur en avant du pion que pour un observateur en arrière du pion. Les équations de la transformation de Galilée pour la vitesse ne peuvent pas être utilisées pour la vitesse de la lumière.

Si le module de la vitesse de la lumière est le même dans tous les référentiels, ceci produit des effets particuliers : la distance et le temps doivent être des quantités relatives. Les deux postulats impliquent aussi un résultat important sur la vitesse des objets. Nous verrons que la vitesse de la lumière correspond à la vitesse limite pouvant être atteinte. Un objet de masse $m \neq 0$ ne peut pas se déplacer à une vitesse ayant un module c. En effet, à mesure que le module de la vitesse d'un objet s'approche de c, son énergie cinétique augmente de plus en plus. Cette prédiction a été vérifiée en 1964 par William Bertozzi. Ce dernier a mesuré de façon indépendante le module de la vitesse et l'énergie cinétique d'électrons accélérés au moyen d'un accélérateur linéaire.

Étant donné qu'on ne peut pas se déplacer à la vitesse c, il est impossible de se déplacer à la même vitesse qu'une onde électromagnétique dans le vide. Il n'existe donc pas de référentiel dans lequel le champ électrique et le champ magnétique d'une onde électromagnétique sont statiques.

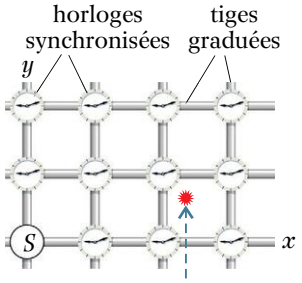
TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 9.1

Des vaisseaux s'approchent ou s'éloignent de la Terre. Ces vaisseaux émettent des ondes radio pour communiquer avec la Terre. Classez les ondes radio par ordre croissant du module de la vitesse des ondes radio mesuré par la Terre dans les situations suivantes :

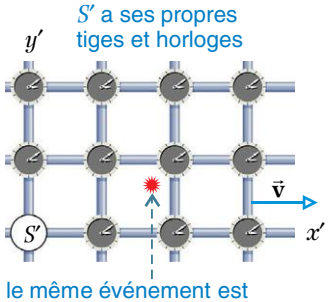
(i) un vaisseau s'éloigne à $0{,}2\ c$;
(ii) un vaisseau s'approche à $0{,}2\ c$;
(iii) un vaisseau s'éloigne à $0{,}8\ c$;
(iv) un vaisseau s'approche à $0{,}8\ c$.

9.3 Les événements et les mesures

On définit d'abord un *événement* comme quelque chose qui se produit à un endroit et à un instant donné. Par exemple, la collision entre deux particules est un événement. De même, un pion neutre qui se désintègre ou une voiture qui tourne un coin de rue sont des événements. Un événement peut être observé dans des référentiels inertiels différents. Pour chaque référentiel, un événement est décrit par ses coordonnées $(x ; y ; z)$ et son temps t.



(a)



(b)

FIGURE 9.13
Un événement est mesuré (a) dans le référentiel S et (b) dans le référentiel S'.

Il faut être prudent lorsqu'on détermine les coordonnées et le temps d'un événement. Prenons par exemple une étoile située à une distance de dix années-lumière qui explose et devient une supernova à l'instant précis que vous lisez ce texte. Comme l'étoile est éloignée de la Terre, la lumière prendra 10 ans pour franchir la distance entre l'étoile et la Terre. L'observation de la supernova par des observateurs de la Terre s'effectue 10 ans après l'événement.

Pour éviter la durée du délai, on imagine qu'un référentiel inertiel est composé d'un réseau de tiges graduées permettant de déterminer la position. De plus, à chaque intersection de tige se trouve une horloge et un détecteur pouvant enregistrer un événement. Lorsqu'un événement se produit, il est enregistré par le détecteur le plus près, qui enregistre le temps et la position de l'événement (*voir la figure 9.13a*). Une fois que l'expérience est terminée, il est possible de lire l'enregistrement des détecteurs du référentiel. Les horloges d'un référentiel sont toutes immobiles par rapport à ce référentiel. De plus, elles doivent être synchronisées, c'est-à-dire qu'elles doivent indiquer le même temps.

La méthode précédente peut sembler complexe, mais elle assure que le temps t associé à un événement correspond exactement à l'instant où l'événement se produit, et non à l'instant où l'événement est observé par un observateur. La construction précédente définit un référentiel inertiel. Si un référentiel S' se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ par rapport au référentiel S, alors le référentiel S' possède son réseau de tiges graduées et ses horloges, comme le montre la figure 9.13b. Le même événement peut être mesuré dans le référentiel S'. L'événement est alors décrit par les coordonnées $(x'; y'; z')$ et le temps t'.

REMARQUE

Le terme *horloge* renvoie à n'importe quelle façon de mesurer le temps. L'horloge peut être mécanique, électronique ou biologique.

9.4 La relativité de la simultanéité

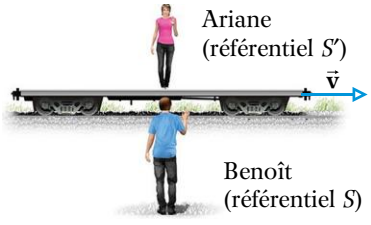


FIGURE 9.14
Ariane se trouve dans un train qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ par rapport à Benoît.

Pour bien montrer que le temps n'est plus un absolu, mais qu'il dépend du référentiel, Einstein a présenté une expérience de pensée dans laquelle deux événements séparés sont mesurés dans deux référentiels inertiels. On suppose qu'Ariane se trouve au centre d'un train qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = v\vec{\imath}$ par rapport à Benoît, comme le montre la figure 9.14 (à l'époque d'Einstein, le train était le moyen de transport le plus rapide).

On suppose ensuite qu'au moment où Ariane passe vis-à-vis de Benoît, deux explosions se produisent aux extrémités du train d'Ariane. Chaque explosion produit une marque sur le sol (*voir la figure 9.15a*), en plus d'émettre de la lumière sous forme d'ondes sphériques. L'explosion en avant du train produit une lumière rouge (l'événement R), et l'explosion en arrière produit une lumière bleue (l'événement B). La figure 9.15 montre la propagation des ondes dans le référentiel de Benoît, avec le train d'Ariane qui se déplace vers la droite. Chaque onde se déplace sous la forme d'une onde sphérique à une vitesse ayant un module c. Les fronts d'onde arrivent vis-à-vis de Benoît en même temps, comme le montre la figure 9.15c. Selon Benoît, il se situe à mi-chemin entre les deux événements et les ondes lumineuses produites par ces événements arrivent en même temps à la position qu'il occupe. Donc, pour lui, les deux explosions sont simultanées ; elles se produisent au même temps ($t_R = t_B$).

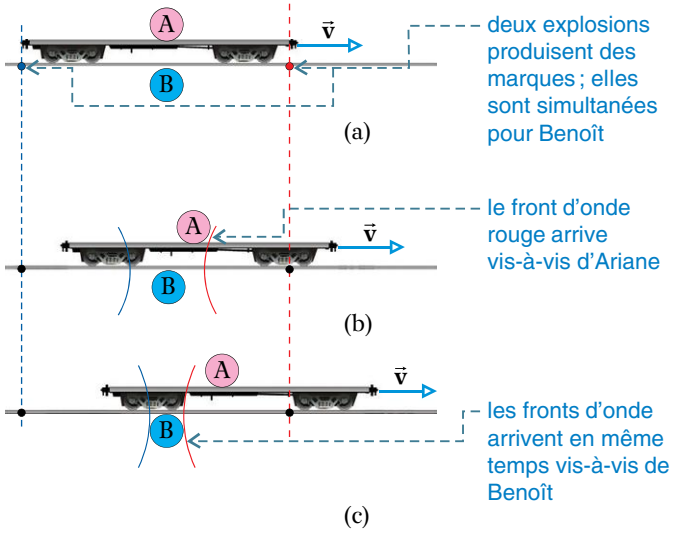


FIGURE 9.15

(a) Deux explosions produisent des marques sur le sol. Benoît se trouve à mi-chemin entre les marques. (b) Ariane observe d'abord l'onde rouge. (c) Les deux ondes sont observées en même temps par Benoît.

La figure 9.15b montre aussi que l'onde rouge arrive vis-à-vis d'Ariane avant l'onde bleue, étant donné que la vitesse de la lumière a le même module c pour Ariane. Elle sait qu'elle se trouve à mi-chemin entre les deux explosions et que les deux ondes se déplacent à des vitesses de même module c. Donc, pour Ariane, l'événement R se produit avant l'événement B ($t'_R < t'_B$). La figure 9.16 montre la séquence des événements dans le référentiel d'Ariane. Selon Ariane, Benoît se déplace à une vitesse $-\vec{\mathbf{v}}$.

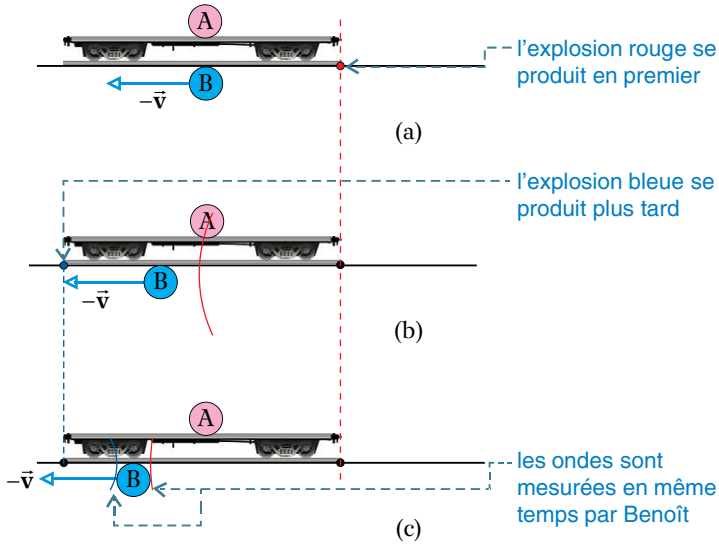


FIGURE 9.16

Dans le référentiel d'Ariane, Benoît se déplace à une vitesse $-\vec{\mathbf{v}}$. (a) L'explosion se produit d'abord en avant du train. (b) L'explosion en arrière se produit ensuite. (c) Les ondes sont mesurées simultanément par Benoît.

On pourrait faire une expérience dans laquelle Ariane mesure deux événements comme étant simultanés. Dans ce dernier cas, Benoît va observer que les deux événements ne sont pas simultanés. Les postulats d'Einstein impliquent ceci :

Relativité de la simultanéité

Lorsque deux événements, qui se produisent à des positions x différentes, sont mesurés comme étant simultanés dans un référentiel, ces événements ne sont pas simultanés lorsqu'ils sont mesurés dans un autre référentiel dont la vitesse relative a une composante x.

La relativité de la simultanéité est un concept très important et parfois difficile à reconnaître. La plupart des paradoxes apparents de la relativité font intervenir l'impossibilité d'avoir un temps absolu pour tous les référentiels.

9.5 La dilatation du temps

Dans la section précédente, nous avons montré que l'intervalle de temps entre deux événements est différent lorsqu'on le mesure dans deux référentiels différents. L'intervalle de temps entre deux événements est donc une quantité relative. Pour trouver une relation entre le temps mesuré dans deux référentiels différents, on considère une expérience effectuée dans le référentiel d'Ariane (le référentiel S'), qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ par rapport au référentiel de Benoît (le référentiel S).

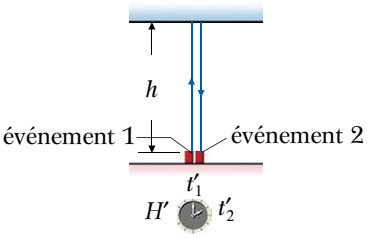


FIGURE 9.17
Dans le référentiel S', les deux événements se produisent au même point. On mesure un intervalle à l'aide d'une seule horloge. Le temps $\Delta t' = \Delta\tau$, qu'on appelle le *temps propre*.

Supposons qu'Ariane se trouve dans un vaisseau spatial qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ orientée vers la droite, par rapport à Benoît. Dans son vaisseau, Ariane place une source lumineuse qui émet une brève impulsion vers le haut (l'événement 1). Un miroir est placé à une distance h au-dessus du laser (*voir la figure 9.17*) pour réfléchir la lumière (on a tracé l'impulsion réfléchie en la plaçant légèrement vers la droite pour mieux la distinguer). L'impulsion lumineuse est ensuite captée par un détecteur placé à la même position que la source (l'événement 2). L'intervalle de temps entre les deux événements mesuré par Ariane est

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{2h}{c} .$$

Pour mesurer cet intervalle de temps, Ariane a besoin d'utiliser une seule horloge H', située à côté du laser. C'est seulement dans le référentiel d'Ariane que ces deux événements se produisent au même endroit. L'intervalle de temps est alors appelé l'*intervalle de temps propre*, et on utilise le symbole τ (la lettre grecque *tau*) pour indiquer un temps propre. Donc, dans l'expérience précédente,

$$\Delta\tau = \frac{2h}{c} . \qquad (9.7)$$

La figure 9.18 montre l'expérience précédente selon le référentiel de Benoît. Dans ce référentiel, la source, le miroir et le détecteur se déplacent vers la droite à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$. Les deux événements (l'émission et la détection de l'impulsion lumineuse) ne se produisent pas au même endroit. Benoît a besoin de deux horloges immobiles (H_1 et H_2) pour mesurer le temps $\Delta t = t_2 - t_1$. Cet intervalle de temps est plus grand que $\Delta\tau$, étant donné que la lumière doit parcourir une distance $2L$, plus grande que la distance $2h$, et que le module de la vitesse de la lumière est égal à c dans les deux référentiels. L'intervalle de temps mesuré dans le référentiel S est

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{2L}{c} , \qquad (9.8)$$

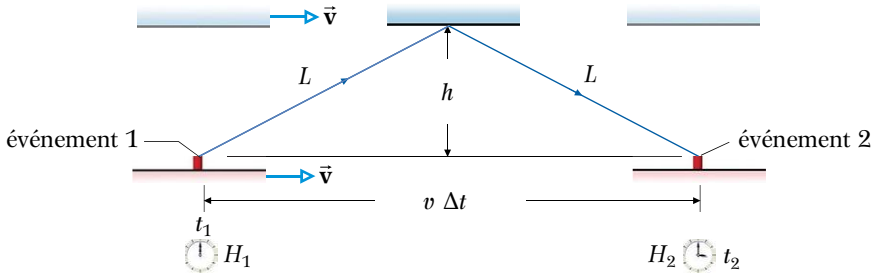


FIGURE 9.18
Dans le référentiel S, la source, le miroir et le détecteur se déplacent à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$. On a besoin des horloges immobiles H_1 et H_2 pour mesurer l'intervalle de temps entre les deux événements.

où L correspond à l'hypoténuse du triangle rectangle, dont les côtés mesurent h et $\frac{1}{2}\, v\, \Delta t$ respectivement. Selon le théorème de Pythagore,

$$L = \sqrt{h^2 + \left(\frac{v\,\Delta t}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(c\,\Delta\tau)^2}{4} + \frac{(v\,\Delta t)^2}{4}}\,, \tag{9.9}$$

où on a utilisé l'équation 9.7 pour exprimer h en fonction de l'intervalle de temps propre $\Delta\tau$, qui est mesuré dans le référentiel S'.

Pour obtenir une relation entre Δt et $\Delta\tau$, on remplace l'équation 9.9 dans l'équation 9.8 et on met le résultat au carré :

$$(\Delta t)^2 = \frac{4L^2}{c^2} = (\Delta\tau)^2 + \frac{v^2}{c^2}(\Delta t)^2$$

$$(\Delta t)^2\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] = (\Delta\tau)^2$$

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,.$$

Le module de la vitesse du référentiel S' doit être plus petit que le module de la vitesse de la lumière, de telle sorte que l'intervalle de temps Δt mesuré par les horloges de Benoît est plus grand que l'intervalle de temps $\Delta\tau$, mesuré par l'horloge d'Ariane. On dit que le temps est *dilaté* lorsque les événements ne se produisent pas à la même position.

L'intervalle de temps propre entre deux événements est mesuré dans le référentiel où les deux événements sont mesurés à la même position, c'est-à-dire en utilisant une seule horloge immobile. L'intervalle de temps entre ces événements est plus grand lorsqu'il est mesuré dans un autre référentiel, au moyen de deux horloges immobiles.

Intervalle de temps propre

Pour simplifier l'écriture, il est utile d'utiliser le *paramètre de vitesse* $\beta = v/c$ et le facteur de Lorentz γ :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{9.10}$$

Facteur de Lorentz

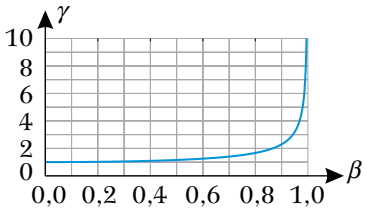


FIGURE 9.19
Le graphique du facteur de Lorentz en fonction du paramètre de vitesse $\beta = v/c$

Intervalle de temps dilaté

Le paramètre de vitesse est un nombre sans unité, compris entre 0 et 1. Le facteur de Lorentz correspond au facteur qui différencie la relativité d'Einstein par rapport à la relativité de Galilée (*voir la figure 9.19*). Ce facteur est très près de l'unité tant que le facteur de vitesse β est plus petit que 0,1. En effet, pour $\beta = 0{,}100$, $\gamma = 1{,}0050$. On peut donc dire que les effets relativistes sont très faibles ou même négligeables lorsque la vitesse ne dépasse pas 10% de la vitesse de la lumière. Par contre, le facteur de Lorentz augmente très rapidement pour $v > 0{,}9\ c$.

L'intervalle de temps Δt s'écrit en fonction du facteur de Lorentz :

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\, \Delta \tau\ . \qquad (9.11)$$

La différence de mesure entre Ariane et Benoît est le résultat de la relativité de la simultanéité. Pour Ariane, Benoît mesure un temps plus grand parce qu'il n'a pas synchronisé correctement ses horloges. Selon elle, les horloges H_1 et H_2 du référentiel S n'indiquent pas le même temps.

EXEMPLE 9.2 Un long voyage

Un vaisseau spatial se déplace à une vitesse dont le module est de 0,900 c, sa destination étant une étoile éloignée de 7,2 al de la Terre. Déterminez le temps nécessaire :

a. pour les gens de la Terre ;
b. pour les voyageurs dans le vaisseau.

SOLUTION a.

Illustrer la situation

La figure 9.20 montre le schéma de la situation selon le référentiel de la Terre.

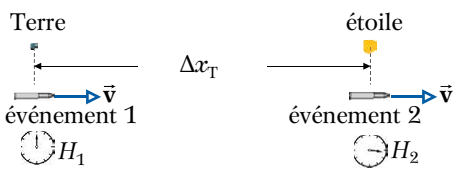


FIGURE 9.20
Le schéma de la situation selon le référentiel de la Terre

Décortiquer le problème

La distance de 7,2 al est la distance mesurée dans le référentiel de la Terre. Dans ce référentiel, deux horloges sont nécessaires pour mesurer l'intervalle de temps (une vis-à-vis de la position initiale du vaisseau et une autre vis-à-vis de la position finale).

Connues	Inconnue
$v = 0{,}900\ c$	Δt_T
$\Delta x_T = 7{,}2$ al	

REMARQUE

Une année-lumière correspond à la distance parcourue par la lumière en une année. On peut donc écrire

$$1 \text{ al} = (1 \text{ a})\ c\ .$$

Il n'est pas nécessaire d'exprimer l'année-lumière en mètres si on exprime le temps en années et la vitesse en fraction de la vitesse de la lumière.

Identifier la clé

Étant donné que la distance et l'intervalle de temps sont mesurés dans le même référentiel, nous n'avons pas besoin de la relativité pour calculer le temps à partir de la vitesse du vaisseau :

$$\Delta x_T = v\, \Delta t_T \Rightarrow \Delta t_T = \frac{\Delta x_T}{v}\ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons les valeurs numériques :

$$\Delta t_T = \frac{7{,}2 \text{ al}}{0{,}900\ c} = \frac{7{,}2 \text{ a}\ c}{0{,}900\ c} = 8{,}0 \text{ a}\ . \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Illustrer la situation

La figure 9.21 montre le schéma de la situation pour les voyageurs. Dans ce référentiel, c'est la Terre et l'étoile qui se déplacent à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}' = -\vec{\mathbf{v}}$.

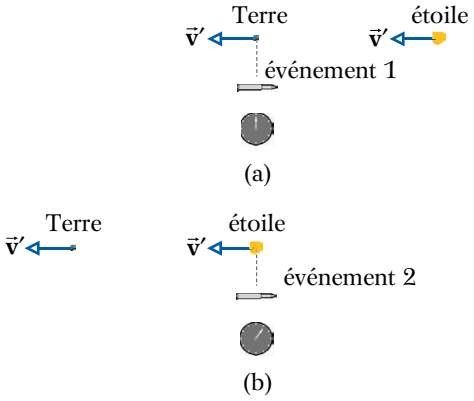


FIGURE 9.21
Le schéma de la situation dans le référentiel du vaisseau : (a) l'événement 1 ; (b) l'événement 2.

Décortiquer le problème

Les voyageurs ont besoin d'une seule horloge pour mesurer l'intervalle de temps. Ils mesurent donc le temps propre.

Connues	Inconnue
$\Delta t_T = 8{,}0$ a	$\Delta t_v = \Delta\tau$
$v = 0{,}900\ c$	

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 9.11 reliant l'intervalle de temps propre et l'intervalle de temps mesuré dans un autre référentiel en mouvement :

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau \Rightarrow \Delta\tau = \frac{\Delta t_T}{\gamma}, \qquad \text{(ii)}$$

où γ est le facteur de Lorentz, donné par l'équation 9.10 :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord le facteur de Lorentz :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}900)^2}} = 2{,}29\,.$$

L'intervalle de temps mesuré par les voyageurs est

$$\Delta\tau = \frac{8{,}0 \text{ a}}{2{,}29} = 3{,}5 \text{ a}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le temps mesuré par les voyageurs doit être plus faible, car ces derniers mesurent un intervalle de temps propre, au moyen d'une seule horloge, celle du vaisseau.

EXEMPLE 9.3 La désintégration des muons

Les muons sont des particules subatomiques semblables aux électrons, mais ayant une masse environ 200 fois plus grande. Les muons sont aussi des particules instables, qui se désintègrent en un temps moyen de 2,20 µs lorsqu'ils sont immobiles. Dans une expérience avec des muons en mouvement, on mesure qu'ils se désintègrent en un temps moyen de 15,6 µs. Quel est le module de la vitesse des muons par rapport au laboratoire ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 9.22 montre le schéma de la situation dans le référentiel du laboratoire. L'événement 1 est la production d'un muon, et l'événement 2 est sa désintégration.

Décortiquer le problème

Dans le laboratoire, nous avons besoin de deux horloges immobiles pour mesurer l'intervalle de temps. C'est donc un intervalle de temps dilaté qui est mesuré. Dans le référentiel où le muon est immobile, une seule horloge est nécessaire.

FIGURE 9.22
Le schéma de la situation dans le référentiel du laboratoire

Connues	Inconnue
$\Delta\tau = 2{,}20\ \mu s$	v
$\Delta t_L = 15{,}6\ \mu s$	

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 9.11 qui relie le temps propre et le temps dilaté :

$$\Delta t_L = \gamma\,\Delta\tau\,, \qquad \text{(i)}$$

où γ est le facteur de Lorentz, donné par l'équation 9.10 :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord le facteur de Lorentz à l'aide de l'équation (i) :

$$\gamma = \frac{\Delta t_L}{\Delta\tau} = \frac{15{,}61\ \mu s}{2{,}20\ \mu s} = 7{,}091\,. \qquad \text{(iii)}$$

Nous devons ensuite exprimer le paramètre de vitesse β à partir du facteur de Lorentz :

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1-\beta^2$$

$$\Rightarrow \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\,. \qquad \text{(iv)}$$

Nous obtenons alors le paramètre de vitesse :

$$\beta = \sqrt{1-\frac{1}{(7{,}091)^2}} = 0{,}990\,.$$

Le module de la vitesse des muons est alors

$$v = \beta c = 0{,}990\ c\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le module de la vitesse des muons doit être très près du module de la vitesse de la lumière, étant donné que le temps de désintégration moyen mesuré dans le laboratoire est sept fois plus grand que le temps moyen mesuré lorsque les muons sont au repos.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 9.2

Ariane se trouve dans un vaisseau qui se déplace de la Terre vers la planète Uranus à une vitesse dont le module est de 0,8 c. Benoît est resté sur Terre. En arrivant à Uranus, Ariane envoie une onde radio vers la Terre.

a. Quel observateur mesure un intervalle de temps propre pour la durée du voyage d'Ariane ?

b. Quel observateur mesure un intervalle de temps propre pour le temps entre l'émission et la réception de l'onde radio ?

Le paradoxe des jumeaux

Dans l'exemple 9.2, des voyageurs se déplacent de la Terre vers une étoile à une vitesse proche de la vitesse de la lumière. Le voyage dure moins longtemps pour eux que pour les gens sur la Terre. On veut maintenant analyser la situation où les voyageurs font un aller-retour et reviennent sur Terre. La durée du voyage pour les voyageurs différera de celle pour les gens de la Terre. Cette situation est connue sous le nom de *paradoxe des jumeaux* ou *paradoxe de Langevin*, car l'énoncé a été formulé en 1911 par le physicien français Paul Langevin (1872-1946).

Prenons deux jumeaux, Caroline et David. À leur 20^e anniversaire, David entreprend un voyage aller-retour vers l'étoile Sirius (l'étoile la plus brillante dans le ciel, après le Soleil), située à 8,6 al de la Terre. Son vaisseau se déplace à une vitesse dont le module est de 0,86 c par rapport à Caroline, qui demeure

sur Terre. On veut analyser la durée du voyage, et donc l'âge de chacun des jumeaux. Pour simplifier le calcul, on néglige le temps d'accélération pour David, au départ, puis au passage près de Sirius et finalement à l'arrivée.

On commence par analyser l'aller vers Sirius. Le premier événement est le départ de David, et le deuxième événement est l'arrivée de David à Sirius. Dans le référentiel de Caroline, David doit franchir une distance de 8,6 al à une vitesse de $0{,}86\,c$. L'année lumière (al) correspond à la distance parcourue par la lumière en une année, c'est-à-dire que

$$1\text{ al} = (1\text{ a})\,c\,. \tag{9.12}$$

Le temps nécessaire dans le référentiel de Caroline se calcule facilement à l'aide de la cinématique de tous les jours :

$$t_2 - t_1 = \Delta t_{\text{a,C}} = \frac{\Delta x_{\text{C}}}{v} = \frac{(8{,}6\,\text{a})\,c}{0{,}86\,c} = 10\text{ a}\,. \tag{9.13}$$

Dans le référentiel de Caroline, il faut deux horloges pour mesurer ce temps : une horloge vis-à-vis de la Terre et une horloge vis-à-vis de Sirius. Le temps de Caroline n'est pas un temps propre.

Pour David, le temps nécessaire pour se rendre à Sirius correspond à l'intervalle de temps propre entre les deux événements, car il mesure l'intervalle de temps entre les deux événements avec une seule horloge, celle du vaisseau. L'intervalle de temps est

$$t'_2 - t'_1 = \Delta t_{\text{a,D}} = \Delta\tau = \frac{\Delta t_{\text{a,C}}}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta t_{1,\text{C}}$$
$$\Delta t_{\text{a,D}} = \sqrt{1-0{,}86^2} \times 10\text{ a} = 5{,}1\text{ a}\,. \tag{9.14}$$

L'analyse du retour se fait de la même façon. L'événement 3 est le départ de Sirius, et l'événement 4 est le retour sur Terre. Caroline mesure un intervalle de temps dilaté, au moyen de deux horloges :

$$t_4 - t_3 = \Delta t_{\text{r,C}} = \frac{8{,}6\text{ al}}{0{,}86\,c} = 10\text{ a}\,. \tag{9.15}$$

Pour David, l'intervalle de temps est mesuré par une horloge immobile, celle du vaisseau. Il mesure un temps propre :

$$t'_4 - t'_3 = \Delta t_{\text{r,D}} = \Delta\tau = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta t_{\text{r,C}} = 5{,}1\text{ a}\,. \tag{9.16}$$

Selon l'analyse précédente, Caroline, qui est restée immobile, a vieilli de 20 a alors que David, qui s'est déplacé à grande vitesse, a vieilli de 10,2 a. Mais cette analyse est-elle vraiment correcte ? Lorsqu'on dit que Caroline est restée immobile et que David s'est déplacé avec une vitesse dont le module est $v = 0{,}86\,c$, ce n'est pas une information absolue. Pour David, c'est lui qui est demeuré immobile et c'est Caroline qui s'est déplacée en faisant un aller-retour. Dans ce cas, est-ce que c'est Caroline qui a vieilli de seulement 10,2 a et David qui a vieilli de 20 a ? Si on fait l'expérience, il ne peut y avoir deux résultats : soit c'est David qui est plus jeune ou bien c'est Caroline qui est plus jeune. Il semble y avoir un paradoxe dans les résultats de la relativité.

En fait, le paradoxe n'existe pas, car les mouvements de chaque jumeau ne sont pas équivalents. Pendant tout le voyage, Caroline demeure dans le même référentiel, celui de la Terre. De son côté, David doit changer de référentiel lorsqu'il arrive près de Sirius. Le voyage aller-retour s'effectue avec une vitesse de même module $v = 0{,}86\ c$, mais sa vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ doit changer d'orientation.

Certains auteurs indiquent que pour lever complètement le paradoxe, on doit considérer le fait que David doit subir une accélération pour changer le sens de son mouvement et qu'il faut alors utiliser la relativité générale, étant donné que la relativité restreinte n'est valide que pour les référentiels inertiels, donc non accélérés. Ceci est incorrect. David vieillit moins, car il change de référentiel. C'est le changement de référentiel et non l'accélération qui fait que David a moins vieilli.

En résumé, on peut dire :

Un observateur qui effectue un aller-retour en changeant de référentiel vieillit moins rapidement qu'un observateur qui ne change pas de référentiel durant le trajet.

On pourrait aussi considérer un trajet circulaire à très grande vitesse. Dans ce cas, la vitesse change continuellement d'orientation. Pour faire l'analyse, on doit décomposer le mouvement en un grand nombre de segments rectilignes ayant une vitesse constante. Pendant le trajet de tous les segments rectilignes, le voyageur mesure un temps propre, car il mesure cet intervalle de temps avec une seule horloge, alors que la personne immobile mesure un intervalle de temps dilaté, au moyen de deux horloges. En faisant la somme de tous les intervalles de temps correspondant à tous les segments linéaires, on trouve de nouveau que le voyageur a moins vieilli durant le voyage que la personne immobile.

Les vérifications expérimentales

Les résultats de la relativité semblent bizarres, car ils sont différents de notre expérience de tous les jours. Nous n'avons pas à nous inquiéter d'arriver trop tôt à un rendez-vous à cause de la dilatation du temps, car nous nous déplaçons à des vitesses très faibles par rapport à la vitesse de la lumière. Même un avion de ligne qui se déplace à 800 km/h a un paramètre de vitesse $\beta = 7{,}4 \times 10^{-7}$, ce qui produit un facteur de Lorentz $\gamma = 1{,}000\,000\,000\,000\,3$. Pour un trajet de 8 h, la relativité produit une dilatation du temps de 8 ns.

Même si la dilatation du temps est très faible, elle a été vérifiée dans les années 1970 au moyen d'horloges atomiques. Ces horloges sont très précises et peuvent mesurer des intervalles de temps de l'ordre de la nanoseconde. De plus, lorsqu'on déplace une horloge atomique dans un aller-retour, on doit la synchroniser avec une horloge atomique demeurée fixe, car l'horloge s'étant déplacée a pris du retard, comme David dans l'expérience des jumeaux.

Le système de localisation mondial (GPS) utilise des horloges atomiques à bord de satellites qui tournent autour de la Terre à des vitesses de quelques kilomètres par seconde. Le temps mesuré par ces horloges atomiques est différent du temps mesuré sur Terre. L'effet relativiste doit être pris en compte pour donner une position correcte.

La dilatation du temps a d'abord été vérifiée en utilisant le temps de désintégration de particules subatomiques. Les muons sont des particules instables

produites en haute atmosphère par les rayons cosmiques (des protons et des électrons venant de l'espace). Sans la dilatation du temps, la durée de vie de ces particules (2,2 µs) serait trop courte pour qu'elles puissent être observées au niveau de la mer. Comme ces particules ont des vitesses très près de celle de la lumière, la durée de vie est dilatée par rapport au référentiel de la Terre, et les muons se rendent jusqu'au sol avant de se désintégrer. En 1941, les physiciens Bruno Rossi et David B. Hall ont mesuré le nombre de muons en fonction de l'altitude ainsi que leur énergie cinétique. Leurs mesures ont permis de confirmer l'équation 9.11.

9.6 La contraction des longueurs

Il est simple de mesurer la longueur d'un objet immobile dans votre référentiel. Vous placez une règle à côté de l'objet et vous notez les endroits de la règle où coïncident les extrémités de l'objet. Il est plus difficile de mesurer la longueur d'un objet en mouvement, comme celui de la figure 9.23. Pour ce faire, vous devez mesurer la position des extrémités de l'objet en même temps (*voir la figure 9.23a*). Si vous mesurez d'abord la partie arrière de l'objet puis la partie avant, comme le montre la figure 9.23b, votre mesure sera plus grande que la longueur de l'objet. De même, si vous mesurez d'abord la partie avant et ensuite la partie arrière, comme le montre la figure 9.23c, votre mesure sera plus petite que la longueur de l'objet. Étant donné que la simultanéité de deux événements est une notion relative, la longueur d'un objet ou la distance entre deux événements est une quantité relative.

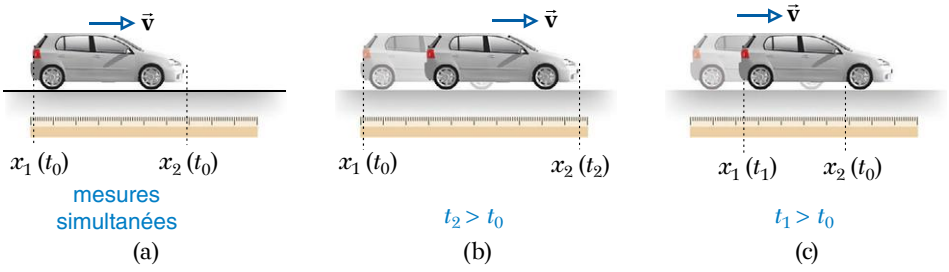


FIGURE 9.23

(a) Pour mesurer la longueur d'un objet en mouvement, on doit mesurer la position de ses extrémités en même temps. (b) La mesure de la position arrière de l'objet précède la mesure de la position avant ; la mesure est incorrecte. (c) La mesure de la position avant de l'objet précède la mesure de la position arrière ; la mesure est incorrecte.

La *longueur propre* L_0 d'un objet correspond à la longueur de l'objet mesurée dans un référentiel où ce dernier est immobile. Pour obtenir la longueur de l'objet lorsque celui-ci est en mouvement, prenons la fusée d'Ariane qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ par rapport au référentiel de Benoît (*voir la figure 9.24, page suivante*). Dans le référentiel d'Ariane, sa fusée a une longueur L_0. Benoît mesure deux événements qui se produisent au même point : l'événement 1, lorsque l'avant du vaisseau est vis-à-vis de lui, et l'événement 2, lorsque l'arrière du vaisseau passe vis-à-vis de lui. Cet intervalle de temps est un temps propre, car celui-ci est mesuré au moyen d'une seule horloge. La longueur du vaisseau, pour Benoît, est alors

$$L = v\,\Delta t_B = v\,\Delta\tau \Rightarrow v = \frac{L}{\Delta\tau}\,. \tag{9.17}$$

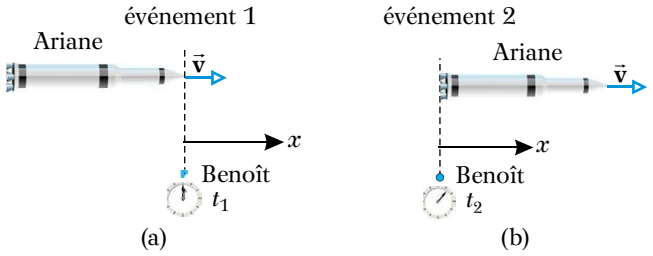


FIGURE 9.24
Pour mesurer la longueur du vaisseau d'Ariane, Benoît mesure l'intervalle de temps entre deux événements : (a) l'avant du vaisseau est vis-à-vis de lui ; (b) l'arrière du vaisseau est vis-à-vis de lui.

Pour Ariane, le référentiel de Benoît se déplace à une vitesse $-\vec{\mathbf{v}}$, et les deux événements ne se produisent pas au même point. Elle a besoin de deux horloges immobiles (une en avant du vaisseau et une en arrière du vaisseau). Elle mesure un temps dilaté $\Delta t = \gamma\,\Delta\tau$. La vitesse du référentiel de Benoît a un module :

$$v = \frac{L_0}{\Delta t_A} = \frac{L_0}{\gamma\,\Delta\tau}\,. \tag{9.18}$$

En insérant l'équation 9.18 dans l'équation 9.17, on obtient

$$\frac{L}{\Delta\tau} = \frac{L_0}{\gamma\,\Delta\tau}$$

Contraction des longueurs

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2}\,L_0\,, \tag{9.19}$$

où $\beta = v/c$ est le paramètre de vitesse.

Étant donné que le facteur de Lorentz est toujours plus grand que 1 pour $v > 0$, la longueur d'un objet en mouvement est plus courte que sa longueur propre. On dit que la longueur est *contractée*. On obtient le même résultat pour la distance entre deux objets. Dans le référentiel où les objets sont immobiles, la distance entre ces objets est appelée la *distance propre*. Si on mesure la distance entre ces objets dans un référentiel en mouvement par rapport à ces derniers, la distance est contractée.

MISE EN GARDE

Comme le montre la situation précédente, le temps propre entre deux événements et la longueur propre correspondante ne sont pas mesurés dans le même référentiel. On ne peut pas obtenir une vitesse en divisant la longueur propre par un temps propre.

On a analysé la dimension d'un objet parallèle à sa vitesse. Les dimensions perpendiculaires comme la hauteur ne sont pas affectées par la vitesse de l'objet. Comme le montre la figure 9.25, on obtient la même hauteur même si la position de la partie inférieure et de la partie supérieure de l'objet ne sont pas mesurées en même temps.

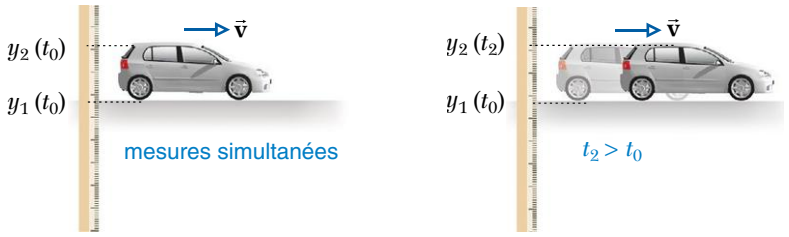


FIGURE 9.25
La hauteur de l'objet (dimension perpendiculaire à $\vec{\mathbf{v}}$) : (a) pour des mesures simultanées ; (b) pour des mesures à des temps différents.

Contraction des longueurs

La longueur propre L_0 d'un objet est sa longueur mesurée dans un référentiel où l'objet est immobile. Lorsque l'objet se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$, la dimension parallèle à sa vitesse (la longueur) est contractée $L = L_0/\gamma$, mais les dimensions perpendiculaires à sa vitesse (hauteur, profondeur) ne sont pas modifiées.

On a utilisé ce résultat sans s'en rendre compte lorsqu'on a analysé la dilatation du temps à la figure 9.18.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 9.3

Un train a une longueur de 1 km pour les voyageurs à l'intérieur du train. Ce dernier se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ par rapport au sol. Le train entre dans un tunnel qui a une longueur de 1 km pour des observateurs immobiles à côté de la voie ferrée. Déterminez lequel des énoncés suivants correspond à la mesure de la longueur du tunnel selon les voyageurs :

(i) si le tunnel a la même longueur que le train ;
(ii) si le tunnel est plus long que le train ;
(iii) si le tunnel est plus court que le train ;
(iv) si la longueur du train ne peut pas être mesurée par les voyageurs.

EXEMPLE 9.4 La distance vers Sirius

Un vaisseau se déplace vers l'étoile Sirius à une vitesse dont le module est de 0,860 c. Dans le référentiel de la Terre, Sirius est située à une distance de 8,6 al. Quelle est la distance à parcourir selon les voyageurs ?

SOLUTION

Identifier la clé

Dans le référentiel de la Terre, Sirius est approximativement immobile. La distance mesurée dans le référentiel de la Terre est une distance propre L_0.

Connues		Inconnue
$L_0 = 8{,}60$ al	$\beta = 0{,}860$	L

Identifier la clé

Les voyageurs mesurent une distance contractée.

Selon l'équation 9.19,

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2}\,L_0 \,. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$L = \sqrt{1-0{,}860^2}\,(8{,}60 \text{ al}) = 4{,}39 \text{ al}\,.$$

(réponse)

Valider la réponse

La distance est plus courte pour les voyageurs parce qu'elle est contractée, selon les résultats de la relativité restreinte.

L'invariance du temps propre

Selon la relativité restreinte, le temps et la distance entre deux événements sont des quantités relatives, c'est-à-dire qu'on obtient des mesures différentes pour des référentiels différents. Ceci est différent de ce qu'on a appris à partir de la relativité galiléenne, où le temps est absolu et que la distance entre deux points ne change pas, même lorsqu'on utilise des référentiels différents.

Même si le temps et la distance sont relatifs en relativité restreinte, il existe des quantités qui ne changent pas d'un référentiel à l'autre. Ce sont des invariants. Le premier exemple d'invariant est le temps propre entre deux événements.

Pour le prouver, on analyse de nouveau l'expérience de la section 9.5 qui a permis de trouver que le temps est dilaté. La figure 9.26 illustre de nouveau l'expérience dans laquelle une impulsion lumineuse est émise vers le haut, puis réfléchie sur un miroir et finalement détectée. Les deux événements sont mesurés dans trois référentiels. À la figure 9.26b, dans le référentiel S'' (le référentiel du laboratoire), les deux événements se produisent à la même position. À la figure 9.26a, les deux événements sont mesurés dans le référentiel S qui observe le laboratoire se déplacer à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ orientée vers la gauche. De même, la figure 9.26c montre les deux événements dans le référentiel S', qui observe le laboratoire se déplacer à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}'$ vers la droite par rapport à S''.

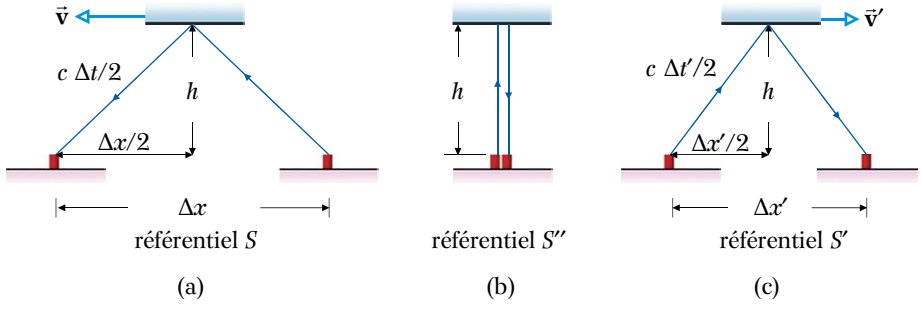


FIGURE 9.26

Le temps entre deux événements est mesuré dans trois référentiels : (a) le référentiel S observe le laboratoire se déplacer à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ vers la gauche ; (b) le référentiel S'' est le référentiel où les deux événements se produisent à la même position ; (c) le référentiel S' observe le laboratoire se déplacer à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}'$ vers la droite.

L'intervalle de temps propre entre les deux événements est mesuré dans le référentiel S'', car dans ce référentiel, une seule horloge immobile est utilisée. Selon l'équation 9.7, la distance entre la source et le miroir est

$$h = \frac{c\,\Delta\tau}{2}. \tag{9.20}$$

Cette distance est la même dans les trois référentiels, étant donné que c'est une distance perpendiculaire à la vitesse des référentiels. On peut calculer la distance h dans chacun des référentiels. Selon les triangles rectangles de la figure 9.26, on obtient

$$h^2 = \left(\frac{c\,\Delta t}{2}\right)^2 - \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\,\Delta t'}{2}\right)^2 - \left(\frac{\Delta x'}{2}\right)^2. \tag{9.21}$$

On insère ensuite l'équation 9.20 dans l'équation 9.21, et on multiplie chacun des membres de l'équation par $4/c^2$ pour obtenir le carré du temps propre :

$$(\Delta\tau)^2 = (\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2 = (\Delta t')^2 - \left(\frac{\Delta x'}{c}\right)^2 . \qquad (9.22)$$

Invariance du temps propre

Selon l'équation 9.22, tous les référentiels peuvent calculer le même intervalle de temps propre à partir de leurs mesures de distance Δx et de temps Δt entre les événements. Le temps propre est un *invariant relativiste*.

Un adage populaire indique que selon Einstein, tout est relatif. L'équation 9.22 montre que l'adage est faux. Einstein n'a jamais dit que tout était relatif, car il y a des invariants relativistes comme le temps propre entre deux événements.

EXEMPLE 9.5 Le module de la vitesse d'une particule subatomique

La particule Σ^- est une particule subatomique instable produite dans les accélérateurs de particules. La durée de vie moyenne de cette particule est de $1{,}48 \times 10^{-10}$ s lorsque celle-ci est au repos. Dans un laboratoire, on mesure que des particules sigma parcourent une distance de 44,20 cm entre l'endroit où elles sont produites et l'endroit où elles se désintègrent. Déterminez le module de la vitesse des particules Σ^-. Exprimez la réponse en fonction du module de la vitesse de la lumière.

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 9.27 montre la production et la désintégration d'une particule Σ^- dans le référentiel du laboratoire S.

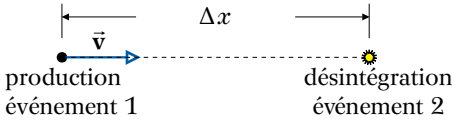


FIGURE 9.27
Le schéma de la situation pour le référentiel du laboratoire S

Décortiquer le problème

Dans le référentiel de la particule Σ^-, celle-ci est immobile. La durée de vie moyenne dans ce référentiel est un temps propre, car elle peut être mesurée au moyen d'une seule horloge immobile.

Connues	Inconnue
$\Delta t' = \Delta\tau = 1{,}48 \times 10^{-10}$ s	v
$\Delta x = 0{,}4420$ m	

Identifier les clés

Nous calculons le module de la vitesse dans le référentiel S à partir de la distance parcourue Δx et du temps Δt :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} . \qquad \text{(i)}$$

L'intervalle de temps Δt mesuré dans le référentiel du laboratoire peut être calculé à partir de l'intervalle de temps propre $\Delta\tau$ à l'aide de l'équation 9.22 :

$$(\Delta\tau)^2 = (\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2 . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous isolons d'abord le temps Δt dans l'équation (ii) :

$$\Delta t = \sqrt{(\Delta\tau)^2 + \frac{(\Delta x)^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{(c\,\Delta\tau)^2 + (\Delta x)^2}}{c} . \qquad \text{(iii)}$$

Le module de la vitesse des particules Σ^- est donc

$$v = \frac{\Delta x}{\sqrt{(c\,\Delta\tau)^2 + (\Delta x)^2}}\, c$$

$$= \frac{0{,}4420}{\sqrt{(2{,}998 \times 10^8 \times 1{,}48 \times 10^{-10})^2 + (0{,}4420)^2}}\, c$$

$$v = 0{,}995\, c . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le module de la vitesse est plus petit que c, comme il se doit.

9.7 L'effet Doppler relativiste

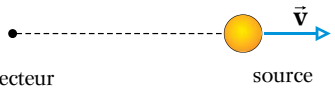


FIGURE 9.28
Une source lumineuse s'éloigne d'un détecteur. La fréquence de la lumière mesurée est plus faible que la fréquence propre.

Nous avons vu à la section 3.8 que la fréquence des ondes sonores change lorsque la source ou le détecteur sont en mouvement par rapport à l'air. La lumière étant une onde, elle est aussi soumise à l'effet Doppler. Contrairement au son, il n'y a pas de référentiel absolu dans lequel l'onde lumineuse se propage. La fréquence de la lumière mesurée dans un référentiel doit dépendre uniquement de la vitesse relative entre le détecteur et la source.

La figure 9.28 montre une source lumineuse qui s'éloigne du détecteur avec une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$. Dans le référentiel de la source, l'onde lumineuse a une fréquence f_0, qu'on appelle la *fréquence propre*. La fréquence observée par le détecteur est f:

$$f = \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}}\, f_0 \,, \tag{9.23}$$

avec $\beta = v/c$. Les signes supérieurs (– au numérateur et + au dénominateur) doivent être utilisés lorsque la source et le détecteur s'éloignent l'un de l'autre, comme à la figure 9.28, de telle sorte que $f < f_0$. Dans le cas contraire, les signes inférieurs (+ au numérateur et – au dénominateur) sont utilisés, et $f > f_0$.

REMARQUE

L'effet Doppler présenté ici correspond à un décalage de fréquence lorsque la source et le détecteur se déplacent directement l'un vers l'autre. Il y a aussi un décalage lorsqu'ils se déplacent de façon perpendiculaire à cause de la dilatation du temps. Cette situation n'est pas analysée dans le présent ouvrage.

Habituellement, on mesure la longueur d'onde de la lumière plutôt que la fréquence. Étant donné que $c = \lambda f$, on obtient la longueur d'onde mesurée par le détecteur en fonction de la longueur d'onde propre λ_0:

Effet Doppler relativiste

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}\, \lambda_0 \,. \tag{9.24}$$

L'effet Doppler permet de mesurer la vitesse des étoiles et des galaxies par rapport à la Terre. Lorsqu'une étoile s'éloigne de la Terre, la longueur d'onde de la lumière provenant de celle-ci est plus grande que la longueur d'onde émise ($\lambda > \lambda_0$). On dit que la lumière est *décalée vers le rouge*. Si au contraire l'étoile se déplace vers la Terre, la longueur d'onde de la lumière sera plus petite que la longueur d'onde émise ($\lambda < \lambda_0$). On dit alors que la lumière est *décalée vers le bleu*.

La longueur d'onde de la lumière qu'on reçoit en provenance de la plupart des galaxies est décalée vers le rouge ($\lambda > \lambda_0$). Ce décalage indique que ces galaxies s'éloignent de nous. De plus, on observe que plus une galaxie est éloignée, plus le décalage est élevé. Ceci veut dire que plus une galaxie est éloignée de la Terre, plus elle s'éloigne de nous rapidement. Ces observations montrent donc que nous vivons dans un univers en expansion.

Les astronomes décrivent le décalage de la longueur d'onde par un facteur z, un paramètre sans dimension défini par

$$z \equiv \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}} - 1 . \qquad (9.25)$$

MISE EN GARDE

Lorsqu'on parle d'un décalage vers le bleu ou d'un décalage vers le rouge, cela ne veut pas dire que la lumière observée est bleue ou rouge. Cela indique seulement que le spectre visible est déplacé vers les petites longueurs d'onde (vers le bleu) ou vers de plus grandes longueurs d'onde (vers le rouge).

EXEMPLE 9.6 La vitesse d'une galaxie

Au laboratoire, l'hydrogène émet de la lumière ayant une longueur d'onde de 656,5 nm. On observe la même raie spectrale à une longueur d'onde de 920,0 nm dans la lumière provenant d'une galaxie éloignée. Quel est le module de la vitesse de la galaxie par rapport à notre système solaire ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$\lambda_0 = 656{,}5$ nm	v
$\lambda = 920{,}0$ nm	

Identifier la clé

La galaxie s'éloigne de nous, étant donné que la longueur observée est plus grande que la longueur d'onde émise. La **clé** est l'équation 9.24 avec les signes supérieurs :

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\lambda_0 . \qquad (i)$$

Résoudre le problème

Nous isolons d'abord β :

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 = \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 \beta = 1 + \beta$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 + 1} . \qquad (ii)$$

Nous calculons ensuite $(\lambda/\lambda_0)^2$:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 = \left(\frac{920{,}0 \text{ nm}}{656{,}5 \text{ nm}}\right)^2 = 1{,}964 . \qquad (iii)$$

Nous insérons ce résultat dans l'équation (ii) :

$$\beta = \frac{1{,}964 - 1}{1{,}964 + 1} = 0{,}325 .$$

Comme $\beta = v/c$, nous obtenons le module de la vitesse de la galaxie :

$$v = 0{,}325\, c . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

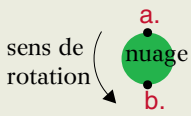
Le module de la vitesse est plus petit que c, comme il se doit. Le module de la vitesse est une quantité positive, car c'est un module.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 9.4

La lumière provenant du centre d'une galaxie a une longueur d'onde qui varie très légèrement selon la position observée, à cause de la rotation d'un nuage de gaz autour du centre de la galaxie, comme le montre la figure ci-dessous. Déterminez si on observe un décalage vers le bleu ou un décalage vers le rouge :

a. pour le point du haut ;

b. pour le point du bas.



La démonstration de la formule de l'effet Doppler relativiste

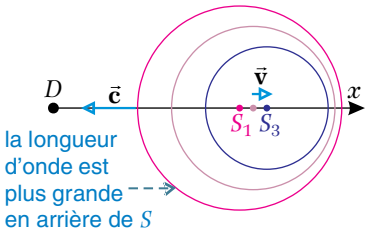


FIGURE 9.29
Une source s'éloigne à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$.

Pour démontrer l'équation 9.24, on considère une source qui émet une onde lumineuse à une longueur d'onde λ_0 et qui s'éloigne du détecteur, comme le montre la figure 9.29. Soit $T = 1/f$ la période de l'onde lumineuse. Le mouvement de la source produit un changement de la longueur d'onde, comme nous l'avons vu à la section 3.8 dans le cas des ondes sonores. La longueur d'onde est plus grande en arrière de la source, car durant une période T, la source s'est déplacée d'une distance vT :

$$\lambda = cT + vT = c\,(1+\beta)\,T\,. \tag{9.26}$$

La période T est celle qui est mesurée par le détecteur. Ce temps est un intervalle de temps dilaté, donc $T = \gamma T_0$, où T_0 est la période propre, mesurée dans le référentiel où la source est immobile. Dans ce référentiel, on peut écrire $T_0 = \lambda_0/c$, où λ_0 est la longueur d'onde dans ce référentiel. En insérant ce résultat dans l'équation 9.26, on obtient

$$\begin{aligned}\lambda &= c\,(1+\beta)\,\frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ &= cT_0\,\frac{1+\beta}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}\\ \lambda &= \lambda_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,.\end{aligned} \tag{9.27}$$

C'est bien l'équation 9.24 dans le cas de la source qui s'éloigne du détecteur. On peut refaire l'analyse lorsque la source s'approche du détecteur, en remplaçant v par $-v$ dans l'équation 9.26.

On a démontré l'équation de l'effet Doppler lorsque la source se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$. On pourrait aussi analyser la situation lorsque c'est le détecteur qui se déplace plutôt que la source. On obtient le même résultat, comme il se doit, selon le principe de relativité d'Einstein.

9.8 Les transformations de Lorentz

En mécanique newtonienne, on peut comparer les coordonnées d'un événement mesurées dans deux référentiels différents à l'aide des transformations de Galilée. Ces transformations sont présentées dans les équations 9.1. Elles sont

valables dans le domaine non relativiste, lorsque $v \ll c$. On peut trouver des équations de transformation pour la position et le temps d'un événement dans le cas général, valides pour tous les modules de vitesse v. Elles doivent respecter les conditions suivantes :

- Les nouvelles transformations doivent se réduire aux transformations de Galilée lorsque $v \ll c$.
- Les équations doivent transformer la position et le temps d'un événement.
- Les nouvelles transformations doivent assurer que le module de la vitesse de la lumière est le même dans tous les référentiels.
- Le temps propre $\Delta\tau$ doit être le même dans tous les référentiels.

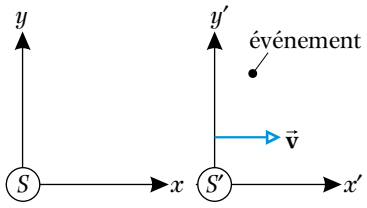


FIGURE 9.30
Un événement est décrit par les coordonnées $(x\,;\,t)$ dans le référentiel S et par les coordonnées $(x'\,;\,t')$ dans le référentiel S'.

Les équations nécessaires sont appelées les *transformations de Lorentz*, car elles ont été découvertes par le physicien néerlandais Hendrik Antoon Lorentz. Pour les référentiels illustrés à la figure 9.30, les transformations pour obtenir x' et t' à partir de x et de t sont

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\,(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right). \end{aligned} \tag{9.28}$$

Transformations de Lorentz

Les coordonnées y et z sont les mêmes dans les deux référentiels, car seule la coordonnée parallèle à la vitesse est touchée par la contraction des longueurs.

On peut inverser ces équations pour obtenir les coordonnées mesurées dans le référentiel S à partir des coordonnées dans S'. Les transformations correspondent aux équations 9.28, en remplaçant v par $-v$:

$$\begin{aligned} x &= \gamma\,(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right). \end{aligned} \tag{9.29}$$

Ces transformations se réduisent aux transformations de Galilée. En effet, lorsque $v \ll c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1$ et l'équation pour x' se réduit aux équations 9.1. De plus, l'équation de t' se réduit à $t' = t$, car $v/c \approx 0$ dans la limite non relativiste.

Les équations 9.28 permettent de comparer les coordonnées d'un événement mesurées dans deux référentiels différents. Pour obtenir les transformations pour une distance $\Delta x = x_2 - x_1$ ou un intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$, on peut utiliser les transformations de Lorentz en remplaçant les coordonnées par des différences ($x \to \Delta x$ et $t \to \Delta t$).

La stratégie suivante est utile pour résoudre les problèmes faisant intervenir l'espace et le temps en relativité.

STRATÉGIE 9.1 La relativité restreinte

Illustrer la situation
Vous devez dessiner un schéma présentant les deux référentiels et leur vitesse relative. Indiquez bien les événements et les objets en mouvement par rapport au référentiel.

Décortiquer le problème
Spécifiez les distances propres (objets immobiles dans un référentiel) et les intervalles de temps propre (mesurés par une seule horloge immobile). Indiquez aussi les quantités connues et inconnues, en identifiant correctement le référentiel utilisé pour ces quantités.

Identifier la clé
La **clé** est contenue dans les transformations de Lorentz (les équations 9.28 ou les équations 9.29). Certains problèmes peuvent aussi se résoudre à l'aide de l'équation de la dilatation du temps ($\Delta t = \gamma \Delta \tau$) ou de l'équation de la contraction des longueurs ($L = L_0/\gamma$).

Résoudre le problème
Résoudre l'équation pour obtenir la quantité inconnue.

Valider la réponse
On peut vérifier si la réponse est compatible avec la dilatation du temps ou de la contraction des longueurs. Le module de la vitesse d'une particule doit être plus petit que c.

REMARQUE

Lorentz a découvert les équations pour transformer les coordonnées entre deux référentiels avant qu'Einstein introduise la relativité restreinte. Cependant, Lorentz n'a pas su interpréter ces équations pour comprendre que les notions d'espace et de temps devaient être modifiées. C'est pour cette raison qu'on parle de la relativité d'Einstein et non de la relativité de Lorentz.

EXEMPLE 9.7 La relativité de la simultanéité

Ariane se trouve au centre d'un vaisseau spatial qui se déplace à une vitesse dont le module est de 0,900 c par rapport à Benoît. Deux explosions surviennent, ce qui produit de la lumière. Benoît mesure simultanément chaque impulsion lumineuse, après un temps de 1,744 µs après le passage d'Ariane. De plus, il mesure que chaque explosion est survenue à une distance de 523 m de lui. On suppose que lorsqu'Ariane est vis-à-vis de Benoît, $t = t'$.

a. À quel instant se produit chacune des explosions selon Ariane ?

b. Quelle est la distance entre les deux événements selon Ariane ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 9.31 illustre la situation selon le référentiel de Benoît (le référentiel S).

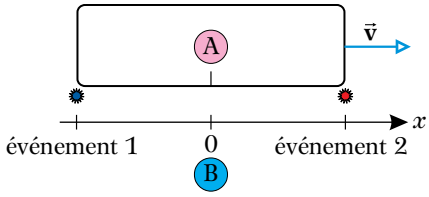


FIGURE 9.31
Le schéma de la situation selon le référentiel S (Benoît)

Décortiquer le problème

Le temps pour que chaque onde lumineuse se propage du point d'une explosion jusqu'à Benoît est

$$\Delta t = \frac{d}{c} = \frac{523\text{ m}}{2{,}998\times10^{8}\text{ m/s}} = 1{,}744\ \mu\text{s}\ . \qquad \text{(i)}$$

Ceci correspond au temps depuis le passage d'Ariane. Donc, pour Benoît, les deux explosions se produisent au temps $t = 0$.

Connues	Inconnues
$v = 0{,}900\ c$	t_1'
$t_1 = t_2 = 0{,}00$ s	t_2'
$x_1 = -523$ m	$\Delta x'$
$x_2 = 523$ m	

Le facteur de Lorentz est

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}900^2}} = 2{,}294\ . \qquad \text{(ii)}$$

SOLUTION a.

La **clé** est la transformation pour le temps t' (*voir les équations 9.28*) :

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right). \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous appliquons l'équation (iii) à chaque événement :

$$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2}\right) = 2{,}294\left(0 - \frac{0{,}900\ c\ [-523]}{c\ [2{,}998\times10^{8}]}\right)$$

$$t_1' = 3{,}60\times10^{-6}\text{ s} = 3{,}60\ \mu\text{s} \qquad \text{(réponse)}$$

$$t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right) = 2{,}294\left(0 - \frac{0{,}900\ c\ [523]}{c\ [2{,}998\times10^{8}]}\right)$$

$$t_2' = -3{,}60\times10^{-6}\text{ s} = -3{,}60\ \mu\text{s}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Pour Ariane, l'explosion en avant de son vaisseau précède l'explosion en arrière. C'est ce que nous avons obtenu à la section 9.4.

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est la transformation de Lorentz pour la position x' (*voir les équations 9.28*) :

$$x' = \gamma\,(x - vt)\ . \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous appliquons l'équation (iv) à la position de chaque événement :

$$x_1' = \gamma\,(x_1 - vt_1) = 2{,}294\,(-523 - 0{,}900\,c\times0{,}00)$$

$$x_1' = -1{,}20\text{ km} \qquad \text{(v)}$$

$$x_2' = \gamma\,(x_2 - vt_2) = 2{,}294\,(523 - 0{,}900\ c\times0{,}00)$$

$$x_2' = 1{,}20\,\text{km}\ . \qquad \text{(vi)}$$

La distance entre les deux événements est donc

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = 1{,}20\text{ km}-(-1{,}20\text{ km}) = 2{,}40\text{ km}\ .$$

(réponse)

Valider la réponse

Benoît mesure une distance entre deux événements simultanés, ce qui représente une longueur contractée. La distance pour Ariane doit être plus grande que celle qui est mesurée par Benoît.

9.9 La transformation relativiste des vitesses

Les transformations de Lorentz données aux équations 9.28 permettent d'obtenir les équations de transformation des composantes de la vitesse pour un objet en mouvement par rapport à chacun des référentiels. La figure 9.32 montre un objet qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{u}} = u_x\vec{\imath}$ dans le référentiel S et à une vitesse $\vec{\mathbf{u}}' = u'_x\vec{\imath}$ dans le référentiel S'. Selon la première équation 9.28,

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{d\left[\gamma(x - vt)\right]}{d\left[\gamma(t - vx/c^2)\right]} \\ &= \frac{\gamma(dx - v\,dt)}{\gamma(dt - v\,dx/c^2)} \\ &= \frac{dx/dt - v}{1 - v(dx/dt)/c^2}\,. \end{aligned}$$

Comme $dx/dt = u_x$, on obtient l'équation de transformation pour la composante x de la vitesse de l'objet (la composante parallèle à la vitesse du référentiel S' par rapport à S) :

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}\,. \tag{9.30}$$

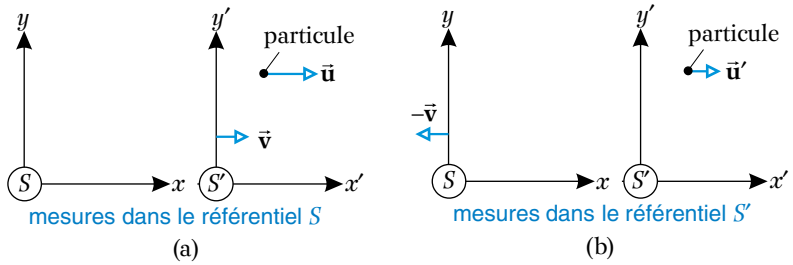


FIGURE 9.32
(a) Un objet se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{u}}$ dans le référentiel S. (b) L'objet a une vitesse $\vec{\mathbf{u}}'$ dans le référentiel S'.

Dans le cas où la vitesse de l'objet a une composante perpendiculaire à la vitesse du référentiel, on obtient l'équation de transformation :

$$u'_y = \frac{dy}{\gamma(dt - v\,dx/c^2)}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - vu_x/c^2)}\,. \tag{9.31}$$

On obtient les transformations inverses (u_x et u_y) en inversant le signe de v :

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \tag{9.32}$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma\,(1 + vu'_x/c^2)}\,. \tag{9.33}$$

Considérons une impulsion lumineuse qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{u}} = c\vec{\imath}$ pour vérifier que le module de la vitesse de la lumière demeure c dans tous les

référentiels. Selon l'équation 9.30, la composante de la vitesse dans le référentiel S' est

$$u'_x = \frac{c - v}{1 - vc/c^2} = \frac{c\,(1 - v/c)}{1 - v/c} = c\,.$$

Le module de la vitesse est bel et bien c dans les deux référentiels, quelle que soit la vitesse relative $\vec{\mathbf{v}}$ entre les deux référentiels.

On vérifie aussi facilement que les équations 9.30 et 9.31 se réduisent aux équations 9.2 (les transformations de Galilée pour la vitesse) lorsque $v \ll c$.

MISE EN GARDE

Il est important de bien faire la différence entre la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ d'un référentiel et la vitesse $\vec{\mathbf{u}}$ d'un objet.

9.10 La quantité de mouvement en relativité

En mécanique newtonienne, le principe de conservation de l'énergie et le principe de conservation de la quantité de mouvement sont deux principes qui permettent d'analyser des situations complexes de façon efficace. Par exemple, le principe de conservation de la quantité de mouvement permet d'analyser les collisions entre deux objets sans connaître exactement la forme de la force d'interaction entre ceux-ci. En mécanique newtonienne, la quantité de mouvement d'une particule de masse m qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{u}} = u_x\vec{\imath}$ est

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{u}} = m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{\imath} \qquad \text{(mécanique newtonienne)}\,. \tag{9.34}$$

Pour un système fermé qui n'est soumis à aucune force extérieure, la quantité de mouvement du système $\vec{\mathbf{P}}$ ne change pas.

La quantité de mouvement est aussi utilisée dans la deuxième loi de Newton. En effet, on peut dire que la force résultante exercée sur un objet est égale à la variation de la quantité de mouvement de l'objet :

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{rés}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(mécanique newtonienne)}\,, \tag{9.35}$$

ce qui se réduit à $\vec{\mathbf{F}}_{\text{rés}} = m\vec{\mathbf{a}}$, étant donné que la masse d'une particule ne change pas en mécanique newtonienne.

La définition 9.34 pose un problème en relativité restreinte. En effet, la définition de la quantité de mouvement fait intervenir la vitesse, c'est-à-dire une dérivée par rapport au temps. Comme le temps est une quantité qui change d'un référentiel à l'autre, le principe de conservation de la quantité de mouvement ne sera pas valide dans tous les référentiels si on utilise l'équation 9.34 pour calculer la quantité de mouvement.

Il est possible de garder le principe de conservation de la quantité de mouvement si on définit la quantité de mouvement à partir d'une dérivée par rapport à un temps qui ne change pas d'un référentiel à l'autre. Ce temps est le temps

propre de la particule τ. La composante x de la quantité de mouvement en relativité est donc

$$p_x \equiv m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}. \tag{9.36}$$

Par l'équation de la dilatation du temps, on sait que $\Delta t = \Delta\tau/\sqrt{1-u^2/c^2}$, ce qui implique que $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau/\sqrt{1-u^2/c^2}$. On obtient alors la quantité de mouvement de la particule :

$$p_x = m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_\mathrm{p}\, m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \gamma_\mathrm{p}\, m u_x\,, \tag{9.37}$$

où γ_p représente le facteur de Lorentz associé à la particule, qui est calculé à partir de la vitesse $\vec{\mathbf{u}}$ de la particule :

$$\gamma_\mathrm{p} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{9.38}$$

La quantité de mouvement est une quantité vectorielle. On généralise l'équation 9.37 pour obtenir la quantité de mouvement en fonction de la vitesse de la particule :

Quantité de mouvement

$$\vec{\mathbf{p}} = \gamma_\mathrm{p}\, m\vec{\mathbf{u}}\,. \tag{9.39}$$

Avec cette définition, le principe de conservation de la quantité de mouvement ($\vec{\mathbf{P}}_\mathrm{f} = \vec{\mathbf{P}}_\mathrm{i}$) est valide dans tous les référentiels inertiels.

MISE EN GARDE

Il est important de faire la différence entre $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ et $\gamma_\mathrm{p} = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$. Le facteur de Lorentz γ est relatif au référentiel S, et le module de la vitesse v est constant, étant donné que le référentiel est inertiel. Par contre, γ_p est le facteur de Lorentz relatif à la particule. Le module de la vitesse de la particule u peut changer, de telle sorte que la dérivée de γ_p par rapport au temps n'est pas nulle.

La vitesse limite

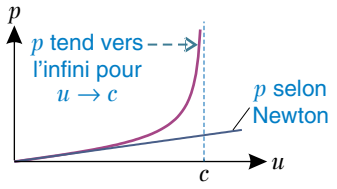


FIGURE 9.33
Le module de la quantité de mouvement en fonction du module de la vitesse

Selon la définition de la quantité de mouvement donnée à l'équation 9.38, celle-ci n'est pas directement proportionnelle à la vitesse, comme c'est le cas avec la définition newtonienne. Comme le montre la figure 9.33, pour une faible vitesse, la quantité de mouvement est très semblable à celle qui est obtenue à partir de la définition newtonienne. Cependant, lorsque u s'approche de c, la formule relativiste produit une quantité de mouvement qui augmente très rapidement en fonction de la vitesse. Pour qu'une particule de masse non nulle se déplace à une vitesse égale à celle de la lumière, il lui faudrait une quantité de mouvement infinie.

On peut comprendre la notion de vitesse limite d'une autre façon. Prenons une situation simple où une force constante $\vec{\mathbf{F}} = F_x\vec{\boldsymbol{\imath}}$ est appliquée sur une particule de masse m, initialement immobile. Avec la nouvelle définition de la quantité de mouvement, on doit écrire la deuxième loi de Newton en fonction

de la dérivée de la quantité de mouvement plutôt qu'avec la forme habituelle $\vec{\mathbf{F}}_{\text{rés}} = m\vec{\mathbf{a}}$. On a donc

$$F_{\text{rés},x} = \frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \Delta p_x = \int_{t_\text{i}}^{t_\text{f}} F_x \, \mathrm{d}t \, .$$

Comme la force est constante, on peut la sortir de l'intégrale et l'intégrale est triviale :

$$\Delta p_x = F_x \, \Delta t \, .$$

Comme la particule est immobile à $t = 0$, $p_{\text{i}x} = 0$, on obtient, pour $t_\text{f} = t$:

$$p_x = \frac{mu_x}{\sqrt{1 - u_x^2/c^2}} = F_x \, t \, . \tag{9.40}$$

Selon l'équation 9.40, le module de la quantité de mouvement augmente graduellement avec le temps. Par contre, la quantité de mouvement n'est pas proportionnelle à la vitesse, ce qui implique que le module de la vitesse de la particule n'augmente pas graduellement. Comme le montre la figure 9.34, le module de la vitesse tend vers c pour $t \to \infty$. Le module de la vitesse s'approche de plus en plus de c, sans l'atteindre. On peut donc dire :

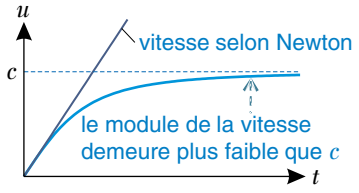


FIGURE 9.34
Le module de la vitesse d'un objet en fonction du temps lorsque celui-ci subit une force constante

> Tout objet de masse m non nulle ne peut pas atteindre une vitesse de module égal à c. La vitesse de la lumière est une vitesse limite, qui ne peut pas être atteinte par un objet de masse non nulle.

Ce résultat a été vérifié dans les accélérateurs de particules. Par exemple, des protons ont été accélérés par le LHC (le grand collisionneur de hadrons) du CERN en 2010, jusqu'à une vitesse de 0,999 999 96 c. Cette vitesse est très près de la vitesse de la lumière, mais elle est quand même plus faible.

9.11 L'énergie en relativité

Avec la relativité, les notions de temps et d'espace ont changé par rapport à la vision newtonienne. De même, la définition de la quantité de mouvement est modifiée en relativité. Il est peu surprenant que l'équation permettant de calculer l'énergie doive aussi changer dans le cadre de la relativité restreinte.

Un invariant relativiste

En mécanique newtonienne, on peut exprimer l'énergie cinétique d'une particule $K = mu^2/2$ en fonction du module de la quantité de mouvement $p = mu$, par $K = p^2/(2m)$. On veut trouver une façon similaire de trouver une relation entre la quantité de mouvement et l'énergie en relativité.

Prenons une particule qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{u}} = u_x\vec{\boldsymbol{\imath}}$ dans un référentiel S. Cela veut dire que dans un temps infinitésimal $\mathrm{d}t$, la particule a un déplacement $\mathrm{d}x$. Selon la relativité restreinte, le temps $\mathrm{d}t$ et le déplacement $\mathrm{d}x$ sont des quantités relatives. Par contre, il est possible de construire un invariant relativiste à partir de ces quantités, l'intervalle de temps propre $\mathrm{d}\tau$. La version infinitésimale de l'équation 9.22 s'écrit de la façon suivante :

$$(\mathrm{d}\tau)^2 = (\mathrm{d}t)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{c}\right)^2 . \tag{9.41}$$

On veut une expression dans laquelle apparaît la quantité de mouvement $p = p_x = m\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau$. On multiplie donc l'équation 9.41 par $(mc/\mathrm{d}\tau)^2$ pour obtenir

$$\left(mc\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \left(mc\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2$$
$$(mc)^2 = (\gamma_\mathrm{p}\, mc)^2 - p^2\,. \tag{9.42}$$

On multiplie en plus par un facteur c^2 pour écrire l'équation 9.42 sous une forme équivalente mais plus utilisée :

$$(mc^2)^2 = (\gamma_\mathrm{p}\, mc^2)^2 - (pc)^2\,. \tag{9.43}$$

La quantité mc^2 doit être une quantité invariante, car on a obtenu l'équation 9.43 à partir de l'équation du temps propre, qui est une quantité invariante. Donc, dans un référentiel S', la mesure de p et de $\gamma_\mathrm{p}mc^2$ donne des valeurs différentes, mais les référentiels S et S' sont en accord en ce qui concerne la valeur de mc^2 :

$$(\gamma_\mathrm{p}\, mc^2)^2 - (pc)^2 = (\gamma'_\mathrm{p}\, mc^2)^2 - (p'c)^2 = (mc^2)^2\,. \tag{9.44}$$

On doit maintenant comprendre ce que représente le terme $\gamma_\mathrm{p}mc^2$. D'abord, les unités de cette quantité sont les mêmes que les unités de l'énergie. Ensuite, on étudie cette quantité dans la limite non relativiste (lorsque $u \ll c$), à l'aide du développement du binôme (*voir l'annexe E*) :

$$\gamma_\mathrm{p}\, mc^2 = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}mc^2 \approx \left(1+\frac{u^2}{2c^2}\right)mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mu^2\,. \tag{9.45}$$

Le deuxième terme représente l'énergie cinétique newtonienne, c'est-à-dire l'énergie liée au mouvement de la particule. Le premier terme est un terme constant, qui ne dépend pas de la vitesse. Il indique que la particule a de l'énergie même lorsqu'elle est au repos et que cette énergie est proportionnelle à sa masse.

On définit l'énergie totale de la particule :

Énergie totale

$$E = \gamma_\mathrm{p}mc^2 = E_0 + K\,. \tag{9.46}$$

Une particule en mouvement a deux types d'énergie : l'énergie au repos E_0,

$$E_0 = mc^2\,, \tag{9.47}$$

et l'énergie cinétique K,

$$K = (\gamma_\mathrm{p} - 1)\, mc^2 = (\gamma_\mathrm{p} - 1)\, E_0\,. \tag{9.48}$$

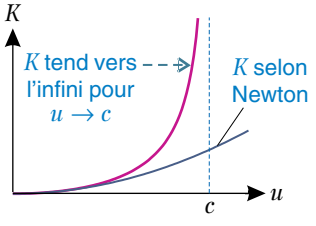


FIGURE 9.35
L'énergie cinétique relativiste en fonction du module de la vitesse

Comme on l'a montré à l'équation 9.45, l'énergie cinétique se réduit à la version non relativiste $K = mu^2/2$ pour $u \ll c$. La figure 9.35 montre le graphique de l'énergie cinétique en fonction du module de la vitesse u. On remarque que l'énergie cinétique tend vers l'infini à mesure que le module de la vitesse approche c. C'est une autre façon de constater qu'une particule de masse m non nulle ne peut atteindre une vitesse de module c, car elle aurait besoin d'une énergie cinétique infinie.

L'équation 9.47 est bien évidemment l'équation la plus connue au monde, l'équation qui a fait la renommée d'Einstein. Nous allons discuter en détail de cette forme

d'énergie dans une prochaine sous-section. Mais auparavant, on remarque que le membre gauche de l'équation de l'invariant relativiste (*voir l'équation 9.44*) correspond au carré de l'énergie au repos. On écrit donc cette équation de la façon suivante :

$$E_0^2 = E^2 - p^2c^2. \tag{9.49}$$

Invariance de l'énergie au repos

Donc, l'énergie au repos d'une particule est un invariant relativiste, comme le temps propre. Tous les référentiels mesurent la même énergie au repos pour une particule. Étant donné que l'énergie au repos dépend directement de la masse de la particule, on peut dire que la masse est un invariant relativiste.

Il est possible de calculer le module de la vitesse $\vec{\mathbf{u}}$ de la particule à partir de son énergie totale et du module de sa quantité de mouvement. En effet, selon l'équation 9.39, $p = \gamma_p mu$ et selon l'équation 9.46, $E = \gamma_p mc^2$. Le rapport de pc et de E donne

$$\frac{pc}{E} = \frac{\gamma_p\, mcu}{\gamma_p\, mc^2} = \frac{u}{c} = \beta_p. \tag{9.50}$$

Ce rapport donne le paramètre de vitesse pour la particule. L'équation 9.50 est utile lorsque le module de la vitesse n'est pas trop près de c.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 9.5

Un proton se déplace à une vitesse dont le module est de 0,90 c par rapport au laboratoire. Le référentiel du laboratoire est appelé S, et le référentiel dans lequel le proton est au repos est appelé S'. Indiquez dans quel référentiel :

a. le proton a une plus grande énergie cinétique ;
b. le proton a une plus grande énergie totale ;
c. le proton a une plus grande quantité de mouvement ;
d. le proton a une plus grande masse.

Une remarque sur les unités

Le système international d'unités définit des étalons macroscopiques comme le mètre et le kilogramme. Ce système est mal adapté à l'étude des atomes et des électrons, dont les masses sont très faibles par rapport au kilogramme et à leur vitesse qui peut s'approcher de la vitesse de la lumière. Pour cette raison, on exprime les quantités en utilisant des étalons plus naturels lorsqu'on étudie les atomes, les noyaux et les électrons. Pour la vitesse, l'étalon naturel est le module de la vitesse de la lumière. Par exemple, on peut dire : une vitesse dont le module est de 0,90 c.

L'unité d'énergie la plus utilisée en physique moderne est l'électron-volt (eV), que nous avons défini à la section 4.2 du tome 2 :

L'électron-volt représente la variation d'énergie cinétique acquise par un électron qui se déplace entre deux points ayant une différence de potentiel de 1 V.

Électron-volt

On peut donc dire que

$$1\,\text{eV} \equiv 1e \times 1\,\text{V} = 1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{J}\,. \tag{9.51}$$

Selon l'équation 9.50, la quantité de mouvement a les mêmes unités que l'énergie divisée par la vitesse de la lumière. On peut donc exprimer la quantité de mouvement en eV/c. De même, étant donné que $E_0 = mc^2$, on peut exprimer la masse en eV/c^2. Par exemple, la masse d'un électron est de 511 keV/c^2, ce qui permet facilement d'obtenir son énergie au repos, égale à 511 keV.

La masse des atomes est mesurée précisément en fonction de l'unité de masse atomique (u), un étalon défini de telle sorte que la masse d'un atome de l'isotope ^{12}C ait une masse exactement de 12 u. En fonction du kilogramme, l'unité de masse atomique est définie comme 1 g divisé par le nombre d'Avogadro :

$$1\ \text{u} \equiv \frac{0{,}001\ \text{kg}}{N_\text{A}} = \frac{0{,}001\ \text{kg}}{6{,}022\,14 \times 10^{23}} = 1{,}660\,53 \times 10^{-27}\ \text{kg}\,. \tag{9.52}$$

On peut calculer l'énergie au repos d'une unité de masse atomique :

$$1\ \text{u}c^2 = 1{,}660\,53 \times 10^{-27}\ \text{kg}\ (299\,792\,458\ \text{m/s})^2 = 1{,}492\,4 \times 10^{-10}\ \text{J}$$
$$= 1{,}492\,4 \times 10^{-10}\ \text{J} \times \frac{1\,\text{eV}}{1{,}602\,18 \times 10^{-19}\ \text{J}} = 931{,}5\ \text{MeV}\,.$$

On obtient alors le facteur de conversion entre l'unité de masse atomique et le MeV/c^2 :

$$1\ \text{u} = 931{,}5\ \text{MeV}/c^2\,. \tag{9.53}$$

Dans l'annexe B, on donne la masse des particules en kg et en u, outre le fait de donner l'énergie au repos en eV.

MISE EN GARDE

Lorsqu'on exprime la masse en eV/c^2 et la quantité de mouvement en eV/c, on ne doit pas remplacer c par $2{,}998 \times 10^8$ m/s. Il est aussi recommandé d'écrire explicitement les unités dans les calculs pour vérifier que celles-ci sont cohérentes.

EXEMPLE 9.8 Un électron rapide

Les électrons ont une masse de $9{,}109 \times 10^{-31}$ kg. Un électron se déplace à une vitesse de 0,950 c.

a. Déterminez l'énergie au repos de l'électron. Exprimez le résultat en eV.
b. Quelle est l'énergie cinétique de l'électron ?
c. Quel est le module de la quantité de mouvement de l'électron ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$m = 9{,}109 \times 10^{-31}$ kg	E_0
$v = 0{,}950\,c$	K
	p

Le facteur de Lorentz pour l'électron est

$$\gamma_\text{p} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}950^2}} = 3{,}203\,. \tag{i}$$

SOLUTION a.

Identifier la clé

Nous obtenons l'énergie au repos à l'aide de l'équation 9.47 :

$$E_0 = mc^2 \,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$E_0 = 9{,}109 \times 10^{-31} \text{ kg } (2{,}998 \times 10^8 \text{ m/s})^2$$
$$= 8{,}187 \times 10^{-14} \text{ J} \times \frac{1 \text{ eV}}{1{,}602 \times 10^{-19} \text{ J}}$$
$$E_0 = 511{,}1 \times 10^3 \text{ eV} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

C'est bien la valeur qui apparaît à l'annexe B.

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 9.48 :

$$K = (\gamma_p - 1)\, E_0 \,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons la valeur de γ_p, qui a été calculée à l'équation (i), et le résultat de la partie **a.** :

$$K = (3{,}203 - 1{,}000)\ 511{,}1 \text{ keV} = 1{,}13 \text{ MeV} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Identifier la clé

Nous pouvons calculer le module de la quantité de mouvement de plusieurs façons. La méthode la plus simple est celle qui est obtenue à partir de l'équation 9.50 :

$$\frac{pc}{E} = \beta_p \Rightarrow pc = \beta_p E \,, \qquad \text{(iv)}$$

où E est l'énergie totale, donnée par l'équation 9.48 :

$$E = \gamma_p E_0 \,. \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'énergie totale :

$$E = 3{,}203 \times 511{,}1 \text{ keV} = 1{,}637 \text{ MeV} \,.$$

Nous obtenons alors le module de la quantité de mouvement :

$$pc = 0{,}950 \times 1{,}637 \text{ MeV} = 1{,}56 \text{ MeV}$$
$$\Rightarrow p = 1{,}56 \text{ MeV}/c \,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous avons exprimé l'énergie en MeV et le module de la quantité de mouvement en MeV/c, car ces unités sont plus représentatives pour décrire un électron relativiste que les unités du SI. Les calculs sont aussi plus simples avec ces unités.

La masse et l'énergie au repos d'un système

La fameuse équation d'Einstein $E_0 = mc^2$ indique qu'un système immobile a de l'énergie. Comme toute forme d'énergie, cette énergie devrait pouvoir être transformée en une autre forme d'énergie comme de l'énergie cinétique. La masse est équivalente à de l'énergie qui peut être utilisée. De plus, si on applique cette équation à un objet macroscopique (avec, par exemple, une masse de 1 kg), cela donne une énorme quantité d'énergie (environ 9×10^{16} J). Par contre, la relativité n'indique pas comment cette énergie peut être transformée en une autre forme.

La relativité oblige de nouveau à changer notre point de vue sur la signification d'un concept. En mécanique newtonnienne, la masse représente l'inertie d'un objet, c'est-à-dire sa capacité à résister au changement de mouvement. Ce n'est plus le cas en relativité. En effet, la définition de la quantité de mouvement (l'équation 9.39, $\vec{\mathbf{p}} = \gamma_p m\vec{\mathbf{u}}$) indique que l'inertie dépend de la masse, mais aussi de la vitesse, par le facteur de Lorentz. La signification de la masse est plutôt obtenue dans l'équation $E_0 = mc^2$:

La masse d'un objet (ou d'un système) est associée à l'énergie au repos de l'objet (ou du système), c'est-à-dire l'énergie que l'objet (ou le système) a dans le référentiel où l'objet (ou le centre de masse du système) est au repos. La masse est un invariant relativiste : dans tous les référentiels, la même valeur est obtenue.

Masse

REMARQUE

Certains auteurs définissent la « masse relativiste » comme le produit de $\gamma_p m$, de telle sorte que l'inertie correspond à la masse relativiste. Cette notion n'apporte pas grand chose et tend à cacher le fait que la masse est un invariant relativiste. Nous n'utilisons pas cette notion de masse relativiste qui, de toute façon, n'a jamais été introduite par Einstein.

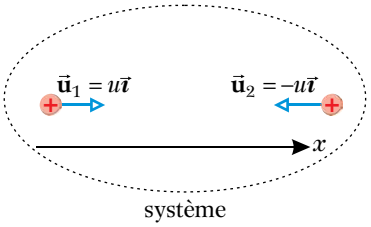


FIGURE 9.36
Un système isolé est composé de deux particules identiques qui se déplacent l'une vers l'autre.

Pour comprendre la notion de masse et d'énergie au repos d'un système, on étudie un système de deux particules identiques chargées (par exemple deux protons) qui se déplacent l'une vers l'autre avec des vitesses ayant le même module, comme le montre la figure 9.36, de telle sorte que le centre de masse du système est immobile. On suppose que le système est isolé, c'est-à-dire qu'il ne subit aucune force extérieure et que son énergie est conservée. Chaque particule a une énergie au repos $E_0 = mc^2$, une énergie cinétique K, et le système a une énergie potentielle U. L'énergie du système est

$$E_{\text{syst}} = m_1c^2 + K_1 + m_2c^2 + K_2 + U = m_1c^2 + m_2c^2 + E_{\text{méc}}\,, \tag{9.54}$$

où $E_{\text{méc}} = K_1 + K_2 + U$ représente l'énergie mécanique du système.

Si on n'observe pas directement les particules en mouvement dans le système, on observe seulement un système immobile, dont la masse est M. Le système n'a que de l'énergie au repos :

$$E_{\text{syst}} = E_{0,\text{syst}} = Mc^2. \tag{9.55}$$

En comparant les équations 9.54 et 9.55, on obtient

$$m_1c^2 + m_2c^2 + E_{\text{méc}} = Mc^2\,.$$

La masse du système **n'est pas égale** à la somme des masses des constituants du système :

$$M = m_1 + m_2 + \frac{E_{\text{méc}}}{c^2}\,. \tag{9.56}$$

Donc, l'énergie mécanique du système, qu'on peut aussi appeler l'*énergie interne*, influe sur la masse du système. Si l'énergie mécanique est positive, la masse du système est plus grande que la somme des masses des constituants, alors que si l'énergie mécanique est négative, la masse du système est plus faible que la somme des masses de ses constituants.

On sait que lorsque les particules s'approchent l'une de l'autre, leur énergie cinétique diminue (les particules se repoussent par la force électrique), et l'énergie potentielle augmente. Donc, l'énergie cinétique se transforme en énergie potentielle. Il est aussi possible de transformer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en énergie au repos. Par exemple, en lançant des protons l'un vers l'autre avec une grande énergie cinétique, on obtient

$$\text{p} + \text{p} \rightarrow \text{p} + \text{p} + \text{p} + \bar{\text{p}}\,. \tag{9.57}$$

Ce processus est appelé la *création de paires*. La particule $\bar{\text{p}}$ est un antiproton, l'antiparticule associée au proton. L'antiproton a la même masse que le proton, mais il a une charge électrique opposée, c'est-à-dire une charge $q = -e$ (Remarquez que dans la transformation de l'équation 9.57, la charge est conservée.) Une partie de l'énergie mécanique a été transformée en énergie au repos pour produire de la masse.

La figure 9.37 montre un autre exemple de création de paires : un rayon gamma de haute énergie (invisible) entre en collision avec un noyau atomique, et il se transforme en une paire électron-positron (le positron est l'antiparticule de l'électron). La photo montre une chambre à bulles placée dans un champ magnétique. Les particules chargées produisent des bulles, ce qui permet de voir leur trajectoire. La trace verte presque linéaire qui va vers le bas représente la trajectoire du noyau atomique, et les spirales correspondent à la trajectoire du positron et à la trajectoire de l'électron. Ces deux particules se déplacent en sens inverse, étant donné que la force magnétique est en sens opposé pour des particules de charge opposée.

FIGURE 9.37
Les traces de particules chargées dans une chambre à bulles montrent la création d'une paire électron-positron.

Le processus inverse est aussi possible. C'est l'*annihilation*, lorsqu'une particule rencontre son antiparticule. Par exemple, lorsqu'un positron e^+ rencontre un électron e^-, les deux particules disparaissent, et il y a production de deux rayons γ :

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma .$$

L'énergie au repos de l'électron et celle du positron sont transformées en énergie cinétique, l'énergie des rayons gamma. Les appareils à tomographie par émission de positrons produisent des images d'organes internes en détectant les deux rayons gamma émis lorsqu'un positron rencontre un électron à l'intérieur de l'organe observé.

Si le système reçoit de l'énergie d'un agent extérieur tout en restant immobile, son énergie au repos va changer, donc sa masse va changer. On définit la valeur Q d'une réaction comme l'énergie que le système cède à son environnement. Selon le principe de conservation de l'énergie, on obtient

$$E_{0,i} = E_{0,f} + Q .$$

Comme $E_0 = Mc^2$, où M est la masse du système, on peut exprimer Q en fonction de la variation de la masse du système :

$$Q = E_{0,i} - E_{0,f} = M_i c^2 - M_f c^2 = -\Delta M\, c^2 , \qquad (9.58)$$

où ΔM est la variation de la masse du système. Lorsque $Q > 0$, la réaction est dite *exothermique*, car le système cède de l'énergie à l'environnement. C'est le cas par exemple lors d'une fission nucléaire dans une centrale nucléaire. C'est aussi le cas lors d'une fusion nucléaire à l'intérieur du Soleil. Lorsque $Q < 0$, on dit que la réaction est *endothermique*. Dans ce cas, c'est l'environnement qui cède de l'énergie au système.

EXEMPLE 9.9 La désintégration d'un neutron

Un neutron libre est instable. Il se désintègre après un temps moyen de 14,7 min, en se transformant en un proton et en émettant un électron :

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu} ,$$

où la particule $\bar{\nu}$ est un neutrino dont la masse est négligeable. L'énergie au repos des particules est $E_{0n} = 939{,}565$ MeV, $E_{0p} = 938{,}272$ MeV et $E_{0e} = 0{,}511$ MeV. Un neutron est initialement immobile.

a. Quelle est l'énergie libérée lors de la désintégration ?

b. Si l'énergie cinétique de l'électron correspond à 70,0 % de cette valeur, quel est le module de sa quantité de mouvement ?

SOLUTION

Connues	
$E_{0n} = 939{,}565$ MeV	$E_{0p} = 938{,}272$ MeV
$E_{0e} = 0{,}511$ MeV	$E_{0,\nu} = 0{,}000$ MeV

Inconnues	
Q	p_e

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 9.58 :

$$Q = E_{0i} - E_{0f} = E_{0n} - E_{0p} - E_{0e} - E_{0\nu} . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs :

$$Q = 939{,}565 - 938{,}272 - 0{,}511 - 0{,}000$$
$$Q = 0{,}782 \text{ MeV} . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

L'énergie cinétique de l'électron est

$$K = 0{,}700 \times 0{,}782 \text{ MeV} = 0{,}547 \text{ MeV} . \qquad \text{(ii)}$$

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 9.49 :

$$E_0^2 = E^2 - (pc)^2 \Rightarrow pc = \sqrt{E^2 - E_0^2} , \qquad \text{(iii)}$$

où $E = E_0 + K$ est l'énergie totale de l'électron.

Résoudre le problème

L'énergie totale de l'électron est

$$E = 0{,}511 \text{ MeV} + 0{,}547 \text{ MeV} = 1{,}058 \text{ MeV} . \qquad \text{(iv)}$$

Nous calculons ensuite le module de la quantité de mouvement à l'aide de l'équation (iii) :

$$pc = \sqrt{(1{,}058 \text{ MeV})^2 - (0{,}5111 \text{ MeV})^2} = 0{,}927 \text{ MeV}$$
$$p = 927 \text{ keV}/c . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'énergie au repos des constituants du système a diminué ; une partie de l'énergie au repos a été transformée en énergie cinétique. Les unités des quantités sont correctes.

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié la relativité restreinte, qui permet d'analyser le mouvement d'objets qui se déplacent à des vitesses qui s'approchent de la vitesse de la lumière c.

LES DÉFINITIONS

- Un **référentiel inertiel** est un référentiel qui se déplace à vitesse constante.
- Un **événement** est quelque chose qui se produit à une position et à un temps donnés. Un événement peut être observé par plusieurs référentiels inertiels différents.

LES LOIS ET LES PRINCIPES

La relativité restreinte repose sur deux postulats :

- Le **principe de relativité d'Einstein** : les lois de la physique sont les mêmes pour tous les référentiels inertiels.
- Le **postulat de la vitesse de la lumière** : la lumière se propage dans le vide avec une vitesse dont le module est c. Le module de la vitesse de la lumière est le même pour tous les référentiels inertiels.

LES RÉSULTATS

- Lorsque deux événements, se produisant en des positions différentes, sont mesurés comme étant simultanés dans un référentiel, ils ne sont pas simultanés lorsqu'ils sont mesurés dans un autre référentiel.
- Le **facteur de Lorentz** pour un référentiel qui se déplace à vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ est

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

- L'**intervalle de temps propre** $\Delta\tau$ correspond à l'intervalle de temps entre deux événements qui se produisent au même point dans un référentiel. C'est un **invariant relativiste** :

$$(\Delta\tau)^2 = (\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2 = (\Delta t')^2 - \left(\frac{\Delta x'}{c}\right)^2\,.$$

- L'**intervalle de temps** mesuré par deux horloges immobiles est dilaté :

$$\Delta t = \gamma\,\Delta\tau\,.$$

- La **longueur propre** L_0 d'un objet est la longueur mesurée lorsque l'objet est immobile.
- La longueur d'un objet en mouvement est contractée dans la direction de sa vitesse :

$$L = \frac{L_0}{\gamma}\,.$$

Pour une particule de masse m qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{u}}$:

- L'**énergie au repos** : $E_0 = mc^2$.
- La **quantité de mouvement** : $\vec{\mathbf{p}} = \gamma_p\, m\vec{\mathbf{u}}$.
- L'**énergie totale** : $E = E_0 + K = \gamma_p mc^2$.
- L'**énergie cinétique** : $K = (\gamma_p - 1)\, mc^2$.
- Le facteur de Lorentz pour la particule :

$$\gamma_p = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\,.$$

- L'énergie au repos est un **invariant relativiste** :

$$E_0^2 = E^2 - (pc)^2 = E'^2 - (p'c)^2\,.$$

- Le facteur de vitesse pour une particule :

$$\beta_p = \frac{pc}{E} = \frac{u}{c}\,.$$

L'**effet Doppler** de la lumière produit une variation de la longueur d'onde de la lumière selon la vitesse relative $\vec{\mathbf{v}}$ entre la source et le détecteur :

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}\,\lambda_0\,.$$

Lorsque la source s'éloigne, $\lambda > \lambda_0$ (un décalage vers le rouge) et lorsque la source s'approche, $\lambda < \lambda_0$ (un décalage vers le bleu).

Les **transformations de Lorentz** entre un référentiel S' qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = v\vec{\boldsymbol{\imath}}$ par rapport à un référentiel S :

$$x' = \gamma\,(x - vt) \qquad x = \gamma\,(x' + vt')$$

$$y' = y \qquad y = y'$$

$$z' = z \qquad z = z'$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \qquad t' = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right).$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \qquad u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - vu_x/c^2)} \qquad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\,(1 + vu'_x/c^2)}$$

QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

Section 9.1 La relativité galiléenne

Q1 Un référentiel est lié à différents objets. Parmi ces objets, déterminez ceux qui représentent un référentiel inertiel :

(i) un train se déplace en ligne droite à vitesse constante ;

(ii) une automobile accélère à un feu de circulation ;

(iii) un arbre dans un parc ;

(iv) un bateau dérive sur une rivière dont le courant est uniforme ;

(v) la Station spatiale internationale.

E2 Dans un autobus se déplaçant à vitesse constante vers l'avant à 15,5 m/s, un passager assis à l'arrière lance une balle horizontalement vers l'avant de l'autobus à 12,0 m/s par rapport à lui. La hauteur initiale de la balle par rapport au plancher de l'autobus est de 1,00 m. Une femme immobile par rapport au sol regarde passer l'autobus. Supposez que l'axe des x est orienté vers l'avant, et l'axe des y, vers le haut.

a. Quelle est la vitesse de la balle par rapport à l'autobus, 0,400 s après que celle-ci a été lancée ?

b. Quelle est la vitesse de la balle par rapport au sol, 0,400 s après que celle-ci a été lancée ?

c. Après combien de temps la balle touche-t-elle le plancher de l'autobus, selon les passagers ?

d. Après combien de temps la balle touche-t-elle le plancher de l'autobus, selon la femme à l'extérieur de l'autobus ?

e. Quelle est la distance horizontale parcourue par la balle, selon les passagers ?

f. Quelle est la distance horizontale parcourue par la balle, selon la femme à l'extérieur de l'autobus ?

E3 À l'occasion d'une cascade pour le cinéma, une voiture se trouve sur une plate-forme qui est le dernier wagon d'un train. Ce dernier roule à une vitesse constante de 42,0 km/h. La voiture accélère sur 13,5 m vers l'arrière de la plate-forme et tombe ensuite sur la voie, parfaitement immobile par rapport au sol. Quelle accélération de la voiture permet cette cascade ?

Section 9.2 Les postulats d'Einstein

Q4 Un vaisseau spatial quitte le système solaire et se dirige vers Sirius à une vitesse de 0,15 c. Les voyageurs mesurent la vitesse de la lumière qui provient du Soleil et de Sirius. Quel est le module de la vitesse de la lumière mesuré ?

E5 Un positron se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = 0{,}90\,c\vec{\imath}$ lorsqu'il entre en collision avec un électron. Les deux particules s'annihilent, en produisant deux rayons gamma. Les rayons gamma se déplacent dans la direction de l'axe des x, en sens opposé. Quelle est la vitesse de chaque rayon γ ?

Section 9.5 La dilatation du temps

Q6 Un vaisseau spatial voyage à 0,25 c par rapport à une station spatiale. Celle-ci est munie d'une source lumineuse qui s'allume au passage du devant du vaisseau et s'éteint au passage de l'arrière. Le commandant du vaisseau observe la durée d'éclairement de la source, et il mesure un intervalle de temps Δt_v. Dans la station spatiale, un travailleur mesure un intervalle de temps Δt_s pour la durée d'éclairement de la source.

a. Quel observateur mesure un intervalle de temps propre ?

b. Quel observateur mesure un intervalle de temps plus long ?

Q7 Un vaisseau spatial se déplace de la Terre vers l'extérieur du système solaire. Le vaisseau et la Terre mesurent séparément l'intervalle de temps pour que le vaisseau se rende à la frontière du système solaire. Lorsque le vaisseau y est rendu, il envoie une onde radio vers la Terre.

a. Quel observateur (le vaisseau ou la Terre) mesure le temps propre entre les événements du départ du vaisseau et de son passage vis-à-vis de la frontière du système solaire ?

b. Quel observateur (le Terre ou le vaisseau) mesure le temps propre entre les événements de l'émission de l'onde radio par le vaisseau et la réception par la Terre ?

Q8 Un vaisseau spatial se déplace à une vitesse de 0,60 c le long d'un très grand cercle autour du système solaire. Il voyage pendant un temps Δt_v, selon l'horloge du vaisseau, pour effectuer un tour. Selon les gens de la Terre, le voyage dure un temps Δt_T. Lequel de ces deux intervalles de temps est le plus long ?

E9 Calculez le module de la vitesse pour chacun des facteurs de Lorentz suivants. Exprimez vos réponses en fonction de c.

a. 1,0000010

b. 1,010

c. 2,00

d. 10,0

E10 La figure 9.38 illustre une expérience, semblable à celle que montre la figure 9.17, où on mesure le temps pour qu'une impulsion lumineuse parcoure l'aller-retour entre une source et un miroir. Le système émetteur-miroir-récepteur est immobile dans un référentiel S'. Le référentiel S' se déplace à une vitesse de 0,500 c par rapport à

un référentiel S. La distance entre le miroir et l'émetteur-récepteur est $h = 5{,}000$ m.

a. Quel est l'intervalle de temps mesuré dans le référentiel S' ?

b. Quel est l'intervalle de temps mesuré dans le référentiel S ?

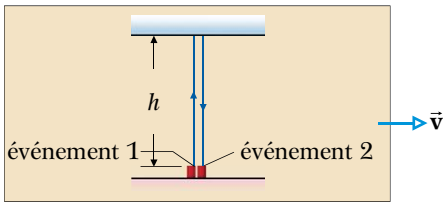


FIGURE 9.38 • Exercice 10

E11 Quel est le rapport du module des vitesses v_1/v_2 si $\gamma_1/\gamma_2 = 2{,}00$ et $v_1^2 + v_2^2 = 1{,}25c^2$?

E12 Le professeur Tamperdu a inventé une machine à voyager dans le temps, mais qui ne peut aller que dans le futur. Elle est constituée d'une fusée qui voyage à la vitesse ayant un module constant de 0,992 c durant un certain intervalle de temps, de sorte qu'à son retour sur Terre, il s'est écoulé plus de temps sur Terre que pour le voyageur. Le professeur Tamperdu quitte la Terre dans sa fusée à l'instant t_0 (une date et une heure données). Combien de temps doit-il voyager dans sa fusée pour revenir sur Terre 10,0 a après la date de son départ ?

P13 Des explorateurs veulent visiter l'environnement de l'étoile Véga, située à 25,0 al. Le voyage doit durer 10,0 a pour les voyageurs. Lorsque ces derniers arrivent à leur destination, ils envoient une onde radio vers la Terre.

a. Quel est le module de la vitesse nécessaire ?

b. Quel est l'intervalle de temps, pour les gens sur la Terre, entre le départ des explorateurs et l'arrivée du message radio ?

P14 Les muons ont une durée de vie moyenne de $2{,}20 \times 10^{-6}$ s lorsqu'ils sont au repos. On observe que des muons parcourent une distance moyenne de 1 362 m dans le référentiel du laboratoire avant de se désintégrer. Quel est le module de la vitesse de ces muons ?

P15 Dans un accélérateur de particules, on produit un faisceau qui a une longueur de 50,0 cm dans le référentiel du laboratoire. Le faisceau a besoin de 1,67 ns pour passer vis-à-vis d'un point fixe du laboratoire.

a. Quel est le module de la vitesse des particules ?

b. Quel est le temps nécessaire dans le référentiel des particules pour que le faisceau passe vis-à-vis d'un point fixe du laboratoire ?

Section 9.6 La contraction des longueurs

Q16 Trois trains identiques se rencontrent en gare. Le train A est immobile par rapport à la gare, le train B se déplace vers l'est à la vitesse de 0,1 c, et le train C va vers l'ouest à 0,15 c. Classez par ordre croissant la longueur des trois trains selon un observateur :

a. dans le train A ;

b. dans le train B ;

c. dans le train C.

Q17 Une surface est carrée lorsqu'elle est observée dans son référentiel propre S. La surface se déplace à une vitesse $\vec{v}$ par rapport à un référentiel S'. La vitesse $\vec{v}$ est dans la direction de la largeur de la surface. Quelle est la forme de la surface dans le référentiel S' ?

(i) C'est un carré, dont le côté est plus petit que dans S.

(ii) C'est un carré, dont le côté est plus grand que dans S.

(iii) C'est un rectangle, dont la hauteur est plus grande que la largeur.

(iv) C'est un rectangle, dont la largeur est plus grande que la hauteur.

E18 Quel est le module de la vitesse d'un train de 825 m de longueur si celui-ci entre tout juste complètement dans un tunnel de 600 m de longueur, aux yeux d'un observateur immobile par rapport au tunnel ?

E19 Tau Ceti, à une distance de 11,90 al de la Terre, est une étoile qui pourrait bien abriter la planète «habitable» la plus près de la Terre. On y envoie une sonde spatiale, qui se déplace à une vitesse dont le module est $v = 0{,}600\ c$. Lorsque la sonde arrive à destination, elle envoie des images par signal radio.

a. Quelle est la distance parcourue dans le référentiel de la sonde ?

b. Combien de temps dure le voyage jusqu'à la planète selon les ordinateurs à bord de la sonde ?

c. Combien de temps dure le voyage selon les observateurs sur Terre ?

d. Combien de temps se passe-t-il entre le départ de la sonde et le retour du signal radio pour les observateurs de la Terre ?

E20 Dans le réacteur d'un accélérateur de particules, une particule est générée par une collision et s'est déplacée à la vitesse dont le module est de 0,734 c sur une distance de 3,080 m avant de se désintégrer.

a. Combien de temps la particule a-t-elle subsisté dans le référentiel du laboratoire ?

b. Quelle est sa durée de vie dans son référentiel propre ?

c. Quelle est la distance entre le détecteur qui observe la collision et le détecteur qui observe la désintégration de la particule, dans le référentiel de celle-ci ?

P21 Un vaisseau spatial a une longueur propre de 560 m. Le vaisseau passe vis-à-vis d'un observateur S avec une vitesse $\vec{v}$. L'observateur S mesure un intervalle de temps de 1,647 µs entre le passage de l'avant et de l'arrière du vaisseau.

a. Quel est l'intervalle de temps du passage du vaisseau vis-à-vis de l'observateur S pour le commandant du vaisseau ?

b. Quel est le module de la vitesse du vaisseau par rapport à l'observateur S ?

c. Quelle est la longueur du vaisseau selon l'observateur S ?

P22 Une tige de 2,00 m forme un angle de 65,0° par rapport à l'axe des x de son référentiel propre S. Un autre référentiel S' se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = 0{,}850\, c\,\vec{\imath}$ par rapport au référentiel S, et l'axe des x' est parallèle à l'axe des x.

a. Quelle est la longueur de la tige dans le référentiel S' ?

b. Quel est l'angle entre la tige et l'axe des x' ?

Section 9.7 L'effet Doppler relativiste

Q23 La figure 9.39 montre une source lumineuse S et quatre observateurs qui se déplacent par rapport à S. La source émet une lumière à une longueur d'onde λ_0. Classez les observateurs par ordre croissant de la longueur d'onde mesurée.

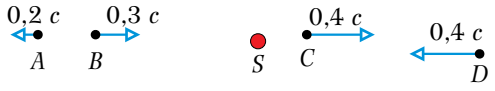


FIGURE 9.39 • Question 23

E24 Une source lumineuse rouge ($\lambda_0 = 700$ nm) est observée par un détecteur qui a une vitesse par rapport à la source. Le détecteur mesure une longueur d'onde de 400 nm. Quelle est la vitesse du détecteur par rapport à la source ?

E25 Déterminez la vitesse relative d'une étoile par rapport à la Terre qui produit les décalages suivants :

a. une augmentation de la longueur d'onde d'un facteur 2,00 ;

b. une diminution de la longueur d'onde d'un facteur 2,00.

E26 Un vaisseau spatial se déplace à une vitesse de 0,400 c, de la Terre vers une station spatiale éloignée. Le vaisseau communique en utilisant une onde radio, dont la fréquence propre est de 200,0 MHz.

a. Quelle est la fréquence de l'onde radio reçue par la Terre ?

b. Quelle est la fréquence de l'onde radio reçue par la station spatiale ?

P27 Un vaisseau spatial est muni de deux lasers identiques, placés à l'avant et à l'arrière du vaisseau. Le vaisseau se déplace de la Terre vers Saturne. Les gens de Saturne observent une lumière bleue (λ_S = 450 nm), alors que les gens de la Terre observent une lumière rouge (λ_T = 640 nm).

a. Quel est le module de la vitesse du vaisseau spatial ?

b. Quelle est la longueur d'onde propre des lasers ?

R28 Un astronome analyse la lumière venant d'une galaxie à l'aide d'un réseau qui possède 750,0 lignes/mm. Il observe une raie spectrale à un angle de diffraction de 18,00°. Cette raie est semblable à une raie émise par une lampe au laboratoire, dont la longueur d'onde est de 393,3 nm.

a. Quelle est la longueur d'onde de la raie spectrale dans la lumière de la galaxie ?

b. Quelle est la vitesse de la galaxie par rapport à la Terre ?

Section 9.8 Les transformations de Lorentz

E29 Dans le référentiel S, une particule se désintègre au temps $t = 250{,}0$ ns et à la position $x = 90{,}00$ m. Un référentiel S' se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = 0{,}850\,0\, c\,\vec{\imath}$ par rapport au référentiel S. Les deux référentiels coïncident à $t = t' = 0$. Quelles sont les coordonnées d'espace-temps de la désintégration dans le référentiel S' ?

E30 Un avion ultra rapide passe perpendiculairement au-dessus d'une rivière, dont la largeur propre est de 2,50 km, à la vitesse de 0,320 c. Sur chaque rive, on trouve une balise lumineuse. Quand le pilote parvient au-dessus de la première balise, les deux balises s'allument simultanément, selon les mesures prises dans son référentiel.

a. Quel est le délai entre l'allumage des deux balises pour un pêcheur sur le bord de la rivière ?

b. Quelle est la largeur de la rivière dans le référentiel du pilote ?

E31 Des voyageurs quittent la Terre vers une planète lointaine, à t = 0. Ils se déplacent à une vitesse dont le module est de 0,800 c. Dans le référentiel des voyageurs, une étoile A explose 2,40 a après leur départ et à 7,20 al directement devant eux.

a. À quelle distance de la Terre l'étoile a-t-elle explosé ?

b. Pour les gens de la Terre, quel est l'intervalle de temps entre le départ des voyageurs et l'explosion de l'étoile ?

P32 On observe dans un laboratoire la création d'une particule à la position $x_1 = 0$ m au temps $t_1 = 2{,}00$ µs. La particule se déplace le long de l'axe des x et se désintègre au temps $t_2 = 13{,}50$ µs et à la position $x = 3\,100$ m. Dans le référentiel propre de la particule, celle-ci est immobile : elle est créée et elle se désintègre au même point.

a. Quel est le module de la vitesse de la particule par rapport au laboratoire ?

b. Quelle est la durée de vie de la particule ?

c. En supposant que les référentiels coïncident à $t = t' = 0$, quelle est la position de la particule dans son référentiel propre ?

P33 Un train, dont la longueur propre est de 1,00 km, se déplace à $c/2$ par rapport à un observateur. À l'instant où l'avant du train passe vis-à-vis de l'observateur ($t = t' = 0$), deux phares s'allument (simultanément dans le référentiel du train) à l'avant et à l'arrière du train. Les deux phares

s'éteignent simultanément (pour le train) lorsque l'arrière du train passe vis-à-vis de l'observateur.

a. À quel instant chacun des deux phares s'est-il allumé pour l'observateur ?

b. À quel instant chacun des deux phares s'est-il éteint pour l'observateur ?

c. Combien de temps sont demeurés allumés les deux phares dans le référentiel du train ?

d. Combien de temps sont demeurés allumés les deux phares dans le référentiel de l'observateur ?

Section 9.9 La transformation relativiste des vitesses

E34 Par rapport à la Terre, un vaisseau spatial A se déplace à une vitesse $0{,}25\,c\vec{\imath}$. Un second vaisseau spatial B se déplace en sens opposé avec une vitesse par rapport à la Terre de $-0{,}25\,c\vec{\imath}$. Le vaisseau A mesure la vitesse de la Terre et du vaisseau B par rapport à son référentiel. Déterminez :

a. la vitesse de la Terre selon le vaisseau A ;

b. la vitesse du vaisseau B selon le vaisseau A.

E35 Un vaisseau spatial se déplace à $0{,}300\,c\vec{\imath}$ par rapport à la Terre. Il envoie un missile à une vitesse de $0{,}500\,c\vec{\imath}$ par rapport au vaisseau. Quelle est la vitesse du missile par rapport à la Terre ?

P36 Dans un référentiel S', un proton a une vitesse de $0{,}900\ c$ à 30,0° au-dessus de la partie positive de l'axe des x'. Le référentiel S' se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = 0{,}700\,c\vec{\imath}$ par rapport à un référentiel S. Quelle est la vitesse du proton par rapport au référentiel S ?

P37 Un vaisseau spatial a une longueur propre de 800 m, et il se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = 0{,}760\,c\vec{\imath}$ par rapport à la Terre. Des protons se déplacent vers le vaisseau, à une vitesse de $-0{,}850\,c\vec{\imath}$ selon le référentiel de la Terre. Les protons se déplacent tout juste à l'extérieur du vaisseau, dans le sens de la longueur du vaisseau. Déterminez le temps nécessaire pour que les protons traversent la longueur du vaisseau :

a. pour la Terre ;

b. pour le vaisseau ;

c. pour les protons.

Section 9.11 L'énergie en relativité

Q38 Le tableau suivant donne la valeur de la masse et de l'énergie totale pour quatre particules. Classez les particules par ordre croissant :

a. de l'énergie au repos ;

b. de l'énergie cinétique ;

c. de leur facteur de Lorentz ;

d. du module de la vitesse.

particule	m	E
1	m	$3mc^2$
2	$2m$	$4mc^2$
3	m	$4mc^2$
4	$3m$	$4mc^2$

E39 Quel est le module de la vitesse d'une particule pour que le module de sa quantité de mouvement réelle soit le double de sa valeur newtonienne ?

E40 Un électron a une énergie totale de 0,647 MeV.

a. Quel est le module de sa quantité de mouvement, exprimé en MeV/c ?

b. Quelle est son énergie cinétique, exprimée en MeV ?

c. Quel est le module de sa vitesse, exprimé en fonction de c ?

E41 Une particule de masse $3m_0$ a une quantité de mouvement dont le module est $p = 4m_0c$.

a. Quelle est son énergie totale ?

b. Quelle est son énergie cinétique ?

c. Quel est le module de sa vitesse ?

E42 Déterminez le travail nécessaire, exprimé en MeV, pour accélérer un proton :

a. du repos à $0{,}100\ c$;

b. de $0{,}500\ c$ à $0{,}600\ c$;

c. de $0{,}890\ c$ à $0{,}990\ c$.

E43 La particule K^+ a une durée de vie propre de 12,4 ns, et son énergie au repos est de 494 MeV. Dans une expérience, on observe ces particules avec une énergie cinétique de 1,27 GeV. Quelle est la durée de vie de ces particules dans le référentiel du laboratoire ?

P44 À partir du repos, un électron est accéléré par une différence de potentiel de 1,20 MV.

a. Quelle est l'énergie cinétique de l'électron ?

b. Quel est le module de la quantité de mouvement de l'électron ?

P45 Les pions (π^+) sont des particules subatomiques dont la durée de vie propre est de 26,03 ns, et l'énergie au repos, de 139,7 MeV. On produit dans un accélérateur de particules des pions dont l'énergie cinétique est de 423,0 MeV.

a. Quel est le module de la vitesse des pions ?

b. Quelle est la durée de vie des pions dans le référentiel du laboratoire ?

c. Quelle distance les pions parcourent-ils dans le laboratoire avant de se désintégrer ?

P46 L'énergie qu'on reçoit du Soleil est le résultat de la fusion nucléaire dans le cœur de ce dernier. La fusion se produit en plusieurs étapes, mais qui sont équivalentes à la fusion de quatre protons et de deux électrons pour former un noyau d'hélium :

$$4\mathrm{p} + 2\mathrm{e}^- \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + 2\nu + 6\gamma\ ,$$

où ν représente des neutrinos (dont la masse est négligeable) et γ, des rayons gamma. La masse d'un proton est de 1,007 276 u, celle de l'électron est de 0,000 549 u et celle d'un noyau d'hélium, de 4,001 506 u. Calculez l'énergie au repos qui est transformée dans cette réaction.

P47 Une centrale nucléaire a produit de l'énergie électrique à un taux de 630 MW. Son rendement (le rapport entre l'énergie électrique produite et l'énergie au repos transformée) est de 32,0 %. Quelle est la variation de masse annuelle du combustible nucléaire si la centrale fonctionne 300 j par année ?

R48 À la distance du Soleil où se trouve la Terre, celle-ci reçoit une irradiance de 1 367 $\mathrm{W/m^2}$ de façon perpendiculaire au rayonnement. Quelle est la diminution de la masse du Soleil à chaque seconde ?

P49 Une particule de masse $m_1 = m$, dont le module de la vitesse est de 0,800 c, entre en collision avec une particule immobile, dont la masse est $m_2 = 3m$. La collision est parfaitement inélastique, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une seule particule après la collision.

a. Quel est le module de la quantité de mouvement de la première particule avant la collision ?

b. Quelle est l'énergie totale du système avant la collision ?

c. Quelle est la masse de la nouvelle particule ?

d. Quel est le module de la vitesse de cette nouvelle particule ?

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

9.1	(i) = (ii) = (iii) = (iv)	Les ondes radio sont des ondes électromagnétiques qui se propagent à la vitesse de la lumière. Le module de la vitesse de la lumière est le même, quel que soit le mouvement de la source par rapport au détecteur.
9.2	**a.** Ariane	Ariane a besoin d'une seule horloge, celle de son vaisseau.
	b. Aucun	Chaque observateur a besoin de deux horloges : une vis-à-vis de l'émission de l'onde radio et une autre vis-à-vis de la position de la réception.
9.3	(iii)	Pour les voyageurs, le tunnel se déplace à une vitesse $-\vec{\mathbf{v}}$. Ils mesurent une longueur contractée pour le tunnel $L = L_0/\gamma$, car $\gamma > 1$.
9.4	**a.** Un décalage vers le bleu	À cause de la rotation du nuage, le point du haut se dirige vers la Terre. La longueur d'onde doit être plus petite que la longueur d'onde émise ($\lambda < \lambda_0$), ce qui correspond à un décalage vers le bleu.
	b. Un décalage vers le rouge	À cause de la rotation, le point s'éloigne de la Terre. La longueur d'onde observée est donc plus grande que la longueur d'onde émise ($\lambda > \lambda_0$), ce qui correspond à un décalage vers le rouge.
9.5	**a.** Dans S	Dans S', le proton est immobile. Son énergie cinétique est nulle. Dans le référentiel S, le proton est en mouvement, de telle sorte que $K = (\gamma_p - 1)\, mc^2 > 0$.
	b. Dans S	L'énergie totale est $E = \gamma_p mc^2$. Dans S', $\gamma'_p = 1$, car le proton est immobile. Dans S, $\gamma_p > 1$.
	c. Dans S	Le module de la quantité de mouvement est $p = \gamma_p mu$. Dans le référentiel S', le proton est immobile, donc sa quantité de mouvement est nulle.
	d. Dans S' et S	La masse est un invariant relativiste, donc elle est la même dans tous les référentiels.

Chapitre 10

La dualité onde-particule

Buts du chapitre

Dans ce chapitre, on commence l'étude de la physique quantique en se basant sur le concept de la dualité onde-particule. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de comprendre la notion de photon ;
- de calculer l'irradiance et la longueur d'onde du pic d'émission d'un corps noir ;
- d'interpréter les résultats de l'effet photoélectrique et de l'effet Compton ;
- de calculer la longueur d'onde d'une onde de matière ;
- d'utiliser le principe d'incertitude de Heisenberg.

Préalables

Ce chapitre traite de la lumière et des électrons du point de vue de la dualité onde-particule. Revoyez :

- l'expérience de Young, présentée à la section 7.2 ;
- la diffraction par une fente étroite, étudiée à la section 8.2 ;
- la quantité de mouvement et l'énergie en relativité, analysées aux sections 9.10 et 9.11 ;
- l'énergie potentielle électrique et le potentiel électrique, présentés aux sections 4.1 et 4.2 du tome 2.

Une image d'une bactérie *Helicobacter pylori*, avec un grossissement de 7 700, obtenue à l'aide d'un microscope électronique.

Au chapitre précédent, nous avons étudié les objets qui se déplacent à une vitesse se rapprochant de celle de la lumière. Dans cette situation, la mécanique newtonienne doit être remplacée par la relativité restreinte. Ce changement donne lieu à des résultats déconcertants au départ, mais le fondement de la mécanique demeure intact : les particules se déplacent le long de trajectoires bien définies, et la cinématique peut être utilisée pour relier la position, la vitesse et l'accélération.

Dans ce chapitre, nous commençons l'étude d'un domaine de la physique où la mécanique newtonienne doit de nouveau être remplacée par une autre mécanique. C'est le monde de la physique quantique, qui s'applique aux échelles de l'atome et des noyaux atomiques. La mécanique quantique doit aussi être utilisée pour comprendre l'interaction entre la lumière et la matière de façon fondamentale.

Jusqu'à présent, nous avons vu que la lumière se comporte comme une onde électromagnétique. Par exemple, la lumière produit des interférences dans l'expérience de Young. Par contre, lorsqu'on étudie l'émission et l'absorption de la lumière par les atomes, on se rend compte que la lumière se comporte comme un ensemble de particules appelées les *photons*. Dans certaines situations, la lumière se comporte comme une onde, et dans d'autres situations, elle se comporte comme une particule. C'est la dualité onde-particule.

Lorsqu'on étudie les atomes et les électrons, il n'est plus possible de décrire le mouvement des particules à partir d'une trajectoire bien définie. En effet, les électrons se comportent parfois comme des particules et parfois comme des ondes. Il y a aussi une dualité onde-particule pour l'électron et les autres particules de matière. Le concept de dualité onde-particule est essentiel pour comprendre le comportement et la stabilité des atomes. La nature ondulatoire des électrons a permis le développement des microscopes électroniques, qui produisent des images avec un grandissement important, comme celle illustrée en ouverture de chapitre.

10.1 La notion de photon

Dans les chapitres 4 à 8, nous avons analysé la lumière en la considérant comme une onde. Dans une onde, l'énergie est distribuée de façon continue. En 1905, Albert Einstein a mis en évidence une asymétrie entre la matière et la lumière*. La matière est constituée d'atomes. L'état d'un système constitué d'atomes est déterminé par la position et la vitesse des atomes, donc à l'aide d'une fonction discrète. L'énergie d'un système d'atomes fait intervenir une somme discrète. Au contraire, la lumière est décrite par une fonction continue donnée par le champ électrique et le champ magnétique ; l'énergie doit être obtenue au moyen d'une intégrale sur une fonction continue.

Dans les expériences d'interférence et de diffraction de la lumière, on mesure toujours des valeurs moyennes et non des valeurs instantanées, étant donné que les valeurs des champs électriques et des champs magnétiques varient très rapidement (à une fréquence de l'ordre de 10^{14} Hz dans le cas du visible). Einstein pose donc l'hypothèse que l'énergie n'est pas distribuée de façon continue, mais qu'elle est plutôt concentrée en certains points sous la forme de

* Une traduction anglaise de l'article d'Einstein est présentée dans l'ouvrage de John STACHEL. *Einstein's Miraculous Year*, Princeton, Princeton University Press, 1998.

paquets (des quanta, qu'on appelle aujourd'hui des *photons*). De plus, les photons se déplacent sans se diviser et ils sont absorbés ou émis de façon complète.

Selon Einstein, chaque photon transporte une énergie qui dépend de la fréquence de la lumière :

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}, \tag{10.1}$$

Énergie d'un photon

où f représente la fréquence de la lumière, λ est la longueur d'onde et c, le module de la vitesse de la lumière. La constante de proportionnalité h est la constante de Planck, une constante qui a été introduite en 1900 par le physicien Max Planck pour expliquer la distribution spectrale qu'émettent certains objets appelés les corps noirs (nous reviendrons sur ce sujet à la section 10.2). Dans le système international, la valeur de la constante de Planck est

$$h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}. \tag{10.2}$$

Habituellement, la longueur d'onde de la lumière visible est exprimée en nanomètres. De plus, en physique atomique, l'énergie est souvent exprimée en électron-volts (eV). Il est alors utile d'exprimer hc en eV · nm :

$$hc = 1\,240\ \text{eV} \cdot \text{nm}. \tag{10.3}$$

L'équation 10.1 montre que l'énergie des photons augmente avec la fréquence : un photon d'ultraviolet transporte plus d'énergie qu'un photon de lumière visible. Étant donné que la longueur d'onde de la lumière visible est comprise entre 380 nm et 700 nm, ceci donne des photons dont l'énergie varie entre 3,26 eV pour le violet et 1,55 eV pour le rouge.

Selon Einstein, un faisceau lumineux doit comprendre un nombre entier N de photons, de telle sorte que l'énergie transportée par un faisceau est

$$E_{\text{faisc}} = Nhf = \frac{Nhc}{\lambda}. \tag{10.4}$$

Dans son article de 1905, Einstein applique son hypothèse à quelques situations où la lumière est émise ou absorbée pour obtenir des prédictions. Nous allons analyser ces résultats aux sections 10.2 et 10.3.

EXEMPLE 10.1 Les photons d'un laser

Un pointeur laser a une puissance de 4,00 mW et une longueur d'onde de 532 nm. Calculez le nombre de photons qu'il émet par seconde.

SOLUTION

Décortiquer le problème

Soit $n = N/\Delta t$ le nombre de photons émis par seconde.

Connues	Inconnue
$P = 4{,}00 \times 10^{-3}$ W	n
$\lambda = 532$ nm	

Identifier la clé

La clé est l'équation 10.4 :

$$E_{\text{faisc}} = N\frac{hc}{\lambda}. \tag{i}$$

Pour obtenir le nombre de photons par seconde, nous divisons chaque membre de l'équation (i) par Δt :

$$\frac{E_{\text{faisc}}}{\Delta t} = \frac{N}{\Delta t}\frac{hc}{\lambda}$$

$$P = n\frac{hc}{\lambda}, \qquad \text{(ii)}$$

où $P = E_{\text{faisc}}/\Delta t$ représente la puissance du faisceau.

Résoudre le problème

Nous isolons n dans l'équation (ii) et nous remplaçons les valeurs :

$$n = \frac{P\lambda}{hc} = \frac{4{,}00\times10^{-3}\ \text{W}\times532\times10^{-9}\ \text{m}}{6{,}626\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}\times2{,}998\times10^{8}\ \text{m/s}}$$

$$n = 1{,}07\times10^{16}\ \text{photons/s}. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous remarquons qu'un faisceau laser émet un très grand nombre de photons chaque seconde.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 10.1

Classez par ordre croissant l'énergie des photons associée aux sources suivantes.

(i) Un téléphone cellulaire émet des micro-ondes.
(ii) Les rayons X sont utilisés pour obtenir une radiographie.
(iii) Un laser à hélium-néon émet une lumière rouge.
(iv) Une lampe de bronzage produit de l'ultraviolet.

10.2 Le rayonnement du corps noir

On peut voir les objets qui nous entourent grâce à la lumière qu'ils réfléchissent. Ces objets émettent aussi des ondes électromagnétiques à cause de l'agitation thermique. Ce *rayonnement thermique* est invisible pour nos yeux, car il se trouve dans le domaine de l'infrarouge. Par contre, si la température d'un objet augmente, on peut le voir devenir rouge. C'est le cas par exemple lorsqu'un élément de cuisinière devient très chaud.

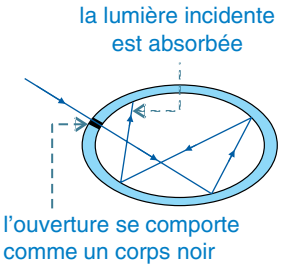


FIGURE 10.1
L'ouverture d'une cavité se comporte comme un corps noir, car la lumière incidente est absorbée à l'intérieur de la cavité.

Le rayonnement produit par un objet dépend de la surface et de la composition de l'objet. Par contre, un objet qui absorbe complètement la lumière incidente produit un spectre universel, qui dépend uniquement de sa température. Ce type d'objet est appelé un *corps noir*. Ce résultat a été découvert en 1859 par le physicien allemand Gustav Kirchhoff (1824-1887). Ce dernier a aussi trouvé une façon d'obtenir un corps noir : on prend une cavité munie de seulement une petite ouverture (*voir la figure 10.1*). La lumière qui entre par l'ouverture est absorbée par les parois internes de la cavité. À la température de la pièce, l'ouverture paraît noire. La pupille d'un œil en est un exemple : elle paraît noire, alors qu'il s'agit de l'ouverture de l'œil, par où la lumière entre dans l'œil.

Pour étudier le rayonnement du corps noir, on chauffe les parois de la cavité pour obtenir une température T fixe. La cavité est alors en équilibre thermique, et le rayonnement sort par l'ouverture. Le spectre produit est un spectre continu. À la température de la pièce, l'ouverture paraît noire, étant donné que le rayonnement se trouve dans le domaine de l'infrarouge. Si la température est plus élevée, l'ouverture devient rouge, car une partie du rayonnement est de la lumière rouge.

Ce sont les physiciens autrichiens Josef Stefan (1835-1893) et Ludwig Boltzmann (1844-1906) qui ont obtenu les premiers résultats importants. À partir de

résultats empiriques, Stefan a trouvé en 1879 que l'irradiance produite par un corps noir est proportionnelle à la quatrième puissance de sa température :

$$I = \sigma T^4 \,, \tag{10.5}$$

Loi de Stefan-Boltzmann

où σ est une constante, appelée la *constante de Stefan-Boltzmann*. Dans le système international,

$$\sigma = 5{,}670 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)} \,. \tag{10.6}$$

L'équation 10.5 est appelée la *loi de Stefan-Boltzmann*. À partir de cette loi, Stefan a pu obtenir la température de la surface du Soleil. La preuve théorique a été fournie par son ancien étudiant Ludwig Boltzmann en 1884. Ce dernier a utilisé les principes de la thermodynamique ainsi que la pression de radiation exercée par le rayonnement d'un corps noir pour prouver l'équation 10.5.

MISE EN GARDE

Dans la loi de Stefan-Boltzmann, I représente l'irradiance à la surface du corps noir. De plus, la température doit être exprimée en kelvins.

EXEMPLE 10.2 La température du Soleil

La Terre reçoit une irradiance moyenne de 1,36 kW/m^2 (ce qui est appelé la *constante solaire*). Calculez la température du Soleil.

SOLUTION

Décortiquer le problème

La constante solaire correspond à l'irradiance du Soleil à la position de la Terre. Nous avons besoin de la distance Terre-Soleil r et du rayon R du Soleil pour calculer l'irradiance à la surface du Soleil. Ces données sont présentées à l'annexe D.

Connues	Inconnue
$I_\mathrm{T} = 1{,}36 \times 10^3\ \mathrm{W/m^2}$	T
$r = 149{,}6 \times 10^9\ \mathrm{m}$	
$R_\mathrm{S} = 6{,}95 \times 10^8\ \mathrm{m}$	

Identifier les clés

La première **clé** est que le Soleil est une source ponctuelle, qui émet de la lumière dans toutes les directions. L'irradiance à la position de la Terre est alors donnée par l'équation 4.26 de la page 135 :

$$I_\mathrm{T} = \frac{P}{4\pi r^2} \,. \tag{i}$$

La deuxième **clé** est la loi de Stefan-Boltzmann, donnée par l'équation 10.5 :

$$I = \sigma T^4 \,. \tag{ii}$$

Ici, I est l'irradiance à la surface du Soleil :

$$I = \frac{P}{4\pi R_\mathrm{S}^2} \,, \tag{iii}$$

où R_S est le rayon du Soleil.

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord la puissance du Soleil à partir de l'équation (i) :

$$\begin{aligned} P &= I_\mathrm{T} 4\pi r^2 \\ &= 1{,}36 \times 10^3\ \mathrm{W/m^2} \times 4\pi\,(149{,}6 \times 10^9\ \mathrm{m})^2 \\ &= 3{,}825 \times 10^{26}\ \mathrm{W} \,. \end{aligned} \tag{iv}$$

Ceci nous permet de calculer l'irradiance à la surface du Soleil à l'aide de l'équation (iii) :

$$I = \frac{3{,}825 \times 10^{26}\ \mathrm{W}}{4\pi\,(6{,}95 \times 10^8\ \mathrm{m})^2} = 6{,}301 \times 10^7\ \mathrm{W/m^2} \,. \tag{v}$$

Il ne reste qu'à calculer la température à partir de l'équation (ii) :

$$\begin{aligned} T &= \sqrt[4]{\frac{I}{\sigma}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{6{,}301 \times 10^7\ \mathrm{W/m^2}}{5{,}670 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)}}} \\ &= 5{,}77 \times 10^3\ \mathrm{K} \,. \end{aligned} \tag{réponse}$$

Valider la réponse

L'ordre de grandeur semble correct.

La prochaine étape est d'obtenir la distribution du spectre en fonction de la longueur d'onde lorsque le corps noir a une température T. Pour cela, on définit la *radiance spectrale* $R_T(\lambda)$, de telle sorte que $R_T(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ représente l'énergie émise par unité de temps et par unité d'aire pour une longueur d'onde comprise entre λ et $\lambda + \mathrm{d}\lambda$. Avec cette définition, l'irradiance correspond à l'intégrale de R_T sur toutes les longueurs d'onde. En 1893, le physicien allemand Wilhelm Wien (1864-1928) [prononcez «vîne»] a trouvé une relation empirique reliant la longueur d'onde λ_{max}, pour laquelle la radiance spectrale est maximale, et la température du corps noir :

Loi du déplacement de Wien

$$\lambda_{\text{max}} T = 2{,}898 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}\,. \tag{10.7}$$

Cette équation est appelée la *loi du déplacement de Wien*. Elle montre que plus un corps est chaud, plus la longueur d'onde du maximum est petite : un corps chaud (comme un élément de cuisinière) devient rouge, et un objet très chaud (le filament d'une lampe halogène) devient jaune.

Wien a apporté une autre contribution à la compréhension du rayonnement du corps noir. En se basant sur les concepts de la physique statistique et en se guidant sur la loi de Stefan-Boltzmann, il a trouvé théoriquement une formule pour la distribution :

$$R_T^{\text{Wien}}(\lambda) = \frac{b}{\lambda^5}\, \mathrm{e}^{-a/\lambda T}\,, \tag{10.8}$$

où a et b sont des constantes qui doivent être trouvées expérimentalement. Cette distribution donne de bons résultats seulement pour de courtes longueurs d'onde. Dans le cas de longueurs d'onde plus grandes, la formule de Wien est incorrecte. Les travaux de Wien ont permis de montrer que pour respecter la loi de Stefan-Boltzmann, la distribution doit être une fonction $f(\lambda T)/\lambda^5$, où $f(\lambda T)$ est une fonction de λT à déterminer.

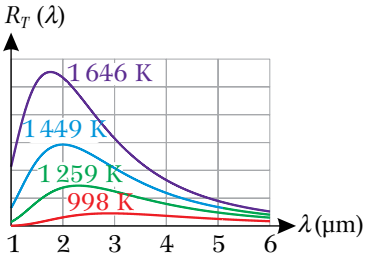


FIGURE 10.2
La distribution du rayonnement du corps noir pour quatre températures, selon les mesures prises en 1900

En 1900, deux groupes de physiciens allemands ont mesuré avec précision le rayonnement du corps noir dans l'infrarouge (*voir la figure 10.2*). Ces résultats ont alors permis au physicien allemand Max Planck (1858-1947), un collègue de Wien, de trouver la formule pour décrire la distribution :

$$R_T^{\text{Planck}}(\lambda) = \frac{b}{\lambda^5}\,\frac{1}{\mathrm{e}^{a/\lambda T} - 1}\,, \tag{10.9}$$

où a et b sont deux constantes. La distribution décrit précisément les résultats expérimentaux.

Planck a d'abord trouvé cette relation en se guidant sur la formule de Wien et en faisant appel à son intuition mathématique. Il a ensuite essayé de la démontrer à partir des lois fondamentales, c'est-à-dire des équations de Maxwell. Il a modélisé les parois de la cavité comme des charges qui oscillent selon un mouvement harmonique simple. D'après les équations de Maxwell, des charges oscillantes produisent et absorbent des ondes électromagnétiques. À l'équilibre, la densité d'énergie électromagnétique doit être égale à la densité d'énergie des oscillateurs. Pour faire son calcul, il a émis une hypothèse selon laquelle les oscillateurs absorbent et émettent de l'énergie de façon quantifiée :

$$\Delta E_{\text{osc}} = hf\,, \tag{10.10}$$

où h est une nouvelle constante fondamentale, la *constante de Planck*. Il a appelé *quanta* ces unités d'énergie. Avec cette hypothèse, Planck a obtenu exactement l'équation 10.9, qu'on écrit de façon moderne ainsi :

$$R_T(\lambda) = \frac{8\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} . \tag{10.11}$$

Loi de rayonnement de Planck

La constante k est appelée la *constante de Boltzmann*, et elle correspond à la constante des gaz parfaits divisée par le nombre d'Avogadro :

$$k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/K} . \tag{10.12}$$

Défi animé 10.1
La distribution du rayonnement émis par un four, une ampoule ou le Soleil est-elle la même ?

Même si Planck a trouvé la formule de la distribution du corps noir, sa preuve théorique ne le satisfait pas à cause de son hypothèse sur les quanta. Il a tenté sans succès d'obtenir l'équation 10.11 uniquement à partir des équations de Maxwell. De même, le physicien anglais John Strutt, Lord Rayleigh (1842-1919) et le physicien et astronome Sir James Jeans (1877-1946) ont obtenu une relation à partir de la théorie classique, mais celle-ci ne correspond pas aux résultats expérimentaux pour les petites longueurs d'onde.

Dans son article de 1905 sur les quanta, Albert Einstein démontre la loi du rayonnement de Planck en utilisant son hypothèse : l'énergie de la lumière n'est pas continue dans l'onde électromagnétique, mais elle apparaît sous forme de quanta. Pour Einstein, ce ne sont pas les oscillations des parois qui produisent des quanta, c'est plutôt la lumière qui est composée de quanta. La loi du rayonnement de Planck peut être considérée comme la première vérification de la validité de l'hypothèse d'Einstein.

La loi du rayonnement de Planck représente correctement la distribution du rayonnement émis par un corps noir à une température T. En intégrant $R_T(\lambda)$ sur toutes les longueurs d'onde, on retrouve la loi de Stefan-Boltzmann, et la constante de Stefan-Boltzmann est exprimée en fonction des constantes fondamentales :

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} .$$

De même, on peut trouver la longueur d'onde λ_{max} pour laquelle la distribution est maximale en calculant la dérivée par rapport à λ et en égalant le résultat à zéro. De cette façon, on retrouve la loi du déplacement de Wien :

$$\lambda_{max} T = \frac{hc}{4{,}9665\, k} = 2{,}898 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K} .$$

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 10.2

La couleur des étoiles permet de connaître leur température de surface. Le tableau à la page suivante donne la longueur d'onde du maximum de la distribution spectrale pour quatre étoiles brillantes du ciel. Classez les étoiles par ordre croissant de leur température de surface.

Étoile	λ_{max}(µm)
Bételgeuse	0,80
Canopus	0,40
Sirius	0,34
Soleil	0,50

10.3 L'effet photoélectrique

La description du phénomène

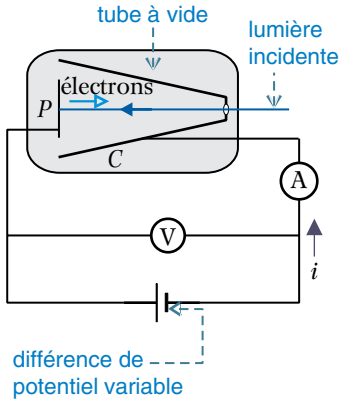


FIGURE 10.3
Le schéma de l'appareil permettant d'étudier l'effet photoélectrique

Après avoir appliqué la notion de photons au rayonnement du corps noir, Einstein applique le concept de photon à une situation où cette fois-ci la lumière est absorbée. L'effet photoélectrique se produit lorsqu'un faisceau lumineux éclaire une surface métallique propre. Quand la lumière a une longueur d'onde suffisamment courte (une lumière dans le violet ou l'ultraviolet, par exemple), des électrons sont éjectés du métal. On les appelle des *photoélectrons*. La figure 10.3 montre le schéma d'un montage qui permet d'étudier le phénomène. On place une plaque de métal P à l'intérieur d'un tube à vide. Une électrode C est placée en face pour capter les électrons. On forme un circuit, composé d'un ampèremètre très sensible et d'une source de f.é.m. variable. Un voltmètre est ajouté pour mesurer la différence de potentiel appliquée entre la plaque P et le capteur C.

Pour commencer, supposons que la source de f.é.m. est réglée pour que $\Delta V = 0$ et qu'on éclaire une plaque P de césium avec une lumière bleue. Des électrons sont alors éjectés de la plaque, et ils ont assez d'énergie pour se rendre jusqu'au capteur C. On observe alors un courant dans le circuit, qu'on appelle un *courant photoélectrique*. Si on augmente l'irradiance de la lumière, on observe un plus grand courant photoélectrique. Par contre, si on éclaire la même plaque avec une lumière rouge, aucun courant n'est observé. Aucun électron n'a assez d'énergie pour quitter la plaque P et se rendre au collecteur C. Le résultat ne change pas, même si on augmente l'irradiance de la lumière incidente.

Supposons de nouveau qu'une lumière bleue éclaire la plaque P . Pour mesurer l'énergie cinétique des électrons qui quittent la plaque, on applique une différence de potentiel $\Delta V = V_C - V_P < 0$ pour ralentir les électrons. Lorsque ΔV atteint une valeur $-V_{arrêt}$ le courant dans le circuit devient nul. Cette valeur est appelée le *potentiel d'arrêt*.

Lorsque la différence de potentiel appliquée est $\Delta V = -V_{arrêt}$, les électrons éjectés de la plaque P avec la plus grande énergie cinétique ($K_P = K_{max}$) ont une énergie cinétique nulle au collecteur ($K_C = 0$). Selon le principe de conservation de l'énergie,

$$\Delta K = -\Delta U$$

$$K_C - K_P = -q\,(V_C - V_P)$$

$$0 - K_{max} = +qV_{arrêt}\,.$$

Étant donné que la charge d'un électron est $q = -e$, on obtient

$$K_{max} = eV_{arrêt}\,. \qquad (10.13)$$

Donc, en mesurant le potentiel d'arrêt, on mesure l'énergie cinétique maximale des électrons éjectés de la plaque P.

La prédiction d'Einstein

Les électrons peuvent circuler presque librement à l'intérieur d'un conducteur, mais ils ne peuvent pas quitter ce dernier. On appelle le *travail d'extraction* Φ l'énergie minimale qu'un électron doit absorber pour quitter le métal. Le travail d'extraction est une propriété du métal utilisé pour la plaque *P*. Le tableau 10.1 donne les valeurs du travail d'extraction pour différents métaux. On peut donc dire qu'un électron lié a une énergie de liaison minimale $E_{\text{liaison}} = -\Phi$ lorsqu'il est dans le métal.

Selon Einstein, un photoélectron est produit lorsqu'un électron de la plaque absorbe complètement un photon. L'énergie du photon $E = hf = hc/\lambda$ est complètement cédée à l'électron. La figure 10.4 illustre la situation avant et après l'absorption du photon. Selon le principe de conservation de l'énergie appliqué à un électron le moins lié,

$$hf - \Phi = K_{\max} . \tag{10.14}$$

En insérant l'équation 10.13 dans l'équation 10.14 et en isolant $V_{\text{arrêt}}$, on obtient

$$V_{\text{arrêt}} = \frac{h}{e} f - \frac{\Phi}{e} . \tag{10.15}$$

Donc, selon Einstein, si on mesure le potentiel d'arrêt en fonction de la fréquence de la lumière utilisée, on doit obtenir une droite dont la pente h/e ne dépend pas de la substance utilisée pour la plaque *P*. De plus, l'ordonnée à l'origine $-\Phi/e$ est une propriété caractéristique de la substance utilisée comme plaque. Ces résultats ne dépendent pas de l'irradiance de la lumière : le potentiel d'arrêt ne change pas si on augmente ou si on diminue l'irradiance de la lumière. En effet, en augmentant l'irradiance, on augmente le nombre de photons sans changer l'énergie de chaque photon.

La prédiction d'Einstein est à l'opposé de ce que prévoit la théorie classique de l'électromagnétisme. Selon la théorie de Maxwell, le champ électrique de l'onde augmente lorsqu'on accroît l'irradiance de la lumière. Un champ électrique intense devrait céder plus d'énergie aux électrons.

Le physicien américain Robert Andrews Millikan (1868-1953)* faisait partie de ceux qui croyaient que la théorie d'Einstein était fausse, compte tenu du succès de la théorie ondulatoire de la lumière. Pour le démontrer, il a mesuré avec précision le potentiel d'arrêt en fonction de la fréquence de la lumière, dans le cas de différentes substances. Contrairement à ses attentes, en 1916, ses mesures ont confirmé que l'équation 10.15 décrit parfaitement les résultats expérimentaux. Le graphique du potentiel d'arrêt en fonction de la fréquence donne bien une droite dont la valeur de la pente est la même pour les différents métaux utilisés. Comme la pente prévue est h/e, Millikan a obtenu une mesure précise de la constante de Planck en utilisant la mesure de la charge élémentaire.

L'effet photoélectrique montre bien que l'énergie de la lumière n'est pas distribuée de façon continue, mais qu'elle est plutôt concentrée sous forme de quanta, les photons, comme l'a supposé Einstein. À la suite de ces résultats, Einstein a obtenu le prix Nobel de physique en 1921. De plus, Millikan a reçu le prix Nobel en 1923 pour ses travaux sur la charge élémentaire et sur l'effet photoélectrique.

TABLEAU 10.1

Le travail d'extraction pour différents éléments

Élément	Φ (eV)
Aluminium	4,1
Béryllium	4,98
Cadmium	4,08
Césium	2,14
Cuivre	4,7
Étain	4,42
Fer	4,7
Indium	4,09
Magnésium	3,66
Plomb	4,22
Potassium	2,29
Sodium	2,36
Titane	4,33

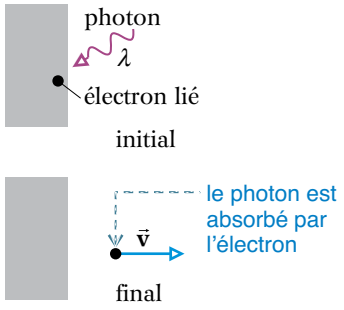


FIGURE 10.4
La situation initiale et la situation finale de l'effet photoélectrique

* Millikan est célèbre pour avoir été le premier à mesurer la charge élémentaire, en mesurant la force électrique sur des gouttelettes d'huile.

L'équation de l'effet photoélectrique

Habituellement, on mesure la longueur d'onde de la lumière, plutôt que sa fréquence. De plus, le travail d'extraction est exprimé en électron-volts. On peut réécrire l'équation 10.15 de la façon suivante :

Équation de l'effet photoélectrique

$$\frac{hc}{\lambda} = eV_{\text{arrêt}} + \Phi \,, \tag{10.16}$$

où $eV_{\text{arrêt}}$ correspond à l'énergie cinétique maximale des électrons, comme l'indique l'équation 10.13.

REMARQUE

Lorsque la lumière visible ou la lumière ultraviolette est utilisée dans l'effet photoélectrique, les électrons ont une énergie cinétique beaucoup plus faible que leur énergie au repos $E_0 = 511$ keV. L'approximation non relativiste $K = mv^2/2$ est donc valable pour calculer l'énergie cinétique des électrons.

Afin que l'effet photoélectrique se produise, il faut que l'énergie d'un photon soit suffisante pour que l'électron puisse tout juste quitter l'atome. Cela correspond à des électrons dont l'énergie cinétique maximale est nulle (l'énergie cinétique ne peut pas être négative), donc pour un potentiel d'arrêt $V_{\text{arrêt}} = 0$. La longueur d'onde λ_{seuil} est la *longueur d'onde seuil*, la plus grande longueur d'onde pour que l'effet photoélectrique se produise. En insérant $V_{\text{arrêt}} = 0$ pour $\lambda = \lambda_{\text{seuil}}$ dans l'équation 10.16, on obtient

Longueur d'onde seuil

$$\lambda_{\text{seuil}} = \frac{hc}{\Phi} \,. \tag{10.17}$$

L'équation 10.17 montre bien que la longueur d'onde seuil est une propriété de la substance utilisée pour la plaque, car elle ne dépend que du travail d'extraction.

Comme nous l'avons indiqué à la section 9.11, le système international d'unités est mal adapté à la physique des électrons et à la physique atomique. On simplifie les calculs en exprimant l'énergie en électron-volts. Dans ce système, $eV_{\text{arrêt}}$ se calcule simplement en multipliant le potentiel d'arrêt par $1e$, en tenant compte du fait que $1e \times 1\ \text{V} = 1\ \text{eV}$. Dans ce système, la longueur d'onde est exprimée en nm et le facteur hc peut s'écrire

$$hc = 1\,240\ \text{eV} \cdot \text{nm} \,. \tag{10.18}$$

De plus, on exprime les équations de telle sorte que la masse des particules soit remplacée par leur énergie au repos $mc^2 = E_0$.

Défi animé 10.2
Quels facteurs parmi les suivants influent sur le potentiel d'arrêt : la longueur d'onde de la source, l'intensité de la source ou le type de matériau de l'électrode qui reçoit la lumière ?

MISE EN GARDE

Il est important de bien écrire les unités lorsqu'on travaille en électron-volts, pour s'assurer que les unités se simplifient correctement. De plus, il ne faut pas mélanger les unités du SI et les électron-volts dans un même calcul.

EXEMPLE 10.3 L'effet photoélectrique avec du sodium

Une surface de sodium est éclairée avec une lumière violette ayant une longueur d'onde de 405 nm, provenant d'un laser. Le travail d'extraction du sodium est de 2,36 eV.

a. Quelle est la longueur d'onde seuil pour le sodium ?
b. Quel est le potentiel d'arrêt pour la lumière violette utilisée ?
c. Quel est alors le module de la vitesse maximale des photoélectrons ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\lambda = 405$ nm	λ_{seuil}
$\Phi = 2{,}36$ eV	$V_{\text{arrêt}}$
$m = 511$ keV/c^2	$v_{\max}$

SOLUTION a.

Identifier la clé

La longueur d'onde seuil est la longueur d'onde maximale que doit avoir la lumière pour produire un effet photoélectrique, ce qui correspond à un potentiel d'arrêt $V_{\text{arrêt}} = 0$ V. La **clé** est donc l'équation 10.17 :

$$\lambda_{\text{seuil}} = \frac{hc}{\Phi} . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs, en utilisant $hc = 1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}$ pour travailler directement en électron-volts :

$$\lambda_{\text{seuil}} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{2{,}36\ \text{eV}} = 525\ \text{nm} . \text{ (réponse)}$$

Valider la réponse

La longueur d'onde seuil est plus grande que la longueur d'onde du laser. On peut donc observer l'effet photoélectrique pour une lumière violette.

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 10.16 :

$$\frac{hc}{\lambda} = eV_{\text{arrêt}} + \Phi \Rightarrow eV_{\text{arrêt}} = \frac{hc}{\lambda} - \Phi . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord $eV_{\text{arrêt}}$, qui représente l'énergie cinétique maximale des photoélectrons :

$$eV_{\text{arrêt}} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{405\ \text{nm}} - 2{,}36\ \text{eV} = 0{,}702\ \text{eV} . \text{ (iii)}$$

Le potentiel d'arrêt est donc

$$V_{\text{arrêt}} = \frac{0{,}702\ \text{eV}}{1e} = 0{,}702\ \text{V} = 0{,}70\ \text{V} , \qquad \text{(réponse)}$$

où nous avons utilisé la définition de l'électron-volt ($1\ \text{eV} = 1e \times 1\ \text{V}$).

Valider la réponse

La réponse n'a que deux chiffres significatifs à cause de la soustraction.

SOLUTION c.

Identifier la clé

L'énergie maximale des électrons est beaucoup plus faible que l'énergie au repos des électrons ($E_0 = 511$ keV). Il n'est alors pas nécessaire d'utiliser les équations relativistes. L'énergie cinétique maximale est donc

$$K_{\max} = eV_{\text{arrêt}} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 . \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Pour calculer le module de la vitesse, nous pouvons convertir en joules l'énergie cinétique maximale et exprimer la masse de l'électron en kg. Cela donne une vitesse en m/s. Il est aussi possible de faire le calcul en eV, pour obtenir une vitesse exprimée en fonction de la vitesse de la lumière c. Pour ce faire, nous multiplions l'équation (iv) par $1 = c^2/c^2$, de telle sorte que l'énergie cinétique est exprimée en fonction de l'énergie au repos de l'électron :

$$K_{\max} = \frac{1}{2}(mc^2)\left(\frac{v_{\max}}{c}\right)^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2K_{\max}}{mc^2}}\, c . \qquad \text{(v)}$$

Nous remplaçons ensuite les valeurs :

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}702\ \text{eV}}{511 \times 10^3\ \text{eV}}}\, c = 0{,}0017\, c .$$

(réponse)

Il est possible de convertir le module de la vitesse en m/s, en exprimant c en mètres par seconde :

$$v = 0{,}0017 \times 2{,}998 \times 10^8 \text{ m/s} = 5{,}0 \times 10^5 \text{ m/s} .$$

Valider la réponse
Le module de la vitesse maximale des électrons est beaucoup plus faible que c. Il est correct d'utiliser l'équation newtonienne pour l'énergie cinétique.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 10.3

On éclaire trois métaux différents avec une lumière violette. On observe l'effet photoélectrique pour le métal a et pour le métal b, mais le métal c ne produit pas d'effet photoélectrique. On mesure le potentiel d'arrêt correspondant pour le métal a et le métal b, et on trouve que $V_{\text{arrêt, } a} > V_{\text{arrêt, } b}$.

a. Classez les métaux par ordre croissant de leur travail d'extraction.
b. Classez les métaux par ordre croissant de la longueur d'onde seuil.

Les applications de l'effet photoélectrique

De façon générale, l'effet photoélectrique est le mécanisme qui permet de détecter la lumière à l'aide de capteurs électroniques. C'est le cas dans les appareils photo numériques et les caméras vidéo. Ces appareils utilisent des capteurs CCD (pour *charge-coupled Device*, c'est-à-dire des dispositifs à transfert de charge) ou des capteurs CMOS (pour *complementary metal oxide semiconductor*, ou semi-conducteur à oxyde de métal complémentaire). Dans ces capteurs, les photons incidents sont absorbés par les électrons d'un semi-conducteur, ce qui produit un courant dans un circuit. Dans les cellules photo-voltaïques, le même principe est utilisé pour convertir la lumière en courant électrique.

L'effet photoélectrique sert aussi dans les capteurs de lumière très sensibles, qu'on appelle les *tubes photomultiplicateurs*. La figure 10.5 montre un schéma de cet appareil. Un photon incident éclaire une photocathode, ce qui produit un électron par effet photoélectrique. L'électron est ensuite accéléré à l'aide d'une différence de potentiel d'environ 100 V, entre la cathode et une autre électrode qu'on appelle une *dynode*. Lorsque l'électron frappe la dynode, il éjecte des électrons secondaires. Les électrons secondaires sont eux aussi accélérés pour frapper une deuxième dynode, ce qui produit encore plus d'électrons secondaires. Le même processus se répète une dizaine de fois pour produire un nombre suffisant d'électrons afin que ces derniers soient détectés sur l'anode.

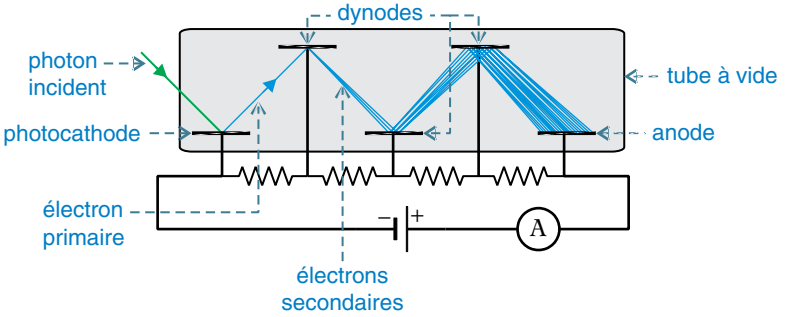


FIGURE 10.5
Le schéma d'un tube photomultiplicateur qui permet de détecter un photon

Les tubes photomultiplicateurs sont utilisés en physique nucléaire et en physique des particules pour compter les photons de façon individuelle. De plus, dans les *systèmes de vision de nuit*, le même principe est utilisé pour détecter la lumière visible de très faible irradiance, comme dans la figure 10.6.

FIGURE 10.6
Une vue de New York, à l'aide d'un système de vision de nuit

10.4 L'effet Compton

Si les photons sont bel et bien des particules réelles, ils doivent se comporter comme des billes de billard lors d'une collision. Une collision entre un photon et un électron doit se produire de telle sorte que la quantité de mouvement est conservée. Pour un photon ayant une longueur d'onde λ et une énergie $E = hc/\lambda$, on obtient le module de la quantité de mouvement à l'aide de l'équation 9.49 de la page 333. Le photon n'a pas d'énergie au repos, car il se déplace toujours à la vitesse de la lumière. Alors,

$$0 = E^2 - p^2c^2 \Rightarrow p = \frac{E}{c}. \tag{10.19}$$

En insérant $E = hc/\lambda$, on obtient

$$p = \frac{h}{\lambda}. \tag{10.20}$$

Module de la quantité de mouvement d'un photon

Cette équation montre que plus la longueur d'onde est faible (comme dans le cas des rayons X), plus le module de la quantité de mouvement est grand.

La quantité de mouvement des photons a été étudiée par le physicien américain Arthur Compton (1892-1962) à partir de 1922. Il a mené une expérience dans laquelle des rayons X ayant une longueur d'onde λ sont envoyés sur une cible de graphite. Compton a mesuré la longueur d'onde des rayons X diffusés (à l'aide d'un réseau cristallin), pour différents angles θ du détecteur par rapport à la direction initiale des rayons X. La figure 10.7 illustre un schéma de son expérience. Compton a observé des rayons X déviés dans différentes directions. Le spectre montre deux pics (*voir la figure 10.8 à la page suivante*) : un pic ayant la même longueur d'onde que les rayons X incidents et un deuxième pic, dont la longueur d'onde λ' est plus

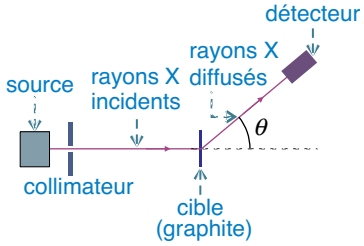


FIGURE 10.7
Dans l'expérience de Compton, des rayons X sont diffusés à un angle θ par une cible.

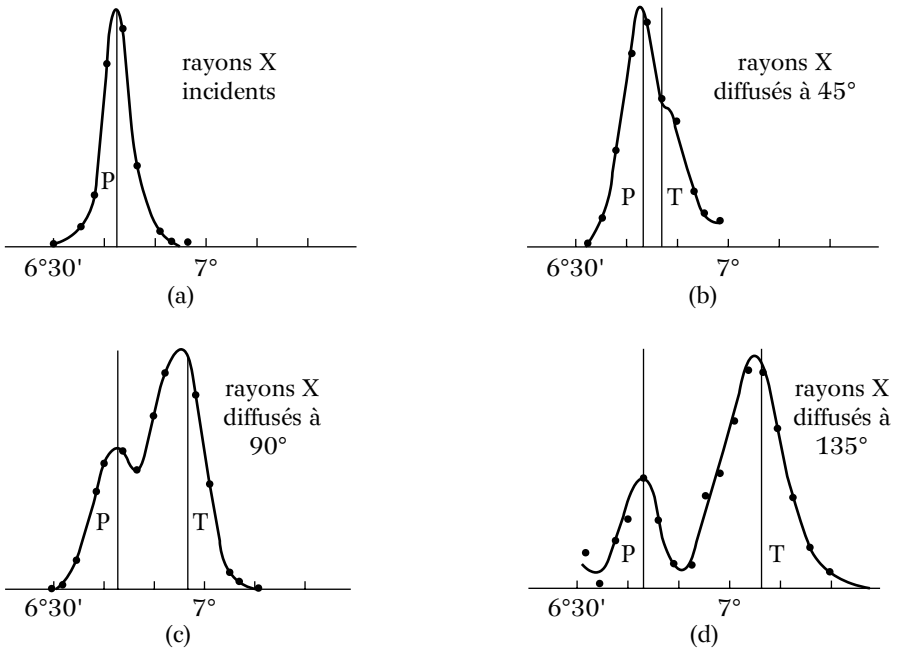


FIGURE 10.8
Le spectre des rayons X, mesuré à l'aide d'un réseau cristallin, selon les résultats de Compton. La ligne P correspond à la longueur d'onde des rayons X incidents (primaires), et la ligne T représente la longueur d'onde prévue selon l'équation 10.24.

grande que la longueur d'onde initiale. Ceci correspond à des photons qui ont perdu de l'énergie lors de la collision. C'est l'*effet Compton*.

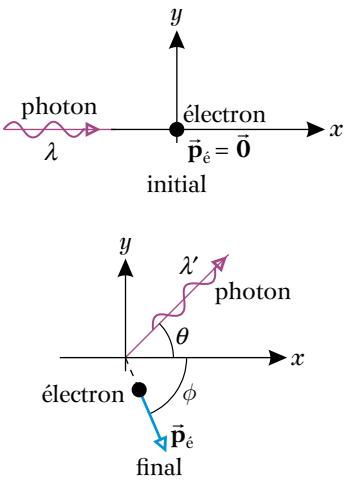


FIGURE 10.9
Le schéma de la situation pour la diffusion d'un photon de rayon X par un électron

En 1923, Compton a publié une analyse de l'expérience en fonction d'une collision élastique entre un photon et un électron, comme le montre la figure 10.9 : un photon de longueur d'onde initiale λ entre en collision avec un électron, dont l'énergie de liaison est négligeable. Le photon est dévié à un angle θ, et l'électron est dévié à un angle ϕ. Le photon cède une partie de son énergie à l'électron. L'angle θ est mesuré, mais l'énergie cinétique de l'électron et l'orientation de son déplacement demeurent inconnues, car Compton n'a pas mesuré ces données lorsqu'il a réalisé son expérience originale.

On peut obtenir la longueur d'onde λ' du photon diffusé en appliquant le principe de conservation de l'énergie et le principe de la conservation de la quantité de mouvement à la collision, car le système photon-électron est isolé. On doit utiliser les équations relativistes de l'énergie et de la quantité de mouvement, car l'électron diffusé peut avoir une énergie cinétique importante. L'axe des x est tracé pour avoir la même orientation que le photon incident.

Selon le principe de conservation de la quantité de mouvement,

$$\text{(en } x\text{)} \qquad \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos\theta + p_{é,x} \tag{10.21}$$

$$\text{(en } y\text{)} \qquad 0 = \frac{h}{\lambda'}\sin\theta + p_{é,y}\ . \tag{10.22}$$

De plus, à l'aide du principe de conservation de l'énergie, on obtient

$$\frac{hc}{\lambda} + E_{é,0} = \frac{hc}{\lambda'} + E_é\ , \tag{10.23}$$

où $E_{é,0} = mc^2$ représente l'énergie au repos de l'électron et $E_é$, l'énergie totale relativiste de l'électron après la collision.

À partir de ces équations, on peut calculer $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$. On obtient que le décalage de longueur d'onde (qu'on appelle le *décalage de Compton*) ne dépend pas de la longueur d'onde du photon incident :

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)\,. \qquad (10.24)$$

Décalage de Compton

Dans l'équation 10.24, le paramètre devant la parenthèse a les unités d'une longueur d'onde. C'est la *longueur d'onde de Compton* de l'électron, qu'on exprime par λ_C. La valeur est

$$\lambda_C = \frac{hc}{mc^2} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{511\times10^3\ \text{eV}} = 2{,}43\times10^{-3}\ \text{nm} = 2{,}43\ \text{pm}\,. \qquad (10.25)$$

REMARQUE

La longueur d'onde des rayons X est de l'ordre du picomètre (1 pm $= 1\times10^{-12}$ m $= 0{,}001$ nm), et les photons ont une énergie de l'ordre du keV. Pour simplifier les calculs, on peut exprimer hc en keV · pm :

$$hc = 1\,240\ \text{eV}\cdot\text{nm} = 1\,240\ \text{keV}\cdot\text{pm}\,.$$

On multiplie par 1 000 l'énergie en divisant la distance par 1 000.

L'équation 10.24 est en accord avec les résultats expérimentaux de Compton, ce qui a permis à Compton de conclure son article en indiquant que la diffusion des rayons X par une cible de graphite est un processus quantique. Le photon cède de l'énergie et de la quantité de mouvement à un seul électron. L'équation montre aussi que le résultat est indépendant de la cible utilisée, tant qu'on peut négliger l'énergie de liaison de l'électron dans l'atome.

Il reste à expliquer pourquoi certains photons de rayons X diffusés ne changent pas de longueur d'onde, ce qui forme le premier pic dans le spectre de rayons X diffusés. On a considéré la collision entre un photon et un électron, mais la cible de graphite ne contient pas seulement des électrons. Il y a aussi des noyaux de carbone qui peuvent dévier les photons. L'analyse précédente est valable si on remplace la masse de l'électron par la masse d'un noyau de carbone dans l'équation 10.24. Le résultat est un décalage $\Delta\lambda$ beaucoup plus petit, de telle sorte qu'il est trop faible pour avoir été mesuré par Compton.

À partir de la longueur d'onde λ' , on peut calculer l'énergie du photon diffusé :

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda}\,. \qquad (10.26)$$

On peut aussi calculer l'énergie cinétique de l'électron diffusé, à l'aide du principe de conservation de l'énergie. Selon l'équation 10.23, l'énergie cinétique de l'électron est

$$K = E_é - E_{é,0} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda}$$

$$K = \frac{hc\,\Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)}\,. \qquad (10.27)$$

Contrairement au décalage $\Delta\lambda$, l'énergie cinétique de l'électron dépend de la longueur d'onde du photon incident : plus la longueur d'onde λ est petite et plus l'énergie cinétique de l'électron sera grande. La diffusion de Compton est l'un des mécanismes importants de transfert d'énergie entre les photons et la matière dans le cas de photons ayant une grande énergie, comme les photons de rayons X ou de rayons gamma.

EXEMPLE 10.4 L'expérience Compton

En 1922, Compton a utilisé des rayons X ayant une longueur d'onde de 73,0 pm, et il a placé un détecteur à un angle de 90,0° par rapport à la direction des photons incidents.

a. Quel est le décalage de Compton observé ?
b. Quelle est l'énergie des photons diffusés ?
c. Quelle est l'énergie cinétique des électrons diffusés ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\lambda = 73{,}0\ \text{pm}$	$\Delta\lambda$
$\theta = 90{,}0°$	E'
	$K_{\text{é}}$

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 10.24 :

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)\,. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous multiplions l'équation (i) par $1 = c/c$, pour obtenir hc au numérateur et $mc^2 = E_0$ au dénominateur. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \frac{hc}{mc^2}[1 - \cos\theta] \\ &= \frac{1240\ \text{keV} \cdot \text{pm}}{511\ \text{keV}}\left[1 - \cos(90{,}0°)\right] \\ &= 2{,}43\ \text{pm}\,. \qquad \text{(réponse)}\end{aligned}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

L'énergie des photons diffusés se calcule à l'aide de l'équation 10.1 :

$$E' = \frac{hc}{\lambda'}\,, \qquad \text{(ii)}$$

où λ' est

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda\,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord la longueur d'onde du photon diffusé à l'aide de l'équation (iii) :

$$\lambda' = 73{,}0\ \text{pm} + 2{,}43\ \text{pm} = 75{,}43\ \text{pm}\,.$$

L'énergie du photon diffusé est donc

$$E' = \frac{1240\ \text{keV} \cdot \text{pm}}{75{,}43\ \text{pm}} = 16{,}44\ \text{keV} = 16{,}4\ \text{keV}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Identifier la clé

Pour trouver l'énergie cinétique de l'électron diffusé, la **clé** est le principe de conservation de l'énergie :

$$K = E - E'\,, \qquad \text{(iv)}$$

où l'énergie du photon incident est

$$E = \frac{hc}{\lambda}\,. \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'énergie du photon incident :

$$E = \frac{1240\ \text{keV} \cdot \text{pm}}{73{,}0\ \text{pm}} = 16{,}99\ \text{keV}\,.$$

L'énergie cinétique de l'électron est donc

$$K = 16{,}99\ \text{keV} - 16{,}44\ \text{keV} = 0{,}546\ \text{keV} = 0{,}5\ \text{keV}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Nous répondons aux questions. Nous avons arrondi l'énergie cinétique de l'électron à un chiffre significatif, car la soustraction fait perdre deux chiffres significatifs.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 10.4

Indiquez quel est l'effet des modifications suivantes sur le décalage de Compton $\Delta\lambda$ observé.

a. L'énergie des rayons X est doublée.
b. Le détecteur est déplacé à un angle θ plus grand.
c. On remplace la cible de graphite par une cible de soufre.

La démonstration de la formule de Compton

Pour démontrer la formule de Compton, on applique le principe de conservation de la quantité de mouvement et le principe de conservation de l'énergie au système constitué d'un photon et d'un électron pour lequel l'énergie de liaison est négligeable. Le schéma de la situation est présenté à la figure 10.10. Le photon incident a une longueur d'onde λ, alors que le photon diffusé a une longueur d'onde $\lambda' > \lambda$, car il a cédé une partie de son énergie à l'électron.

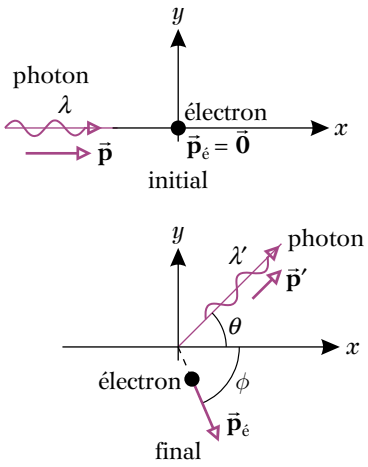


FIGURE 10.10
Le schéma de la situation pour la diffusion d'un photon de rayon X par un électron

Selon le principe de conservation de la quantité de movement,

$$\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}' + \vec{\mathbf{p}}_{\text{é}} \Rightarrow \vec{\mathbf{p}}_{\text{é}} = \vec{\mathbf{p}} - \vec{\mathbf{p}}' \,. \tag{10.28}$$

On applique ensuite le principe de conservation de l'énergie relativiste à la collision :

$$E + mc^2 = E' + E_{\text{é}} \Rightarrow E_{\text{é}} = E - E' + mc^2 \,, \tag{10.29}$$

où m représente la masse de l'électron. Pour une particule de masse m, la quantité de mouvement et l'énergie totale relativiste sont reliées par l'équation 9.49 :

$$m^2c^4 = E_{\text{é}}^2 - p_{\text{é}}^2c^2 \,. \tag{10.30}$$

On met au carré les équations 10.28 et 10.29 :

$$E_{\text{é}}^2 = E^2 + E'^2 - 2EE' + 2mc^2\left(E - E'\right) + m^2c^4$$
$$p_{\text{é}}^2 = \vec{\mathbf{p}}_{\text{é}} \cdot \vec{\mathbf{p}}_{\text{é}} = p^2 + p'^2 - 2\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{p}}' = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta \,,$$

où θ représente l'angle entre l'orientation du photon diffusé et celle du photon incident. On insère les résultats dans l'équation 10.30, et on utilise la relation 10.19 ($pc = E$) pour exprimer la quantité de mouvement du photon en fonction de son énergie. On obtient

$$\begin{aligned} m^2c^4 &= \left[E^2 + E'^2 - 2EE' + 2mc^2\left(E - E'\right) + m^2c^4\right] \\ &\quad - \left[E^2 + E'^2 - 2EE'\cos\theta\right] \\ \Rightarrow 0 &= 2mc^2\left(E - E'\right) - 2EE'\left(1 - \cos\theta\right) . \end{aligned}$$

On exprime ensuite l'énergie du photon en fonction de sa longueur d'onde, selon l'équation 10.1. On obtient alors

$$mc^2\left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}\right) = \frac{h^2c^2}{\lambda\lambda'}\left(1 - \cos\theta\right)$$

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} = \frac{h}{mc\lambda\lambda'}\left(1 - \cos\theta\right)$$

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}\left(1 - \cos\theta\right) .$$

C'est bien l'équation 10.24 qui permet de calculer le décalage de Compton.

10.5 La dualité onde-particule pour la lumière

Les résultats de l'effet photoélectrique et de l'effet Compton montrent que la lumière interagit avec la matière sous forme de particules. Par contre, les résultats de l'interférence et de la diffraction montrent que la lumière se comporte comme une onde. La lumière est-elle une onde ou est-elle constituée de particules ? Pour essayer de répondre à cette question, on revient à l'expérience de Young.

La comparaison entre les ondes et les particules

De façon classique, les particules et les ondes ont un comportement différent. La figure 10.11 montre l'expérience de Young réalisée avec des ondes sonores. Une source produit une onde plane. On place une barrière comportant deux fentes. On place ensuite un écran et on déplace un détecteur qui mesure l'intensité de l'onde. Le front d'onde se divise en deux pour passer à travers les fentes. Les deux ondes se superposent ensuite et produisent de l'interférence. Comme le montre la figure 10.12, l'intensité de l'onde résultante est

$$I_2 \neq I_a + I_b \,, \tag{10.31}$$

où I_a et I_b représentent les intensités lorsqu'une seule des fentes est ouverte. Comme nous l'avons vu à la section 3.5, l'amplitude de l'onde résultante dépend du déphasage $\Delta\Phi$ entre les deux ondes. Nous avons obtenu le même résultat pour les ondes lumineuses à la section 7.2.

Supposons maintenant qu'on réalise une expérience semblable, mais cette fois, ce sont des particules qui sont projetées. On lance des billes dans différentes directions sur un mur dans lequel il y a deux ouvertures, et un autre mur est placé derrière (*voir la figure 10.13*). On mesure la position où les billes frappent le mur. Les billes peuvent se retrouver un peu n'importe où sur le mur, car elles peuvent rebondir sur le côté des ouvertures. Soit P_2 la probabilité de trouver une bille à une position particulière sur l'écran lorsqu'il y a deux ouvertures. Si le lanceur lance les billes de façon équivalente dans toutes les directions, on

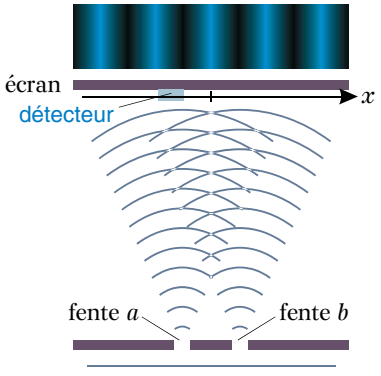


FIGURE 10.11
L'expérience de Young avec des ondes sonores

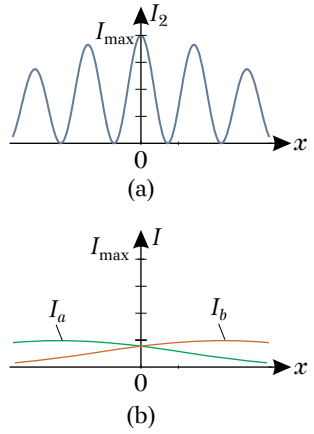


FIGURE 10.12
(a) L'intensité sonore après que le front d'onde est passé à travers les deux fentes. (b) L'intensité produite lorsqu'une seule fente est ouverte. On remarque que $I_2 \neq I_a + I_b$.

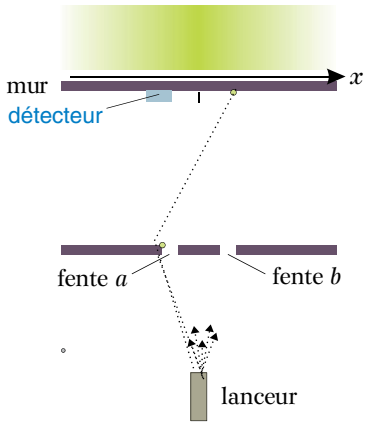


FIGURE 10.13
L'expérience de Young avec des particules

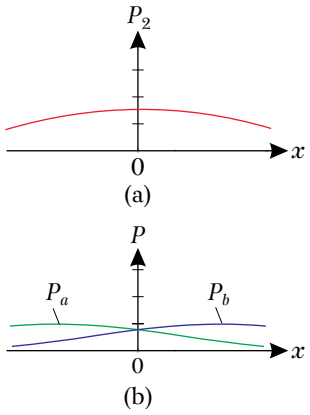


FIGURE 10.14
(a) La probabilité de trouver une bille à une position donnée lorsque les deux fentes sont ouvertes. (b) La probabilité associée au fait qu'une seule fente est ouverte. On remarque que $P_2 = P_a + P_b$.

devrait obtenir la courbe illustrée à la figure 10.14. Cette courbe correspond à la somme des courbes qu'on obtient en ne laissant qu'une ouverture à la fois :

$$P_2 = P_a + P_b \, . \tag{10.32}$$

Il n'y a pas d'interférence lorsqu'on tente l'expérience avec des particules. Les courbes des figures 10.12 et 10.14 montrent clairement la différence entre le comportement des particules et le comportement des ondes. Seules les ondes peuvent produire des interférences.

L'expérience de Young, un photon à la fois

On reprend maintenant l'expérience de Young avec la lumière, mais on diminue grandement l'irradiance de la lumière incidente sur le système de fentes. De plus, on remplace l'écran habituel par un capteur électronique très sensible, capable d'observer un photon unique. On garde aussi en mémoire la position de chaque photon observé par le capteur.

On observe alors que chaque photon arrive à une position aléatoire (*voir la figure 10.15a, à la page suivante*), ce qui peut ressembler aux billes du montage de la figure 10.13. Il est impossible de prédire exactement où va arriver un photon. En laissant l'expérience continuer pendant un temps très long, on observe graduellement la figure d'interférence habituelle se construire (*voir la figure 10.15*). Donc, le photon n'est pas équivalent à une bille.

Pour comprendre l'expérience, on doit utiliser à la fois la notion d'onde et de particule : la lumière se comporte comme une onde qui se sépare en deux pour passer par les fentes ; les deux ondes se superposent en produisant de l'interférence. Par contre, lorsque la lumière frappe le détecteur, elle se comporte comme un photon, qui apparaît à une position particulière, qui semble aléatoire.

Étant donné qu'on obtient la figure d'interférence habituelle après qu'un grand nombre de photons a frappé le détecteur, on doit considérer l'onde lumineuse comme une onde de probabilité : le photon a une plus grande probabilité d'apparaître aux endroits où l'irradiance est grande (interférence constructive) et une

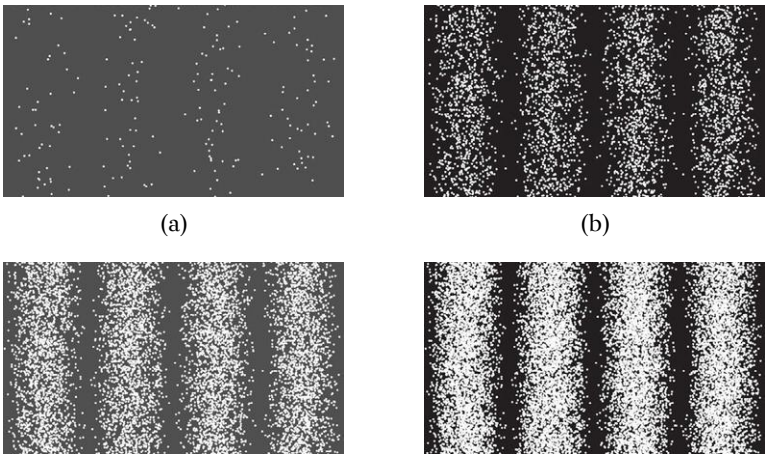


FIGURE 10.15
Une simulation de la position des photons détectés dans une expérience de Young à très faible irradiance

très faible probabilité d'apparaître aux endroits où l'irradiance est faible. Étant donné que l'irradiance de la lumière est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde, on peut donc affirmer le principe suivant :

La lumière se comporte comme une onde et comme un ensemble de particules. La probabilité d'observer un photon est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde.

Lorsqu'on réalise l'expérience de Young avec un photon à la fois, on peut se demander par quelle fente un photon va passer. Pour y arriver, on peut placer un détecteur de photon vis-à-vis de l'une des deux fentes. Ce détecteur ne fait que détecter la présence ou non d'un photon, sans l'absorber. On peut alors mesurer pour chaque photon la fente utilisée et la position finale. Lorsqu'on tente l'expérience, on remarque que la moitié des photons passe par la fente a et que l'autre moitié passe par la fente b. Chaque photon arrive au hasard sur le détecteur final, comme dans l'expérience précédente. Par contre, lorsqu'un grand nombre de photons ont frappé l'écran, on n'observe plus la figure d'interférence, mais plutôt une irradiance équivalente à deux sources incohérentes. La probabilité de détection de photons a maintenant la forme de la courbe illustrée à la figure 10.14a. La lumière s'est comportée comme des billes.

La dernière expérience montre qu'en mesurant la fente par laquelle un photon passe, on change complètement le système. L'onde associée à la lumière ne passe plus par les deux fentes, mais seulement par une seule. C'est pour cette raison qu'il n'y a pas plus d'interférence. On peut donc affirmer le principe suivant :

Lorsqu'on effectue une mesure sur un photon, on change le système. L'onde de probabilité est alors réduite : une nouvelle onde est produite à partir de la position de la mesure.

La lumière est donc ni simplement une onde ni simplement une particule. Les deux concepts sont intimement liés dans ce qu'on appelle la *dualité onde-particule*.

10.6 Les ondes de matière

En 1924, le physicien Louis de Broglie (1892-1987) [prononcez «de breuil»] a formulé l'hypothèse que la dualité onde-particule s'applique non seulement aux photons, mais à toutes les particules. Selon lui, toute particule a une onde associée dont la longueur d'onde est

$$\lambda = \frac{h}{p}, \tag{10.33}$$

Longueur d'onde de De Broglie

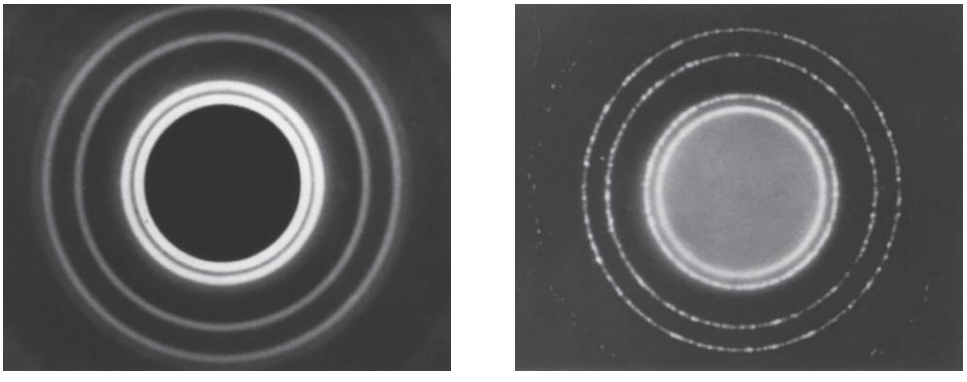
où p représente le module de la quantité de mouvement de la particule. Pour une particule de masse m et qui se déplace a une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$, le module de la quantité de mouvement est

$$p = mv = \sqrt{2mK} \qquad \text{(non relativiste)} \tag{10.34}$$

$$p = \gamma_p mv = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{c} \qquad \text{(relativiste)}, \tag{10.35}$$

où K représente l'énergie cinétique et $E = mc^2 + K$, l'énergie totale d'une particule relativiste. On remarque que la longueur d'onde est inversement proportionnelle à la masse de la particule.

À ce moment, il n'y a aucune justification expérimentale. Pour de Broglie, on devrait pouvoir valider cette hypothèse en vérifiant si des électrons peuvent être diffractés par un réseau cristallin. La vérification a été faite en 1927 par les physiciens américains Clinton Joseph Davisson (1881-1958) et Lester Halbert Germer (1896-1971). Ils étudiaient la réflexion des électrons par une surface de nickel. Ils ont découvert des maximums et des minimums dans l'intensité des électrons selon certains angles de réflexion, ce qui correspond à la figure de diffraction d'un réseau par réflexion. Dans ce cas-ci, c'est le réseau cristallin des atomes de nickel qui joue le rôle équivalent à un réseau de diffraction. Peu après, le physicien anglais Sir George Paget Thomson (1892-1975) a observé la figure de diffraction produite par un faisceau d'électrons traversant une feuille d'aluminium. Les électrons utilisés avaient une longueur d'onde du même ordre de grandeur que la longueur d'onde des rayons X. La figure de diffraction produite par le faisceau d'électrons est alors très semblable à la figure produite par des rayons X (*voir la figure 10.16*). Depuis ces expériences,

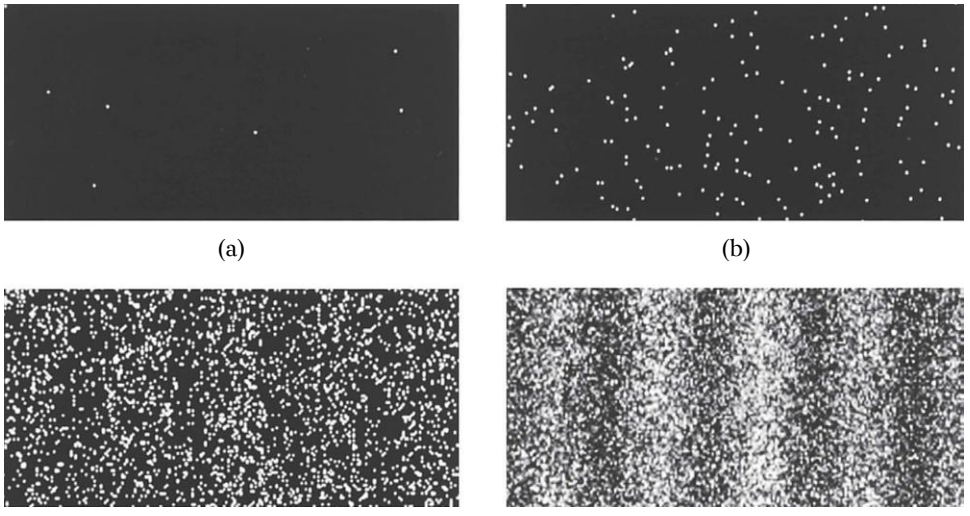


(a) (b)

FIGURE 10.16
(a) La diffraction d'un faisceau d'électrons. (b) La diffraction d'un faisceau de rayons X.

on a produit de la diffraction et des interférences à partir de neutrons, d'atomes et même à partir de molécules. Aujourd'hui, la technique de diffraction de neutrons est très utile pour connaître la structure de la surface atomique et magnétique des matériaux.

Pour montrer encore mieux la nature ondulatoire des électrons, l'expérience de Young avec différentes particules a été menée. La figure 10.17 montre les résultats d'une expérience où des électrons passent à travers un système de deux fentes, et sont détectés sur un écran. Chaque point correspond à un électron qui a frappé l'écran. La figure illustre bien la dualité onde-particule pour les électrons. Dans la figure 10.17a, il n'y a que 8 électrons qui ont frappé l'écran. Ils semblent arriver au hasard. La nature corpusculaire est évidente ici. À mesure que plus d'électrons frappent l'écran, les franges d'interférence apparaissent graduellement. En mesurant la distance entre les franges, on peut vérifier que l'équation 10.33 donne bien la longueur d'onde des électrons.



Source : Courtesy of the Central Research Laboratory, Hitachi, Ltd., Japan. This experiment was published as Demonstration of single-electron buildup of an interference pattern. Tonomura, A. ; Endo, J. ; Matsuda, T. ; Kawasaki, T. ; Ezawa, H. *American Journal of Physics*, Volume 57, Issue 2, pp. 117-120 (1989).

FIGURE 10.17
Les résultats de l'expérience de Young, un électron à la fois : (a) pour 8 électrons ; (b) pour 270 électrons ; (c) pour 2 000 électrons ; (d) pour 160 000 électrons. La durée totale de l'expérience est de 20 min.

EXEMPLE 10.5 La longueur d'onde de De Broglie des électrons

Des électrons, initialement immobiles, sont accélérés par une différence de potentiel de 54,0 V.

a. Quelle est la longueur d'onde des électrons ?
b. Quelle est l'énergie de photons ayant la même longueur d'onde ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

La masse des électrons peut être trouvée à l'annexe B.

Connues	Inconnues
$\Delta V = 54{,}0$ V	$\lambda_{\text{é}}$
$m_{\text{é}} = 511\ \text{keV}/c^2$	E_{ph}

SOLUTION a.

Identifier les clés

La première **clé** est le principe de conservation de l'énergie :

$$\Delta K = -\Delta U$$

$$K_{\text{f}} - K_{\text{i}} = -q\,\Delta V\,. \qquad \text{(i)}$$

La deuxième **clé** est l'équation 10.33 :

$$\lambda = \frac{h}{p}\,. \qquad \text{(ii)}$$

La différence de potentiel est faible, ce qui permet d'utiliser l'équation non relativiste reliant l'énergie cinétique et la quantité de mouvement :

$$p = \sqrt{2mK}\,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'énergie cinétique des électrons à l'aide de l'équation (i) :

$$K = -(-e)\Delta V = 1\,e \times 54{,}0\ \text{V} = 54{,}0\ \text{eV}\,. \qquad \text{(iv)}$$

Nous insérons ensuite l'équation (iii) dans l'équation (ii) :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{hc}{\sqrt{2(mc^2)K}}\,, \qquad \text{(v)}$$

où nous avons multiplié par $1 = c/c$ pour travailler en eV ou en nm. Nous remplaçons ensuite les valeurs :

$$\lambda = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{\sqrt{2 \times 511 \times 10^3\ \text{eV} \times 54{,}0\ \text{eV}}} = 0{,}167\ \text{nm}\,.$$

(réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 10.1 :

$$E_{\text{ph}} = \frac{hc}{\lambda}\,. \qquad \text{(vi)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons le résultat précédent dans l'équation (vi) :

$$E_{\text{ph}} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{0{,}167\ \text{nm}} = 7{,}43\ \text{keV}\,.$$ (réponse)

Valider la réponse

Nous remarquons que l'énergie du photon est beaucoup plus grande que l'énergie cinétique de l'électron. Le photon se trouve dans le domaine des rayons X. Pour des objets plus massifs, la longueur d'onde est encore plus faible, pour la même énergie cinétique que l'électron.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 10.5

Des électrons et des protons traversent une ouverture circulaire. Déterminez le type de particule qui produit un pic central de diffraction le plus large dans les situations suivantes.

a. Les électrons et les protons ont la même quantité de mouvement.

b. Les électrons et les protons ont la même énergie cinétique (non relativiste).

Le microscope électronique

C'est le microscope électronique qui le premier a donné lieu à la première application de la nature ondulatoire des électrons. Comme nous l'avons vu à la section 8.5, la diffraction limite le pouvoir de résolution d'un appareil optique à environ la longueur d'onde de la lumière. Pour la lumière visible, cela donne une limite d'environ 400 nm (en utilisant de la lumière violette). Dans

un microscope électronique, la lumière est remplacée par un faisceau d'électrons accélérés par une différence de potentiel d'environ 1×10^5 V, ce qui produit une longueur d'onde de 0,004 nm.

La figure 10.18 montre un schéma simplifié d'un microscope électronique par transmission. Les électrons sont d'abord produits par un filament, et ils sont ensuite accélérés par une différence de potentiel, ce qui constitue le canon à électrons. Des bobines sont utilisées comme lentilles magnétiques, équivalentes aux lentilles d'un microscope optique, pour produire une image de l'échantillon sur un écran ou un détecteur d'électrons. L'appareil a un système de pompes à vide pour que les électrons se déplacent dans le vide. Les aberrations dans les lentilles magnétiques limitent la résolution de ces microscopes à environ 0,5 nm, ce qui correspond à un nombre presque 1000 fois plus petit que dans le cas d'un microscope optique.

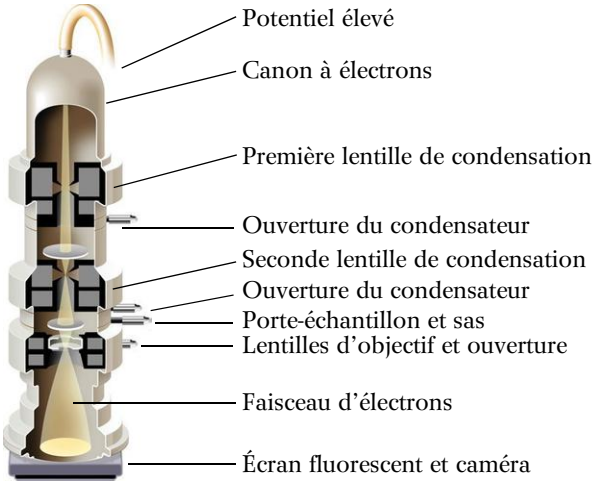


FIGURE 10.18
Le schéma d'un microscope électronique à transmission

10.7 Le principe d'incertitude

En mécanique classique, on peut mesurer la position et la vitesse d'une particule avec une précision infinie. La particule peut se situer à un point précis et avoir une vitesse fixe. Évidemment, les appareils de mesure ne sont pas parfaits et en pratique, la mesure de la position d'un objet comporte une certaine incertitude. Le cas des ondes est différent, car une onde a une certaine étendue.

Si on prend une très longue corde et qu'on produit une onde sinusoïdale à une extrémité (*voir la figure 10.19a*), on peut se demander quelle est la position de l'onde. Celle-ci se trouve quelque part sur la corde. La position de l'onde n'est pas bien définie. Par contre, on peut mesurer la longueur d'onde λ avec une bonne précision. On peut aussi produire une impulsion en faisant un va-et-vient rapide et unique, comme à la figure 10.19b. À un instant donné, la position de l'onde est assez bien définie. Par contre, si on veut déterminer la longueur d'onde de cette impulsion, il sera difficile de trouver une valeur. La position de l'onde est bien définie, mais sa longueur d'onde ne l'est pas.

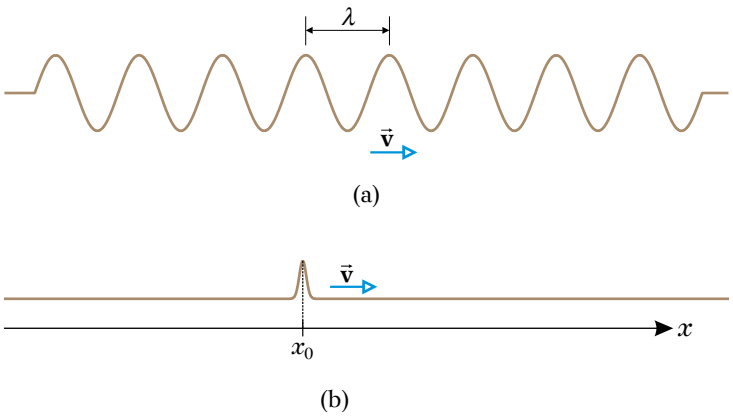


FIGURE 10.19
(a) Une onde sinusoïdale a une longueur d'onde λ bien définie, mais une position incertaine. (b) Une impulsion a une position x_0 bien définie, mais une longueur d'onde mal définie.

Il est possible d'obtenir un cas intermédiaire, où l'onde est assez bien localisée, avec une longueur d'onde relativement bien connue. On obtient un *paquet d'onde*, comme à la figure 10.20. La position de ce paquet d'onde est $x = x_0 \pm \Delta x$, où Δx est l'incertitude sur la position. Un paquet d'onde correspond à la superposition de plusieurs ondes sinusoïdales, dont la longueur d'onde varie entre $\lambda_0 - \Delta\lambda$ et $\lambda_0 + \Delta\lambda$. Pour obtenir un paquet d'onde avec une petite incertitude Δx sur la position, il faut superposer des ondes ayant un intervalle de longueur d'onde $\Delta\lambda$ très grand (*voir la figure 10.20a*). Si au contraire l'intervalle de longueurs d'onde $\Delta\lambda$ est faible, l'incertitude sur la position Δx est plus grande (*voir la figure 10.20b*).

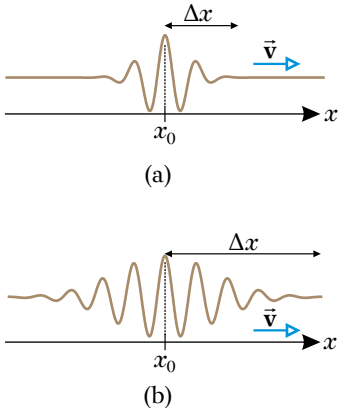


FIGURE 10.20
Deux paquets d'onde : (a) $\Delta\lambda$ est grand, ce qui produit une petite incertitude sur la position x_0 ; (b) $\Delta\lambda$ est plus petit, ce qui produit une grande incertitude sur la position x_0.

La situation précédente est un résultat général qui s'applique à n'importe quel type d'onde. Pour une onde de matière associée à une particule, l'équation de De Broglie indique que la longueur d'onde est reliée à la quantité de mouvement de la particule :

$$p = \frac{h}{\lambda}.$$

Cela veut dire qu'une incertitude sur la longueur d'onde produit une incertitude sur la quantité de mouvement. Soit Δx l'incertitude sur la position et Δp_x l'incertitude sur la composante x de la quantité de mouvement. L'argument précédent implique que plus la position est mesurée précisément, plus la quantité de mouvement est incertaine :

$$\Delta x\, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{10.36}$$

Principe d'incertitude (position)

où $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}055 \times 10^{-34}$ J · s (prononcez «h barre») est la *constante de Planck réduite*. L'équation 10.36 est le principe d'incertitude. Elle a été découverte en 1927 par le physicien allemand Werner Heisenberg (1901-1976). La dualité onde-particule établit une limite fondamentale sur la précision simultanée de la position et de la quantité de mouvement (donc de la vitesse) d'une particule. Le principe d'incertitude est écrit sous la forme d'une inégalité, car la relation exacte entre Δx et Δp_x dépend de la forme précise du paquet d'onde. Il peut être démontré que dans la meilleure situation, le produit des incertitudes est égal à $\hbar/2$. Le principe d'incertitude indique qu'il existe une limite physique

sur la précision de mesures simultanées de la position et de la quantité de mouvement. Cette limitation est une conséquence de la dualité onde-particule.

REMARQUE

Le terme *incertitude* peut être défini de plusieurs façons. Dans l'équation 10.36, Δx représente précisément l'écart type calculé à partir d'un grand nombre de mesures de la position d'une particule, et Δp_x est l'écart type calculé à partir des mesures de la composante x de la quantité de mouvement.

On a considéré une onde à une dimension. En général, les ondes de matière se propagent en trois dimensions. La position $\vec{\mathbf{r}}$ et la quantité de mouvement $\vec{\mathbf{p}}$ sont des vecteurs. Le principe d'incertitude s'applique à chaque composante de façon indépendante :

$$\Delta x\,\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}\ ,\ \Delta y\,\Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}\ ,\ \Delta z\,\Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}\,. \tag{10.37}$$

EXEMPLE 10.6 Le principe d'incertitude

Calculez la plus petite incertitude sur la composante x de la vitesse des particules suivantes, selon le principe d'incertitude.

a. Une rondelle de hockey de 170 g a un rayon de 3,81 cm. L'incertitude de la position correspond à son rayon.

b. Un électron se trouve quelque part dans un atome d'hydrogène, dont le rayon est de 53 pm.

SOLUTION a.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$m = 0{,}170\ \text{kg}$	Δv_x
$\Delta x = 0{,}038\,1\ \text{m}$	

Identifier la clé

La **clé** est le principe d'incertitude, en remplaçant l'inégalité par une égalité, étant donné que nous voulons la plus petite incertitude :

$$\Delta x\,\Delta p_x = \frac{\hbar}{2}\,. \tag{i}$$

Résoudre le problème

Comme $p_x = mv_x$, nous obtenons

$$\Delta x\,(m\,\Delta v_x) = \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta v_x = \frac{\hbar}{2m\,\Delta x}\,. \tag{ii}$$

Nous remplaçons les valeurs :

$$\Delta v_x = \frac{1{,}055\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{2\times0{,}170\ \text{kg}\times0{,}038\,1\ \text{m}} = 8{,}14\times10^{-33}\ \text{m/s}\,.$$

(réponse)

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$m = 9{,}109\times10^{-31}\ \text{kg}$	Δv_x
$\Delta x = 53\times10^{-12}\ \text{m}$	

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs dans l'équation (ii) :

$$\Delta v_x = \frac{1{,}055\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{2\times9{,}109\times10^{-31}\ \text{kg}\times53\times10^{-12}\ \text{m}}$$

$$\Delta v_x = 1{,}1\times10^{6}\ \text{m/s}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'incertitude de la vitesse pour un objet macroscopique comme une rondelle est complètement négligeable. Un gardien de but n'a pas besoin de connaître la mécanique quantique pour analyser le mouvement d'une rondelle. Par contre, pour l'électron, l'incertitude sur la vitesse correspond à 0,4 % de la vitesse de lumière.

Le principe d'incertitude entre la position et la quantité de mouvement produit une relation analogue entre l'énergie de la particule ΔE et le temps nécessaire Δt pour mesurer celle-ci. Afin d'obtenir cette relation, prenons le paquet d'onde

pour une particule non relativiste, qui se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = v_x\vec{\imath}$ (*voir la figure 10.21*). Le temps pour que le paquet d'onde passe vis-à-vis d'un point A possède une incertitude Δt, causée par l'incertitude Δx :

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_x} .$$

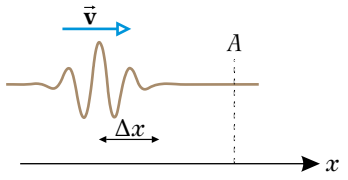


FIGURE 10.21
L'incertitude sur la position Δx produit une incertitude Δt sur le temps nécessaire pour que le paquet d'onde passe vis-à-vis du point A.

L'énergie de la particule est simplement son énergie cinétique $E = K = mv_x^2/2$. En supposant que l'incertitude est petite, on peut calculer l'incertitude sur l'énergie comme s'il s'agit d'une différentielle :

$$\Delta E = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}v_x}\Delta v_x = mv_x\ \Delta v_x = v_x\,\Delta p_x ,$$

où $\Delta p_x = m\ \Delta v_x$. À l'aide de ces résultats, calculons le produit des incertitudes sur E et sur t :

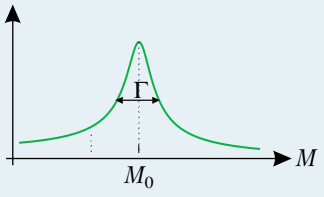
$$\Delta E\,\Delta t = (v_x \Delta p_x)\left(\frac{\Delta x}{v_x}\right) = \Delta x\,\Delta p_x$$

$$\Delta E\,\Delta t \geq \frac{\hbar}{2} . \qquad (10.38)$$

Principe d'incertitude (énergie-temps)

EXEMPLE 10.7 La durée de vie moyenne du boson Z^0

Le boson Z^0 est une des particules associées à l'interaction faible. Cette particule a été directement observée en 1983 au CERN (le Laboratoire européen pour la physique des particules). La durée de vie moyenne du Z^0 est trop courte pour être mesurée directement. Par contre, on peut l'évaluer à partir de la mesure de la masse de la particule (reliée à son énergie au repos). Lorsqu'on prend cette mesure de façon répétée, on obtient une distribution illustrée à la figure ci-contre. La masse moyenne est $M_0 = 91{,}187\,6$ GeV/c^2, avec une largeur $\Gamma = 2{,}50$ GeV/c^2. Évaluez la durée de vie moyenne de cette particule.



SOLUTION

Décortiquer le problème

La largeur correspond au double de l'incertitude sur la masse de la particule, associée à la dualité onde-particule.

Connues	Inconnue
$M_0 = 91{,}187\,6$ GeV/c^2	$\tau = \Delta t$
$\Gamma = 2{,}50$ GeV/c^2	

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 10.38 (le principe d'incertitude pour l'énergie) :

$$\Delta E\,\Delta t = \frac{\hbar}{2} , \qquad \text{(i)}$$

où nous utilisons l'égalité, étant donné que nous voulons seulement une évaluation du temps. L'énergie est l'énergie au repos de la particule ($E = E_0 = Mc^2$). L'incertitude sur l'énergie est alors

$$\Delta E = \Delta M\ c^2 = \frac{\Gamma c^2}{2} . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons l'équation (ii) dans l'équation (i) et nous isolons Δt :

$$\Delta t = \frac{\hbar}{\Gamma c^2} . \qquad \text{(iii)}$$

Nous insérons les valeurs dans l'équation (iii), en exprimant Γc^2 en joules, pour que le temps soit exprimé en secondes :

$$\Delta t = \frac{1{,}055\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}}{2{,}50\times10^{9}\ \mathrm{eV}\times1{,}602\times10^{-19}\ \mathrm{J/eV}}$$

$$\Delta t = 2{,}6\times10^{-25}\ \mathrm{s} . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Comme on s'y attendait, le temps est très court. Nous reparlerons du boson Z^0 au chapitre 14, lors de l'étude de la physique des particules.

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié la dualité onde-particule, qui s'applique autant à la lumière qu'aux particules de matière comme l'électron.

LES LOIS ET LES PRINCIPES

- La **lumière** se comporte comme une onde ou comme un ensemble de particules, qu'on appelle les **photons**.
  - L'émission et l'absorption de la lumière se font un photon à la fois.
  - L'**énergie d'un photon** :
$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}.$$
  - Le **module de la quantité de mouvement d'un photon** :
$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$
- Les **particules** comme l'électron ont une onde associée, qu'on appelle une **onde de matière**.
  - La longueur d'onde :
$$\lambda = \frac{h}{p}.$$
- La **probabilité** d'observer une particule est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde.
- Selon le **principe d'incertitude**, la position et la quantité de mouvement ne peuvent pas être mesurées simultanément avec une précision infinie :
$$\Delta x\, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

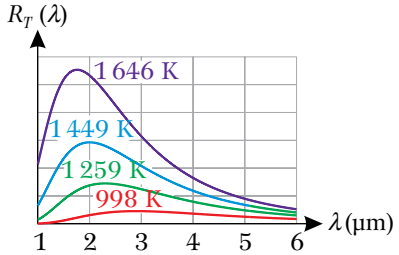
L'incertitude sur l'énergie ΔE et le temps Δt nécessaire pour prendre une mesure sont aussi soumis au principe d'incertitude :

$$\Delta E\, \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}.$$

LES RÉSULTATS

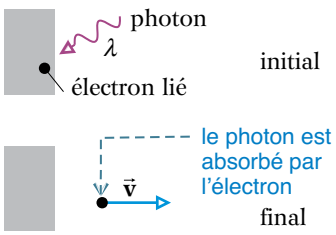
Un **corps noir** est un objet qui absorbe complètement la lumière incidente.

- Le spectre de rayonnement dépend uniquement de la température :
$$R_T(\lambda) = \frac{8\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}.$$
- L'irradiance totale émise est
$$I = \sigma T^4.$$
- La longueur d'onde du maximum de la distribution est obtenue par l'équation :
$$\lambda_{\max} T = 2{,}898 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}.$$



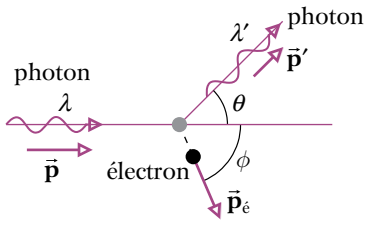
L'effet photoélectrique

- La lumière éjecte des électrons d'une surface métallique lorsque la longueur d'onde est plus petite qu'une longueur d'onde seuil :
$$\lambda_{\text{seuil}} = \frac{hc}{\Phi},$$
où Φ est le travail d'extraction de la substance éclairée.
- L'énergie cinétique maximale des électrons est
$$K_{\max} = eV_{\text{arrêt}},$$
où $V_{\text{arrêt}}$ est le potentiel d'arrêt.
- Un photon est complètement absorbé par un électron. L'énergie du photon est cédée complètement à l'électron :
$$\frac{hc}{\lambda} = eV_{\text{arrêt}} + \Phi.$$



L'effet Compton se produit lorsqu'un photon, de longueur d'onde initiale λ, est dévié à un angle θ par un électron.

- Le **décalage de Compton** est
$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta).$$
- Le **photon diffusé** a une énergie :
$$E' = \frac{hc}{\lambda'}.$$
- L'**électron diffusé** a une énergie cinétique :
$$K = E - E' = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}.$$



QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • **R** problèmes récapitulatifs • solution disponible

Section 10.1 La notion de photon

Q1 Une lampe à infrarouge et une lampe à ultraviolet émettent de la lumière à la même puissance. Quelle lampe émet le plus de photons chaque seconde ?

E2 Déterminez l'énergie de photons (en eV) ayant les caractéristiques suivantes :

a. un rayon X dont la longueur d'onde est de 22 pm ;

b. une fréquence de 11,8 GHz ;

c. une longueur d'onde de 450 nm.

E3 Exprimez en joules l'énergie des photons suivants :

a. un photon produit par un laser rouge pour lequel $\lambda = 632{,}0$ nm ;

b. un photon produit par un four micro-ondes pour lequel $\lambda = 12{,}23$ cm ;

c. un photon associé à une onde radio de fréquence 98,1 MHz.

E4 Un laser violet ($\lambda = 405$ nm) d'une puissance de 48,5 mW produit un faisceau circulaire de 1,80 mm de diamètre. Déterminez combien de photons sont produits par seconde.

E5 Une désintégration nucléaire produit un rayon gamma (γ) dont la longueur d'onde est de $2{,}80 \times 10^{-16}$ m. Un échantillon du matériau subissant cette réaction est placé dans une enceinte munie de détecteurs. On enregistre, durant un délai de 30,0 s, une énergie émise de $1{,}13 \times 10^{15}$ eV. Combien de noyaux se sont désintégrés durant cet intervalle de temps si chaque désintégration émet un seul rayon γ ?

E6 Dans les meilleures conditions, les cellules de la rétine de l'œil humain peuvent produire un influx nerveux perceptible lorsque 5 à 9 photons sont incidents sur une cellule dans un intervalle de temps de 100 ms. En considérant la lumière verte à 550 nm (à laquelle l'œil est le plus sensible), déterminez la puissance incidente moyenne sur une cellule individuelle de l'œil lorsque celle-ci reçoit 8 photons dans un intervalle de 100 ms.

R7 Un laser émet à une longueur d'onde de 632,8 nm, avec une puissance de 5,00 mW. La lumière passe par une ouverture circulaire de 0,800 mm de diamètre. On observe la figure de diffraction sur un écran placé à une distance de 10,0 m du laser. On trouve 84,0% de la lumière dans le pic central de diffraction, et l'écran absorbe 60,0% de la lumière incidente.

a. Quelle est l'irradiance moyenne du disque central de diffraction ?

b. Combien de photons par unité de temps et par unité de surface sont absorbés par l'écran, si on considère uniquement le pic central de diffraction ?

Section 10.2 Le rayonnement du corps noir

Q8 Les objets qui nous entourent émettent un rayonnement thermique. Pourquoi ne voit-on pas ce rayonnement la nuit ?

Q9 Un corps noir a émet à une irradiance deux fois plus grande qu'un corps noir b ($I_a/I_b = 2$). Quel est le rapport T_a/T_b entre leurs températures ?

Q10 Le tableau suivant donne le rayon et la longueur d'onde λ_{max}, pour laquelle la distribution du rayonnement est maximale, pour quatre corps noirs sphériques. Classez les objets par ordre croissant :

a. de leur température ;

b. de l'irradiance ;

c. de la puissance émise.

Objet	λ_{max}	r
1	λ_0	r_0
2	$2\lambda_0$	$2r_0$
3	λ_0	$r_0/2$
4	$\lambda_0/2$	r_0

E11 Le fond diffus cosmologique est un rayonnement qui a été émis lorsque l'Univers n'avait qu'environ 379 000 ans et qu'il était très chaud. À cause de l'expansion de l'Univers, ce rayonnement a maintenant une température de 2,728 K. De très légères fluctuations de température, de l'ordre du µK, sont observables selon la direction, comme le montre la figure 10.22, où les régions en bleu présentent des régions plus froides et les régions en rouge présentent des températures plus chaudes. Quelle est la longueur d'onde du pic d'émission ?

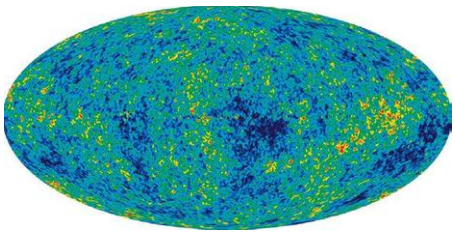


FIGURE 10.22 • Le fond diffus cosmologique (exercice 11)

E12 Déterminez la puissance du rayonnement émis par un centimètre carré des surfaces suivantes, en supposant qu'elles se comportent comme des corps noirs :

a. la peau de votre front à 32 °C ;

b. la surface d'un glaçon sortant du congélateur à –15 °C ;

c. l'asphalte chauffé par le Soleil à une temperature de 60 °C ;

d. les parois du four lorsque sa température est de 450 °F :

$$(T[°\mathrm{F}] = \frac{9}{5} T[°\mathrm{C}] + 32) .$$

E13 En analysant les caractéristiques d'un volcan, on constate que la lave dans le cratère a une température de 1052 °C. Quelle est la longueur d'onde λ_{max} du pic d'émission ?

E14 Certains phénomènes astronomiques impliquent des températures si élevées qu'il y a émission de rayons X. À partir de quelle température (exprimée en kelvins) la surface d'une étoile présente-t-elle un pic d'émission λ_{max} au début du domaine des rayons X à 10,0 nm ?

P15 Chauffée au rouge, une barre de métal est portée à 750 °C. Déterminez la radiance spectrale à la longueur d'onde où le plus d'énergie est émise.

P16 Les objets dans une pièce se trouvent tous à la même température lorsqu'ils sont en équilibre thermique. Ils émettent alors autant d'énergie qu'ils en reçoivent, sur l'ensemble de leur surface. Lorsqu'un objet est plus chaud que la température de son environnement, on peut alors parler de puissance nette échangée avec l'environnement. Une balle de 11,2 cm de diamètre est suspendue au centre d'une pièce. La température de cette balle est de 80,0 °C quand tous les autres objets de la pièce (y compris les murs) sont à 21,5 °C.

a. Quelle est l'irradiance nette émise par la balle ?

b. Quelle est la puissance nette émise par la balle ?

P17 Une source ponctuelle et monochromatique émet de façon homogène dans toutes les directions autour d'elle, à une longueur d'onde λ = 457 nm. À 50,5 cm de la source, un capteur circulaire ayant un rayon de 3,40 mm enregistre une puissance incidente de 2,31 mW.

a. Combien de photons par seconde atteignent le détecteur ?

b. Quelle est la puissance émise par la source ?

c. À quelle température un corps noir ayant la même aire que le capteur est-il en équilibre thermique s'il se trouve à la même distance de la source et qu'il ne reçoit aucun autre rayonnement ?

Section 10.3 L'effet photoélectrique

Q18 Déterminez l'effet des modifications suivantes sur le potentiel d'arrêt dans une expérience sur l'effet photoélectrique.

a. On remplace le matériau initial par un autre dont le travail d'extraction est supérieur.

b. On augmente la distance entre la surface du matériau utilisé et le collecteur qui capte les électrons arrachés.

c. On augmente la fréquence du rayonnement dirigé vers la surface du matériau.

d. On augmente l'irradiance de la lumière incidente.

Q19 La figure 10.23 illustre le potentiel d'arrêt en fonction de la longueur d'onde pour trois expériences sur l'effet photoélectrique dans lesquelles des matériaux différents sont utilisés. Classez les situations suivantes par ordre croissant :

a. de la longueur d'onde seuil ;

b. du travail d'extraction.

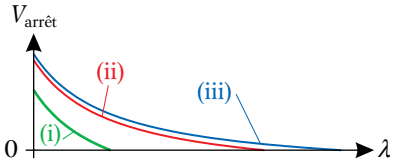


FIGURE 10.23 • Question 19

E20 Le travail d'extraction du cobalt est de 3,90 eV. Déterminez la longueur d'onde seuil du rayonnement produisant un effet photoélectrique pour le cobalt.

E21 Un matériau, éclairé par la lumière d'un laser, émet des électrons dont l'énergie cinétique est de 1,27 eV. La longueur d'onde du laser est λ = 405 nm. Quel est le travail d'extraction des électrons dans ce matériau ?

E22 On éclaire une plaque avec une longueur d'onde de 405 nm. Le potentiel d'arrêt est alors de 0,92 V. Déterminez le potentiel d'arrêt lorsqu'on éclaire la plaque avec les longueurs d'onde suivantes :

a. λ = 250 nm ;

b. λ = 500 nm ;

c. λ = 600 nm.

E23 On dirige un faisceau monochromatique vers un échantillon. On observe que le potentiel d'arrêt des électrons arrachés à la surface est de 0,57 V lorsque la longueur d'onde de la lumière est de 434 nm.

a. Quel est le travail d'extraction pour ce matériau ?

b. Quel est le module de la vitesse maximale des électrons émis ?

c. Que devient le potentiel d'arrêt lorsqu'on augmente la longueur d'onde à 486 nm ?

P24 Lorsqu'on éclaire une photo-diode avec une lumière monochromatique, des électrons sont éjectés à une vitesse dont le module maximal est de $7{,}41 \times 10^5$ m/s. On l'éclaire ensuite avec une lumière dont la longueur d'onde est deux fois plus petite que la longueur d'onde initiale. On mesure alors un potentiel d'arrêt de 3,52 eV.

a. Quelle est la longueur d'onde de la lumière initiale ?

b. Quel est le travail d'extraction de la photo-diode ?

c. Quelle est la longueur d'onde seuil ?

R25 Dans l'expérience de l'effet photoélectrique, on utilise successivement une lumière violette et une lumière verte. On mesure d'abord la longueur d'onde à l'aide d'un réseau de 600 lignes/mm. Comme le montre la figure 10.24, on place un écran à une distance $L = 45{,}0$ cm du réseau, et on mesure la distance y entre l'ordre 0 et l'ordre 1 de diffraction pour chaque lumière. Le tableau suivant donne les mesures obtenues pour y et $V_{\text{arrêt}}$.

a. Quelle est la longueur d'onde de chaque lumière utilisée ?

b. Quelle est la valeur expérimentale de la constante de Planck, selon les mesures indiquées dans le tableau ?

c. Quel est le travail d'extraction de la plaque utilisée dans l'expérience ?

Couleur	y (cm)	$V_{\text{arrêt}}$ (V)
violet	10,9	1,008
vert	14,9	0,217

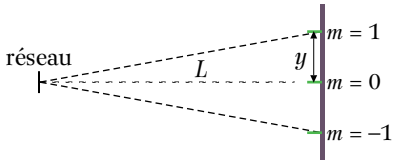


FIGURE 10.24 • Problème récapitulatif 25

Section 10.4 L'effet Compton

E26 Quel est le domaine de valeurs du module de la quantité de mouvement des photons du spectre visible ($380 \text{ nm} < \lambda_{\text{vis}} < 800 \text{ nm}$) ? Exprimez votre réponse en eV/c.

E27 Quel est le décalage de Compton subi par des photons incidents de 141 pm si ces derniers sont déviés de 23,5° ?

E28 Dans une expérience, on utilise l'effet Compton comme sélecteur de longueur d'onde. On bombarde un échantillon cible avec un rayon X de longueur d'onde de 82,3 pm, et on souhaite recueillir un rayonnement modifié à $\lambda = 84{,}0$ pm. À quel angle θ trouvera-t-on cette longueur d'onde ?

E29 Quelle est la plus grande énergie cinétique que peuvent acquérir les électrons par effet Compton lorsque les photons incidents ont une longueur d'onde de 40,0 pm ?

P30 Des rayons X incidents ayant une énergie de 16,5 keV subissent un décalage de Compton de 1,46 pm lorsqu'ils sont diffusés à un angle θ par les électrons d'une cible.

a. Quel est l'angle de diffusion θ du photon ?

b. Quelle est l'énergie cinétique de l'électron diffusé ?

c. Quel est le module de la vitesse des électrons diffusés ?

d. Quel est l'angle de diffusion ϕ de l'électron ?

P31 Des rayons γ ayant une énergie de 700 keV subissent un décalage de Compton de 1,10 pm lorsqu'ils sont diffusés par des électrons.

a. Quel est l'angle de diffusion des rayons γ ?

b. Quelle est l'énergie cinétique des électrons ?

c. Quel est le module de la vitesse des électrons ?

d. À quel angle sont diffusés les électrons ?

P32 Un électron diffusé par l'effet Compton est immobilisé sur une distance de 3,22 mm par un champ électrique de 124 kV/m orienté dans le même sens que sa vitesse. Quel est le décalage de Compton subi par le photon diffusé par l'électron si la longueur d'onde finale du photon est de 69,7 pm ?

Section 10.6 Les ondes de matière

Q33 Indiquez comment varie la longueur d'onde de De Broglie d'une particule non relativiste si :

a. le module de sa vitesse double ;

b. son énergie cinétique double.

Q34 La particule alpha est constituée de deux protons et de deux neutrons. Sa masse est de 4,0 u. La masse du proton est de 1,0 u. Dans une expérience, une particule alpha et un proton ont la même longueur d'onde de De Broglie. Les particules ne sont pas relativistes.

a. Quel est le rapport K_α/K_{p} entre l'énergie cinétique de la particule alpha et l'énergie cinétique du proton ?

b. Quel est le rapport v_α/v_{p} entre le module de la vitesse de la particule alpha et le module de la vitesse du proton ?

Q35 Un électron se déplace vers la droite dans trois régions (*voir la figure 10.25*). Il y a un champ électrique parallèle à sa vitesse dans les régions a et b et un champ magnétique perpendiculaire à sa vitesse dans la région c.

a. Dans la région a, la longueur d'onde de De Broglie de l'électron augmente. Quel est le sens du champ électrique dans cette région ?

b. Dans la région b, la longueur d'onde de De Broglie de l'électron diminue. Quel est le sens du champ électrique dans cette région ?

c. Dans la région c, le champ magnétique est vers le haut. Comment change la longueur d'onde de l'électron ?

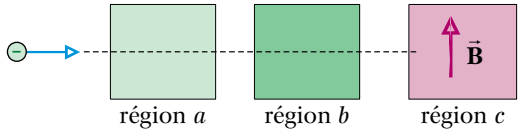


FIGURE 10.25 • Question 35

E36 L'énergie cinétique d'un électron est la même que l'énergie d'un photon ayant une longueur d'onde de 4,06 nm. Quelle est la longueur d'onde de l'électron ?

E37 Quelle différence de potentiel permet d'immobiliser un électron dont la longueur d'onde est de 100 pm ?

E38 L'effet photoélectrique produit des électrons diffusés dont l'énergie cinétique est de 17,0 eV. Quelle est la longueur d'onde de ces électrons ?

E39 Le LHC (Large Hadron Collider, c'est-à-dire le Grand collisionneur de hadrons) est le plus grand accélérateur de particules au monde. En 2010, des protons ont été accélérés jusqu'à une énergie cinétique de 3,5 TeV. Quelle est la longueur d'onde de ces protons ?

P40 Calculez le rapport entre l'énergie d'un photon et l'énergie cinétique d'un électron ayant la même longueur d'onde dans les situations suivantes :

a. $\lambda = 1{,}00$ nm ;

b. $\lambda = 1{,}00$ pm ;

c. $\lambda = 1{,}00$ fm.

P41 Un photon ayant une longueur d'onde de 60,0 pm est diffusé par effet Compton. Après la diffusion, la longueur d'onde du photon est de 63,0 pm.

a. Quel est l'angle de diffusion du photon ?

b. Quelle est la longueur d'onde de l'électron après l'interaction ?

R42 À partir du repos, des électrons sont accélérés à l'aide d'une différence de potentiel de 150 V. Les électrons sont ensuite utilisés dans une expérience de Young, où un détecteur est placé à une distance de 1,80 m d'un système de deux fentes étroites. La distance entre les franges brillantes est de 180 µm.

a. Quelle est la longueur d'onde des électrons ?

b. Quelle est la distance entre les fentes ?

R43 Des neutrons se déplaçant à une vitesse de 2,40 km/s sont projetés sur une fente rectangulaire ayant une largeur de 1,20 µm. Un écran est placé à une distance de 2,00 m de la fente.

a. Quelle est la longueur d'onde des neutrons ?

b. Quelle est la largeur du pic central de diffraction ?

Section 10.7 Le principe d'incertitude

E44 On mesure simultanément la position et la vitesse d'un proton. La méthode de mesure de la vitesse admet une incertitude de $5{,}8 \times 10^5$ m/s. Quelle est l'incertitude minimale sur la mesure de la position de ce proton ?

E45 Pour un électron faisant partie d'un atome, on peut évaluer l'incertitude sur la position au rayon de l'atome. Quelle est l'incertitude sur le module de la vitesse d'un électron dans un atome d'hydrogène, si cet atome a un rayon de 53 pm ?

E46 Un électron dans un atome peut demeurer dans un état excité pendant un certain intervalle de temps Δt avant de retourner à l'état fondamental. On évalue cet intervalle de temps à 25 ns. Quelle est la plus petite incertitude sur l'énergie impliquée dans cet état excité ? Exprimez votre réponse en eV.

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

10.1	$E_{(i)} < E_{(iii)} < E_{(iv)} < E_{(ii)}$	L'énergie d'un photon est $E = hf = hc/\lambda$, ce qui indique que plus la fréquence de la lumière est élevée (plus la longueur d'onde est courte), plus l'énergie du photon est grande. Selon la figure 4.10, on classe les ondes de l'énoncé par ordre croissant de fréquence : micro-ondes, rouge, ultraviolet, rayon X.
10.2	$T_{\text{Bételgeuse}} < T_{\text{Soleil}} < T_{\text{Canopus}} < T_{\text{Sirius}}$	Selon la loi du déplacement de Wien, la température est inversement proportionnelle à λ_{max}.
10.3	**a.** $\Phi_a < \Phi_b < \Phi_c$	Lorsque le potentiel d'arrêt est grand, cela indique que l'énergie cinétique maximale des électrons est grande. Pour une lumière incidente qui ne change pas de longueur d'onde, l'énergie cinétique sera plus grande si le travail d'extraction est faible. Pour le métal c, le travail d'extraction est plus élevé que l'énergie des photons incidents.
	b. $\lambda_{\text{seuil},c} < \lambda_{\text{seuil},b} < \lambda_{\text{seuil},a}$	La longueur d'onde seuil est inversement proportionnelle au travail d'extraction ($\lambda_{\text{seuil}} = hc/\Phi$).
10.4	**a.** Il n'y a aucun effet.	Le décalage de Compton ne dépend pas de l'énergie des rayons X incidents.
	b. $\Delta\lambda$ augmente.	Selon la formule de Compton, le décalage de Compton augmente lorsque θ augmente. Le photon donne une plus grande énergie à l'électron quand le photon est dévié d'un angle plus grand.
	c. Il n'y a aucun effet.	En changeant de cible, cela change l'énergie de liaison de l'électron. Par contre, cette énergie demeure négligeable par rapport à l'énergie cinétique que reçoit l'électron.
10.5	**a.** La largeur est la même	La longueur d'onde est $\lambda = h/p$. Si les particules ont la même quantité de mouvement, elles ont la même longueur d'onde.
	b. La largeur est plus grande pour les électrons.	Le module de la quantité de mouvement est $p = \sqrt{2mK}$. L'électron a une plus petite masse, donc sa quantité de mouvement est plus faible et sa longueur d'onde est plus grande.

Chapitre 11

La mécanique quantique

Buts du chapitre

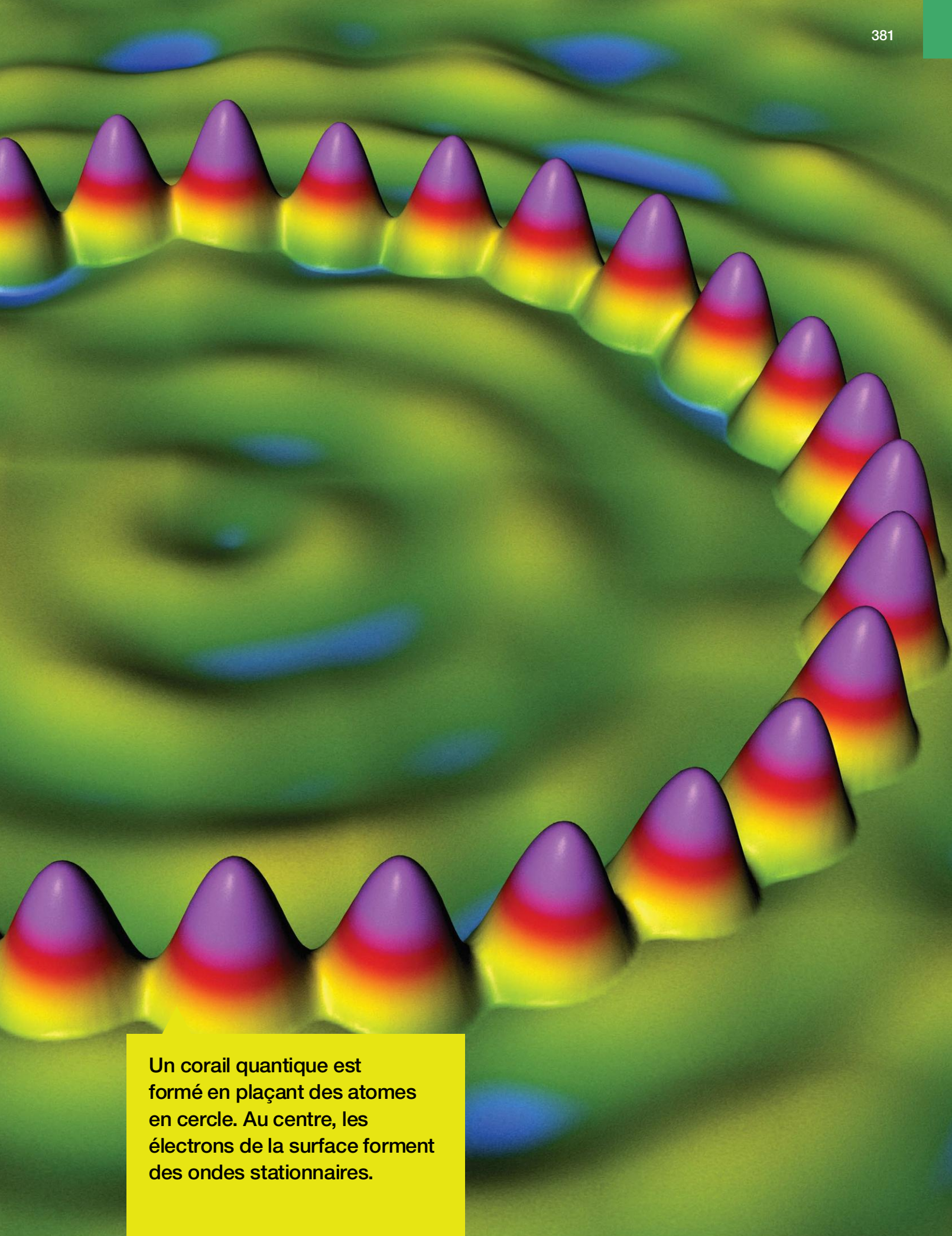
Dans ce chapitre, on étudie la mécanique quantique pour des modèles simples. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de calculer la probabilité de trouver un électron à partir de la fonction d'onde ;
- d'obtenir les niveaux d'énergie et la fonction d'onde d'un électron piégé dans un puits de potentiel infini ;
- de calculer le coefficient de transmission par effet tunnel ;
- d'utiliser le principe d'exclusion de Pauli pour obtenir l'état fondamental d'un système d'électrons piégés.

Préalables

Ce chapitre étudie les ondes de matière pour un électron non relativiste. Revoyez :

- les ondes de matières, vues à la section 10.6 ;
- les modes normaux d'oscillation d'une corde, analysés à la section 2.10 ;
- la notion de photon, étudiée à la section 10.1 ;
- la dualité onde-particule pour la lumière, expliquée à la section 10.5.



Un corail quantique est formé en plaçant des atomes en cercle. Au centre, les électrons de la surface forment des ondes stationnaires.

Dans le dernier chapitre, nous avons appris que la lumière n'est pas simplement une onde et que les électrons ne sont pas simplement des particules semblables à des billes. À très petite échelle, les particules et les ondes sont intimement liées dans la dualité onde-particule. Les lois de Newton ne s'appliquent pas à l'échelle des atomes et des électrons, car les particules ne suivent plus une trajectoire bien définie. La *mécanique quantique* doit être utilisée à cette échelle. Elle permet d'analyser les ondes de matière et d'évaluer la probabilité d'observer les particules.

La mécanique quantique produit des résultats déroutants pour nos esprits newtoniens. Notre expérience pratique est basée sur la mécanique des lois de Newton selon laquelle les particules se déplacent sur des trajectoires bien définies, qui peuvent être déterminées avec précision. Le monde de la mécanique quantique est complètement différent. Les trajectoires sont remplacées par des ondes qui ne peuvent être visualisées, et les mesures sont limitées à des probabilités.

La mécanique quantique nous permet de comprendre les phénomènes au niveau des atomes et des molécules. C'est avec la mécanique quantique qu'on a pu expliquer la stabilité des atomes et comment ceux-ci se lient pour former des molécules. De même, le mouvement des protons et des neutrons formant le noyau des atomes doit être analysé à l'aide de la mécanique quantique. Ces sujets seront abordés aux chapitres 12 et 13. Dans le présent chapitre, nous étudions le comportement des électrons non relativiste pour des modèles simples. En appliquant les concepts de la physique des ondes aux mouvements des électrons, nous allons obtenir des résultats généraux très importants : l'énergie d'un électron confiné dans une région est quantifiée, et l'état d'un électron est spécifié par des nombres entiers qu'on appelle les nombres quantiques.

11.1 La fonction d'onde

Nous avons vu à la section 10.6 que les électrons ont une onde associée : lorsque des électrons passent à travers un système de deux fentes, on observe des franges d'interférence, des résultats semblables à ceux qui sont obtenus avec la lumière. Pour celle-ci, l'onde correspond à une onde électromagnétique, décrite par le champ électrique $\vec{\mathbf{E}}(x, y, z, t)$. Ce champ est la solution de l'équation d'onde, qui découle des équations de Maxwell. Pour l'électron, quelle est exactement l'onde et comment obtient-on la fonction d'onde ? Pour commencer, on postule que l'électron est décrit par la *fonction d'onde* $\Psi(x, y, z, t)$ [la lettre grecque psi majuscule]. Nous verrons à la section 11.2 l'équation d'onde qui permet de trouver cette fonction de façon mathématique. Nous avons d'abord besoin de connaître ses caractéristiques et son interprétation physique.

Pour simplifier la situation, on considère uniquement la partie spatiale de la fonction d'onde dans des modèles à une dimension. On a alors besoin de la fonction d'onde $\psi(x)$ [la lettre grecque psi minuscule], la partie de la fonction d'onde qui dépend uniquement de la coordonnée x.

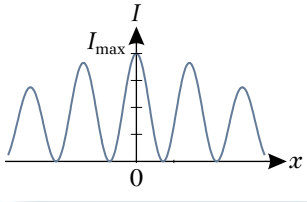


FIGURE 11.1
Le nombre d'électrons par unité de temps qui frappent l'écran dans l'expérience de Young

Revenons à l'expérience de Young avec des électrons. La figure 11.1 montre le résultat de l'expérience, qui est équivalent à l'expérience réalisée avec des photons. On peut définir l'intensité par le nombre d'électrons qui frappent l'écran par unité de temps. On remarque que l'intensité présente des maximums et des minimums, résultats de l'interférence. Étant donné que chaque électron arrive de façon aléatoire sur l'écran, la courbe d'intensité doit être proportionnelle à la

probabilité de détecter une particule. Dans le cas de la lumière, on a vu que l'irradiance (équivalente à l'intensité) est proportionnelle au carré de l'amplitude. De façon équivalente pour l'électron, la probabilité de détecter une particule doit être proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde.

On postule alors que la fonction d'onde $\psi(x)$ représente l'*amplitude de probabilité* et que son carré permet de calculer la densité de probabilité. Ceci veut dire que la probabilité de détecter une particule entre la position x et la position $x + \mathrm{d}x$ est

$$P(\text{entre } x \text{ et } x + \mathrm{d}x) = \Pi(x)\ \mathrm{d}x = |\psi(x)|^2\ \mathrm{d}x\ , \tag{11.1}$$

où $\Pi(x)$ [la lettre grecque pi majuscule] représente la *densité de probabilité* :

$$\Pi(x) = |\psi(x)|^2\ . \tag{11.2}$$

Donc, la fonction d'onde joue un rôle analogue au champ électrique pour le photon.

À partir de la courbe de l'intensité de l'expérience de Young, on peut trouver la fonction d'onde $\psi(x)$, de telle sorte que le carré de la fonction d'onde ait la même forme que la courbe d'intensité. La figure 11.2 montre cette fonction d'onde.

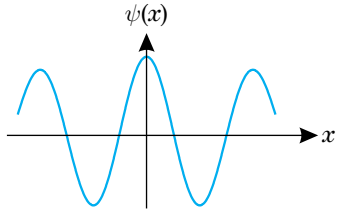


FIGURE 11.2
La fonction d'onde pour les électrons qui frappent l'écran dans l'expérience de Young

REMARQUE

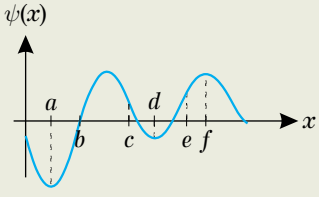
Si on multiplie la fonction d'onde par –1, on obtient la même densité de probabilité. On ne peut pas mesurer la fonction d'onde. C'est la densité de probabilité $|\psi(x)|^2$ qui a une signification physique.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 11.1

La figure suivante montre la fonction d'onde d'un électron.

a. Pour quel point la probabilité de trouver l'électron est-elle la plus grande ?

b. Pour quel point la probabilité de trouver l'électron est-elle la plus faible ?



Les nombres complexes

La fonction d'onde pour une onde de matière est en général une fonction complexe, c'est-à-dire que si on l'évalue en un point x, on obtient un nombre complexe. Une brève introduction à l'algèbre complexe est présentée ici.

Les nombres réels peuvent être représentés sur un axe, qui va de $-\infty$ à ∞. Les nombres réels sont un sous-ensemble des nombres complexes. Les nombres complexes sont représentés dans un plan, qu'on appelle le *plan complexe*, avec un axe horizontal (l'axe des réels Re) et un axe vertical (l'axe des imaginaires Im), comme le montre la figure 11.3.

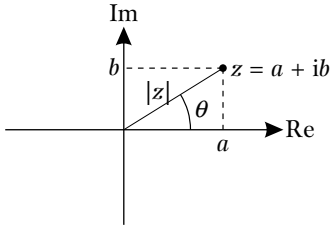


FIGURE 11.3
Le plan complexe

Un nombre complexe z est défini à partir de sa partie réelle a et de sa partie imaginaire b :

$$z = a + \mathrm{i}b \ , \tag{11.3}$$

où i est le nombre imaginaire unitaire*, défini par

$$\mathrm{i}^2 = -1 \ . \tag{11.4}$$

La partie réelle ($a = \Re[z]$) et la partie imaginaire ($b = \Im[z]$) sont des nombres réels.

On définit le conjugué z^* du nombre z par le nombre complexe ayant la même partie réelle, mais dont la partie imaginaire est opposée. Pour $z = a + \mathrm{i}b$, le conjugué est

$$z^* = (a + \mathrm{i}b)^* = a - \mathrm{i}b \ . \tag{11.5}$$

L'addition et la soustraction de nombres complexes sont obtenues simplement en additionnant ou en soustrayant séparément les parties réelles et les parties imaginaires :

$$(a + \mathrm{i}b) \pm (c + \mathrm{i}d) = (a \pm c) + \mathrm{i}(b \pm d) \ . \tag{11.6}$$

On obtient le produit de deux nombres complexes en calculant la multiplication des deux binômes et en remplaçant i^2 par -1 :

$$\begin{aligned} (a + \mathrm{i}b) \times (c + \mathrm{i}d) &= ac + \mathrm{i}(bc + ad) + \mathrm{i}^2 bd \\ &= (ac - bd) + \mathrm{i}(bc + ad) \ . \end{aligned} \tag{11.7}$$

Selon l'équation 11.7, on obtient un nombre réel en multipliant un nombre complexe et son conjugué :

$$zz^* = (a + \mathrm{i}b) \times (a - \mathrm{i}b) \ = a^2 + b^2 = |z|^2 \ , \tag{11.8}$$

où $|z|$ est appelé le *module* du nombre complexe z.

La division peut être calculée en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{a + \mathrm{i}b}{c + \mathrm{i}d} &= \frac{a + \mathrm{i}b}{c + \mathrm{i}d} \times \frac{c - \mathrm{i}d}{c - \mathrm{i}d} \\ &= \frac{(ac + bd) + \mathrm{i}(bc - ad)}{c^2 + d^2} \ . \end{aligned} \tag{11.9}$$

La forme $z = a + \mathrm{i}b$ est la forme cartésienne du nombre complexe. On peut aussi représenter un nombre complexe sous la forme polaire. Comme le montre la figure 11.3, on peut écrire

$$z = |z| \cos\theta + \mathrm{i}\,|z| \sin\theta \ ,$$

où $|z|$ est le module (la longueur du segment reliant l'origine et le point z), et θ est l'*argument* du nombre complexe (l'angle par rapport à l'axe des réels). L'argument du nombre complexe peut être calculé à partir des parties réelle et imaginaire :

$$\theta = \arctan\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) . \tag{11.10}$$

* En ingénierie, on utilise habituellement le symbole j, pour éviter de confondre le nombre imaginaire avec le symbole du courant électrique.

La *formule d'Euler* est une identité très importante, qui permet d'exprimer un nombre complexe à partir d'une fonction exponentielle :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \,. \tag{11.11}$$

Le nombre complexe s'exprime alors en coordonnées polaires :

$$z = |z|\, e^{i\theta} \,. \tag{11.12}$$

La normalisation de la fonction d'onde

On a postulé que la fonction d'onde $\psi(x)$ représente une amplitude de probabilité : on obtient la densité de probabilité en calculant le carré du module de la fonction d'onde. La probabilité de trouver la particule entre x_1 et x_2 est alors

$$P(\text{entre } x_1 \text{ et } x_2) = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 \, dx = \int_{x_1}^{x_2} \psi^*(x)\, \psi(x)\, dx \,. \tag{11.13}$$

Probabilité de mesure entre x_1 et x_2

La fonction d'onde est une fonction complexe, mais son module est nécessairement un nombre réel positif. Il faut ajouter une condition supplémentaire : la probabilité de trouver la particule quelque part (entre $x = -\infty$ et $x = \infty$) doit être égale à l'unité, ce qui correspond à une certitude. C'est la condition de normalisation :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, \psi(x)\, dx = 1 \,. \tag{11.14}$$

Condition de normalisation

Lorsque la fonction d'onde est connue, il est possible de calculer la valeur moyenne d'une quantité. Par exemple, si on veut connaître la valeur moyenne de la position x de la particule, on utilise l'expression :

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, x\, \psi(x)\, dx \,, \tag{11.15}$$

où la notation $\langle \ldots \rangle$ sert à indiquer la valeur moyenne. De façon générale, on peut calculer la valeur moyenne d'une fonction $f(x)$ en calculant l'intégrale suivante :

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, f(x)\, \psi(x)\, dx \,.$$

EXEMPLE 11.1 Une première fonction d'onde

La fonction d'onde d'un électron est donnée par l'expression :

$$\psi(x) = \begin{cases} A(Lx - x^2) & (0 \le x \le L) \\ 0 & (\text{ailleurs}) \end{cases} \,,$$

où A est une constante de normalisation.

a. Déterminez la constante de normalisation.
b. Quelle est la probabilité d'observer la particule entre $x = L/4$ et $x = L/2$?
c. Quelle est la valeur moyenne de la position de l'électron ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 11.4 illustre la fonction d'onde, qui est non nulle seulement entre $x = 0$ et $x = L$.

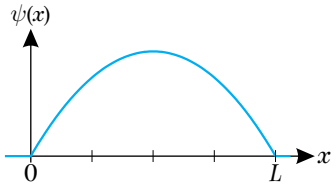


FIGURE 11.4
La fonction d'onde de l'exemple 11.1

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$\psi(x) = A\,(Lx - x)^2$	A
L	P
	$\langle x \rangle$

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est la condition de normalisation, donnée par l'équation 11.14 :

$$\int_0^L \psi^*(x)\,\psi(x)\,dx = 1\,, \qquad \text{(i)}$$

où les bornes sont $x = 0$ et $x = L$, étant donné que la fonction d'onde est nulle à l'extérieur de cet intervalle.

Résoudre le problème

Nous remplaçons ψ dans l'équation (i), et nous calculons l'intégrale :

$$1 = A^2 \int_0^L (Lx - x^2)^2\,dx$$

$$= A^2 \int_0^L (L^2x^2 - 2Lx^3 + x^4)\,dx$$

$$= A^2 \left[\frac{L^2x^3}{3} - \frac{2Lx^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^L \qquad \text{(ii)}$$

$$1 = A^2\,\frac{L^5}{30} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{30}{L^5}}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La dimension ($L^{-5/2}$) semble bizarre à première vue, mais c'est la dimension requise pour que la probabilité n'ait pas d'unité.

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 11.13 :

$$P = \int_{L/4}^{L/2} \psi^*(x)\,\psi(x)\,dx\,. \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

C'est la même intégrale que dans la partie **a.**, mais avec des bornes différentes :

$$P = A^2 \int_{L/4}^{L/2} (Lx - x^2)^2\,dx\,. \qquad \text{(iv)}$$

Nous utilisons donc l'équation (ii) et la valeur obtenue pour A :

$$P = A^2 \left[\frac{L^2x^3}{3} - \frac{2Lx^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_{L/4}^{L/2}$$

$$= \frac{30}{L^5}\left[\left(\frac{L^5}{24} - \frac{L^5}{32} + \frac{L^5}{160}\right) - \left(\frac{L^5}{192} - \frac{L^5}{512} + \frac{L^5}{5120}\right)\right]$$

$$P = 0{,}396\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La probabilité est entre 0 et 1, comme il se doit.

SOLUTION c.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 11.15 :

$$\langle x \rangle = \int_0^L \psi^*(x)\,x\,\psi(x)\,dx$$

$$\langle x \rangle = A^2 \int_0^L \left[L^2x^3 - 2Lx^4 - x^5\right]dx\,. \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons l'intégrale en utilisant la valeur de A obtenue dans la partie **a.** :

$$\langle x \rangle = \frac{30}{L^5}\left[\frac{L^2x^4}{4} - \frac{2Lx^5}{5} + \frac{x^6}{6}\right]\Bigg|_0^L$$

$$\langle x \rangle = \frac{30}{L^5}\left[\frac{L^6}{4} - \frac{2L^6}{5} + \frac{L^6}{6}\right] = \frac{L}{2}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Étant donné que la fonction d'onde est symétrique par rapport à $L/2$, il est normal que la position moyenne corresponde au milieu de l'intervalle.

11.2 L'équation de Schrödinger

À la dernière section, nous avons obtenu l'interprétation physique de la fonction d'onde: le carré du module donne la densité de probabilité. Il faut maintenant trouver une façon de déterminer la fonction d'onde, donc on a besoin d'une équation d'onde dont la solution est la fonction d'onde. L'équation d'onde doit être linéaire, de telle sorte que le principe de superposition soit valide. De cette façon, les fonctions d'onde s'additionnent et produisent des interférences. La fonction d'onde doit aussi respecter l'équation de De Broglie, qui relie le module de la quantité de mouvement p de la particule et la longueur d'onde de l'onde de matière.

FIGURE 11.5
Erwin Schrödinger (1887-1961), physicien autrichien

L'équation d'onde pour une particule non relativiste a été découverte par le physicien autrichien Erwin Schrödinger en 1925 (*voir la figure 11.5*). De façon générale, l'onde se propage dans un espace à trois dimensions. On se limite pour commencer aux situations à une dimension. Dans ce cas, lorsqu'une particule de masse m est soumise à une force d'interaction qui produit une énergie potentielle $U(x, t)$, l'équation d'onde est

Équation de Schrödinger (une dimension)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}+U(x,t)\Psi(x,t)=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\,, \tag{11.16}$$

où $\hbar = h/(2\pi)$ est la constante de Planck réduite et $\mathrm{i}^2 = -1$. C'est l'équation de Schrödinger à une dimension. Cette équation permet d'obtenir la fonction d'onde associée à une onde de matière pour une particule non relativiste.

La particule libre

Analysons l'équation de Schrödinger pour une particule libre qui se déplace vers la droite le long de l'axe des x. Une particule libre n'est soumise à aucune force, ce qui est le cas lorsque $U(x, t) = 0$. L'équation de Schrödinger s'écrit

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}=\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\,. \tag{11.17}$$

Il est intéressant de vérifier si l'onde sinusoïdale est la solution de cette équation. Une onde sinusoïdale se déplaçant vers la droite est donnée à l'équation 2.17 de la page 54:

$$\Psi(x,t)=A\sin(kx-\omega t)\,,$$

où on a choisi une constante de phase nulle, et où l'amplitude est A. Cette fonction ne peut être une solution de l'équation de Schrödinger. En effet,

$$\frac{\partial\sin(kx-\omega t)}{\partial t}=-\omega\cos(kx-\omega t)$$
$$\frac{\partial^2\sin(kx-\omega t)}{\partial x^2}=-k^2\sin(kx-\omega t)\,.$$

On ne peut pas relier de façon linéaire le cosinus et le sinus. Il faut donc une autre onde: une onde complexe. Soit l'onde plane:

$$\Psi(x,t)=A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\,. \tag{11.18}$$

On calcule les dérivées partielles :

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\mathrm{i}\omega A\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$$
$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} = \mathrm{i}kA\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$$
$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = (\mathrm{i}k)^2 A\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} = -k^2 A\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},$$

où on a utilisé $\mathrm{i}^2 = -1$. Insérons ce résultat dans l'équation 11.17 :

$$\frac{(\hbar k)^2}{2m}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} = \hbar\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)},$$

où on a remplacé $-\mathrm{i} \times \mathrm{i} = -\mathrm{i}^2 = 1$. La dernière équation est vérifiée si

$$\frac{(\hbar k)^2}{2m} = \hbar\omega\,. \tag{11.19}$$

Pour une onde de matière, la longueur d'onde est reliée à la quantité de mouvement par l'équation 10.33. Cette relation peut être écrite en fonction du nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow p = \frac{h}{2\pi}k = \hbar k\,. \tag{11.20}$$

De plus, on peut poser l'hypothèse que la fréquence de l'onde est reliée à l'énergie de la particule de la même façon que pour le photon, selon l'équation 10.1 de la page 349. On peut écrire cette relation en fonction de la fréquence angulaire $\omega = 2\pi f$:

$$E = hf = h\frac{\omega}{2\pi} = \hbar\omega\,. \tag{11.21}$$

En insérant ces résultats dans l'équation 11.19, on obtient

$$\frac{p^2}{2m} = E\,.$$

Cette dernière équation est simplement l'énergie cinétique exprimée en fonction du module de la quantité de mouvement $p = mv = \sqrt{2mK}$. Étant donné que $U(x) = 0$, l'énergie cinétique de la particule est égale à l'énergie mécanique.

En résumé, on peut dire qu'une particule libre est décrite par une onde plane complexe. Cette onde peut être réécrite en fonction de la quantité de mouvement p et de son énergie E à l'aide des équations 11.20 et 11.21 :

$$\Psi(x,t) = A\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{px-Et}{\hbar}\right)}. \tag{11.22}$$

MISE EN GARDE

L'équation de Schrödinger est une équation valide pour une particule non relativiste. Dans ce cas, $E = K + U$ représente l'énergie mécanique et non l'énergie totale relativiste.

REMARQUE

Comme nous l'avons indiqué à la section 10.7, une particule libre ne peut pas être décrite simplement par une onde, mais par un paquet d'onde. Il est possible de produire un paquet d'onde en superposant plusieurs ondes planes ayant la forme de l'équation 11.22.

L'équation indépendante du temps

Par la suite, nous allons seulement étudier des situations où l'énergie potentielle $U(x)$ ne dépend pas du temps. La fonction d'onde peut alors être écrite selon l'expression :

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\, e^{-iEt/\hbar},$$

où $\psi(x)$ correspond à la partie spatiale de la fonction d'onde. L'équation de Schrödinger se réduit alors à l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x). \qquad (11.23)$$

Équation de Schrödinger indépendante du temps

Pour décrire une particule, la fonction d'onde doit avoir les propriétés suivantes :

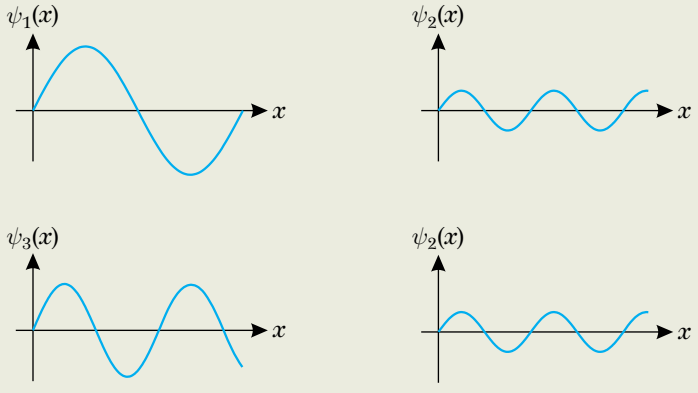
- La fonction d'onde est normalisée :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)\, dx = 1.$$

- La fonction d'onde $\psi(x)$ et sa dérivée $d\psi(x)/dx$ doivent être continues.
- Pour $x \to \pm\infty$, la fonction d'onde doit tendre vers 0.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 11.2

La figure suivante montre la partie réelle de quatre fonctions d'onde associées à des particules quantiques. Classez les fonctions d'onde par ordre croissant du module de la vitesse de la particule.



11.3 Les états stationnaires

Lorsque nous avons étudié les ondes sur une corde au chapitre 2, nous avons vu que dans le cas d'une très longue corde, on peut produire une onde ayant n'importe quelle longueur d'onde λ. Par contre, lorsque la corde a une longueur L, les conditions aux limites, qui correspondent aux extrémités de la corde, imposent certaines valeurs de longueurs d'onde pour lesquelles on obtient une onde stationnaire.

Les résultats précédents sont des résultats généraux pour les ondes. Le fait qu'une onde soit limitée à une certaine longueur impose des longueurs d'onde particulières. Lorsqu'une particule n'est pas confinée à une région, elle peut avoir n'importe quelle valeur de longueur d'onde. C'est le cas pour la particule libre que nous avons étudiée à la section 11.2. Lorsque la particule est confinée dans une région (on dit aussi qu'elle est piégée), l'onde de matière doit respecter des conditions aux limites. L'onde de matière est alors une onde stationnaire, avec certaines valeurs de longueurs d'onde seulement. On parle alors d'*états stationnaires*. Selon la relation de De Broglie, la longueur d'onde est reliée au module de la quantité de mouvement et donc à l'énergie cinétique de la particule. Si la longueur d'onde ne peut prendre que certaines valeurs, il en va de même pour l'énergie. On obtient donc le résultat général très important :

Quantification de l'énergie

Lorsqu'une particule est confinée dans une certaine région, l'onde de matière est une onde stationnaire. L'énergie de la particule est alors quantifiée.

Dans les prochains chapitres, nous allons appliquer ce résultat aux électrons dans les atomes et aux protons et aux neutrons dans les noyaux. Le fait que ces particules sont confinées implique directement que leur fonction d'onde est une onde stationnaire, avec une énergie quantifiée. Pour l'instant, nous allons étudier des modèles simples où l'électron est confiné dans une certaine région.

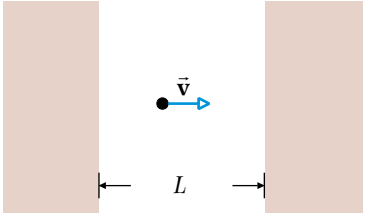


FIGURE 11.6
Un électron est confiné dans une boîte de largeur L.

11.4 L'énergie d'une particule confinée à une dimension

On commence l'étude de particules piégées par l'analyse d'une particule dans une boîte de largeur L, comme à la figure 11.6. On suppose donc qu'une particule comme un électron est soumise à une force qui la confine dans un espace unidimensionnel de largeur L. C'est un modèle très simple au point de vue mathématique, ce qui va permettre d'obtenir les premiers résultats généraux lorsqu'une particule quantique est piégée. Pour modéliser cette situation, on a besoin d'une fonction énergie potentielle illustrée à la figure 11.7, qu'on appelle le *puits de potentiel infini*. L'énergie potentielle est donnée par l'expression :

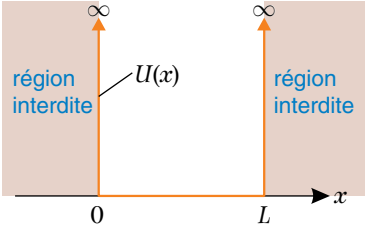


FIGURE 11.7
L'énergie potentielle pour un puits de potentiel infini

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le L) \\ \infty & (x < 0 \text{ ou } x > L)\,. \end{cases} \tag{11.24}$$

À l'intérieur du puits de potentiel, la particule n'a que de l'énergie cinétique K. La particule ne peut pas quitter la région $0 \le x \le L$, quelle que soit son énergie cinétique, car l'énergie potentielle est infinie à l'extérieur du puits. La région $x < 0$ et la région $x > L$ sont appelées les *régions interdites*.

Étant donné que l'énergie potentielle tend vers l'infini à $x = 0$ et à $x = L$, cela implique que l'onde de matière doit être nulle aux extrémités du puits. L'onde de matière doit donc être une onde stationnaire, avec des nœuds à $x = 0$ et à $x = L$. Cette situation est équivalente aux ondes stationnaires sur une corde fixée à ses extrémités, que nous avons étudiée à la section 2.10 de la page 70. Pour une onde de matière, les ondes stationnaires sont appelées des *états stationnaires*.

Comme dans le cas des ondes stationnaires sur une corde, la longueur d'onde des ondes de matière dans un puits infini ne peut pas prendre n'importe quelle valeur. Pour le mode n, la longueur d'onde est

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots) . \tag{11.25}$$

Selon l'équation de De Broglie (*voir l'équation 10.33*), la longueur d'onde est reliée au module de la quantité de mouvement de la particule :

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2L} n . \tag{11.26}$$

Comme la longueur d'onde est limitée à certaines valeurs, le module de la quantité de mouvement est quantifié. On calcule l'énergie du mode n en tenant compte du fait que $U = 0$ à l'intérieur du puits et que $K = p^2/(2m)$. On obtient

$$E = K + U = \frac{p^2}{2m} + 0$$

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2 = n^2 E_1 , \tag{11.27}$$

Énergie dans un puits de potentiel infini (1D)

où n est un entier positif qui représente le numéro du mode de l'onde stationnaire. En mécanique quantique, n est appelé le *nombre quantique*. Donc, l'énergie d'un électron, confiné dans un puits de potentiel infini, est quantifiée.

Les transitions quantiques

En physique classique, une particule peut avoir une énergie nulle en étant au repos. En mécanique quantique, on trouve que lorsqu'une particule est piégée, elle doit avoir une certaine valeur d'énergie. On représente l'énergie des états stationnaires dans un *diagramme des niveaux d'énergie*, comme celui de la figure 11.8. Dans ce diagramme, on utilise un axe vertical pour l'énergie, et on représente les différentes énergies possibles par des segments horizontaux.

L'état $n = 1$ est l'état dont l'énergie est la plus faible. C'est l'*état fondamental*, dont l'énergie est

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} . \tag{11.28}$$

L'équation 11.28 montre que plus on confine une particule dans une région étroite, plus son énergie minimale est grande. Les autres états sont les *états excités*. L'état fondamental est l'état stable du système, car il a un minimum d'énergie.

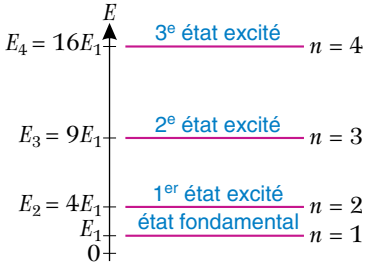


FIGURE 11.8
Le diagramme des niveaux d'énergie pour un électron dans un puits de potentiel infini. Le système ne peut pas avoir une énergie comprise entre deux niveaux.

Pour exciter le système, on doit fournir de l'énergie ΔE, de telle sorte que l'électron passe à un état n supérieur. Par exemple, l'électron peut absorber un photon ayant une énergie $E_{\text{photon}} = \Delta E$. Si l'électron est initialement au niveau n_b, il peut monter au niveau n_h s'il absorbe une énergie ΔE :

Énergie d'une transition

$$\Delta E = E_{n_\text{h}} - E_{n_\text{b}} = \frac{hc}{\lambda}, \tag{11.29}$$

où λ est la longueur d'onde du photon. Pour être absorbé, un photon doit avoir l'énergie qui correspond à la différence ΔE entre deux niveaux.

Lorsqu'un électron est dans un état excité n_h, il peut descendre au niveau inférieur n_b en émettant un photon dont l'énergie est $E_{\text{photon}} = \Delta E$. L'équation 11.29 est aussi valable dans ce cas.

REMARQUE

L'état fondamental est l'état stable. Lorsqu'un électron est dans un état excité, il retourne rapidement à l'état fondamental, soit directement, ou en passant par des états excités intermédiaires. Pour chaque transition, l'électron émet un photon.

MISE EN GARDE

Pour être absorbé, un photon doit avoir exactement l'énergie ΔE qui correspond à une transition quantique. Si le photon n'a pas la bonne énergie, il n'est pas du tout absorbé.

EXEMPLE 11.2 Un électron en transition

Un électron est piégé dans un puits de potentiel infini, dont la largeur est de 0,700 nm.

a. Calculez l'énergie de l'état fondamental et des deux premiers états excités.
b. Quelle est l'énergie nécessaire pour faire passer l'électron de l'état fondamental au deuxième état excité ?
c. Quelle est la longueur d'onde des photons émis lorsque l'électron retourne à l'état fondamental ? Donnez toutes les possibilités.

SOLUTION a.

Décortiquer le problème

L'état fondamental est spécifié par le nombre quantique $n = 1$, alors que les deux premiers états excités correspondent à $n = 2$ et à $n = 3$.

Connues	Inconnues
$L = 0{,}700\,\text{nm}$	E_1
$m = 511 \times 10^3\ \text{eV}/c^2$	E_2 E_3

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 11.27 :

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2}n^2 = \frac{(hc)^2}{8mc^2L^2}n^2, \tag{i}$$

où nous avons multiplié par $1 = c^2/c^2$ pour faire le calcul directement en eV.

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'énergie de l'état fondamental, en utilisant la valeur $hc = 1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}$:

$$E_1 = \frac{(1240\ \text{eV} \cdot \text{nm})^2}{8 \times 511 \times 10^3\ \text{eV}\ (0{,}700\ \text{nm})^2}$$

$$E_1 = 0{,}7676\ \text{eV} = 0{,}768\ \text{eV} \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Nous calculons ensuite l'énergie des deux premiers états excités à partir de E_1 :

$$E_2 = 2^2 E_1 = 4 \times 0{,}7676\ \text{eV} = 3{,}070\ \text{eV} = 3{,}07\ \text{eV}$$

(réponse)

$$E_3 = 3^2 E_1 = 9 \times 0{,}7676\ \text{eV} = 6{,}908\ \text{eV} = 6{,}91\ \text{eV}.$$

(réponse)

SOLUTION b.

Illustrer la situation

Le diagramme des niveaux d'énergie est illustré à la figure 11.9, avec la transition entre l'état $n = 1$ et l'état $n = 3$.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$E_{n_b} = E_1 = 0{,}7676\ \text{eV}$	ΔE
$E_{n_h} = E_3 = 6{,}908\ \text{eV}$	

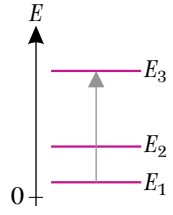


FIGURE 11.9
Le diagramme des niveaux d'énergie pour l'exemple 11.2b

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 11.29 :

$$\Delta E = E_{n_h} - E_{n_b}. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\Delta E = 6{,}908\ \text{eV} - 0{,}7676\ \text{eV} = 6{,}14\ \text{eV} \ .$$

(réponse)

SOLUTION c.

Illustrer la situation

Il y a deux possibilités : l'électron peut retourner directement à l'état $n = 1$ (*voir la figure 11.10a*) ou descendre en cascade en passant par l'état $n = 2$, comme à la figure 11.10b.

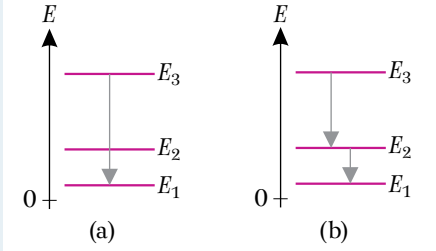


FIGURE 11.10
La transition de l'électron de l'état $n = 3$ à $n = 1$: (a) directement ; (b) en passant par l'état $n = 2$.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$E_1 = 0{,}7676\ \text{eV}$	$\lambda_{3\to1}$
$E_2 = 3{,}070\ \text{eV}$	$\lambda_{3\to2}$
$E_3 = 6{,}908\ \text{eV}$	$\lambda_{2\to1}$

Identifier la clé

La **clé** est de nouveau l'équation 11.29 :

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{\Delta E} \ . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs :

$$\lambda_{3\to1} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{6{,}908\ \text{eV} - 0{,}768\ \text{eV}} = 202\ \text{nm}$$

(réponse)

$$\lambda_{3\to2} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{6{,}908\ \text{eV} - 3{,}070\ \text{eV}} = 323\ \text{nm}$$

(réponse)

$$\lambda_{2\to1} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{3{,}070\ \text{eV} - 0{,}768\ \text{eV}} = 538\ \text{nm} \ .$$

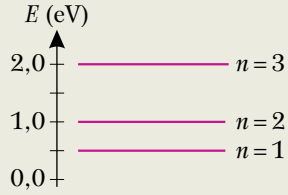
(réponse)

Valider la réponse

Nous obtenons des photons qui se retrouvent dans le domaine de l'ultraviolet et dans le domaine visible.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 11.3

La figure suivante montre le diagramme des niveaux d'énergie d'un système qui contient un électron piégé. Le système est éclairé avec quatre photons : $E_{(i)} = 0{,}5$ eV, $E_{(ii)} = 1{,}0$ eV, $E_{(iii)} = 1{,}5$ eV et $E_{(iv)} = 2{,}0$ eV. Parmi ces photons, lesquels peuvent être absorbés par le système si ce dernier est dans l'état fondamental ?



11.5 La fonction d'onde d'une particule piégée à une dimension

On a obtenu l'énergie des états d'un électron dans un puits infini en appliquant simplement l'équation de De Broglie à des ondes stationnaires équivalentes aux ondes stationnaires sur une corde. Cette méthode est valide, étant donné que la fonction énergie potentielle est très simple mathématiquement. On veut maintenant obtenir la fonction d'onde et l'énergie d'un électron piégé en résolvant explicitement l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)\,, \tag{11.30}$$

pour le puits de potentiel infini, ayant une largeur L :

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le L) \\ \infty & (x < 0 \text{ ou } x > L) \end{cases}. \tag{11.31}$$

Lorsque $x < 0$, l'énergie potentielle tend vers l'infini. Pour une énergie E finie, l'équation de Schrödinger implique alors que $\psi = 0$. Il se produit la même chose pour $x > L$:

$$\psi(x) = 0 \qquad \text{pour } x < 0 \text{ et } x > L\,.$$

Étant donné que la fonction d'onde doit être continue, cela implique que la fonction d'onde est nulle aux extrémités. Ceci donne les conditions aux limites que doit respecter la fonction d'onde :

$$\psi(0) = \psi(L) = 0\,. \tag{11.32}$$

La fonction d'onde présente bel et bien des nœuds aux extrémités du puits de potentiel, comme l'onde sur une corde fixée aux deux extrémités.

La solution de l'équation de Schrödinger

Pour $0 \le x \le L$, l'équation de Schrödinger s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)\,. \tag{11.33}$$

Cette équation a la même forme que l'équation du mouvement harmonique simple que nous avons obtenue au chapitre 1 (*voir l'équation 1.8 de la page 7*),

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x \ ,$$

où t est remplacé par x et ω^2 par $2mE/\hbar^2$. La solution est simplement une fonction sinus ou une fonction cosinus :

$$\psi_1(x) = A\sin(kx) \qquad \psi_2(x) = B\cos(kx) \ ,$$

où k est le nombre d'onde, qui est donné par

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \ , \tag{11.34}$$

et A et B sont des constantes d'intégration. Les solutions $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$ sont des solutions indépendantes de l'équation 11.33. La solution générale est donc la somme de ces deux solutions :

$$\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) \ . \tag{11.35}$$

La fonction d'onde doit respecter les conditions aux limites données à l'équation 11.32. Pour $x = 0$, on obtient

$$\psi(0) = A\sin(0) + B\cos(0) = 0 \ .$$

Cette condition est respectée seulement si $B = 0$. Pour $x = L$, on obtient

$$\psi(L) = A\sin(kL) = 0 \ .$$

Cette équation correspond à la condition pour obtenir un nœud dans la fonction d'onde à $x = L$, ce qui produit la quantification de l'énergie. En effet, la condition est respectée lorsque

$$kL = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \ . \tag{11.36}$$

En insérant l'équation 11.34 dans l'équation 11.36, on obtient que l'énergie de l'électron piégé est quantifiée :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2mE}}{h/2\pi} &= \frac{n\pi}{L} \\ \Rightarrow E &= \frac{h^2}{8mL^2}n^2 \ . \end{aligned} \tag{11.37}$$

C'est bien l'équation 11.27. Donc, l'équation de Schrödinger est respectée si l'énergie de l'électron est quantifiée.

La normalisation de la fonction d'onde

La fonction d'onde de l'état stationnaire n est donnée par l'expression :

$$\psi_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{11.38}$$

où on a remplacé k en utilisant l'équation 11.36. La constante A doit être calculée de telle sorte que la fonction d'onde soit normalisée. La condition de normalisation est donnée par l'équation 11.14 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\,\psi_n(x)\,\mathrm{d}x = 1 \ .$$

Comme la fonction d'onde est nulle pour $x < 0$ et pour $x > L$, l'intégrale doit être calculée entre $x = 0$ et $x = L$:

$$\int_0^L A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 1 .$$

Cette intégrale peut être calculée à l'aide de la table d'intégrale de l'annexe E. On obtient

$$A^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2n\pi x/L)}{4n\pi/L}\right]\Bigg|_0^L = 1 \tag{11.39}$$

$$A^2 \left[\frac{L}{2} - \frac{L\sin(2n\pi)}{4n\pi} - 0 + \frac{L\sin(0)}{4n\pi}\right] = 1 \tag{11.40}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}} . \tag{11.41}$$

La constante de normalisation est la même pour tous les états n. La fonction d'onde est donc

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{L}} \sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right) & (0 \le x \le L) \\ 0 & (x < 0 \text{ ou } x > L) . \end{cases} \tag{11.42}$$

La figure 11.11 montre la fonction d'onde $\psi(x)$ et la densité de probabilité $\Pi(x) = |\psi(x)|^2$ pour les trois premiers états. La fonction d'onde est bien équivalente à une onde stationnaire sur une corde. On remarque que l'état n possède $n + 1$ nœuds (des endroits où la densité de probabilité est nulle) et n ventres (des endroits où la densité de probabilité est maximale).

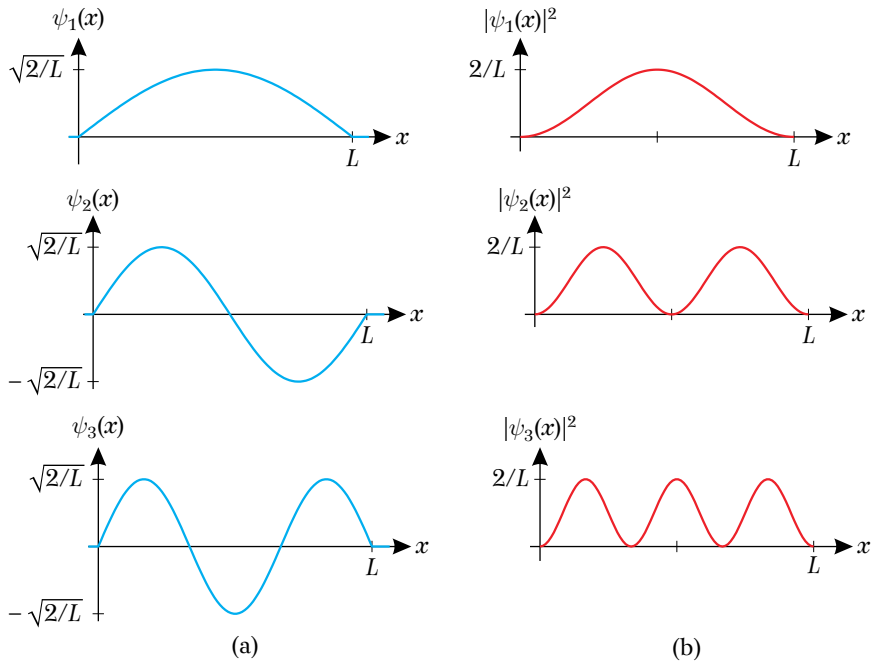


FIGURE 11.11

(a) La fonction d'onde pour les trois premiers états. (b) La densité de probabilité pour les trois premiers états.

EXEMPLE 11.3 La probabilité de trouver un électron

Un électron se trouve dans un puits de potentiel infini de largeur L. Cet électron est dans le premier état excité.

a. À quelle position la probabilité de trouver l'électron est-elle la plus grande ?

b. Quelle est la probabilité de trouver l'électron entre $x = L/4$ et $x = L/2$?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Le premier état excité correspond à l'état $n = 2$. La fonction d'onde d'un électron dans un puits infini de largeur L est obtenue à l'aide de l'équation 11.42.

Connues	Inconnues
$n = 2$	x
$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$	P

Illustrer la situation

La figure 11.12 illustre la densité de probabilité de l'état $n = 2$. L'aire ombrée correspond à la probabilité.

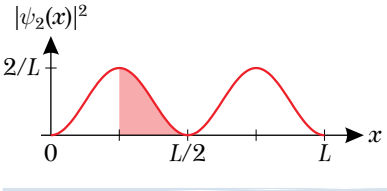


FIGURE 11.12
La densité de probabilité pour l'exemple 11.3

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est que la densité de probabilité est donnée par le carré du module de la fonction d'onde :

$$\Pi(x) = |\psi_2(x)|^2 = \frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right). \qquad \text{(i)}$$

La densité de probabilité est maximale lorsque la fonction $\sin^2$ est égale à 1, donc lorsque la fonction sinus est égale à ± 1.

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) = \pm 1$$

$$\frac{2\pi x}{L} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{L}{4} \text{ ou } \frac{3L}{4}. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 11.13 :

$$P = \int_{L/4}^{L/2} \psi_2^*(x)\,\psi_2(x)\,dx. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons la fonction d'onde dans l'équation (ii) :

$$P = \int_{L/4}^{L/2} \frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx. \qquad \text{(iii)}$$

Pour résoudre cette intégrale, nous utilisons la table d'intégrales de l'annexe E. Nous obtenons

$$P = \frac{2}{L}\left[\frac{x}{2} - \frac{L}{8\pi}\sin(4\pi x/L)\right]\Bigg|_{L/4}^{L/2}$$

$$= \frac{2}{L}\left[\frac{L}{4} - \frac{L}{8} - \frac{L}{8\pi}\sin(2\pi) + \frac{L}{8\pi}\sin(\pi)\right]$$

$$P = \frac{2}{L}\left[\frac{L}{8}\right] = \frac{1}{4} = 0{,}250. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La probabilité est bien entre 0 et 1. Selon la figure 11.12, l'aire ombrée semble bien représenter le quart de l'aire sous la courbe totale.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 11.4

Un électron dans un puits de potentiel infini de largeur L se trouve dans l'état $n = 10$.

a. Combien de points de probabilité maximale trouve-t-on ?

b. En incluant les extrémités du puits de potentiel, combien de points de probabilité nulle trouve-t-on ?

11.6 Les puits de potentiel à deux dimensions et à trois dimensions

Avant d'étudier des situations réelles, on doit généraliser l'étude de puits de potentiel aux problèmes à deux dimensions et à trois dimensions. Il faut d'abord exprimer l'équation de Schrödinger pour une situation où la fonction d'onde $\psi(x, y, z)$ est une fonction des trois coordonnées cartésiennes.

Pour une particule de masse m soumise à une énergie potentielle $U(x, y, z)$, l'équation indépendante du temps 11.23 se généralise de façon évidente en ajoutant des dérivées partielles par rapport à y et à z. On obtient l'équation de Schrödinger indépendante du temps à trois dimensions :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial z^2}\right]+U(x,y,z)\psi(x,y,z)=E\psi(x,y,z)\,, \tag{11.43}$$

où $E = K + U$ est l'énergie mécanique. La fonction d'onde est de nouveau associée à la densité de probabilité, qui devient une probabilité par unité de volume. Donc, la probabilité de trouver la particule à un endroit se calcule par une intégrale de volume :

$$P=\int |\psi(x,y,z)|^2\,\mathrm{d}V\,. \tag{11.44}$$

Un puits infini à deux dimensions

On analyse d'abord une particule confinée dans une région rectangulaire, qui a une longueur L_x et une largeur L_y. L'énergie potentielle correspondante est donnée par

$$U(x,y)=U_1(x)\,U_2(y)$$
$$U_1(x)=\begin{cases}0 & (0\le x\le L_x)\\ \infty & (x<0 \text{ ou } x>L_x)\end{cases}$$
$$U_2(y)=\begin{cases}0 & (0\le y\le L_y)\\ \infty & (y<0 \text{ ou } y>L_y)\,.\end{cases}$$

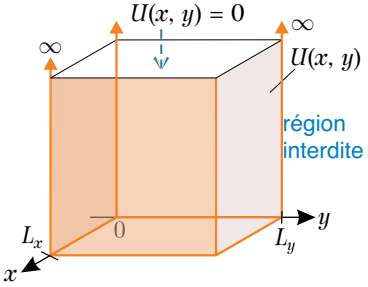


FIGURE 11.13
L'énergie potentielle d'un puits infini bidimensionnel

La fonction $U(x, y)$ est illustrée à la figure 11.13.

La fonction d'onde dépend des coordonnées x et y. La solution de l'équation de Schrödinger est obtenue simplement en combinant deux fonctions d'onde semblables à l'équation 11.42 : une fonction d'onde qui dépend de x et une fonction d'onde qui dépend de y :

$$\psi_{n_x,n_y}(x,y)=\psi_{n_x}(x)\,\psi_{n_y}(y)$$
$$\psi_{n_x}(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{L_x}}\sin\left(\dfrac{n_x\pi x}{L_x}\right) & (0\le x\le L_x)\\ 0 & (x<0 \text{ ou } x>L_x)\end{cases}$$
$$\psi_{n_y}(y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{L_y}}\sin\left(\dfrac{n_y\pi y}{L_y}\right) & (0\le y\le L_y)\\ 0 & (y<0 \text{ ou } y>L_y)\,.\end{cases} \tag{11.45}$$

Les états sont caractérisés par les deux nombres quantiques n_x et n_y. Ces nombres quantiques sont des entiers positifs, indépendants l'un de l'autre. La fonction d'onde à deux dimensions correspond donc à une juxtaposition d'ondes stationnaires perpendiculaires et indépendantes. La figure 11.14 illustre les fonctions d'onde pour quelques états. On voit qu'il faut deux nombres quantiques dans une situation où une particule est confinée dans une région à deux dimensions. Ceci est un résultat général :

Une particule confinée dans un espace à N dimensions est décrite par un état stationnaire. Cet état est spécifié à l'aide de N nombres quantiques.

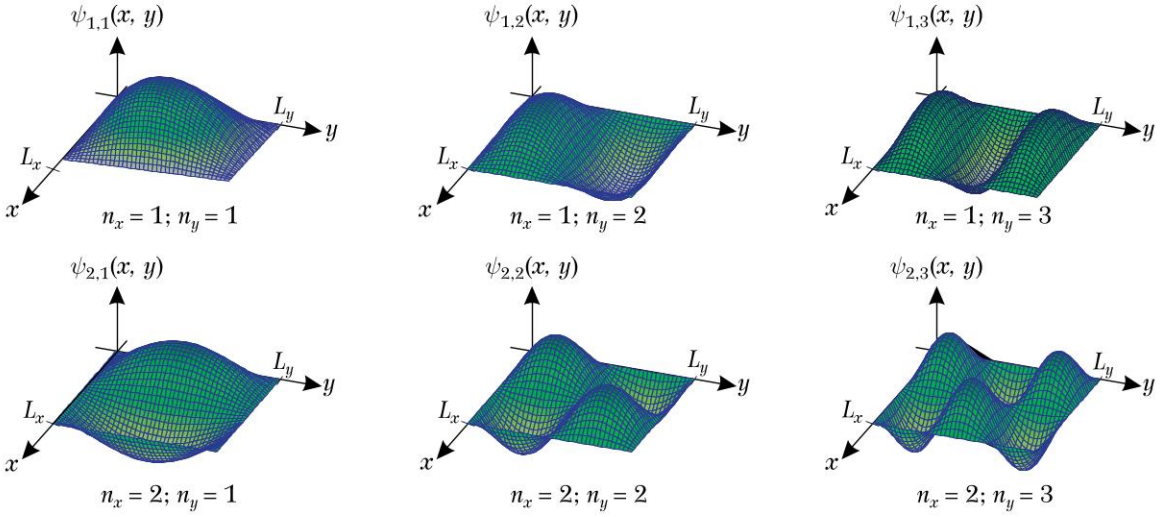


FIGURE 11.14
La fonction d'onde $\psi(x, y)$ de quelques états pour une particule dans un puits de potentiel infini à deux dimensions

En insérant l'équation 11.45 dans l'équation de Schrödinger (*voir l'équation 11.43*), on obtient les valeurs d'énergie des différents états :

$$E_{n_x,n_y} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right). \tag{11.46}$$

Les niveaux d'énergie dépendent des deux nombres quantiques. L'état fondamental (ayant l'énergie minimale) est l'état avec $n_x = n_y = 1$. Dans certaines situations, deux états différents (ayant des nombres quantiques différents) ont la même énergie. On dit alors que les états sont des *états dégénérés*.

Comme dans le cas d'un puits infini à une dimension, l'électron peut passer de l'état fondamental (ayant une énergie $E_{1,1}$) à un état excité, s'il absorbe de l'énergie ΔE, correspondant à la différence entre ces niveaux. De même, l'électron peut faire une transition vers le bas en émettant un photon ayant une énergie ΔE.

Le puits de potentiel peut avoir une autre forme qu'un rectangle. Dans ce cas, il est plus difficile de résoudre l'équation de Schrödinger et d'obtenir l'énergie des états. Au point de vue expérimental, il est possible de produire des puits de potentiel, comme le montre la photo en ouverture du chapitre. Sur cette image, des atomes ont été placés en forme de cercle sur une surface. Les électrons de surface sont confinés dans le cercle. Ce genre de configuration est appelé un

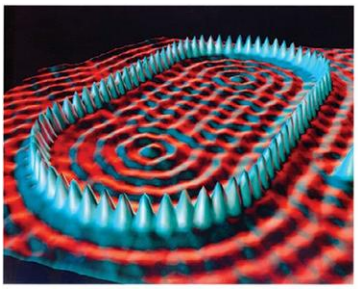


FIGURE 11.15
Le corail quantique en forme de stade, créé par des chercheurs de la compagnie IBM, est un exemple de puits de potentiel à deux dimensions pour les électrons.

corail quantique. Un autre exemple est présenté à la figure 11.15, où des atomes ont été placés en forme de stade pour piéger des électrons.

Un puits infini à trois dimensions

Prenons maintenant une situation où une particule de masse m est confinée dans un espace à trois dimensions en forme de boîte. On analyse la situation dans le cas d'un puits de potentiel infini, illustré à la figure 11.16. La boîte a une longueur L_x, une largeur L_y et une hauteur L_z. L'énergie potentielle est nulle à l'intérieur de la boîte, et elle est infinie à l'extérieur.

Pour spécifier un état confiné à trois dimensions, on a besoin de trois nombres quantiques. Par rapport à la situation du puits de potentiel infini à deux dimensions, on utilise un nombre quantique supplémentaire n_z pour indiquer le numéro du mode de la fonction d'onde dans la direction z. Pour calculer l'énergie d'un état, on généralise l'équation 11.46 en additionnant la contribution de la composante z. L'énergie dépend alors des nombres quantiques et des dimensions du puits de potentiel :

Énergie (puits de potentiel infini [3D])

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right). \qquad (11.47)$$

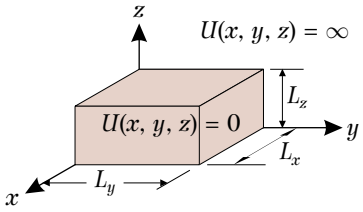


FIGURE 11.16
Un puits infini à trois dimensions, pour confiner une particule dans une boîte

L'état fondamental est l'état pour lequel $n_x = n_y = n_z = 1$, et son énergie est $E_{1,1,1}$. Les autres états sont les états excités.

Dans les situations à deux et à trois dimensions, vous devez être méthodique pour tracer le diagramme des niveaux d'énergie. Voici une technique pour vous aider.

TECHNIQUE 11.1 Le diagramme des niveaux d'énergie

1. Calculez l'énergie de l'état fondamental $E_{1,1,1}$. On peut calculer l'énergie directement en eV en multipliant par c^2/c^2 et en exprimant les dimensions en nm :

$$E_{1,1,1} = \frac{(hc)^2}{8mc^2}\left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2}\right).$$

2. Dans un diagramme des niveaux d'énergie, tracez une ligne horizontale pour $E_{1,1,1}$.

3. Calculez l'énergie des premiers états excités en choisissant des valeurs pour n_x, n_y et n_z. L'énergie augmente moins rapidement lorsque le nombre quantique associé à la plus grande dimension augmente.

4. Pour chaque état, tracez le niveau d'énergie correspondant dans le diagramme.

5. À partir du diagramme des niveaux d'énergie, il est possible d'analyser les transitions quantiques.

EXEMPLE 11.4 Un électron dans une boîte

Un électron est confiné dans une boîte cubique de 2,00 nm de côté. Cette boîte est un puits de potentiel infini à trois dimensions.

a. Tracez le diagramme des niveaux d'énergie qui inclut les quatre niveaux les plus bas.

b. Quelle est la longueur d'onde d'un photon qui produit une transition entre l'état fondamental et le deuxième état excité ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$L_x = L_y = L_z = 2{,}00 \text{ nm}$	E
$m = 511 \times 10^3 \text{ eV}/c^2$	λ

Les niveaux les plus bas sont ceux qui sont associés aux plus petites valeurs des nombres quantiques.

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 11.47, avec $L_x = L_y = L_z = L = 2{,}00$ nm :

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{(hc)^2}{8mc^2L^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2). \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord le terme en dehors des parenthèses, car toutes les valeurs d'énergie sont proportionnelles à ce terme :

$$\frac{(hc)^2}{8mc^2L^2} = \frac{(1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2}{8 \times 511 \times 10^3 \text{ eV}(2{,}00 \text{ nm})^2} = 0{,}094\,0 \text{ eV}. \qquad \text{(ii)}$$

L'état fondamental est $E_{1,1,1}$. Selon les équations (i) et (ii), nous obtenons

$$E_{1,1,1} = 0{,}094\,0 \text{ eV}\,(1^2 + 1^2 + 1^2) = 0{,}282 \text{ eV}. \qquad \text{(réponse)}$$

Nous traçons ce niveau dans le diagramme des niveaux, qui est présenté à la figure 11.17.

Comme la boîte est cubique, l'énergie est la même si on échange deux nombres quantiques. Par exemple,

$$E_{1,1,2} = E_{1,2,1} = E_{2,1,1} = 0{,}094\,0 \text{ eV}\,(1^2 + 1^2 + 2^2)$$
$$E_{1,1,2} = E_{1,2,1} = E_{2,1,1} = 0{,}564 \text{ eV}. \qquad \text{(réponse)}$$

Ce niveau est indiqué dans le diagramme des niveaux d'énergie de la figure 11.17.

Nous calculons d'autres niveaux :

$$E_{1,2,2} = E_{2,1,2} = E_{2,2,1} = 0{,}094\,0 \text{ eV}\,(1^2 + 2^2 + 2^2) = 0{,}846 \text{ eV}$$
$$E_{2,2,2} = 0{,}094\,0 \text{ eV}\,(2^2 + 2^2 + 2^2) = 1{,}13 \text{ eV}$$
$$E_{3,1,1} = E_{1,3,1} = E_{1,1,3} = 0{,}094\,0 \text{ eV}\,(3^2 + 1^2 + 1^2) = 1{,}03 \text{ eV}.$$

On remarque que le niveau $E_{3,1,1}$ est plus bas que le niveau $E_{2,2,2}$. La figure 11.17 montre le diagramme des niveaux pour les quatre niveaux les plus bas.

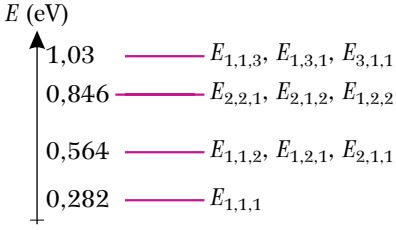


FIGURE 11.17
Le diagramme des niveaux d'énergie pour l'exemple 11.4

SOLUTION b.

Illustrer la situation

La figure 11.18 illustre la transition entre l'état fondamental et le deuxième niveau excité.

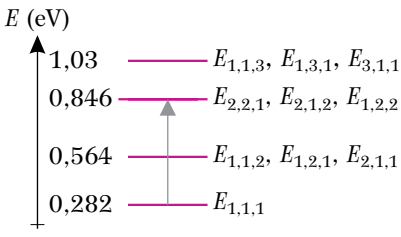


FIGURE 11.18
La transition entre le niveau fondamental et le deuxième niveau excité

Décortiquer le problème

Selon la figure 11.18, le deuxième niveau excité correspond aux états dégénérés dont l'énergie est

$$E_h = E_{2,1,1} = 0{,}846 \text{ eV} . \quad \text{(iii)}$$

L'état inférieur est l'état fondamental :

$$E_b = E_{1,1,1} = 0{,}282 \text{ eV} . \quad \text{(iv)}$$

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 11.29 :

$$\Delta E = E_h - E_b = \frac{hc}{\lambda} . \quad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs :

$$\Delta E = 0{,}846 \text{ eV} - 0{,}282 \text{ eV} = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0{,}564 \text{ eV}} = 2197 \text{ nm} = 2{,}20 \text{ µm} . \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'ordre de grandeur des réponses semble correct. Les énergies sont en eV et la longueur d'onde en µm. Le photon nécessaire à la transition est dans le domaine de l'infrarouge.

11.7 Les puits de potentiel de hauteur finie

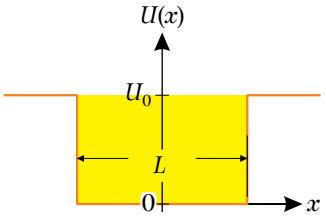


FIGURE 11.19
Le puits de potentiel fini a une hauteur U_0 et une largeur L.

Le puits de potentiel infini est un modèle très simple, mais qui ne représente pas la réalité. Pour obtenir un modèle qui s'approche un peu plus de la réalité, on étudie maintenant une particule dans un puits de potentiel de hauteur finie, comme celui que montre la figure 11.19. On se limite de nouveau à un modèle à une dimension. Le puits a une profondeur U_0 et une largeur L. On place l'axe des x de telle sorte que $x = 0$ se trouve au centre du puits. Le point de référence peut être choisi de telle sorte que $U = 0$ à l'intérieur du puits. La fonction énergie potentielle est alors donnée par l'expression :

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \left(-\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2}\right) \\ U_0 & \left(x < -\frac{L}{2} \text{ ou } x > \frac{L}{2}\right) \end{cases} . \quad (11.48)$$

En plaçant l'axe des x au centre du puits, on obtient une énergie potentielle symétrique par rapport à l'axe des x. Il est alors suffisant de regarder la partie $x > 0$. On obtient la partie $x < 0$ par symétrie.

Contrairement au puits infini, la particule peut avoir assez d'énergie ($E > U_0$) de telle sorte qu'elle n'est pas confinée dans le puits. On va donc étudier séparément les deux possibilités : la particule non confinée ($E > U$) et la particule confinée ($E < U$).

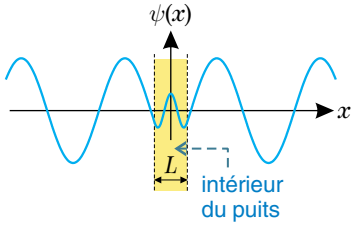


FIGURE 11.20
Une fonction d'onde de la particule lorsque $E > U_0$

La particule non confinée

Supposons d'abord que la particule a suffisamment d'énergie cinétique pour que l'énergie mécanique $E = K + U$ soit plus grande que U_0. La particule a plus d'énergie cinétique si elle se trouve au-dessus du puits (pour $-L/2 \le x \le L/2$), ce qui veut dire qu'elle a une plus grande quantité de mouvement et donc une plus petite longueur d'onde. De plus, comme le module de la vitesse est plus grand à l'intérieur, la probabilité d'observer la particule à cet endroit doit être plus faible. L'amplitude de la fonction d'onde est donc plus petite vis-à-vis du puits. La figure 11.20 montre un exemple de fonction d'onde.

La solution de l'équation de Schrödinger permet d'obtenir une fonction d'onde oscillante dans les trois régions (à gauche du puits, vis-à-vis du puits et à droite du puits). La fonction d'onde et sa dérivée doivent être continues. Contrairement au puits de potentiel, les conditions aux limites ne produisent pas de contrainte sur la longueur d'onde de la fonction d'onde. Ceci veut dire que l'énergie de la particule n'est pas quantifiée lorsque $E > U_0$. On obtient donc le résultat général suivant :

Pour une particule non confinée, l'énergie n'est pas quantifiée.

La particule piégée

On étudie maintenant la situation d'une particule piégée dans le puits de potentiel de hauteur finie. Ceci se produit lorsque $E < U_0$. Dans la région $-L/2 \leq x \leq L/2$, on obtient une fonction semblable à celle qui a été obtenue lors de l'étude du puits infini (*voir l'équation 11.35*) :

$$\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)\ , \tag{11.49}$$

où $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ est le nombre d'onde. La symétrie du puits de potentiel impose que la fonction d'onde est soit une fonction paire $[\psi(-x) = \psi(x),\ \text{donc}\ A = 0]$ ou une fonction impaire $[\psi(-x) = -\psi(x),\ \text{donc}\ B = 0]$.

Contrairement au cas du puits infini, la fonction d'onde peut exister à l'extérieur du puits. En effet, l'équation de Schrödinger dans la région $x > L/2$ est

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2m\,(U_0 - E)}{\hbar^2}\psi(x)\,.$$

Cette équation n'est pas équivalente à l'équation différentielle du mouvement harmonique simple, car le membre droit est positif. L'équation est quand même simple à résoudre ; la solution générale est la somme de deux fonctions exponentielles :

$$\psi(x) = C\,\mathrm{e}^{-\kappa x} + D\,\mathrm{e}^{\kappa x}\,,$$

où C et D sont des constantes d'intégration et

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m\,(U_0 - E)}}{\hbar} = \sqrt{\frac{2mU_0}{\hbar^2} - k^2}\ , \tag{11.50}$$

où k est le nombre d'onde de l'onde stationnaire à l'intérieur du puits.

La fonction d'onde doit tendre vers 0 lorsque $x \to \pm\infty$, car la probabilité de trouver la particule à l'infini est nulle. Pour cette raison, on doit avoir $D = 0$ pour $x > L/2$ et $C = 0$ pour $x < -L/2$. La fonction d'onde à l'extérieur du puits est donc

$$\psi(x) = C\,\mathrm{e}^{-\kappa x} \qquad (x > L/2)\,. \tag{11.51}$$

Par conséquent, la fonction d'onde diminue de façon exponentielle dans la région $x > L/2$.

La fonction d'onde $\psi(x)$ et sa dérivée $\mathrm{d}\psi(x)/\mathrm{d}x$ doivent être continues à $x = L/2$. À cause de la relation 11.50, qui relie k et κ, cela n'est possible que pour certaines valeurs de l'énergie. Il existe donc seulement quelques états pour lesquels $E < U_0$. L'énergie d'une particule piégée est quantifiée.

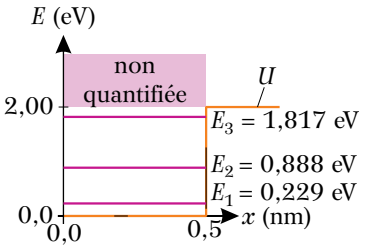


FIGURE 11.21
Les niveaux d'énergie d'un électron dans un puits de 1,00 nm de largeur et de 2,00 eV

Selon la largeur L et la hauteur U_0 du puits, il existe un certain nombre d'états stationnaires, pour lesquels $E < U_0$. Il y a toujours au moins un état, l'état fondamental. La solution complète est plus complexe que dans le cas du puits de potentiel infini. Pour comprendre le résultat, on prend un exemple dans lequel un électron est piégé à l'intérieur d'un puits de largeur $L = 1{,}00$ nm et d'une profondeur $U_0 = 2{,}00$ eV. La figure 11.21 montre les niveaux d'énergie. Dans cet exemple, il existe trois niveaux quantifiés (dont l'énergie est plus faible que la profondeur U_0). Lorsque $E > U_0$, l'énergie n'est plus quantifiée. L'état fondamental a une énergie $E_1 = 0{,}229$ eV, et les états excités ont une énergie $E_2 = 0{,}888$ eV et $E_3 = 1{,}817$ eV.

La figure 11.22 montre la fonction d'onde et la densité de probabilité pour les trois états stationnaires en fonction de x. On remarque que la partie de la fonction d'onde dans le puits de potentiel est une fonction sinusoïdale, alors que la partie à l'extérieur est une décroissance exponentielle. Donc, l'électron peut se trouver à des endroits où l'énergie potentielle est plus grande que l'énergie mécanique. Cette région est appelée la *région classiquement interdite*. De façon classique, une particule devrait rebondir à l'intérieur du puits. Une particule quantique ne rebondit pas. La fonction d'onde pénètre dans la région interdite, et il y a une certaine probabilité de trouver la particule dans la région interdite. De plus, on remarque que plus l'énergie est grande (plus E est près de U_0), plus la probabilité est grande de trouver la particule dans la région classiquement interdite.

Défi animé 11.1
La forme du puits de potentiel influe-t-elle sur la densité de probabilité de la particule piégée ?

Étant donné que la fonction d'onde pénètre dans la région classiquement interdite, la longueur d'onde de la fonction d'onde est plus grande que dans le cas d'un puits de potentiel infini de même largeur. Ceci implique que la quantité de mouvement et donc l'énergie cinétique de la particule est plus faible lorsqu'elle est piégée dans un puits de potentiel fini.

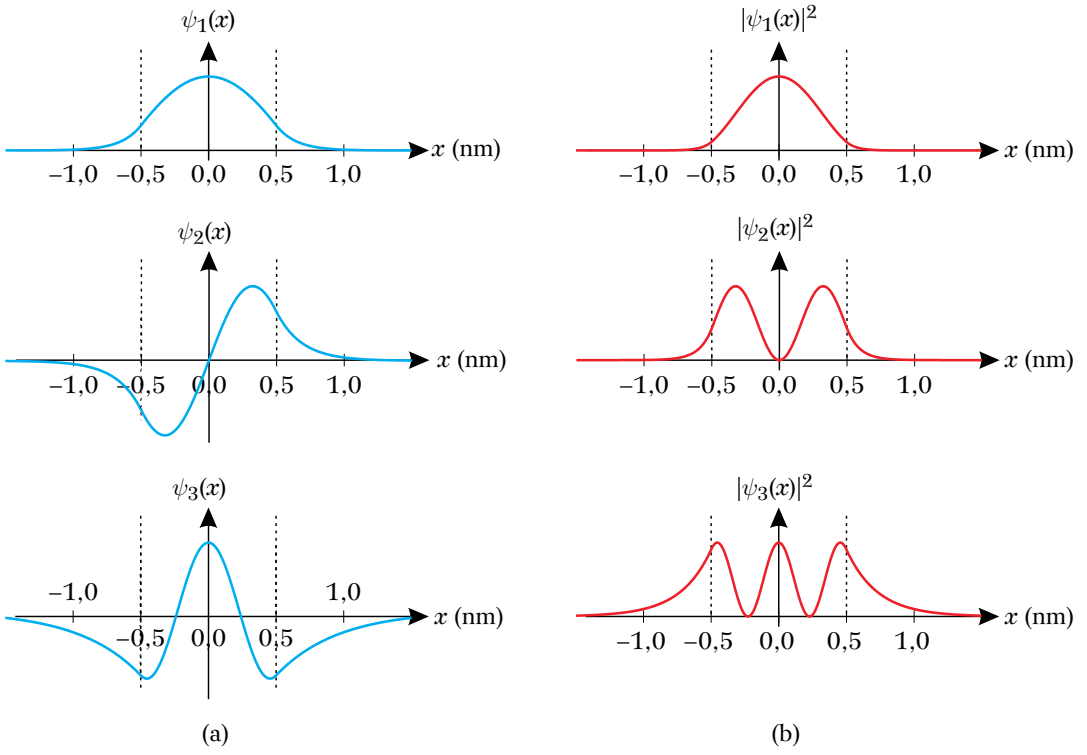
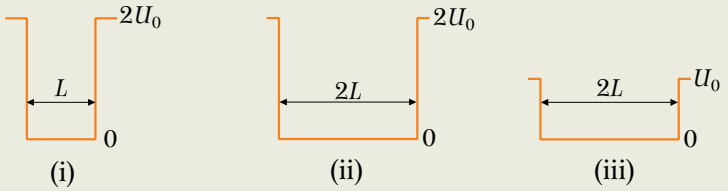


FIGURE 11.22
(a) La fonction d'onde et (b) la densité de probabilité pour les trois états stationnaires d'un électron dans un puits de potentiel de 1,00 nm de largeur et de 2,00 eV de profondeur.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 11.5

La figure suivante montre trois puits de potentiel de hauteur finie. Classez-les par ordre croissant de l'énergie de l'état fondamental.



11.8 L'effet tunnel

À la dernière section, nous avons vu que la fonction d'onde d'une particule n'est pas nulle dans une région où l'énergie potentielle dépasse la valeur de l'énergie mécanique (la région classiquement interdite). Ce comportement produit un effet très différent dans le monde quantique par rapport à ce que l'on connaît en physique classique. Prenons par exemple le chariot de la figure 11.23 qui a une vitesse initiale nulle au point a. On sait qu'il ne pourra pas franchir la colline de droite, car l'énergie mécanique est insuffisante. Le chariot est piégé entre les points a et b. En mécanique quantique, une particule a une certaine probabilité de franchir la colline, étant donné que la fonction d'onde existe dans la région classiquement interdite.

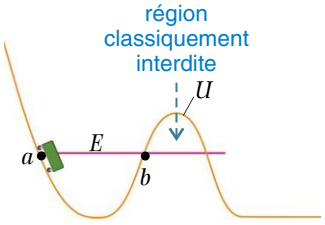


FIGURE 11.23
Un chariot est piégé entre les points a et b, car l'énergie mécanique E est trop faible.

Pour étudier la situation, on analyse une particule quantique piégée dans un puits de potentiel semblable au puits de la section 11.7, mais dont la barrière a une largeur ℓ (*voir la figure 11.24*). Le puits est constitué d'une barrière de hauteur U_0 et de largeur ℓ. La fonction énergie potentielle est

$$U(x) = \begin{cases} U_0 & (L/2 < x < L/2 + \ell \text{ ou } -L/2 - \ell < x < -L/2) \\ 0 & (\text{ailleurs}) \end{cases} . \qquad (11.52)$$

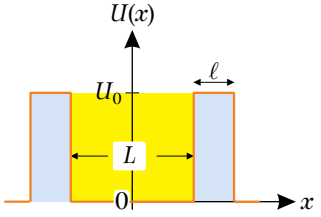


FIGURE 11.24
Un puits de potentiel qui possède une barrière de hauteur U_0 et de largeur ℓ

La position initiale de la particule est $-L/2 \le x \le L/2$. La fonction énergie potentielle est semblable à celle qui a été étudiée à la section 11.7. Pour $E < U_0$, la fonction d'onde est semblable à la fonction d'onde qu'on a obtenue dans le cas du puits fini, pour la région centrale. Lorsque l'énergie E de la particule est plus faible que U_0, la solution de l'équation de Schrödinger donne une fonction d'onde sinusoïdale à l'extérieur de la barrière et une fonction exponentielle décroissante vis-à-vis de la barrière :

$$\psi(x) = \begin{cases} A\sin(kx) + B\cos(kx) & (0 \le x \le L/2) \\ C\,e^{-\kappa x} & (L/2 \le x \le L/2 + \ell) \\ D\sin(kx + \phi) & (x \ge L/2 + \ell) . \end{cases}$$

Les facteurs k (le nombre d'onde) et κ sont les mêmes que ceux qui sont donnés par les équations 11.34 et 11.50 :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{\sqrt{8\pi^2 mE}}{h} \qquad (11.53)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2m\,(U_0 - E)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{8\pi^2 m\,(U_0 - E)}}{h} , \qquad (11.54)$$

où on a remplacé $\hbar$ par $h/2\pi$. Le nombre d'onde est le même des deux côtés de la barrière, étant donné que $U = 0$ dans ces deux régions.

La fonction d'onde et sa dérivée doivent être continues aux frontières $x = L$ et $x = L + \ell$. Ces conditions sont remplies seulement pour certaines valeurs de l'énergie. L'énergie est quantifiée pour les états lorsque $E < U_0$. Les conditions aux limites permettent aussi de calculer les valeurs pour les constantes d'intégration C, D et ϕ (les constantes A et B peuvent être calculées en tenant compte de la condition de normalisation et de la symétrie de la fonction d'onde).

Prenons comme exemple un électron dans un puits de potentiel de hauteur $U_0 = 2{,}00$ eV, de largeur $L = 1{,}00$ nm et dont la largeur de la barrière est $\ell = 0{,}50$ nm. La solution de l'équation de Schrödinger est alors semblable à celle de la section 11.7, avec trois états quantifiés (*voir la figure 11.25*).

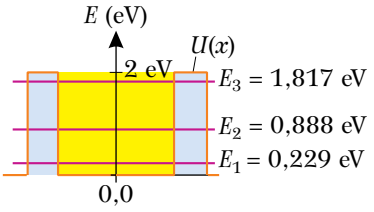


FIGURE 11.25
Les niveaux d'énergie pour un électron dans un puits fini, avec $L = 1{,}00$ nm, $\ell = 0{,}50$ nm et $U_0 = 2{,}00$ eV

La figure 11.26 montre les fonctions d'onde pour les états $n = 2$ et $n = 3$. La fonction d'onde présente une décroissance exponentielle dans la région classiquement interdite, mais cette dernière n'est pas très large, de telle sorte que la fonction d'onde existe à l'extérieur du puits de potentiel. Il existe donc une certaine probabilité que l'électron franchisse la barrière : il y a une fuite de la fonction d'onde. C'est l'*effet tunnel*. Ce phénomène est analogue à la réflexion totale frustrée, vue à la section 5.5. On remarque que l'amplitude de la fonction ψ_3 est plus grande que l'amplitude de ψ_2 à l'extérieur du puits, ce qui veut dire que la probabilité de traverser la barrière est plus grande dans l'état $n = 3$ que dans l'état $n = 2$.

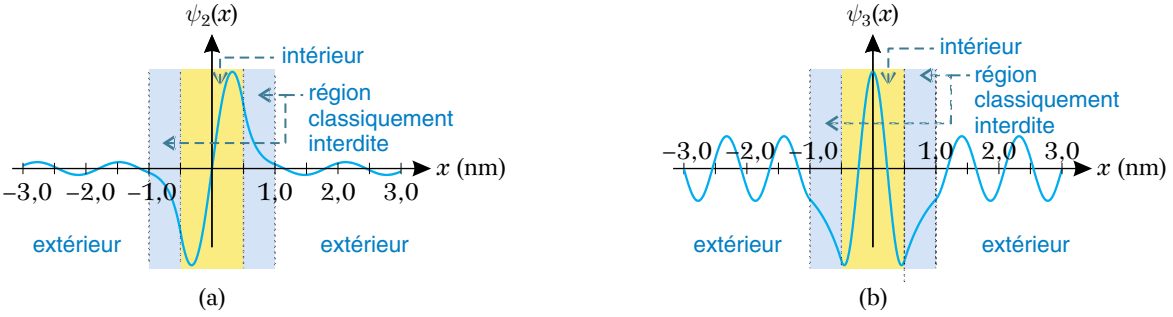


FIGURE 11.26
(a) La fonction d'onde ψ_2 et (b) la fonction d'onde ψ_3, pour un électron piégé dans le puits de potentiel de la figure 11.24, avec $L = 1{,}00$ eV, $\ell = 0{,}50$ eV et $U_0 = 2{,}0$ eV

Soit T la probabilité de traverser la barrière (aussi appelée le *coefficient de transmission*). Cette probabilité est obtenue approximativement par le carré du rapport de la fonction d'onde évaluée à $x = L/2$ et à $x = L/2 + \ell$:

$$T \approx \left| \frac{\psi(L/2+\ell)}{\psi(L/2)} \right|^2 = \left| \frac{C\, e^{-\kappa(L/2+\ell)}}{C\, e^{-\kappa L/2}} \right|^2$$

$$T \approx e^{-2\kappa\ell}\,, \qquad (11.55)$$

Probabilité de traverser une barrière

où κ est donné par l'équation 11.54.

Selon l'équation 11.55, la probabilité est plus grande dans le cas où la barrière n'est pas trop large et lorsque κ est faible, ce qui se produit quand la hauteur de l'énergie de la particule E est près de la hauteur U_0 de la barrière. Puisque la probabilité est donnée par une fonction exponentielle, cette probabilité varie très rapidement si la largeur de la barrière change.

L'effet tunnel est un processus important en physique moléculaire et en physique nucléaire. Nous allons voir au chapitre 13 que l'effet tunnel est responsable de la désintégration de certains noyaux, lorsqu'une particule alpha (un système de deux protons et deux neutrons liés) réussit à franchir la barrière du noyau atomique.

EXEMPLE 11.5 Un électron qui s'échappe

Un électron ayant une énergie cinétique de 0,888 eV se trouve à l'intérieur d'un puits de potentiel, où $U = 0$ à l'intérieur. Le puits de potentiel possède une barrière ayant une hauteur U_0 et une largeur ℓ. Calculez la probabilité que l'électron s'échappe du puits dans les situations suivantes :

a. $U_0 = 2{,}00$ eV et $\ell = 1{,}00$ nm ;
b. $U_0 = 2{,}00$ eV et $\ell = 3{,}00$ nm.

SOLUTION a.

Décortiquer le problème

Dans le puits et à l'extérieur de celui-ci, l'énergie E est égale à l'énergie cinétique K, car $U = 0$ dans ces régions. Il n'y a que dans la région classiquement interdite où $U = U_0$.

Connues	
$E = K = 0{,}888$ eV	$m = 511 \times 10^3$ eV/c^2
$U_0 = 2{,}00$ eV	$\ell = 1{,}00$ nm
Inconnue	
T	

Identifier la clé

La clé est l'équation 11.55 :

$$T \approx e^{-2\kappa\ell}\,, \qquad (i)$$

où κ est donné par l'équation 11.54 :

$$\kappa = \frac{\sqrt{8\pi^2 mc^2\,(U_0 - E)}}{hc}\,, \qquad (ii)$$

et nous avons multiplié par $1 = \sqrt{c^2}/c$ pour effectuer le calcul directement en eV et en nm.

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord κ à l'aide de l'équation (ii) :

$$\kappa = \frac{\sqrt{8\pi^2 \times 511 \times 10^3 \text{ eV}\,(2{,}00 \text{ eV} - 0{,}888 \text{ eV})}}{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}$$

$$= 5{,}40 \text{ nm}^{-1}\,. \qquad (iii)$$

Nous remplaçons ensuite ce résultat dans l'équation (i) :

$$T = e^{-2\times 5{,}40 \text{ nm}^{-1} \times 1{,}00 \text{ nm}} = 2{,}03 \times 10^{-5}\,.$$

(réponse)

Valider la réponse
La probabilité représente environ une chance sur 50 000.

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$U_0 = 2{,}00$ eV $\quad \ell = 3{,}00$ nm	T

Résoudre le problème
Le facteur κ est le même que dans la partie a. Nous utilisons donc le résultat obtenu à l'aide de l'équation (iii) :

$$T = e^{-2\times 5{,}40\ \text{nm}^{-1}\times 3{,}00\ \text{nm}} = 8{,}40\times 10^{-15}\ .$$

(réponse)

Valider la réponse
La probabilité est plus petite que l'unité. On remarque qu'en multipliant par trois la largeur de la barrière, on obtient une probabilité 2×10^9 fois plus petite.

Le microscope à effet tunnel

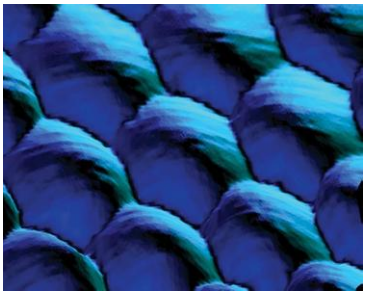


FIGURE 11.27
L'image de la surface d'un échantillon de platine, obtenue à l'aide d'un microscope à effet tunnel

Nous avons vu qu'un microscope optique est limité par la diffraction à une résolution d'environ la grandeur de la longueur d'onde de la lumière. Pour un microscope optique, cela veut dire autour de 400 nm. Un microscope électronique a une meilleure résolution, mais il est aussi limité par la longueur d'onde de De Broglie des électrons utilisés. Ces microscopes ne permettent pas d'observer la surface des atomes.

En 1981, le physicien suisse Heinrich Rohrer (1933-2013) et le physicien allemand Gerd Binnig (1947-) ont découvert que l'effet tunnel* peut être utilisé pour observer la surface d'un échantillon avec une résolution suffisante pour distinguer la surface des atomes. Le *microscope à effet tunnel* produit des images comme celle qui apparaît en ouverture de chapitre ou celle de la figure 11.27, où les atomes de platine sont observés.

Le principe de fonctionnement est assez simple, même si plusieurs détails techniques ont dû être résolus pour développer le microscope à effet tunnel. Le microscope possède une pointe métallique très pointue, avec seulement quelques atomes de largeur. On place la pointe très près de la surface du conducteur qu'on veut étudier (*voir la figure 11.28*). Comme nous l'avons vu à la section 10.3, le travail d'extraction Φ pour qu'un électron quitte un métal est de quelques électrons-volts. On peut donc dire qu'un électron dans un métal est piégé dans un puits de potentiel dont la hauteur est Φ, comme le montre la figure 11.29.

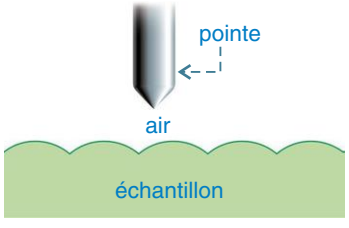


FIGURE 11.28
Le schéma de fonctionnement d'un microscope à effet tunnel

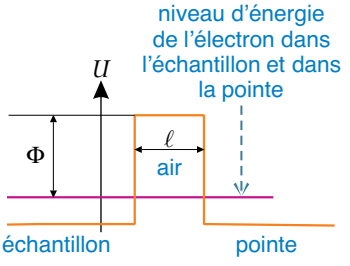


FIGURE 11.29
Le puits de potentiel des électrons à l'intérieur de l'échantillon

* Ces chercheurs ont remporté le prix Nobel de physique en 1986 pour cette découverte.

Pour faire fonctionner le microscope à effet tunnel, la pointe est approchée à une très petite distance, d'environ 0,5 nm, de telle sorte qu'il y a des électrons qui traversent la barrière par effet tunnel. Ces électrons produisent alors un courant électrique (le *courant tunnel*) dans la pointe et dans le microscope. Ce courant change très rapidement lorsque la distance entre la pointe et l'échantillon change. Un ordinateur déplace la pointe au-dessus de la surface en ajustant la hauteur pour que le courant tunnel demeure constant. L'ordinateur produit ensuite des images semblables à celle de la figure 11.27 à partir du mouvement de la pointe. Les microscopes à effet tunnel sont assez sensibles pour mesurer des variations de hauteur de l'ordre de 0,001 nm, ce qui correspond à environ 1 % de la taille d'un atome.

11.9 Le spin et le principe d'exclusion

Dans le prochain chapitre, nous allons étudier les atomes. Un atome correspond à un piège dans lequel plusieurs électrons sont confinés. Lorsque plusieurs électrons se retrouvent dans le même système, il y a un nouveau comportement quantique qui apparaît. Il faut faire intervenir un nouveau nombre quantique, appelé le *spin*.

Le spin d'une particule est décrit par un vecteur $\vec{\mathbf{S}}$ dont le module est

$$S = \sqrt{s\,(s+1)}\,\hbar\,, \tag{11.56}$$

Module du spin

où s est le *nombre quantique de spin* (ou simplement le spin) de la particule.

Le nombre s est une propriété de la particule, comme sa masse et sa charge électrique. Les particules se divisent en deux catégories. Les particules comme les protons, les neutrons et les électrons ont un nombre quantique de spin s qui est un nombre demi-entier. Ces particules sont appelées des *fermions*, en l'honneur du physicien italo-américain Enrico Fermi (1901-1954). La deuxième catégorie inclut les particules qui ont une valeur entière de s. Ce sont les *bosons*, un nom donné en l'honneur du physicien indien Satyendranath Bose (1894-1974). Le photon est un exemple de boson, car son nombre quantique de spin est $s = 1$. Au chapitre 14, nous verrons que les fermions sont associés à la matière, alors que les bosons sont associés aux interactions.

Le vecteur $\vec{\mathbf{S}}$ ne peut pas être mesuré complètement : on peut connaître son module et une de ses composantes par rapport à un axe, qu'on désigne habituellement comme l'axe des z. La composante S_z est quantifiée :

$$S_z = m_s\hbar\,, \tag{11.57}$$

Composante du spin

où m_s est le *nombre quantique magnétique de spin*. De façon générale, une particule dont le nombre quantique de spin est s peut avoir $2s + 1$ valeurs possibles de m_s :

$$m_s = s,\, s-1,\, \ldots,\, -s\,.$$

Étant donné que pour l'électron, $s = 1/2$, les valeurs possibles de m_s pour celui-ci sont $m_s = +1/2$ (qu'on représente par $\uparrow$) et $m_s = -1/2$ (qu'on représente par $\downarrow$). Pour décrire un électron, qu'il soit libre ou piégé, on doit donner la valeur du nombre magnétique de spin m_s.

REMARQUE

Le mot spin fait référence à une rotation, comme si l'électron était une sphère en rotation. Cette image est incorrecte. Le spin est une propriété quantique qui n'a pas d'équivalent en mécanique classique. Il faut voir le spin comme une nouvelle quantité physique, qui est une propriété intrinsèque d'une particule.

Les bosons et les fermions se comportent différemment lorsque plusieurs particules identiques se retrouvent dans un système. Les fermions (et non les bosons) sont soumis à un principe découvert en 1925 par le physicien autrichien Wolfgang Ernst Pauli (*voir la figure 11.30*) :

Principe d'exclusion de Pauli

Deux fermions ne peuvent être dans le même état quantique. Donc, deux fermions ne peuvent avoir les mêmes nombres quantiques.

FIGURE 11.30
Wolfgang Ernst Pauli (1900-1958), physicien autrichien

C'est le *principe d'exclusion de Pauli*, qui a d'abord été formulé pour l'électron en 1925.

Lorsque plusieurs électrons sont confinés dans un puits de potentiel, l'état fondamental ne correspond pas à la configuration où tous les électrons sont au niveau le plus bas. Prenons par exemple un puits de potentiel à une dimension de largeur L, pour lequel l'état d'un électron est spécifié par le nombre quantique n, et l'énergie est donnée par l'équation 11.27 :

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2 \, .$$

La configuration est spécifiée par deux nombres quantiques : n et m_s. Selon le principe d'exclusion de Pauli, deux électrons ne peuvent avoir la même valeur de n et la même valeur de m_s. Dans le cas où trois électrons sont piégés, il y a deux électrons qui peuvent se retrouver dans l'état E_1 : le premier électron avec $n = 1$, $m_s = +1/2$, et le deuxième électron avec $n = 1$, $m_s = -1/2$. On dit alors que le niveau E_1 est rempli. Le troisième électron peut alors se trouver au niveau E_2, avec $n = 2$. Le diagramme des niveaux d'énergie correspondant est illustré à la figure 11.31. Si on néglige l'interaction entre les électrons, l'énergie de l'état fondamental est donc

$$E_{\text{fond}} = E_1 + E_1 + E_2 = \frac{6h^2}{8mL^2} = \frac{3h^2}{4mL^2} \, .$$

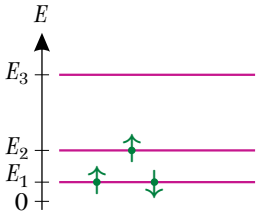


FIGURE 11.31
Le diagramme des niveaux d'énergie pour l'état fondamental de trois électrons piégés dans un puits de potentiel infini

Lorsque des électrons sont confinés dans un puits de potentiel à deux dimensions, il faut trois nombres quantiques : deux nombres pour spécifier l'état spatial de la fonction d'onde de chaque électron et le nombre quantique m_s pour spécifier la composante du spin de chaque électron. Aucun électron ne peut avoir exactement les trois mêmes nombres quantiques qu'un autre électron, selon le principe d'exclusion de Pauli. De même, dans les situations où plusieurs électrons sont confinés dans un piège à trois dimensions, on a besoin de trois nombres quantiques pour spécifier l'état spatial et le nombre quantique m_s pour spécifier la composante du spin pour chacun des électrons. Par exemple, pour des électrons piégés dans une boîte, on a besoin des nombres quantiques n_x, n_y, n_z et m_s.

EXEMPLE 11.6 Plusieurs électrons piégés

Cinq électrons sont placés dans un puits de potentiel infini, dont la largeur est de 1,200 nm. On peut négliger l'interaction entre les électrons.

a. Quelle est l'énergie de l'état fondamental du système ?

b. Quelle est l'énergie minimale nécessaire pour exciter le système ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 11.32 montre le diagramme des niveaux d'énergie pour un puits de potentiel infini.

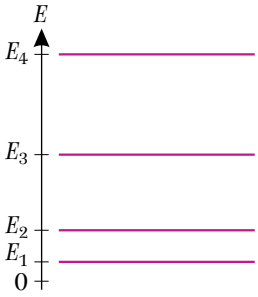


FIGURE 11.32
Le diagramme des niveaux d'énergie pour l'exemple 11.6

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$L = 1{,}20$ nm	E_{fond}
$m = 511\times10^3\ \text{eV}/c^2$	ΔE

SOLUTION a.

Identifier les clés

La première **clé** est l'équation 11.27 afin de calculer l'énergie des niveaux pour un puits de potentiel infini à une dimension :

$$E_n = \frac{(hc)^2}{8mc^2L^2}n^2\ , \qquad \text{(i)}$$

où nous avons multiplié par $1 = c^2/c^2$ pour faire le calcul directement en eV. La deuxième **clé** est le principe d'exclusion de Pauli, qui indique que les électrons ne peuvent pas avoir les mêmes nombres quantiques. Pour chaque valeur de n, on ne peut avoir que deux électrons, avec $m_s = \pm 1/2$.

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'énergie des niveaux à l'aide de l'équation (i) :

$$E_n = \frac{(1240\ \text{eV}\cdot\text{nm})^2}{8\times511\times10^3\ \text{eV}\,(1{,}200\ \text{nm})^2}n^2$$
$$= 0{,}2612\ \text{eV}\ n^2\ . \qquad \text{(ii)}$$

On place les électrons sur les plus bas niveaux possibles, en respectant la deuxième **clé.** L'état fondamental correspond à la configuration de la figure 11.33, avec deux électrons au niveau $n = 1$, deux électrons au niveau $n = 2$ et le cinquième électron au niveau $n = 3$.

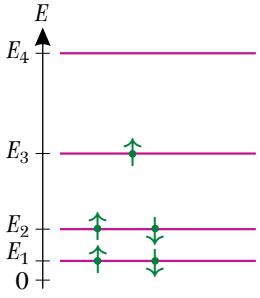


FIGURE 11.33
L'état fondamental du système de l'exemple 11.6

L'énergie du système est alors la somme de l'énergie associée à chaque électron (on néglige l'énergie d'interaction entre les électrons) :

$$E_{\text{fond}} = E_1 + E_1 + E_2 + E_2 + E_3$$
$$= 2\times0{,}2612\ \text{eV} + 2\times0{,}2612\ \text{eV}\times2^2 + 0{,}2612\ \text{eV}\times3^2$$
$$E_{\text{fond}} = 4{,}96\ \text{eV}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 11.29 qui permet de calculer l'énergie d'une transition :

$$\Delta E = E_{\text{h}} - E_{\text{b}} = E_{1\text{e}} - E_{\text{fond}}\ , \qquad \text{(iii)}$$

où $E_{1\text{e}}$ est l'énergie du premier état excité, c'est-à-dire l'énergie de l'état qui a le moins d'énergie en excluant l'état fondamental.

Résoudre le problème

Pour obtenir l'énergie du premier état excité, il faut faire monter un électron à un niveau supérieur. Selon le diagramme de la figure 11.33, il est possible de faire monter un électron du niveau $n = 2$ au niveau $n = 3$, car il reste une possibilité avec $m_s = -1/2$ dans ce dernier niveau. Il est aussi possible de faire monter l'électron du niveau $n = 3$ au niveau $n = 4$ ou un électron du niveau $n = 1$ au niveau $n = 3$, mais cela demande plus d'énergie. Le premier état excité correspond donc à l'état illustré à la figure 11.34.

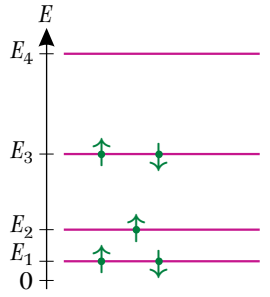


FIGURE 11.34
Le premier état excité du système de l'exemple 11.6

L'énergie de cet état est

$$\begin{aligned} E_{1e} &= 2E_1 + E_2 + 2E_3 \\ &= 2 \times 0{,}261\,2 \text{ eV} + 0{,}261\,2 \text{ eV} \times 2^2 \\ &\quad + 2 \times 0{,}261\,2 \text{ eV} \times 3^2 \\ E_{1e} &= 6{,}27 \text{ eV}. \end{aligned} \qquad \text{(iv)}$$

L'énergie nécessaire pour exciter le système est alors

$$\Delta E = 6{,}27 \text{ eV} - 4{,}96 \text{ eV} = 1{,}31 \text{ eV}. \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'ordre de grandeur semble correct, car les énergies sont de l'ordre de l'électron-volt pour un piège ayant une largeur de l'ordre du nanomètre.

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principes de base de la mécanique quantique appliquée à des modèles simples.

LES DÉFINITIONS

- La **fonction d'onde** $\psi(x)$ permet de calculer la probabilité. La **probabilité** de mesurer la particule entre les points x_1 et x_2 est

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 .$$

- La fonction d'onde doit être normalisée :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 .$$

- Les particules ont une propriété intrinsèque, le **spin**, représenté par le vecteur $\vec{\mathbf{S}}$.
  - Le **nombre quantique de spin** s permet de calculer le module du vecteur $\vec{\mathbf{S}}$:

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar .$$

  - La composante du spin est obtenue à l'aide du **nombre magnétique de spin** m_s :

$$S_z = m_s\hbar \qquad (m_s = s,\ s-1,\ \ldots,\ -s) ,$$

  - Les **bosons** sont les particules avec s entier.
  - Les **fermions** sont les particules avec s demi-entier.
  - L'électron est un fermion, avec $s = 1/2$. Il y a deux états de spin possibles : $m_s = +1/2$ ou $m_s = -1/2$.

LES LOIS ET LES PRINCIPES

- La fonction d'onde $\psi(x)$ est la solution de l'**équation de Schrödinger indépendante du temps** :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) ,$$

où $U(x)$ est la fonction énergie potentielle et E, l'énergie mécanique.

- Une particule confinée dans une région est décrite par une fonction d'onde stationnaire. C'est un **état stationnaire**.
- L'énergie est quantifiée pour les états stationnaires.
- En N dimensions, la partie spatiale de l'état stationnaire est spécifiée par N nombres quantiques.
- Une **transition quantique** se produit lorsqu'une particule change de niveau d'énergie en absorbant ou en émettant de l'énergie. L'énergie de la transition entre les niveaux E_{n_h} et E_{n_b} est

$$\Delta E = E_{n_h} - E_{n_b} = \frac{hc}{\lambda} .$$

- Les fermions sont soumis au **principe d'exclusion de Pauli** : deux fermions ne peuvent pas être dans le même état quantique. Ils ne doivent pas avoir les mêmes nombres quantiques.

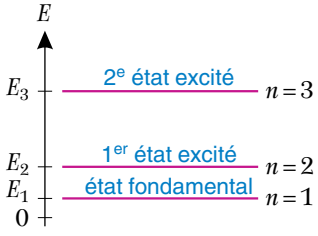
LES RÉSULTATS

- Le **puits de potentiel infini à une dimension** de largeur L
  - Les niveaux d'énergie :

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2}n^2 .$$

  - La fonction d'onde (pour $0 \leq x \leq L$) :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$



- Le **puits de potentiel infini à deux dimensions** de longueur L_x et de largeur L_y
  - Les niveaux d'énergie :

$$E_{n_x,n_y} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right).$$

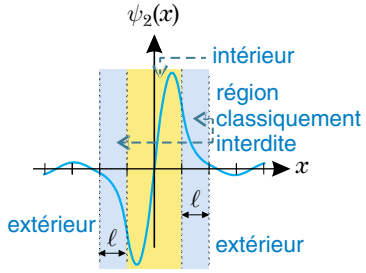
  - Lorsque deux valeurs de nombres quantiques donnent la même énergie, le niveau d'énergie est dégénéré.
- Le **puits de potentiel infini à trois dimensions** de longueur L_x, de largeur L_y et de hauteur L_z

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2}\right).$$

- L'**effet tunnel**
  - La fonction d'onde peut entrer dans une région classiquement interdite.
  - La probabilité de traverser une barrière de hauteur U_0 et de largeur ℓ est

$$T \approx \mathrm{e}^{-2\kappa\ell}$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{8\pi^2 m\,(U_0 - E)}}{h}.$$



QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

Section 11.1 La fonction d'onde

Q1 La figure 11.35 montre la fonction d'onde d'une particule. Placez les positions illustrées par ordre croissant de la probabilité d'y trouver la particule.

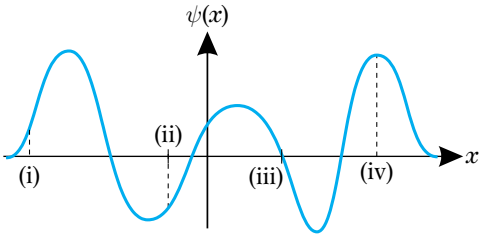


FIGURE 11.35 • Question 1

Q2 La fonction d'onde d'un électron est illustrée à la figure 11.36. Tracez qualitativement la densité de probabilité $\Pi(x)$.

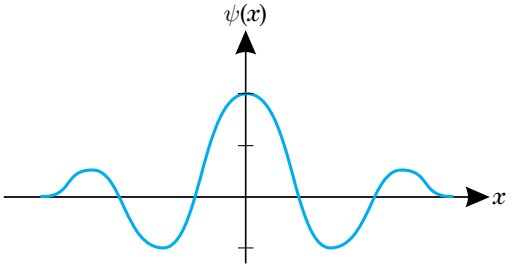


FIGURE 11.36 • Question 2

E3 Montrez que pour un nombre réel Φ :

a. $\cos\Phi = \dfrac{e^{i\Phi} + e^{-i\Phi}}{2}$;

b. $\sin\Phi = \dfrac{e^{i\Phi} - e^{-i\Phi}}{2i}$.

E4 La fonction d'onde d'un électron est donnée par l'expression :

$$\psi(x) = \begin{cases} \alpha & (-L < x < L) \\ 0 & (\text{ailleurs}) \end{cases} .$$

a. Tracez le graphique de $\psi(x)$ en fonction de la position x.

b. Déterminez la valeur du paramètre α.

c. Déterminez la probabilité de présence de la particule entre $x = 0$ et $x = L/2$.

P5 La fonction d'onde d'un électron est donnée par l'expression :

$$\psi(x) = \begin{cases} \beta\left(\dfrac{L}{2} - \left|x - \dfrac{L}{2}\right|\right) & (0 \le x \le L) \\ 0 & (\text{ailleurs}) \end{cases} .$$

a. Déterminez la valeur de la constante β.

b. Déterminez la probabilité de présence de la particule entre $x = \dfrac{L}{4}$ et $x = \dfrac{3L}{4}$.

c. Tracez la courbe de la densité de probabilité $\Pi(x)$.

P6 La fonction d'onde d'un électron est donnée par l'expression :

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax\, e^{-x/a_0} & (x \ge 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} ,$$

où A est une constante de normalisation et a_0, une autre constante.

a. Déterminez la constante de normalisation.

b. À quel endroit la probabilité de détecter l'électron est-elle la plus grande ?

c. Quelle est la position moyenne de l'électron ?

Section 11.2 L'équation de Schrödinger

P7 Un oscillateur harmonique correspond à une particule soumise à une énergie potentielle équivalente à celle d'un système bloc-ressort. Pour une particule de masse m reliée à un ressort ayant une constante de rappel k, l'énergie potentielle est donnée par l'expression :

$$U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 ,$$

où $\omega = \sqrt{k/m}$ est la fréquence angulaire de l'oscillateur.

a. Vérifiez que la fonction d'onde $\psi(x) = A\, e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$ est une solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps.

b. Quelle est l'énergie de l'oscillateur harmonique décrit par cette fonction d'onde ?

Section 11.4 L'énergie d'une particule confinée à une dimension

Q8 La figure 11.37 montre quatre puits de potentiel infini dans lesquels un électron est piégé. Classez les puits de potentiel par ordre croissant :

a. de l'énergie de l'état fondamental ;

b. de l'énergie du premier état excité.

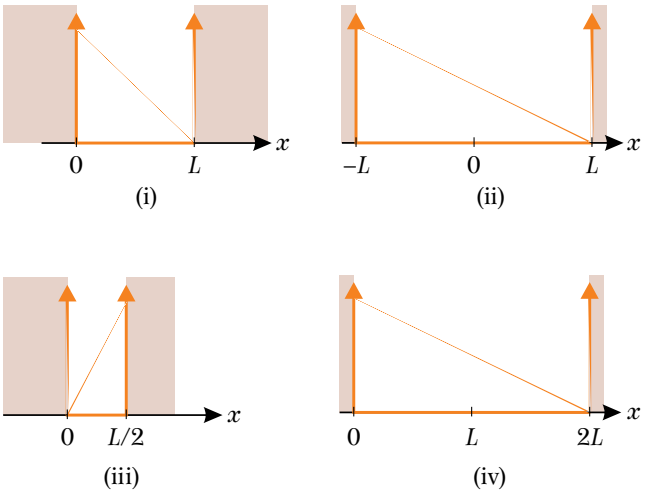


FIGURE 11.37 • Question 8

Q9 Un proton et un électron sont piégés dans des puits de potentiel ayant la même largeur L. Quelle particule a la plus faible énergie lorsqu'elle se trouve dans son état fondamental ?

Q10 La figure 11.38 illustre le diagramme des niveaux d'énergie pour un électron dans un puits de potentiel infini. Le diagramme montre cinq transitions possibles d'un état excité à un état inférieur. Classez les transitions par ordre croissant de la longueur d'onde du photon émis.

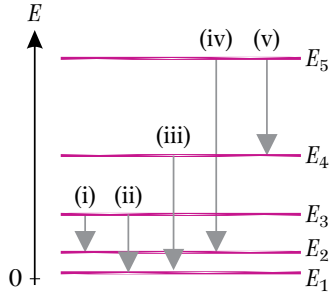


FIGURE 11.38 • Question 10

E11 Un puits de potentiel infini a une largeur de 0,540 nm. Il contient un électron piégé qui se trouve dans son deuxième état excité.

a. Quelle est l'énergie de l'électron ?

b. Quelle est la variation d'énergie de l'électron lorsque celui-ci revient à son état fondamental ?

c. Quelles sont les longueurs d'onde des photons que cet électron peut émettre en revenant à son état fondamental ?

E12 Un photon de 92,36 nm est absorbé par un électron dans son état fondamental. L'électron est piégé dans un puits de potentiel infini d'une largeur de 0,820 nm. Dans quel état se trouve alors l'électron ?

E13 La largeur d'un puits de potentiel infini est de 0,455 nm.

a. Tracez le diagramme des niveaux d'énergie pour un électron se trouvant dans ce puits. Illustrez les niveaux jusqu'au cinquième état excité et indiquez les transitions pour lesquelles un photon est émis.

b. Combien de transitions produisant un photon sont possibles entre les différents états illustrés dans ce diagramme ?

P14 Un électron est piégé dans un puits de potentiel infini ayant une largeur de 2,00 nm. L'électron est initialement dans son état fondamental. Déterminez l'état de l'électron si celui-ci absorbe un photon ayant une longueur d'onde :

a. de 549 nm ;

b. de 720 nm ;

c. de 1,648 µm.

P15 Un électron se trouve au troisième état excité d'un puits de potentiel infini. On observe deux photons émis lorsque l'électron retourne à son état fon-damental. On observe d'abord un photon ayant une longueur d'onde de 150 nm, puis un photon ayant une longueur d'onde de 600 nm. Quelle est la largeur du puits ?

P16 Une particule est piégée dans un puits de potentiel infini ayant une largeur de 15,00 fm. Deux états successifs ont des énergies respectivement de 8,194 MeV et de 14,57 MeV.

a. Quelle est l'énergie de l'état fondamental ?

b. Quelle est la masse de la particule ? Exprimez la réponse en MeV/c^2.

Section 11.5 La fonction d'onde d'une particule piégée à une dimension

Q17 Un électron est piégé dans un puits de potentiel infini. L'énergie potentielle est nulle pour $0 \leq x \leq L$. L'électron se trouve dans un état excité. De plus, on trouve quatre endroits où la densité de probabilité de l'observer est maximale et égale à Π.

a. Tracez la fonction d'onde.

b. Quelle est la valeur du nombre quantique n ?

c. À combien d'endroits, à l'intérieur du puits de potentiel, la densité de probabilité est-elle nulle ?

d. À combien d'endroits la densité de probabilité est-elle égale à $\Pi/2$?

Q18 Un proton et un électron sont piégés dans des puits de potentiel de même largeur L. Les deux particules sont dans leur état fondamental. Pour un point au centre de chaque puits, quel est le rapport des deux fonctions d'onde $\psi_p/\psi_é$?

Q19 On veut mesurer la probabilité de trouver un électron entre $x = 0{,}45L$ et $x = 0{,}55L$ lorsque ce dernier est piégé dans un puits de potentiel infini situé entre $x = 0$ et $x = L$. L'électron passe de l'état fondamental au premier état excité. Sans faire de calcul exact, déterminez si la probabilité recherchée augmente, diminue ou reste la même.

E20 La figure 11.39 montre la fonction d'onde d'un électron piégé dans un puits de potentiel infini. L'électron a une énergie de 3,40 eV.

a. Quelle est la largeur du puits de potentiel ?

b. Quelle est la plus petite longueur d'un photon émis lorsque l'électron retourne dans son état fondamental ?

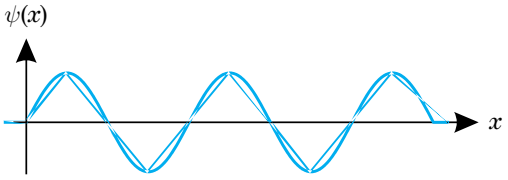


FIGURE 11.39 • Exercice 20

P21 Un électron est piégé dans un puits de potentiel infini, situé entre $x = 0$ et $x = L$. L'électron est dans l'état $n = 4$.

a. À quels endroits la probabilité de trouver l'électron est-elle la plus grande ?

b. Quelle est la probabilité de trouver l'électron entre $x = 0{,}100L$ et $x = 0{,}300L$?

P22 Un puits de potentiel est situé entre $x = 0$ et $x = 1{,}200$ nm. La fonction d'onde de l'électron piégé est nulle pour $x = 0{,}600$ nm et pour $x = 0{,}800$ nm. Il n'y a pas de position de probabilité nulle entre ces deux points.

a. Quelle est la longueur d'onde de l'électron dans cet état ?

b. Dans quel état l'électron se trouve-t-il ?

c. Quelle est la plus grande longueur d'onde d'un photon que peut émettre cet électron lors d'une transition à partir de cet état ?

Section 11.6 Les puits de potentiel à deux dimensions et à trois dimensions

Q23 Un puits de potentiel infini rectangulaire a une longueur $L_x = L$ et une largeur $L_y = 2L$. Classez les états suivants par ordre croissant de l'énergie : $E_{1,1}$, $E_{2,1}$, $E_{1,2}$ et $E_{2,2}$.

Q24 Une particule est confinée dans un puits de potentiel rectangulaire infini. Pour les états suivants, indiquez à combien d'endroits dans le puits de potentiel la probabilité de détecter la particule est maximale :

a. $n_x = 1$, $n_y = 1$;

b. $n_x = 2$, $n_y = 1$;

c. $n_x = 3$, $n_y = 2$.

E25 Un puits de potentiel infini carré ($L_x = L_y = 0{,}950$ nm) contient un électron dans un état stationnaire.

a. Quelle énergie possède cet électron dans les six premiers états stationnaires ?

b. Parmi ces états, quels sont les états dégénérés ?

c. Illustrez le diagramme des niveaux d'énergie pour les niveaux trouvés en **a.**

E26 Un électron est confiné dans une boîte rectangulaire à trois dimensions dont les dimensions sont $L_x = 1{,}20$ nm, $L_y = 1{,}20$ nm et $L_z = 1{,}80$ nm.

a. Quelle est l'énergie de l'état fondamental ?

b. Quelle est l'énergie du premier état excité ?

c. Quelle est la longueur d'onde du photon qui permet à l'électron de passer de l'état fondamental au premier état excité ?

P27 Un corail quantique rectangulaire a une longueur $L_x = 0{,}500$ nm et une largeur $L_y = 1{,}00$ nm. Un électron est piégé dans ce corail.

a. Tracez le diagramme des niveaux d'énergie pour ce corail, jusqu'aux états dégénérés les plus bas.

b. Quelle est l'énergie que doit absorber l'électron pour atteindre un des états dégénérés les plus bas à partir de l'état fondamental ?

L'électron est dans un de ces états dégénérés. Il effectue une transition vers un niveau inférieur.

c. Quelle est la plus grande longueur d'onde possible pour le photon émis ?

d. Quelle est la plus petite longueur d'onde possible pour le photon émis ?

P28 Un électron est confiné dans un puits de potentiel infini carré, ayant un côté L. On déplace un détecteur dans le puits. Lorsqu'on déplace le détecteur dans la direction x, on observe que les maximums de probabilité sont séparés de $L/3$. Lorsqu'on le déplace dans la direction y, on observe que les maximums de probabilité sont séparés de $L/2$.

a. Écrivez l'expression de la fonction d'onde de l'électron.

b. Quelle est l'énergie de l'électron dans cet état ?

Section 11.7 Les puits de potentiel de hauteur finie

E29 Quatre puits de potentiel ont les propriétés suivantes :

puits	U_0 (eV)	L (nm)
(i)	5,00	1,00
(ii)	10,00	0,500
(iii)	5,00	0,750
(iv)	10,00	0,750

Placez par ordre croissant l'énergie de l'état fondamental d'un électron confiné dans ces puits.

E30 Un électron piégé dans un puits de potentiel fini possède une énergie de 2,13 eV, dans l'un de ses états stationnaires. Quel est le nombre d'onde associé à sa fonction d'onde ? Exprimez votre réponse en nm^{-1}.

E31 Un électron est confiné dans le puits de potentiel illustré à la figure 11.40. La largeur du puits est $L = 0{,}500$ nm, et sa hauteur est $U_0 = 2{,}00$ eV. L'électron est initialement dans l'état fondamental.

a. Quelles sont les longueurs d'onde d'un photon pouvant être absorbé par l'électron, de telle sorte qu'il reste piégé dans le puits de potentiel ?

b. Quelles sont les longueurs d'onde d'un photon pouvant être absorbé par l'électron, de telle sorte qu'il s'échappe du puits ?

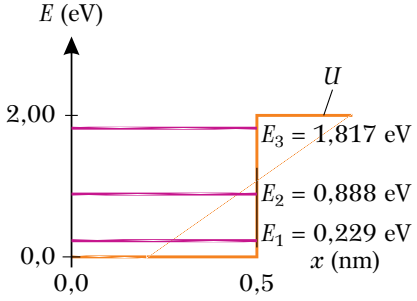


FIGURE 11.40 • Exercices 31 et 32

E32 Un électron libre ayant une énergie cinétique de 1,250 eV s'approche du puits de potentiel illustré à la figure 11.40, dont la hauteur est $U_0 = 2{,}000$ eV. Lorsque l'électron se trouve au-dessus du puits, il émet un photon et tombe dans le puits dans l'état fondamental. Quelle est la longueur d'onde du photon émis ?

Section 11.8 L'effet tunnel

Q33 Trois électrons de même énergie sont confinés dans trois puits de potentiels distincts, dont les hauteurs et largeurs sont identiques, mais qui sont définis par des barrières de largeurs différentes : $\ell_{(i)} = \ell$, $\ell_{(ii)} = 1{,}2\ell$ et $\ell_{(iii)} = 1{,}1\ell$. Classez ces trois situations par ordre croissant de la probabilité que l'électron traverse la barrière par effet tunnel.

Q34 Une particule est piégée dans un puits de potentiel, dont la hauteur est U_0 et la largeur de la barrière est ℓ. La hauteur de la barrière augmente graduellement. De quelle façon la probabilité qu'a la particule de traverser la barrière change-t-elle ?

Q35 Un proton et une particule alpha sont dans des puits de potentiel ayant la même hauteur U_0 et la même largeur ℓ. La particule alpha a une masse quatre fois plus grande que celle du proton. Les particules ont la même énergie cinétique. Quelle particule a la plus grande probabilité de franchir la barrière ?

E36 Un électron piégé dans un puits de potentiel a une énergie cinétique de 1,10 eV. La barrière du puits de potentiel a une hauteur de 1,40 eV et une largeur de 1,500 nm.

a. Quelle est la probabilité que l'électron traverse la barrière ?

b. Quelle est l'énergie cinétique de l'électron à l'extérieur du puits de potentiel ?

E37 Une barrière de potentiel a une hauteur de 5,000 eV et une largeur de 3,20 nm. Quelle est l'énergie des électrons si le coefficient de transmission est de $1{,}20 \times 10^{-6}$?

P38 Dans un microscope à effet tunnel, les électrons rencontrent une barrière ayant une hauteur de 4,20 eV plus élevée que leur énergie. Par quel facteur le coefficient de transmission diminue-t-il lorsque la distance entre la surface de l'échantillon et la pointe de la sonde de l'appareil augmente de 0,15 nm ?

Section 11.9 Le spin et le principe d'exclusion

Q39 Des électrons sont confinés par un potentiel infini dans une région carrée. La figure 11.41 (*voir la page suivante*) montre des diagrammes de niveaux d'énergie. Quelles sont les configurations physiquement possibles ?

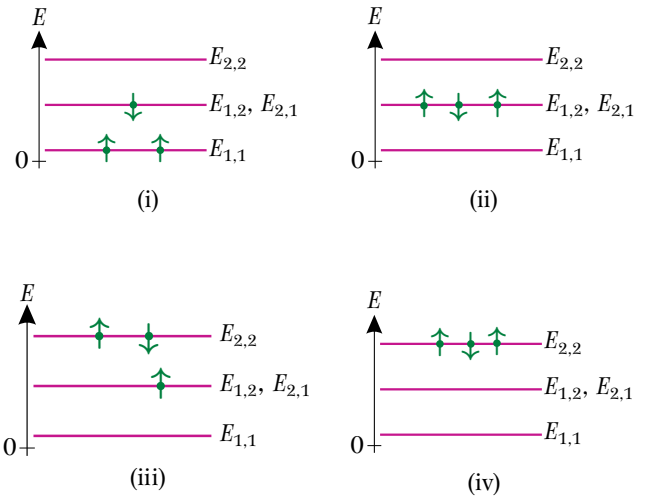


FIGURE 11.41 • Question 39

E40 Un puits de potentiel rectangulaire a une longueur $L_x = 0{,}500$ nm et une largeur $L_y = 1{,}000$ nm. Cinq électrons sont piégés dans ce puits. On néglige l'énergie d'interaction des électrons.

a. Quelle est l'énergie de l'état fondamental du système ?

b. Quelle est l'énergie du premier état excité ?

c. Quelle est l'énergie du second état excité ?

E41 Six électrons sont confinés dans une boîte cubique ayant un côté de 0,700 nm. On néglige l'interaction entre les électrons.

a. Tracez le diagramme des niveaux d'énergie avec la configuration des électrons correspondant à l'état fondamental du système.

b. Quelle est la longueur d'onde d'un photon permettant au système d'atteindre son premier état excité ?

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

11.1 **a.** Le point a **b.** Le point b	Le carré du module de la fonction d'onde permet de calculer la densité de probabilité. La probabilité est plus grande lorsque la valeur absolue de la fonction d'onde est plus grande, et la probabilité est nulle lorsque la fonction d'onde est nulle.
11.2 $v_1 < v_3 < v_2 = v_4$	Selon la relation de De Broglie, $\lambda = h/p = h/(mv)$. Donc, plus la longueur d'onde est petite, plus la vitesse est grande. L'amplitude de la fonction d'onde n'est pas un facteur pour obtenir le module de la vitesse.
11.3 Le photon (i) et le photon (iii)	L'électron est initialement au niveau $n = 1$. Les transitions possibles font intervenir une énergie $\Delta E = 0{,}5$ eV (vers le niveau $n = 2$) et $\Delta E = 1{,}5$ eV (vers le niveau $n = 3$).
11.4 **a.** 10 points	L'onde stationnaire du mode n possède n ventres, où la probabilité est maximale.
b. 11 points	L'onde stationnaire possède $n + 1$ nœuds, en incluant les extrémités. Comme la fonction d'onde est nulle à ces endroits, la probabilité est nulle.
11.5 (iii) < (ii) < (i)	Plus la particule est confinée et plus la longueur d'onde doit être petite, ce qui produit une énergie cinétique plus importante. Dans un puits de potentiel plus large, la particule est moins confinée. De plus, dans le cas d'un puits de potentiel moins élevé, la fonction d'onde entre plus à l'intérieur de la région classiquement interdite, ce qui permet d'avoir une plus grande longueur d'onde et une énergie cinétique plus faible.

Chapitre 12

La physique atomique

Buts du chapitre

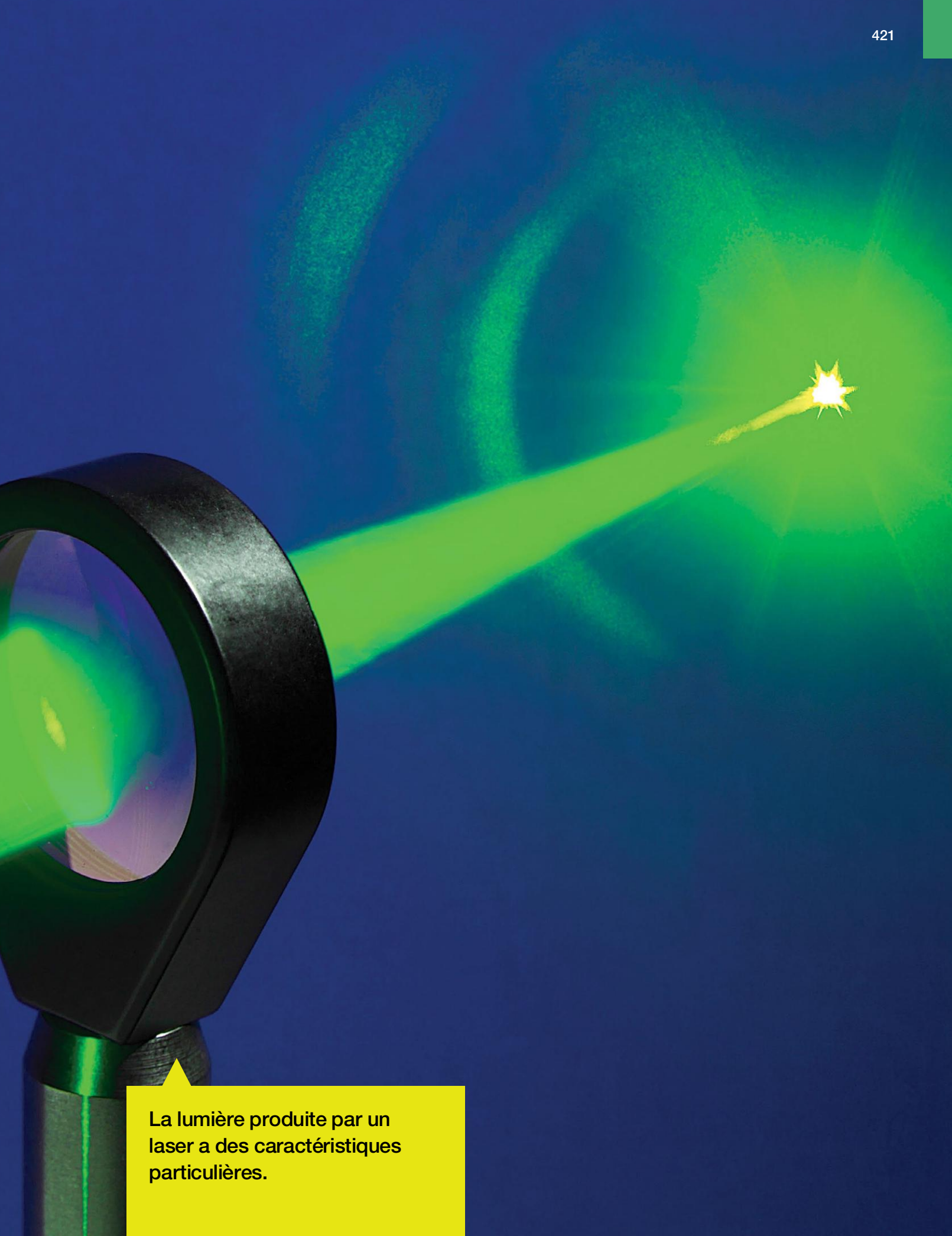
Dans ce chapitre, on étudie les atomes à partir des principes de la mécanique quantique. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de calculer la longueur d'onde des raies d'émission de l'atome d'hydrogène ;
- d'utiliser les fonctions d'onde de l'atome d'hydrogène ;
- d'expliquer comment l'interaction magnétique influe sur les niveaux d'énergie ;
- de connaître la configuration de l'état fondamental des atomes ;
- d'expliquer les principes du fonctionnement des lasers.

Préalables

Ce chapitre applique les concepts de mécanique quantique aux atomes. Revoyez :

- la notion de photons et les ondes de matière, présentées aux sections 10.1 et 10.6 ;
- la fonction d'onde et l'équation de Schrödinger, étudiées aux sections 11.1 et 11.2 ;
- la particule dans les puits de potentiel, analysée aux sections 11.4 à 11.6 ;
- le spin et le principe d'exclusion, présentés à la section 11.9.



La lumière produite par un laser a des caractéristiques particulières.

Dans le dernier chapitre, nous avons étudié les pièges à électrons. Lorsqu'une particule quantique est confinée dans une région, la fonction d'onde doit être une onde stationnaire et l'énergie est quantifiée. Cette analyse conduit à l'étude de la structure interne des atomes. Dans un atome, les électrons sont confinés par la force électrique produite par les protons du noyau et les autres électrons de l'atome.

L'interaction entre les électrons et les protons dans un atome est complexe. Pour cette raison, on commence par étudier l'atome le plus simple : l'atome d'hydrogène, qui ne contient qu'un proton et un électron. L'interaction entre ces deux particules est assez simple pour que l'équation de Schrödinger soit résolue exactement. Les résultats obtenus dans le dernier chapitre peuvent être appliqués : l'électron dans l'atome est décrit par une fonction d'onde stationnaire, et l'état spatial du système est spécifié à l'aide de trois nombres quantiques. Pour les autres atomes, l'interaction entre les électrons fait en sorte qu'on ne peut résoudre l'équation de Schrödinger de façon exacte. Par contre, en appliquant le principe d'exclusion de Pauli, on peut obtenir les configurations des états fondamentaux.

Pour sonder la structure interne des atomes, on a recours à la spectroscopie. En étudiant la lumière émise et absorbée par les atomes, on peut obtenir de l'information sur leur état. Nous avons vu au dernier chapitre qu'un électron qui change d'état émet ou absorbe un photon ayant l'énergie correspondant à la différence d'énergie entre les deux états. Ceci permet d'obtenir l'information voulue sur la structure interne des atomes. De plus, en appliquant une force extérieure, on peut modifier l'état de l'atome, ce qui change le spectre. C'est le principe de fonctionnement de la résonance magnétique, où un champ magnétique extérieur intense est appliqué.

La photo présentée en ouverture de chapitre montre la lumière produite par un laser. Cette lumière, qui a des caractéristiques particulières, est produite en contrôlant l'état des atomes.

12.1 Les raies spectrales

En utilisant un prisme ou un réseau de diffraction, on est en mesure de décomposer la lumière et d'obtenir un spectre. Les objets lumineux peuvent présenter deux types de spectre. La lumière qui provient d'une ampoule ou du Soleil montre un spectre continu. Comme nous l'avons vu à la section 10.2, les objets chauds émettent un rayonnement thermique, qui dépend de la température de l'objet. Des corps noirs à la même température émettent le même rayonnement, quelle que soit leur composition. On ne peut donc pas utiliser le spectre d'un objet chaud pour obtenir de l'information sur les atomes qui le composent.

D'autre part, la lumière produite par les lampes fluorescentes présente un spectre discret, avec des raies de couleur. Pour obtenir ce type de spectre, on place un gaz ou des vapeurs métalliques à faible pression à l'intérieur d'un tube dans lequel on applique une haute tension. Le spectre obtenu dépend du gaz utilisé. Les lampes au néon des enseignes (lumière rouge) et les lampes au sodium (lumière jaune) sont d'autres exemples de lumières présentant un spectre discret. La figure 12.1 montre quelques exemples de spectres dans le domaine du visible. Étant donné que chaque élément produit un spectre caractéristique, on peut utiliser la spectroscopie pour identifier des éléments. De même, il doit être possible, à partir de la lumière d'un spectre, d'obtenir de l'information sur la structure de l'atome qui a émis cette lumière.

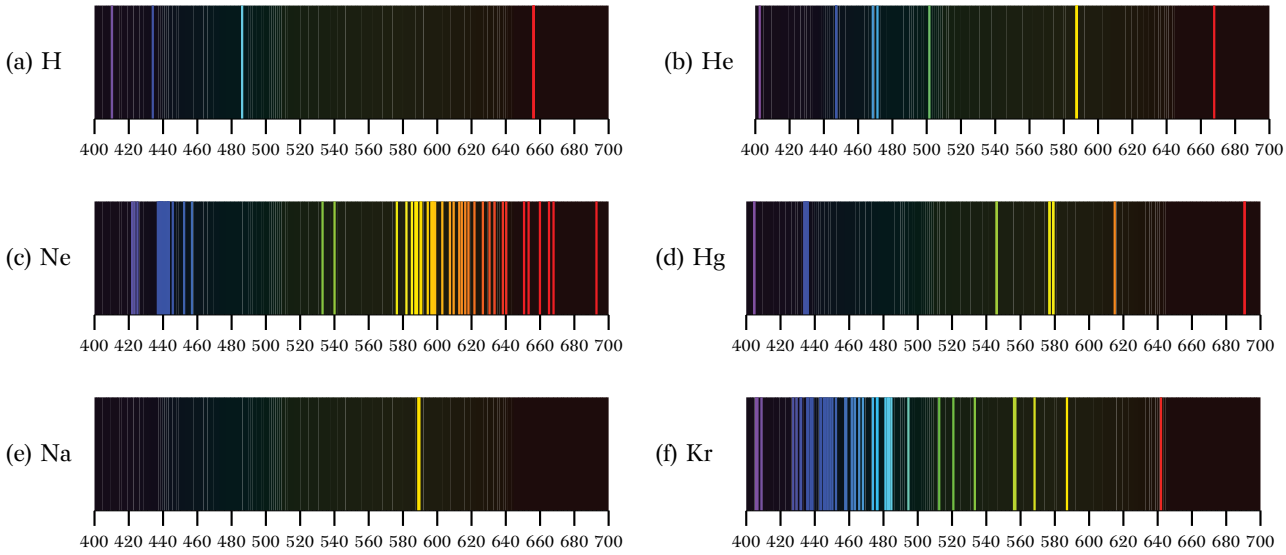


FIGURE 12.1
Le spectre d'émission visible de quelques atomes avec les longueurs d'onde, données en nanomètres ; (a) pour l'hydrogène ; (b) pour l'hélium ; (c) pour le néon ; (d) pour le mercure ; (e) pour le sodium ; (f) pour le krypton.

On peut aussi obtenir de l'information à l'aide d'un spectre d'absorption. On éclaire un échantillon d'un gaz à basse pression avec une lumière ayant un spectre continu. Les atomes du gaz absorbent alors certaines longueurs d'onde de façon caractéristique. Lorsqu'on analyse le spectre, on obtient un spectre continu dans lequel certaines longueurs d'onde sont manquantes. Comme le montre la figure 12.2, les raies manquantes dans le spectre d'absorption ont la même longueur d'onde que les raies du spectre d'émission du même gaz.

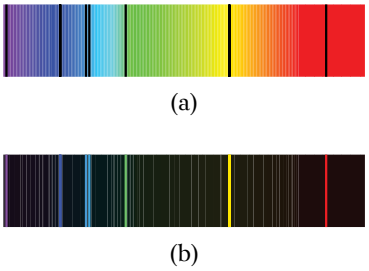


FIGURE 12.2
(a) Le spectre d'absorption.
(b) le spectre d'émission pour l'hélium.

Le spectre de l'hydrogène ne contient que quatre raies visibles (rouge, cyan, bleu-violet et violet). En 1884, le mathématicien suisse Johann Jakob Balmer (1825-1898) a trouvé une formule empirique pour obtenir la longueur d'onde de ces raies :

$$\lambda = 364{,}56\,\text{nm}\left(\frac{n^2}{n^2-4}\right), \tag{12.1}$$

où n est un entier ($n = 3$ pour la raie rouge, $n = 4$ pour la raie cyan et ainsi de suite). À partir de cette formule, il a prédit l'existence d'une cinquième raie, pour $n = 7$, ayant une longueur d'onde $\lambda = 396{,}9$ nm. Cette raie a par la suite été observée avec la bonne longueur d'onde.

Dans ces mêmes années, le physicien suédois Johannes Robert Rydberg (1854-1919) a cherché à montrer une relation entre les longueurs d'onde du spectre des métaux alcalins. Il s'est aperçu qu'il est plus simple de trouver une relation en fonction de l'inverse de la longueur d'onde $1/\lambda$*. Pour le spectre de l'hydrogène, Rydberg a trouvé une formule qui permet de généraliser la formule de Balmer :

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right), \tag{12.2}$$

* La quantité $1/\lambda$ est parfois appelée le nombre d'onde linéaire, alors que $k = 2\pi/\lambda$ est appelé le nombre d'onde angulaire.

où n_1 et n_2 sont des entiers positifs ($n_2 > n_1$), et R_∞ est appelée la *constante de Rydberg*. La valeur, dans le système international, est

$$R_\infty = (10\,973\,731{,}568\,539 \pm 0{,}000\,055)\ \text{m}^{-1} \approx 1{,}097 \times 10^7\ \text{m}^{-1}\ . \quad (12.3)$$

On trouve la formule de Balmer en utilisant $n_1 = 2$ et $n_2 = 3, 4, \ldots$ Les différentes raies de l'hydrogène correspondantes font partie de la *série de Balmer*. En posant $n_1 = 1$, on obtient des raies dans l'ultraviolet, qui font partie de la *série de Lyman*. Cette série a été découverte en 1914 par le physicien américain Theodore Lyman (1874-1954). D'autres séries ont été identifiées dans l'infrarouge. Pour $n_1 = 3$, on obtient la série de Paschen (observée la première fois par le physicien allemand Friedrich Paschen (1865-1947)). De même, la série de Brackett correspond à $n_1 = 4$, la série de Pfund équivaut à $n_1 = 5$ et la série de Humphreys, à $n_1 = 6$. La figure 12.3 montre les raies spectrales pour les trois premières séries.

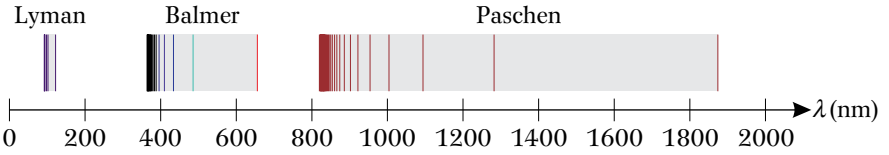


FIGURE 12.3
Les trois premières séries dans le spectre de l'hydrogène

EXEMPLE 12.1 La série de Balmer

On étudie le spectre d'émission de l'hydrogène dans le visible et dans l'ultraviolet.

a. Quelle est la plus grande longueur d'onde dans la série de Balmer ?
b. Quelle est la plus petite longueur d'onde dans la série de Balmer ?

SOLUTION

Identifier la clé

La **clé** est la formule de Rydberg, car nous cherchons les longueurs d'onde émises par l'atome d'hydrogène :

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \quad \text{(i)}$$

où nous utilisons $n_1 = 2$ pour la série de Balmer.

SOLUTION a.

Décortiquer le problème

La plus grande longueur d'onde correspond à $1/\lambda$ le plus petit, donc à $n_2 = 3$, étant donné que n_2 est un entier qui doit être plus grand que $n_1 = 2$.

Résoudre le problème

Nous insérons $n_2 = 3$ dans l'équation (i) :

$$\frac{1}{\lambda} = 1{,}097 \times 10^7\ \text{m}^{-1}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{1{,}524 \times 10^6\ \text{m}^{-1}} = 656{,}3 \times 10^{-9}\ \text{m}$$

$$\lambda = 656{,}3\ \text{nm}\ . \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Il s'agit bien de la raie rouge qu'on retrouve dans la figure 12.1a.

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

Pour obtenir la plus petite longueur d'onde, n_2 doit être l'entier le plus grand possible, c'est-à-dire $n_2 \to \infty$.

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$\frac{1}{\lambda} = 1{,}097 \times 10^7\ \text{m}^{-1}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2}\right)$$

$$\lambda = \frac{1}{2{,}743 \times 10^{6}\ \text{m}^{-1}} = 3{,}646 \times 10^{-9}\ \text{m}$$

$$\lambda = 364{,}6\ \text{nm}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse
La longueur d'onde est effectivement plus petite que toutes les raies visibles, car cette raie se trouve dans l'ultraviolet.

12.2 Le modèle de Bohr

En 1913, le physicien danois Niels Bohr a proposé un modèle semi-classique de l'atome d'hydrogène. Par *semi-classique,* on entend un modèle basé sur les lois de Newton et les équations de Maxwell, mais qui inclut un élément de quantification.

Le modèle planétaire

Au début du 20e siècle, la structure exacte de l'atome était inconnue. On savait que l'atome était électriquement neutre et qu'il devait être composé d'électrons, une particule ayant été découverte en 1897 par le physicien anglais Joseph John Thomson (1856-1940). Ce dernier a proposé un modèle de l'atome où la charge positive est uniformément distribuée dans le volume, avec des électrons uniformément distribués. C'est le *modèle du plum pudding*.

Les recherches du physicien néo-zélandais Ernest Rutherford (1871-1937) en physique nucléaire ont permis de découvrir que la charge positive est plutôt concentrée au centre de l'atome, dans un noyau très compact (environ 10 000 fois plus petit que l'atome). Un nouveau modèle a fait son apparition : le *modèle planétaire*, dans lequel les électrons tournent autour du noyau sur des orbites circulaires, comme les planètes autour du Soleil. Les électrons sont alors liés par la force électrostatique exercée par le noyau positif.

L'atome d'hydrogène est l'atome le plus simple, constitué uniquement d'un proton ($q = e$) et d'un électron ($q = -e$), liés ensemble par l'interaction électrique. La masse du proton est 1836 fois plus grande que celle de l'électron. On peut donc négliger le mouvement du proton et le considérer comme immobile, avec l'électron qui décrit un mouvement circulaire uniforme, comme le montre la figure 12.4. La force électrique exercée par le proton joue le rôle de la force centripète. Soit un électron qui tourne autour d'un proton sur une orbite de rayon r :

$$\sum F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}\ , \qquad (12.4)$$

où $\epsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}$ F/m est la constante électrique, m est la masse de l'électron et e, la charge élémentaire. L'équation 12.4 permet d'obtenir le module de la vitesse de l'électron en fonction du rayon de son orbite :

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}}\ . \qquad (12.5)$$

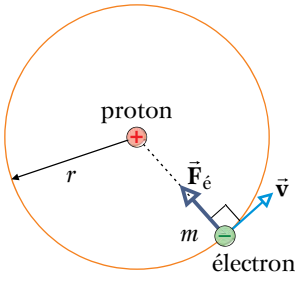


FIGURE 12.4
Selon le modèle planétaire de l'atome, l'électron décrit un mouvement circulaire uniforme autour du proton.

Il est aussi possible de calculer l'énergie du système électron-proton : l'électron a de l'énergie cinétique $K = mv^2/2$, et le système a de l'énergie potentielle électrique $U = q_1 q_2/(4\pi\epsilon_0 r)$. L'énergie est donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \\ E &= -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}\,, \end{aligned} \tag{12.6}$$

où on a utilisé l'équation 12.5 pour exprimer l'énergie en fonction du rayon de l'orbite.

Le modèle planétaire a un problème fondamental : l'électron subit une accélération centripète. Selon la théorie de Maxwell, une charge accélérée produit des ondes électromagnétiques qui transportent de l'énergie. Selon le principe de conservation de l'énergie, l'énergie de l'atome doit diminuer, étant donné que celui-ci émet un spectre. L'équation 12.6 indique alors que le rayon de l'orbite doit diminuer à mesure que l'atome perd de l'énergie. L'électron devrait donc effectuer une spirale et s'écraser sur le noyau après environ 1 ns. Un modèle basé uniquement sur les lois de Newton et les équations de Maxwell ne permet pas d'expliquer pourquoi un atome est stable.

Les postulats de Bohr

En se basant sur la formule de Rydberg et la notion de photon, le physicien danois Niels Bohr (*voir la figure 12.5*) a proposé un nouveau modèle de l'atome en 1913. Ce modèle correspond au modèle planétaire auquel Bohr ajoute trois postulats.

FIGURE 12.5
Niels Bohr (1885-1962), physicien danois

1. L'atome ne peut exister que dans certains états, qu'on appelle les *états stationnaires*. Chaque état a une énergie fixe (l'énergie est quantifiée). Un changement d'énergie, par émission ou absorption de rayonnement, doit se faire par des transitions entre les états stationnaires.

2. Le rayonnement émis ou absorbé lors d'une transition entre un niveau supérieur, dont l'énergie est E_h et un niveau inférieur, dont l'énergie est E_b, a une longueur d'onde donnée par l'expression :

$$\frac{hc}{\lambda} = E_h - E_b\,, \tag{12.7}$$

où h est la constante de Planck.

3. Les états permis sont ceux pour lesquels le module du moment cinétique de l'électron est quantifié selon l'expression :

$$L = n\hbar\,, \tag{12.8}$$

où $\hbar = h/(2\pi)$ est la constante de Planck réduite et n, un entier positif ($n = 1, 2, \ldots$), qu'on appelle le *nombre quantique*.

Le premier postulat est présent pour que l'atome soit stable. Le deuxième postulat permet d'obtenir le spectre produit par l'atome d'hydrogène. Nous avons déjà utilisé cet énoncé au chapitre 11 dans l'étude des électrons piégés. Il s'avère que cet énoncé fait partie de la mécanique quantique. Le troisième postulat implique que le rayon des orbites ne peut pas prendre n'importe quelle valeur, mais qu'il est quantifié, tout comme le module de la vitesse et l'énergie des états. Les états sont numérotés par le nombre quantique n. L'état stable est l'état pour lequel l'énergie est minimale, ce qui correspond à l'orbite ayant le plus petit rayon possible qui est compatible avec l'énoncé 3.

La détermination du rayon des orbites

Le moment cinétique d'une particule a été défini au chapitre 12 du tome 1. Pour une particule de masse m qui décrit un mouvement circulaire avec une quantité de mouvement non relativiste $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$ (*voir la figure 12.6*), l'équation 12.21 du tome 1 permet de calculer le module du moment cinétique :

$$L = |\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}| = rmv \sin(90°) .$$

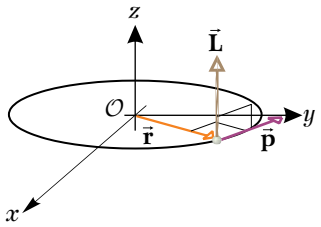


FIGURE 12.6
Le calcul du moment cinétique pour une particule qui décrit une orbite circulaire

Le troisième postulat s'écrit alors

$$L = mrv = n\hbar . \tag{12.9}$$

Pour commencer, on calcule le module de la vitesse de l'électron sur l'orbite n, afin de vérifier s'il est acceptable d'utiliser l'équation non relativiste pour l'énergie cinétique. Pour ce faire, on isole le rayon de l'orbite r dans l'équation 12.9, et on insère le résultat dans l'équation de v^2 selon l'équation 12.5 :

$$\begin{aligned} r &= \frac{n\hbar}{mv} \qquad (12.10)\\ v^2 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m}\left(\frac{mv}{n\hbar}\right) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{v}{n\hbar}\\ \Rightarrow v &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}\frac{1}{n} . \end{aligned}$$

On multiplie ensuite par $1 = c/c$ pour exprimer le module de la vitesse en fonction du module de la vitesse de la lumière dans le vide. On obtient

$$v = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\frac{c}{n} = \frac{\alpha}{n}c . \tag{12.11}$$

Le paramètre α est une constante sans unité, très importante en physique atomique. On l'appelle la *constante de structure fine* pour des raisons historiques, mais elle représente en réalité la grandeur de l'interaction électrique à l'échelle atomique. En insérant les valeurs des constantes, on obtient

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{(1{,}602\times10^{-19}\,\text{C})^2}{4\pi\times 8{,}854\times10^{-12}\,\text{F/m}\times 1{,}055\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}\times 2{,}998\times10^{8}\,\text{m/s}}$$

$$\alpha = 0{,}007\,297 = \frac{1}{137{,}0} . \tag{12.12}$$

Le module de la vitesse est maximal lorsque l'électron est sur la première orbite. Le module de la vitesse est alors égal à moins de 1 % de la vitesse de la

lumière. Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser la relativité restreinte pour analyser l'atome d'hydrogène.

REMARQUE

La constante de structure fine n'a pas d'unité. Elle a donc la même valeur dans tous les systèmes d'unités. Pour cette raison, il est très utile d'exprimer les différentes quantités en fonction de cette constante.

On peut ensuite insérer l'équation 12.11 dans l'équation 12.10 pour obtenir le rayon des orbites dans le modèle de Bohr :

$$r = \frac{L}{mv} = \frac{n\hbar}{m}\frac{n}{\alpha c}$$
$$r = \frac{\hbar}{\alpha mc}n^2 = a_0 n^2 , \qquad (12.13)$$

où a_0 est une constante appelée le *rayon de Bohr* et correspond au rayon de l'orbite la plus rapprochée, donc au rayon de l'atome dans son état fondamental. On peut calculer cette constante en exprimant les constantes en eV et en nm, après avoir multiplié par $1 = c/c$:

$$a_0 = \frac{hc/(2\pi)}{\alpha mc^2} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}/(2\pi)}{511{,}0\times 10^3\ \text{eV}/137} = 0{,}05291\ \text{nm}$$
$$a_0 = 52{,}91\ \text{pm} . \qquad (12.14)$$

L'énergie des états

On peut ensuite calculer l'énergie de chaque état stationnaire en insérant l'équation 12.13 dans l'équation 12.6 (et multiplier par $1 = c/c$) :

$$E = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\alpha mc^2}{\hbar cn^2}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\alpha^2 mc^2}{n^2} .$$

En insérant la valeur de la masse de l'électron $m = 511{,}0\ \text{keV}/c^2$ et la valeur de la constante de structure fine $\alpha = 1/137{,}0$ dans la dernière équation, on obtient

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{511{,}0\times 10^3\text{eV}}{137{,}0^2}\frac{1}{n^2}$$

Énergie d'un atome d'hydrogène

$$E_n = -\frac{13{,}60\ \text{eV}}{n^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots) . \qquad (12.15)$$

L'énergie est bien quantifiée dans le modèle de Bohr. La figure 12.7 illustre le diagramme des niveaux d'énergie. L'état fondamental correspond à $n = 1$, avec une énergie $E_1 = -13{,}60$ eV. Pour $n \to \infty$, l'énergie tend vers 0, ce qui correspond à un atome ionisé. Pour $E > 0$, l'électron est libre, et l'énergie n'est plus quantifiée.

La grande réussite du modèle de Bohr est de donner correctement l'énergie des états, ce qui permet d'obtenir la longueur d'onde des raies spectrales de l'atome d'hydrogène. Selon l'énoncé 2 du modèle, un photon est émis lorsqu'un électron

passe d'un état n_h (l'état du haut) à l'état n_b (l'état du bas). L'énergie du photon correspond à la variation de l'énergie de l'atome :

$$\frac{hc}{\lambda} = -13{,}60\ \text{eV}\left(\frac{1}{n_h^2} - \frac{1}{n_b^2}\right). \qquad (12.16)$$

Cette équation peut être exprimée selon la forme de la formule de Rydberg (*voir l'équation 12.2*) :

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty\left(\frac{1}{n_b^2} - \frac{1}{n_h^2}\right),$$

où la constante de Rydberg est donnée par

$$R_\infty = \frac{1}{2}\frac{\alpha^2 mc^2}{hc} = \frac{13{,}60\ \text{eV}}{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}} \approx 0{,}010\,97\ \text{nm}^{-1}.$$

Le modèle de Bohr permet d'expliquer facilement l'existence des séries dans le spectre émis par l'hydrogène. Les niveaux d'énergie sont de plus en plus rapprochés lorsque n augmente. Toutes les transitions entre un niveau et le niveau $n_b = 1$ produisent un photon dans le domaine de l'ultraviolet, ce qui correspond à la série de Lyman. De même, lorsque la transition se produit entre un niveau $n_h > 2$ et $n_b = 2$, l'énergie du photon est moindre, et celui-ci se retrouve dans le domaine du visible ou dans le proche ultraviolet (*voir la figure 12.8*). C'est la série de Balmer. Pour les transitions qui se terminent à $n_b > 2$, le photon a encore moins d'énergie, et il se trouve dans le domaine de l'infrarouge.

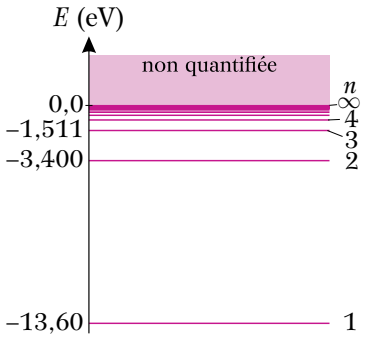


FIGURE 12.7
Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène selon le modèle de Bohr

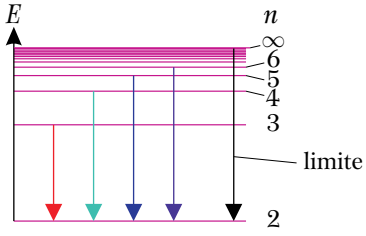


FIGURE 12.8
Les transitions produisant les raies visibles de la série de Balmer et la transition pour la limite de la série

EXEMPLE 12.2 Une raie d'absorption

De la lumière ultraviolette éclaire un échantillon d'hydrogène qui se trouve initialement au niveau fondamental.

a. Quelle est la plus grande longueur d'onde qui peut être absorbée ?
b. Lorsque l'électron est dans cet état excité, à quelle distance du noyau se trouve-t-il selon le modèle de Bohr ?

SOLUTION

Illustrer la situation

Le diagramme des niveaux d'énergie est illustré à la figure 12.9.

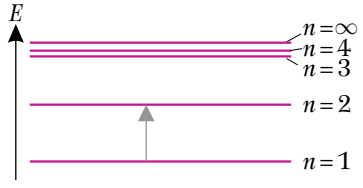


FIGURE 12.9
Le diagramme des niveaux d'énergie pour l'exemple 12.2

Décortiquer le problème

L'électron se trouve d'abord au niveau fondamental, donc à $n_b = 1$. Pour absorber la plus grande longueur d'onde, l'électron doit faire une transition vers le niveau supérieur le plus près, donc $n_h = 2$.

Connues	Inconnues
$n_b = 1$	$\lambda_{1\to2}$
$n_h = 2$	r_2

SOLUTION a.

Identifier les clés

La première **clé** est l'équation 12.15 permettant de calculer l'énergie des états dans l'atome d'hydrogène :

$$E_n = -\frac{13{,}60\ \text{eV}}{n^2}\,. \qquad \text{(i)}$$

La deuxième **clé** est l'équation 12.7 permettant de calculer la longueur d'onde associée à une transition :

$$\frac{hc}{\lambda} = E_\text{h} - E_\text{b} = E_2 - E_1\,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'énergie de chaque état et la différence d'énergie liée à la transition :

$$E_1 = -\frac{13{,}60\ \text{eV}}{1^2} = -13{,}60\ \text{eV}$$

$$E_2 = -\frac{13{,}60\ \text{eV}}{2^2} = -3{,}400\ \text{eV}$$

$$E_2 - E_1 = -3{,}400\ \text{eV} - (-13{,}60\ \text{eV})$$

$$\Delta E = 10{,}20\ \text{eV}\,. \qquad \text{(iii)}$$

Nous insérons ensuite ce résultat dans l'équation (ii) :

$$\frac{hc}{\lambda} = \Delta E \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{\Delta E}$$

$$\lambda = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{10{,}20\ \text{eV}} = 121{,}6\ \text{nm}\,. \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Cette longueur d'onde est bien dans le domaine de l'ultraviolet.

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 12.13 :

$$r_n = n^2 a_0\,, \qquad \text{(iv)}$$

où $a_0 = 52{,}91$ pm est le rayon de Bohr.

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs dans l'équation (iv) :

$$r_2 = (2)^2 \times 52{,}91\ \text{pm} = 211{,}6\ \text{pm}\,. \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'ordre de grandeur semble correct.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 12.1

Un atome d'hydrogène est dans l'état fondamental. Quelle est l'énergie minimale qu'il faut fournir pour ioniser l'atome ?

Les ions hydrogénoïdes

Le modèle de Bohr peut aussi s'appliquer à des ions ayant un seul électron, comme He^+, Li^{++}. Ces ions possèdent un seul électron qui interagit avec un noyau ayant une charge $q = Ze$, où Z est le numéro atomique de l'ion. Dans ce cas, l'énergie potentielle est maintenant

$$U = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\,.$$

On obtient les mêmes résultats que pour l'atome d'hydrogène, en remplaçant la constante de structure fine α par $Z\alpha$:

$$v_n = \frac{Z\alpha}{n}c \qquad (12.17)$$

$$r_n = \frac{\hbar}{Z\alpha mc}n^2 = \frac{a_0}{Z}n^2 \qquad (12.18)$$

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{Z^2\alpha^2 mc^2}{n^2} = -\frac{13{,}60\ \text{eV}\,Z^2}{n^2}\,. \qquad (12.19)$$

Les limites du modèle de Bohr

Le modèle de Bohr permet d'obtenir le spectre de l'atome d'hydrogène. En combinant la notion de photon et le concept d'état stationnaire, Bohr en est arrivé à un modèle de l'atome qui est stable, contrairement au modèle planétaire. Par contre, il est impossible de généraliser les idées de Bohr pour obtenir le spectre des atomes à plus d'un électron. Le modèle de Bohr contient certains éléments de la réalité, comme les états stationnaires et les transitions entre ces états. Par contre, considérer l'électron comme une particule ponctuelle qui tourne autour du noyau est une idée qui doit être abandonnée. De même, l'idée que le moment cinétique orbital de l'électron est quantifié fait partie de la réalité, mais l'équation $L = n\hbar$ n'est pas compatible avec des résultats expérimentaux qui montrent que le moment cinétique est nul pour l'état fondamental de l'atome d'hydrogène. Il faut donc considérer le modèle de Bohr comme un modèle et non comme une théorie complète.

12.3 La théorie quantique de l'atome d'hydrogène

Le premier succès de la mécanique quantique de Schrödinger et d'Heisenberg a été d'expliquer les spectres atomiques. Notre étude porte d'abord sur les prédictions et les résultats de la mécanique quantique appliqués à l'atome d'hydrogène. Le problème consiste donc à résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour la fonction énergie potentielle associée à l'interaction d'un proton et d'un électron séparés d'une distance r (*voir la figure 12.10*), c'est-à-dire

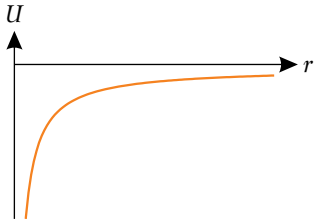


FIGURE 12.10
La fonction énergie potentielle pour un électron dans un atome d'hydrogène

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \tag{12.20}$$

où e est la charge élémentaire. L'équation de Schrödinger à résoudre est une équation à trois dimensions :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]-\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)\psi = E\psi, \tag{12.21}$$

où m est la masse de l'électron et E, l'énergie de l'état stationnaire recherché. On veut obtenir des états liés, c'est-à-dire des états pour lesquels l'électron est piégé dans le puits de potentiel de la figure 12.10, où $r < \infty$ et l'énergie du système $E = K + U < 0$.

REMARQUE

On néglige le mouvement du proton, étant donné que sa masse est 1 836 fois plus élevée que celle de l'électron. Il est possible d'obtenir le résultat exact, en incluant ce mouvement. Il faut alors remplacer la masse de l'électron par la *masse réduite* du système, définie par l'expression :

$$\mu = \left[\frac{1}{m_p}+\frac{1}{m_é}\right]^{-1} = 0{,}9995\, m_é .$$

La stabilité de l'état fondamental

Nous avons vu à la section 12.2 que le modèle planétaire ne permet pas d'obtenir des états stables. De plus, le modèle de Bohr postule que l'état fondamental est stable, mais cela ne repose pas sur un principe de base. La mécanique quantique est basée sur la dualité onde-particule. Pour confiner une particule dans une petite région, il faut que la longueur d'onde de la particule soit courte, ce qui demande une énergie cinétique importante. On veut étudier l'ordre de grandeur de la région de confinement en utilisant le principe d'incertitude (*voir l'équation 10.36 de la page 371*) :

$$\Delta x\, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}\,.$$

La fonction énergie potentielle dépend uniquement de la distance r entre le proton et l'électron. Cette fonction a donc une symétrie sphérique. On considère une fonction d'onde qui est caractérisée par la distance r_0, c'est-à-dire que la fonction d'onde est concentrée autour de $r = r_0$, et qu'elle est très faible après une certaine distance r plus grande. On peut donc dire que l'incertitude sur la position de l'électron est $\Delta r \simeq r_0$. L'énergie potentielle est

$$U \simeq -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}\,.$$

Selon le principe d'incertitude, l'incertitude sur la position produit une incertitude sur la quantité de mouvement :

$$\Delta p \simeq \frac{\hbar}{\Delta r} = \frac{\hbar}{r_0}\,,$$

où on a laissé tomber le facteur $\frac{1}{2}$, étant donné qu'on cherche uniquement à obtenir un ordre de grandeur. L'incertitude sur la quantité de mouvement implique que l'énergie cinétique ne peut pas être nulle :

$$K \simeq \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}\,.$$

L'énergie du système compatible avec le principe d'incertitude est

$$E = K + U = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}\,. \tag{12.22}$$

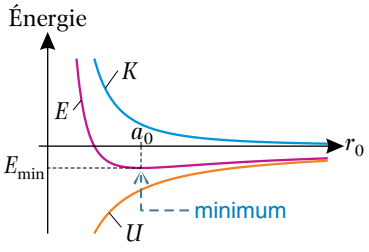


FIGURE 12.11
L'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie de l'atome en fonction de la distance r_0

La figure 12.11 illustre l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie E de l'atome. On remarque que pour minimiser l'énergie potentielle U, on doit diminuer la distance r_0 entre l'électron et le proton, mais cela fait augmenter l'énergie cinétique. De plus, l'énergie E du système présente un minimum pour une distance $r \neq 0$. On obtient cette distance à l'aide de la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r_0} = -\frac{\hbar^2}{mr_0^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = 0\,. \tag{12.23}$$

La solution de l'équation 12.23 est

$$r_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2} = \frac{\hbar c}{mc^2\alpha} = a_0\,,$$

où $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137{,}0$ est la constante de structure fine, et a_0 = 52,91 pm est le rayon de Bohr (*voir l'équation 12.14*). Donc, l'énergie du système est minimale pour une distance r_0 de l'ordre du rayon de la première orbite du modèle de Bohr. De plus, en insérant cette valeur de r_0 dans l'équation 12.22, on obtient l'énergie correspondante :

$$E_{\text{min}} = -\frac{mc^2\alpha^2}{2} = -13{,}60 \text{ eV}, \tag{12.24}$$

ce qui équivaut à l'énergie de l'état fondamental dans le modèle de Bohr.

Le présent argument n'est pas une preuve de l'énergie de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène, car c'est un calcul de l'ordre de grandeur. Le résultat réel pourrait contenir un facteur numérique quelconque supplémentaire. Mais cet argument montre que la stabilité de l'atome est assurée par la dualité onde-particule. Sans ce concept, on ne peut pas expliquer pourquoi les atomes sont stables.

Le système de coordonnées et les nombres quantiques

La fonction énergie potentielle donnée à l'équation 12.20 dépend de la distance r entre l'électron et le proton. Ce puits de potentiel a donc une symétrie sphérique. Il est plus simple de résoudre l'équation de Schrödinger en utilisant le système de coordonnées sphériques illustré à la figure 12.12. Dans ce système, les coordonnées d'un point $\mathcal{P}$ sont la distance r entre le point et l'origine, l'angle θ par rapport à l'axe des z et l'angle ϕ qui correspond à l'angle de la projection dans le plan des xy de la distance r par rapport à l'axe des x*. Dans ce système de coordonnées, $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \phi < 2\pi$. Les équations de conversion entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques sont les suivantes :

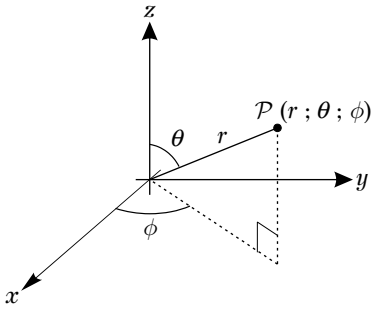


FIGURE 12.12
Le système de coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta . \end{aligned} \tag{12.25}$$

Comme nous l'avons vu à la section 11.7, la partie spatiale d'un état stationnaire à trois dimensions est spécifiée à l'aide de trois nombres quantiques, ce qui correspond à un nombre quantique par dimension. Pour l'instant, la description du spin de l'électron est mise de côté. Nous allons revenir sur le spin à la section 12.5. D'abord, le *nombre quantique principal* n est associé à la coordonnée radiale r. Associé à la coordonnée θ, le *nombre quantique orbital* ℓ est utilisé. Le troisième nombre quantique est appelé le *nombre quantique magnétique*, et il est noté m_ℓ ; ce nombre quantique est associé à la coordonnée ϕ.

La fonction d'onde ψ doit être régulière et tendre vers 0 pour $r \to \infty$, car la probabilité de trouver l'électron à l'infini est nulle lorsque l'électron est confiné dans l'atome. Ces conditions impliquent que les nombres quantiques doivent être des entiers et respecter les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, \ldots \\ \ell &= 0, \ldots, n-1 \\ m_\ell &= -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell . \end{aligned} \tag{12.26}$$

* La présente notation est celle qui est utilisée en physique. Les coordonnées θ et ϕ sont permutées dans certains ouvrages de mathématiques.

Selon ces conditions, pour une valeur n du nombre quantique principal, il y a n valeurs possibles du nombre orbital. De même, pour une valeur ℓ du nombre quantique orbital, il y a $2\ell + 1$ valeurs possibles du nombre quantique magnétique (il y a ℓ valeurs positives, ℓ valeurs négatives et la valeur $m_\ell = 0$).

Les niveaux d'énergie

En résolvant l'équation de Schrödinger, on trouve que l'énergie des états dépend uniquement du nombre quantique n. C'est pour cette raison que le nombre n est appelé le *nombre quantique principal.* Les niveaux d'énergie sont donnés par la même expression que ce qui est obtenu avec le modèle de Bohr :

Niveaux d'énergie pour l'atome d'hydrogène

$$E_n = -\frac{mc^2\alpha^2}{2}\frac{1}{n^2} = -\frac{13{,}60\ \text{eV}}{n^2}, \tag{12.27}$$

où $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137{,}0$ est la constante de structure fine. L'état fondamental correspond à $n = 1$, $\ell = 0$ et $m_\ell = 0$. Les états ayant la même valeur de n forment des *couches*, qu'on note parfois avec des lettres majuscules :

$$\begin{gathered} n = 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ldots \\ \text{couche}\ \ K\ \ L\ \ M\ \ N\ \ O\ \ldots \end{gathered} \tag{12.28}$$

Défi animé 12.1
Lequel des modèles proposés permet d'expliquer les transitions atomiques observées pour l'atome d'hydrogène ?

L'énergie des états de l'atome d'hydrogène dépend uniquement du nombre quantique principal. Les états excités sont donc dégénérés, car selon la condition 12.26, il y a plusieurs valeurs possibles de ℓ et de m_ℓ lorsque $n > 1$. Ce résultat est propre à l'atome d'hydrogène, car la fonction énergie potentielle dépend, de façon simple, de la coordonnée r. Lorsqu'il y a plusieurs électrons dans un atome, l'interaction entre les électrons produit une fonction énergie potentielle plus complexe que la fonction $1/r$. L'énergie d'un atome dépend alors en général des nombres quantiques n et ℓ. Pour cette raison, on a l'habitude de séparer les couches en sous-couches, qui correspondent aux différentes valeurs de ℓ :

$$\begin{gathered} \ell = 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ldots \\ \text{sous-couche}\ \ s\ \ p\ \ d\ \ f\ \ g\ \ \ldots \end{gathered} \tag{12.29}$$

L'utilisation des premières lettres (*s*, *p*, *d* et *f*) vient de raisons historiques, liées à la spectroscopie des raies spectrales. Cette nomenclature a été élaborée avant la théorie quantique.

La figure 12.13 montre le diagramme des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène, avec les couches et les sous-couches. On indique chaque sous-couche avec la valeur de n et la lettre représentant la sous-couche, par exemple $1s$ et $2p$. À partir de ce diagramme, on peut obtenir l'énergie et la longueur d'onde des photons associées à des transitions atomiques :

$$\frac{hc}{\lambda} = E_\text{h} - E_\text{b} = \Delta E\,. \tag{12.30}$$

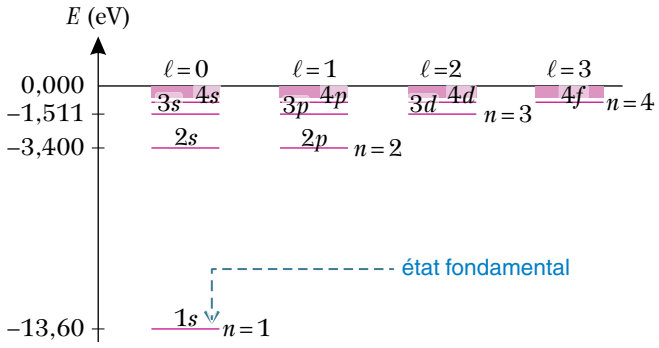


FIGURE 12.13
Les niveaux d'énergie pour un atome d'hydrogène

EXEMPLE 12.3 Les nombres quantiques

À partir de l'état fondamental, un atome d'hydrogène absorbe un photon dont la longueur d'onde est de 102,5 nm.

a. Dans quelle couche se trouve l'électron excité ?

b. Énumérez les sous-couches possibles.

SOLUTION

Décortiquer le problème

L'état initial correspond à $n = 1$. L'électron effectue une transition vers le haut, car il absorbe un photon.

Connues	Inconnues
$n_b = 1$	n_h
$\lambda = 102{,}5$ nm	sous-couches

SOLUTION a.

Identifier les clés

La première **clé** est l'équation 12.27 qui permet de calculer l'énergie des niveaux dans l'atome d'hydrogène :

$$E_n = -\frac{13{,}60\ \text{eV}}{n^2}\,. \qquad \text{(i)}$$

La deuxième **clé** est l'équation 12.30 qui permet de calculer la longueur d'onde d'un photon absorbé lors d'une transition :

$$\frac{hc}{\lambda} = E_h - E_b = \Delta E\,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord la variation de l'énergie de l'électron, ce qui correspond à l'énergie du photon, à partir de l'équation (ii) :

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{102{,}5\ \text{nm}} = 12{,}10\ \text{eV}\,. \qquad \text{(iii)}$$

L'énergie du niveau supérieur est alors

$$E_h = \Delta E + E_1 = 12{,}10\ \text{eV} - \frac{13{,}60\ \text{eV}}{1^2} = 1{,}50\ \text{eV}\,.$$

Nous utilisons ensuite l'équation (i) pour obtenir la valeur du nombre quantique principal :

$$-\frac{13{,}60\ \text{eV}}{n_b^2} = -1{,}50\ \text{eV}$$

$$\Rightarrow n_b = \sqrt{\frac{-13{,}60\ \text{eV}}{-1{,}50\ \text{eV}}} = 3\,. \qquad \text{(iv)}$$

Par conséquent,

l'électron est dans la couche M ($n = 3$). (réponse)

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est la condition 12.26 :

$$\ell = 0,\ 1,\ \ldots\ n\,. \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

Nous avons

$$\ell = 0,\ 1,\ 2\,. \qquad \text{(vi)}$$

Les sous-couches possibles sont donc

$$3s\ ,\ 3p\ ,\ 3d\ .$$ (réponse)

Valider la réponse
Le nombre quantique principal est un entier positif. Il y a bien $n = 3$ sous-couches possibles.

Le moment cinétique

Dans le modèle de Bohr, l'électron décrit des orbites circulaires pour lesquelles le moment cinétique de l'électron est quantifié. Dans la théorie quantique de l'atome, l'électron a aussi un moment cinétique associé à son mouvement orbital.

De façon générale, une particule ayant une quantité de mouvement $\vec{\mathbf{p}}$ a un moment cinétique par rapport à un point $\mathcal{O}$:

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}\ ,$$

où $\vec{\mathbf{r}}$ est le vecteur entre le point $\mathcal{O}$ et la particule (*voir la figure 12.14*). Le moment cinétique est un vecteur perpendiculaire au plan de l'orbite. Ses composantes sont

$$L_x = yp_z - zp_y \qquad L_y = zp_x - xp_z \qquad L_z = xp_y - yp_x\ .$$

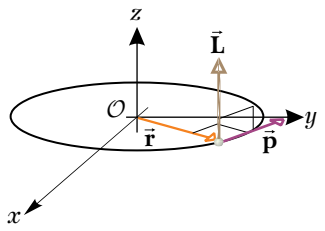


FIGURE 12.14
Le moment cinétique d'une particule qui tourne autour du point $\mathcal{O}$

Dans le cas d'une particule classique qui décrit une orbite dans le plan des xy, le vecteur moment cinétique n'a qu'une composante z.

Au niveau quantique, on ne peut connaître simultanément les trois composantes du vecteur moment cinétique à cause du principe d'incertitude. Il est seulement possible d'obtenir des états stationnaires pour lesquels le module L et une composante (par convention, on choisit la composante L_z) sont fixes.

Le nombre quantique orbital permet d'obtenir le module du moment cinétique de l'électron:

Module du moment cinétique

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\ \hbar\ . \qquad (12.31)$$

Le nombre quantique ℓ est un entier non négatif. Les valeurs possibles du module du moment cinétique sont $L = 0, \sqrt{2}\hbar, \sqrt{6}\hbar, \ldots$ Comme dans le modèle de Bohr, le module du moment cinétique est quantifié, c'est-à-dire qu'il ne peut pas prendre n'importe quelle valeur. Cependant, la condition de quantification est différente. De plus, dans l'état fondamental, le nombre quantique orbital est $\ell = 0$, ce qui indique que l'électron ne tourne pas autour du proton dans cet état.

De même, le nombre quantique m_ℓ permet de calculer la composante z du moment cinétique:

Composante z du moment cinétique

$$L_z = m_\ell\ \hbar\ . \qquad (12.32)$$

Selon la condition 12.26, $-\ell \leq m_\ell \leq \ell$. Il y a alors $2\ell + 1$ valeurs possibles du nombre quantique m_ℓ pour une valeur donnée du nombre quantique ℓ. Une valeur positive de m_ℓ indique que le vecteur $\vec{\mathbf{L}}$ a une composante dans le même sens de l'axe des z, ce qui correspond à une rotation antihoraire (selon la règle de la main droite); alors qu'une valeur négative de m_ℓ indique que $\vec{\mathbf{L}}$ a une composante opposée à l'axe des z, ce qui correspond à une rotation horaire. Pour une composante $m_\ell = 0$, le vecteur $\vec{\mathbf{L}}$ est perpendiculaire à l'axe des z. La figure 12.15 montre les orientations possibles du vecteur $\vec{\mathbf{L}}$ lorsque $\ell = 2$.

La composante maximale de L_z est $\ell\hbar$, car la valeur maximale de $m_\ell = \ell$. Pour une valeur $\ell \neq 0$, cette composante est inférieure au module du vecteur L, qui est égal à $\sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar$. Donc, le vecteur $\vec{\mathbf{L}}$ n'est jamais aligné selon l'axe des z, comme le montre la figure 12.15a. Ceci veut dire que le vecteur $\vec{\mathbf{L}}$ doit avoir une composante x ou une composante y. Le vecteur $\vec{\mathbf{L}}$ trace alors un cône, comme le montre la figure 12.15b. Selon la mécanique quantique, un électron ne tourne pas sur une orbite fixe dans le plan des xy, car ce mouvement serait décrit par un vecteur $\vec{\mathbf{L}}$ parallèle à l'axe des z. L'électron ne tourne pas sur des orbites bien définies, contrairement à ce qu'on voit dans l'image populaire illustrant des atomes.

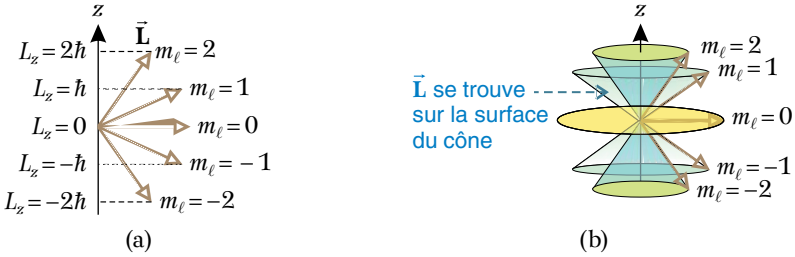


FIGURE 12.15
Le vecteur $\vec{\mathbf{L}}$ pour $\ell = 2$: (a) les composantes L_z ; (b) le vecteur $\vec{\mathbf{L}}$ se trouve quelque part le long de la surface des cônes.

EXEMPLE 12.4 L'orientation du moment cinétique

Un atome d'hydrogène est excité dans l'état $n = 5$, $\ell = 3$ et $m_\ell = -2$.

a. Quelle est l'énergie de l'atome ?
b. Quel est le module du moment cinétique orbital de l'électron ?
c. Quel est l'angle entre le vecteur $\vec{\mathbf{L}}$ et l'axe des z ?

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$n = 5$ $\quad \ell = 3$	E_5
$m_\ell = -2$	L
	θ

SOLUTION a.

Identifier la clé

L'énergie de l'atome d'hydrogène est déterminée à l'aide de l'équation 12.27 :

$$E_n = -\frac{13{,}60\ \text{eV}}{n^2}. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$E_5 = -\frac{13{,}60\ \text{eV}}{5^2} = -0{,}544\,0\ \text{eV}\ . \quad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

Le module du moment cinétique dépend du nombre quantique ℓ, comme le montre l'équation 12.31 :

$$L = \sqrt{\ell\,(\ell+1)}\,\hbar\ . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Le module du vecteur L est donc

$$L = \sqrt{3\times 4}\hbar = \sqrt{12}\hbar\ . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Décortiquer le problème

Selon l'équation 12.32, la composante z du moment cinétique est

$$L_z = m_\ell\hbar = -2\hbar\ . \qquad \text{(iii)}$$

Illustrer la situation
La figure 12.16 illustre le vecteur $\vec{\mathbf{L}}$ et sa composante L_z.

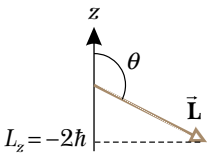


FIGURE 12.16
Le vecteur $\vec{\mathbf{L}}$

Identifier la clé
Nous obtenons l'angle θ en exprimant la composante z du vecteur $\vec{\mathbf{L}}$ en fonction du module du vecteur :

$$L_z = L\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{L_z}{L}. \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème
Nous obtenons

$$\theta = \arccos\left(\frac{-2\hbar}{\sqrt{12}\,\hbar}\right) = 125°. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse
L'angle θ doit être compris entre 90° et 180°, car la composante L_z est négative.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 12.2

Un électron se trouve dans la couche O, pour laquelle le nombre quantique principal est $n = 5$.

a. Combien de sous-couches possède cette couche ?

b. Parmi ces sous-couches, combien peuvent avoir une composante $L_z = 3\hbar$?

12.4 Les fonctions d'onde de l'atome d'hydrogène

L'équation de Schrödinger présentée à l'équation 12.21 permet d'obtenir la fonction d'onde $\psi_{n,\ell,m_\ell}(x, y, z)$ pour un état donné, spécifiée par les nombres quantiques n, ℓ et m_ℓ. À partir de la fonction d'onde, on peut calculer la probabilité de trouver l'électron à un endroit ou la position moyenne de l'électron. Nous avons vu à la section 11.1 que le module carré de la fonction d'onde correspond à la densité de probabilité :

$$\Pi(x, y, z) = |\psi(x, y, z)|^2 .$$

En trois dimensions, $\Pi(x, y, z)$ représente la probabilité par unité de volume. Donc, la probabilité de trouver l'électron dans un volume donné est obtenue en calculant une intégrale de volume :

$$P(\text{dans un volume } V) = \int_{\text{volume } V} |\psi(x, y, z)|^2 \, dV. \qquad (12.33)$$

L'état fondamental

L'état fondamental de l'atome, qu'on appelle aussi l'état $1s$, est spécifié par les nombres quantiques $n = 1$, $\ell = 0$ et $m_\ell = 0$. Dans cet état, le moment cinétique est nul, ce qui veut dire que l'électron ne tourne pas autour du proton.

L'état de l'atome possède alors une symétrie sphérique : rien ne change si on tourne l'atome d'un angle quelconque. Ceci est possible seulement si la fonction d'onde $\psi_{1,0,0}$ dépend uniquement de la coordonnée r, et non des coordonnées θ et ϕ.

En résolvant l'équation de Schrödinger, on obtient la fonction d'onde suivante :

$$\psi_{1,0,0}(r, \theta, \phi) = \psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}, \tag{12.34}$$

où a_0 représente le rayon de Bohr (le rayon de la première orbite dans le modèle de Bohr), donné à l'équation 12.14 :

$$a_0 = \frac{\hbar}{\alpha mc} = 52{,}91 \text{ pm}. \tag{12.35}$$

On peut voir la constante a_0 comme l'étalon de longueur dans l'atome. Cette longueur dépend des constantes physiques importantes au niveau de l'atome, soit la masse de l'électron m et la constante de structure fine $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0 \hbar c)$. La fonction d'onde ψ_{1s} est illustrée à la figure 12.17. On remarque que la fonction d'onde est maximale à $r = 0$, c'est-à-dire au centre de l'atome. C'est à cet endroit que la densité de probabilité est maximale.

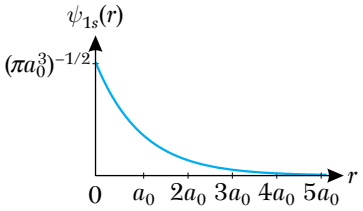


FIGURE 12.17
La fonction d'onde de l'état $1s$

Il est intéressant de calculer la probabilité de trouver l'électron à une certaine distance du noyau. Pour cela, on doit calculer la probabilité que l'électron se trouve quelque part dans une coquille sphérique, de rayon r et d'épaisseur dr. Le volume d'une telle coquille se calcule en multipliant l'aire de la surface sphérique ($A = 4\pi r^2$) par l'épaisseur dr de la coquille. Le volume est donc d$V = 4\pi r^2$ dr. On définit la *densité de probabilité radiale* $\Pi(r)$ de telle sorte que la probabilité de trouver l'électron dans la coquille est $\Pi(r)$ dr. On obtient alors

$$\begin{aligned} P(\text{entre } r \text{ et } dr) &= |\psi(r)|^2 \, dV = |\psi(r)|^2 \, 4\pi r^2 \, dr \\ \Pi(r) \, dr &= |\psi(r)|^2 \, 4\pi r^2 \, dr . \end{aligned} \tag{12.36}$$

Avec cette densité de probabilité, on trouve la probabilité de trouver l'électron entre la distance r_1 et la distance r_2 en calculant l'intégrale :

$$P(\text{entre } r_1 \text{ et } r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \Pi(r) \, dr . \tag{12.37}$$

La probabilité de trouver l'électron quelque part est égale à 1, ce qui veut dire que si on intègre la densité de probabilité radiale entre $r_1 = 0$ et $r_2 = \infty$, on obtient 1.

Pour l'état $1s$, l'équation 12.34 permet d'obtenir la densité de probabilité radiale :

$$\Pi_{1s}(r) = 4\pi r^2 \, |\psi_{1s}(r)|^2 = \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-2r/a_0} . \tag{12.38}$$

La figure 12.18 montre cette densité de probabilité radiale. On remarque que le maximum se trouve à $r = a_0$. Ainsi, lorsque l'atome est dans l'état fondamental, la distance la plus probable entre l'électron et le noyau est égale au rayon de Bohr.

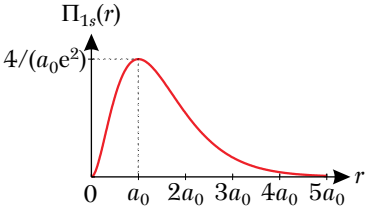


FIGURE 12.18
La densité de probabilité radiale pour l'état $1s$

MISE EN GARDE

Il est important de faire la différence entre la densité de probabilité $|\psi|^2$ et la densité de probabilité radiale $\Pi(r)$. La probabilité de trouver la particule par unité de volume est maximale à $r = 0$, car c'est à cet endroit que la fonction d'onde est maximale. Par contre, la distance où il est le plus probable de trouver la particule est $r = a_0$, car c'est pour cette distance que la densité de probabilité radiale est maximale. La différence vient du volume d'une coquille sphérique, qui augmente avec le rayon.

EXEMPLE 12.5 La position dans l'état 1*s*

L'atome d'hydrogène est dans son état fondamental.

a. Montrez que la distance la plus probable où trouver l'électron est $r = a_0$.
b. Quelle est la probabilité de trouver l'électron entre $r = 0$ et $r = a_0$?
c. Quelle est la probabilité de trouver l'électron entre $r = a_0$ et $r \to \infty$?
d. Quelle est la distance moyenne entre l'électron et le noyau ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
état = 1*s*	r pour $\Pi_{\max}(r)$
$a_0 = 52{,}9$ pm	P(entre 0 et a_0)
	P(entre a_0 et ∞)
	$< r >$

SOLUTION a.

Identifier la clé

Dans l'état 1*s*, la densité de probabilité radiale est donnée par l'équation 12.38 :

$$\Pi_{1s}(r) = 4\pi r^2 \, |\psi_{1s}(r)|^2 = \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-2r/a_0} . \qquad \text{(i)}$$

Identifier la clé

La distance où il est le plus probable de trouver l'électron correspond à la distance r pour laquelle la densité de probabilité radiale est maximale, c'est-à-dire lorsque la dérivée de $\Pi(r)$ est nulle :

$$\frac{d\Pi(r)}{dr} = 0 . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons la dérivée de $\Pi(r)$:

$$\frac{d\Pi(r)}{dr} = \frac{4}{a_0^3}\left[2r - \frac{2r^2}{a_0}\right] e^{-2r/a_0} = 0 . \qquad \text{(iii)}$$

Pour que la dérivée soit nulle, il faut que la partie entre crochets soit égale à 0 :

$$2r - \frac{2r^2}{a_0} = 0 \Rightarrow r = a_0 . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** pour calculer la probabilité de trouver l'électron entre deux distances est donnée par l'équation 12.37 :

$$P(\text{entre } 0 \text{ et } a_0) = \int_0^{a_0} \Pi(r)\, dr . \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons l'équation (i) dans l'équation (iv), et nous calculons l'intégrale à l'aide de la table d'intégrales :

$$P(\text{entre } 0 \text{ et } a_0) = \int_0^{a_0} \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-2r/a_0}\, dr$$

$$= \frac{4}{a_0^3}\left(\frac{-a_0}{2}\right)^3 \left[\frac{4}{a_0^2} r^2 + \frac{4}{a_0} r + 2\right] e^{-2r/a_0} \Bigg|_0^{a_0}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(4+4+2)e^{-2} - 2e^{-0}\right] = 0{,}323 .$$

(réponse)

SOLUTION c.

Identifier la clé

La **clé** est que la probabilité de trouver l'électron quelque part est égale à 1 :

$$P(\text{entre } 0 \text{ et } a_0) + P(\text{entre } a_0 \text{ et } \infty) = 1 \ . \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

Nous utilisons le résultat obtenu à la partie **b.** :

$$P(\text{entre } a_0 \text{ et } \infty) = 1 - 0{,}323 = 0{,}677 \ .$$

(réponse)

SOLUTION d.

Identifier la clé

Nous calculons la position moyenne à l'aide de l'équation 11.15 de la page 385 :

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty r\,\Pi(r)\,\mathrm{d}r \ . \qquad \text{(vi)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons l'équation (i) dans l'équation (vi), et nous calculons l'intégrale définie à l'aide de la table d'intégrales de l'annexe E :

$$\langle r \rangle = \frac{4}{a_0^3}\int_0^\infty r^3 \mathrm{e}^{-2r/a_0}\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{4}{a_0^3}\left(\frac{3!\,a_0^4}{2^4}\right)$$

$$\langle r \rangle = 1{,}50 a_0 \ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Les unités sont correctes, car la probabilité n'a pas d'unité et la distance moyenne est exprimée en fonction du rayon de Bohr. Les probabilités calculées sont comprises entre 0 et 1. Nous remarquons que la distance moyenne est plus grande que le rayon de Bohr, ce qui fait que la probabilité de trouver la particule entre 0 et a_0 est plus faible que la moitié.

Les états pour $n = 2$

Le premier niveau excité $n = 2$ possède quatre états ayant la même énergie : l'état $2s$ ($\ell = 0$; $m_\ell = 0$), dont le moment cinétique est nul et trois états $2p$ ($\ell = 1$; $m_\ell = 1$), ($\ell = 1$; $m_\ell = 0$) et ($\ell = 1$; $m_\ell = -1$). Pour ces trois derniers états, le moment cinétique a le même module $L = \sqrt{2}\hbar$, mais la composante $L_z = m_\ell \hbar$ est différente.

Les quatre états sont décrits par des fonctions d'onde $\psi_{n,\ell,m_\ell}(r, \theta, \phi)$ différentes. Comme l'état $1s$, l'état $2s$ a une symétrie sphérique et la fonction d'onde $\psi_{2,0,0}$ dépend uniquement de la coordonnée r :

$$\psi_{2,0,0}(r) = \frac{1}{\sqrt{8\pi a_0^3}}\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right)\mathrm{e}^{-r/2a_0} \ . \qquad (12.39)$$

Le maximum de la fonction d'onde est de nouveau à $r = 0$. De plus, la fonction d'onde est nulle pour $r = 2a_0$, ce qui veut dire que la probabilité de trouver l'électron à $r = 2a_0$ est nulle lorsque celui-ci est dans l'état $2s$.

Les trois états $\ell = 1$ n'ont pas la symétrie sphérique, car si on tourne l'atome, le vecteur moment cinétique change d'orientation. Les fonctions d'onde correspondantes dépendent alors des angles θ et ϕ. On trouve

$$\psi_{2,1,0}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}\mathrm{e}^{-r/(2a_0)}\cos\theta \qquad (12.40)$$

$$\psi_{2,1,\pm1}(r, \theta, \phi) = \mp\frac{1}{8\sqrt{\pi a_0^3}}\mathrm{e}^{-r/(2a_0)}\sin\theta\,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\phi} \ . \qquad (12.41)$$

La dépendance angulaire montre que la fonction d'onde est maximale pour $\theta = 0$ et $\theta = 180°$ pour l'état $m = 0$, alors que pour les états $m_\ell = \pm 1$, la fonction d'onde est maximale pour $\theta = 90°$, ce qui correspond au plan des xy.

Il est intéressant d'étudier la partie radiale des fonctions d'onde. Pour ce faire, on écrit la fonction d'onde comme la multiplication d'une fonction radiale et d'une fonction angulaire :

$$\psi_{n,\ell,m_\ell}(r,\ \theta,\ \phi) = R_{n,\ell}(r)Y_{\ell,m_\ell}(\theta,\ \phi)\ .$$

Les fonctions d'onde radiales $R_{2,\ell}(r)$ sont illustrées à la figure 12.19* pour les états de la couche $n = 2$. Contrairement à la fonction d'onde $\psi_{2,0,0}$, les fonctions d'onde décrivant les états $\ell = 1$ sont nulles à $r = 0$. Donc, dans ces états, la probabilité de trouver l'électron dans le noyau est nulle.

La figure 12.19b montre la densité de probabilité radiale $\Pi_{2,\ell}(r)$. On remarque que pour $\ell = 0$, la densité de probabilité possède un petit maximum autour de $r = 0{,}75a_0$ et un maximum autour de $r = 5{,}2a_0$, avec en plus un zéro à $r = 2a_0$. Lorsque $\ell = 1$, la densité de probabilité possède uniquement un maximum à $r = 4a_0$. Donc, le maximum de la densité de probabilité radiale se trouve pour ces états entre $r = 4a_0$ et $r = 6a_0$, ce qui est bien différent de la distance $r = a_0$ où la densité de probabilité radiale Π_{1s} est maximale. Cela montre bien que les états forment des couches.

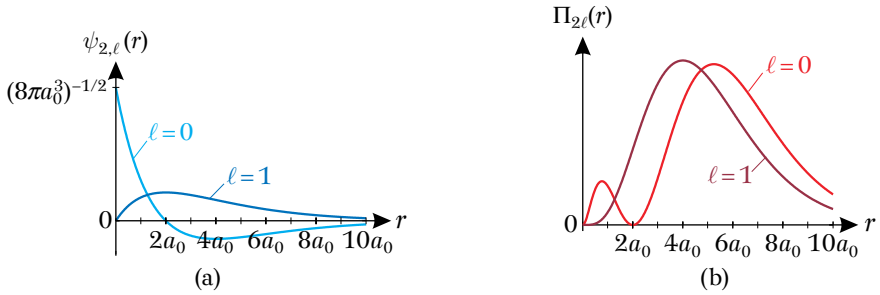


FIGURE 12.19
(a) Les fonctions d'onde radiales pour $n = 2$; (b) Les densités de probabilité radiales pour $n = 2$.

On remarque que le maximum de la densité de probabilité $\Pi_{2,1}(r)$ se trouve à $r = 4a_0$, ce qui correspond au rayon de la deuxième orbite dans le modèle de Bohr (*voir l'équation 12.13*), de la même façon que le maximum de la densité de probabilité $\Pi_{1,0}$ se retrouve à la distance $r = a_0$. Ceci est un résultat général : pour le niveau n, le maximum de la densité de probabilité radiale pour les états $\ell = n - 1$ se trouve à une distance $r = n^2a_0$, ce qui correspond au rayon de l'orbite n dans le modèle de Bohr.

La figure 12.20 montre les fonctions d'onde radiales et les densités de probabilité radiales pour les états $n = 3$. De nouveau, on constate que le maximum de la fonction d'onde radiale $R_{3,0}(r)$ se trouve à $r = 0$. On remarque aussi que les fonctions d'onde ont $n - \ell$ ventres et $n - \ell - 1$ nœuds (en excluant un nœud à $r = 0$ pour $\ell \neq 0$ et un nœud à $r \to \infty$). De plus, le maximum des densités de probabilité se trouvent entre $r = 9a_0$ et $r = 14a_0$, ce qui correspond à la troisième couche.

* La constante multiplicative est choisie pour que les fonctions d'onde radiales soient normalisées selon la coordonnée r :

$$\int_0^\infty |R_{n,\ell}(r)|^2 r^2\ \mathrm{d}r = 1\,.$$

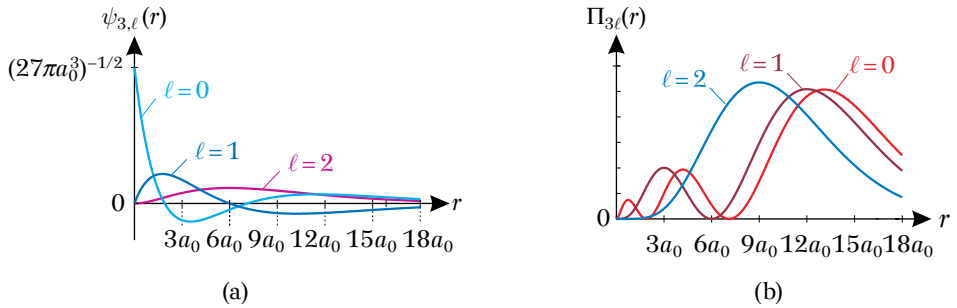


FIGURE 12.20
(a) Les fonctions d'onde radiales pour $n = 3$; (b) Les densités de probabilité radiales pour $n = 3$.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 12.3

La fonction d'onde décrivant l'état d'un atome d'hydrogène possède quatre endroits où elle est nulle pour $r < \infty$. De plus, elle est maximale à $r = 0$.

Quels sont les nombres quantiques de cet état ?

12.5 Le spin et la structure fine

À la section 12.3, nous avons analysé l'atome d'hydrogène en considérant un électron soumis à l'interaction coulombienne exercée par le proton. Cette analyse permet d'obtenir les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène et de calculer les longueurs d'onde présentes dans le spectre d'émission. Les résultats sont conformes à la relation de Rydberg. Lorsque le spectre de l'hydrogène est observé avec une grande précision, on remarque que les raies de Balmer ne sont pas des raies uniques. Elles sont plutôt constituées de plusieurs raies très rapprochées, comme on peut le voir à la figure 12.21 pour la raie rouge. C'est ce qu'on appelle la *structure fine*. La formule de Rydberg ne permet pas d'obtenir la longueur d'onde de ces raies rapprochées.

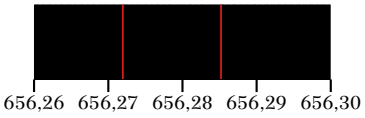


FIGURE 12.21
La raie rouge de l'hydrogène présente deux raies très rapprochées.

Dans notre étude précédente, nous avons négligé les effets relativistes, étant donné que le module de la vitesse des électrons au niveau n est de l'ordre de $v \approx \alpha c/n$, où $\alpha = 1/137{,}0$. Nous n'avons pas non plus considéré l'effet du spin de l'électron. Le concept de spin a été formulé en 1925 par les physiciens américains d'origine néerlandaise Samuel Goudsmit (1902-1978) et George Uhlenbeck (1900-1988) pour expliquer la structure fine du spectre de l'hydrogène.

Le spin et le moment cinétique total

Comme nous l'avons vu à la section 11.9, l'électron et les autres particules ont une propriété qu'on appelle le *moment cinétique intrinsèque* ou simplement le *spin*. Le terme *spin* vient du mot anglais signifiant «qui tourne», car Goudsmit et Uhlenbeck ont considéré l'électron comme une petite sphère qui tourne. Cette image classique est incorrecte : le spin est une quantité purement quantique, sans équivalent en mécanique classique.

Le spin a les propriétés du moment cinétique, c'est-à-dire que le module du vecteur $\vec{\mathbf{S}}$ est quantifié :

$$S = \sqrt{s\,(s+1)}\;\hbar\,. \tag{12.42}$$

L'électron a un spin $s = 1/2$, ce qui veut dire que le module du vecteur $\vec{\mathbf{S}}$ est toujours égal à $\sqrt{3/4}\hbar$. De plus, on ne peut connaître qu'une seule composante du vecteur (la composante S_z, par exemple), à cause du principe d'incertitude.

Cette composante est aussi quantifiée. On obtient, pour l'électron,

$$S_z = m_s\hbar = \pm\frac{1}{2}\hbar\,. \tag{12.43}$$

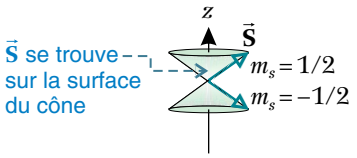


FIGURE 12.22
Le spin est un moment cinétique intrinsèque. La composante z est quantifiée, mais les autres composantes ne sont pas déterminées.

Comme le montre la figure 12.22, le vecteur $\vec{\mathbf{S}}$ n'est pas aligné avec l'axe des z, mais il forme un angle de 54,7° ou de 125,3° par rapport à cet axe. Sa composante x et sa composante y ne sont pas déterminées, ce qui veut dire que le vecteur $\vec{\mathbf{S}}$ se trouve quelque part sur la surface d'un cône, avec une composante S_z positive ou négative.

Dans un atome, un électron peut avoir un moment cinétique orbital $\vec{\mathbf{L}}$, en plus du moment cinétique intrinsèque $\vec{\mathbf{S}}$. On définit le moment cinétique total :

$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}\,. \tag{12.44}$$

Le vecteur $\vec{\mathbf{J}}$ a les mêmes propriétés que le moment cinétique orbital $\vec{\mathbf{L}}$; son module est quantifié :

$$J = \sqrt{j\,(j+1)}\,\hbar\,, \tag{12.45}$$

où j est le nombre quantique associé au moment cinétique total. Comme le spin de l'électron a deux orientations possibles, il y a deux possibilités pour la somme vectorielle de l'équation 12.44, comme le montre la figure 12.23 :

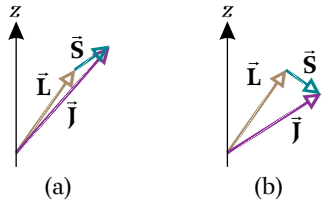


FIGURE 12.23
Le moment cinétique total $\vec{\mathbf{J}}$ est quantifié : (a) $j = \ell + 1/2$; (b) $j = \ell - 1/2$.

$$j = \left|\ell \pm \frac{1}{2}\right|. \tag{12.46}$$

Dans cette dernière équation, le signe positif est utilisé lorsque $\vec{\mathbf{S}}$ a une composante dans le même sens que $\vec{\mathbf{L}}$, alors que le signe négatif est utilisé lorsque $\vec{\mathbf{L}}$ et $\vec{\mathbf{S}}$ sont en sens opposés.

La composante J_z est aussi quantifiée :

$$J_z = m_j\hbar\,, \tag{12.47}$$

où m_j est le nombre quantique magnétique associé à $\vec{\mathbf{J}}$. Ce nombre quantique peut prendre les valeurs suivantes :

$$m_j = j,\, j-1,\, \ldots,\, -j\,. \tag{12.48}$$

Le vecteur $\vec{\mathbf{J}}$ possède donc $2j + 1$ composantes possibles.

À la section 12.3, nous avons défini les sous-couches en fonction du nombre quantique orbital ℓ. Il est possible d'incorporer le spin et le moment cinétique total en ajoutant un indice correspondant à la valeur de j. Pour les sous-couches s, le moment cinétique total est $j = 1/2$, étant donné que $\ell = 0$. On note donc la sous-couche $s_{1/2}$. Pour les sous-couches p, le nombre quantique orbital est $\ell = 1$. La condition 12.46 admet deux possibilités : $j = 1/2$ ou $j = 3/2$. On obtient alors les sous-couches $p_{1/2}$ et $p_{3/2}$. Selon l'équation 12.48, la sous-couche $p_{1/2}$ contient deux états ($m_j = \pm 1/2$), et la sous-couche $p_{3/2}$ contient quatre états

($m_j = \pm 3/2$ et $m_j = \pm 1/2$). Les autres sous-couches (d, f, …) se divisent aussi en deux sous-couches, selon l'équation 12.46, chacune de ces sous-couches contient $2j + 1$ états.

Le couplage spin-orbite

Au chapitre 9 du tome 2, nous avons vu qu'une particule chargée ayant un moment cinétique a un moment magnétique $\vec{\boldsymbol{\mu}}$, c'est-à-dire qu'elle se comporte comme un petit barreau aimanté, avec un pôle nord et un pôle sud, de telle sorte que $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ est orienté du pôle sud vers le pôle nord. De la même façon, le spin de l'électron engendre un moment magnétique intrinsèque pour l'électron. Ce moment magnétique est proportionnel au vecteur spin :

$$\vec{\boldsymbol{\mu}}_s = -\frac{ge}{2m}\vec{\mathbf{S}} \approx -\frac{e}{m}\vec{\mathbf{S}}\,, \tag{12.49}$$

où $g \approx 2{,}00$ est le facteur g de l'électron. Le moment magnétique de l'électron est donc opposé à son spin.

Lorsque le nombre quantique orbital ℓ est différent de zéro, l'électron tourne autour du proton. Dans le référentiel de l'électron, c'est le proton qui tourne autour de l'électron, ce qui est équivalent à une boucle de courant, qui se comporte elle aussi comme un dipôle magnétique $\vec{\boldsymbol{\mu}}_\ell$. Comme nous l'avons vu à la section 9 du tome 2, le moment magnétique orbital est

$$\vec{\boldsymbol{\mu}}_\ell = -\frac{e}{2m}\vec{\mathbf{L}}\,. \tag{12.50}$$

Il y a alors une interaction magnétique entre le moment magnétique de spin $\vec{\boldsymbol{\mu}}_s$ et le moment cinétique orbital $\vec{\boldsymbol{\mu}}_\ell$, comme si on plaçait deux barreaux aimantés côte à côte. L'énergie potentielle est minimale lorsque les moments magnétiques sont en sens opposés (*voir la figure 12.24a*). Quand les moments magnétiques sont dans le même sens (*voir la figure 12.24b*), la force magnétique peut exercer un travail en faisant tourner les barreaux aimantés. L'énergie potentielle est maximale.

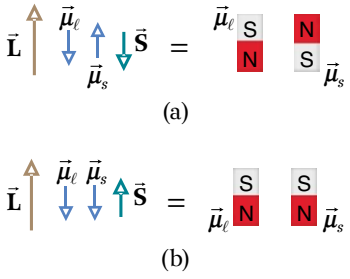


FIGURE 12.24

(a) Lorsque $\vec{\mathbf{L}}$ et $\vec{\mathbf{S}}$ sont en sens opposés, l'énergie magnétique est minimale. (b) Lorsque $\vec{\mathbf{L}}$ et $\vec{\mathbf{S}}$ sont dans le même sens, l'énergie magnétique est maximale.

Pour un électron dans un atome, le moment magnétique de spin $\vec{\boldsymbol{\mu}}_s$ est opposé au spin $\vec{\mathbf{S}}$, et le moment magnétique orbital $\vec{\boldsymbol{\mu}}_\ell$ est opposé au moment cinétique $\vec{\mathbf{L}}$. L'énergie magnétique dépend alors de l'orientation du vecteur $\vec{\mathbf{S}}$ par rapport au vecteur $\vec{\mathbf{L}}$. C'est ce qu'on appelle le *couplage spin-orbite*.

L'énergie magnétique est donc minimale quand les composantes L_z et S_z sont opposées (lorsque $j = \ell - 1/2$), et l'énergie magnétique est maximale quand L_z

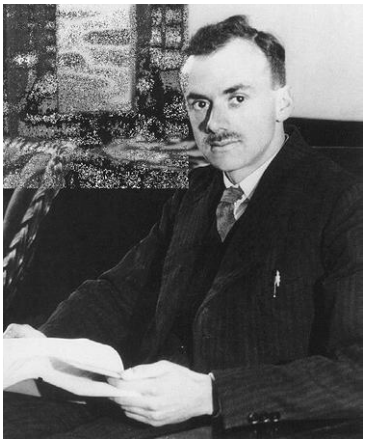


FIGURE 12.25
Paul Dirac (1902-1984), physicien britannique qui a énoncé une théorie quantique relativiste pour l'électron

et S_z sont dans le même sens (lorsque $j = \ell + 1/2$). Les états $j = \ell - 1/2$ ont donc une énergie inférieure aux états $j = \ell + 1/2$. L'interaction magnétique lève donc partiellement la dégénérescence des états.

La variation d'énergie potentielle produite par le couplage spin-orbite est du même ordre de grandeur que la variation d'énergie cinétique causée par les effets relativistes : les deux énergies dépendent de α^4, c'est-à-dire $\alpha^2 = (1/137)^2$ plus faible que le terme dominant qui a été utilisé à la section 12.3. Pour tenir correctement compte du couplage spin-orbite et des contributions relativistes, on a besoin d'une théorie relativiste pour remplacer l'équation de Schrödinger. Une théorie relativiste de l'électron a été formulée en 1928 par le physicien anglais Paul Dirac (*voir la figure 12.25*). En appliquant l'équation relativiste à l'électron dans un potentiel coulombien, Dirac a trouvé que la dégénérescence des niveaux d'énergie est partiellement levée. L'énergie des états dépend du nombre quantique principal n, et il y a une légère contribution proportionnelle au nombre quantique de moment cinétique total j :

$$E_{n,j} = E_n\left[1 + \frac{\alpha^2}{n}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right)\right], \qquad (12.51)$$

où $\alpha = 1/137{,}0$ est la constante de structure fine, et E_n correspond à l'énergie obtenue à l'aide de l'équation de Schrödinger (*voir l'équation 12.27 de la page 434*).

La figure 12.26 montre la comparaison entre les niveaux d'énergie selon l'équation de Schrödinger et les niveaux d'énergie dans la théorie de Dirac. Le niveau $1s$ ($n = 1$ et $\ell = 0$) devient le niveau $1s_{1/2}$ ($n = 1$, $\ell = 0$ et $j = 1/2$). Ce niveau a une énergie légèrement plus faible que le niveau $1s$ obtenu à l'aide de l'équation de Schrödinger :

$$E_1 - E_{1,1/2} = -13{,}60\ \text{eV}\left[\frac{1}{137{,}0^2}\left(1 - \frac{3}{4}\right)\right]$$
$$\Delta E = -0{,}000\,181\ \text{eV}.$$

La variation d'énergie est très faible, mais elle peut être observée. Au niveau $n = 2$, la sous-couche $2s$ devient la sous-couche $2s_{1/2}$, et la sous-couche $2p$ se divise en deux niveaux : le niveau $2p_{1/2}$ (au même niveau que $2s_{1/2}$) et le

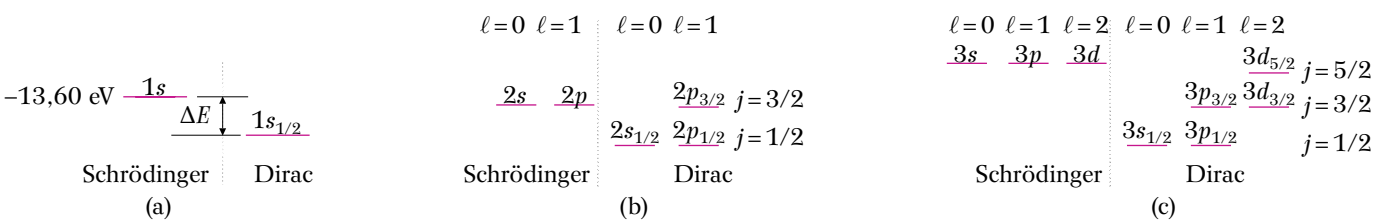


FIGURE 12.26
La comparaison entre les niveaux d'énergie obtenus à l'aide de l'équation de Schrödinger et de l'équation de Dirac, qui montre la structure fine : (a) pour la couche $n = 1$; (b) pour la couche $n = 2$; (c) pour la couche $n = 3$.

niveau $2p_{3/2}$, comme on peut le voir sur la figure 12.26b. La figure 12.26c montre les états $3s_{1/2}$, $3p_{1/2}$ (au même niveau), les états $3p_{3/2}$ et $3d_{3/2}$ (au même niveau) et finalement l'état $3d_{5/2}$.

Les règles de sélection

La théorie quantique permet de calculer la probabilité des transitions. Lorsque la probabilité est grande, on observe une raie spectrale intense. À l'opposé, lorsque la probabilité est faible, la raie spectrale est très difficile à observer. Les transitions les plus probables sont celles pour lesquelles les nombres quantiques varient de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Delta\ell &= \pm 1 \\ \Delta j &= 0\ ,\ \pm 1\ . \end{aligned} \tag{12.52}$$

Ces conditions sont les *règles de sélection.*

EXEMPLE 12.6 La structure fine de la raie rouge

Un atome d'hydrogène est excité dans la couche $n = 3$. Il émet de la lumière rouge en se désexcitant dans la couche $n = 2$.

Tracez le diagramme des niveaux d'énergie pour les couches $n = 2$ et $n = 3$, en incluant la structure fine. Combien de transitions sont possibles pour produire de la lumière rouge, si vous incluez la structure fine ?

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 12.27 montre le diagramme des niveaux d'énergie, y compris la séparation des niveaux par la structure fine.

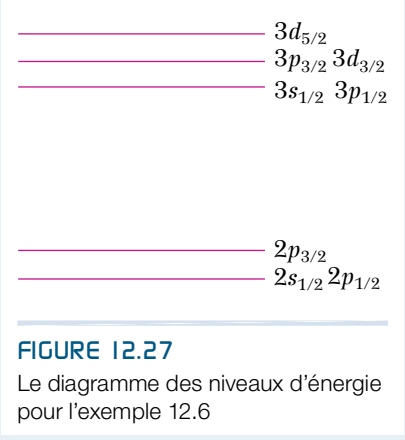


FIGURE 12.27
Le diagramme des niveaux d'énergie pour l'exemple 12.6

Identifier la clé

La clé est l'équation 12.52 qui permet d'obtenir les règles de sélection :

$$\begin{aligned} \Delta\ell &= \pm 1 \\ \Delta j &= 0, \pm 1\ . \end{aligned} \tag{i}$$

Résoudre le problème

Les transitions possibles sont $s \to p$ ($\Delta\ell = -1$), $p \to s$ ($\Delta\ell = +1$) et $d \to p$ ($\Delta\ell = +1$). De plus, une transition $j = 5/2 \to j = 1/2$ n'est pas observée, car elle ne respecte pas la règle de sélection pour j. Les transitions possibles sont donc

$$\begin{aligned} 3s_{1/2} &\to 2p_{1/2} & 3s_{1/2} &\to 2p_{3/2} \\ 3p_{1/2} &\to 2s_{1/2} & 3p_{3/2} &\to 2s_{1/2} \\ 3d_{3/2} &\to 2p_{1/2} & 3d_{3/2} &\to 2p_{3/2} \\ 3d_{5/2} &\to 2p_{3/2}\ . \end{aligned}$$

Donc,

il y a 7 transitions. (réponse)

Valider la réponse

Les règles de sélection sont respectées.

12.6 L'effet Zeeman

Au cours de ses recherches sur l'électromagnétisme, le physicien anglais Michael Faraday (1791-1867) a été le premier à poser l'hypothèse qu'un champ magnétique devrait modifier la lumière. Il a montré qu'un champ magnétique peut faire tourner la polarisation de la lumière, ce qu'on appelle l'*effet Faraday*. Il a aussi avancé l'hypothèse qu'un champ magnétique intense devrait modifier le spectre émis par une source. Cependant, Faraday n'a pas pu vérifier son hypothèse, car l'effet était trop faible pour la sensibilité des appareils de mesure dont il disposait.

L'hypothèse a été vérifiée par le physicien néerlandais Pieter Zeeman (1865-1943). En 1896, il a montré qu'une raie spectrale devient plus large lorsque l'atome est soumis à un champ magnétique intense. L'année suivante, il a amélioré la sensibilité de son montage pour pouvoir observer la séparation d'une raie spectrale en trois raies très rapprochées lorsque le champ magnétique est appliqué. C'est l'*effet Zeeman*. En 1902, le prix Nobel de physique a été décerné à Zeeman pour cette découverte et au physicien Antoon Lorentz pour ses recherches théoriques en électromagnétisme.

Notre étude a porté sur les modifications du spectre causées par l'interaction magnétique entre le spin de l'électron et son mouvement orbital. On veut maintenant étudier l'effet d'un champ magnétique extérieur. On suppose que l'interaction du champ magnétique extérieur est plus faible que l'interaction causée par le couplage spin-orbite.

Pour comprendre le mécanisme de l'effet Zeeman, on doit analyser le moment magnétique de l'électron. Selon l'équation 12.50, un électron possède un moment magnétique proportionnel à son moment cinétique orbital :

$$\vec{\boldsymbol{\mu}}_\ell = -\frac{e}{2m}\vec{\mathbf{L}}\,, \tag{12.53}$$

car un électron qui tourne est équivalent à une boucle de courant. En appliquant un champ magnétique extérieur, ce dernier exerce un moment de force qui tend à aligner le moment magnétique dans le même sens que le champ magnétique. L'énergie potentielle magnétique associée à l'orientation du dipôle magnétique par rapport au champ magnétique est (*voir la section 9.6 du tome 2*) :

$$U_{m_\ell} = -\vec{\boldsymbol{\mu}}_\ell \cdot \vec{\mathbf{B}} = \frac{e}{2m}\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{B}}\,. \tag{12.54}$$

On suppose que le champ magnétique est orienté dans le sens de l'axe des z ($\vec{\mathbf{B}} = B\vec{\boldsymbol{k}}$). L'énergie magnétique dépend alors du nombre quantique m_ℓ :

$$U_{m_\ell} = \frac{e}{2m}L_z B = \frac{e\hbar}{2m}m_\ell B = \mu_\mathrm{B} m_\ell B\,. \tag{12.55}$$

C'est pour cette raison que le nombre quantique m_ℓ est appelé le *nombre quantique magnétique*. La constante μ_B est appelée le *magnéton de Bohr*. Sa valeur est

$$\mu_\mathrm{B} = \frac{e\hbar}{2m} = 9{,}274 \times 10^{-24}\ \mathrm{J/T} = 5{,}788 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV/T}\,. \tag{12.56}$$

Le spin de l'électron génère aussi un moment magnétique $\vec{\mu}_s$, ce qui change l'énergie magnétique. Lorsque le champ extérieur est plus faible que le champ magnétique interne de l'atome, l'effet Zeeman est plus faible que le couplage spin-orbite. Le résultat est que l'énergie magnétique U_Z produite par l'effet Zeeman (à cause du spin et du moment cinétique orbital) est proportionnelle au nombre quantique m_j:

$$U_Z = \mu_B g_j m_j B \,,$$

où g_j est un facteur numérique qui dépend de j et de ℓ, appelé le *facteur de Landé*. L'élément essentiel ici est que l'énergie magnétique dépend du nombre quantique magnétique m_j. Pour $m_j > 0$, l'énergie du niveau augmente alors que pour $m_j < 0$, l'énergie du niveau diminue.

En absence d'un champ magnétique extérieur, l'énergie ne dépend pas du nombre quantique m_j. Donc, le niveau d'énergie spécifié par le nombre quantique j consiste en $2j + 1$ états dégénérés. En appliquant un champ magnétique extérieur, on lève la dégénérescence: l'énergie dépend maintenant du nombre quantique m_j. La figure 12.28 illustre l'effet Zeeman sur les niveaux associés à une transition $3p_{1/2} \rightarrow 2s_{1/2}$. En appliquant un champ magnétique extérieur, chaque niveau se divise en deux états distincts. La raie spectrale de la transition $3p_{1/2} \rightarrow 2s_{1/2}$ se divise alors en quatre raies spectrales très rapprochées lorsqu'on applique le champ magnétique.

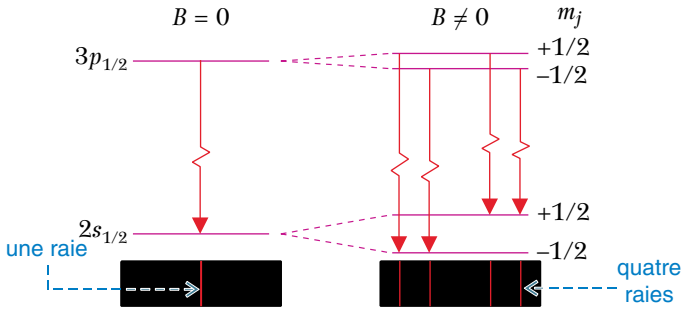


FIGURE 12.28
En appliquant un champ magnétique, les niveaux d'énergie se divisent selon la valeur de m_j.

Comme dans le cas de l'étude de la structure fine, il existe une règle de sélection qui permet d'obtenir les transitions les plus probables, c'est-à-dire les transitions qui sont observées. L'effet Zeeman ajoute la règle suivante:

$$\Delta m_j = 0, \pm 1 \,. \tag{12.57}$$

L'effet Zeeman est utilisé par les astronomes pour mesurer le champ magnétique du Soleil, entre autres dans les taches solaires, en plus de mesurer le champ magnétique produit par des étoiles et par notre Galaxie.

EXEMPLE 12.7 L'effet Zeeman

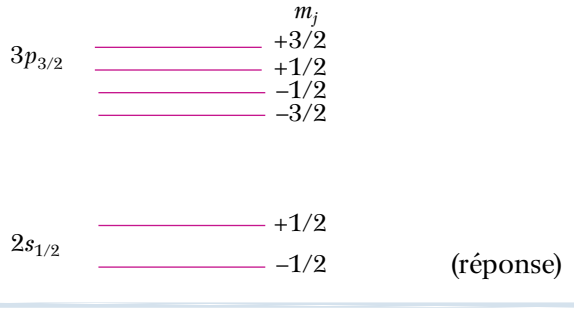
Le spectre d'hydrogène montre une raie rouge produite par la transition $3p_{3/2} \rightarrow 2s_{1/2}$.
On applique un champ magnétique extérieur $\vec{\mathbf{B}}$ pour étudier l'effet Zeeman.

a. Tracez les niveaux d'énergie associés aux sous-couches $3p_{3/2}$ et $2s_{1/2}$ lorsque $\vec{\mathbf{B}} \neq \vec{0}$.
b. Combien de transitions se produisent entre ces deux niveaux à cause de l'effet Zeeman ?
c. Tracez le diagramme des transitions.

SOLUTION a.

Décortiquer le problème

Pour le niveau $2s_{1/2}$, $m_j = \pm 1/2$. Ce niveau va donc se diviser en deux lorsque le champ magnétique extérieur est appliqué. Pour le niveau $3p_{3/2}$, le nombre quantique m_j peut prendre les valeurs $m_j = \pm 3/2, \pm 1/2$. Le niveau va se diviser en quatre. Le diagramme des niveaux est présenté à la figure 12.29.



(réponse)

FIGURE 12.29
Le diagramme des niveaux d'énergie pour l'exemple 12.7

SOLUTION b.

Identifier la clé

La clé est donnée par la règle de sélection de l'équation 12.57 :

$$\Delta m_j = 0, \pm 1 \ . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

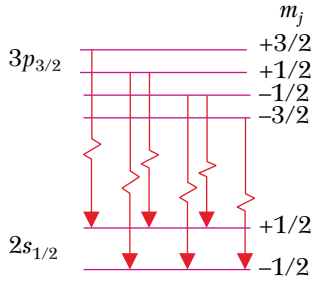
Parmi les huit possibilités de transition, les transitions $3p_{3/2} \rightarrow 2s_{-1/2}$ et $3p_{-3/2} \rightarrow 2s_{1/2}$ ne respectent pas la condition (i). Donc,

il y a 6 transitions. (réponse)

SOLUTION c.

Résoudre le problème

Les transitions sont illustrées à la figure 12.30 :



(réponse)

FIGURE 12.30
Les transitions entre les niveaux $3p_{3/2}$ et $2s_{1/2}$

Valider la réponse

Toutes les transitions illustrées respectent la règle de sélection.

12.7 La structure hyperfine

Nous avons étudié plusieurs facteurs qui changent l'énergie d'un état de l'atome d'hydrogène. Le proton a également un spin $s = 1/2$. Il se comporte aussi comme un dipôle magnétique qui peut interagir avec le champ magnétique produit par l'électron. Si on note $\vec{\mathbf{S}}_p$ le vecteur spin du proton, le moment magnétique du proton est (*voir l'équation 12.49*)

$$\vec{\boldsymbol{\mu}}_p = +\frac{g_p e}{2m_p}\vec{\mathbf{S}}_p \ , \qquad (12.58)$$

où m_p est la masse du proton et $g_p = 5{,}59$, le facteur g pour le proton. Ce facteur est différent pour le proton, car celui-ci a une structure interne, avec trois particules chargées qu'on appelle les *quarks*. Le moment magnétique est dans le même sens que le spin du proton, car ce dernier est une particule ayant une charge positive. Le moment magnétique du proton est beaucoup plus faible que le moment magnétique de l'électron, car le proton a une masse beaucoup plus élevée que l'électron.

Le moment magnétique du proton produit un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ qui interagit avec l'électron. On se limite à l'effet sur l'état fondamental $1s_{1/2}$. Pour cet état, la fonction d'onde de l'électron a sa valeur maximale à $r = 0$, à la position du proton.

Pour comprendre qualitativement la relation entre l'énergie magnétique et l'orientation du spin du proton, on imagine l'électron comme un nuage électronique. Le spin de l'électron $\vec{\mathbf{S}}_é$ génère le moment magnétique de l'électron $\vec{\boldsymbol{\mu}}_é$, opposé au spin, ce qui produit un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$**.** Au centre du nuage, ce champ est parallèle à $\vec{\boldsymbol{\mu}}_é$, donc opposé au spin de l'électron $\vec{\mathbf{S}}_é$ (*voir la figure 12.31a*). Ce champ tend à aligner le moment magnétique du proton dans le même sens. Comme le montre la figure 12.31b, l'énergie est minimale lorsque le moment magnétique du proton est aligné sur le champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$**,** donc quand les deux spins sont opposés.

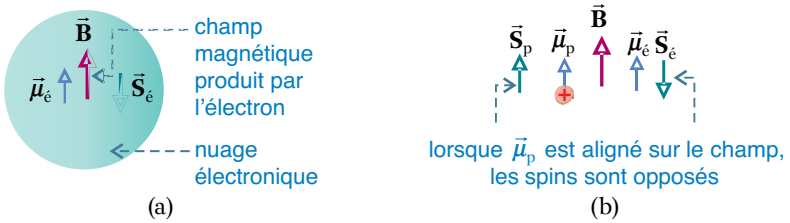


FIGURE 12.31
(a) L'électron dans la couche 1s produit un champ magnétique opposé à son spin $\vec{\mathbf{S}}_é$ au centre. (b) Le champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ tend à aligner le moment magnétique du proton.

Dans le calcul quantique, on doit combiner les deux spins pour obtenir le spin total :

$$\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{S}}_p + \vec{\mathbf{S}}_é \,. \tag{12.59}$$

Comme chaque particule a un spin $s_p = s_é = 1/2$, il y a deux configurations possibles : un état de spin total $s = 0$ (le *singulet*, avec $m_s = 0$) et un état de spin $s = 1$ (le *triplet*, avec $m_s = 0$ ou ± 1). L'état singulet a une plus faible énergie que l'état triplet, car le singulet correspond à la configuration où les spins sont opposés. Le diagramme des niveaux est présenté à la figure 12.32.

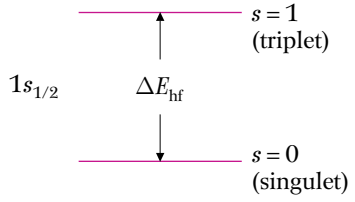


FIGURE 12.32
La structure hyperfine de l'état $1s_{1/2}$ de l'atome d'hydrogène

La différence d'énergie entre les deux niveaux est très faible. Pour cette raison, on parle de la *structure hyperfine*. On obtient

$$\Delta E_{hf} = 5{,}88 \times 10^{-6} \text{ eV} \,.$$

La transition entre les deux états est possible. Cette transition produit un photon dans le domaine des micro-ondes. La longueur d'onde est

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = 21 \text{ cm} \,.$$

Cette micro-onde est très importante en astronomie. On l'appelle la *raie de 21 cm*. En utilisant des radiotélescopes, les astronomes peuvent la détecter et selon l'intensité, ils peuvent obtenir de l'information sur la distribution de l'hydrogène dans les nuages interstellaires. C'est à l'aide de ce rayonnement qu'il a été possible de connaître la forme de notre Galaxie.

La structure hyperfine est aussi le principe utilisé dans les horloges atomiques pour mesurer le temps avec une très grande précision. En effet, on se sert de la fréquence du photon qui produit la transition entre deux niveaux hyperfins, car cette fréquence est très précise et stable. On utilise les niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium :

La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

12.8 La résonance magnétique

Nous avons étudié l'effet de l'orientation du spin du proton sur le niveau fondamental. De façon générale, tous les niveaux d'énergie ont une structure hyperfine liée à l'orientation du spin du proton. Supposons qu'à la position du proton, le champ magnétique est $\vec{\mathbf{B}} = B\vec{\boldsymbol{k}}$. L'énergie magnétique liée à l'orientation du spin du proton est (*voir l'équation 12.54*) :

$$U = -\vec{\boldsymbol{\mu}}_{\mathrm{p}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \,. \tag{12.60}$$

Le moment magnétique du proton est proportionnel au spin, ce qui fait qu'il y a deux orientations possibles pour $\vec{\boldsymbol{\mu}}_{\mathrm{p}}$ (*voir la figure 12.33*). Un niveau d'énergie se divise donc en deux niveaux : l'énergie est plus faible lorsque le spin est dans le même sens que le champ $\vec{\mathbf{B}}$, et l'énergie est plus élevée lorsque le spin est dans le sens opposé à $\vec{\mathbf{B}}$ (*voir la figure 12.34*) :

$$U = \pm\, \mu_{\mathrm{p}} B \,,$$

où μ_{p} est le moment magnétique intrinsèque du proton :

$$\mu_{\mathrm{p}} = 1{,}410\,6 \times 10^{-26}\ \mathrm{J/T} \,.$$

La différence d'énergie entre les deux niveaux est proportionnelle au champ magnétique :

$$\Delta E = 2\mu_{\mathrm{p}} B = hf \,. \tag{12.61}$$

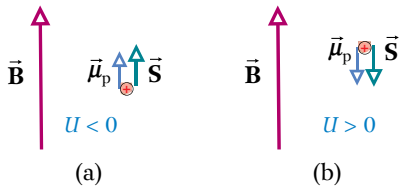


FIGURE 12.33
Les deux états possibles du spin du proton par rapport au champ magnétique : (a) $\vec{\mathbf{S}}$ est dans le même sens que $\vec{\mathbf{B}}$; (b) $\vec{\mathbf{S}}$ est opposé à $\vec{\mathbf{B}}$.

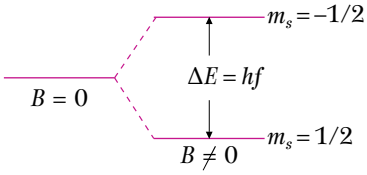


FIGURE 12.34
Un niveau d'énergie se divise en deux selon l'orientation du spin du proton.

Dans un montage de résonance magnétique, un champ magnétique intense $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$ est appliqué. Le champ magnétique à la position du proton est

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_{\text{env}} + \vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}} ,$$

où $\vec{\mathbf{B}}_{\text{env}}$ est le champ magnétique produit par l'environnement du proton. Les protons se trouvent dans l'état fondamental, où le spin est aligné avec le champ $\vec{\mathbf{B}}$. On applique ensuite une onde électromagnétique sinusoïdale, avec une fréquence f_{ext}. Lorsque la fréquence correspond à la fréquence f nécessaire pour produire une transition, l'onde électromagnétique est absorbée. C'est la *résonance magnétique* : il faut que la fréquence f_{ext} ait une valeur particulière pour que l'onde électromagnétique soit absorbée.

La fréquence de résonance dépend du champ résultant, donc du champ extérieur et du champ produit par l'environnement du proton. En pratique, on garde la fréquence f_{ext} constante, et on change le module du champ magnétique B_{ext}, jusqu'à obtenir la condition de résonance. On obtient alors un pic d'absorption.

La technique a permis de développer les appareils d'imagerie par résonance magnétique utilisés en médecine. Les atomes d'hydrogène sont présents dans les molécules formant les tissus. L'environnement de ces atomes produit des champs magnétiques différents d'un endroit à l'autre. On place une partie du corps du patient dans un champ magnétique très intense, et un ordinateur mesure le spectre de résonance magnétique. L'ordinateur produit ensuite une image. La figure 12.35 montre une image d'un cerveau obtenue par résonance magnétique.

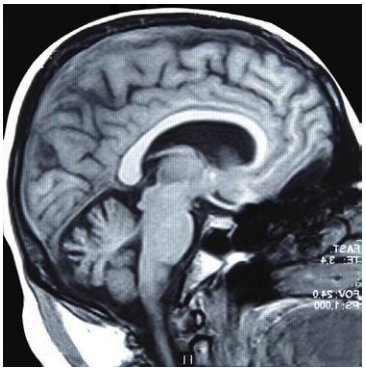


FIGURE 12.35
Une image d'un cerveau obtenue à l'aide d'un appareil à résonance magnétique

12.9 Les atomes à plusieurs électrons

Après avoir bien étudié l'atome d'hydrogène et son spectre, on peut voir comment généraliser ces idées aux autres atomes. Pour un atome quelconque, le noyau est composé de Z protons et d'un certain nombre de neutrons. La charge du noyau est donc $q = +Ze$, où e est la charge élémentaire. Pour que l'atome soit neutre, il faut qu'il y ait Z électrons. Chaque électron subit l'attraction du noyau et la répulsion des autres électrons.

Pour obtenir l'état de l'atome, on doit résoudre l'équation de Schrödinger et obtenir la fonction d'onde de l'atome complet. Il est impossible de résoudre cette équation de façon exacte. La stratégie est plutôt de diviser le problème en une succession d'approximations. La première approximation (la seule que nous allons voir dans cet ouvrage) consiste à considérer que les électrons sont des particules quantiques indépendantes les unes des autres. Chaque électron est soumis à un *puits de potentiel effectif*, qui ne dépend que de la distance r entre l'électron et le noyau :

$$U(r) = U_{\text{noyau}} + U_{\text{é}} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + U_{\text{é}}(r) ,$$

où $U_{\text{é}}(r)$ correspond à l'énergie potentielle engendrée par l'interaction de l'électron et des $Z - 1$ autres électrons de l'atome.

Le potentiel $U(r)$ est inconnu au départ. On peut obtenir les valeurs asymptotiques en faisant une analogie avec une coquille sphérique isolante. Prenons une charge ponctuelle $q = Ze$ (qui représente le noyau) entourée d'une coquille

sphérique uniformément chargée, dont la charge est $Q = -(Z-1)e$ (qui représente le nuage électronique résultant des $Z-1$ autres électrons), comme le montre la figure 12.36. Pour obtenir le champ électrique à une distance r, on utilise une sphère de Gauss de rayon r (*voir le chapitre 3 du tome 2*). Pour $r \to 0$, le champ électrique dépend uniquement de la charge ponctuelle $q = Ze$ (*voir la figure 12.36a*) ; l'électron subit uniquement l'interaction du noyau, et l'énergie potentielle est

$$U(r) \approx -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad (\text{pour } r \to 0) \, .$$

Pour un électron très loin du noyau (lorsque $r \to \infty$), la charge électrique qui participe à l'interaction est $Q_{\text{int}} = (Ze) - (Z-1)e = e$ (*voir la figure 12.36b*). Les $(Z-1)$ autres électrons produisent un *effet d'écran,* et l'énergie potentielle est

$$U(r) \approx -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad (\text{pour } r \to \infty) \, .$$

Il est possible de supposer une fonction $U(r)$ avec une interpolation entre les deux valeurs asymptotiques. Une méthode par itérations permet alors de résoudre le problème. Le résultat est une configuration de niveaux d'énergie, comme on l'a obtenue pour l'atome d'hydrogène.

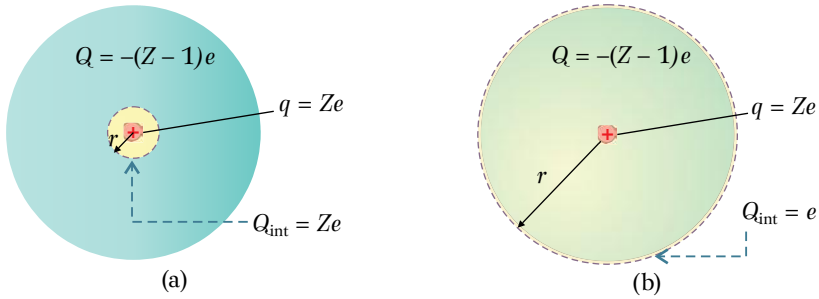


FIGURE 12.36

(a) Pour $r \to 0$, le potentiel effectif dépend uniquement de la charge du noyau. (b) Pour $r \to \infty$, les autres électrons produisent un effet d'écran.

Comme l'énergie potentielle a une symétrie sphérique, on peut décrire chaque électron à l'aide des quatre nombres quantiques n, ℓ, m_ℓ et m_s. Contrairement à l'atome d'hydrogène, l'énergie potentielle n'est pas seulement une fonction $1/r$. Pour cette raison, l'énergie dépend de n et de ℓ. Nous avons vu, en étudiant les fonctions d'onde de l'atome d'hydrogène à la section 12.4, que dans le cas des sous-couches s ($\ell = 0$), la fonction d'onde est maximale pour $r = 0$, alors que pour $\ell \neq 0$, les maximums de la fonction d'onde se retrouvent à une plus grande distance. Cela veut dire qu'un électron dans une sous-couche s subit plus l'interaction du noyau, et l'énergie du niveau s doit être plus faible que l'énergie des autres sous-couches. Donc, pour une couche n donnée, le niveau de la sous-couche s est plus bas. On peut donc dire que l'énergie augmente avec la valeur de n et avec la valeur de ℓ.

La figure 12.37 montre la comparaison entre les niveaux de l'atome d'hydrogène (dans lequel l'énergie dépend uniquement de n) et les niveaux d'un atome à plusieurs électrons. On remarque que les sous-couches s ont une énergie beaucoup plus faible que dans le cas de l'hydrogène, alors que les niveaux d et f sont très peu modifiés. L'effet d'écran est évident dans ce diagramme. On remarque aussi qu'à partir de $n = 3$, les couches se superposent : la sous-couche $4s$ a une énergie

plus faible que la sous-couche $3d$. De même, la sous-couche $5s$ se retrouve à un niveau plus faible que $4d$, et les sous-couches $5p$ et $6s$ se retrouvent en bas de la sous-couche $4f$. Lorsque l'atome contient un grand nombre d'électrons, la configuration devient complexe.

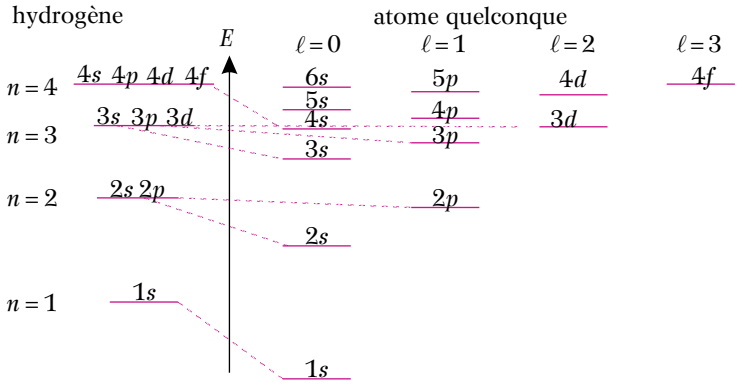


FIGURE 12.37
La comparaison entre les niveaux de l'atome d'hydrogène et un atome quelconque

Les éléments avec $Z \leq 10$

Pour obtenir la configuration associée à l'état fondamental d'un atome, on doit placer les électrons sur les niveaux pour obtenir l'énergie minimale. Selon le principe d'exclusion de Pauli (*voir la section 11.9*), les électrons ne peuvent pas avoir les mêmes nombres quantiques. Il y a deux états de spin possibles ($m_s = \pm 1/2$). De plus, pour une valeur de ℓ donnée, il y a $2\ell + 1$ valeurs possibles de m_ℓ. Une *orbitale* correspond à une valeur donnée de n, de ℓ et de m_ℓ. Chaque orbitale contient donc deux états possibles. En combinant ces deux facteurs, on obtient que chaque sous-couche ℓ peut contenir $2\ell + 1$ orbitales, donc $4\ell + 2$ électrons (*voir le tableau 12.1*).

TABLEAU 12.1
Le nombre d'états dans une sous-couche

Sous-couche	Nombre d'états
s	2
p	6
d	10
f	14

Pour obtenir de l'information sur l'état fondamental des atomes, il est intéressant de mesurer l'*énergie d'ionisation*, c'est-à-dire l'énergie minimale pour enlever un électron d'un atome. La figure 12.38 montre le graphique de l'énergie d'ionisation en fonction du numéro atomique Z des atomes. On doit pouvoir expliquer la forme de cette courbe en fonction des nombres quantiques.

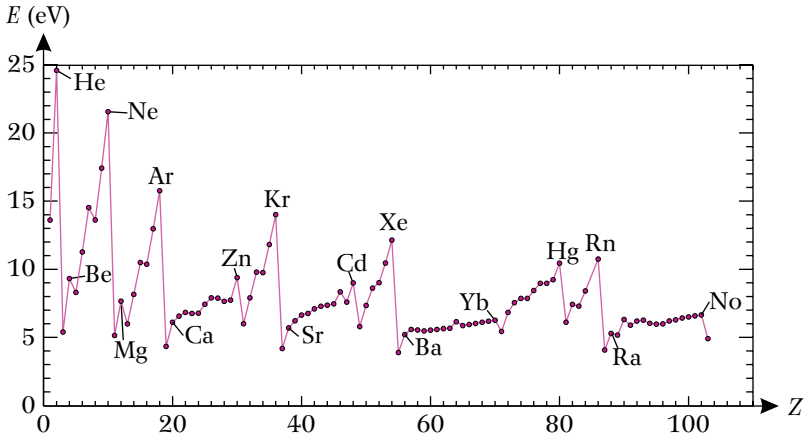


FIGURE 12.38
L'énergie d'ionisation en fonction du numéro atomique. Les éléments illustrés sont ceux pour lesquels une sous-couche est fermée.

Si on commence avec l'hydrogène ($Z = 1$), on sait que l'énergie dans l'état fondamental est $E_1 = -13{,}6$ eV. Donc, l'énergie d'ionisation est de 13,6 eV.

L'hélium possède deux protons dans son noyau et deux électrons. La couche $n = 1$ possède une seule sous-couche $\ell = 0$, pour laquelle le nombre quantique ne prend que la valeur $m_\ell = 0$. Le nombre quantique magnétique de spin peut prendre deux valeurs, $m_s = +1/2$ et $m_s = -1/2$. L'état fondamental de l'hélium correspond donc à l'état où les deux électrons sont dans la sous-couche $1s$, avec des spins opposés, comme le montre la figure 12.39a. On dit que la couche $n = 1$ est *fermée*, car elle contient le nombre maximal d'électrons qui respecte le principe d'exclusion de Pauli.

L'énergie d'ionisation de l'hélium est d'environ 25 eV, ce qui représente la plus grande valeur parmi les atomes. Cela indique qu'il est très difficile d'enlever l'électron à un atome d'hélium. Il est aussi très difficile de donner un électron à un atome d'hélium, car la couche $n = 1$ est fermée. Donc, l'hélium est chimiquement inerte. C'est un *gaz noble*, qu'on appelle aussi *gaz rare**.

Si l'atome absorbe de l'énergie (par l'absorption d'un photon ou par une collision, par exemple), il peut être excité. Le premier état excité est illustré à la figure 12.39b, où l'un des électrons est monté dans la sous-couche $2s$. Comme les niveaux $1s$ et $2s$ sont éloignés, il faut une énergie importante pour exciter l'atome d'hélium.

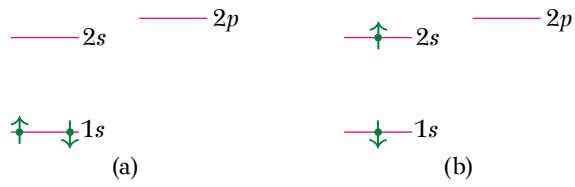


FIGURE 12.39
(a) L'état fondamental de l'hélium. (b) Le premier état excité pour l'hélium.

Pour préciser la configuration électronique d'un élément, on indique les sous-couches avec le nombre d'électrons placé en exposant. Par exemple, dans le cas des états de l'atome d'hélium illustrés à la figure 12.39, on a

$$1s^2 \qquad \text{(état fondamental)}$$

$$1s^1 2s^1 \qquad (1^{\text{er}} \text{ état excité}) \ .$$

En ce qui concerne le lithium, qui contient trois électrons, la sous-couche $1s$ peut contenir deux électrons. Le troisième électron doit se trouver sur la sous-couche $2s$, car cette sous-couche a une énergie inférieure à la sous-couche $2p$.

* Le terme *gaz rare* n'est pas très bien choisi, étant donné que l'hélium représente environ 24 % de la matière de l'Univers.

Les autres niveaux sont vides. La configuration électronique est donc $1s^2 2s^1$, et le diagramme correspondant est présenté à la figure 12.40a. Le troisième électron se retrouve seul dans la couche $n = 2$. C'est un *électron de valence*. Dans la sous-couche $2s$, l'électron a une plus grande probabilité de se trouver à une distance plus grande du noyau, ce qui fait qu'il est moins lié. C'est ce que montre la figure 12.38. Le lithium est donc chimiquement actif, car le troisième électron peut facilement quitter l'atome de lithium.

L'élément suivant est le béryllium, qui contient quatre électrons. L'état fondamental est illustré à la figure 12.40b. Le quatrième électron se trouve dans la sous-couche $2s$. La sous-couche $2s$ est fermée. On remarque, dans la figure 12.38, que l'énergie de liaison est plus élevée pour le béryllium que pour le lithium ou pour le bore, l'élément suivant. L'énergie d'ionisation est quand même beaucoup plus faible que l'hélium, car la couche $n = 2$ n'est pas fermée. En effet, on peut avoir des états avec $\ell = 1$, ce qui forme la sous-couche $2p$.

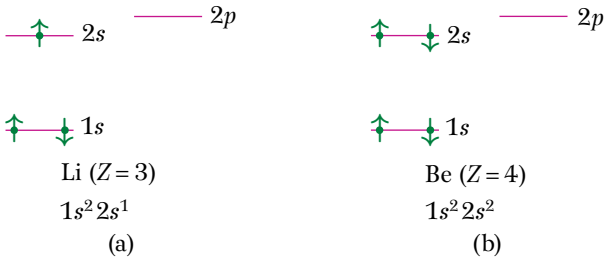


FIGURE 12.40
Les électrons dans l'état fondamental : (a) du lithium ; (b) du béryllium.

Dans le cas des éléments dont le numéro atomique se situe entre $Z = 5$ et $Z = 10$, les électrons remplissent graduellement la sous-couche $2p$, comme le montre la figure 12.41. La sous-couche $2p$ et donc la couche $n = 2$ sont fermées pour le néon ($1s^2 2s^2 2p^6$), ce qui fait que l'énergie d'ionisation pour le néon est élevée. Comme l'hélium, le néon réagit très peu chimiquement, et il fait aussi partie des gaz nobles. Pour la couche $n = 2$, le maximum de la densité de probabilité radiale se trouve à une distance plus grande que dans le cas de la couche $n = 1$. On peut donc dire que les électrons se trouvent plus éloignés du noyau, ce qui fait qu'ils sont moins liés. C'est pour cette raison que l'énergie de liaison est plus faible pour le néon que pour l'hélium.

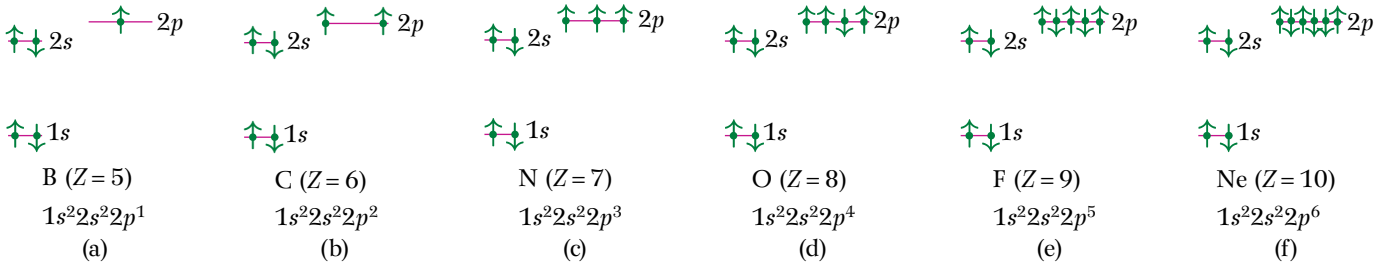


FIGURE 12.41
L'état fondamental pour les éléments suivants : (a) le bore ; (b) le carbone ; (c) l'azote ; (d) l'oxygène ; (e) le fluor ; (f) le néon.

Les éléments $Z > 10$

Dans la figure 12.38, pour les éléments $Z = 11$ (le sodium) à l'élément $Z = 18$ (l'argon), on remarque que la structure est la même que celle entre $Z = 3$ et $Z = 10$. L'énergie d'ionisation est faible pour le sodium. Sa configuration électronique est $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$. Comme pour le lithium, le dernier électron se retrouve seul sur une couche. Il a des propriétés semblables à celles du lithium. Pour le magnésium ($Z = 12$), la sous-couche $3s$ est fermée, ce qui fait que son énergie d'ionisation est plus élevée que celle des atomes voisins. La courbe d'énergie d'ionisation augmente de façon semblable jusqu'à l'argon ($Z = 18$), pour lequel la sous-couche $3p$ est fermée.

De prime abord, on s'attendrait à ce que la courbe d'énergie d'ionisation montre une structure avec 10 atomes à partir de $Z = 19$, pour correspondre au remplissage de la sous-couche $3d$. Ce n'est pas le cas, car l'énergie de la sous-couche $4s$ est inférieure à l'énergie de la sous-couche $3d$, comme le montre la figure 12.37 de la page 455. Selon cette figure,

$$E_{4s} < E_{3d} < E_{4p} \ .$$

On obtient donc une nouvelle structure entre $Z = 19$ et $Z = 36$: le remplissage d'abord de la sous-couche $4s$, puis la sous-couche $3d$, et finalement, la sous-couche $4p$, avec le krypton, qui est un gaz noble. Il faut aussi remarquer que les niveaux d'énergie correspondant à $4s$ et à $3d$ sont très rapprochés, de telle sorte qu'il y a des atomes pour lesquels l'état fondamental possède un seul électron dans la sous-couche $4s$ et des électrons dans la sous-couche $3d$. C'est le cas du chrome, dont la configuration est $[\text{Ar}]3d^5 4s^1$ (où [Ar] indique la configuration de l'argon).

On peut continuer à étudier la courbe d'énergie d'ionisation pour les atomes ayant un numéro atomique plus élevé. Les mêmes idées se retrouvent dans le *tableau périodique des éléments*, présenté dans l'annexe G. Les deux premières lignes correspondent aux deux premières couches. Les éléments d'une même colonne ont des propriétés chimiques semblables, car les électrons des couches extérieures ont la même configuration.

Les éléments à partir de $Z = 93$ ne sont pas observés dans la nature, mais ils ont été produits en laboratoire. Pour ces éléments, les noyaux sont instables et se désintègrent. Nous étudierons les noyaux et la radioactivité au chapitre 13.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 12.4

La configuration d'un atome dans un état excité est

$$1s^2 2s^2 2p^5 3d^1 \ .$$

Quelle est la configuration de l'état fondamental ?

12.10 La lumière d'un laser

Le mot *laser* vient de l'acronyme formé de l'expression anglaise *light amplification by stimulated emission of radiation* (amplification de lumière par émission stimulée de radiation). Parmi les inventions utilisant les applications de la mécanique quantique, le laser est l'une des plus importantes.

Les lasers sont employés dans la vie de tous les jours pour lire des disques numériques (CD, DVD et Blu-ray) ou pour lire le code barres des articles à l'épicerie. Ils servent aussi en médecine dans les chirurgies qui corrigent la myopie de façon permanente. On les trouve dans les systèmes de communication par fibres optiques et les systèmes de guidage, et ils permettent de prendre des mesures très précises, par exemple de la distance entre la Terre et la Lune.

Il existe plusieurs types de lasers, qui fonctionnent avec différentes substances et produisent de la lumière de différentes longueurs d'onde. La lumière issue d'un laser a les propriétés suivantes :

1. La lumière est monochromatique : la longueur d'onde d'un laser a une très faible incertitude relative, qui peut atteindre une incertitude relative de 10^{-15}.

2. La lumière est cohérente : la distance de cohérence peut atteindre plusieurs mètres. Donc, la lumière issue d'un laser peut être séparée, parcourir de très grandes distances, et produire des interférences en se recombinant.

3. La lumière est directionnelle : un faisceau issu d'un laser diverge seulement à cause de la diffraction à la sortie du laser. Cette divergence est beaucoup plus faible que la divergence qu'on peut obtenir à partir d'une lampe et d'une lentille convergente.

4. La lumière d'un laser peut être focalisée sur une très petite surface, ce qui peut produire une irradiance très importante.

L'émission stimulée

Nous avons vu jusqu'à maintenant deux processus d'interaction entre un photon et un atome qui effectue une transition. Prenons un atome qui possède les niveaux d'énergie E_1 et E_2. Lorsqu'un photon a une longueur d'onde $\lambda = hc/\Delta E$ qui correspond à la différence d'énergie $\Delta E = E_2 - E_1$ entre deux niveaux d'énergie, le photon peut être absorbé par l'atome, qui effectue une transition du niveau 1 vers le niveau 2 (*voir la figure 12.42a, page suivante*). C'est l'absorption. De même, lorsqu'un atome est excité au niveau 2, il peut émettre un photon ayant une longueur d'onde $\lambda = hc/\Delta E = hc/(E_2 - E_1)$, et effectuer une transition vers le niveau 1 (*voir la figure 12.42b*). C'est l'*émission spontanée*.

En 1917, Albert Einstein avance de nouveau une idée importante : il doit exister un troisième processus d'interaction, appelé l'*émission stimulée*. Ce processus est nécessaire pour qu'un échantillon d'atomes puisse atteindre un équilibre thermodynamique. Comme le montre la figure 12.42c à la page suivante, l'émission stimulée se produit lorsqu'un atome est au niveau excité E_2 et qu'un photon ayant une longueur d'onde $\lambda = hc/\Delta E$ est incident. Le photon induit la transition $2 \rightarrow 1$, ce qui produit un deuxième photon. Les deux photons ont alors la même longueur d'onde et ils ont la même phase. Ils sont identiques. Einstein a aussi montré que la probabilité par atome est la même pour l'absorption et pour l'émission spontanée.

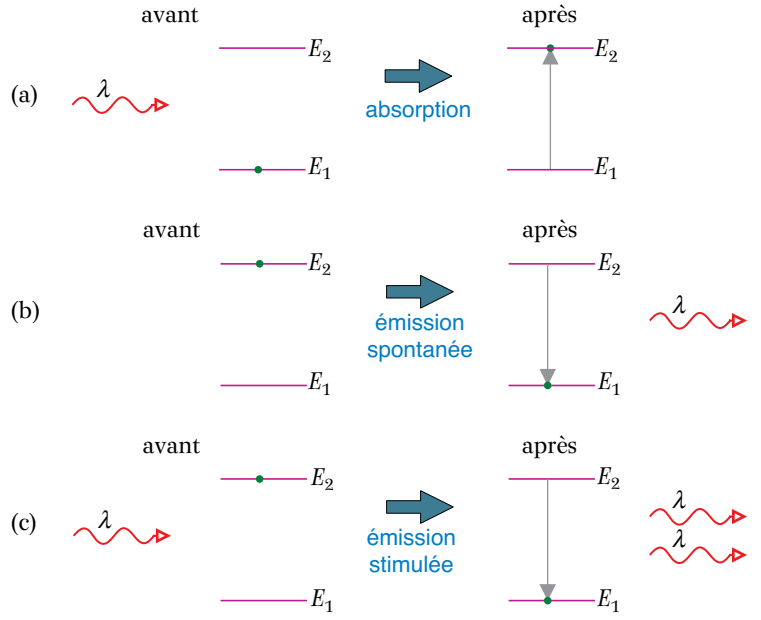


FIGURE 12.42
Les trois processus d'interaction entre un photon et un atome lorsque $\lambda = hc/(E_2 - E_1)$

Dans les conditions normales, les atomes demeurent dans un état excité pendant un temps très court. À l'intérieur d'un échantillon d'atome, il y a normalement beaucoup plus d'atomes dans l'état fondamental que dans un état excité. Si on éclaire l'échantillon avec des photons ayant la bonne longueur d'onde, ils seront absorbés plutôt que de produire des émissions stimulées. Il faut que certaines conditions soient remplies pour obtenir un grand nombre d'émissions stimulées.

L'effet laser

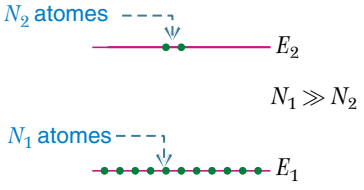


FIGURE 12.43
La répartition normale des atomes entre les deux états E_1 et E_2

Soit un groupe d'atomes qui ont deux niveaux d'énergie E_1 et E_2, entre lesquels on veut produire de l'émission stimulée. Il y a N_1 atomes au niveau E_1 et N_2 au niveau E_2 (*voir la figure 12.43*). Dans des conditions normales, $N_1 \gg N_2$, car un atome au niveau E_2 se désexcite très rapidement en émettant un photon par émission spontanée. Si un photon ayant la bonne longueur d'onde $\lambda = hc/\Delta E$ est incident, il y a une très grande probabilité pour qu'il produise une absorption plutôt qu'une émission stimulée.

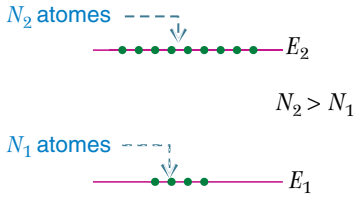


FIGURE 12.44
Une inversion de population consiste à avoir $N_2 > N_1$.

Pour obtenir un grand nombre de photons issus de l'émission stimulée, il faut plutôt avoir une configuration comme celle de la figure 12.44, où il y a plus d'atomes au niveau excité qu'au niveau fondamental. C'est une *inversion de population*. Pour obtenir cette configuration, il faut placer un grand nombre d'atomes au niveau excité, sans que ceux-ci se désexcitent de façon spontanée. C'est le *pompage optique*. Avec une inversion de population, on peut obtenir un grand nombre de photons identiques : un premier photon produit une émission stimulée, ce qui donne deux photons. Ces photons peuvent eux aussi produire une émission stimulée. Comme le montre la figure 12.45, on obtient une réaction en chaîne, qui produit un très grand nombre de photons identiques. C'est l'*effet laser*. On obtient un grand nombre de photons identiques : ces derniers ont la même longueur d'onde et la même phase, et ils se déplacent dans le même sens. Il y a une *amplification* d'un photon en un très grand nombre de photons, ce qui constitue une impulsion lumineuse.

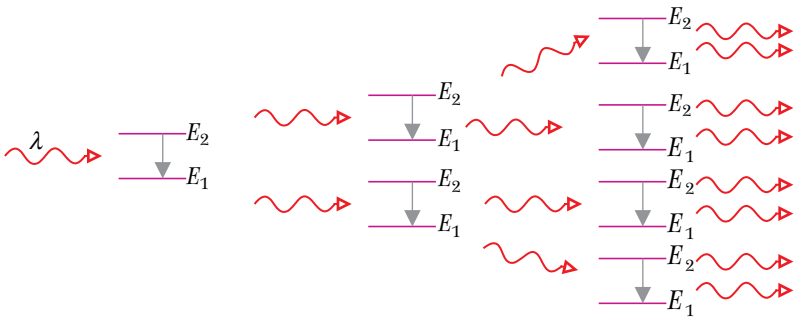


FIGURE 12.45
Un premier photon incident produit une réaction en chaîne d'émissions stimulées, ce qui génère un très grand nombre de photons identiques.

Pour obtenir un effet laser important, on place la substance entre deux miroirs, dont l'un laisse passer une petite fraction de la lumière incidente. C'est une *cavité optique*, qu'on appelle aussi un *résonateur* (*voir la figure 12.46*). Les photons sont réfléchis un grand nombre de fois pour pouvoir interagir avec les atomes un grand nombre de fois. De cette façon, on obtient une impulsion lumineuse intense. Certains lasers produisent des impulsions courtes séparées par un temps plus long. Pour ces lasers, le pompage optique s'effectue lentement, et l'émission stimulée se produit rapidement. D'autres lasers produisent un faisceau continu. Pour ce faire, il faut que le pompage optique soit continu, de telle sorte que l'inversion de population est gardée lors de l'émission stimulée. Donc, il faut pomper de nouveaux atomes au niveau excité au même rythme que les atomes émettent des photons.

Défi animé 12.2
Quels facteurs influent sur l'intensité lumineuse produite par un laser ?

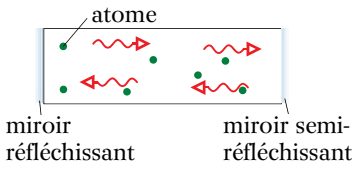


FIGURE 12.46
Une cavité optique est constituée de la substance à exciter et de deux miroirs, dont l'un est semi-réfléchissant.

Le laser à hélium-néon

Le laser à hélium-néon est utilisé dans les démonstrations physiques. Il produit une lumière rouge ayant une longueur d'onde de 632,8 nm. La cavité optique est constituée d'un tube de verre dans lequel on place un mélange d'environ 90 % d'hélium et d'environ 10 % de néon. On applique une décharge de quelques kilovolts dans le tube. Deux miroirs sont placés aux extrémités du tube ; l'un des miroirs laisse passer environ 2 % de la lumière, de telle sorte que la lumière du laser peut sortir de la cavité optique.

L'émission stimulée se produit en plusieurs étapes, et c'est le néon qui est la substance dans laquelle il y a un effet laser. D'abord, les décharges électriques excitent des atomes d'hélium dans l'état $1s^1 2s^1$. Cet état est métastable, c'est-à-dire que l'hélium peut rester un certain temps dans cet état, car la probabilité de transition est faible. Il n'y a cependant pas d'inversion de population, étant donné qu'il y a plus d'atomes d'hélium dans l'état fondamental. L'énergie d'excitation de l'état $1s^1 2s^1$ est de 20,61 eV.

Comme le montre la figure 12.47, l'atome de néon a un état excité (l'état $5s$) à une énergie de 20,66 eV au-dessus de son état fondamental. Lors d'une collision entre un atome d'hélium excité et un atome de néon, un atome excité d'hélium peut exciter un atome de néon. Le néon possède aussi un état excité (l'état $3p$ à une énergie de 18,7 eV au-dessus de l'état fondamental). L'état $3p$ est à peu près vide, car il n'a pas la bonne énergie pour être excité par collision avec l'hélium. De plus, un atome dans l'état $3p$ se désexcite très rapidement vers un état inférieur. Avec les collisions, il y a de plus en plus d'atomes dans l'état supérieur $5s$, et l'état $3p$ demeure vide. Il y a alors une inversion de population entre

ces deux états. Lorsqu'un photon est émis par une émission spontanée, il induit des émissions stimulées et la réaction en chaîne commence.

Il n'est pas nécessaire d'avoir beaucoup d'atomes de néon dans l'état $5s$, car l'état $3p$ demeure à peu près vide. Chaque atome de néon qui effectue la transition $5s \rightarrow 3p$ en émettant un photon se désexcite très rapidement vers l'état inférieur $3s$. De plus, il est possible de produire de façon continue l'excitation à l'état $5s$. Donc, le laser à hélium-néon peut fonctionner de façon continue.

Un laser hélium-néon typique produit un faisceau ayant une longueur d'onde de 632,816 nm dans l'air, à une puissance d'environ 1 mW, pour un faisceau d'environ 1 mm de diamètre.

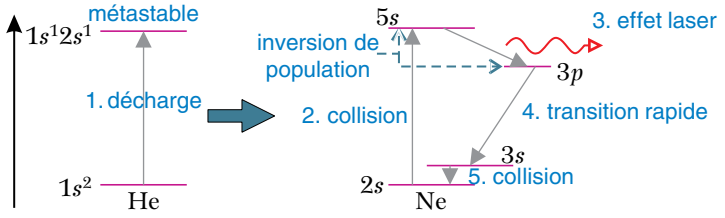


FIGURE 12.47
Le diagramme des niveaux d'énergie pour obtenir l'effet laser dans le néon

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié les atomes et particulièrement l'atome d'hydrogène, en nous appuyant sur la théorie quantique.

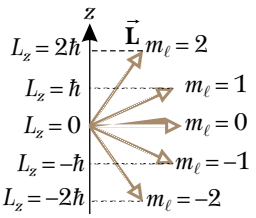
LES LOIS ET LES PRINCIPES

- L'état des électrons dans un atome est décrit par les nombres quantiques n, ℓ, m_ℓ et m_s.

$$n = 1, 2, \ldots \qquad \ell = 0, \ldots, n-1$$
$$m_\ell = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell \qquad m_s = -1/2 \text{ ou } 1/2\ .$$

- L'**énergie** de l'atome est quantifiée ; l'énergie dépend seulement de n (atome d'hydrogène) ou de n et ℓ (autres atomes).
- **Le module et la composante z du moment cinétique** sont quantifiés :

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar$$
$$L_z = m_\ell \hbar\ .$$



- Un moment cinétique génère un moment magnétique $\vec{\boldsymbol{\mu}}_\ell$, l'équivalent d'un dipôle magnétique :

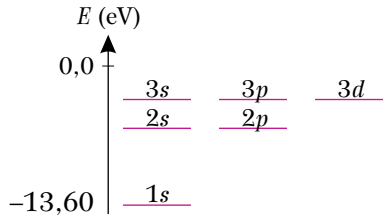
$$\vec{\boldsymbol{\mu}}_\ell = -\frac{e}{2m}\vec{\mathbf{L}} \qquad \vec{\boldsymbol{\mu}}_s = -\frac{ge}{2m}\vec{\mathbf{S}} \approx -\frac{e}{m}\vec{\mathbf{S}}.$$

LES RÉSULTATS

Pour l'**atome d'hydrogène**

- Les **niveaux d'énergie** dépendent de n :

$$E_n = -\frac{mc^2\alpha^2}{2}\frac{1}{n^2} = -\frac{13{,}60\text{ eV}}{n^2}\ .$$



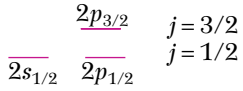
- Le **spectre** de l'hydrogène est produit par des transitions entre le niveau n_h et le niveau n_b :

$$\frac{hc}{\lambda} = E_\text{h} - E_\text{b} = 13{,}60\text{ eV}\left(\frac{1}{n_\text{b}^2} - \frac{1}{n_\text{h}^2}\right).$$

- Les raies spectrales se regroupent en **séries** :

$n_\text{b} = 1$	ultraviolet	(Lyman)
$n_\text{b} = 2$	visible et UV	(Balmer)
$n_\text{b} = 3$	infrarouge	(Paschen)

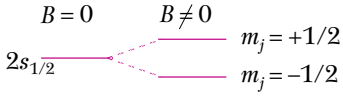
- La **structure fine** est causée par le couplage spin-orbite et par les effets relativistes. L'énergie est plus grande pour une valeur de j plus élevée :



- Le moment cinétique total est $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}$ et

$$j = |\ell - 1/2| \text{ ou } j = \ell + 1/2$$
$$m_j = -j, -j+1, \ldots, j\ .$$

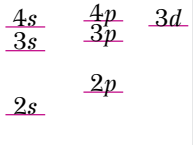
- Dans l'**effet Zeeman**, on applique un champ magnétique extérieur $\vec{\mathbf{B}}$. Une petite valeur d'énergie magnétique est ajoutée. Cette énergie est proportionnelle à m_j :



- La **structure hyperfine** dépend de l'orientation du spin du proton par rapport au spin de l'électron.
- Les transitions probables sont celles qui sont déterminées par les règles de sélection :

$$\Delta\ell = \pm 1 \qquad \Delta j = 0, \pm 1 \qquad \Delta m_j = 0, \pm 1\ .$$

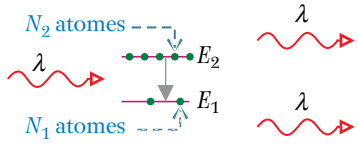
Les **atomes à plusieurs électrons**



- Les électrons se déplacent dans un **puits de potentiel effectif**, produit par le noyau et par les autres électrons.
- Un électron ayant une faible valeur de ℓ subit davantage l'effet du noyau ; son énergie est plus faible.
- Un électron ayant une plus grande valeur de ℓ se retrouve plus loin du noyau. Les autres électrons produisent un effet d'écran, ce qui donne une énergie plus élevée.

LES APPLICATIONS

L'**émission stimulée** peut se produire lorsqu'un photon ayant une longueur d'onde $\lambda = hc/\Delta E$ est incident sur un atome dans un état excité, avec $\Delta E = E_2 - E_1$. Lorsque $N_2 > N_1$, il y a **inversion de population**, ce qui peut produire un **effet laser**.



QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

Section 12.1 Les raies spectrales

E1 En utilisant la formule de Rydberg, calculez la plus grande longueur d'onde et la plus petite longueur d'onde des séries suivantes :

a. la série de Lyman ;

b. la série de Balmer ;

c. la série de Paschen.

E2 À partir de la formule de Rydberg, calculez le rapport entre la longueur d'onde de la deuxième raie de la série de Balmer et la longueur d'onde de la deuxième raie de la série de Lyman.

E3 Vérifiez que la formule de Balmer (l'équation 12.1) peut être obtenue à partir de la formule de Rydberg lorsque $n_1 = 2$ et $n_2 = n$.

R4 On envoie de la lumière issue d'une lampe à hydrogène vers une cellule photoélectrique dont le travail d'extraction est de 2,20 eV. Calculez le potentiel d'arrêt associé aux raies de la série de Balmer suivantes :

a. la première raie (plus grande longueur d'onde) ;

b. la deuxième raie ;

c. la raie qui correspond à la limite de la série.

Section 12.2 Le modèle de Bohr

Q5 Un atome d'antihydrogène est formé d'un antiproton (l'antiparticule associée au proton) et d'un positron (l'antiparticule associée à l'électron). Une antiparticule a la même masse que sa particule associée, mais une charge électrique opposée. L'antiproton a une charge $-e$, et le positron a une charge $+e$. Selon le modèle de Bohr, déterminez l'énergie de l'état fondamental de l'antihydrogène.

E6 À partir de l'état fondamental, un atome d'hydrogène absorbe un photon ayant une longueur d'onde de 92,62 nm.

a. Quelle est la valeur du nombre quantique ?

b. Dans l'état excité, quel est le rayon de l'orbite de l'électron ?

c. Quel est le module de la vitesse de l'électron ?

E7 Quelle énergie faut-il fournir à un ion He^+ pour l'ioniser complètement s'il se trouve dans son état fondamental ?

E8 Un atome d'hydrogène se trouve dans son deuxième état excité. Donnez toutes les longueurs d'onde qu'il peut émettre lorsqu'il retourne dans son état fondamental.

E9 On envoie des photons ayant une longueur d'onde de 85,0 nm sur des atomes d'hydrogène. Quelle est l'énergie cinétique des électrons éjectés ?

P10 Un atome d'hydrogène émet un photon dont la longueur d'onde est de 383,65 nm.

a. Indiquez le nombre quantique initial et le nombre quantique final associés à cette transition.

b. De quelle série cette raie spectrale fait-elle partie ?

P11 Un ion He^+ est initialement dans son sixième état excité. Énumérez toutes les longueurs d'onde visibles que peut émettre l'ion lorsque celui-ci retourne dans son état initial.

P12 Quelle est l'expression de la période orbitale d'un électron dans l'état n ? Exprimez votre réponse en fonction de la constante de structure fine.

Section 12.3 La théorie quantique de l'atome d'hydrogène

Q13 Pour un échantillon d'hydrogène à température de la pièce, on observe que seules les longueurs d'onde associées à la série de Lyman sont absorbées. Pourquoi ?

Q14 Le tableau suivant indique la valeur des nombres quantiques pour l'atome hydrogène dans quatre situations différentes. Quelles sont les situations physiquement possibles ?

Situation	n	ℓ	m_ℓ
(i)	3	0	1
(ii)	2	1	–1
(iii)	4	4	–2
(iv)	1	0	0

E15 Un atome est dans la sous-couche 4*f*.

a. Quelle est l'énergie de l'atome ?

b. Quel est le module du moment cinétique, exprimé en fonction de $\hbar$?

c. Quelles sont les valeurs possibles de m_ℓ ?

E16 Un électron effectue une transition du cinquième niveau au deuxième niveau en émettant un photon.

a. Quelle est l'énergie du photon émis ?

b. Quelle est la longueur d'onde du photon émis ?

E17 Le moment cinétique orbital d'un atome d'hydrogène a un module de $3{,}46\hbar$. Le nombre quantique m_ℓ est égal à –1.

a. Quelle est la sous-couche de l'électron ?

b. Quelle est l'énergie minimale de l'atome ?

c. Quel est l'angle entre le vecteur $\vec{\mathbf{L}}$ et l'axe des z ?

E18 Le nombre quantique orbital d'un électron dans un atome d'hydrogène est $\ell = 1$.

a. Tracez un diagramme semblable à celui de la figure 12.15a pour illustrer les orientations possibles du vecteur $\vec{\mathbf{L}}$.

b. Quels sont les angles possibles entre le vecteur $\vec{\mathbf{L}}$ et l'axe des z ?

P19 À partir de l'état fondamental, un atome d'hydrogène absorbe un photon dont la longueur d'onde est de 97,18 nm.

a. Quelle est la valeur du nombre quantique principal après la transition ?

b. Tracez un diagramme des niveaux d'énergie en incluant la transition vers le haut.

c. Tracez un diagramme des niveaux d'énergie représentant la désexcitation de l'électron. Indiquez toutes les transitions possibles.

d. Indiquez la longueur d'onde émise qui se trouve dans la région de l'infrarouge.

e. Indiquez les longueurs d'onde émises qui se trouvent dans le visible.

P20 Un atome d'hydrogène est dans un état spécifié par les nombres quantiques n, ℓ et m_ℓ. Montrez que

$$L_x^2 + L_y^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2 - m_\ell^2\hbar^2 .$$

P21 En négligeant le nombre quantique de spin, montrez que la couche dont le nombre quantique principal est n possède n^2 états dégénérés.

R22 Pour connaître la position de l'électron dans l'atome d'hydrogène, on l'éclaire avec un photon ayant une longueur d'onde de 0,052 9 nm, ce qui correspond au rayon de Bohr. L'atome est initialement dans son état fondamental. Le photon est dévié à un angle de 90,0° par l'atome, par effet Compton.

a. Quelle est l'énergie du photon incident ?

b. Quelle est l'énergie du photon diffusé ?

c. Dans quel niveau se retrouve l'électron après la collision ?

d. Peut-on mesurer précisément la position de l'électron dans l'atome ?

R23 Un atome d'hydrogène se trouve initialement immobile, avec l'électron dans la couche $n = 6$. L'atome effectue une transition vers le niveau fondamental en émettant un photon.

a. Quelle est l'énergie du photon ?

b. Quel est le module de la quantité de mouvement du photon ?

c. Quel est le module de la vitesse de recul de l'atome d'hydrogène ?

Section 12.4 Les fonctions d'onde de l'atome d'hydrogène

Q24 Un atome se trouve dans la couche $n = 3$.

a. Pour quelle sous-couche la densité de probabilité radiale présente-t-elle le plus de ventres ?

b. Pour quelle sous-couche la densité de probabilité radiale présente-t-elle le moins de ventres ?

c. Pour quelle sous-couche la probabilité de trouver l'électron à $r = 0$ est-elle la plus grande ?

d. Pour quelle sous-couche la distance où il est le plus probable de trouver l'électron est-elle la plus grande ?

E25 Un atome d'hydrogène se trouve dans son état fondamental. Calculez la probabilité de trouver l'électron dans une coquille sphérique ayant une épaisseur de $0{,}020\,0a_0$ et un rayon r si le rayon est

a. $r = 0{,}500a_0$;

b. $r = 1{,}00a_0$;

c. $r = 2{,}00a_0$;

d. $r = 5{,}00a_0$;

e. $r = 50{,}0a_0$.

(Indice : Comme la coquille est très mince, il n'est pas nécessaire d'effectuer l'intégration.)

P26 Montrez que la densité de probabilité radiale $\Pi_{1s}(r)$ est normalisée.

P27 Un atome d'hydrogène se trouve dans l'état $2s$.

a. Trouvez les positions où la densité de probabilité radiale atteint un maximum.

b. Quelle est la distance entre ces deux maximums ?

Section 12.5 Le spin et la structure fine

Q28 Tracez le diagramme des niveaux d'énergie pour la couche N, pour laquelle $n = 4$, en incluant la structure fine.

E29 Un électron se trouve dans la sous-couche $3p$.

a. Quelles sont les valeurs possibles pour le nombre quantique j ?

b. Dans la situation où $\vec{\mathbf{L}}$ et $\vec{\mathbf{S}}$ ont une composante z dans le même sens, quelles sont les valeurs possibles de m_j ?

E30 Les nombres quantiques d'un électron dans un atome d'hydrogène sont $n = 4$, $\ell = 1$ et $j = 1/2$. Indiquez les transitions possibles :

a. vers la couche $n = 2$ lorsque l'électron émet un photon visible ;

b. vers la couche $n = 3$ lorsque l'électron émet un photon infrarouge ;

c. vers la couche $n = 1$ lorsque l'électron émet un photon ultraviolet.

P31 La raie rouge du spectre d'hydrogène présente, dans sa structure fine, les deux transitions suivantes :

Transition	λ (nm)
$3d_{3/2} \rightarrow 2p_{1/2}$	656,2709699
$3d_{3/2} \rightarrow 2p_{3/2}$	656,2867336

a. Tracez un diagramme des niveaux d'énergie pour illustrer ces deux transitions.

b. À partir de ces données, calculez la différence d'énergie entre les états $2p_{1/2}$ et $2p_{3/2}$.

P32 À partir de la définition du moment cinétique total, montrez que

$$\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}} = \frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)}{2} \hbar^2 .$$

Section 12.6 L'effet Zeeman

Q33 On veut étudier le niveau $3d_{5/2}$ avec l'effet Zeeman. On applique un champ magnétique extérieur.

a. En combien de niveaux le niveau $3d_{5/2}$ se divise-t-il ?

b. Quelle est la valeur du nombre quantique m_j du niveau le plus élevé ?

E34 La figure 12.48 montre les niveaux d'énergie $4d_{3/2}$ et $2p_{3/2}$ séparés par l'interaction magnétique avec un champ magnétique extérieur. Tracez les transitions possibles.

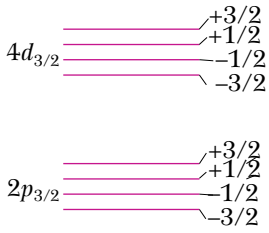


FIGURE 12.48 • Exercice 34

E35 On veut étudier l'effet Zeeman sur la raie associée à la transition $4s_{1/2} \rightarrow 2p_{3/2}$.

a. Tracez le diagramme d'énergie de chaque niveau lorsque $B \neq 0$.

b. Déterminez le nombre de raies qui sont visibles lorsque $B \neq 0$.

Section 12.7 La structure hyperfine

E36 Selon la définition de la seconde, celle-ci équivaut à 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux états hyperfins de l'état fondamental du césium.

a. Quelle est la longueur d'onde des photons qui sont émis lors de cette transition ?

b. Quelle est la différence d'énergie entre ces deux niveaux hyperfins ?

Section 12.9 Les atomes à plusieurs électrons

Q37 La configuration électronique d'un atome est $1s^2 2s^2\ 2p^5 3s^2$.

a. De quel élément s'agit-il ?

b. L'élément est-il dans un état excité ou dans son état fondamental ?

Q38 La figure 12.38 montre que l'énergie d'ionisation de l'élément Yb est plus élevée que ses voisins. Expliquez ce résultat en fonction de la notion de sous-couches.

Q39 Tracez le diagramme des niveaux d'énergie de la configuration électronique pour l'état fondamental et pour le premier état excité :

a. pour le magnésium ($Z = 12$) ;

b. pour le chlore ($Z = 17$).

Section 12.10 La lumière d'un laser

Q40 Dans un laser hélium-néon, un atome d'hélium est excité à un niveau de 20,1 eV. Le néon a besoin de 20,66 eV pour être excité au niveau désiré. L'énergie d'excitation de l'hélium est insuffisante pour exciter un atome de néon. D'où vient la quantité d'énergie manquante ?

Q41 Dans une cavité optique, on trouve N_2 atomes dans un niveau supérieur et N_1 dans un état inférieur. Peut-on avoir des émissions stimulées lorsque $N_2 < N_1$?

E42 Un laser à rubis produit une impulsion lumineuse qui dure 10,0 ns et qui transporte une puissance de 4,00 kW. La lumière a une longueur d'onde de 695 nm.

a. Quelle est l'énergie transportée par l'impulsion ?

b. Déterminez le nombre de transitions qui se produisent pendant la durée de l'impulsion.

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

12.1	$E = 13{,}60$ eV	Pour ioniser l'atome, il faut que l'électron soit à une distance $r \to \infty$, ce qui correspond à $n \to \infty$. Dans l'état final, l'énergie minimale du système proton-électron doit être égale à $E_f = 0$ eV. Donc, $\Delta E = 0 \text{ eV} - (-13{,}60 \text{ eV}) = 13{,}60 \text{ eV}$.
12.2	**a.** Il y a cinq sous-couches.	Les sous-couches correspondent à des valeurs de ℓ précises. Pour $n = 5$, les valeurs de ℓ sont $\ell = 0, 1, 2, 3, 4$, ce qui fait cinq valeurs possibles.
	b. Il y a deux sous-couches possibles.	Le nombre quantique m_ℓ obéit à la contrainte $-\ell \leq m_\ell \leq \ell$. Pour que $m_\ell = 3$, il faut que $\ell \geq 3$. Parmi les sous-couches obtenues en **a.**, le nombre quantique peut être $\ell = 3$ ou $\ell = 4$.
12.3	$n = 5$, $\ell = 0$, $m_\ell = 0$	Étant donné que la fonction d'onde est maximale à $r = 0$, $\ell = 0$ et $m_\ell = 0$ (sous-couche $\ell = 0$). La fonction d'onde de la couche n possède $n - \ell - 1$ nœuds, donc $n = 5$ lorsque la fonction d'onde est nulle à quatre endroits autres que l'infini.
12.4	$1s^2 2s^2 2p^6$	L'atome a un électron dans la sous-couche $3d$, alors que la sous-couche $2p$ n'est pas fermée. Donc, cet électron doit être dans la sous-couche $2p$ pour avoir le moins d'énergie possible, selon le principe d'exclusion de Pauli.

Chapitre 13

La physique nucléaire

Buts du chapitre

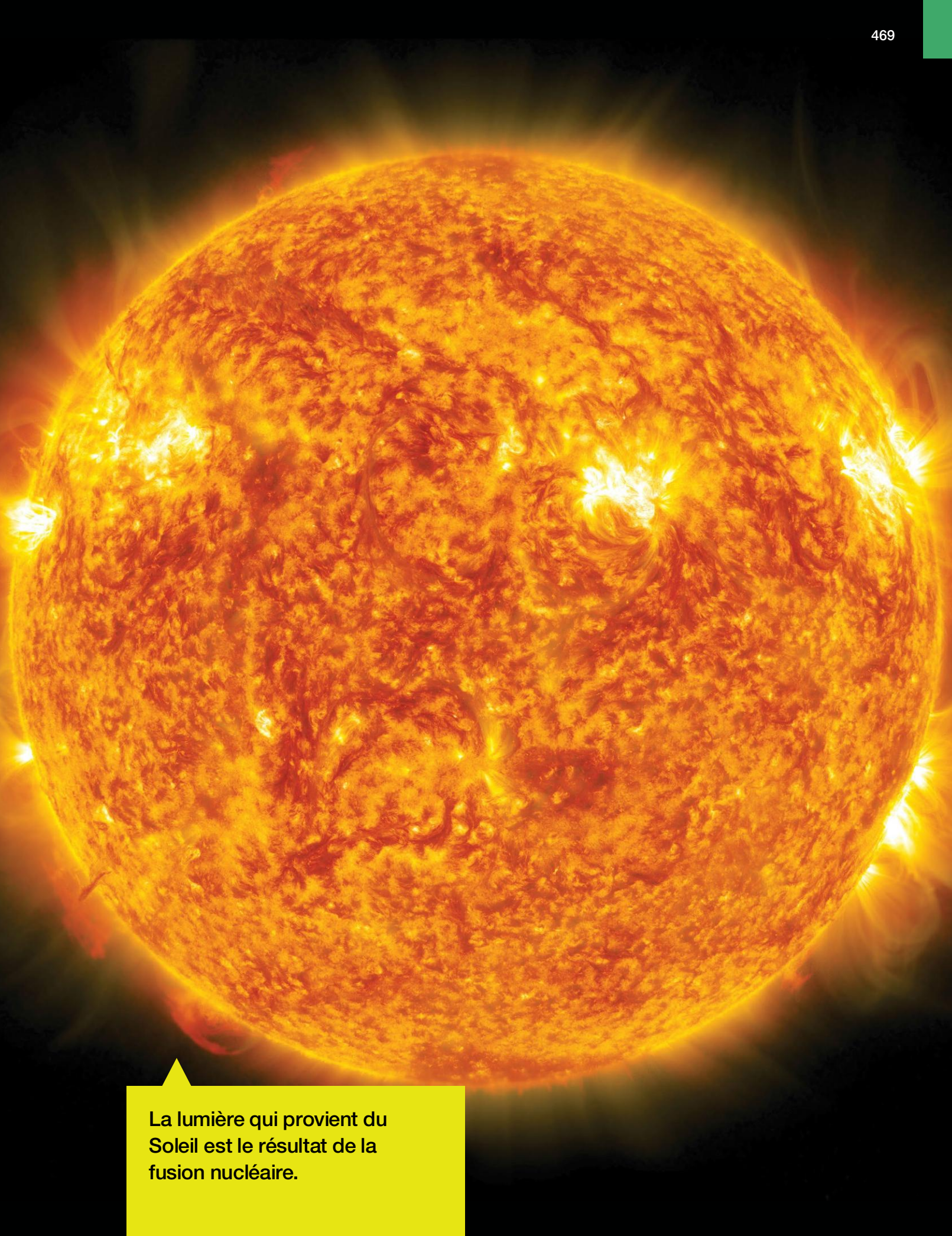
Dans ce chapitre, on étudie les noyaux atomiques. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de connaître les propriétés du noyau ;
- de calculer l'activité d'un nucléide ;
- de décrire les types de désintégrations d'un noyau ;
- de calculer l'énergie transformée lors d'une désintégration, d'une fission nucléaire et d'une fusion nucléaire.

Préalables

Ce chapitre applique les principes de la relativité et de la mécanique quantique à l'étude du noyau. Revoyez :

- l'énergie en relativité, analysée à la section 9.11 ;
- les états stationnaires, présentés à la section 11.3, et l'énergie d'une particule confinée, calculée à la section 11.4 ;
- l'effet tunnel, étudié à la section 11.8.



La lumière qui provient du Soleil est le résultat de la fusion nucléaire.

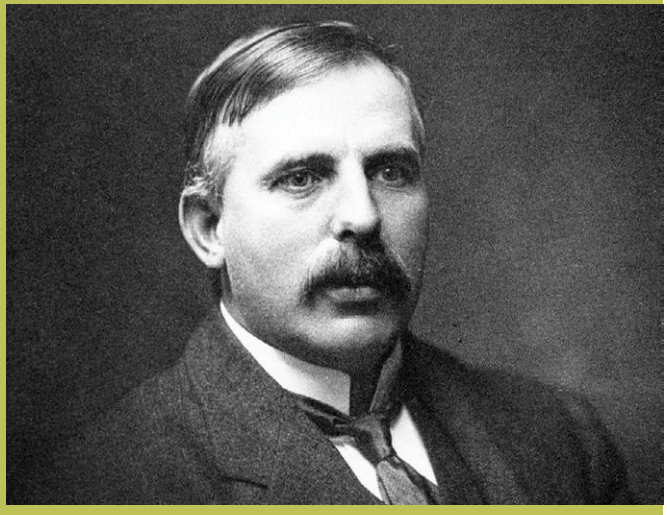
UN PEU D'HISTOIRE

Rutherford et les transmutations de la physique

À quelques mois près, le Canada aurait pu s'enorgueillir du prix Nobel de chimie décerné en 1908 à Ernest Rutherford (1871-1937), mais le physicien avait quitté Montréal l'année précédente. Durant son séjour à l'Université McGill, il avait prouvé que la radioactivité s'expliquait par la transmutation des éléments. Sa démonstration renversait un dogme de la chimie et annonçait une nouvelle compréhension des phénomènes subatomiques.

Quand Rutherford est né en Nouvelle-Zélande, le caractère inaltérable des atomes était un article de foi pour les chimistes. Le destin de ce fils de fermier d'une colonie récente illustre la transformation de l'éducation scientifique à la fin du XIX^{e} siècle. Les universités occidentales accueillent désormais des personnes de toute origine. En particulier, les femmes sont de plus en plus nombreuses à participer à la recherche.

Souvent, il reste indispensable de voyager. Tout comme une jeune Polonaise, Marie Skłodowska (1867-1934), qui doit déménager à Paris en 1891 pour étudier la physique, Rutherford décroche une bourse en 1895 après de brillantes études dans son pays natal et part les poursuivre au laboratoire Cavendish de l'Université de Cambridge en Angleterre. Rutherford collabore avec le directeur, J. J. Thomson, pour élucider l'ionisation des gaz par les rayons X. Tandis que Thomson caractérise l'électron, Rutherford se penche sur les effets ionisants de la lumière ultraviolette et de la radioactivité. Il distingue deux formes de radiation : les rayons alpha et bêta.



↘ Ernest Rutherford (1871-1937)

Quand l'argent de la bourse s'épuise, Rutherford accepte avec soulagement en 1898 une offre d'emploi de l'Université McGill. Chaudement recommandé par Thomson, il sait qu'il bénéficiera à Montréal d'un laboratoire richement doté par un magnat du tabac. En France, Marie Skłodowska a épousé le physicien Pierre Curie. Ensemble, ils découvrent cette même année de nouveaux éléments radioactifs, le polonium et le radium, dont ils enverront de généreux échantillons à Rutherford.

À McGill, Rutherford s'entoure de jeunes chercheurs. Il n'hésite pas à faire de la première Canadienne diplômée en physique, Harriet Brooks (1876-1933), une collaboratrice de premier plan. Avec leur aide à tous et celle du jeune chimiste Frederick Soddy, il démontre que la radioactivité naturelle résulte de la désintégration des atomes. Ses expériences montréalaises révèlent aussi que les rayons alpha sont des noyaux d'hélium.

Une fois parti à Manchester, en Angleterre, Rutherford poursuit l'étude de la déviation des rayons alpha qu'il avait entamée à Montréal. Vers 1909, ses assistants observent que certaines particules rebondissent vers la source du rayon comme si elles avaient frappé un mur. Ce résultat laisse entendre qu'au niveau atomique, il existe un point où la charge des particules est très fortement concentrée. De nouvelles expériences permettent à Rutherford de proposer en 1911 l'existence du noyau atomique. La physique nucléaire est née.

Nommé à la tête du laboratoire Cavendish en 1919, Rutherford en fait un centre d'excellence de la physique nucléaire. Il attire de jeunes chercheurs prometteurs et des physiciens réputés. Le laboratoire est le lieu de trois percées majeures en 1932. D'abord, James Chadwick découvre le neutron dont Rutherford avait prédit l'existence en 1920. Ensuite, John Cockcroft et E. T. S. Walton produisent la fission d'un atome de lithium à l'aide de protons accélérés. Finalement, ses chercheurs confirment l'observation du positron par Carl Anderson aux États-Unis.

Durant les années 1930, l'établissement n'est concurrencé que par ceux de Lise Meitner et Otto Hahn, en Allemagne, et de Frédéric Joliot et Irène Joliot-Curie (la fille des Curie), en France. Les recherches menées par ces laboratoires aboutiront à la fission des atomes lourds en 1938 et au développement de la bombe nucléaire. Rutherford n'en aura pas été témoin, toutefois, car il était mort en 1937 d'une opération médicale qui avait mal tourné.

Dans les deux derniers chapitres, nous avons étudié les électrons piégés dans des puits de potentiel de différentes formes. Cela nous a permis d'obtenir les propriétés des atomes. Même si les atomes sont très petits, le rayonnement qu'ils émettent dans un spectre permet d'en savoir davantage sur leur structure interne.

Nous étudions maintenant les propriétés des protons et des neutrons à l'intérieur du noyau atomique. Ce noyau est encore plus compact que l'atome. Les principes de la mécanique quantique s'appliquent aussi aux protons et aux neutrons. Pour qu'un noyau soit stable, il faut une force attractive entre les protons et les neutrons. Chacun est piégé dans le noyau, ce qui implique que les protons et les neutrons doivent être représentés par des ondes stationnaires, avec une énergie quantifiée. Tout comme les électrons dans l'atome, le noyau possède également des niveaux d'énergie. Par contre, étant donné que le noyau est très compact, les longueurs d'onde doivent être très faibles, ce qui produit des énergies beaucoup plus élevées dans le noyau comparativement à l'atome.

L'étude de la radioactivité a entraîné les premières découvertes en physique nucléaire. Certains noyaux sont instables et ils se transforment en un noyau d'un élément chimique différent. Ils se désintègrent. Nous verrons qu'il y a deux mécanismes principaux de désintégration. L'un de ces mécanismes fait intervenir une nouvelle interaction, qu'on appelle l'interaction faible. Nous observerons que chaque noyau radioactif se désintègre selon un temps caractéristique. La radioactivité peut donc servir d'horloge, pour dater des objets organiques de plusieurs milliers d'années, ou des roches, de plusieurs milliards d'années (*voir la figure 13.1*). La radioactivité est aussi utilisée dans différentes applications en médecine.

FIGURE 13.1
Selon la datation radioactive, une roche découverte dans le nord du Québec s'est formée il y a 4,28 milliards d'années.

L'énergie au repos des noyaux est modifiée lorsque le noyau se transforme. Il est possible de convertir l'énergie au repos en d'autres formes d'énergie. Nous verrons que par la fusion nucléaire, des petits noyaux libèrent de l'énergie en se transformant en de plus gros noyaux. C'est ce qui se passe dans le cœur des étoiles comme dans celui du Soleil. De plus, lorsque de très gros noyaux sont divisés en plus petits noyaux, il y a aussi de l'énergie libérée. C'est la fission nucléaire, qui est le principe de base du fonctionnement des centrales nucléaires.

13.1 Les propriétés du noyau

Terminologie

Dans ce chapitre, nous étudions le noyau des atomes. Il n'est pas possible d'isoler un noyau pour l'étudier, en enlevant tous les électrons de l'atome. Les électrons sont présents, mais ils participent peu à la dynamique des noyaux. On dit qu'ils sont spectateurs. On emploie le terme *nucléide* pour décrire un noyau en particulier accompagné de ses électrons.

Un nucléide quelconque possède Z protons et N neutrons. Le nombre de protons correspond au numéro atomique Z, car c'est le nombre de protons qui donne les propriétés chimiques du nucléide. Un même élément chimique peut avoir plusieurs isotopes. Les *isotopes* d'un élément chimique représentent des nucléides ayant le même numéro atomique (le même nombre de protons) et un nombre de neutrons différent. Les isotopes ont donc les mêmes propriétés chimiques, mais un comportement nucléaire différent.

Du point de vue de l'interaction nucléaire, les protons et les neutrons ont un comportement semblable. Pour cette raison, on utilise le terme *nucléon*, lorsqu'il est question du proton ou du neutron. Les nucléides qui possèdent le même nombre de nucléons sont des *isobares*. Par exemple, l'azote 14 (sept protons et sept neutrons) et le carbone 14 (six protons et huit neutrons) contiennent chacun quatorze nucléons. Les *isotones* sont des nucléides qui ont le même nombre de neutrons, comme le carbone 13 et l'azote 14, qui possèdent chacun sept neutrons.

Le *nombre de masse* A est le nombre de nucléons dans un noyau. On obtient alors :

$$A = Z + N \ . \tag{13.1}$$

Le nombre de masse permet d'obtenir la masse approximative d'un nucléide, exprimée en unités de masse atomique (u). En effet, la masse du proton et la masse du neutron sont chacune légèrement plus grandes que 1 u, où $1\ \text{u} = 1{,}661 \times 10^{-27}\ \text{kg}$:

$$m_\text{p} = 1{,}007\,276\ \text{u} \approx 1{,}00\ \text{u} \tag{13.2}$$

$$m_\text{n} = 1{,}008\,665\ \text{u} \approx 1{,}00\ \text{u} \tag{13.3}$$

$$m_\text{é} = 0{,}000\,548\,6\ \text{u} \approx 0{,}00\ \text{u} \ . \tag{13.4}$$

REMARQUE

Le nombre de masse permet seulement d'obtenir une masse approximative, car la masse d'un nucléide n'est pas égale à la somme des masses de ses constituants, comme nous l'avons vu à la section 9.11. Nous verrons à la section 13.2 que l'interaction entre les protons et les neutrons diminue l'énergie au repos, donc la masse d'un noyau.

Par exemple, la masse du carbone 14 est de 14 u et celle du carbone 12 est de 12 u. On obtient la masse molaire en multipliant la masse d'un nucléide par le nombre d'Avogadro. Étant donné que $1\ \text{u} = 1\ \text{g}/N_\text{A}$, on obtient directement la masse molaire approximative du nucléide en gramme par mole (g/mol). Par exemple, la masse molaire du carbone 14 est de 14,0 g/mol.

MISE EN GARDE

À l'annexe F et dans le tableau périodique de l'annexe G, on donne la masse molaire des éléments. Cette masse molaire représente celle du mélange des différents isotopes qu'on trouve sur terre, et non la masse molaire d'un nucléide en particulier.

Pour désigner un nucléide, on utilise le symbole chimique, en ajoutant devant le symbole le nombre de masse en exposant et le numéro atomique en indice, soit ${}^{A}_{Z}\text{X}$ pour un nucléide quelconque X, dont le nombre de masse est A et le numéro atomique est Z. Par exemple, le carbone 14 est noté ${}^{14}_{6}\text{C}$ et l'uranium 238, dont le numéro atomique est égal à 92, est noté ${}^{238}_{92}\text{U}$.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 13.1

Classez les nucléides suivants par ordre croissant de leur masse.

(i) $^{59}_{27}\text{Co}$; (ii) $^{58}_{28}\text{Ni}$; (iii) $^{62}_{28}\text{Ni}$; (iv) $^{61}_{30}\text{Zn}$.

Le rayon des noyaux

Comme un atome, un noyau atomique n'est pas un solide avec un rayon bien défini. Il est donc difficile de définir précisément ce que représente le noyau atomique. À partir d'expériences où des électrons ou des particules alpha (des noyaux de $^{4}_{2}\text{He}$) sont déviés par les noyaux, ou par la diffusion de rayons X, on a trouvé que les nucléons sont distribués approximativement de façon sphérique. De plus, l'interaction entre les nucléons demeure à peu près constante près du centre et diminue rapidement ensuite. Avec ces expériences, on trouve que la densité de nucléons est à peu près constante pour des nucléides de masse différente, ce qui veut dire que le volume d'un noyau est proportionnel au nombre de nucléons. Comme le volume d'une sphère est $V = 4\pi R^3/3$, on obtient une formule empirique pour le rayon d'un noyau :

$$r = r_0 A^{1/3} = 1{,}20 \text{ fm } A^{1/3}, \tag{13.5}$$

où $r_0 = 1{,}20$ fm est une valeur empirique.

REMARQUE

L'unité fm (le femtomètre) correspond à 1×10^{-15} m. On l'appelle aussi le *fermi*, en l'honneur du physicien italo-américain Enrico Fermi (1901-1954). Un femtomètre représente une longueur typique en physique nucléaire.

EXEMPLE 13.1 La masse volumique nucléaire

L'or qu'on trouve sur terre ne possède que le nucléide $^{197}_{79}\text{Au}$. La masse volumique de l'or est de $19{,}3 \times 10^3$ kg/m^3.

a. Quel est le rayon d'un noyau d'or ?

b. Quelle est la masse volumique du noyau d'or ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Selon la notation $^{A}_{Z}\text{Au}$, le noyau d'or a un nombre de masse $A = 197$, ce qui correspond à 197 nucléons. La masse du noyau d'or est donc :

$$\begin{aligned} M_{\text{Au}} &\approx 197 \text{ u} \times 1{,}66 \times 10^{-27} \text{ kg/u} \\ &= 3{,}27 \times 10^{-25} \text{ kg}. \end{aligned} \tag{i}$$

Connues	Inconnues
$A = 197$	r
$\rho_a = 19{,}3 \times 10^3$ kg/m^3	ρ

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 13.5 qui permet de calculer le rayon d'un noyau atomique :

$$r = 1{,}20 \text{ fm } A^{1/3}. \tag{ii}$$

Résoudre le problème
Nous obtenons

$$r = 1{,}20 \text{ fm}(197)^{1/3} = 6{,}982 \text{ fm}. \quad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse
L'ordre de grandeur est correct, car le rayon des noyaux atomiques est de l'ordre de 1 fm.

SOLUTION b.

Identifier la clé
La **clé** est que le noyau peut être considéré sphérique, de telle sorte que la masse volumique est

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3}. \quad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème
En insérant l'équation (i) et le résultat de la partie **a.** dans l'équation (iii), nous obtenons

$$\rho = \frac{3{,}27 \times 10^{-25} \text{ kg}}{\frac{4}{3}\pi (6{,}982 \times 10^{-15} \text{ m})^3} = 2{,}29 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3.$$

(réponse)

Valider la réponse
La masse volumique nucléaire est environ 1×10^{13} fois plus grande que la masse volumique de l'or qu'on trouve dans la vie courante. Ceci est correct, car il y a beaucoup de vide dans un atome, entre le noyau et les électrons, ce qui n'est pas le cas lorsqu'on considère uniquement le noyau.

La force nucléaire

Dans le noyau atomique, les protons ont une charge électrique positive et les neutrons n'ont pas de charge électrique nette. Il y a donc une répulsion électrique entre les protons. Pour lier ensemble les protons et les neutrons dans le noyau, il faut que les nucléons exercent les uns sur les autres une force attractive plus importante que la répulsion électrique. Cette force attractive est appelée la *force nucléaire*.

Contrairement à la force électrique qui dépend du carré de l'inverse de la distance entre deux charges, la force nucléaire entre les nucléons est approximativement constante et très intense, jusqu'à une certaine distance qu'on appelle la *portée de la force* (environ 1,3 fm).

La force nucléaire n'est pas une interaction fondamentale. C'est plutôt une interaction résiduelle de l'interaction forte entre les quarks. Comme le montre la figure 13.2, les protons et les neutrons sont constitués de particules élémentaires, qu'on appelle les *quarks*. Le proton est constitué de deux quarks u (le quark *up*) et d'un quark d (le quark *down*), alors que le neutron est constitué de deux quarks d et d'un quark u. Lorsque deux nucléons sont suffisamment rapprochés, il y a une interaction entre les quarks des deux nucléons, ce qui engendre la force nucléaire attractive. Lorsque les nucléons sont éloignés, l'interaction nucléaire est très faible. Nous reparlerons des quarks et de l'interaction forte au chapitre 14.

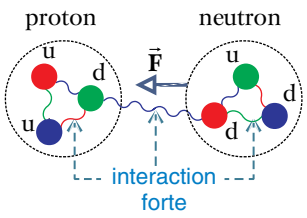


FIGURE 13.2
La force nucléaire est le résultat de l'interaction forte entre les quarks lorsque deux nucléons sont rapprochés.

La carte des nucléides

Les protons et les neutrons sont liés ensemble dans le noyau atomique par la force nucléaire. Cette force n'est pas toujours suffisante pour garder ensemble tous les nucléons. La plupart des nucléides sont instables. Ils se désintègrent en émettant des particules (électrons, particules alpha, photons) et se transforment en un autre nucléide ayant moins d'énergie. Le processus de désintégration engendre la *radioactivité*, qu'on peut détecter.

Certains nucléides se désintègrent très rapidement (en moins d'une seconde), alors que d'autres nucléides ont besoin de plusieurs milliards d'années pour se désintégrer. Pour avoir une image globale du processus de désintégration, on classe les nucléides dans une *carte des nucléides*, inspirée du tableau périodique : on place chaque nucléide dans une case et on choisit un code de couleur pour indiquer si un nucléide est stable ou la façon dont il se désintègre. Dans cette carte, on représente le nombre de neutrons N sur un axe horizontal et le nombre de protons Z sur un axe vertical. On obtient alors la carte présentée à la figure 13.3.

Voir la version électronique de la carte des nucléides et l'agrandir pour que les informations deviennent lisibles

On remarque que les nucléides de faible masse (en bas à gauche) sont stables lorsque $N \approx Z$, alors que dans le cas de nucléides plus massifs (vers le haut du tableau), la stabilité est obtenue pour $N > Z$, conséquence de la portée finie de la force nucléaire. En effet, la répulsion électrique entre protons peut s'exercer à grande distance, alors que la force nucléaire a une portée finie. Pour être stables, des nucléides ayant un grand nombre de protons doivent avoir un plus grand nombre de neutrons pour que l'attraction nucléaire soit plus importante que la répulsion électrique.

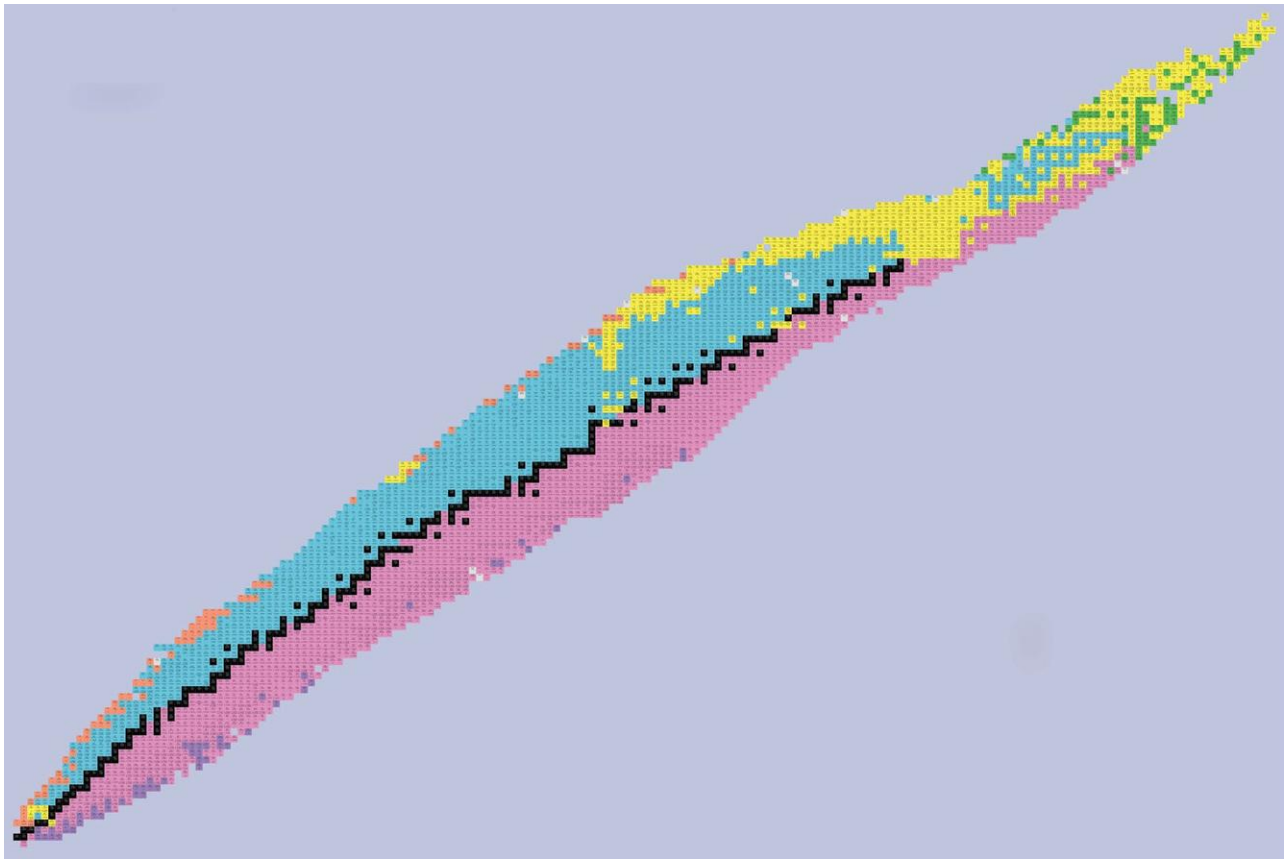


FIGURE 13.3

La carte des nucléides, avec Z sur l'axe vertical et N sur l'axe horizontal. Chaque carré représente un nucléide. Les nucléides stables sont représentés par des carrés noirs. Pour les nucléides instables, une couleur est utilisée pour représenter le mode principal de désintégration : les carrés jaunes pour les désintégrations α, les bleus pour les désintégrations β^+, les roses pour les désintégrations β^-, les verts pour les fissions spontanées, les oranges pour les émissions de protons, et les violets pour les émissions de neutrons.

13.2 L'énergie de liaison

À la section 9.11, nous avons vu que la masse d'un système est influencée par l'énergie cinétique et par l'énergie potentielle des éléments du système, ce qu'on appelle l'énergie interne du système. En physique atomique, cette influence est négligeable, car l'énergie interne est beaucoup plus faible que l'énergie au repos de l'électron. En physique nucléaire, l'énergie d'interaction liée à la force nucléaire entre les protons et les neutrons n'est pas négligeable par rapport à l'énergie au repos du proton et du neutron. Ceci permet d'obtenir l'énergie de liaison d'un noyau à partir de l'information sur la masse du noyau et sur celle des constituants.

Soit un nucléide ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$, qui contient Z protons, $N = A - Z$ neutrons et Z électrons spectateurs. À l'intérieur du noyau, les protons et les neutrons sont liés par la force nucléaire. Si on choisit le point de référence de l'énergie potentielle de telle sorte que $U = 0$ lorsque les nucléons sont éloignés les uns des autres d'une distance qui tend vers l'infini, alors l'énergie interne du noyau est négative, étant donné que les protons et les neutrons sont confinés dans le noyau. Soit M, la masse du nucléide. L'énergie au repos du nucléide est

$$Mc^2 = (Zm_{\mathrm{p}} + Zm_{\mathrm{é}} + Nm_{\mathrm{n}})\, c^2 + E_{\mathrm{int}}\ , \tag{13.6}$$

où $E_{\mathrm{int}} < 0$, car les protons et les neutrons sont confinés dans le noyau. On définit l'*énergie de liaison* E_{l} comme l'énergie qu'il faut fournir pour briser complètement le noyau. Cela correspond à l'opposé de l'énergie interne du noyau :

$$E_{\mathrm{l}} = -E_{\mathrm{int}} = (Zm_{\mathrm{p}} + Zm_{\mathrm{é}} + Nm_{\mathrm{n}} - M)\, c^2\ . \tag{13.7}$$

On peut simplifier légèrement l'équation 13.7. En effet, le nucléide possède autant d'électrons que de protons. La masse d'un atome d'hydrogène 1 est équivalente à la somme de la masse du proton et de celle de l'électron ($m_{\mathrm{H}} = m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{é}}$), car l'énergie interne de l'atome d'hydrogène ($E_1 = -13{,}6$ eV) est négligeable par rapport à l'énergie au repos de l'atome. Donc, l'énergie de liaison est donnée par l'expression :

Énergie de liaison

$$E_{\mathrm{l}} = (Zm_{\mathrm{H}} + Nm_{\mathrm{n}} - M)\, c^2\ . \tag{13.8}$$

La masse d'un nucléide est toujours inférieure à la masse de ses constituants, car ceux-ci ont une énergie négative. Cette différence de masse demeure quand même relativement faible. Pour cette raison, il faut utiliser les données avec plusieurs chiffres significatifs pour calculer l'énergie de liaison. La masse des nucléides est habituellement donnée en fonction de l'unité de masse atomique (u). On utilise alors les données du tableau 13.1. De plus, l'unité de masse atomique peut être exprimée en MeV/c^2, de telle sorte que c^2 s'exprime en MeV/u :

$$1\ \mathrm{u} = 931{,}5\ \mathrm{MeV}/c^2 \Rightarrow c^2 = 931{,}5\ \mathrm{MeV/u}\ . \tag{13.9}$$

TABLEAU 13.1

La masse des particules qui interviennent en physique nucléaire (ce tableau est aussi présenté à l'annexe C).

Particule	Masse (u)
Électron	0,000 548 6
Proton	1,007 276 5
Neutron	1,008 664 9
Atome d'hydrogène 1 ($^{1}_{1}\mathrm{H}$)	1,007 825 0
Atome d'hélium 4 ($^{4}_{2}\mathrm{He}$)	4,002 603 2

L'énergie de liaison représente l'énergie totale qu'il faut fournir pour séparer complètement les nucléons formant le noyau. Évidemment, plus un noyau possède de nucléons, plus l'énergie de liaison est grande. Pour comparer les nucléons selon leur stabilité, il est plus intéressant de calculer l'*énergie de liaison par nucléon* ($E_{l/n}$), qui représente l'énergie de liaison moyenne. On divise alors E_l par le nombre de nucléons, c'est-à-dire par le nombre de masse A :

$$E_{l/n} = \frac{E_l}{A}. \qquad (13.10)$$

Énergie de liaison par nucléon

La figure 13.4 (*voir la page suivante*) montre l'énergie de liaison par nucléon pour différents nucléides. Cette courbe est l'équivalent de la figure 12.38 de la page 455 montrant l'énergie d'ionisation des atomes. Un nuclide est plus stable que ses voisins lorsque son énergie de liaison est plus grande. On remarque que le nucléide $^{4}_{2}\mathrm{He}$ est très stable, car la courbe présente un pic vis-à-vis de ce nucléide. La courbe montre que l'énergie de liaison par nucléon augmente progressivement jusqu'au fer et au nickel, puis redescend graduellement.

Selon l'équation 13.8, une grande énergie de liaison est produite lorsqu'il y a une plus grande différence entre la masse des constituants et la masse du nucléide. Lorsque des noyaux de faible masse sont combinés par fusion nucléaire, le noyau obtenu a une plus grande énergie de liaison, ce qui veut dire qu'il y a de l'énergie au repos qui s'est transformée en une autre forme d'énergie. Cela se produit dans les étoiles. Par exemple dans le Soleil, l'hydrogène est fusionné en hélium 4. Lorsque le Soleil aura transformé une grande partie de son hydrogène en hélium, il pourra faire la fusion de l'hélium en carbone 12, car l'énergie de liaison est plus élevée pour le carbone. Dans le cas d'étoiles très massives, ce mécanisme peut se poursuivre jusqu'au fer, qui est au sommet de la courbe. La fusion de noyaux plus massifs ne transforme plus de l'énergie au repos en une autre forme, mais plutôt le contraire. La fusion nucléaire d'éléments plus massifs que le fer ne libère pas d'énergie. Pour cette raison, l'abondance des éléments plus massifs que le fer est beaucoup plus faible.

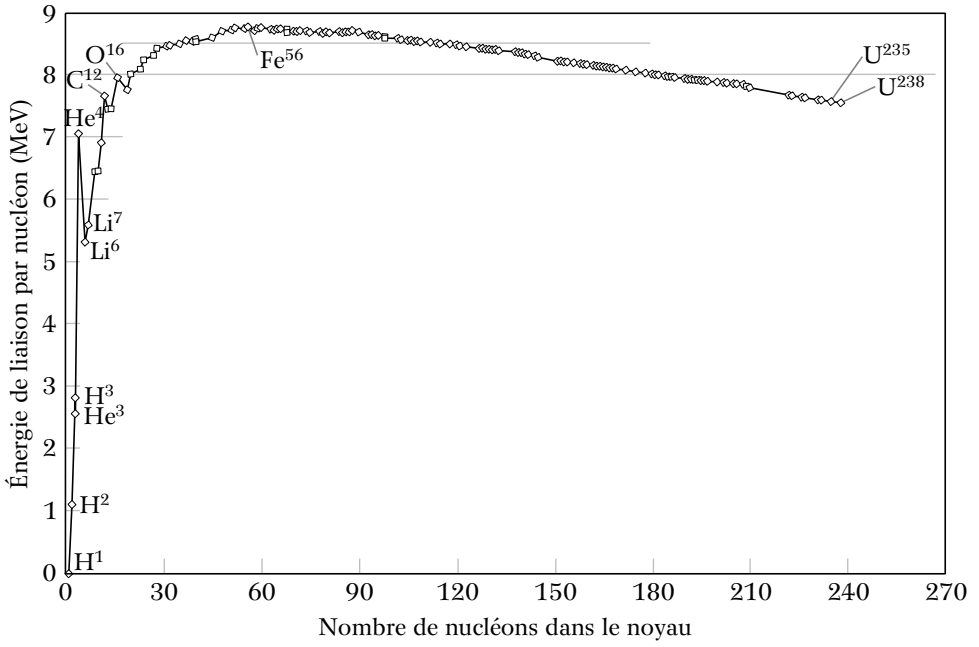


FIGURE 13.4
La courbe d'énergie de liaison par nucléon pour les nucléides communs

Dans le cas des noyaux de grande masse, on obtient de l'énergie par une fission nucléaire : un gros noyau qui se brise en deux plus petits noyaux peut produire une transformation d'énergie au repos en une autre forme, de telle sorte que les noyaux produits ont une énergie de liaison plus élevée. Nous étudierons la fission nucléaire à la section 13.7 et la fusion nucléaire à la section 13.8.

EXEMPLE 13.2 L'énergie de liaison du fer

L'isotope de fer $^{56}_{26}\text{Fe}$ a une masse de 55,934 942 u. Calculez l'énergie de liaison par nucléon pour cet isotope.

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$Z = 26 \quad M = 55{,}934\,942$ u	$E_{l/n}$
$A = 56 \quad N = A - Z = 30$	

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 13.10 :

$$E_{l/n} = \frac{E_l}{A}, \qquad \text{(i)}$$

où l'énergie de liaison est donnée par l'équation 13.8 :

$$E_l = (Zm_H + Nm_n - M)c^2 . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'énergie de liaison du nucléide :

$$E_l = (26 \times 1{,}007\,825 \text{ u} + 30 \times 1{,}008\,665 \text{ u} - 55{,}934\,942 \text{ u})931{,}5 \text{ MeV/u}$$
$$E_l = 492{,}26 \text{ MeV}.$$

Nous remplaçons ensuite ce résultat dans l'équation (i) :

$$E_{l/n} = \frac{492{,}26 \text{ MeV}}{56} = 8{,}790 \text{ MeV/nucléons}. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

C'est bien ce qui est indiqué dans le graphique de la figure 13.4.

Les états excités

Les protons et les neutrons sont soumis à la dualité onde-particule, comme l'électron dans l'atome. Cela veut dire que les protons et les neutrons confinés dans le noyau existent sous forme d'ondes stationnaires, qui doivent respecter des conditions aux limites. Comme pour l'atome, l'énergie d'un noyau est quantifiée : il y a des niveaux d'énergie. La figure 13.5 montre les premiers niveaux pour le noyau de carbone 12, avec le point de référence $E = 0$ MeV placé vis-à-vis du niveau fondamental. Le noyau se trouve normalement dans le niveau le plus bas, le niveau fondamental. Il peut être excité si on lui fournit une énergie $\Delta E = E_h - E_0$ pour effectuer la transition vers le niveau E_h. Cette excitation peut se produire lors d'une collision avec d'autres particules. De même, lorsqu'un nucléide X se désintègre en un nucléide X′, ce dernier peut se trouver dans un état excité. Lorsqu'un noyau est dans un niveau excité E_h, il peut effectuer une transition vers le bas, au niveau E_b, en émettant un photon :

$$\Delta E = E_h - E_b = \frac{hc}{\lambda}. \tag{13.11}$$

Étant donné que l'énergie en cause est de l'ordre du mégaélectronvolt (MeV), le photon a une très grande énergie : il est dans le domaine des rayons gamma.

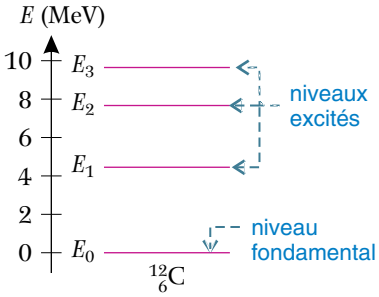


FIGURE 13.5
Les premiers niveaux d'énergie pour le noyau de carbone 12

13.3 La radioactivité

La *radioactivité* est l'émission spontanée de particules énergétiques par un noyau. Le noyau subit alors une *désintégration*, c'est-à-dire qu'il se transforme en un autre élément chimique. Dans le processus, une petite partie de l'énergie au repos du noyau initial est transformée en d'autres formes.

La radioactivité a été découverte en 1896 par le physicien français Henri Becquerel (1852-1908) lorsqu'il a observé la radiation issue de sels d'uranium. Cette découverte a été rapidement suivie par les recherches du physicien français Pierre Curie (1859-1906) et de la physicienne française d'origine polonaise Marie Curie (1867-1934). Ils ont démontré que d'autres éléments sont radioactifs, tels le radium et le polonium qu'ils ont découverts en 1898. Ils ont aussi prouvé, en utilisant un champ magnétique, que certaines radiations ont une charge positive, certaines ont une charge négative et d'autres sont neutres.

C'est en 1899 que le physicien néo-zélandais Ernest Rutherford (*voir la figure 13.6*) a montré qu'il y a différentes particules produites par la radioactivité. Il les a classées selon leur degré de pénétration, en les nommant « rayons alpha » et « rayons bêta ». En 1903, il a ajouté à sa liste les rayons gamma, dont le degré de pénétration est encore plus élevé que les rayons bêta. Les rayons gamma ont été découverts en 1900 par le physicien français Paul Villard (1860-1934), sans que ce dernier ait suggéré un nom. Le tableau 13.2 à la page suivante indique les propriétés des trois types de rayonnement produits par la radioactivité. Les rayons alpha sont des noyaux d'hélium 4, les rayons bêta sont des électrons ou des positrons (l'antiparticule de l'électron), alors que les rayons gamma sont des photons de très haute énergie.

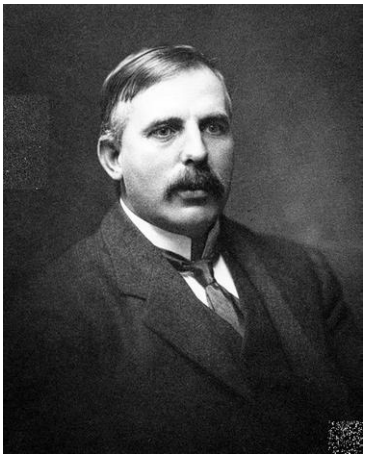


FIGURE 13.6
Ernest Rutherford (1871-1937), physicien néo-zélandais

Rutherford a fait d'autres importantes découvertes lors de ses recherches effectuées à l'Université McGill à Montréal. En 1899, il a montré que le thorium produisait un gaz (le radon), qui était aussi radioactif. De plus, la radioactivité de

ce gaz diminuait de moitié dans un temps fixe, ce qu'on a appelé la demi-vie. En collaboration avec le chimiste anglais Frederick Soddy (1877-1956), il a démontré en 1903 qu'un élément chimique se transforme en un autre élément lors d'une désintégration. L'atome n'était plus indestructible.

TABLEAU 13.2

Les types de rayonnement émis par la radioactivité

Type	Particule	Charge	Arrêté par
Alpha	noyau de ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$	$+2e$	feuille de papier
Bêta	électron (β^-)	$-e$	quelques millimètres d'aluminium
	positron (β^+)	$+e$	
Gamma	photon	0	plusieurs centimètres de plomb

La loi de désintégration

La désintégration est un phénomène aléatoire. À l'aide de la mécanique quantique, on peut calculer la probabilité qu'un noyau se désintègre. Certains nucléides ont une grande probabilité de se désintégrer, alors que d'autres en ont une très faible.

Prenons un échantillon d'un nucléide quelconque ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ qui contient initialement N_0 noyaux. Après un temps t, il reste N noyaux. Les noyaux sont identiques, et ils ont la même probabilité par unité de temps de se désintégrer. Par conséquent, le taux de désintégration $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ est proportionnel au nombre de noyaux présents :

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N \,, \tag{13.12}$$

où le signe négatif est présent, car le nombre de noyaux diminue en fonction du temps. La constante λ est appelée la *constante de désintégration* pour le nucléide ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$. C'est une propriété caractéristique du nucléide. Lorsque λ est élevée, le nombre de noyaux diminue rapidement, car le taux de désintégration est élevé. L'unité de la constante de désintégration correspond à l'inverse d'une unité de temps. Dans le système international, cela correspond à s^{-1}, mais il est aussi utile d'utiliser d'autres unités comme h^{-1}, d^{-1} (où d est utilisé pour jour) ou a^{-1}.

MISE EN GARDE

Il ne faut pas confondre la constante de désintégration λ avec la longueur d'onde d'un photon ou d'une particule quantique.

L'équation 13.12 est une équation différentielle. Nous avons déjà rencontré cette équation dans le tome 2, lors de l'étude des circuits *RC* et des circuits *RL*. Elle est simple à résoudre :

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = -\lambda\,\mathrm{d}t \,.$$

On intègre des deux côtés de l'équation :

$$\int \frac{\mathrm{d}N}{N} = -\lambda \int \mathrm{d}t$$

$$\ln N = -\lambda t + \mathcal{C} ,$$

avec $\mathcal{C}$, une constante d'intégration. Pour isoler N, on calcule la fonction exponentielle pour chaque membre de l'équation précédente :

$$N = \mathrm{e}^{-\lambda t + \mathcal{C}} = \mathrm{e}^{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathcal{K} \mathrm{e}^{-\lambda t} ,$$

où $\mathcal{K}$ est une autre constante. Étant donné que $N = N_0$ pour $t = 0$, la constante $\mathcal{K}$ est simplement égale à N_0. On obtient donc l'expression pour le nombre de noyaux en fonction du temps :

$$N = N_0 \, \mathrm{e}^{-\lambda t} . \qquad (13.13)$$

Loi de désintégration

Le nombre de noyaux décroît de façon exponentielle. Au départ, le nombre de noyaux diminue rapidement, alors que pour un temps plus grand, le nombre de noyau change très peu.

MISE EN GARDE

Dans l'équation 13.13, il est important que les unités de λ et de t soient opposées, de telle sorte que les unités se simplifient, étant donné qu'un exposant ne peut pas avoir d'unités.

REMARQUE

L'équation 13.13 est valable lorsqu'il y a beaucoup de noyaux dans l'échantillon. Cette équation n'indique pas à quel moment un noyau en particulier va se désintégrer.

De façon expérimentale, il est plus facile de mesurer le taux de désintégration. On appelle l'*activité* la valeur absolue du taux de désintégration :

$$R \equiv \left| \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \right| = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N . \qquad (13.14)$$

Activité

En insérant l'équation 13.13 dans l'équation 13.14, on trouve que l'activité décroît aussi de façon exponentielle :

$$R = R_0 \, \mathrm{e}^{-\lambda t} , \qquad (13.15)$$

Loi de désintégration pour l'activité

où R_0 est l'activité initiale :

$$R_0 = \lambda N_0 . \qquad (13.16)$$

L'activité correspond au nombre de désintégrations par seconde. Dans le SI, l'unité de l'activité est le becquerel (Bq), nommée en l'honneur du physicien Henri Becquerel (1852-1908) qui a découvert la radioactivité en 1896. Selon la définition :

$$1 \text{ Bq} \equiv 1 \text{ désintégration/s} = 1 \text{ s}^{-1} . \qquad (13.17)$$

On utilise encore parfois l'unité appelée le curie (Ci), en l'honneur du physicien français Pierre Curie (1859-1906). Cette ancienne unité est basée sur l'activité d'un gramme d'un isotope du radium. Le facteur de conversion à utiliser est le suivant :

$$1 \text{ Ci} = 3{,}7 \times 10^{10} \text{ Bq} . \tag{13.18}$$

MISE EN GARDE

Lorsqu'on utilise l'équation 13.14 pour relier l'activité et le nombre de noyaux de l'échantillon, il faut exprimer λ en s^{-1}, de telle sorte que l'activité R soit exprimée en Bq.

La figure 13.7 montre le graphique du nombre de noyaux en fonction du temps et le graphique de l'activité en fonction du temps. Les deux graphiques présentent la même décroissance exponentielle. La *demi-vie* $t_{1/2}$ est le temps qu'il faut pour que le nombre de noyaux (et l'activité) diminue de moitié (*voir la figure 13.7*). Donc, à $t = t_{1/2}$, $N = N_0/2$. En insérant cette définition dans l'équation 13.13, on obtient

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \, e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda t_{1/2} .$$

Étant donné que $\ln(1/2) = -\ln(2)$, on obtient

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} . \tag{13.19}$$

La demi-vie est un concept utile lorsqu'un échantillon comporte un grand nombre de noyaux. Lorsque le nombre de noyaux est limité, la *durée de vie moyenne* τ est plus utile. Elle représente le temps moyen pour qu'un noyau se désintègre. On peut montrer que

$$\tau = 1/\lambda . \tag{13.20}$$

Pour $t = \tau$, le nombre de noyaux est $N = N_0/e$.

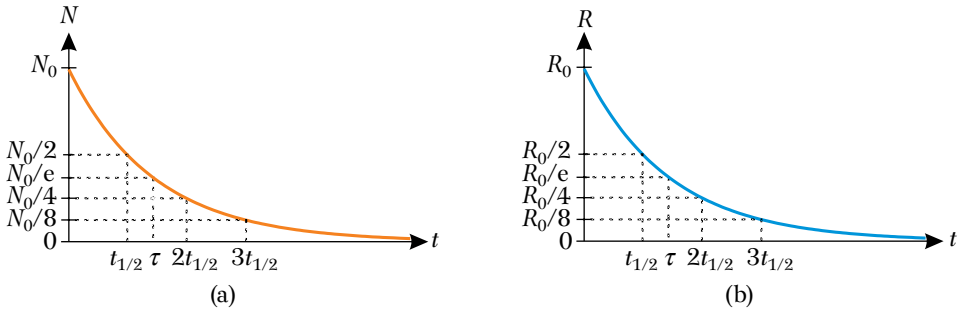


FIGURE 13.7
La décroissance exponentielle pour (a) le nombre de noyaux et (b) l'activité.

REMARQUE

Dans les circuits *RC* et les circuits *RL*, la constante τ est appelée la constante de temps.

On peut donc relier la demi-vie, la durée de vie moyenne et la constante de désintégration par l'équation suivante :

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \tau \ln(2) . \qquad (13.21)$$

Demi-vie

De façon usuelle, on utilise la demi-vie en physique nucléaire pour caractériser les nucléides, alors qu'on utilise la durée de vie moyenne en physique des particules pour décrire les particules subatomiques instables, comme les muons et les pions que nous avons rencontrés au chapitre 9. Pour cette raison, c'est la demi-vie qui est utilisée dans ce chapitre, alors que la durée de vie moyenne sera utilisée au chapitre 14 pour décrire les particules subatomiques.

Défi animé 13.1
Les lois de la radioactivité s'appliquent-elles aussi à des échantillons de très petite taille ?

MISE EN GARDE

La demi-vie n'est pas égale à la moitié de la durée de vie moyenne. Après un temps deux fois plus grand que la demi-vie, l'échantillon comprend $N_0/2^2 = N_0/4$.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 13.2

Un échantillon d'une substance radioactive possède initialement 8000 noyaux. La demi-vie est $t_{1/2}$. Après combien de temps l'échantillon comprendra-t-il 1000 noyaux ? (Vous n'avez pas besoin de faire un calcul compliqué.)

EXEMPLE 13.3 La radioactivité en médecine

Le technétium 99m (un état excité métastable) est un nucléide utilisé en médecine pour faire des diagnostics. Ce nucléide est un état excité du technétium 99 :

$$^{99m}_{43}\mathrm{Tc} \rightarrow {}^{99}_{43}\mathrm{Tc} + \gamma .$$

Le technétium 99m est utilisé, parce qu'il émet un rayon γ détectable de faible énergie (141 keV) et il a une courte demi-vie ($t_{1/2}$ = 6 h et 20 s). Un échantillon contient initialement 1,00 g de technétium.

a. Quelle est l'activité initiale ?

b. Quelle est l'activité après 3,00 jours ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues		Inconnues
$A = 99$	$M_0 = 1{,}00$ g	R_0
$t = 3{,}00$ d		R

La demi-vie est

$$t_{1/2} = 6{,}00 \text{ h} \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} + 20 \text{ s} = 21620 \text{ s} . \qquad \text{(i)}$$

Il est possible de calculer le nombre de noyaux dans l'échantillon initial à partir du nombre de masse. En effet, un atome de $^{99}_{43}\text{Tc}$ a une masse approximative $m = 99{,}0$ u. Nous obtenons

$$N_0 = \frac{M_0}{m} = \frac{1{,}00 \times 10^{-3}\ \text{kg}}{99{,}0\ \text{u} \times 1{,}661 \times 10^{-27}\ \text{kg/u}}$$
$$= 6{,}081 \times 10^{21}\ \text{noyaux}. \qquad \text{(ii)}$$

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est la définition de l'activité initiale, donnée par l'équation 13.16 :

$$R_0 = \lambda N_0\ , \qquad \text{(iii)}$$

où la constante de désintégration est reliée à la demi-vie par l'équation 13.21 :

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}\ . \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons l'équation (iv) dans l'équation (iii), puis nous insérons les valeurs numériques :

$$R_0 = \frac{N_0 \ln(2)}{t_{1/2}}$$
$$= \frac{6{,}081 \times 10^{21} \times \ln(2)}{21620\ \text{s}} = 1{,}950 \times 10^{17}\ \text{dés/s}$$
$$R_0 = 1{,}950 \times 10^{17}\ \text{Bq}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 13.15 :

$$R = R_0\, e^{-\lambda t}\ . \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons l'équation (iv) dans l'équation (v) et nous remplaçons les valeurs numériques :

$$R = R_0\, e^{-\ln(2)t/t_{1/2}}$$
$$= 1{,}950 \times 10^{17}\ \text{Bq}\ e^{-\ln(2) \times 3 \times 24 \times 3600\ \text{s}/21620\ \text{s}}$$
$$R = 4{,}797 \times 10^{13}\ \text{Bq}\ . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'activité a beaucoup diminué en trois jours, ce qui est important pour limiter l'exposition d'un patient à la radioactivité.

La datation radioactive

Étant donné que les éléments radioactifs se désintègrent selon une fonction précise du temps, il est possible d'évaluer le temps à partir de la radioactivité actuelle d'un objet. Par exemple, on peut dater les objets qui contiennent du carbone en mesurant le rapport présent entre le nombre d'atome de carbone 14 et le nombre de noyau de carbone 12. Le carbone 14 est un élément radioactif produit dans l'atmosphère lorsque des rayons cosmiques (des protons et des électrons de haute énergie) entrent en collision avec les atomes d'azote. Étant donné que le flux de rayons cosmiques est constant, il y a une situation d'équilibre. Le carbone 14 se désintègre, mais il s'en produit par de nouvelles collisions. Le rapport entre le nombre d'atomes de carbone 14 et le nombre total d'atomes de carbone est $N_{^{14}\text{C}}/N_{\text{C}} = 1{,}3 \times 10^{-12}$.

Le carbone est utilisé par les êtres vivants, de telle sorte qu'il y a le même équilibre entre le carbone 14 et le carbone 12 dans un être vivant, tant qu'il vit. Après la mort, le carbone 14 n'est plus remplacé dans les restes de l'être vivant. À partir de la mesure du rapport actuel de $N_{^{14}\text{C}}/N_{\text{C}}$, on peut obtenir le temps t depuis la mort à l'aide de l'équation 13.13.

La datation par carbone 14 permet de dater des os, du bois, des restes de nourriture, des morceaux de vêtements et d'autres objets organiques. Comme la demi-vie du carbone 14 est de 5 730 a, il est possible d'obtenir l'âge d'objets jusqu'à environ 20 000 a. Pour des objets plus anciens, le nombre de noyaux de carbone 14 devient très faible et la détection devient très difficile.

Pour dater les roches comme celle de la figure 13.1, on a recours à des éléments radioactifs naturels ayant une demi-vie de l'ordre du milliard d'années. Selon la composition de la roche, il est possible d'utiliser la désintégration du potassium 40 (dont la demi-vie est de $1{,}25 \times 10^9$ a) ou la désintégration de l'uranium 238 (dont la demi-vie est de $4{,}47 \times 10^9$ a).

EXEMPLE 13.4 La doyenne du Québec

La roche illustrée à la figure 13.1 a été trouvée dans le nord du Québec, à 30 km du village d'Inukjuak. Pour la dater, on a utilisé l'uranium piégé dans les cristaux de zircon. L'uranium fait partie d'une chaîne radioactive, c'est-à-dire qu'il se produit plusieurs désintégrations successives, jusqu'au plomb 206, qui est le nucléide stable final. On peut donc dire :

$$^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{206}_{82}\text{Pb} + \text{différents produits}.$$

La demi-vie de cette chaîne est à peu près égale à la demi-vie de l'uranium ($t_{1/2} = 4{,}47 \times 10^9$ a), car les autres désintégrations se produisent beaucoup plus rapidement.

Supposons qu'un échantillon de cette roche contient actuellement 3,05 mg d'uranium et 2,49 mg de plomb. On présume que la roche ne contenait pas de plomb lors de sa formation.

a. Quel est le nombre de noyaux de plomb et de noyaux d'uranium présentement dans l'échantillon ?

b. Quel était le nombre de noyaux d'uranium lorsque la roche s'est solidifiée ?

c. Quel est l'âge de la roche ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

La masse d'un atome d'uranium 238 est $m_U = 238$ u et celle d'un atome de plomb 206 est $m = 206$ u.

Connues	
$M_U = 3{,}05 \times 10^{-6}$ kg	$m_U = 238$ u
$M_{Pb} = 2{,}49 \times 10^{-6}$ kg	$m_{Pb} = 206$ u
$t_{1/2} = 4{,}47 \times 10^9$ a	

Inconnues	
N_U	N_{Pb}
N_{0U}	t

SOLUTION a.

Identifier la clé

Nous calculons le nombre de noyaux à partir de la masse d'un nucléide, obtenue par le nombre de masse :

$$N = \frac{M}{m}. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs numériques :

$$N_U = \frac{3{,}05 \times 10^{-6}\ \text{kg}}{238 \times 1{,}661 \times 10^{-27}\ \text{kg}}$$

$$N_U = 7{,}715 \times 10^{18}\ \text{noyaux} \qquad \text{(réponse)}$$

$$N_{Pb} = \frac{2{,}49 \times 10^{-6}\ \text{kg}}{206 \times 1{,}661 \times 10^{-27}\ \text{kg}}$$

$$N_{Pb} = 7{,}277 \times 10^{18}\ \text{noyaux}. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

La **clé** est que chaque atome d'uranium qui s'est désintégré a produit à terme un atome de plomb. Nous obtenons alors le nombre initial d'atomes d'uranium :

$$N_{0U} = N_{Pb} + N_U. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous insérons les résultats de la partie **a.** dans l'équation (ii) :

$$N_{0U} = 7{,}715 \times 10^{18} + 7{,}277 \times 10^{18}$$

$$N_{0U} = 1{,}499 \times 10^{19}. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Identifier la clé

La clé est la loi de la désintégration (l'équation 13.13) :

$$N_U = N_{0U}\, e^{-\lambda t}\,, \qquad \text{(iii)}$$

où λ peut être exprimée en fonction de la demi-vie à l'aide de l'équation 13.21 :

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}\,. \qquad \text{(iv)}$$

Résoudre le problème

Nous isolons t dans l'équation (iii) et nous insérons l'équation (iv) :

$$\frac{N_U}{N_{0U}} = e^{-\lambda t}$$

$$\ln\left(\frac{N_U}{N_{0U}}\right) = -\frac{\ln(2)}{t_{1/2}}\, t$$

$$t = -\ln\left(\frac{N_U}{N_{0U}}\right)\frac{t_{1/2}}{\ln(2)}$$

$$t = -\ln\left(\frac{7{,}715\times10^{18}}{1{,}499\times10^{19}}\right)\times\frac{4{,}47\times10^{9}\ \text{a}}{\ln(2)}$$

$$= 4{,}28\times10^{9}\ \text{a} = 4{,}28\ \text{Ga}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

La roche s'est formée il y a très longtemps, mais ce temps est quand même inférieur à la formation de la Terre, qui date d'environ 4,5 milliards d'années.

13.4 La désintégration alpha

Le premier processus produisant de la radioactivité est la désintégration alpha (α). Dans ce type de désintégration, un noyau ${}^{A}_{Z}X$, qu'on appelle le *noyau mère*, émet une particule alpha et se transforme en un nouveau noyau X′, qu'on appelle le *noyau fille* (*voir la figure 13.8*). La particule alpha est en fait un noyau d'hélium 4 sans électrons, constitué de deux neutrons et de deux protons, ce qui correspond à quatre nucléons. Le noyau fille possède donc deux protons de moins et quatre nucléons de moins que le noyau mère. La réaction de désintégration est la suivante :

Désintégration α

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}X' + {}^{4}_{2}He\,. \qquad (13.22)$$

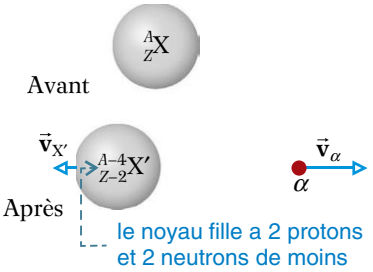


FIGURE 13.8
Dans une désintégration alpha, un noyau mère X se transforme en un noyau fille en émettant une particule alpha (un noyau d'hélium).

Cette réaction se fait spontanément, car le noyau X a une plus grande masse que la somme des masses des produits de la désintégration. L'énergie au repos se transforme en énergie cinétique. Selon l'équation 9.58 de la page 337, l'énergie libérée est obtenue par le facteur Q de la réaction :

$$Q = -\Delta M\, c^2 = (M_X - M_{X'} - M_{He})\, c^2 \qquad \text{(désintégration } \alpha\text{)}\,. \qquad (13.23)$$

L'énergie libérée est partagée entre la particule alpha (de l'énergie cinétique) et le noyau fille. L'énergie cinétique du noyau X′ associée au recul peut être négligée, car sa masse est beaucoup plus grande que celle de la particule alpha. Cependant, le noyau X′ peut se trouver dans un état excité. Dans ce cas, le noyau X′ va émettre un ou plusieurs photons de rayon gamma et descendre au niveau fondamental.

REMARQUE

Pour utiliser l'équation 13.23, on a besoin de la masse des noyaux X et X′. Dans les tables des nucléides, on donne plutôt la masse des nucléides, ce qui inclut la masse des électrons spectateurs. Il est correct ici d'utiliser la masse des nucléides, car dans l'équation de désintégration 13.22, les nucléides du membre de droite ont autant d'électrons que le nucléide X.

La désintégration alpha se produit pour des noyaux de grande masse. C'est la conséquence de la portée finie de la force nucléaire. En effet, la force nucléaire attractive augmente approximativement selon le nombre de nucléons A, alors que la force électrique répulsive augmente selon Z^2, étant donné que la force électrique est proportionnelle à la charge électrique de chaque particule. Pour de gros noyaux, la force électrique devient assez grande pour éjecter une particule chargée. Mais pourquoi est-ce une particule alpha et non un proton qui est éjectée ? La réponse se trouve dans le graphique de la figure 13.4 : la courbe montre un pic vis-à-vis du nucléide $^{4}_{2}\mathrm{He}$, ce qui veut dire que ce nucléide a une plus faible masse que ses voisins. Donc, en éjectant une particule alpha, cela maximise la quantité d'énergie au repos qui est transformée.

Prenons par exemple la désintégration du radium 226 en radon 222. L'équation de désintégration est la suivante :

$$^{226}_{88}\mathrm{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\mathrm{Rn} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}\,. \tag{13.24}$$

Lors de cette désintégration, l'énergie libérée est $Q = 4{,}871$ MeV. La figure 13.9 montre un diagramme des niveaux d'énergie du radium 226 et du radon 222. Il y a 94 % de probabilité que la particule alpha ait une énergie cinétique $K = Q$ et que le noyau radon soit dans son état fondamental. Il y a aussi une probabilité de 6 % que l'énergie cinétique de la particule alpha soit moindre que Q. Dans ce cas, le noyau radon se trouve dans un état excité ayant une énergie E_2. Il émet très rapidement un rayon gamma qui possède une énergie $E_\gamma = E_2 - E_1$ en effectuant la transition entre le niveau excité et le niveau fondamental. En mesurant l'énergie des particules alpha émises par un échantillon de radium, on observe des particules avec une énergie de 4,871 MeV et des particules avec une énergie de K moindre, en plus de rayons gamma. Le *spectre* de particules alpha est discret. Pour la désintégration du radium 226, ce spectre ne comprend que deux énergies bien déterminées, comme le montre la figure 13.10.

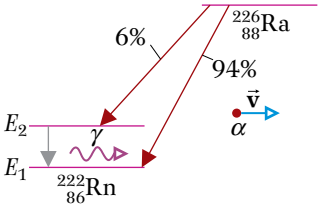


FIGURE 13.9
Le diagramme des niveaux d'énergie pour la désintégration du radium 226

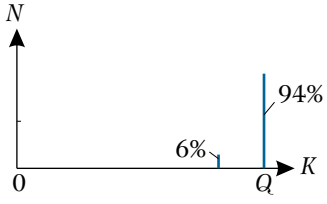


FIGURE 13.10
Pour la désintégration du radium 226, le spectre est discret.

EXEMPLE 13.5 La radioactivité pour votre sécurité

Plusieurs détecteurs de fumée utilisent une petite quantité d'américium 241 pour détecter la présence de fumée, en ionisant l'air dans une chambre d'ionisation. Cet isotope émet une particule alpha et se désintègre en neptunium 237, avec une demi-vie de 432 a. La masse de l'américium 241 est de 241,056 822 u et la masse du neptunium 237 est de 237,048 166 u. Quelle est l'énergie libérée lors de la désintégration ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

La masse de l'hélium 4 est présentée dans le tableau 13.2 de la page 480.

Connues	Inconnue
$M_{Am} = 241,056\,822$ u	Q
$M_{Np} = 237,048\,166$ u	
$M_{\alpha} = 4,002\,603$ u	

L'équation de désintégration est

$$^{241}_{95}\text{Am} \rightarrow {}^{237}_{93}\text{Np} + {}^{4}_{2}\text{He}\,. \qquad \text{(i)}$$

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 13.23 appliquée à l'équation de désintégration (i) :

$$Q = (M_{Am} - M_{Np} - M_{He})c^2\,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs numériques, et nous remplaçons c^2 par 931,5 MeV/u (*voir l'équation 13.9*) :

$$Q = (241,056\,822 \text{ u} - 237,048\,166 \text{ u} - 4,002\,603 \text{ u}) \times 931,5 \text{ MeV/u}$$

$$Q = 5,638 \text{ MeV}\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

L'énergie libérée lors d'une désintégration alpha est de quelques MeV.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 13.3

Complétez les équations de désintégration alpha suivantes :

a. $^{285}_{112}\text{Cn} \rightarrow \cdots$;

b. $^{235}_{92}\text{U} \rightarrow \cdots$;

c. $^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow \cdots$.

Le mécanisme de la désintégration alpha

La demi-vie associée à la désintégration alpha varie beaucoup d'un nucléide à l'autre. Prenons par exemple des isotopes de radium ($Z = 88$) qui se désintègrent par une désintégration alpha, dont la demi-vie et le facteur Q de la désintégration sont donnés au tableau 13.3. On remarque qu'il y a une corrélation entre la demi-vie et l'énergie libérée. L'isotope ayant la demi-vie la plus longue est l'isotope 226, et c'est l'isotope qui libère la plus faible énergie. Par contre, l'isotope de radium 218 libère 75 % plus d'énergie lors de sa désintégration, et sa demi-vie est 2×10^{15} fois plus courte que dans le cas du $^{226}_{88}\text{Ra}$.

TABLEAU 13.3

La demi-vie et l'énergie libérée pour quelques isotopes de radium qui se désintègrent par désintégration alpha

A	$t_{1/2}$	Q (MeV)
218	25,6 µs	8,546
220	18 ms	7,595
222	38,0 s	6,681
224	3,66 d	5,789
226	1600 a	4,871

La demi-vie d'une désintégration est liée à la probabilité que le processus se produise. Pour expliquer la diminution très marquée de la demi-vie lorsque Q augmente, on a besoin de faire appel au concept de la dualité onde-particule. Pour les nucléides de grande masse, une particule alpha peut se former à l'intérieur du noyau. Cette particule alpha est confinée dans un puits de potentiel

semblable à celui présenté à la figure 13.11. La force nucléaire produit un puits de potentiel ayant une largeur équivalente à celle du noyau et une certaine hauteur U_0. À l'extérieur du noyau, lorsque la force nucléaire est à peu près nulle, c'est la force électrique qui produit une énergie potentielle qui diminue en $1/r$.

Pour les isotopes de radium présentés au tableau 13.3, la particule alpha est soumise à un puits de potentiel équivalent. Les particules alpha ont une énergie $E < U_0$, et elles sont confinées à l'intérieur du puits. Le puits a une hauteur et une largeur finie. Comme nous l'avons vu à la section 11.8, une particule a une certaine probabilité de traverser une barrière par effet tunnel. De plus, cette probabilité est donnée par une fonction exponentielle, ce qui signifie que la probabilité varie rapidement si la barrière devient moins haute ou moins large.

Avec un plus grand nombre nombre de neutrons, la particule alpha de l'isotope $^{226}_{88}\text{Ra}$ est à un niveau d'énergie plus bas, car les neutrons supplémentaires produisent une plus grande force d'attraction, ce qui engendre une énergie potentielle plus négative. Pour cet isotope, la barrière est relativement haute et large, de telle sorte que la probabilité de la traverser est faible, ce qui entraîne une grande demi-vie. Pour les isotopes ayant moins de neutrons, la particule alpha se trouve sur un niveau d'énergie plus haut. La barrière de potentiel est alors moins haute et moins large. La probabilité de traverser la barrière est plus grande et la demi-vie, plus courte.

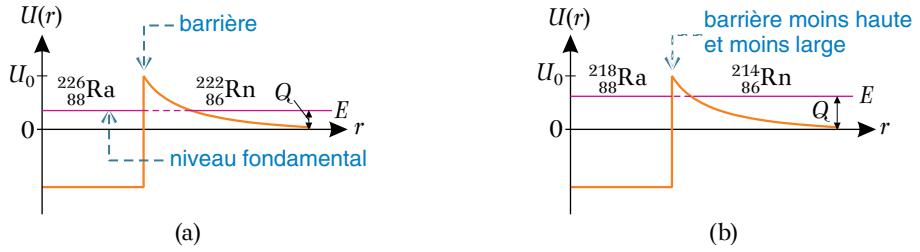


FIGURE 13.11
Le puits de potentiel pour la particule alpha : (a) pour le radium 226 ; (b) pour le radium 218.

13.5 La désintégration bêta

La désintégration bêta (β) est le deuxième processus de désintégration. La désintégration β regroupe en fait trois désintégrations différentes reliées : la désintégration β^-, la désintégration β^+ et la capture électronique. Ces trois transformations sont le résultat d'une nouvelle interaction fondamentale entre les quarks (les constituants des nucléons), qu'on appelle l'interaction faible. Le résultat est la transformation d'un neutron en proton ou l'inverse, accompagnée d'émission de particules. Nous traiterons de l'interaction faible, ainsi que des autres interactions fondamentales, dans le chapitre 14.

La désintégration β^-

La figure 13.12 illustre une désintégration β^-, dans laquelle un noyau mère $^{A}_{Z}\text{X}$ se transforme en un noyau fille $^{A}_{Z+1}\text{X}'$ en émettant un électron (qui a d'abord été appelé un rayon β et qui a une charge négative). Il y a en plus une autre particule émise lors de cette désintégration. On l'appelle l'*antineutrino électronique*, symbolisée par $\bar{\nu}$ (la lettre grecque «nu» pour indiquer un neutrino et la barre supérieure pour indiquer que c'est une antiparticule).

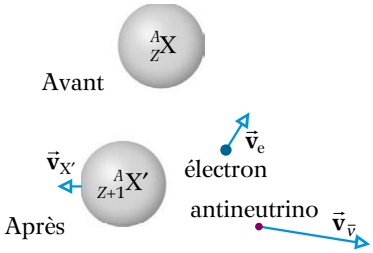


FIGURE 13.12
Dans une désintégration β^-, il y a émission d'un électron et d'un antineutrino.

Les neutrinos sont des particules qui ont une charge électrique nulle et une masse très très faible. L'antineutrino électronique et les autres neutrinos sont des particules qui ne subissent ni l'interaction électromagnétique ni l'interaction forte. L'interaction avec la matière ordinaire se fait seulement par l'interaction faible, ce qui implique que la majorité des neutrinos quittent le système et le laboratoire sans être détectés, en transportant de l'énergie et de la quantité de mouvement. Il y a donc une partie de l'énergie libérée dans les désintégrations β qui quitte le laboratoire. On ne connaît pas encore la masse des neutrinos, mais on sait que cette masse n'est pas tout à fait nulle. Dans cet ouvrage, nous négligeons la masse de tous les neutrinos.

La désintégration β^- est donnée par la réaction suivante :

Désintégration β^-

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{X}' + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}\,. \tag{13.25} $$

Donc, cette désintégration ne change pas le nombre de nucléons dans le noyau, mais elle fait augmenter de un le nombre de protons. Cela veut dire qu'à l'intérieur du noyau, il y a un neutron qui se transforme en proton, en émettant un électron et un antineutrino :

$$ \mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}\,. \tag{13.26} $$

Cette transformation est produite par l'interaction faible. On remarque dans cette équation de désintégration que la charge électrique est conservée : au départ, la charge est nulle, car le neutron est électriquement neutre. Après la désintégration, les particules ont changé de nature, mais le système a toujours une charge nulle : le proton a une charge $q = +e$, l'électron a une charge $q = -e$ et l'antineutrino, une charge nulle.

Le carbone 14 est un exemple d'un nucléide qui subit une désintégration β^-. Le noyau du carbone 14 est constitué de six protons et de huit neutrons. Lorsqu'un neutron se transforme, on obtient

$$ {}^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}\,. $$

L'électron et l'antineutrino sont créés lors de la désintégration, de la même façon qu'un photon est créé lorsqu'un atome effectue une transition entre un niveau excité et le niveau fondamental.

La désintégration β^- se produit autant dans les nucléides de faible masse que de masse élevée. Dans la carte des nucléides, ce sont les nucléides identifiés par des cases roses, en bas et à droite de la région des nucléides stables.

L'énergie libérée au moment de la désintégration β^- se calcule à l'aide de la variation de la masse lors de la désintégration. Pour la désintégration de l'équation 13.25, on obtient (en négligeant la masse de l'antineutrino) :

$$ Q = -\Delta M\, c^2 = (M_{\text{noyau X}} - M_{\text{noyau X}'} - m_{\mathrm{e}})\, c^2\,. \tag{13.27} $$

Dans les tables, ce sont les masses des nucléides qui sont représentées, c'est-à-dire la masse des noyaux avec les électrons spectateurs. On obtient la masse

d'un noyau en soustrayant la masse des électrons de la masse du nucléide correspondant. Le nucléide X a Z électrons et le nucléides X′ a $(Z+1)$ électrons. Alors,

$$Q = \left([M_X - Zm_e] - [M_{X'} - (Z+1)\, m_e] - m_e\right) c^2$$
$$Q = (M_X - M_{X'})\, c^2 \,. \qquad (13.28)$$

La masse de l'électron se simplifie dans le calcul.

En négligeant l'énergie cinétique associée au recul du noyau fille, l'énergie libérée Q est partagée entre le noyau fille (s'il se trouve dans un état excité), l'électron et l'antineutrino. Contrairement à la désintégration α, l'énergie cinétique de l'électron émis lors d'une désintégration β^- consiste en un spectre continu, comme le montre la figure 13.13. Selon l'énergie cinétique transportée par l'antineutrino, l'électron peut avoir une énergie cinétique comprise entre une valeur quasi nulle et une valeur $K_{max} \approx Q$.

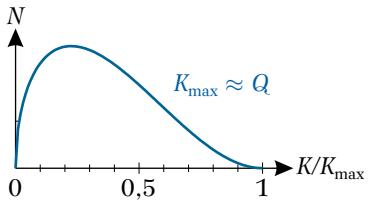


FIGURE 13.13
Le nombre d'électrons en fonction de l'énergie cinétique montre un spectre d'électrons continu.

EXEMPLE 13.6 L'énergie libérée par le carbone 14

Le carbone 14 subit une désintégration β^- avec une demi-vie de 5 730 a. La masse du nucléide $^{14}_{6}C$ est de 14,003 242 u et celle de $^{14}_{7}N$ est de 14,003 074 u.

a. Quelle est l'énergie libérée ?

b. Quel est le module de la vitesse des électrons les plus rapides ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connues	Inconnues
$M_C = 14{,}003\,242$ u	Q
$M_N = 14{,}003\,074$ u	v_{max}
$m_e = 0{,}5110$ MeV/c^2	

L'équation de désintégration est

$$^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + e^- + \bar{\nu} \,. \qquad (i)$$

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 13.28. Pour la désintégration présentée à l'équation (i), l'énergie libérée est donnée par l'expression :

$$Q = (M_C - M_N)\, c^2 \,. \qquad (ii)$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs numériques et nous utilisons $c^2 = 931{,}5$ MeV/u :

$$Q = (14{,}003\,242 \text{ u} - 14{,}003\,074 \text{ u})\ 931{,}5 \text{ MeV/u}$$
$$Q = 0{,}156\,49 \text{ MeV} = 156 \text{ keV} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

L'énergie cinétique de l'électron correspond à l'énergie libérée, car nous négligeons l'énergie cinétique de recul du noyau fille et l'énergie au repos de l'antineutrino :

$$K_{max} \approx Q = 156{,}49 \text{ keV} \,. \qquad (iii)$$

Identifier la clé

Étant donné que l'énergie cinétique est du même ordre de grandeur que l'énergie au repos de l'électron ($E_0 = mc^2 = 511{,}0$ keV), nous utilisons la formule relativiste de l'énergie cinétique, donnée par l'équation 9.48 de la page 332 :

$$K = (\gamma_p - 1)\, mc^2 \,, \qquad (iv)$$

où γ_p est le facteur de Lorentz pour l'électron :

$$\gamma_p = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,. \qquad (v)$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord le facteur de Lorentz à partir de l'équation (iv) correspondant aux électrons ayant la plus grande énergie cinétique :

$$\gamma_{max} = \frac{K_{max}}{mc^2} + 1 = \frac{156,49 \text{ keV}}{511,0 \text{ keV}} + 1 = 1,306\,2 \text{ . (vi)}$$

Nous isolons ensuite v dans l'équation (v) :

$$\gamma_{max}^2 = \frac{1}{1 - v_{max}^2/c^2}$$

$$\left(\frac{v_{max}}{c}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\gamma_{max}^2}$$

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_{max}^2}}\, c$$

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{(1,306\,2)^2}}\, c = 0,643c \text{ . (réponse)}$$

Valider la réponse

La désintégration β^- du carbone 14 libère moins d'énergie qu'une désintégration α typique. Malgré cela, l'électron est relativiste : le module de sa vitesse s'approche de c. En général, on doit utiliser la relativité restreinte pour analyser le mouvement d'un électron produit dans une désintégration β.

La désintégration β^+

Pour certains nucléides, le nombre de neutrons est trop faible pour être stables. C'est le cas des nucléides qui se trouvent à gauche et en haut de la série des nucléides stables dans la carte des nucléides (*voir la figure 13.3 de la page 475*). Comme le montre la figure 13.14, un noyau ${}^{A}_{Z}\text{X}$ se désintègre en un noyau ${}^{A}_{Z-1}\text{X}'$ en émettant un *positron* (e^+), qui est l'antiparticule de l'électron, et un *neutrino électronique* (ν). C'est la désintégration β^+, car le positron émis a une charge positive. Donc,

Désintégration β^+

$${}^{A}_{Z}\text{X} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\text{X}' + e^+ + \nu \text{ .} \qquad (13.29)$$

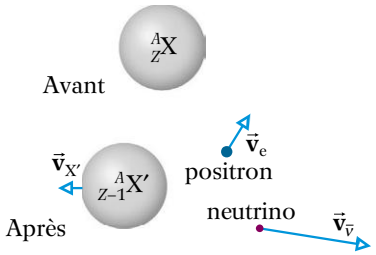


FIGURE 13.14
Dans une désintégration β^+, il y a émission d'un positron et d'un neutrino.

Le neutrino électronique est une particule différente de l'antineutrino électronique rencontré lors de l'étude de la désintégration β^-, mais comme l'antineutrino, sa masse est négligeable et il est très difficile à détecter.

Dans une désintégration β^+, un proton se transforme en neutron :

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu \text{ .} \qquad (13.30)$$

De nouveau, la charge électrique est conservée dans ce processus.

REMARQUE

La transformation du proton en neutron n'est pas possible dans le cas d'un proton libre, car sa masse est plus faible que celle du neutron. Par contre, lorsque le proton fait partie d'un noyau, la masse du noyau mère X est plus grande que celle du noyau fille X′.

L'énergie libérée Q se calcule à partir des masses des particules qui participent à la désintégration. On obtient de nouveau l'équation 13.27, car le positron a la même masse que l'électron :

$$Q = -\Delta M\, c^2 = (M_{\text{noyau X}} - M_{\text{noyau X}'} - m_e)\, c^2 \text{ .}$$

Il y a une différence lorsqu'on transforme cette équation pour utiliser la masse des nucléides, car le nucléide X′ contient ici $(Z-1)$ électrons. Alors,

$$\begin{aligned} Q &= ([M_X - Zm_e] - [M_{X'} - (Z-1)\,m_e] - m_e)\,c^2 \\ Q &= (M_X - M_{X'} - 2m_e)\,c^2\,. \end{aligned} \tag{13.31}$$

Cette énergie est partagée entre le positron et le neutrino (en négligeant l'énergie de recul du noyau). Le positron et le neutrino sont des particules libres, pour lesquelles l'énergie n'est pas quantifiée. Pour cette raison, le spectre de positron est un spectre continu, semblable à la figure 13.13.

Le positron est ralenti graduellement par la matière. Lorsque le positron rencontre un électron, il y a annihilation des deux particules, qui se transforment en deux rayons γ. L'énergie au repos du positron et de l'électron se transforme en énergie des photons :

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma\,. \tag{13.32}$$ Annihilation

On observe alors deux rayons gamma ayant une énergie de 0,511 MeV, ce qui correspond à l'énergie au repos du positron et de l'électron.

La capture électronique

Le troisième processus lié à l'interaction faible et qui produit une désintégration d'un noyau est la capture électronique (symbolisée par ε). Dans l'équation 13.30, on peut transférer le positron du membre de droite au membre de gauche, en le transformant algébriquement en électron. On obtient l'équation de la capture électronique :

$$p + e^- \rightarrow n + \nu\,. \tag{13.33}$$

Nous avons vu à la section 12.4 que pour les électrons des sous-couches s, la densité de probabilité est maximale à $r = 0$, c'est-à-dire à la position du noyau. Il y a donc une certaine probabilité que l'électron d'une couche s soit capturé par le proton pour qu'il se transforme en neutron. La capture électronique permet donc à un noyau X de se désintégrer en un noyau X′ ayant un neutron de plus et un proton de moins :

$${}^{A}_{Z}X + e^- \rightarrow {}^{A}_{Z-1}X' + \nu\,. \tag{13.34}$$ Capture électronique

Dans la capture électronique, il n'y a ni électron ni positron émis. Par contre, l'électron capturé laisse une place libre dans une couche s. L'atome X′ est donc dans un état excité. En se désexcitant, l'atome émet des photons en cascade. Comme c'est un électron dans un niveau inférieur qui a laissé une place libre, les photons émis sont en général dans le domaine des rayons X.

Tout comme la désintégration β^+, la capture électronique peut se produire dans les noyaux ayant un surplus de protons par rapport au nombre de neutrons. Il s'agit des nucléides situés en haut et à gauche de la région de stabilité dans la figure 13.3 de la page 475. Pour les nucléides ayant un surplus de protons, les deux mécanismes sont possibles. Selon le nucléide, il y a une certaine probabilité de subir une désintégration β^+ et une certaine probabilité de produire

une capture électronique. Par exemple, le scandium 43 peut se désintègrer en calcium 43 selon les deux modes :

$$^{43}_{21}\mathrm{Sc} \xrightarrow{\beta^+} {}^{43}_{20}\mathrm{Ca} + \mathrm{e}^+ + \nu \qquad (88{,}1\,\%)$$
$$^{43}_{21}\mathrm{Sc} + \mathrm{e}^- \xrightarrow{\varepsilon} {}^{43}_{20}\mathrm{Ca} + \nu \qquad (11{,}9\,\%)\,.$$

La capture électronique est plus probable pour les nucléides de grande masse, car pour ceux-ci, les sous-couches *s* sont plus compactes, près du noyau, étant donné que l'attraction électrique du noyau est plus grande.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 13.4

Complétez les équations de désintégration suivantes.

a. $^{3}_{1}\mathrm{H} \xrightarrow{\beta^-} \cdots$

b. $^{206}_{83}\mathrm{Bi} + \mathrm{e}^- \xrightarrow{\varepsilon} \cdots$

c. $^{137}_{55}\mathrm{Cs} \xrightarrow{\beta^-} \cdots$

d. $^{18}_{9}\mathrm{F} \xrightarrow{\beta^+} \cdots$

13.6 La mesure de la dose de rayonnements ionisants

Le rayonnement provenant de la radioactivité (particules alpha, électrons, neutrons, protons, rayons gamma) ainsi que les rayons X ont suffisamment d'énergie pour ioniser des atomes. Par exemple, les photons peuvent être absorbés et éjecter des électrons par effet photoélectrique. De même, un photon de haute énergie peut être diffusé par effet Compton, ce qui éjecte aussi un électron d'un atome, rendant l'atome ionisé. Les particules comme les particules alpha et les protons entrent en collision avec les atomes, ce qui transfère suffisamment d'énergie pour ioniser les atomes. Les neutrons n'ionisent pas directement les atomes, car ils n'ont pas de charge électrique. Ils vont plutôt interagir avec les protons des noyaux par la force nucléaire, ce qui produit une ionisation indirecte.

Les *rayonnements ionisants* affectent le fonctionnement des cellules, en modifiant les molécules qui les composent. Cela peut produire des mutations, des tumeurs et conduire à la mort de la cellule. Pour cette raison, il est important de mesurer la dose de rayonnement reçue par une personne et de définir des normes d'exposition.

À la section 13.3, nous avons défini l'activité d'une source comme le nombre de désintégrations par unité de temps. L'effet de la radioactivité sur les cellules dépend de la quantité de rayonnement reçue, mais aussi du type de rayonnement. Le premier facteur important est l'énergie déposée ΔE par le rayonnement ionisant. On définit la *dose absorbée* D comme l'énergie déposée par kilogramme de tissu :

$$D \equiv \frac{\Delta E}{M}\,. \qquad (13.35)$$

Dans le SI, l'unité de la dose est le gray (Gy), nommée en l'honneur du physicien britannique Louis Harold Gray (1905-1965) :

$$1\ \mathrm{Gy} = 1\ \mathrm{J/kg}\,. \qquad (13.36)$$

L'ancienne unité, qui est encore utilisée aux États-Unis, est appelée le rad (rd), un acronyme pour *Radiation Absorbed Dose*. Le facteur de conversion est

$$1 \text{ rd} = 0{,}01 \text{ Gy} . \tag{13.37}$$

L'effet biologique des rayonnements ionisants dépend aussi du type de rayonnement. En effet, l'énergie n'est pas déposée de la même façon par un photon que par une particule alpha. Par exemple, un photon interagit dès qu'il pénètre dans un tissu et l'énergie déposée diminue de façon exponentielle avec la profondeur. À l'opposé, une particule alpha laisse son énergie sur une petite épaisseur seulement de tissu. On définit alors la *dose équivalente DE* en multipliant la dose absorbée D par un *facteur de pondération radiologique* w_R qui dépend du type de rayonnement :

$$DE = w_R D . \tag{13.38}$$

Le facteur de pondération est un facteur sans unité (*voir le tableau 13.4*). La dose équivalente a donc les mêmes dimensions que la dose absorbée, équivalente à J/kg. Pour éviter toute confusion, la dose équivalente est exprimée en fonction d'une unité particulière, le sievert (Sv), nommée en l'honneur du physicien suédois Rolf Maximilian Sievert (1896-1966). On peut donc dire que la dose équivalente représente l'effet réel d'un rayonnement ionisant sur un corps humain. Avec cette définition, une dose équivalente de 1 mSv produite par des particules alpha a les mêmes effets biologiques qu'une dose équivalente de 1 mSv produite par des rayons gamma. Le sievert a remplacé le rem, qui était basé sur le rad :

$$1 \text{ rem} = w_R \times 1 \text{ rd} = 0{,}01 \text{ Sv} .$$

Nous sommes exposés à des rayonnements de sources naturelles et artificielles. La moyenne canadienne est évaluée à 2,4 mSv/a. Le rayonnement naturel vient principalement des rayons cosmiques, de la terre (principalement de la désintégration du potassium 40 et de l'uranium), de l'air (principalement du radon) et de notre corps (entre autres du carbone 14). La dose provenant des rayons cosmiques est plus élevée à haute altitude et pour les gens qui utilisent fréquemment l'avion. À cette dose naturelle, on doit ajouter la dose artificielle, provenant par exemple des tests diagnostiques en imagerie médicale.

TABLEAU 13.4

Le facteur de pondération selon le type de rayonnement ionisant

Particules	Énergie	w_R
Photons	toutes	1
Électrons	toutes	1
Protons	toutes	2
Neutrons	$K < 10$ keV	2,5 à 3
	10 keV $< K <$ 100 keV	3 à 10
	100 keV $< K <$ 2 MeV	10 à 17,5
	2 MeV $< K <$ 20 MeV	17,5 à 7
	$K > 20$ MeV	7 à 2,5
Particules alpha	toutes	20

EXEMPLE 13.7 Un vilain rhume

Pour vérifier l'état de vos poumons, votre médecin vous soumet à une radiographie des poumons. Les rayons X déposent 1,1 mJ dans l'équivalent de 12,0 kg de votre corps.

a. Quelle dose absorbez-vous ?
b. Quelle est la dose équivalente ?
c. Combien de radiographies semblables devriez-vous recevoir pour que la dose équivalente reçue corresponde à la dose équivalente moyenne annuelle canadienne, évaluée à 2,4 mSv/a ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Le facteur de pondération pour les rayons X (des photons) est donné au tableau 13.4.

Connues	Inconnues
$\Delta E = 1{,}1$ mJ	D
$w_R = 1$	DE
$M = 12{,}0$ kg	N
$DE_{an} = 2{,}4$ mSv	

SOLUTION a.

Identifier la clé

La **clé** est la définition de la dose, donnée par l'équation 13.35 :

$$D = \frac{\Delta E}{M} . \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs :

$$D = \frac{1{,}1 \times 10^{-3}\ \text{J}}{12{,}0\ \text{kg}} = 92\ \mu\text{J/kg} = 92\ \mu\text{Gy} . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Identifier la clé

L'équivalent de dose est obtenu à l'aide de l'équation 13.38 :

$$DE = w_R D . \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$DE = 1 \times 92\ \mu\text{Gy} = 92\ \mu\text{Sv} . \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION c.

Décortiquer le problème

Nous supposons qu'un nombre N de radiographies produisent le même équivalent de dose que l'équivalent de dose annuelle moyenne :

$$N\,DE = DE_{an} . \qquad \text{(iii)}$$

Résoudre le problème

Nous isolons N dans l'équation (iii) :

$$N = \frac{DE_{an}}{DE} = \frac{2{,}4\ \text{mSv}}{0{,}092\ \text{mSv}} = 26 . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Les résultats montrent que la dose équivalente est faible par rapport à l'équivalent de dose qu'on reçoit de façon naturelle à chaque année.

13.7 La fission nucléaire

La fission spontanée

La désintégration alpha et la désintégration bêta sont les processus principaux de désintégration des noyaux. Certains noyaux peuvent se désintégrer en émettant un proton alors que d'autres noyaux peuvent se désintégrer en émettant un neutron. Ces deux types de désintégration se produisent pour des noyaux très éloignés de la région des isotopes stables de la figure 13.3 de la page 475, et les demi-vies de ces désintégrations sont plus courtes qu'une seconde.

Dans le cas de noyaux massifs, le graphique de l'énergie de liaison, présenté à la figure 13.4 de la page 478, montre qu'un noyau massif comme l'uranium 238 a une énergie de liaison par nucléon plus faible qu'un noyau ayant deux fois moins de nucléons. Cela veut dire que si un noyau d'uranium pouvait se briser en deux plus petits noyaux, cela transformerait de l'énergie au repos en une autre forme. Cette désintégration est appelée la *fission spontanée*, car elle peut se produire de façon spontanée, sans l'ajout d'énergie supplémentaire.

L'uranium 238 est instable, mais il se désintègre selon la désintégration alpha, et non par fission spontanée. La fission spontanée est possible, mais la probabilité est très très faible. Le noyau d'uranium peut exister sous la forme de deux noyaux séparés, liés par l'interaction nucléaire. Le système est confiné par une fonction énergie potentielle comme celle illustrée à la figure 13.15. La barrière de potentiel est trop haute et trop large, de telle sorte que la probabilité de désintégration est quasi nulle. Par contre, la fission peut se produire si le système absorbe une quantité d'énergie $\Delta E = E_{ac}$, qu'on appelle l'énergie d'activation.

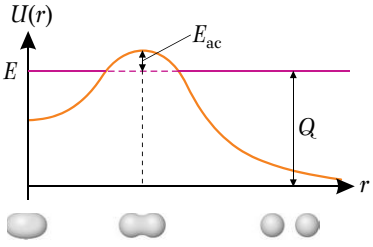


FIGURE 13.15
L'énergie potentielle qui confine les noyaux constituant un noyau de $^{238}_{92}\mathrm{U}$. La probabilité de transmission par effet tunnel est très faible.

La fission spontanée est le mode principal de désintégration pour les nucléides de très grande masse ($A \geq 250$). Ces noyaux ne sont pas sphériques, mais plutôt ellipsoïdes. Pour ces noyaux, la barrière de potentiel est plus basse, étant donné que la force nucléaire a une portée finie. La probabilité de désintégration par effet tunnel devient suffisante pour que ce mode de désintégration soit le plus important. Par exemple, le nucléide $^{250}_{96}\mathrm{Cm}$ (le curium 250, nommé en l'honneur des physiciens français Marie Curie et Pierre Curie) a une demi-vie de 9×10^3 a. Dans 80 % des cas, il effectue une fission spontanée.

La fission induite

Il est possible de produire une fission nucléaire en bombardant un noyau avec des particules. Les neutrons sont des particules idéales pour cela, car ils sont électriquement neutres. Les neutrons ne sont pas repoussés par la force électrique du noyau, contrairement aux protons ou aux particules alpha. De plus, les neutrons peuvent être absorbés par le noyau, ce qui forme un nouveau noyau. Les *substances fissibles*, comme l'uranium 235, se retrouvent dans un état excité, dont l'énergie dépasse l'énergie d'activation, même dans le cas d'absorption de neutrons à très faible énergie. Le noyau se brise alors en deux, en émettant en plus quelques neutrons, qu'on appelle les *neutrons instantanés*. C'est la *fission induite* :

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{236}_{92}\mathrm{U}^{*} \rightarrow \mathrm{X} + \mathrm{Z} + \text{neutrons}\,.$$

Lors d'une fission, il y a plusieurs possibilités pour les noyaux filles X et Z. De façon générale, le noyau mère possède une grande proportion de neutrons. Par exemple, le rapport $N/Z = 1{,}56$ pour l'uranium 236. Les noyaux filles X et Z ont un rapport N/Z équivalent. Par contre, les nucléides stables pour lesquels $A \approx 120$ ont un rapport plus faible. Cela signifie que les noyaux filles X et Z doivent diminuer le nombre de neutrons : soit par émission de neutrons (les *neutrons retardés*) ou par désintégration β^-.

Dans le cas de la fission de l'uranium 236, le noyau X a un nombre de masse autour de 140, et le nucléide Z a un nombre de masse autour de 90. Prenons par exemple l'équation de fission suivante :

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{236}_{92}\mathrm{U}^{*} \rightarrow {}^{140}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{94}_{38}\mathrm{Sr} + 2\mathrm{n}\,. \qquad (13.39)$$

Le nombre de protons et le nombre de neutrons doivent être conservés dans la réaction de fission, ce qui peut être vérifié dans l'équation 13.39. Après la fission, les noyaux filles subissent des désintégrations β^{-}, jusqu'à ce que des noyaux stables soient produits :

$$^{140}_{54}\mathrm{Xe} \xrightarrow[13{,}6\ \mathrm{s}]{} {}^{140}_{55}\mathrm{Cs} \xrightarrow[63{,}7\ \mathrm{s}]{} {}^{140}_{56}\mathrm{Ba} \xrightarrow[12{,}75\ \mathrm{d}]{} {}^{140}_{57}\mathrm{La} \xrightarrow[1{,}68\ \mathrm{d}]{} {}^{140}_{58}\mathrm{Ce}$$
$$^{94}_{38}\mathrm{Sr} \xrightarrow[75{,}3\ \mathrm{s}]{} {}^{94}_{39}\mathrm{Y} \xrightarrow[18{,}7\ \mathrm{min}]{} {}^{94}_{40}\mathrm{Zr}\,.$$

Ces désintégrations β^{-} s'effectuent selon la loi de désintégration, avec une certaine demi-vie, comme on l'indique en dessous des flèches. Les réactions β^{-} produisent des électrons et des neutrinos et libèrent une énergie supplémentaire. Une partie de cette énergie est transportée par les neutrinos.

On peut calculer l'énergie totale Q libérée lors de la fission en calculant la variation d'énergie au repos entre l'état initial du système ($^{235}_{92}\mathrm{U}$ et un neutron) et l'état final après toutes les désintégrations bêta.

L'uranium naturel contient 0,7 % d'uranium 235 et 99,3 % d'uranium 238. L'uranium 238 n'est pas fissible, c'est-à-dire que lorsqu'un noyau absorbe un neutron de très faible énergie, le noyau résultant a une énergie d'excitation plus faible que l'énergie d'activation, de telle sorte que la probabilité qu'une fission se produise est très faible. Pour que l'uranium 238 subisse une fission, il faut des neutrons rapides, ayant une grande énergie cinétique. La plupart des réacteurs nucléaires utilisent de l'uranium enrichi, où l'abondance d'uranium 235 est augmentée de façon artificielle, jusqu'à environ 3 %. De cette façon, le nombre de fissions induites par des neutrons très lents est plus grand.

Les neutrons émis lors de la fission peuvent servir à produire d'autres fissions et entraîner une réaction en chaîne. Dans une bombe, la réaction en chaîne n'est pas contrôlée, et un grand nombre de fissions se produisent dans un très petit intervalle de temps. L'énergie est libérée avec une très grande puissance. Dans une centrale nucléaire, la réaction en chaîne est contrôlée en insérant des *barres de contrôle*. Celles-ci sont fabriquées avec un matériau, comme le cadmium, qui absorbe les neutrons.

L'énergie cinétique initiale des neutrons émis lors de la fission est d'environ 2 MeV. Il est plus efficace de produire la fission à partir de l'uranium 235 par l'absorption de *neutrons thermiques*, qui ont une énergie d'environ 0,04 eV. On ajoute dans les réacteurs nucléaires un *modérateur*, comme l'eau, pour ralentir les neutrons. Les neutrons entrent en collision élastique avec les noyaux d'hydrogène de l'eau. Comme la masse du noyau d'hydrogène (un proton) est à peu près la même que celle du neutron, la fraction d'énergie cinétique perdue par le neutron est maximisée.

EXEMPLE 13.8 La fission induite

Une fission est induite à partir de l'uranium 235 :

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{236}_{92}\mathrm{U}^{*} \rightarrow \mathrm{X}_{(1)} + \mathrm{X}_{(2)} + k\mathrm{n}\,.$$

Les noyaux $\mathrm{X}_{(1)}$ et $\mathrm{X}_{(2)}$ subissent plusieurs désintégrations β^- :

$$\mathrm{X}_{(1)} \xrightarrow{\beta^-} \cdots \xrightarrow{\beta^-} {}^{141}_{59}\mathrm{Pr}$$
$$\mathrm{X}_{(2)} \xrightarrow{\beta^-} \cdots \xrightarrow{\beta^-} {}^{92}_{40}\mathrm{Zr}\,.$$

Aucun autre neutron n'est émis après la fission.

a. Quelle est le nombre total de désintégrations β^- ?

b. Quel est le nombre k de neutrons émis au moment de la fission ?

SOLUTION a.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$Z_{\mathrm{Pr}} = 59 \quad Z_{\mathrm{Zr}} = 40$ $Z_{\mathrm{U}} = 92$	N_{β^-}

Identifier la clé

La première **clé** est que lors de la fission, le nombre de protons ne change pas. Ceci implique que la somme des protons des nucléides inconnus $\mathrm{X}_{(1)}$ et $\mathrm{X}_{(2)}$ doit être égale au nombre de protons de l'uranium :

$$Z_1 + Z_2 = Z_{\mathrm{U}}\,. \qquad \text{(i)}$$

La deuxième **clé** est que chaque désintégration β^- transforme un neutron en proton. Il y a donc plus de protons dans les éléments stables finaux :

$$Z_{\mathrm{Pr}} + Z_{\mathrm{Zr}} = Z_1 + Z_2 + N_{\beta^-}\,. \qquad \text{(ii)}$$

Résoudre le problème

En insérant l'équation (i) dans l'équation (ii) et en isolant N_{β^-}, nous obtenons

$$N_{\beta^-} = Z_{\mathrm{Pr}} + Z_{\mathrm{Zr}} - Z_{\mathrm{U}}$$
$$N_{\beta^-} = 59 + 40 - 92 = 7\,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Décortiquer le problème

Connues	Inconnue
$A_{\mathrm{Pr}} = 141 \quad A_{\mathrm{Zr}} = 92$ $A_{\mathrm{U}} = 236$	k

Avant la fission, le nombre de neutrons est

$$N_{\mathrm{i}} = 236 - 92 = 144\,. \qquad \text{(iii)}$$

Lorsque la stabilité est atteinte, le nombre de neutrons est

$$N_{\mathrm{f}} = A_{\mathrm{Pr}} - Z_{\mathrm{Pr}} + A_{\mathrm{Zr}} - Z_{\mathrm{Zr}}$$
$$= 141 - 59 + 92 - 40 = 134\,. \qquad \text{(iv)}$$

Identifier la clé

La première **clé** est que la fission ne change pas le nombre de neutrons :

$$N_{\mathrm{i}} = N_1 + N_2 + k\,. \qquad \text{(v)}$$

La deuxième **clé** est que chaque désintégration β^- transforme un neutron en proton. Il y a donc moins de neutrons dans les nucléides stables :

$$N_{\mathrm{f}} = N_1 + N_2 - N_{\beta^-}\,. \qquad \text{(vi)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons l'équation (vi) dans l'équation (v) et nous isolons k :

$$k = N_{\mathrm{i}} - N_{\mathrm{f}} - N_{\beta^-}$$
$$k = 144 - 134 - 7 = 3\,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Les résultats sont des nombres entiers positifs, comme il se doit. L'ordre de grandeur est correct : il y a quelques désintégrations β^- et quelques neutrons produits.

13.8 La fusion nucléaire

La fusion consiste à unir deux noyaux pour former un noyau plus gros. Selon la figure 13.4 de la page 478, il y a libération d'énergie si le noyau résultant est un noyau de fer ou un noyau plus petit, étant donné que l'énergie de liaison augmente jusqu'au fer. Même si la fusion de deux noyaux de faible masse est énergétiquement possible, la fusion nucléaire nécessite une très haute température. En effet, les noyaux ont une charge électrique positive. Il y a donc une barrière de potentiel à franchir. L'effet tunnel permet à des noyaux de franchir la barrière, même si l'énergie cinétique est inférieure à la barrière. Toutefois, pour que la probabilité soit suffisamment grande, il faut une température de l'ordre de 10^7 K pour fusionner des noyaux d'hydrogène. On trouve une telle température au centre des étoiles. Pour fusionner des noyaux ayant une charge électrique plus grande, il faut une température encore plus élevée.

La fusion nucléaire dans les étoiles

L'énergie qu'on reçoit du Soleil est le résultat de la fusion nucléaire de l'hydrogène en hélium. Il existe deux chaînes de réactions nucléaires : la chaîne proton-proton et le cycle CNO. Les deux mécanismes ont été découverts en 1938 par le physicien américain d'origine allemande Hans Bethe (1905-2006).

La première étape de la *chaîne proton-proton* est la fusion de deux protons en deutéron (un noyau d'hydrogène 2) :

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow {}^{2}_{1}\mathrm{H} + \mathrm{e}^{+} + \nu \quad (Q = 0{,}42 \text{ MeV}) .$$

Cette réaction est produite par l'interaction faible, qui est nécessaire pour qu'un proton se transforme en neutron. Le temps moyen nécessaire pour cette réaction est donc très grand, environ quatorze milliards d'années. Voilà pourquoi le Soleil brille depuis environ cinq milliards d'années, et qu'il n'a pas explosé comme une bombe nucléaire.

Après cette première réaction, le positron s'annihile rapidement avec un électron, et le noyau de deutéron subit une fusion avec un proton :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{+} + \mathrm{e}^{-} &\rightarrow 2\gamma && (Q = 1{,}02 \text{ MeV}) \\ {}^{2}_{1}\mathrm{H} + \mathrm{p} &\rightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + \gamma && (Q = 5{,}495 \text{ MeV}) . \end{aligned}$$

La fusion de trois protons en un noyau d'hélium 3 libère l'énergie suivante :

$$Q = 0{,}420 \text{ MeV} + 1{,}020 \text{ MeV} + 5{,}495 \text{ MeV} = 6{,}935 \text{ MeV} .$$

La dernière étape pour obtenir de l'hélium 4 peut se faire de deux façons différentes. Il y a une probabilité de 86 % que l'hélium 4 se forme par fusion de deux noyaux d'hélium 3 :

$${}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{3}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + 2\mathrm{p} \qquad (Q = 12{,}86 \text{ MeV}) .$$

L'énergie nette libérée lors de la fusion de quatre protons en un noyau d'hélium 4 est alors :

$$Q_{\text{net}} = 2 \times 6{,}935 \text{ MeV} + 12{,}86 \text{ MeV} = 26{,}73 \text{ MeV} . \qquad (13.40)$$

Cette énergie correspond à la différence entre l'énergie au repos de quatre protons et l'énergie au repos d'un noyau d'hélium 4.

Il y a aussi une probabilité de 14 % que l'hélium 4 se forme de façon indirecte. D'abord, un noyau d'hélium 3 peut entrer en collision avec un noyau d'hélium 4 et produire du béryllium 7 :

$$ {}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{7}_{4}\mathrm{Be} + \gamma \, . $$

Le béryllium se transforme ensuite en lithium 7 par capture électronique, puis une fusion d'un proton avec le noyau de lithium produit deux noyaux d'hélium :

$$ \begin{aligned} {}^{7}_{4}\mathrm{Be} + \mathrm{e}^{-} &\rightarrow {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + \nu \\ {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + \mathrm{p} &\rightarrow 2\,({}^{4}_{2}\mathrm{He}) \, . \end{aligned} $$

L'énergie nette est partagée par les deux neutrinos et les six photons produits. Les neutrinos quittent le centre du Soleil en ligne droite, sans interagir avec les noyaux et les électrons du Soleil. Par contre, les photons sont absorbés et réémis dans des directions aléatoires par les noyaux et par les électrons. Il faut environ 50 000 ans pour que les photons se rendent jusqu'à la surface du Soleil.

Le deuxième mécanisme de fusion nucléaire est appelé le *cycle* CNO, car les réactions de fusion font intervenir des noyaux de carbone, d'azote et d'oxygène. Les étapes sont les suivantes :

$$ \begin{aligned} {}^{12}_{6}\mathrm{C} + \mathrm{p} &\rightarrow {}^{13}_{7}\mathrm{N} + \gamma && (Q = 1{,}94 \text{ MeV}) \\ {}^{13}_{7}\mathrm{N} &\rightarrow {}^{13}_{6}\mathrm{C} + \mathrm{e}^{+} + \nu && (Q = 1{,}20 \text{ MeV}) \\ \mathrm{e}^{+} + \mathrm{e}^{-} &\rightarrow 2\gamma && (Q = 1{,}02 \text{ MeV}) \\ {}^{13}_{6}\mathrm{C} + \mathrm{p} &\rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \gamma && (Q = 7{,}55 \text{ MeV}) \\ {}^{14}_{7}\mathrm{N} + \mathrm{p} &\rightarrow {}^{15}_{8}\mathrm{O} + \gamma && (Q = 7{,}30 \text{ MeV}) \\ {}^{15}_{8}\mathrm{O} &\rightarrow {}^{15}_{7}\mathrm{N} + \mathrm{e}^{+} + \nu && (Q = 1{,}73 \text{ MeV}) \\ \mathrm{e}^{+} + \mathrm{e}^{-} &\rightarrow 2\gamma && (Q = 1{,}02 \text{ MeV}) \\ {}^{15}_{7}\mathrm{N} + \mathrm{p} &\rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} && (Q = 4{,}97 \text{ MeV}) \, . \end{aligned} $$

L'énergie libérée $Q_{\text{net}} = 26{,}73$ MeV correspond à la même valeur que dans le cas de la chaîne proton-proton.

Le cycle CNO produit la fusion de l'hélium 4 plus rapidement que la chaîne proton-proton. Par contre, la barrière de potentiel est plus élevée pour le cycle CNO, car le noyau de carbone a une charge $Q = 6e$. Pour cette raison, le cycle CNO contribue seulement pour environ 7 % de l'énergie libérée par le Soleil. Toutefois, pour les étoiles plus massives que le Soleil, la température du cœur de l'étoile est plus élevée et le cycle CNO peut être le mécanisme principal. Dans ce cas, l'étoile va fusionner son carburant nucléaire beaucoup plus rapidement. Elle sera plus brillante, mais pendant un temps plus court.

Des calculs montrent que le Soleil peut fusionner de l'hydrogène en hélium pendant encore environ cinq milliards d'années. À ce moment, le cœur du Soleil sera principalement composé d'hélium. Avec moins de réactions de fusion, l'attraction gravitationnelle va contracter le cœur du Soleil, ce qui va faire augmenter sa température et la surface va gonfler. Le Soleil sera alors une *géante rouge*. Lorsque la température du cœur atteindra 10^{8} K, la fusion de l'hélium 4 en carbone 12 sera possible.

La masse du Soleil est trop faible pour pouvoir produire des nucléides plus massifs que le carbone. Pour les étoiles plus massives, la fusion nucléaire peut produire des éléments jusqu'au fer. C'est la *nucléosynthèse*. Lorsque le cœur de l'étoile est composé de fer, elle ne peut plus dégager suffisamment d'énergie par fusion nucléaire. Le résultat est une explosion violente, qu'on appelle une *supernova*. Les éléments formés par l'étoile sont alors dispersés dans le milieu intersidéral. Durant la phase de la supernova, des éléments plus lourds sont formés par la *capture de neutrons*. Cette méthode de nucléosynthèse est beaucoup moins efficace que la fusion nucléaire, de telle sorte que l'abondance des noyaux plus massifs que le fer est très faible.

Après la supernova, le cœur se contracte à cause de la force gravitationnelle, pour former un objet d'à peine une dizaine de kilomètres. Dans cette contraction, les électrons et les protons se combinent pour former des neutrons. On obtient alors une *étoile à neutrons*. À cause de la conservation du moment cinétique, ces objets ont une vitesse de rotation très élevée et un champ magnétique très intense. On peut les observer par l'émission d'ondes électromagnétiques, comme un phare. On les appelle alors les *pulsars*.

Dans le cas de cœur très massif, l'attraction gravitationnelle ne peut être arrêtée. Le cœur se contracte complètement et forme un *trou noir*. L'attraction gravitationnelle près d'un trou noir est si élevée qu'il est impossible même à la lumière de s'échapper si la distance est plus petite qu'une valeur qu'on appelle l'*horizon*.

Les réacteurs à fusion nucléaire

Les réacteurs nucléaires actuels utilisent la fission, ce qui produit des déchets nucléaires. La gestion sécuritaire de ces déchets est complexe. Les réactions de fusion ne produisent pas de déchets à longue durée de vie. De plus, le combustible pour la fusion est composé d'hydrogène, un élément très abondant sur Terre, entre autres sous forme d'eau. Pour cette raison, des équipes de recherche de grande envergure sont à l'oeuvre pour développer des réacteurs à fusion nucléaire.

Pour obtenir la fusion nucléaire sur Terre, la chaîne proton-proton n'est pas une réaction intéressante, car la première étape est trop peu probable. À la place, les recherches portent sur la fusion de noyaux de deutérium ($^2_1\mathrm{H}$) et de tritium ($^3_1\mathrm{H}$). Il y a trois réactions à l'étude :

$$^2_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \rightarrow {}^3_2\mathrm{He} + \mathrm{n} \qquad (Q = 3{,}27\ \mathrm{MeV})$$
$$^2_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \rightarrow {}^3_1\mathrm{H} + \mathrm{p} \qquad (Q = 4{,}03\ \mathrm{MeV})$$
$$^2_1\mathrm{H} + {}^3_1\mathrm{H} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + \mathrm{n} \qquad (Q = 17{,}59\ \mathrm{MeV})\,.$$

Deux approches différentes sont actuellement privilégiées dans la conception d'un réacteur à fusion nucléaire. La première, le projet ITER (du mot latin *iter*, pour chemin), est une collaboration de trente-cinq pays, incluant les pays de l'Union européenne, l'Inde, la Russie, la Chine, la Corée du Sud, le Japon et les États-Unis. Le site est en construction à Cadarache, dans le sud de la France. Le but est de construire un réacteur expérimental pour produire de l'énergie à une puissance de 500 MW pendant 400 s, pendant que le réacteur nécessite 50 MW. Le début de l'exploitation est prévu autour de 2020.

La méthode utilisée se nomme le *confinement magnétique*. Dans une chambre à vide en forme de beigne appelée un *tokamak*, un champ magnétique très intense est utilisé pour confiner les noyaux formant un *plasma* (un état d'atomes ionisés). Un courant électrique intense circule ensuite dans le plasma afin de le chauffer. Le tokamak d'ITER aura une hauteur de 29 m et un diamètre de 28 m (*voir la figure 13.16*).

La deuxième approche est appelée le *confinement inertiel par laser*. Cette méthode est utilisée au *National Ignition Facility*, situé à Livermore, en Californie. De plus, le projet *HIPER* (*High Power Laser Energy Research*) prévoit la construction d'un réacteur de recherche en Europe autour de 2015. Dans cette méthode, des lasers de très grande puissance éclairent des pastilles de deutérium-tritium. Les lasers sont placés symétriquement autour des pastilles et envoient de façon synchronisée des impulsions très brèves. On prévoit que la pression de radiation exercée par les lasers sera suffisante pour comprimer les noyaux de deutérium et de tritium pour produire la fusion nucléaire.

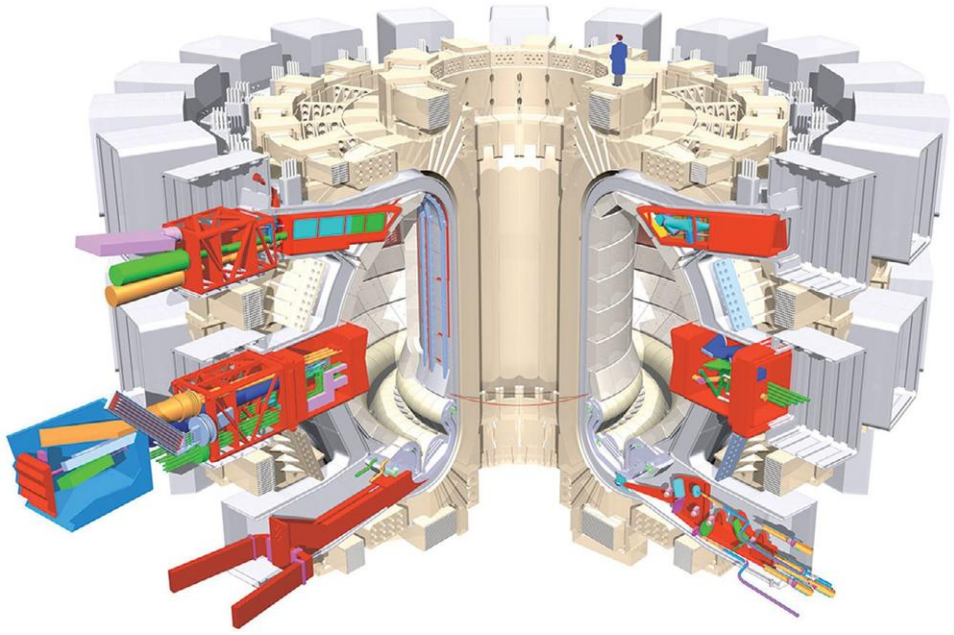


FIGURE 13.16
Une vue en coupe du réacteur ITER

RÉSUMÉ

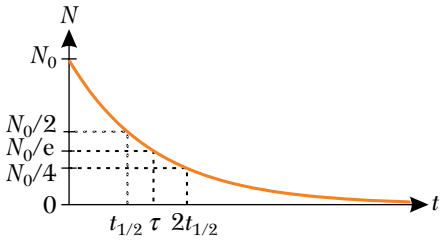
Dans ce chapitre, nous avons étudié les propriétés du noyau atomique et nous avons vu comment les noyaux peuvent se désintégrer.

LES DÉFINITIONS

- Un **nucléide** ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ est constitué d'un noyau qui comprend Z protons, $N = A - Z$ neutrons et Z électrons. Le nombre de masse A correspond au nombre de **nucléons** à l'intérieur du noyau.
- Le rayon d'un noyau est
$$r = 1{,}20 \text{ fm } A^{1/3} .$$
- L'**interaction nucléaire** est l'interaction attractive entre les nucléons. C'est une interaction résiduelle de l'interaction forte, exercée entre les quarks. La **portée** de l'interaction nucléaire est finie (environ 1,3 fm).
- L'**énergie de liaison** pour un nucléide de masse M est l'énergie qu'il faut fournir pour séparer complètement les nucléons formant le noyau :
$$E_\ell = (Zm_\mathrm{H} + Nm_\mathrm{n} - M)c^2 .$$
- L'énergie de liaison moyenne par nucléon est
$$E_{\ell/\mathrm{n}} = \frac{E_\ell}{A} .$$

LES LOIS ET LES PRINCIPES

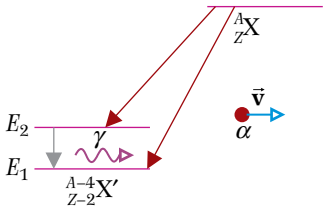
- Le **nombre de noyaux** d'un échantillon radioactif diminue de façon exponentielle :
$$N = N_0 \, \mathrm{e}^{-\lambda t} ,$$
où N_0 est le nombre de noyau initial et λ est la constante de désintégration associée au nucléide.
- L'**activité** d'un nucléide correspond au taux de désintégration :
$$R = \left|\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right| = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N$$
$$R = R_0 \, \mathrm{e}^{-\lambda t} .$$
- La **demi-vie** $t_{1/2}$ est le temps qu'il faut pour que le nombre de noyaux instables diminue de moitié. La durée de vie moyenne τ est le temps moyen pour qu'un noyau se désintègre :
$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \tau \ln(2) .$$



LES RÉSULTATS

Dans une **désintégration**, un noyau mère X se transforme en un noyau fille X′, en émettant des particules et en libérant une énergie Q :
$$Q = -\Delta M \, c^2 .$$
Les principaux types de désintégrations sont la désintégration alpha et la désintégration bêta.

- Dans une **désintégration alpha**, un noyau émet une particule alpha, qui correspond à un noyau de ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$:
$${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{X}' + {}^{4}_{2}\mathrm{He} .$$
- Après une désintégration, le noyau fille peut être dans un état excité. Le noyau émet alors des photons dans le domaine des **rayons gamma** :
$$\Delta E = E_\mathrm{h} - E_\mathrm{b} = \frac{hc}{\lambda} .$$
- La **désintégration bêta** fait intervenir l'interaction faible, pour transformer un neutron en proton et vice-versa.
  - β^- $(\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu})$:
  $${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{X}' + \mathrm{e}^- + \bar{\nu} .$$
  - β^+ $(\mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + \mathrm{e}^+ + \nu)$:
  $${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\mathrm{X}' + \mathrm{e}^+ + \nu .$$
  - capture électronique $(\mathrm{p} + \mathrm{e}^- \rightarrow \mathrm{n} + \nu)$:
  $${}^{A}_{Z}\mathrm{X} + \mathrm{e}^- \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\mathrm{X}' + \nu$$



LES APPLICATIONS

- Dans une **fission**, un noyau se brise en deux noyaux filles plus petits, accompagnés d'un certain nombre de neutrons.
  - La **fission spontanée** est le mode principal de désintégration pour $A \geq 250$.
  - La **fission induite** est obtenue par absorption d'un neutron :
  $${}^{235}_{92}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{236}_{92}\mathrm{U}^{*}$$
  $$\rightarrow \mathrm{X} + \mathrm{Z} + k\mathrm{n} .$$
- Dans la **fusion nucléaire**, deux petits noyaux forment un noyau plus massif.
  - La **chaîne p-p** est la principale chaîne de réactions nucléaires dans le Soleil.
  - Dans des étoiles plus massives, le **cycle CNO** est une série de réactions nucléaires plus efficaces.

QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

Section 13.1 Les propriétés du noyau

Q1 Voici une liste de dix nucléides différents : $^{13}_{5}\mathrm{B}$, $^{12}_{6}\mathrm{C}$, $^{13}_{6}\mathrm{C}$, $^{14}_{6}\mathrm{C}$, $^{13}_{7}\mathrm{N}$, $^{14}_{7}\mathrm{N}$, $^{15}_{7}\mathrm{N}$, $^{13}_{8}\mathrm{O}$, $^{14}_{8}\mathrm{O}$, $^{15}_{8}\mathrm{O}$.

a. Regroupez les isobares.

b. Regroupez les isotones.

c. Regroupez les isotopes.

d. Combien y a-t-il d'éléments différents dans cette liste ?

Q2 Classez les nucléides suivants par ordre croissant de leur nombre de neutrons : (i) $^{235}_{92}\mathrm{U}$; (ii) $^{238}_{92}\mathrm{U}$; (iii) $^{235}_{93}\mathrm{Np}$; (iv) $^{238}_{95}\mathrm{Am}$.

E3 Calculez la charge volumique moyenne des noyaux suivants :

a. $^{4}_{2}\mathrm{He}$;

b. $^{56}_{26}\mathrm{Fe}$;

c. $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$.

P4 On peut évaluer que l'incertitude sur la position d'un nucléon dans un noyau est égale au rayon du noyau. Quelle est l'énergie cinétique d'un nucléon dans un noyau de fer ($^{56}_{26}\mathrm{Fe}$) ? (Supposez que le module de la quantité de mouvement correspond au module de l'incertitude de la quantité de mouvement et que les incertitudes sont minimales.)

P5 Pour mesurer le rayon du noyau $^{197}_{79}\mathrm{Au}$, on accélère des électrons avec une différence de potentiel ΔV, de telle sorte que la longueur d'onde de De Broglie des électrons soit égale au quart du rayon du noyau. Quelle est la différence de potentiel ΔV ?

Section 13.2 L'énergie de liaison

Q6 À l'aide de la figure 13.4, classez les nucléides suivants par ordre croissant de leur énergie de liaison par nucléon : (i) $^{124}_{54}\mathrm{Xe}$; (ii) $^{66}_{30}\mathrm{Zn}$; (iii) $^{7}_{3}\mathrm{Li}$; (iv) $^{196}_{80}\mathrm{Hg}$.

E7 Le livermorium est l'un des éléments les plus lourds identifiés à ce jour. L'un de ses isotopes, $^{293}_{116}\mathrm{Lv}$, a une masse atomique de 293,204 49 u. Calculez son énergie de liaison et comparez-la à l'énergie au repos d'un atome d'hydrogène $^{1}_{1}\mathrm{H}$.

E8 Le potassium $^{40}_{19}\mathrm{K}$ et l'argon $^{40}_{18}\mathrm{Ar}$ ont des masses atomiques respectives de 39,963 999 u et 39,962 383 u. Ils ont le même nombre de nucléons, mais pas le même nombre de protons et de neutrons.

a. Calculez l'énergie de liaison par nucléon pour $^{40}_{19}\mathrm{K}$.

b. Calculez l'énergie de liaison par nucléon pour $^{40}_{18}\mathrm{Ar}$.

c. Un de ces deux nucléides est instable, il se désintègre et devient l'autre nucléide. Lequel est instable ?

P9 Pour étudier les niveaux d'énergie du nucléide $^{56}_{25}\mathrm{Mn}$, on produit la réaction nucléaire suivante :

$$^{55}_{25}\mathrm{Mn} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{56}_{25}\mathrm{Mn}^{*},$$

où $^{56}_{25}\mathrm{Mn}^{*}$ correspond à un état excité du $^{56}_{25}\mathrm{Mn}$, et le neutron a une énergie cinétique négligeable lorsqu'il est absorbé par le noyau de $^{55}_{25}\mathrm{Mn}$. Le nucléide excité émet ensuite un photon de rayon gamma pour se rendre à son état fondamental. La masse du nucléide $^{55}_{25}\mathrm{Mn}$ est de 54,938 049 u et celle du $^{56}_{25}\mathrm{Mn}$, de 55,938 909 u.

a. Calculez l'énergie de liaison du $^{55}_{25}\mathrm{Mn}$.

b. Calculez l'énergie de liaison du $^{56}_{25}\mathrm{Mn}$.

c. Calculez l'énergie du photon de rayon gamma.

Section 13.3 La radioactivité

Q10 La demi-vie du carbone 14 est de 5 730 a. Peut-on utiliser la datation au carbone 14 pour déterminer l'âge d'ossements de dinosaures ? Expliquez votre réponse.

Q11 La figure 13.17 illustre le nombre de noyaux en fonction du temps pour quatre échantillons. Classez les échantillons en ordre croissant

a. de la demi-vie ;

b. de la constante de désintégration ;

c. de l'activité initiale.

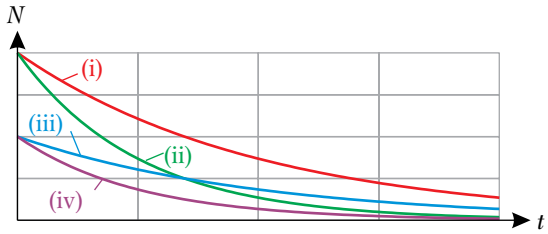


FIGURE 13.17 • Question 11

Q12 L'activité d'un échantillon A à $t = 0$ est égale à l'activité d'un échantillon B à $t = 2{,}0$ min [$R_A(0) = R_B(2{,}0\ \mathrm{min})$]. Si $t_{1/2,A} > t_{1/2,B}$, les échantillons auront-ils la même activité (simultanément) à un instant $t > 0$?

E13 Calculez l'activité d'un échantillon de $7{,}75 \times 10^{19}$ atomes d'azote $^{13}_{7}\mathrm{N}$ dont la demi-vie est de 9,97 min.

E14 Le technétium 99m est produit par une désintégration bêta du nucléide $^{99}_{42}\mathrm{Mo}$. La demi-vie du $^{99}_{42}\mathrm{Mo}$ est de 66 h. Après combien de temps un échantillon aura-t-il une activité dix fois plus petite que son activité initiale ?

E15 L'iode 131 est utilisé dans le diagnostic et le traitement de certaines maladies de la glande thyroïde. Ce nucléide a une demi-vie de 8,02 d. Un échantillon a initialement une activité de 2,00 GBq.

a. Combien de noyaux d'iode 131 contient initialement l'échantillon ?

b. Quelle est l'activité après 14,0 d ?

c. Combien de noyaux se sont désintégrés en 14,0 d ?

E16 L'isotope radioactif $^{32}_{15}P$ est un isotope de phosphore utilisé en biologie comme traceur. Sa demi-vie est de 14,26 d. Un échantillon de phosphore composé exclusivement de cet isotope à $t = 0$ a une masse de 1,73 µg.

a. Quelle est la constante de désintégration du $^{32}_{15}P$?

b. Combien y a-t-il d'atomes de $^{32}_{15}P$ dans l'échantillon à $t = 0$?

c. Quelle est l'activité de l'échantillon à $t = 0$?

d. Quelle est l'activité de l'échantillon à $t = 24{,}0$ h ?

e. Combien restera-t-il d'atomes de cet isotope après 7,00 d ?

P17 Le suaire de Turin est un morceau de tissu qui, selon certains, aurait servi à draper le corps de Jésus Christ lors de sa mise en tombeau. La datation au carbone 14 a permis de déterminer officiellement l'âge de la relique. On prélève un échantillon de 0,124 g de l'étoffe, sachant qu'elle est entièrement faite de fibres naturelles (organiques). L'analyse de cet échantillon révèle une activité de 28,50 mBq. La demi-vie du carbone 14 est de 5730 a et l'abondance du carbone 14 (la proportion dans le mélange d'isotopes de carbone) dans un être vivant est de $1{,}30 \times 10^{-12}$.

a. Combien d'atomes de carbone 14 trouve-t-on dans l'échantillon lors de l'analyse ?

b. Combien d'atomes de carbone 14 trouve-t-on dans un échantillon de 0,124 g d'un être vivant ?

c. Quel est l'âge du vêtement ?

P18 Le plutonium 238 est un nucléide radioactif utilisé dans les sondes spatiales pour fournir de l'énergie lorsque l'utilisation de panneaux solaires ne peut fournir suffisamment d'énergie. Ce nucléide se désintègre en émettant une particule alpha avec une demi-vie de 87,7 a. Un échantillon contient initialement 830 g de cet isotope. Quelle est la masse d'hélium produite après 100 a ?

P19 Le potassium 40 est un nucléide radioactif qu'on trouve naturellement, car sa demi-vie est très élevée ($t_{1/2} = 1{,}28 \times 10^9$ a). Dans 10,72 % des désintégrations, le potassium 40 se transforme en argon 40, un gaz noble. Cet isotope est utilisé pour dater des roches puisque lorsqu'elles se sont solidifiées, elles ne pouvaient contenir de l'argon (il s'agit d'un gaz). Donc, l'argon qui se trouve présentement dans la roche a été produit par la désintégration de potassium 40. On mesure dans une roche que le rapport actuel $N_{^{40}AR}/N_{^{40}K} = 0{,}312$. Quel est l'âge de la roche ?

Section 13.4 La désintégration alpha

Q20 Déterminez quels sont les produits successifs lorsqu'un atome de meitnerium $^{268}_{109}Mt$ entame une série de quatre désintégrations alpha.

Q21 Les isotopes suivants du thorium subissent des désintégrations alpha. Le tableau suivant indique l'énergie libérée pour chacune des désintégrations. Classez les isotopes selon un ordre croissant de leur demi-vie.

Isotope	Q (MeV)
(i)	5,50
(ii)	4,77
(iii)	4,08
(iv)	6,45

E22 Le nucléide $^{222}_{86}Rn$ subit une désintégration alpha, qui transforme le noyau en $^{218}_{84}Po$. La masse des nucléides est respectivement $M_{Rn} = 222{,}017\,57$ u et $M_{Po} = 218{,}008\,97$ u. Lors de la désintégration de plusieurs noyaux, on observe un spectre de particules alpha qui n'ont pas toutes la même énergie, et des photons de 0,51 MeV qui accompagnent l'émission de particules alpha. Quelle est l'énergie cinétique des particules alpha émises ? Négligez le recul du noyau fille.

P23 Le samarium $^{147}_{62}Sm$, dont la masse est de 146,914 89 u, est un isotope pouvant subir une désintégration alpha. Le noyau fille est le néodyme 143 ($^{143}_{60}Nd$) dont la masse est de 142,909 81 u.

a. Déterminez l'énergie libérée par cette désintégration.

b. Déterminez le module de la vitesse de la particule alpha si l'atome de samarium est initialement immobile et si le noyau de néodyme se retrouve dans son état fondamental après la désintégration. Ne négligez pas le recul de l'atome de néodyme.

Section 13.5 La désintégration bêta

Q24 Un nucléide X stable absorbe un neutron et se transforme en un nucléide instable. Après moins d'une seconde, il subit une désintégration β^-. Tout de suite après, le noyau fille se brise en deux particules alpha.

a. Quel est le nucléide X ?

b. Écrivez l'équation de la capture de neutron suivie de la désintégration β^-.

c. Écrivez l'équation de la désintégration alpha.

Q25 Certains nucléides peuvent se désintégrer de plusieurs façons différentes. Le nucléide $^{40}_{19}K$, par exemple, peut subir une désintégration β^- et une désintégration β^+. Écrivez les deux équations de désintégration possibles.

Q26 Les nucléides massifs comme l'uranium 238 se désintègrent en un nucléide qui est lui-même instable. On

obtient une chaîne de désintégration, avec des nucléides qui subissent une désintégration alpha et des nucléides qui subissent une désintégration β^-. La chaîne se termine par un isotope du plomb stable. Le plomb possède trois isotopes stables : $^{206}_{82}$Pb, $^{207}_{82}$Pb et $^{208}_{82}$Pb. Quel isotope du plomb trouve-t-on à la fin de la chaîne de désintégration de l'uranium 238 ?

E27 Un atome d'hydrogène peut se transformer en neutron si le proton du noyau capture l'électron :

$$p + e^- \rightarrow n + \nu .$$

a. Quel est le facteur Q de cette réaction ?

b. Quelle est la longueur d'onde d'un photon ayant l'énergie nécessaire pour que la capture électronique se produise ?

E28 Le nucléide $^{61}_{29}$Cu subit une désintégration β^+. Calculez l'énergie libérée par la désintégration. Les masses des nucléides sont $M_{^{61}\text{Cu}} = 60{,}93346$ u et $M_{^{61}\text{Ni}} = 60{,}93106$ u.

E29 Certains nucléides peuvent se désintégrer selon la désintégration β^- et selon la désintégration β^+. C'est le cas pour le nucléide $^{80}_{35}$Br. La masse de ce nucléide est de 79,918 53 u. La masse du nucléide $^{80}_{36}$Kr est de 79,916 38 u et celle du nucléide $^{80}_{34}$Se est de 79,916 52 u.

a. Calculez l'énergie cinétique maximale des électrons émis lors de la désintégration β^-.

b. Calculez l'énergie cinétique maximale des positrons émis lors de la désintégration β^+.

P30 La tomographie par effet de positron permet de produire des images d'organes internes, comme l'image du cerveau présentée à la figure 9.1 de la page 299. Pour ce faire, le patient absorbe un sucre sur lequel on a fixé le nucléide $^{18}_{9}$F. Ce dernier subit une désintégration β^+. Les positrons émis s'annihilent avec des électrons, ce qui produit des rayons gamma. Ceux-ci sont détectés, ce qui permet de construire l'image. Le nucléide de fluor 18 a une demi-vie de 109,8 min et une masse de 18,000 938 u. L'activité initiale du sucre absorbé par le patient est de 300 MBq. Le noyau fille a une masse de 17,999 160 u.

a. Quelle est l'énergie libérée par la désintégration ?

b. Quelle est l'activité après 24,0 h ?

P31 On utilise l'isotope $^{32}_{15}$P comme traceur. Ce nucléide a une masse de 31,973 907 u et il subit une désintégration β^-, ce qui le transforme en $^{32}_{16}$S. La masse du noyau fille est de 31,972 071 u.

a. Calculez l'énergie libérée par la désintégration.

b. En supposant que l'énergie est complètement transmise à l'électron, quelle est la longueur d'onde de De Broglie ?

c. Supposons que l'électron se trouvait dans un puits de potentiel infini, dont la largeur est égale au rayon du noyau de phosphore. Quelle serait la plus grande longueur d'onde de De Broglie possible pour que l'électron soit dans un état stationnaire ?

P32 Dans une désintégration β^-, le césium 137 se transforme en baryum 137. La figure 13.18 illustre les niveaux d'énergie du baryum et l'état fondamental du césium. La masse du nucléide $^{137}_{56}$Cs est de 136,907 085 u et la masse de $^{137}_{56}$Ba est de 136,905 822 u.

a. Quelle est l'énergie libérée par la désintégration ?

b. Calculez les valeurs possibles pour l'énergie cinétique maximale des électrons.

c. Déterminez l'énergie des rayons gamma qui accompagnent la désintégration.

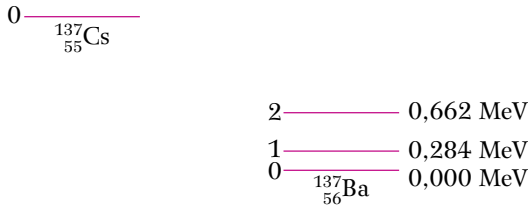


FIGURE 13.18 • Problème 32

Section 13.6 La mesure de la dose de rayonnements ionisants

Q33 Classez les expositions suivantes en ordre croissant de la dose équivalente absorbée.

(i) $1{,}2 \times 10^{13}$ neutrons de 8,0 keV sont absorbés par le corps d'une personne de 50 kg ;

(ii) 5,0 µJ sous forme de particules α absorbées par 250 g de tissus ;

(iii) 0,75 mGy lors d'une exposition à des particules β^-.

E34 Une tumeur cancéreuse de 120 g est exposée à une dose de 1,2 Gy de rayon gamma.

a. Quelle est la dose équivalente ?

b. Quelle est l'énergie reçue par la tumeur ?

P35 Un patient de 75,0 kg reçoit une dose équivalente de 300 µSv lors d'une radiographie. Durant l'examen, 25,0 % de son corps est exposé aux rayons X. Ceux-ci ont une énergie de 10,0 keV et un facteur de pondération de 0,900. Combien y a-t-il de photons absorbés par le patient durant l'examen ?

P36 La scintigraphie est une méthode d'observation médicale durant laquelle on injecte dans le sang un élément radioactif dont on observe le rayonnement lorsqu'il se trouve dans certains organes. À cette fin, on injecte $3{,}0 \times 10^{13}$ noyaux de thallium 201 chez un patient devant passer un examen du cœur. Le thallium 201 a une masse atomique de 200,970 80 u et se transforme (par capture électronique) en mercure 201 dont la masse atomique est de 200,970 285 u. La demi-vie du thallium 201 est de 72,9 h.

a. Quelle est l'énergie totale qui sera émise par la désintégration de l'échantillon ? Exprimez votre réponse en joules.

b. Quelle est la masse de thallium 201 contenue dans l'injection ?

c. Si le corps absorbe 1,00 % du rayonnement émis, quelle est la dose équivalente pour un patient de 62 kg ?

d. Après combien de temps l'activité de l'échantillon injecté aura-t-elle diminué à 1,00 % de l'activité initiale ?

Section 13.7 La fission nucléaire

E37 Identifiez le nucléide manquant dans la réaction suivante :

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{134}_{51}\mathrm{Sb} + ? + \mathrm{n} + \alpha\,.$$

E38 La puissance d'un explosif est souvent exprimée en tonnes de TNT, un explosif parmi ceux qui libèrent le plus d'énergie. Une tonne de TNT dégage une énergie de $4{,}184 \times 10^9$ J. Lors d'une explosion d'une tonne de TNT, quelle est la diminution de la masse du système ?

E39 L'énergie fournie par la fission atomique peut remplacer l'énergie hydroélectrique. L'une des réactions de fission de l'uranium est

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{236}_{92}\mathrm{U}^* \rightarrow {}^{94}_{38}\mathrm{Sr} + {}^{140}_{54}\mathrm{Xe} + 2\mathrm{n}\,.$$

($M_{^{235}\mathrm{U}} = 235{,}043\,92$ u, $M_{^{140}\mathrm{Xe}} = 139{,}921\,64$ u, $M_{^{94}\mathrm{Sr}} = 93{,}915\,36$ u)

a. Quelle est l'énergie libérée par la fission d'un noyau d'uranium 235 dans cette réaction ?

b. Quelle masse d'uranium 235 est requise pour produire 1,00 kWh d'énergie électrique si tous les noyaux fissionnent selon cette réaction, et que le rendement est de 30,0 % ?

Section 13.8 La fusion nucléaire

E40 La chaîne proton-proton qui mène de l'hydrogène à l'hélium dans la fusion nucléaire se produisant dans les étoiles implique une réaction où deux noyaux $^3_2\mathrm{He}$ fusionnent et libèrent 12,86 MeV dans la réaction suivante :

$$^3_2\mathrm{He} + {}^3_2\mathrm{He} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + \mathrm{p} + \mathrm{p}\,.$$

Déterminez quelle est la masse atomique des noyaux $^3_2\mathrm{He}$, sachant que les noyaux $^4_2\mathrm{He}$ ont une masse atomique de 4,002 603 u.

P41 Comparez l'énergie dégagée par la fusion d'une particule alpha avec un noyau de chrome 52 ($M_{^{52}\mathrm{Cr}} = 51{,}940\,51$ u) pour obtenir du fer 56 à l'énergie dégagée par la fusion d'un proton avec un noyau de manganèse 55 ($M_{^{55}\mathrm{Mn}} = 54{,}938\,05$ u) pour obtenir également du fer 56 ($M_{^{56}\mathrm{Fe}} = 55{,}934\,94$ u).

P42 L'irradiance du Soleil de $3{,}9 \times 10^{26}$ W est produite presque exclusivement par la fusion de l'hydrogène en hélium, au cours de laquelle quatre protons fusionnent en un noyau $^4_2\mathrm{He}$ en dégageant 26,73 MeV (ce qui inclut l'annihilation de deux positrons et deux électrons). En combien de temps le Soleil consommera-t-il 10,0 % de sa masse d'hydrogène si on suppose que la masse initiale du Soleil est de $1{,}99 \times 10^{30}$ kg, que cette masse est uniquement composée d'hydrogène et que l'irradiance ne change pas ?

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

13.1	(ii) < (i) < (iv) < (iii)	La masse d'un nucléide est donnée approximativement par le nombre de masse, qui est le nombre qui apparaît en exposant devant le symbole chimique. Le numéro atomique n'est pas un facteur important ici.
13.2	$\Delta t = 3t_{1/2}$	La demi-vie est le temps qu'il faut pour que le nombre de noyaux diminue de moitié. L'échantillon a diminué d'un facteur $8 = 2^3$. On peut dire que le nombre de noyaux a diminué de moitié à trois reprises, ce qui nécessite trois demi-vies.
13.3	**a.** ${}^{285}_{112}\text{Cn} \rightarrow {}^{281}_{110}\text{Ds} + {}^{4}_{2}\text{He}$ **b.** ${}^{235}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{231}_{90}\text{Th} + {}^{4}_{2}\text{He}$ **c.** ${}^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow {}^{218}_{84}\text{Po} + {}^{4}_{2}\text{He}$	Dans une désintégration alpha, un noyau d'hélium 4 est émis. Le noyau d'hélium 4 est composé de deux protons et de deux neutrons. Le noyau fille doit donc avoir deux protons et deux neutrons de moins que le noyau mère. Le noyau fille est donc un nucléide avec un numéro atomique $Z' = Z - 2$ et un nombre de masse $A' = A - 4$.
13.4	**a.** ${}^{3}_{1}\text{H} \xrightarrow{\beta^-} {}^{3}_{2}\text{He} + \text{e}^- + \bar{\nu}$ **b.** ${}^{206}_{83}\text{Bi} + \text{e}^- \xrightarrow{\varepsilon} {}^{206}_{82}\text{Pb} + \nu$ **c.** ${}^{137}_{55}\text{Cs} \xrightarrow{\beta^-} {}^{137}_{56}\text{Ba} + \text{e}^- + \bar{\nu}$ **d.** ${}^{18}_{9}\text{F} \xrightarrow{\beta^+} {}^{18}_{8}\text{O} + \text{e}^+ + \nu$	Dans une désintégration β^-, un neutron se transforme en proton, et le noyau fille a un proton de plus que le noyau mère ($Z' = Z + 1$). Dans une désintégration β^+ et dans une capture électronique, un proton se transforme en neutron, et le noyau fille a un proton de moins ($Z' = Z - 1$). Le nombre de nucléons ne change pas dans ces désintégrations, donc $A' = A$. La désintégration β^- produit un électron et un antineutrino, alors que la désintégration β^+ produit un positron et un neutrino. Dans la capture électronique, il n'y a qu'un neutrino produit.

Chapitre 14

Les particules élémentaires

Buts du chapitre

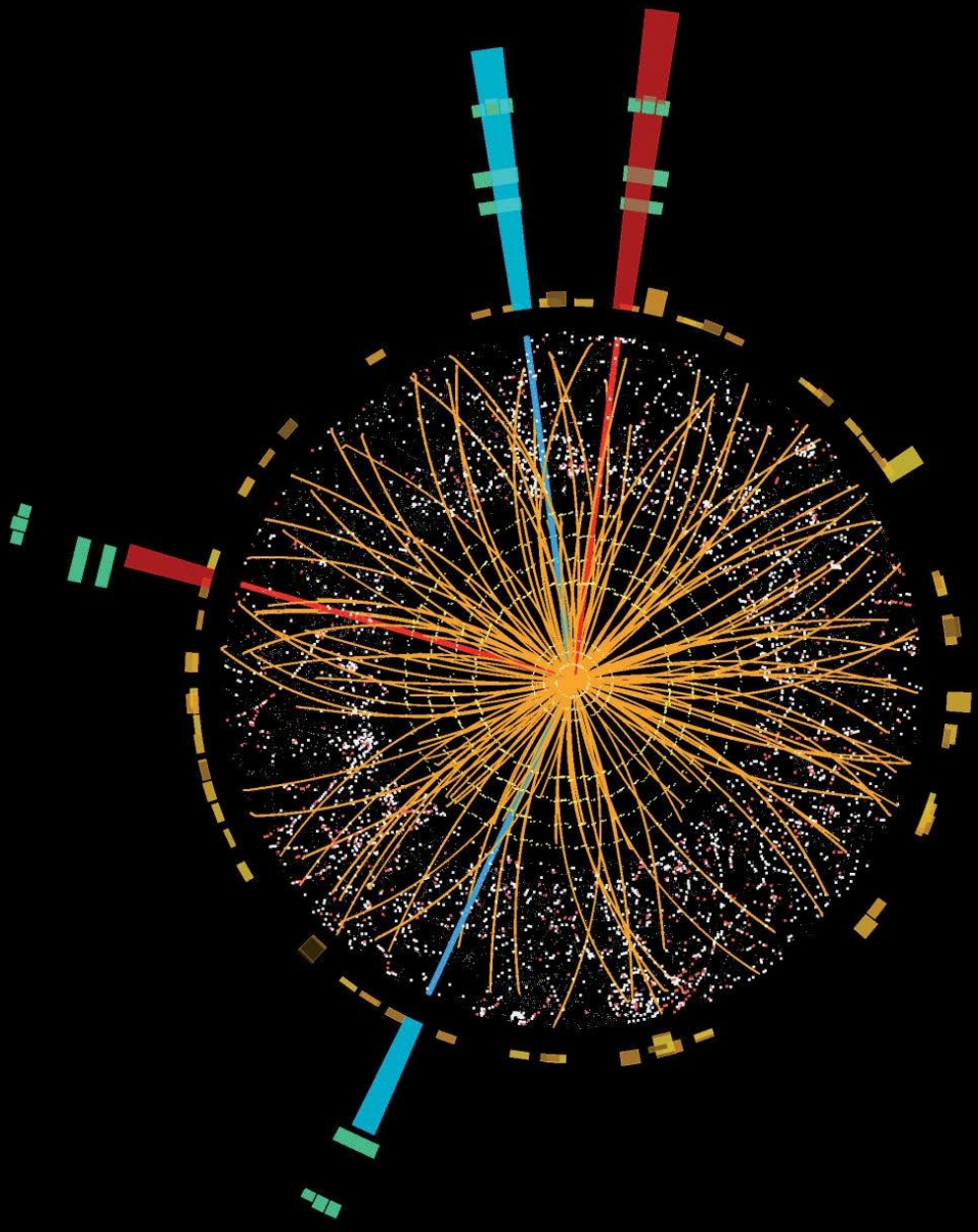
Dans ce chapitre, on dresse les grandes lignes de la physique des particules élémentaires. Après l'étude de ce chapitre, vous serez en mesure :

- de décrire les leptons et les quarks ;
- de visualiser les interactions fondamentales comme un échange de bosons de jauge ;
- d'identifier les types de hadrons et les quarks de valence ;
- d'expliquer qualitativement d'où vient la masse des particules.

Préalables

Ce chapitre généralise les idées de la physique nucléaire. Revoyez :

- la loi de désintégration, présentée à la section 13.3 ;
- la désintégration bêta, étudiée à la section 13.5 ;
- l'énergie en relativité, analysée à la section 9.11 ;
- le principe d'incertitude, présenté à la section 10.7 ;
- la structure hyperfine, présentée à la section 12.7.



Un candidat pour la désintégration d'un boson de Higgs en deux paires électron-positron

L'étude des atomes et ensuite des noyaux par les physiciens a d'abord été motivée par deux questions simples : de quoi est composé l'Univers et quelles en sont les interactions ? Nous arrivons aux frontières des connaissances sur ces questions : la physique des particules élémentaires, qu'on appelle aussi la physique des hautes énergies.

Différentes particules ont été décrites lors de l'étude de la physique moderne. Ainsi, nous avons étudié les propriétés de l'électron et de ses interactions avec le noyau dans l'atome au chapitre 12. Lorsque l'électron change de niveau d'énergie, il émet ou il absorbe un photon. Nous avons également abordé les propriétés des protons et des neutrons dans le chapitre 13. De plus, lors de l'étude de la physique nucléaire, nous nous sommes intéressés à de nouvelles particules telles que le positron e^+, l'antiparticule de l'électron, en plus du neutrino électronique ν et de l'antineutrino électronique $\overline{\nu}$.

Nous avons aussi rencontré des particules subatomiques au chapitre 9, lors de l'étude de la relativité restreinte. En effet, le muon μ^- a été utilisé pour vérifier la dilatation du temps et le pion neutre π^0 a été utilisé pour vérifier le postulat de la vitesse de la lumière.

Parmi ces particules, il y a des particules comme l'électron qui ne semblent pas avoir de structure interne. On les appelle les *particules élémentaires*. D'autres particules, comme le proton et le neutron, ont une structure interne. Ce sont des *particules composites*. Le but de la physique des particules est de trouver toutes les particules élémentaires et de comprendre l'interaction entre celles-ci.

Dans ce chapitre, on dresse un portrait de la physique des particules élémentaires, en présentant les connaissances actuelles sur les particules et les interactions les plus fondamentales, ce qui est appelé le *modèle standard* de la physique des particules. Ce modèle repose sur la théorie des champs quantiques. Chaque particule qu'on observe correspond à l'excitation d'un champ quantique. Par exemple, le champ électrique et le champ magnétique sont remplacés par un champ électromagnétique, dont l'excitation produit des photons. Le modèle standard est la théorie la plus fondamentale dont les prédictions ont été vérifiées.

14.1 Un aperçu de la physique des particules

Au départ, c'est l'étude des rayons cosmiques qui a conduit à la découverte des particules subatomiques. La Terre est bombardée de particules de très haute énergie, principalement des protons et des électrons, qui viennent du Soleil et de l'espace en général. Lorsque ces particules entrent en collision avec les molécules de l'atmosphère, une partie de l'énergie cinétique peut être transformée en énergie au repos pour créer des particules subatomiques, comme les pions et les muons. Ces particules ont une durée de vie moyenne très courte (de l'ordre de la microseconde ou moins). Elles se désintègrent et produisent des particules qu'on peut observer.

Par la suite, on a développé des accélérateurs de particules, pour pouvoir créer des particules dans un environnement plus contrôlé que l'atmosphère.

Des électrons ou des protons y sont accélérés, pour leur donner une grande énergie cinétique. Les premiers accélérateurs envoyaient les électrons et les protons sur une cible fixe, pour ensuite étudier les particules créées. Pour augmenter l'énergie disponible, les accélérateurs actuels sont des *collisionneurs* : deux faisceaux de particules sont accélérés de façon indépendante, puis les faisceaux se rencontrent pour entrer en collision. De grands détecteurs de particules sont placés autour de ces points de rencontre pour identifier et étudier les particules créées.

Les particules produites par la collision de protons ou d'électrons de très haute énergie peuvent avoir une durée de vie très courte, de l'ordre de 10^{-23} s. Il n'est pas possible d'observer directement ces particules avant leur désintégration. On observe plutôt les produits de ces désintégrations. De plus, les particules comme les neutrinos interagissent trop faiblement pour être détectées. On obtient leur énergie et leur quantité de mouvement en appliquant les principes de conservation.

À l'heure actuelle, le plus grand accélérateur de particules est le LHC (*Large Hadron Collider*, ou grand collisionneur de hadrons), situé en Suisse. Dans cet accélérateur, deux faisceaux de protons sont accélérés en sens inverse, et ils peuvent se rencontrer en certains endroits pour produire des collisions à très haute énergie. Jusqu'à présent, il y a eu des collisions avec des protons ayant une énergie de 2,5 TeV chacun. On prévoit que l'accélérateur pourra accélérer des protons jusqu'à une énergie cinétique de 7 TeV.

14.2 Les particules et les antiparticules

L'étude des particules subatomiques fait intervenir des particules de très courte durée de vie, qu'il faut d'abord créer pour pouvoir ensuite les étudier. Pour ce faire, il faut transformer de l'énergie cinétique en énergie au repos. Il s'agit donc de particules qui se déplacent à des vitesses qui s'approchent de la vitesse de la lumière. Par conséquent, on doit utiliser la relativité restreinte. En même temps, les principes de la mécanique quantique sont toujours applicables : il y a une dualité onde-particule.

Lorsqu'on combine la relativité restreinte à la mécanique quantique, on obtient que la fonction d'onde associée à une particule est remplacée par un champ. Le nombre de particules peut varier, des particules peuvent être créées ou s'annihiler. L'excitation d'un champ est interprétée comme des particules, ayant certaines propriétés particulières, comme la masse, la charge électrique et le spin.

Au chapitre 9, nous avons vu qu'on peut convertir de l'énergie cinétique en énergie au repos ou l'inverse. Par exemple, un rayon γ ayant une énergie de plus de 1,022 MeV peut produire une paire électron-positron (*voir la figure 14.1, page suivante*). Pour que la quantité de mouvement soit conservée, le rayon gamma doit interagir avec un atome X quelconque :

$$\gamma + \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{X} + \mathrm{e}^- + \mathrm{e}^+ \,. \tag{14.1}$$

Le positron (e^+) est une particule ayant la même masse que l'électron, mais sa charge électrique est opposée. On l'appelle l'*antiparticule* de l'électron.

FIGURE 14.1
La création de paire. (a) un photon de rayon gamma est incident sur un noyau quelconque. (b) Le rayon gamma disparaît et son énergie est transformée en une paire électron-positron.

Lorsqu'on combine la relativité restreinte à la mécanique quantique, on constate que chaque particule doit avoir une antiparticule, avec la même masse et des charges opposées. On peut créer une paire particule-antiparticule en transformant de l'énergie cinétique en énergie au repos. De plus, lorsqu'une particule rencontre son antiparticule, les deux s'annihilent, en transformant l'énergie au repos en énergie cinétique. C'est le cas lorsqu'un électron et un positron se rencontrent :

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma \,. \tag{14.2}$$

Lors d'une création de paire, les principes de conservation doivent être respectés : l'énergie, la quantité de mouvement et le moment cinétique sont conservés. De même, la charge électrique est conservée, étant donné que le photon n'a pas de charge électrique, et que l'électron et le positron ont des charges électriques opposées.

À toute particule est associée une antiparticule. L'antiparticule a la même masse et le même spin que la particule, mais des charges (nombres quantiques) opposées.

De façon générale, on représente une antiparticule en ajoutant une barre au-dessus de son symbole. Par exemple, l'antiproton est noté $\bar{p}$ et l'antineutrino est noté $\bar{\nu}$. Dans certain cas, on utilise le même symbole, mais en indiquant une charge opposée, comme dans le cas du positron e^+. Certaines particules sans charge sont leur propre antiparticule. C'est le cas pour le photon, qu'on symbolise par γ, ou pour le pion neutre π^0.

Le concept d'antiparticule a été prédit par le physicien anglais Paul Dirac (1902-1984), lorsqu'il a trouvé une équation relativiste pour décrire l'électron. Le positron a ensuite été observé par le physicien américain Carl Anderson (1905-1991) en 1933, avec les propriétés prédites par Dirac : une particule ayant la même masse que l'électron, mais une charge électrique positive. De même, une expérience a été menée en 1955 à Berkeley aux États-Unis au cours de laquelle des antiprotons ont été produits et détectés.

En 1995, une équipe de l'Organisation européenne pour la recherche nucléaire (CERN) a réussi à combiner un antiproton et un positron pour fabriquer un antiatome d'hydrogène, ce qui correspond à l'atome le plus simple d'*antimatière*. Les recherches se poursuivent pour vérifier si l'antiatome d'hydrogène a exactement les mêmes propriétés que l'atome d'hydrogène (même spectre d'émission, même attraction gravitationnelle par la Terre, etc).

L'Univers qui nous entoure semble être composé uniquement de matière, avec des atomes constitués de protons et d'électrons, alors que la création de paire, comme celle présentée à l'équation 14.1, semble montrer qu'il doit y avoir autant de particules que d'antiparticules. Ceci est une des questions auxquelles la physique des particules doit répondre : où est passée l'antimatière ?

14.3 Les particules de matière : les fermions élémentaires

La matière qui nous entoure, qu'on peut appeler la matière ordinaire, est composée de protons, de neutrons et d'électrons. De plus, les désintégrations β font apparaître le neutrino électronique ν_e. Lorsqu'on bombarde les protons et les neutrons avec des électrons de haute énergie, on observe qu'ils sont constitués de trois particules que l'on nomme les *quarks*. Les quarks dans le proton et dans le neutron sont de deux types, qu'on appelle les *saveurs* : le quark up (u) et le quark down (d). Le proton correspond à la configuration (uud) et le neutron, à la configuration (udd)*.

En somme, la matière ordinaire est constituée de quatre types de particules : les quarks u et d et les *leptons* (l'électron et le neutrino électronique). Toutes ces particules ont un spin $s = 1/2$; ils sont donc des fermions, soumis au principe d'exclusion de Pauli.

Les quarks subissent l'interaction forte, mais pas les leptons. Les quarks ont une propriété supplémentaire qui se nomme la *couleur*. Pour que le proton ait une charge électrique $q = +e$ et le neutron, une charge électrique $q = 0$, il faut que les quarks aient une charge électrique qui représente une fraction de la charge élémentaire. Les quarks sont donc soumis à l'interaction électromagnétique, tout comme l'électron. Le neutrino électronique n'a pas de charge électrique. Il n'est soumis qu'à l'interaction faible. À chacune de ces particules, on doit ajouter les antiparticules $\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{\nu}_e$ et e^+. Les antiparticules ont la même masse, mais une charge électrique opposée.

D'autres particules plus massives ont été découvertes, par exemple le muon, qui a des propriétés semblables à l'électron, mais avec une masse plus importante. Les différentes particules peuvent être regroupées en générations. Chaque génération possède deux quarks, un lepton chargé et un neutrino. Les éléments d'une génération ont des propriétés semblables à un membre d'une autre génération, mais avec une masse différente. L'énergie au repos est plus grande pour les particules d'une génération plus élevée, et celles-ci se désintègrent très rapidement en particules d'une génération plus faible. Les différentes particules sont présentées au tableau 14.1 (*voir la page suivante*).

Les quarks n'ont jamais été observés de façon isolée. Ils sont *confinés* à l'intérieur d'une particule composite, le *hadron* (un mot dérivé d'un mot grec voulant dire fort) qui regroupe les trois types de particules suivants. Le *baryon,* une particule composée de trois quarks [comme le proton (uud) et le neutron (udd)], l'*antibaryon,* une particule formée de trois antiquarks [comme l'antiproton ($\bar{u}\,\bar{u}\,\bar{d}$)], et le *méson,* une particule composée d'un quark et d'un antiquark [comme le

* De façon usuelle, c'est le nom des quarks en anglais qui est utilisé plutôt qu'une traduction (quark haut et quark bas).

TABLEAU 14.1

Les fermions élémentaires (ce tableau est aussi présenté à l'annexe C)

Génération	Type	Saveur	Symbole	Charge (e)	Masse (MeV/c^2)	Durée de vie (s)
1	Quark	Up	u	+2/3	$2{,}3 \pm 0{,}7$	
		Down	d	–1/3	$4{,}8 \pm 0{,}7$	
	Lepton	Neutrino électronique	ν_e	0	$< 2 \times 10^{-6}$	
		Électron	e^-	–1	0,511 0	stable
2	Quark	Charm	c	+2/3	$1\,275 \pm 25$	
		Strange	s	–1/3	95 ± 5	
	Lepton	Neutrino muonique	ν_μ	0	$< 2 \times 10^{-6}$	
		Muon	μ^-	–1	105,7	$2{,}197\,0 \times 10^{-6}$
3	Quark	Top	t	+2/3	$(173{,}5 \pm 1{,}5) \times 10^3$	$3{,}3 \times 10^{-25}$
		Bottom	b	–1/3	$(4{,}18 \pm 0{,}03) \times 10^3$	
	Lepton	Neutrino tauique	ν_τ	0	$< 2 \times 10^{-6}$	
		tauon	τ^-	–1	$1\,776{,}82 \pm 0{,}16$	$2{,}91 \times 10^{-13}$

pion π^+ ($u\bar{d}$)]. Les particules composites ont alors une charge électrique Q qui est le multiple de la charge élémentaire ($Q = Ne$). Nous allons étudier plus en détail les hadrons à la section 14.9.

Vous êtes maintenant familiers avec les principes de conservation en physique. Dans les différents processus qui se produisent dans un système fermé, l'énergie, la quantité de mouvement, le moment cinétique et la charge électrique sont conservés. En analysant les processus faisant appel aux fermions élémentaires, on trouve deux autres principes de conservation. D'abord, le *nombre leptonique* L correspond au nombre de leptons duquel on soustrait le nombre d'antileptons dans un système. Le nombre leptonique est conservé dans les collisions et les désintégrations :

Conservation du nombre leptonique

$$L = N_\ell - N_{\bar{\ell}} = \text{constant}. \tag{14.3}$$

Selon ce principe de conservation, on ne peut pas créer un lepton unique, mais seulement une paire lepton-antilepton. De même, un lepton ne peut pas disparaître seul, il doit s'annihiler avec un antilepton. Par exemple, dans la désintégration du neutron, il y a émission d'un électron ($L = +1$) et d'un antineutrino ($L = -1$) :

$$\begin{aligned} &n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \\ L:\ &0 = 0 + 1 + (-1)\,. \end{aligned}$$

De la même façon, le nombre de quarks ne change pas. Si on compte le nombre de quarks duquel on soustrait le nombre d'antiquarks, ce nombre demeure constant pour un système fermé :

$$N_q - N_{\bar{q}} = \text{constant}\ . \tag{14.4}$$

Étant donné que les quarks ne sont pas directement observables, c'est le nombre baryonique B qui est considéré comme une quantité conservée. Comme un baryon possède trois quarks ($N_q = 3$), qu'un antibaryon possède trois antiquarks (avec $N_{\bar{q}} = 3$) et que les mésons sont des paires quark-antiquark (avec $N_q = N_{\bar{q}} = 1$), le nombre baryonique est défini comme le nombre de quarks divisé par trois. On obtient alors :

$$B = \frac{N_q - N_{\bar{q}}}{3} = \text{constant} . \qquad (14.5)$$

Conservation du nombre baryonique

Avec cette définition, $B = 1$ pour un proton et pour un neutron, alors que $B = -1$ pour un antiproton et $B = 0$ pour un pion ou un électron.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 14.1

Les processus suivants ne se produisent pas, car il y a un principe de conservation qui n'est pas respecté. Indiquez quelle quantité n'est pas conservée.

a. $e^- + \bar{\nu}_e \rightarrow e^+ + \nu_e$

b. $\bar{p} \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$

c. $p + e^- \rightarrow n$

d. $\pi^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$

14.4 Les interactions : les bosons de jauge

La prochaine étape consiste à décrire les interactions entre les particules fondamentales. On sait de façon classique que deux électrons exercent l'un sur l'autre une interaction électromagnétique. Le champ électrique et le champ magnétique sont les médiateurs de cette interaction. Au niveau quantique, le champ électromagnétique est quantifié. Une particule est associée au champ électromagnétique, le photon. Donc, l'interaction entre deux électrons doit se faire par l'échange de photons.

Il existe quatre interactions fondamentales : l'interaction gravitationnelle, l'interaction faible, l'interaction électromagnétique et l'interaction forte. Chaque interaction doit s'effectuer par l'échange de particules ; on les appelle les *particules d'échange*. Le tableau 14.2 (*voir la page suivante*) donne les propriétés de ces particules d'échange. Ces particules sont des bosons, car elles ont un spin $s = 1$, à l'exception du graviton qui doit avoir un spin $s = 2$. On les appelle aussi des *bosons de jauge*.

Au niveau des particules élémentaires, l'interaction gravitationnelle est complètement négligeable. Pour cette raison, il n'y a aucun fait expérimental qui permet de savoir si cette interaction s'effectue par l'échange de gravitons. Habituellement, on oublie cette interaction en physique des particules. Nous étudierons en détail chacune des interactions, à l'exception de l'interaction gravitationnelle, dans les sections suivantes.

TABLEAU 14.2

Les bosons élémentaires (ce tableau est aussi présenté à l'annexe C)

Interaction	Nom	Symbole	Charge (e)	Masse (GeV/c^2)	Spin
Forte	Gluons (8)	g	0	0	1
Électromagnétique	Photon	γ	0	0	1
Faible	Boson W^+	W^+	+1	$80{,}385 \pm 0{,}015$	1
	Boson W^-	W^-	–1	$80{,}385 \pm 0{,}015$	1
	Boson Z	Z^0	0	$91{,}1876 \pm 0{,}0021$	1
Gravitationnelle	Graviton ?	G	0	0	2
(Masse)	Boson de Higgs	H^0	0	≈126 ?	0

Le tableau 14.2 présente un autre boson, de spin $s = 0$, qui n'est pas associé directement à une interaction, mais plutôt à la masse des particules. Nous verrons à la section 14.11 l'effet du champ de Higgs associé à cette particule sur les autres particules pour engendrer la masse des particules élémentaires.

Dans une théorie classique, une particule libre ne peut pas émettre une autre particule, car cela viole les principes de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement. Cependant, dans le monde quantique, le principe d'incertitude ne permet pas de connaître exactement l'énergie. Un processus qui dure un temps $t = 2\,\Delta t$ a une incertitude sur l'énergie ΔE, de telle sorte que

$$\Delta E\, t \geq \hbar\,, \tag{14.6}$$

où t est la durée totale de la fluctuation, qui représente le double de l'incertitude Δt. Donc, il peut se produire une fluctuation d'énergie, tant que cette fluctuation a une durée t :

$$t < \frac{\hbar}{\Delta E}\,.$$

Pendant l'échange, la fluctuation d'énergie doit être au moins égale à l'énergie au repos de la particule d'échange ($\Delta E = Mc^2$). De plus, pendant un temps t, la particule d'échange peut parcourir une distance maximale de $\Delta x = ct$. Soit $R = \Delta x$, la portée de la force. On obtient alors

$$\frac{R}{c} < \frac{\hbar}{Mc^2}$$

$$R < \frac{\hbar c}{Mc^2}\,. \tag{14.7}$$

D'après le tableau 14.2, la masse du photon est nulle. Selon le principe d'incertitude, la portée de l'interaction électromagnétique peut être infinie ($R \to \infty$), car la masse du photon est nulle. Cependant, la masse des bosons associés à l'interaction faible produit une portée finie pour cette interaction.

EXEMPLE 14.1 Le boson de Yukawa

Le concept de boson d'échange a d'abord été formulé par le physicien japonais Hideki Yukawa (1907-1981) en 1935, pour expliquer la portée finie de la force nucléaire entre les protons et les neutrons. En supposant que la portée de la force nucléaire est de 1,40 fm, quelle est la masse du boson de Yukawa ?

SOLUTION

Décortiquer le problème

Connue	Inconnue
$R = 1{,}40$ fm	M

Identifier la clé

La **clé** est l'équation 14.7 :

$$R = \frac{\hbar c}{Mc^2} \Rightarrow M = \frac{hc}{2\pi R}\frac{1}{c^2}. \qquad \text{(i)}$$

Résoudre le problème

Nous obtenons

$$M = \frac{1240 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{2\pi \times 1{,}40 \text{ fm}}\frac{1}{c^2}$$

$$M = 141 \text{ MeV}/c^2 . \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Yukawa a donné le nom de *mésons* (à partir du mot grec *mesos*) à ces bosons d'échange, car ils ont une masse intermédiaire entre l'électron et le proton. Les caractéristiques de ces mésons correspondent aux pions ($M \approx 140$ MeV/c^2), qui ont été découverts dans les rayons cosmiques en 1947.

14.5 Les diagrammes de Feynman

Dans une théorie quantique des champs, les particules interagissent par l'échange de bosons comme les photons ou les gluons. Pour calculer la probabilité qu'un processus se produise dans une théorie des champs, le physicien américain Richard Feynman (*voir la figure 14.2*) a développé une méthode, les *diagrammes de Feynman,* qui repose sur un tracé de diagrammes. Feynman a d'abord appliqué cette méthode à l'étude de l'*électrodynamique quantique*, la théorie quantique relativiste de l'interaction entre les particules chargées et les photons. Feynman s'est vu décerner le prix Nobel de physique en 1965 pour ces travaux, conjointement avec le physicien Julian Schwinger (1918-1994) et le physicien japonais Sin-Itiro Tomonaga (1906-1979), qui ont formulé de façon indépendante l'électrodynamique quantique.

FIGURE 14.2
Richard Feynman (1918-1988), physicien américain

Les diagrammes de Feynman permettent de représenter un processus complexe par des diagrammes simples à construire. Chaque diagramme est associé à une amplitude de probabilité. En faisant la somme des amplitudes et en calculant le carré du module, on peut obtenir la probabilité que le processus se produise. Ce type de calculs dépasse largement le cadre de cet ouvrage. On se limite plutôt à présenter les diagrammes de Feynman comme une méthode de visualisation des interactions fondamentales.

Un diagramme de Feynman est un schéma dans lequel on représente ce qui peut ressembler à la trajectoire des particules, avec le temps orienté vers la droite et l'axe des x orienté vers le haut. Les axes ne sont pas tracés dans ces diagrammes. La forme de la ligne utilisée dépend du type de particules qu'on veut représenter. Le tableau 14.3 (*voir la page suivante*) illustre la convention utilisée pour les différentes particules. On utilise des segments de droite avec une flèche orientée vers la droite pour représenter les fermions, comme un électron ou un quark.

TABLEAU 14.3

Les particules libres dans les diagrammes de Feynman

Particule	Trait
Fermion (particule)	e^- , q
Fermion (antiparticule)	e^+ , $\overline{q}$
Photon, W^+, W^-, Z^0	γ, W^+, W^-, Z^0
Gluon	g
Boson de Higgs	H^0

Pour une antiparticule comme le positron, on utilise aussi un segment de droite, mais avec une flèche orientée vers la gauche, comme si c'était un électron qui se propageait vers le passé. Ceci semble farfelu de prime abord, mais c'est plutôt le signe d'une symétrie très importante en physique, qui se nomme la *symétrie CPT*, pour charge-parité-temps. En effet, si on prend un processus quelconque, comme un électron qui se déplace vers la droite, et qu'on échange les particules pour des antiparticules (l'électron pour un positron), qu'on inverse l'orientation des axes ($x \to -x$, $y \to -y$ et $z \to -z$) et qu'on change le temps pour $t \to -t$, on obtient exactement les mêmes équations.

Pour décrire les bosons, on utilise une courbe en forme de sinus pour le photon et les bosons W^+, W^- et Z^0. Pour les gluons, on a recours à une courbe différente, semblable à un ressort. Pour le boson de Higgs, qui a un spin nul, on utilise une ligne en pointillés.

Les interactions complexes entre les particules sont divisées en processus plus simples : l'émission et l'absorption d'une particule. Ces processus sont représentés dans les diagrammes par des sommets, où plusieurs lignes se rencontrent. La figure 14.3 montre le sommet fermion-fermion-photon, qui correspond à l'absorption d'un photon par un électron (*voir la figure 14.3a*), et l'émission d'un photon par un électron (*voir la figure 14.3b*).

Pour représenter un positron, on ne fait que changer le sens de la flèche, donc on utilise des flèches orientées vers la gauche. Il est aussi possible de représenter l'annihilation d'une paire électron-positron (*voir la figure 14.3c*) ou la création d'une paire (*voir la figure 14.3d*). Tous ces processus font appel au même sommet, qui est orienté de façon différente. On remarque dans ces exemples qu'il y a une flèche qui est orientée vers le sommet et une autre flèche qui est orientée en sens opposé au sommet. À un sommet, la quantité de mouvement, l'énergie et la charge électrique sont conservées.

FIGURE 14.3

Quatre processus simples représentés par un sommet fermion-fermion-photon : (a) l'absorption d'un photon, (b) l'émission d'un photon, (c) l'annihilation et (d) la création de paire.

Ces processus ne peuvent pas se produire de façon isolée. Prenons par exemple l'émission d'un photon par un électron, en utilisant le référentiel où l'électron est initialement au repos. Avant l'émission, l'énergie du système est simplement l'énergie au repos de l'électron, $E_i = mc^2$. Après l'émission, on a un photon qui se déplace vers l'avant et l'électron qui recule vers l'arrière (selon le principe de conservation de la quantité de mouvement). Pour une particule réelle, l'énergie au repos est fixe, de telle sorte que l'énergie de ce processus n'est pas conservée.

Nous avons vu que selon le principe d'incertitude, on peut avoir une fluctuation d'énergie ΔE lorsque le processus se produit pendant un temps t, de telle sorte que $\Delta E\, t \geq \hbar$. Cela permet d'obtenir pendant un temps très bref des particules pour lesquelles $E^2 - p^2c^2 \neq m^2c^4$. Ce sont des *particules virtuelles*. Elles existent pendant un temps trop court pour qu'on puisse les détecter directement.

Dans un diagramme de Feynman, on peut retrouver des particules ponctuelles au centre du diagramme. De plus, il faut que le diagramme possède au moins deux sommets. Les particules virtuelles peuvent exister entre deux sommets.

La technique 14.1 donne les différentes propriétés des diagrammes de Feynman.

TECHNIQUE 14.1 Les diagrammes de Feynman

Pour visualiser les processus d'interaction entre les particules, on suit les étapes suivantes.

1. Les particules sont représentées à l'aide des traits présentés au tableau 14.3.
2. Les particules initiales sont tracées dans la partie gauche et les particules finales, dans la partie droite du diagramme. Ces particules sont des particules réelles, pour lesquelles la condition $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$ s'applique.
3. Les interactions sont symbolisées par des sommets, où plusieurs lignes se rencontrent. Un diagramme complet doit comprendre au moins deux sommets.
4. Entre les sommets, il y a propagation de particules virtuelles, pour lesquelles la condition $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$ ne s'applique pas.
5. L'énergie, la quantité de mouvement, la charge électrique et les autres nombres quantiques sont conservés à chacun des sommets.

À partir de deux sommets, on peut illustrer la diffusion de deux électrons tel que le montre la figure 14.4a. Dans ce diagramme, les électrons arrivent de la gauche et vont vers la droite. Les deux électrons interagissent : ils échangent de l'énergie et de la quantité de mouvement par l'échange d'un photon. Le photon au centre du diagramme est une *particule virtuelle*. De façon équivalente, la figure 14.4b illustre la diffusion de deux positrons.

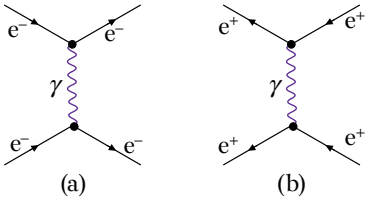


FIGURE 14.4
Les diagrammes de Feynman servant à illustrer l'interaction (a) entre deux électrons et (b) entre deux positrons

Les diagrammes de Feynman permettent aussi d'illustrer des processus plus complexes, avec l'échange de plusieurs photons et avec plus de deux sommets. La figure 14.5 illustre trois processus avec quatre sommets.

MISE EN GARDE

Les diagrammes de Feynman ne montrent pas la trajectoire réelle des particules. Ces diagrammes servent à représenter les processus d'interaction entre les particules. La flèche utilisée pour les fermions n'indique pas le sens de propagation, mais plutôt si c'est une particule (vers la droite) ou une antiparticule (vers la gauche).

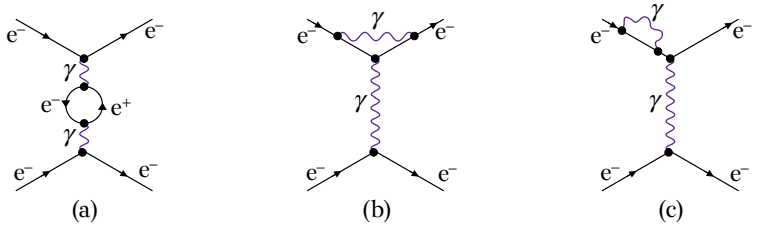


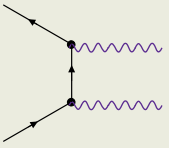
FIGURE 14.5
Trois processus plus complexes, dans la diffusion de deux électrons

REMARQUE

Les diagrammes de Feynman peuvent être utilisés pour calculer l'amplitude de probabilité d'un processus donné. Cela dépasse largement le cadre du présent exposé. Dans ce manuel, on utilise seulement les diagrammes de Feynman pour illustrer les interactions.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 14.2

La figure suivante montre un processus faisant intervenir des électrons, des photons et des antiparticules. Écrivez l'équation du processus.



EXEMPLE 14.2 La représentation de l'effet Compton

L'effet Compton est la diffusion d'un photon par un électron :

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^- .$$

Représentez ce processus par des diagrammes de Feynman dans lesquels apparaîssent deux sommets.

SOLUTION

Décortiquer le problème

Il faut utiliser une ligne continue pour l'électron et une ligne ondulée pour le photon à gauche. Il faut retrouver le même type de ligne à droite du diagramme.

Identifier la clé

La **clé** est que les processus en cause sont l'absorption d'un photon par un électron et l'émission d'un photon par l'électron.

Résoudre le problème

Il y a deux possibilités, selon l'ordre des deux processus. La première possibilité est que le photon incident est d'abord absorbé, puis l'électron émet le photon diffusé. Nous obtenons alors le diagramme de la figure 14.6a. Il est aussi possible que l'électron émette d'abord le photon diffusé, puis absorbe le photon incident, comme à la figure 14.6b.

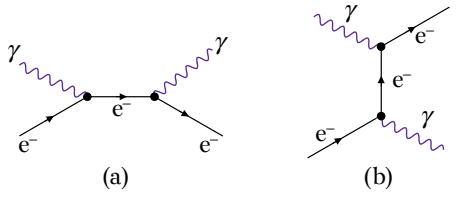


FIGURE 14.6
Les diagrammes de Feynman pour l'exemple 14.2

Valider la réponse

Les diagrammes ont bien deux sommets. Dans ces diagrammes, l'électron au centre est une particule virtuelle.

14.6 L'invariance de jauge

Avant d'étudier en détail les différentes interactions, nous avons besoin de connaître les possibilités qu'ont les particules d'interagir au moyen d'émission et d'absorption de particules virtuelles. L'interaction électromagnétique peut servir de modèle, car c'est l'interaction la plus simple et c'est celle que nous avons

déjà étudiée. Au niveau classique, l'interaction électromagnétique a été traitée dans le deuxième tome : l'interaction entre les particules chargées se produit par l'entremise du champ électrique et du champ magnétique, les médiateurs de la force électrique et de la force magnétique. De plus, la charge électrique est une quantité conservée : la charge d'un système isolé ne peut pas changer.

Au niveau quantique, une particule ponctuelle doit être remplacée par un champ quantique $\psi(\vec{\mathbf{r}}, t)$, qui généralise la fonction d'onde. Pour un fermion comme l'électron, le champ ψ est un champ qui possède les propriétés de spin et qui décrit à la fois les électrons et les positrons. L'excitation du champ ψ se matérialise en électrons et en positrons.

Comme dans le cas de la fonction d'onde d'une particule étudiée au chapitre 11, on peut changer la phase du champ partout sans changer les résultats :

$$\psi(\vec{\mathbf{r}}, t) \rightarrow \psi'(\vec{\mathbf{r}}, t) = e^{i\chi}\psi(\vec{\mathbf{r}}, t)\,, \tag{14.8}$$

où χ (la lettre grecque «khi») est une phase constante quelconque. En effet, la probabilité est obtenue en calculant le carré du module du champ :

$$\Pi = |\psi|^2 = \psi^*\psi \rightarrow (e^{-i\chi}\psi^*)(e^{i\chi}\psi) = \psi^*\psi\,.$$

On remarque que la densité de probabilité ne change pas lorsqu'on modifie le champ ψ. La transformation 14.8 est appelée une *transformation de jauge globale,* et la densité de probabilité Π est invariant sous cette transformation.

Pour le champ électromagnétique, nous avons vu que le photon est la particule associée aux ondes électromagnétiques, donc c'est la particule associée au champ électrique et au champ magnétique. Nous voulons trouver une façon de représenter le champ électrique et le champ magnétique d'une façon compatible avec la relativité restreinte. Ceci est possible en remplaçant les champs $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ par des potentiels.

Au chapitre 4 du tome 2, nous avons étudié le potentiel électrique, qui se calcule à partir du champ électrique :

$$V(\mathcal{P}) = -\int_{\mathcal{O}}^{\mathcal{P}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}\,. \tag{14.9}$$

Pour le champ magnétique, il existe un *potentiel magnétique*, qu'on appelle simplement le *potentiel vecteur* $\vec{\mathbf{A}}$**.** Ce vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ est obtenu à partir du champ magnétique par une intégrale semblable à la loi de Biot-Savart, en remplaçant le courant par le champ magnétique :

$$\vec{\mathbf{A}}(\mathcal{P}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{\text{volume}} \frac{\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{u}}_r}{r^2}\, dV\,, \tag{14.10}$$

où le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_r$ est orienté de l'élément de volume dV vers le point $\mathcal{P}$. Il est possible de calculer les champs à partir des potentiels en calculant des dérivées :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\left(\vec{\boldsymbol{\imath}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\boldsymbol{\jmath}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)V - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}V - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \tag{14.11}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \left(\vec{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \right) \times \vec{\mathbf{A}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}\,, \tag{14.12}$$

où $\vec{\nabla}$ est un opérateur vectoriel appelé *nabla* :

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\vec{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \right). \tag{14.13}$$

L'expression $\vec{\nabla} V$ est appelée le *gradient* de V alors que l'expression $\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}$ est appelée le *rotationnel* de $\vec{\mathbf{A}}$.

À la section 4.7 du tome 2, nous avons obtenu le premier terme du membre de droite de l'équation 14.11 en étudiant le champ électrique statique. Le deuxième terme s'ajoute pour obtenir le champ électrique induit par un champ magnétique variable, ce qui est équivalent à un potentiel vecteur variable. Donc, la formulation des potentiels permet de remplacer les deux vecteurs $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ par un scalaire V et un vecteur $\vec{\mathbf{A}}$.

Au chapitre 4 du tome 2, nous avons vu qu'on peut changer le point de référence $\mathcal{O}$, où le potentiel V est nul, sans changer le champ électrique. Ceci correspond à ajouter une constante au potentiel. Comme le champ électrique et le champ magnétique sont calculés par une dérivée des potentiels, on peut ajouter une constante au potentiel V ou au potentiel vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ sans changer les champs électrique et magnétique, donc sans changer les résultats physiques. Pour des champs qui varient dans le temps, on peut faire les transformations suivantes sans changer les champs $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$:

$$V \to V' = V - \frac{\mathrm{d}\theta(\vec{\mathbf{r}},\, t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{\mathbf{A}} \to \vec{\mathbf{A}}' = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\nabla}\theta(\vec{\mathbf{r}},\, t)\,, \tag{14.14}$$

où $\theta(\vec{\mathbf{r}},\, t)$ est une fonction quelconque qui dépend de $\vec{\mathbf{r}}$ et t. Cette transformation est appelée une *transformation de jauge locale*, car on utilise une fonction $\theta(\vec{\mathbf{r}},\, t)$ qui change d'un point à l'autre de l'espace-temps. Donc, le champ électromagnétique est invariant sous une transformation de jauge locale.

FIGURE 14.7
Emmy Noether (1882-1935), mathématicienne allemande

L'importance de la symétrie de jauge est liée à un théorème découvert par la mathématicienne allemande Emmy Noether (*voir la figure 14.7*). Elle a montré que lorsqu'une théorie possède une symétrie continue, il y a une quantité conservée. C'est le *théorème de Noether*. Par exemple, les lois de la physique sont les mêmes pour tous les points de l'espace. On dit que les lois ont une symétrie de translation. Le théorème de Noether implique alors que la quantité de mouvement est conservée. De même, le principe de conservation de l'énergie découle de l'invariance par rapport au temps, et la conservation du moment cinétique découle de la symétrie sous une rotation.

La conservation de la charge

L'invariance de jauge de la théorie électromagnétique implique que la charge électrique est conservée dans un système fermé.

La symétrie précédente s'applique au champ électromagnétique de la théorie classique de Maxwell. Dans le cas d'une théorie quantique de l'électromagnétisme,

l'invariance sous la transformation 14.14 est respectée seulement si, en même temps, le champ $\psi(\vec{\mathbf{r}}, t)$, qui représente l'électron, subit la transformation de jauge locale suivante :

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\theta(\vec{\mathbf{r}},t)/\hbar}\,\psi\,, \tag{14.15}$$

où $q = -e$ est la charge de l'électron. Pour l'électron, la transformation de jauge correspond à un changement de phase différent pour chaque point de l'espace. De plus, la seule interaction possible entre le photon et l'électron qui est invariante sous la transformation de jauge est l'interaction représentée par le sommet de la figure 14.8.

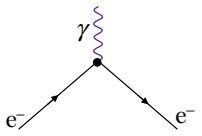


FIGURE 14.8
Le seul sommet respecte l'invariance de jauge

La symétrie de jauge est essentielle à la formulation d'une théorie des champs quantiques. La symétrie de jauge impose le type d'interaction possible entre un fermion et un photon. La théorie est appelée l'*électromagnétique quantique*, et les potentiels V et $\vec{\mathbf{A}}$ sont représentés par un champ de jauge (V, $\vec{\mathbf{A}}$), dont l'excitation correspond à un photon.

14.7 L'interaction électromagnétique

La théorie relativiste quantique de l'électromagnétisme qui traite du champ électromagnétique comme un champ quantifié est appelée l'*électrodynamique quantique* ou simplement QED pour *quantum electrodynamics*. Cette théorie est basée sur l'invariance de jauge du champ électromagnétique. L'interaction entre les fermions chargés s'effectue par l'entremise de l'échange de photons. L'élément de base des interactions est le sommet fermion-fermion-photon, représenté à la figure 14.9. À partir de ce sommet, on peut tracer les différents diagrammes de Feynman pour représenter les interactions entre les particules chargées et les photons.

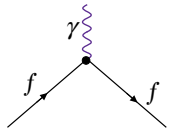


FIGURE 14.9
Le sommet de base en électrodynamique quantique

Le photon n'a pas de charge électrique, ni de saveur. La charge électrique doit être conservée, et l'interaction électromagnétique ne peut pas changer une particule en une autre. Par contre, une paire fermions-antifermions peut s'annihiler en produisant un photon virtuel, qui peut ensuite créer une paire. Par exemple, la figure 14.10 montre le diagramme associé à la création d'une paire muon-antimuon à partir d'une paire électron-positron :

$$e^- + e^+ \rightarrow \mu^+ + \mu^-\,.$$

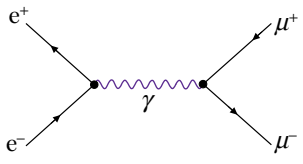


FIGURE 14.10
La création d'une paire muon-antimuon à partir de l'annihilation d'une paire électron-positron

Cette création de paire est possible si l'énergie cinétique initiale de l'électron et du positron est suffisamment grande pour qu'elle soit convertie en énergie au repos, selon la valeur de l'énergie au repos de la paire muon-antimuon. De cette façon, il est possible de produire des paires particule-antiparticule. En effet, les principes de conservation (charge, nombre leptonique, nombre baryonique) sont respectés, étant donné que les particules et les antiparticules ont des charges opposées.

Dans un diagramme de Feynman, chaque sommet fait intervenir la valeur de la charge électrique de la particule. Pour les électrons et les muons, le diagramme de la figure 14.10 comprend deux sommets, ce qui fait que l'amplitude de probabilité associée à ce diagramme est proportionnelle à la constante de structure fine $\alpha = e^2/(4\pi\hbar c) = 1/137$, où la constante de structure fine a été définie à la section 12.12. L'effet physique résultant est calculé en mettant au

carré l'amplitude, ce qui fait que la production d'une paire muon-antimuon est proportionnelle à α^2.

À la figure 14.5, nous avons vu qu'il y a des processus plus complexes, avec plusieurs émissions et absorptions de photons, et avec les créations de paire. Ces processus font intervenir quatre sommets, ce qui ajoute à l'amplitude de probabilité des termes d'ordre α^2. Ces termes permettent d'obtenir un résultat plus précis.

L'électrodynamique quantique permet aussi de calculer avec une très grande précision les caractéristiques de l'électron qui interagit avec le proton dans un atome d'hydrogène. Il est possible par exemple de calculer le moment magnétique de l'électron, ce qui permet d'obtenir une mesure très précise du facteur g de l'électron (*voir l'équation 12.49*). De plus, ce facteur peut être mesuré avec une très grande précision. La valeur actuelle de $g/2$ est

$$g/2 = 1{,}001\,159\,652\,180\,73 \pm 0{,}000\,000\,000\,000\,28 \qquad \text{(mesurée)}$$

$$g(\alpha)/2 = 1{,}001\,159\,652\,177\,6 \pm 0{,}000\,000\,000\,005\,2 \qquad \text{(calculée)}\ .$$

La valeur calculée à partir de l'électrodynamique quantique concorde avec la valeur expérimentale, avec une très grande précision. Ce résultat fait que l'électrodynamique quantique est considérée comme la théorie la plus précise dans toute la science.

EXEMPLE 14.3 La production d'une paire de muons

Des électrons et des positrons sont accélérés pour produire une paire muon-antimuon. Les électrons et les positrons ont une énergie de 120 MeV chacun, et la collision est une collision frontale.

a. Quel est le module de la vitesse des muons lorsqu'ils sont créés ?

b. Quelle distance parcourent-ils dans le laboratoire avant de se désintégrer ?

SOLUTION a.

Illustrer la situation

La figure 14.11 montre le schéma de la situation pour la situation initiale et la situation finale.

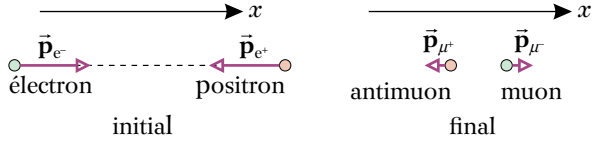


FIGURE 14.11
Schéma de la situation pour l'exemple 14.3a

Décortiquer le problème

Les masses des particules et la durée de vie moyenne du muon sont données au tableau 14.1.

Connues	Inconnues
$m_e = 0{,}5110\ \text{MeV}/c^2$	v_μ
$m_\mu = 105{,}7\ \text{MeV}/c^2$	d
$E_{e^-} = E_{e^+} = 120\ \text{MeV}$	
$\tau = 2{,}197 \times 10^{-6}\ \text{s}$	

Identifier la clé

La première **clé** est que l'énergie est conservée :

$$E_{e^-} + E_{e^+} = E_{\mu^-} + E_{\mu^+}\ . \qquad \text{(i)}$$

La deuxième **clé** est que la quantité de mouvement est conservée. Comme le positron et l'électron ont la même énergie et la même masse, et que la collision est frontale, la quantité de mouvement du système est nulle :

$$\vec{\mathbf{p}}_{e^-} + \vec{\mathbf{p}}_{e^+} = \vec{\mathbf{p}}_{\mu^-} + \vec{\mathbf{p}}_{\mu^+} = \vec{\mathbf{0}} \,. \qquad \text{(ii)}$$

L'équation (ii) implique que le muon et l'antimuon ont des quantités de mouvement de même module et d'orientation opposée. De plus, ils ont la même énergie :

$$E_{\mu^-} = E_{\mu^+} \,, \qquad \text{(iii)}$$

car ils ont la même masse. La troisième **clé** est l'équation de l'énergie totale relativiste d'une particule (*voir l'équation 9.46 de la page 332*) :

$$E_{\mu^-} = \gamma_p m_\mu c^2 \,, \qquad \text{(iv)}$$

où γ_p est le facteur de Lorentz du muon :

$$\gamma_p = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,. \qquad \text{(v)}$$

Résoudre le problème

Nous calculons d'abord l'énergie totale relativiste du muon à l'aide des équations (i) et (iii) :

$$E_{\mu^-} = \frac{E_{e^-} + E_{e^+}}{2} = \frac{120 \text{ MeV} + 120 \text{ MeV}}{2} = 120 \text{ MeV} \,. \qquad \text{(vi)}$$

Ceci permet de calculer le facteur de Lorentz du muon à l'aide de l'équation (iv) :

$$\gamma_p = \frac{E}{m_\mu c^2} = \frac{120 \text{ MeV}}{105{,}7 \text{ MeV}} = 1{,}135 \,. \qquad \text{(vii)}$$

Il ne reste qu'à isoler v dans l'équation (v) :

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_p^2}}\, c = \sqrt{1 - \frac{1}{(1{,}135)^2}}\, c = 0{,}473\, c \,. \qquad \text{(réponse)}$$

SOLUTION b.

Illustrer la situation

La figure 14.12 illustre le schéma de la situation, avec le point où le muon est créé et le point où le muon se désintègre.

FIGURE 14.12
Le schéma de la situation pour l'exemple 14.3b

Décortiquer le problème

Comme le montre la figure 14.12, le temps mesuré dans le laboratoire est un temps dilaté, car on a besoin de deux horloges pour mesurer ce temps, alors que la durée de vie moyenne est un temps propre. Donc,

$$\Delta t_{lab} = \gamma_p \Delta\tau = \gamma_p \tau \,. \qquad \text{(viii)}$$

Identifier la clé

La **clé** est que le muon se déplace à vitesse constante, ce qui permet de calculer la distance parcourue :

$$d = v\, \Delta t_{lab} = \gamma_p v \tau \,. \qquad \text{(ix)}$$

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs :

$$d = 1{,}135 \times 0{,}473 \times 2{,}998 \times 10^8 \text{ m/s} \times 2{,}197 \times 10^{-6} \text{ s}$$
$$d = 354 \text{ m} \,. \qquad \text{(réponse)}$$

Valider la réponse

Le module de la vitesse est plus faible que le module de la vitesse de la lumière, comme il se doit. La distance parcourue par le muon est suffisamment grande pour que les muons puissent être détectés directement, avant leur désintégration.

14.8 La couleur et l'interaction forte

L'interaction forte est une interaction entre les quarks et les gluons. Les leptons, comme l'électron et le neutrino électronique, ne sont pas soumis à cette interaction. Pour décrire cette interaction, il faut ajouter une charge d'interaction forte qu'on appelle la *couleur*. Cette charge vient en trois formes, soit *rouge* (r), *vert* (v) et *bleu* (b). Donc, chaque saveur de quark peut avoir l'une des trois couleurs.

Les antiquarks, quant à eux, possèdent une charge opposée, qu'on appelle une anticouleur, soit antirouge ($\bar{r}$), antivert ($\bar{v}$) ou antibleu ($\bar{b}$).

MISE EN GARDE

Le terme *couleur* n'a rien à voir avec le spectre électromagnétique. C'est seulement un mot qui représente les trois variétés de charges liées à l'interaction forte. Nous verrons bientôt pourquoi ce nom a été choisi.

Pour obtenir une théorie valable de l'interaction forte, on se base sur l'électrodynamique quantique. On obtient une théorie quantique qui inclut une symétrie de jauge. Cette symétrie est plus complexe que la symétrie énoncée à la section 14.6. Le champ de jauge est appelé le *champ de gluon*, et la quantité conservée est la couleur. Cette théorie est appelée la *chromodynamique quantique*, ou simplement QCD (pour *quantum chromodynamics*).

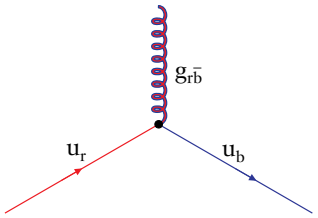


FIGURE 14.13
Un sommet quark-quark-gluon

L'interaction entre deux quarks s'effectue par l'échange d'un gluon g. La figure 14.13 illustre un sommet, où un quark u_r émet un gluon en changeant de couleur. Il devient un quark u_b. Comme la couleur est conservée, le gluon doit transporter une couleur et une anticouleur. Dans la figure 14.13, le gluon est un gluon rouge-antibleu ($g_{r\bar{b}}$). Il existe d'autres sommets, qui font intervenir des quarks ayant des couleurs différentes. La symétrie de jauge implique que la grandeur de l'interaction est la même, quelle que soit la couleur du quark initial.

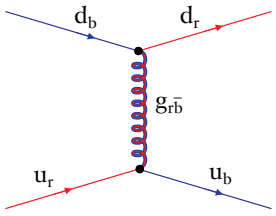


FIGURE 14.14
L'interaction entre deux quarks se produit par l'échange d'un gluon.

À partir de deux sommets, on peut décrire l'interaction entre deux quarks. La figure 14.14 montre la diffusion d'un quark u_r et d'un quark d_b : un quark rouge émet un gluon rouge-antibleu et change de couleur pour devenir bleu. Le gluon est ensuite absorbé par un quark bleu, qui devient rouge.

Contrairement au photon qui n'a pas de charge électrique, le gluon possède une couleur et une anticouleur. Comme il y a trois couleurs et trois anticouleurs, on pourrait penser qu'il y a neuf gluons différents. En fait, il y a huit gluons. Le gluon change donc la couleur d'un quark, mais il ne change pas la saveur du quark : un quark u ne peut pas devenir un quark d en absorbant un gluon. Comme le photon, un gluon peut créer une paire quark-antiquark, comme le montre la figure 14.15 qui illustre le processus :

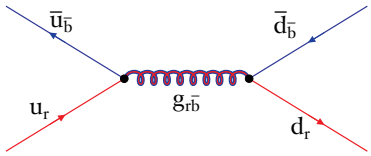


FIGURE 14.15
L'annihilation d'une paire $u\bar{u}$ qui crée une paire $d\bar{d}$

$$u_r + \bar{u}_{\bar{b}} \rightarrow g_{r\bar{b}} \rightarrow d_r + \bar{d}_{\bar{b}} \ .$$

Comme le gluon est coloré, il peut interagir directement avec d'autres gluons. Un gluon peut donc émettre ou absorber un gluon, comme le montre la figure 14.16a. Il est aussi possible d'avoir une interaction directe entre deux gluons dans un sommet à quatre gluons, comme le montre la figure 14.16b.

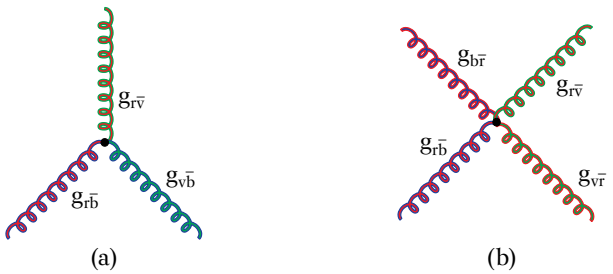


FIGURE 14.16
(a) Le sommet de trois gluons ; (b) le sommet de quatre gluons.

Une autre grande différence entre l'interaction forte et l'interaction électromagnétique vient de la grandeur de l'interaction. Dans le cas de l'interaction électromagnétique, la constante de couplage est la constante de structure fine $\alpha = 1/137$. Cette constante est très faible, de telle sorte que les processus faisant intervenir plusieurs sommets (avec plusieurs émissions et absorptions de photons) produisent des contributions beaucoup plus faibles. Dans le cas de l'interaction forte, la constante de couplage $\alpha_f \approx 1$, de telle sorte que les processus avec beaucoup d'émissions et d'absorptions de gluons sont aussi importants que le processus simple comme celui de la figure 14.14.

Le confinement et la liberté asymptotique

Les particules qu'on observe, comme les protons et les pions, sont des états liés de quarks. Ces états sont sans couleur, c'est-à-dire qu'ils contiennent un quark de chaque couleur (rouge + vert + bleu = blanc) ou une paire quark-antiquark de couleurs complémentaires (rouge + antirouge = noir). C'est à cause de ces groupements que la charge de l'interaction forte est appelée la couleur. Mais pourquoi n'obtient-on pas de quark libre ? La théorie de la chromodynamique quantique doit expliquer ce fait expérimental.

On peut de nouveau comparer l'électromagnétisme et l'interaction forte. La figure 14.17a montre un dipôle électrique (une charge électrique $+q$ et une charge électrique opposée $-q$), que nous avons étudié dans le tome 2. Le champ électrique est plus intense entre les deux charges, mais il y a des lignes de champ électrique qui vont jusqu'à l'infini. La figure 14.17b montre l'équivalent pour l'interaction forte : un quark q et un antiquark $\bar{q}$, avec une couleur opposée. Étant donné que les gluons interagissent entre eux, et que cette interaction est très intense, les lignes de champ de couleur sont uniquement présentes entre la paire quark-antiquark. La couleur est *confinée* dans un *tube de flux coloré* entre les deux éléments de la paire.

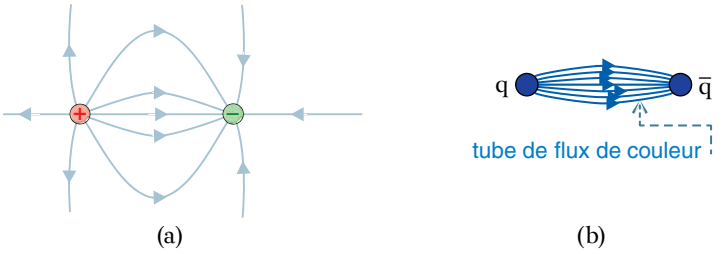


FIGURE 14.17
(a) Pour un dipôle électrique, les lignes de champ électrique s'étendent jusqu'à l'infini. (b) Pour une paire quark-antiquark, les lignes de champ de couleur forment un tube de flux de couleur.

Supposons qu'on donne une grande quantité de mouvement au quark q (à gauche), comme l'illustre la figure 14.18a, pour obtenir un quark isolé. Cela peut être effectué à l'aide d'une collision avec un électron qui a une très grande énergie cinétique. En s'éloignant, le quark *étire* le tube de flux, comme le montre la figure 14.18b. L'énergie peut alors être suffisante pour créer une nouvelle paire quark-antiquark (*voir la figure 14.18c*). Le résultat obtenu est deux états liés quark-antiquark, et non un quark et un antiquark libres.

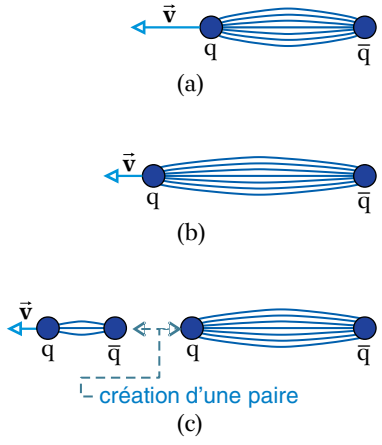


FIGURE 14.18
Un quark se déplace à grande vitesse, ce qui étire le tube de flux de couleur, jusqu'à ce qu'une paire quark-antiquark soit formée.

De façon équivalente, on peut modéliser le tube de flux comme une corde qui peut être étirée. L'énergie potentielle associée au système peut s'écrire :

$$U_{\text{couleur}} = kr\,, \tag{14.16}$$

avec k, une constante de proportionnalité.

On peut se demander comment les quarks se comportent à très petites distances, ou de façon équivalente, lorsqu'on utilise une très grande énergie. Dans ce cas, l'énergie potentielle devient très faible : l'interaction entre les quarks devient très faible. Cette caractéristique est appelée la *liberté asymptotique*. Donc, à très haute énergie, les quarks et les gluons devraient être libres. Cet état est appelé le *plasma quark-gluon*.

14.9 Les hadrons

À cause du confinement de la couleur, il est impossible d'observer un quark ou un gluon de façon isolée. L'interaction forte entre deux quarks augmente avec la distance. Par contre, il est possible de combiner les quarks dans des états liés qui sont sans couleur. On obtient alors les hadrons :

À de grandes distances, la couleur est confinée. Seules les particules composites sans couleur peuvent exister. On appelle ces particules, des *hadrons*.

Il y a plusieurs façons de combiner des quarks de telle sorte que la particule résultante soit sans couleur. En combinant trois quarks de couleurs différentes, on obtient un *baryon*. Le proton et le neutron sont des exemples de baryons. De même, en combinant trois antiquarks ayant des anticouleurs différentes, on obtient un antibaryon, ce qui correspond à une antiparticule associée à un baryon. Il est aussi possible de grouper un quark et un antiquark ayant des couleurs complémentaires (comme rouge et antirouge). Ces états sont appelés des *mésons*, car les mésons les moins massifs ont des masses entre celle du proton et celle de l'électron. En théorie, il est possible de combiner un plus grand nombre de quarks, par exemple trois quarks de couleurs différentes et une paire quark-antiquark de couleur complémentaire. Ces *pentaquarks* ont été annoncés par certains groupes de recherche, mais leur existence réelle demeure spéculative.

Les quarks qui composent les hadrons peuvent être divisés en deux catégories. Les *quarks de valence* sont des quarks qui sont toujours présents à l'intérieur du hadron. Par exemple, le proton possède continuellement deux quarks u et un quark d. En même temps, l'interaction forte entre les quarks produit continuellement des gluons, qui génèrent des paires quark-antiquark, qui s'annihilent et se recréent. Ces derniers quarks forment la *mer de quarks*. Toutes les saveurs de quarks sont présentes dans la mer de quarks.

L'interaction forte et l'interaction électromagnétique ne changent pas la saveur des quarks. Ces interactions peuvent produire des paires quark-antiquark, qui peuvent ensuite former des particules composites différentes. Pour cette raison, il est utile de comptabiliser le nombre de saveurs de quarks par des nombres quantiques. Le tableau 14.4 présente ces nombres quantiques, avec leur nom. Les antiquarks ont des nombres quantiques opposés. Par exemple, le quark s a une étrangeté $S = -1$ et l'antiquark $\bar{s}$ a une étrangeté $S = +1$.

Étant donné que les quarks u et d ont des masses très semblables, ils ont été regroupés dans un doublet d'*isospin* $I = 1/2$. En effet, la combinaison de ces quarks en un vecteur isospin $\vec{\mathbf{I}}$ a les mêmes propriétés mathématiques que la combinaison des états de spins $\vec{\mathbf{S}}$ des électrons. Le quark u a alors une composante $I_3 = 1/2$ (un isospin « vers le haut ») et le quark d a une composante $I_3 = -1/2$ (un isospin « vers le bas »). L'origine du nom de ces quarks est d'ailleurs

TABLEAU 14.4

Les nombres quantiques associés à la saveur des quarks

Quark	Nom	Valeur
u	Isospin	$I_3 = +1/2$
d	Isospin	$I_3 = -1/2$
c	Charme	$C = +1$
s	Étrangeté	$S = -1$
b	Beauté	$\tilde{B} = -1$

liée à cette nomenclature. Pour des raisons historiques, les quarks ayant une charge électrique négative (d, s, et b) ont un nombre quantique associé négatif.

Donc, l'interaction forte et l'interaction électromagnétique conservent ces nombres quantiques. Nous verrons à la section 14.10 que l'interaction faible peut changer la saveur des quarks, ce qui produit la désintégration des quarks plus massifs. Par exemple, les hadrons qui contiennent un quark s peuvent être créés par l'interaction forte en même temps qu'un hadron qui possède l'antiquark $\bar{s}$. Ces deux particules ne peuvent se désintégrer que par l'interaction faible, et elles ont une durée de vie moyenne plus longue. C'est pour cette raison qu'on les a appelées les *particules étranges,* et que le troisième quark le moins massif est le quark strange.

MISE EN GARDE

Il faut faire attention à ne pas mélanger le spin $\vec{\mathbf{S}}$ et le nombre quantique d'étrangeté S. De même, on utilise B pour le nombre baryonique et $\tilde{B}$ pour le nombre quantique de beauté. De plus, l'isospin a la même structure mathématique que le spin, mais il n'y a pas de propriété magnétique ou de principe d'exclusion associé à l'isospin.

REMARQUE

Il n'est pas nécessaire d'ajouter un nombre quantique pour compter le nombre de quarks t, car ce dernier a une durée de vie si courte ($\tau \sim 10^{-25}$ s), qu'il n'a pas le temps d'être lié à d'autres quarks pour former un hadron.

Les mésons

Un *méson* est un hadron constitué d'un quark et d'un antiquark de couleurs complémentaires. L'antiparticule d'un méson est aussi un méson. Étant donné que les quarks ont un spin $s = 1/2$, le résultat est une particule composite dont le spin résultant est un entier. Les mésons sont donc des bosons.

Tous les mésons sont instables, et ils se désintègrent en moins d'une microseconde. Les mésons les moins massifs sont appelés les *pions* (π^+, π^0 π^-), et ils ont une masse d'environ 140 MeV/c^2. Ils ont été découverts dans les rayons cosmiques en haute altitude en 1947. Le pion neutre se désintègre très rapidement en produisant deux rayons gamma :

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma \qquad (\tau = 8{,}5 \times 10^{-17} \text{ s}) .$$

Cette désintégration est produite par l'interaction électromagnétique. Les pions chargés ne peuvent pas se désintégrer en rayons gamma, car cela ne respecte pas la conservation de la charge. Comme leur masse est plus grande que celle du muon, ils se désintègrent principalement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \end{aligned} \qquad (\tau = 2{,}6 \times 10^{-8}\ \text{s}).$$

Ces désintégrations se produisent par l'entremise de l'interaction faible. Pour cette raison, la durée de vie moyenne est beaucoup plus longue que dans le cas du π^0.

On étudie d'abord les mésons formés des quarks u, d et s et les antiquarks correspondants, car ces quarks ont les plus faibles masses. En combinant deux particules différentes de spin $s = 1/2$, il est possible d'obtenir une particule de spin résultant $s = 0$, (l'orientation du spin du quark est opposée à l'orientation du spin de l'antiquark) ou une particule ayant un spin $s = 1$ (avec les spins du quark et de l'antiquark orientés dans le même sens). Les mésons dont le spin est nul sont appelés les *mésons pseudo-scalaires,* alors que les mésons dont le spin est égal à 1 sont appelés les mésons vectoriels. Le tableau 14.5 donne les caractéristiques des principaux mésons pseudo-scalaires.

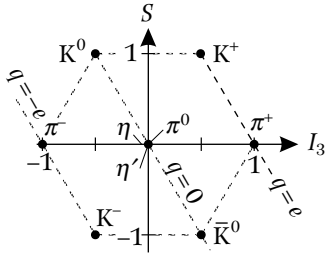


FIGURE 14.19
Les mésons composés des quarks u, d et s, et des antiquarks correspondants

On peut regrouper les mésons pseudo-scalaires dans un graphique de l'étrangeté en fonction de la composante de l'isospin, comme le montre la figure 14.19. Avec trois types de quarks et trois types d'antiquarks, on obtient neuf mésons pseudo-scalaires. Ces mésons se regroupent dans un octet (un groupe de huit particules) et un singleton. Remarquez qu'il y a trois particules à l'origine, avec $S = I_3 = 0$. Ces particules sont leur propre antiparticule, car tous les nombres quantiques sont nuls. Leur durée de vie est très courte. Pour ces mésons, les quarks de valence sont l'une des combinaisons linéaires indépendantes des trois paires quark-antiquark opposées, comme l'indique le tableau 14.5.

Étant donné que les mésons sont des états liés de quarks, les quarks de valence peuvent être dans des états excités, avec un moment cinétique $L \neq 0$. Ces états excités, qu'on appelle des *résonances*, ont des masses plus élevées, comme il se doit, selon l'équation 9.47 de la page 332. De plus, la durée de vie moyenne de ces états est très courte : les états se désexcitent par l'entremise de l'interaction forte, en des états de plus petite masse.

Les mésons qui contiennent des quarks c ou b ont une plus grande masse et une durée de vie moyenne plus courte, comme le montre le tableau 14.5. Les mésons qui ont un nombre quantique de charme ou un nombre quantique de beauté non nulle ne peuvent pas se désintégrer par l'entremise de l'interaction forte ; ils se désintègrent par l'interaction faible.

i+ Pour plus d'information sur les mésons pseudo-scalaires, voir le site du Particle Data Group.

TABLEAU 14.5

Les principaux mésons pseudo-scalaires

Nom	Symbole	Quarks	M (MeV/c^2)	τ (s)	I_3	S	C	$\tilde{B}$
Pion	π^+	$u\bar{d}$	139,570	$2{,}603 \times 10^{-8}$	+1	0	0	0
Pion	π^-	$d\bar{u}$	139,570	$2{,}603 \times 10^{-8}$	–1	0	0	0
Pion	π^0	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	134,977	$8{,}5 \times 10^{-17}$	0	0	0	0
Êta	η	$(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$	547,86	$5{,}0 \times 10^{-19}$	0	0	0	0
Êta prime	η'	$(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})/\sqrt{3}$	957,8	$3{,}3 \times 10^{-21}$	0	0	0	0
Kaon	K^+	$u\bar{s}$	493,68	$1{,}238 \times 10^{-8}$	+1/2	+1	0	0
Kaon	K^-	$s\bar{u}$	493,68	$1{,}238 \times 10^{-8}$	–1/2	–1	0	0
Kaon	K^0	$d\bar{s}$	497,61	K^0_S: $8{,}95 \times 10^{-10}$	–1/2	+1	0	0
Kaon	$\bar{K}^0$	$s\bar{d}$	497,61	K^0_L: $5{,}11 \times 10^{-8}$	+1/2	–1	0	0
Méson D	D^+	$c\bar{d}$	1 869,6	$1{,}04 \times 10^{-12}$	+1/2	0	+1	0
Méson D	D^-	$d\bar{c}$	1 869,6	$1{,}04 \times 10^{-12}$	–1/2	0	–1	0
Méson D	D^0	$c\bar{u}$	1 864,9	$4{,}10 \times 10^{-13}$	–1/2	0	+1	0
Méson D	$\bar{D}^0$	$u\bar{c}$	1 864,9	$4{,}10 \times 10^{-13}$	+1/2	0	–1	0
Méson D_s	D_s^+	$c\bar{s}$	1 968,5	$5{,}0 \times 10^{-13}$	0	+1	+1	0
Méson D_s	D_s^-	$s\bar{c}$	1 968,5	$5{,}0 \times 10^{-13}$	0	–1	–1	0
J/psi	J/ψ	$c\bar{c}$	3 096,9	$7{,}1 \times 10^{-21}$	0	0	0	0
Méson B	B^+	$u\bar{b}$	5 279	$1{,}641 \times 10^{-12}$	+1/2	0	0	+1
Méson B	B^-	$b\bar{u}$	5 279	$1{,}641 \times 10^{-12}$	–1/2	0	0	–1
Méson B	B^0	$d\bar{b}$	5 280	$1{,}52 \times 10^{-12}$	–1/2	0	0	+1
Méson B	$\bar{B}^0$	$b\bar{d}$	5 280	$1{,}52 \times 10^{-12}$	+1/2	0	0	–1
Upsilon	Υ	$b\bar{b}$	9 460	$1{,}2 \times 10^{-20}$	0	0	0	0

Source : J. Beringer *et al.* (Particle Data Group), Phys. Rev. D86, 010001 (2012) and 2013 partial update for the 2014 edition.

EXEMPLE 14.4 La désintégration du pion

Un pion π^- se désintègre en émettant un antineutrino et en se transformant en muon :

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu .$$

Calculez l'énergie cinétique du muon et de l'antineutrino muonique dans le référentiel propre du pion.

SOLUTION

Illustrer la situation

La figure 14.20 illustre le schéma de la situation initiale et de la situation finale. L'axe des x est orienté dans la direction du mouvement des particules.

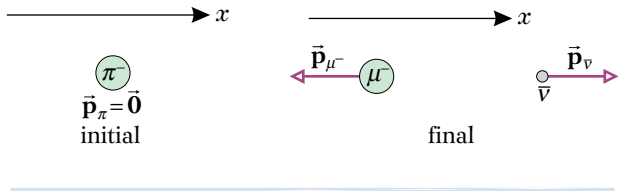


FIGURE 14.20
Schéma de la situation pour l'exemple 14.4

Décortiquer le problème

La masse du pion est donnée au tableau 14.5 et celle du muon, au tableau 14.1. La masse de l'antineutrino muonique est négligeable. Le pion est au repos avant la désintégration, car nous considérons son référentiel propre.

Connues	Inconnues
$m_\mu = 105{,}7\ \text{MeV}/c^2$	K_μ
$m_\pi = 139{,}57\ \text{MeV}/c^2$	$K_{\bar{\nu}}$
$m_{\bar{\nu}} = 0{,}00\ \text{MeV}/c^2$	
$\vec{\mathbf{p}}_\pi = \vec{\mathbf{0}}\ \text{MeV}/c$	

Identifier la clé

La première **clé** est le principe de conservation de l'énergie :

$$E_{0,\pi} = E_\mu + E_{\bar{\nu}}\,, \tag{i}$$

où l'énergie du pion est simplement son énergie au repos ($E_{0,\pi} = m_\pi c^2 = 139{,}57$ MeV). La deuxième **clé** est le principe de conservation de la quantité de mouvement :

$$p_{\pi,x} = p_{\mu,x} + p_{\bar{\nu},x} = 0\,. \tag{ii}$$

La troisième **clé** est la relation qui relie l'énergie et la quantité de mouvement dans le cas de particules relativistes (*voir l'équation 9.49 de la page 333*) :

$$E_0^2 = E^2 - (pc)^2\,, \tag{iii}$$

où E est l'énergie totale relativiste, qui permet de calculer l'énergie cinétique d'une particule :

$$E = E_0 + K \Rightarrow K = E - E_0\,. \tag{iv}$$

Résoudre le problème

L'antineutrino a une masse négligeable, ce qui fait que son énergie au repos est nulle et que le module de sa quantité de mouvement est, selon l'équation (iii),

$$E_{\bar{\nu}} = K_{\bar{\nu}} = p_{\bar{\nu}} c\,. \tag{v}$$

Nous pouvons exprimer l'énergie de l'antineutrino en fonction de l'énergie totale du muon à l'aide de l'équation (i) :

$$E_{\bar{\nu}} = E_{0,\pi} - E_\mu\,. \tag{vi}$$

Selon l'équation (ii), la quantité de mouvement du muon est simplement l'opposé de la quantité de mouvement de l'antineutrino :

$$p_{\mu,x} = -p_{\bar{\nu},x} = -\frac{E_{\bar{\nu}}}{c} = -\frac{E_{0,\pi} - E_\mu}{c}\,, \tag{vii}$$

où nous avons utilisé les équations (v) et (vi). Il est ensuite possible de trouver E_μ en insérant l'équation (vii) dans l'équation (iii) appliquée au muon :

$$\begin{aligned} E_{0,\mu}^2 &= E_\mu^2 - (E_{0,\pi} - E_\mu)^2 \\ &= E_\mu^2 - E_{0,\pi}^2 + 2E_{0,\pi}E_\mu - E_\mu^2 \\ E_\mu &= \frac{E_{0,\mu}^2 + E_{0,\pi}^2}{2E_{0,\pi}} \\ &= \frac{(105{,}7\ \text{MeV})^2 + (139{,}57\ \text{MeV})^2}{2 \times 139{,}57\ \text{MeV}} \\ E_\mu &= 109{,}8\ \text{MeV}\,. \end{aligned} \tag{viii}$$

Nous calculons l'énergie cinétique du muon à l'aide de l'équation (iv) :

$$K = 109{,}8\ \text{MeV} - 105{,}7\ \text{MeV} = 4{,}1\ \text{MeV}\,.$$

(réponse)

Nous remplaçons finalement l'équation (viii) dans l'équation (vi) :

$$K_{\bar{\nu}} = E_{\bar{\nu}} = 139{,}57\ \text{MeV} - 109{,}8\ \text{MeV} = 29{,}8\ \text{MeV}\,.$$

(réponse)

Valider la réponse

Le neutrino a plus d'énergie cinétique que le muon, car sa masse est plus faible. On peut aussi vérifier que les deux particules ont des quantités de mouvement de même module.

Les baryons

Les baryons sont composés de trois quarks de couleurs différentes. Pour ces particules, on ajoute un nombre quantique, le nombre baryonique B, qui doit être conservé dans toutes les interactions. Le tableau 14.6 présente les propriétés des baryons principaux.

Le proton est le baryon dont la masse est la plus faible. Le proton n'a pas assez d'énergie au repos pour se désintégrer en un autre baryon. Comme le nombre baryonique doit être conservé, le proton est stable.

TABLEAU 14.6

Les principaux baryons

Nom	Quarks	M (MeV/c^2)	τ (s)	I_3	S	C	$\tilde{B}$	spin
p (proton)	uud	938,272 0	stable	+1/2	0	0	0	1/2
n (neutron)	udd	939,565 4	880	–1/2	0	0	0	1/2
Δ^{++}	uuu	1 232	$5{,}6 \times 10^{-24}$	+3/2	0	0	0	3/2
Δ^{+}	uud	1 232	$5{,}6 \times 10^{-24}$	+1/2	0	0	0	3/2
Δ^{0}	udd	1 232	$5{,}6 \times 10^{-24}$	–1/2	0	0	0	3/2
Δ^{-}	ddd	1 232	$5{,}6 \times 10^{-24}$	–3/2	0	0	0	3/2
Λ^{0}	uds	1 115,68	$2{,}63 \times 10^{-10}$	0	–1	0	0	1/2
Σ^{+}	uus	1 189,3	$8{,}02 \times 10^{-11}$	1	–1	0	0	1/2
Σ^{0}	uds	1 192,6	$7{,}4 \times 10^{-20}$	0	–1	0	0	1/2
Σ^{-}	dds	1 197,4	$1{,}48 \times 10^{-10}$	–1	–1	0	0	1/2
Ξ^{0}	uss	1 314,9	$2{,}90 \times 10^{-10}$	1/2	–2	0	0	1/2
Ξ^{-}	dss	1 321,7	$1{,}64 \times 10^{-10}$	–1/2	–2	0	0	1/2
Ω^{-}	sss	1 672,5	$8{,}2 \times 10^{-11}$	0	–3	0	0	3/2
Λ_c^{+}	udc	2 286,5	$2{,}0 \times 10^{-13}$	0	0	+1	0	1/2
Λ_b^{0}	udb	5 619	$1{,}43 \times 10^{-12}$	0	0	0	–1	1/2

Source : J. Beringer *et al.* (Particle Data Group), Phys. Rev. D86, 010001 (2012) and 2013 partial update for the 2014 edition.

Il est intéressant d'étudier les baryons constitués des trois quarks les moins massifs (u, d et s), en fonction du spin résultant. Lorsqu'on combine trois particules de spin $s = 1/2$, le spin résultant peut être égal à $s = 3/2$ (les trois vecteurs $\vec{\mathbf{S}}$ alignés) ou $s = 1/2$ (un des vecteurs $\vec{\mathbf{S}}$ opposé aux autres). Les configurations avec $s = 1/2$ sont celles pour lesquelles l'énergie au repos (donc la masse) est plus faible. On trace de nouveau l'étrangeté en fonction de la composante de l'isospin I_3 pour les baryons de spin $s = 1/2$. On obtient la figure 14.21 (*voir la page suivante*), qui présente un octet, c'est-à-dire un groupe de huit particules.

Les baryons de spin $s = 3/2$ se regroupent dans un décuplet en forme de triangle, comme le montre la figure 14.22 (*voir la page suivante*). Dans ce groupe de dix baryons, les particules ont une très courte durée de vie moyenne, car elles peuvent se désintégrer en baryon de spin $s = 1/2$ par l'interaction forte. La particule Ω^- est une exception. Étant donné qu'elle a une étrangeté $S = -3$, elle ne peut pas se désintégrer par l'interaction forte, car il n'y pas de particule moins massive avec cette étrangeté.

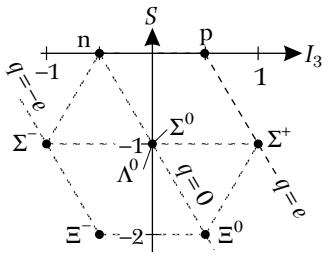


FIGURE 14.21
Les baryons de spin $s = 1/2$ se regroupent dans un octet.

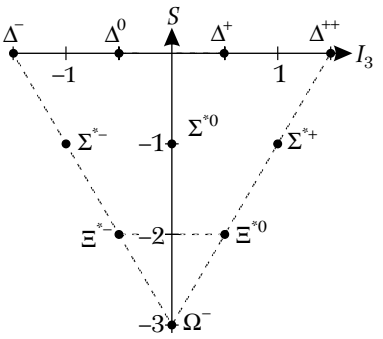


FIGURE 14.22
Les baryons de spin $s = 3/2$ se regroupent dans un décuplet.

EXEMPLE 14.5 La production de particules étranges

La réaction suivante permet de produire un méson et un baryon étranges :

$$\pi^- + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{K}^0 + \Lambda^0 .$$

a. Vérifiez que la composante I_3 est conservée.
b. Vérifiez que l'étrangeté est conservée.
c. Tracez le diagramme de Feynman de ce processus.

SOLUTION

Décortiquer le problème

Les valeurs des nombres quantiques des mésons sont données au tableau 14.5 et celles des baryons, au tableau 14.6.

	I_3	S
π^-	−1	0
p	+1/2	0
K^0	−1/2	+1
Λ^0	0	−1

SOLUTION a.

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs de I_3 pour chaque particule :

$$\pi^- + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{K}^0 + \Lambda^0$$

$$(I_3): \qquad -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 0 .$$

La composante I_3 est bien conservée dans cette réaction. (réponse)

SOLUTION b.

Résoudre le problème

Nous remplaçons les valeurs de l'étrangeté pour chaque particule :

$$\pi^- + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{K}^0 + \Lambda^0$$

$$(S): \qquad 0 + 0 = +1 + (-1) .$$

L'étrangeté est bien conservée dans cette réaction. (réponse)

SOLUTION c.

Décortiquer le problème

Les hadrons peuvent s'écrire en fonction de leurs quarks de valence :

$$\pi^- + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{K}^0 + \Lambda^0$$

$$(\mathrm{d}\bar{\mathrm{u}}) + (\mathrm{uud}) \rightarrow (\mathrm{d}\bar{\mathrm{s}}) + (\mathrm{uds}). \qquad \text{(i)}$$

Identifier la clé

La **clé** est que l'interaction forte peut produire une annihilation d'une paire quark-antiquark et la création d'une paire quark-antiquark.

Résoudre le problème

Dans l'équation (i), nous remarquons qu'il y a une paire u – $\bar{u}$ dans les particules initiales et une paire s – $\bar{s}$ dans les produits de la réaction. Il y a donc une annihilation de la paire u – $\bar{u}$ pour produire un gluon, qui crée ensuite la paire s – $\bar{s}$. Les autres quarks sont spectateurs. Le diagramme est présenté à la figure 14.23. Le choix des couleurs des quarks est arbitraire, tant que les particules initiales et finales sont sans couleur.

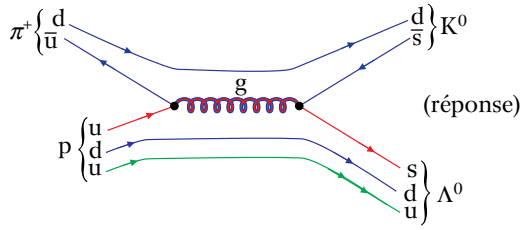


FIGURE 14.23
Le diagramme de Feynman pour l'exercice 14.5

Valider la réponse

La réaction est produite par l'interaction forte. Il n'y a pas de changement de saveur de quark.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 14.3

Indiquez si les réactions suivantes peuvent se produire au moyen de l'interaction forte.

a. $\Delta^{++} \rightarrow p^+ + \pi^+$

b. $\Sigma^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e$

c. $\Lambda_c^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$

La masse des hadrons

On peut expliquer qualitativement la masse des hadrons à partir de notions rencontrées en physique atomique et en physique nucléaire. Comme l'indique le tableau 14.1 de la page 516, la masse des quarks u et d est de 2,3 MeV/c^2 et de 4,8 MeV/c^2, alors que la masse du proton est de 938 MeV/c^2, ce qui correspond à une masse beaucoup plus grande que la somme des masses des constituants. Comme nous l'avons vu à la section 9.11, la masse d'un système de particules n'est pas égale à la somme des masses des constituants, car l'énergie interne contribue à l'énergie au repos.

Dans le cas des noyaux atomiques, l'énergie potentielle entre les protons et les neutrons est négative par rapport à l'énergie potentielle lorsque les nucléons sont séparés d'une distance infinie. Nous avons donc trouvé que la masse des noyaux est plus faible que la masse des constituants.

Dans le cas des quarks, on ne peut pas les séparer d'une distance infinie, car la couleur est confinée. La masse des quarks indiquée au tableau 14.1 est l'évaluation de la masse des quarks libres, c'est-à-dire dans des processus faisant intervenir une grande quantité d'énergie. Par rapport à cette situation, l'énergie potentielle des quarks à l'intérieur d'un proton est positive, selon l'équation 14.16. Par conséquent, l'énergie potentielle fait augmenter l'énergie au repos, donc la masse du proton. Étant donné qu'il y a une très grande différence entre la masse des quarks libres et la masse du proton, cela indique que

la majeure partie de la masse provient en fait de l'interaction entre les quarks et les gluons, et non de la masse des quarks de valence. De plus, dans la matière ordinaire, la masse vient principalement des protons et des neutrons. Cela veut dire que ce qu'on ressent à notre échelle comme de la masse vient de façon fondamentale de l'interaction entre les quarks et les gluons et de la célèbre équation $E_0 = mc^2$.

Il est aussi intéressant d'analyser la différence de masse entre les hadrons. Le neutron a une masse de 1,3 MeV/c^2 plus grande que celle du proton. Cette différence de masse s'explique principalement par la différence de masse entre le quark d et le quark u. En examinant le tableau 14.6, on remarque que les baryons de spin $s = 3/2$ ont une masse d'environ 300 MeV/c^2 plus grande que celle des baryons formés des mêmes quarks, mais de spin $s = 1/2$. Comparons par exemple le proton et la particule Δ^+ :

$$M_p = 938 \text{ MeV}/c^2$$
$$M_{\Delta^+} = 1\,232 \text{ MeV}/c^2 \ .$$

Ces deux baryons sont formés de deux quarks u et d'un quark d, mais avec des spins orientés de façon différente, comme le montre la figure 14.24. La différence de masse (donc d'énergie au repos) est engendrée par un mécanisme analogue à la différence d'énergie dans la structure hyperfine en physique atomique (*voir la section 12.7*).

Lorsqu'on combine trois quarks de spin $\vec{\mathbf{S}}_q$ (avec $s = 1/2$), il y a deux possibilités pour le spin total $\vec{\mathbf{S}}$ de la particule composite : les trois vecteurs spin sont dans le même sens et $s = 3/2$ (ce qui correspond à la particule Δ^+, comme le montre la figure 14.24b), ou l'un des spins est opposé aux autres spins (ce qui produit un proton, comme le montre la figure 14.24a).

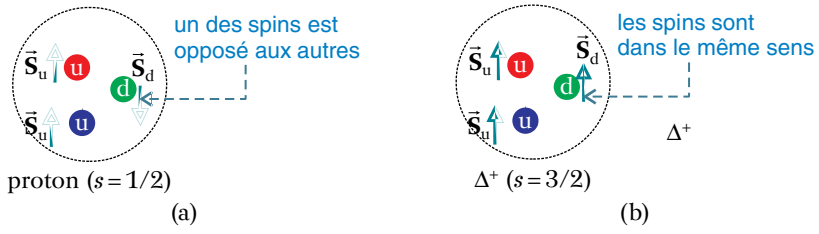


FIGURE 14.24

Deux particules constituées des quarks (uud) : (a) pour le proton, l'un des spins n'est pas aligné ; (b) pour la particule Δ^+, les trois spins sont alignés.

L'interaction forte est une interaction de jauge, comme l'interaction électromagnétique. On peut donc la décrire à l'aide d'un champ électrique de couleur et d'un champ magnétique de couleur, analogues aux champs étudiés dans le tome 2. Le champ magnétique de couleur engendre une force magnétique de couleur, qui dépend de l'orientation des spins des quarks, de la même façon que la force magnétique entre un proton et un électron dépend des spins de ces particules. Il est alors possible de montrer que la configuration avec les spins alignés engendre une énergie potentielle magnétique de couleur positive (ce qui fait augmenter la masse), alors que la configuration avec un spin opposé produit une énergie potentielle magnétique de couleur négative (ce qui fait diminuer la masse). Ceci est tout à fait équivalent à une configuration de trois barres aimantées placées côté à côte : l'énergie potentielle est plus grande lorsque les

trois moments magnétiques des barreaux aimantés sont dans le même sens. Le même argument s'applique aux autres hadrons : les hadrons ayant un spin plus petit ont une masse plus faible que les hadrons constitués des mêmes quarks et qui ont un spin plus élevé.

Pour calculer les masses de façon précise, on doit appliquer la chromodynamique quantique. Cette théorie est très complexe, et on ne peut pas calculer les masses de façon algébrique. Pour obtenir ces résultats, la *chromodynamique quantique sur réseau* a été développée. Dans cette théorie, les quarks ont une position discrète, comme les atomes dans un réseau cristallin. Cette théorie est une approximation de la théorie complète. On trouve la théorie complète en faisant tendre vers zéro la distance entre deux points du réseau.

Plusieurs équipes ont développé des algorithmes et des ordinateurs spécifiquement pour des calculs de la chromodynamique quantique sur réseau. Dans les dernières années, on a été capable de calculer la masse des hadrons de faible masse tout en contrôlant les incertitudes reliées aux calculs numériques et aux extrapolations nécessaires. Ces calculs sont compatibles avec les résultats expérimentaux, avec des incertitudes de l'ordre de 2 %, ce qui montre que la chromodynamique quantique est une théorie valable pour décrire l'interaction forte entre les quarks.

14.10 L'interaction faible

L'interaction faible est la seule interaction fondamentale qui change la saveur des particules, comme nous l'avons vu dans la désintégration β à la section 13.5. Ainsi, le neutron peut se désintégrer en proton en émettant un électron et un antineutrino électronique :

$$\begin{aligned} n &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \\ (udd) &\rightarrow (uud) + e^- + \bar{\nu}_e \,. \end{aligned}$$

Cette désintégration correspond à la transformation d'un quark d en un quark u :

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e \,. \tag{14.17}$$

L'interaction faible est aussi responsable de la désintégration du muon :

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \,. \tag{14.18}$$

Cette désintégration fait intervenir deux neutrinos : un neutrino muonique et un antineutrino électronique. Ces deux neutrinos sont différents. Cette désintégration montre qu'on doit définir un nombre leptonique associé à chaque génération : le nombre leptonique électronique $L_e = +1$ pour l'électron et le neutrino électronique, $L_\mu = +1$ pour le muon et le neutrino muonique et $L_\tau = +1$ pour le tauon et le neutrino tauique. Leurs antiparticules ont un nombre leptonique égal à –1. On peut donc affirmer le principe suivant :

L'interaction faible conserve séparément le nombre leptonique électronique, le nombre leptonique muonique et le nombre leptonique tauique.

Dans la désintégration du muon, on obtient

$$\begin{aligned} & \mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \\ (L_e) \quad & 0 = +1 + 0 + (-1) \\ (L_\mu) \quad & +1 = 0 + 1 + 0 \,. \end{aligned}$$

C'est aussi par l'interaction faible que les particules étranges, les particules charmées et les particules ayant une beauté se désintègrent :

$$\begin{aligned} K^- \,(s\bar{u}) &\rightarrow \ell^- + \bar{\nu}_\ell \qquad (\Delta S = +1) \\ D^- \,(d\bar{c}) &\rightarrow \ell^- + \bar{\nu}_\ell \qquad (\Delta C = +1) \\ B^- \,(b\bar{u}) &\rightarrow \ell^- + \bar{\nu}_\ell \qquad (\Delta \tilde{B} = +1)\,, \end{aligned}$$

où ℓ est un lepton (électron ou muon) et $\bar{\nu}_\ell$ est l'antineutrino correspondant. Les nombres quantiques associés aux saveurs de quark peuvent changer lors des processus qui font intervenir l'interaction faible : $\Delta I_3 = \pm 1$, $\Delta S = \pm 1$, $\Delta C = \pm 1$, $\Delta \tilde{B} = \pm 1$.

La théorie de jauge pour l'interaction faible a été formulée en 1967 de façon indépendante par le physicien américain Steven Weinberg (1933-) et par le physicien pakistanais Abdus Salam (1926-1996). Ils se sont basés sur des idées du physicien américain Sheldon Glashow (1932-). Le modèle de Weinberg-Salam est une théorie de jauge qui unifie l'interaction faible et l'interaction électromagnétique dans une théorie appelée la *théorie électrofaible*. Dans cette théorie, il y a quatre bosons de jauge, qui sont les médiateurs de l'interaction électrofaible. À très haute énergie, l'interaction faible et l'interaction électromagnétique ont la même intensité. À faible énergie, la symétrie de jauge est brisée : les bosons médiateurs de l'interaction faible (les bosons W^+, W^- et Z^0) deviennent massifs, ce qui fait que l'interaction faible a une portée finie et qu'elle est plus faible que l'interaction électromagnétique. Le quatrième boson d'échange correspond au photon, qui demeure sans masse.

Les processus qui changent la saveur des particules sont engendrés par l'échange du boson W^+ ou du boson W^-. On parle alors de *courant chargé*, car ces bosons ont une charge électrique. Les processus qui font intervenir le boson Z^0 sont appelés des processus par *courant neutre*.

Les courants chargés

Nous avons d'abord rencontré l'interaction faible dans les désintégrations β. Ces désintégrations changent la saveur d'un quark, de telle sorte qu'un neutron se transforme en proton ou l'inverse. Ces processus sont produits par l'émission d'un boson chargé, qu'on représente par la lettre W (selon le mot anglais *weak* pour faible). La figure 14.25a montre le diagramme de Feynman qui illustre la désintégration β^- et la figure 14.25b, la désintégration β^+. Dans les deux situations, le processus met en cause un quark qui se transforme en un autre quark en émettant un boson W. Les deux autres quarks sont spectateurs dans cette transformation. Le boson W se transforme ensuite en une paire électron-antineutrino électronique ou en paire positron-neutrino électronique, selon la charge du boson W.

$$\begin{aligned} & d \rightarrow u + W^- \\ & \qquad W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e \end{aligned} \qquad (\beta^-) \qquad (14.19)$$

$$\begin{aligned} u &\rightarrow d + W^+ \\ W^+ &\rightarrow e^+ + \nu_e \end{aligned} \qquad (\beta^+) \qquad (14.20)$$

Il est simple de vérifier que la couleur et la charge électrique sont conservées à chacun des sommets.

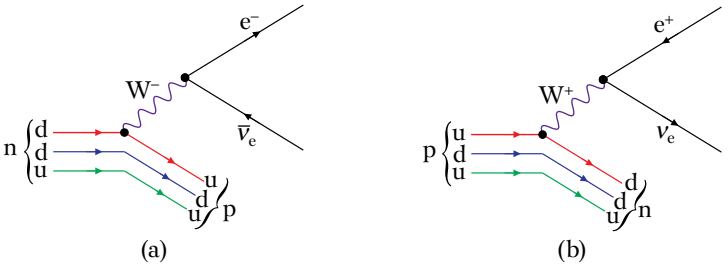


FIGURE 14.25
Le diagramme de Feynman (a) pour la désintégration β^- ; (b) pour la désintégration β^+.

Avec ces désintégrations, on obtient les sommets nécessaires pour tracer les diagrammes de Feynman dans le cas de processus faisant intervenir les bosons W^+ et W^-. Ces bosons peuvent être couplés avec une paire de quarks ayant une charge différente (*voir la figure 14.26a*) ou avec une paire lepton-neutrino (*voir la figure 14.26b*). Il est possible d'orienter différemment les sommets ou les flèches des fermions pour obtenir des processus avec des antiparticules. La charge du boson W est telle que la charge électrique est conservée.

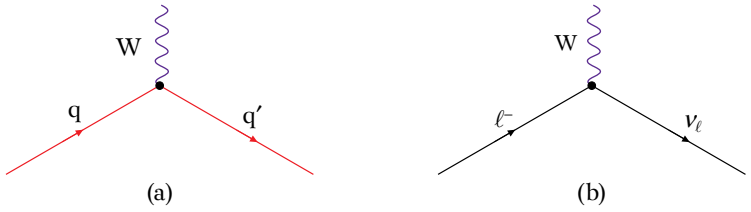


FIGURE 14.26
Les sommets pour les courants chargés de l'interaction faible (a) entre un quark q et un quark q′ ; (b) entre un lepton chargé et le neutrino correspondant.

REMARQUE

Nous avons tracé l'interaction pour des quarks ayant une couleur rouge seulement pour illustrer le sommet. La couleur du quark n'a pas d'importance dans un sommet de l'interaction faible. Chacune des couleurs peut participer à un sommet d'interaction faible.

Comme le montre le diagramme de Feynman de la figure 14.27a à la page suivante, la désintégration du muon se produit par l'interaction faible, au moyen de l'échange d'un boson W^- :

$$\begin{aligned} \mu^- &\rightarrow W^- + \nu_\mu \\ W^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e \,. \end{aligned} \qquad (14.21)$$

Donc, le muon se transforme en neutrino muonique en émettant un boson W^-. Ce boson est une particule virtuelle (à l'intérieur du diagramme) ; il se transforme

ensuite en une paire électron-antineutrion électronique. À chaque sommet, la charge électrique est conservée. De plus, au premier sommet, le nombre leptonique muonique est conservé. Pour le deuxième sommet, le nombre leptonique électronique est conservé.

On obtient la désintégration de l'antimuon de façon similaire, comme l'illustre la figure 14.27b : l'antimuon émet un boson W^+ et se transforme en antineutrino muonique. Le boson W^+ se transforme ensuite en une paire positron-neutrino électronique :

$$\begin{aligned} \mu^+ &\rightarrow W^+ + \bar{\nu}_\mu \\ W^+ &\rightarrow e^+ + \nu_e \,. \end{aligned} \tag{14.22}$$

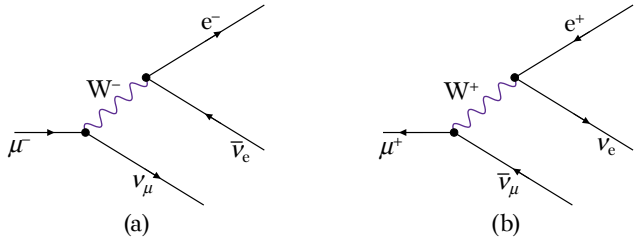


FIGURE 14.27
Diagramme de Feynman (a) pour la désintégration du muon, (b) pour la désintégration de l'antimuon.

Les neutrinos produits dans ces désintégrations possèdent une particularité. Pour énoncer cette caractéristique, on doit d'abord définir l'*hélicité* d'une particule, qui représente l'orientation du vecteur spin $\vec{\mathbf{S}}$ par rapport à la quantité de mouvement $\vec{\mathbf{p}}$ de la particule. Pour une particule de spin $s = 1/2$, le vecteur $\vec{\mathbf{S}}$ a deux orientations possibles, comme le montre la figure 14.28. Lorsque $\vec{\mathbf{S}}$ et $\vec{\mathbf{p}}$ sont dans le même sens (*voir la figure 14.28a*), on dit que l'hélicité est $h = +1$, aussi appelée l'*hélicité droite*. Si à la place, le vecteur $\vec{\mathbf{S}}$ est opposé à $\vec{\mathbf{p}}$, alors l'hélicité est $h = -1$, qui se nomme aussi l'*hélicité gauche*.

FIGURE 14.28
(a) Une particule d'hélicité droite ; (b) une particule d'hélicité gauche.

Lorsqu'on mesure l'hélicité des neutrinos produits dans un processus faisant intervenir l'interaction faible, on trouve que tous les neutrinos ont une hélicité gauche et tous les antineutrinos, une hélicité droite. L'analyse des autres particules en cause dans l'interaction faible montre que les bosons W^+ et W^- interagissent seulement avec des particules d'hélicité gauche ou des antiparticules d'hélicité droite. Les particules d'hélicité gauche ont une charge faible non nulle ($g \neq 0$), alors que les particules d'hélicité droite ont une charge faible nulle ($g = 0$). Contrairement aux autres interactions, l'interaction faible fait une différence entre la gauche et la droite.

TESTEZ VOTRE COMPRÉHENSION 14.4

On observe des positrons dans la réaction suivante :

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+ .$$

Quelle est la réaction lorsqu'on remplace les antineutrinos électroniques par des antineutrinos muoniques ?

Les courants neutres

Dans le modèle de Weinberg-Salam, il existe une interaction faible qui ne fait pas changer la saveur des particules. Cette interaction est semblable à l'interaction électromagnétique, mais elle se produit entre des particules ayant une charge faible, plutôt qu'une charge électrique. Le médiateur est le boson Z^0. La figure 14.29 montre le diagramme de Feynman illustrant la diffusion d'un neutrino muonique par un électron :

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^- .$$

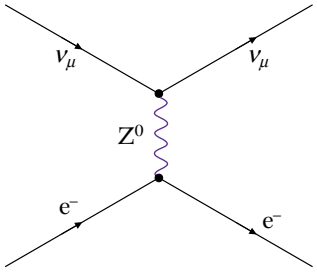


FIGURE 14.29
La diffusion d'un neutrino muonique par un électron s'effectue par l'échange d'un boson Z^0.

Les courants neutres deviennent importants à haute énergie et contribuent à la diffusion de particules chargées. Par exemple, dans le processus de création d'une paire muon-antimuon ($e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$), qu'on a illustré à la figure 14.10, il y a une contribution par un échange de Z^0, comme le montre la figure 14.30. Comme chaque diagramme représente une amplitude de probabilité, il y a un phénomène d'interférence entre les deux processus, qui est aussi observé à haute énergie.

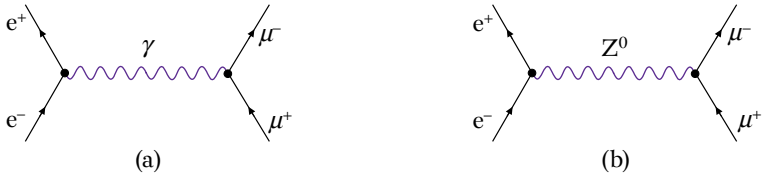


FIGURE 14.30
À haute énergie, il y a deux processus dans la création d'une paire muon-antimuon : (a) l'échange d'un photon ; (b) l'échange d'un boson Z^0.

La vérification du modèle de Weinberg-Salam par l'observation des courants neutres d'interaction faible a motivé le comité Nobel à décerner en 1979 le prix Nobel de physique à Glashow, Salam et Weinberg.

14.11 Le mécanisme de Brout-Englert-Higgs

Le modèle de Weinberg-Salam est une théorie de jauge, semblable à l'électromagnétique quantique et à la chromodynamique quantique. Dans ce genre de théorie, les bosons de jauge ne peuvent pas avoir une masse de façon intrinsèque, car cela ne respecte pas la symétrie de jauge. Par contre, les bosons $W^\pm$ et Z^0 doivent acquérir une masse d'une certaine façon, car l'interaction faible a une portée finie, comme nous l'avons vu à la section 14.4.

De façon similaire, étant donné que les bosons $W^{\pm}$ sont émis et absorbés par des particules d'hélicité gauche et non par des particules d'hélicité droite, les particules soumises à l'interaction faible ne peuvent pas avoir une masse intrinsèque. En effet, les particules d'hélicité droite ont une charge faible nulle $g = 0$ (elles n'interagissent pas avec les bosons W), alors que les particules d'hélicité gauche ont une charge faible $g \neq 0$. Lorsqu'on applique une transformation de jauge semblable à l'équation 14.15, on obtient

$$\psi_R \rightarrow \psi'_R = \psi_R$$
$$\psi_L \rightarrow \psi'_L = e^{ig\theta/\hbar}\psi_L \ .$$

Les deux types de particules ne subissent pas la même transformation. La théorie peut être invariante sous une transformation de jauge seulement si la masse intrinsèque des particules est nulle. Or, les fermions élémentaires ont des masses non nulles et très différentes les unes des autres, comme le montre le tableau 14.1. Il faut un mécanisme pour donner une masse à ces particules.

Les deux problèmes reliés à la masse sont réglés en ajoutant un champ supplémentaire au modèle de Weinberg-Salam. Ce champ est appelé le *champ de Higgs*. C'est un champ scalaire, c'est-à-dire qu'il est associé à une particule dont le spin est $s = 0$. L'interaction entre le champ de Higgs et les bosons de l'interaction faible brise la symétrie de jauge de façon spontanée. C'est le *mécanisme de Brout-Englert-Higgs*, qui a été proposé de façon indépendante par le groupe composé du physicien belge d'origine américaine Robert Brout (1928-2011) et du physicien belge François Englert (1932-), ainsi que par le physicien anglais Peter Higgs (1929-). Ce mécanisme a été incorporé dans la théorie électrofaible par Salam et par Weinberg. Le champ de Higgs permet aussi de donner une masse aux fermions élémentaires.

Des exemples simples de brisure spontanée de symétrie

Une brisure de symétrie spontanée correspond à une situation où une théorie possède une symétrie, mais que la configuration ayant l'énergie minimum ne possède pas cette symétrie. Prenons par exemple une bande de caoutchouc cylindrique, comme le montre la figure 14.31a. La bande possède une symétrie de rotation : on peut faire une rotation de la tige par rapport à son axe d'un angle quelconque sans rien changer. Si l'on place la bande de façon verticale, la force gravitationnelle exerce une force vers le bas sur toutes les parties de la tige, de telle sorte que la configuration stable est celle illustrée à la figure 14.31b. La configuration n'est plus symétrique sous une rotation : si on tourne la bande, on change la configuration, même si cela ne change pas l'énergie de la configuration. La symétrie de rotation est spontanément brisée.

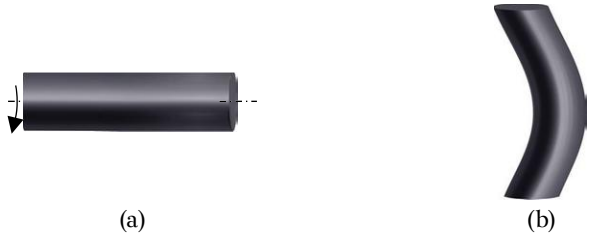


FIGURE 14.31
(a) Une tige cylindrique en caoutchouc possède une symétrie de rotation. (b) Lorsqu'on place la tige verticalement, la configuration stable ne possède plus la symétrie.

On rencontre un autre exemple de brisure de symétrie lorsqu'on étudie une substance ferromagnétique. Comme nous l'avons vu à la section 9.8 du tome 2, une substance ferromagnétique présente un moment magnétique résultant, causé par l'alignement partiel des moments magnétiques des atomes. À très haute température (au-dessus de la température de Curie), les moments magnétiques atomiques sont alignés de façon aléatoire. Il y a une symétrie de rotation. Par contre, à basse température, la configuration des moments magnétiques n'est plus symétrique. La théorie de l'interaction magnétique entre les moments magnétiques possède la symétrie de rotation, mais la configuration à basse température ne possède pas la symétrie de la théorie. La symétrie est spontanément brisée par la configuration des moments magnétiques alignés.

Le champ de Higgs

Pour briser spontanément la symétrie de la théorie électrofaible, on ajoute un champ scalaire complexe $\phi = \phi_1 + i\phi_2$. Ce champ interagit avec lui-même, de telle sorte que l'énergie potentielle d'interaction est

$$V(\phi) = -\mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4 , \qquad (14.23)$$

où μ et λ sont deux paramètres réels et positifs. La fonction énergie potentielle est illustrée à la figure 14.32. Cette énergie potentielle est invariante sous une transformation de jauge globale :

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\chi} \phi ,$$

où χ est une phase constante quelconque. La configuration pour laquelle $\phi = 0$ ne correspond pas au minimum de l'énergie potentielle. Le minimum se trouve aux points qui répondent à la condition :

$$|\phi| = \phi_0 = \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}} .$$

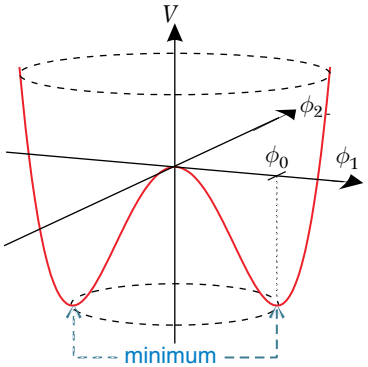


FIGURE 14.32
Le potentiel du champ de Higgs, où ϕ_1 est la partie réelle et ϕ_2, la partie imaginaire

Cette caractéristique du champ de Higgs est très importante. La valeur moyenne du champ de Higgs dans le vide (où il n'y a aucune particule) n'est pas nulle, mais elle a une certaine valeur. Cette valeur ne respecte pas la symétrie de jauge. La symétrie de jauge est spontanément brisée.

Pour que le potentiel de Higgs soit symétrique sous une transformation de jauge locale, on doit coupler le champ de Higgs avec les champs de jauge $W^{\pm}$ et Z^0. L'interaction entre les bosons et le champ de Higgs qui a une valeur non nulle engendre la masse des bosons de l'interaction faible.

Le modèle de Weinberg-Salam prédit une masse de 80 GeV/c^2 pour les $W^{\pm}$ et de 91 GeV/c^2 pour le boson Z^0. Ces valeurs ont été vérifiées expérimentalement en 1983, lorsqu'une équipe du CERN a réussi à produire des bosons $W^{\pm}$ et Z^0 et à mesurer leurs propriétés. Ces mesures ont montré de nouveau que la théorie de l'interaction électrofaible proposée par Glashow, Salam et Weinberg est valable.

Le champ de Higgs interagit aussi avec les fermions, de telle sorte que la théorie est invariante sous une transformation de jauge. Chaque fermion a une constante de couplage différente, ce qui produit des masses différentes pour chacun des fermions. Les fermions qui interagissent fortement avec le champ de Higgs ont une masse très élevée, alors que les fermions qui interagissent très faiblement avec le champ de Higgs ont une faible masse. Le photon et les gluons

n'interagissent pas du tout avec le champ de Higgs, de telle sorte que leur masse demeure nulle.

Comme tous les champs quantiques, l'excitation du champ de Higgs doit produire une particule, appelée le *boson de Higgs* H^0. Comme le champ de Higgs interagit avec lui-même, le boson de Higgs doit avoir une masse. La théorie ne prédit pas la masse de cette particule. Après plusieurs années de recherche et la mise en service de l'accélérateur de particules LHC, le boson de Higgs a été observé par le groupe de recherche ATLAS et par le groupe de recherche CMS en 2012. La photo en ouverture de chapitre montre un événement où deux paires électrons-positrons ont été observées. Ces paires sont une signature de la désintégration d'un boson de Higgs en deux bosons Z^0 :

$$\begin{aligned} H^0 &\rightarrow Z^0 + Z^0 \\ Z^0 &\rightarrow e^- + e^+ \\ Z^0 &\rightarrow e^- + e^+ . \end{aligned} \tag{14.24}$$

Les mesures montrent que la masse du boson de Higgs est

$$M_{H^0} = (125,9 \pm 0,4)\ \text{GeV}/c^2 . \tag{14.25}$$

Cette masse correspond à une masse 134 fois plus grande que celle du proton, ou à une masse qui s'approche de celle d'un atome de césium complet.

À la suite de l'observation du boson de Higgs, François Englert et Peter Higgs ont obtenu le prix Nobel de physique en 2013.

14.12 Au-delà du modèle standard

Nous avons décrit dans ce chapitre les éléments du modèle standard de la physique des particules, qui comprend la théorie de la chromodynamique quantique et le modèle de Weinberg-Salam de l'interaction électrofaible. Le modèle standard a été formulé dans les années 1960 et 1970 et ses prédictions ont été vérifiées depuis. Les expériences sont maintenant rendues aux limites des prédictions.

On sait que le modèle standard n'est pas la théorie finale de la physique des particules. Cette théorie contient trop de paramètres arbiraires, comme la masse des particules et les constantes de couplage des interactions. De plus, il n'inclut pas l'interaction gravitationnelle, l'une des interactions fondamentales. Il y a des problèmes théoriques lorsqu'on essaie d'appliquer la théorie à de très grandes valeurs d'énergie.

Les expériences menées au LHC et dans les prochains grands accélérateurs vont fournir de nouvelles données qui vont au-delà du modèle standard. Plusieurs modèles et hypothèses seront mis à l'épreuve dans les prochaines années. Notons la supersymétrie, qui propose une nouvelle symétrie entre les bosons et les fermions ainsi que des théories comportant plus de trois dimensions d'espace, des théories qui unifient l'interaction forte et l'interaction électrofaible et des théories qui font intervenir l'interaction gravitationnelle comme la théorie des cordes. La recherche en physique des particules va donc continuer d'être un domaine actif dans les prochaines années.

RÉSUMÉ

Dans ce chapitre, nous avons étudié les particules élémentaires qui composent la matière et qui produisent les interactions.

LES FERMIONS ÉLÉMENTAIRES

- La matière est composée de **fermions**, dont le spin est $s = 1/2$.
- Une *antiparticule* est associée à chaque particule. Une antiparticule a des charges (nombres quantiques) opposées à la particule associée.

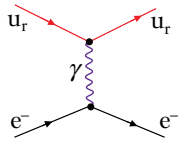
- Une paire particule-antiparticule peut être créée ou s'annihiler.
- Les fermions élémentaires se regroupent en trois **générations**. Chaque génération contient deux quarks et deux leptons. L'un des leptons a une charge électrique négative et un neutrino, dont la charge est nulle.
- Un **quark** possède une charge électrique ainsi qu'une *couleur*, qui représente la charge de l'interaction forte.
- Le nombre baryonique est $B = (N_q - N_{\bar{q}})/3$ et le nombre leptonique est $L = N_\ell - N_{\bar{\ell}}$.
- Un *nombre quantique de saveur* est associé à chaque quark et à chaque génération de leptons :

Particule	Q(e)	Couleur	Saveur
u	2/3	oui	$I_3 = +1/2$
d	–1/3	oui	$I_3 = -1/2$
ν_e	0	non	$L_e = +1$
e^-	–1	non	$L_e = +1$
c	2/3	oui	$C = +1$
s	–1/3	oui	$S = -1$
ν_μ	0	non	$L_\mu = +1$
μ^-	–1	non	$L_\mu = +1$
t	2/3	oui	
b	–1/3	oui	$\tilde{B} = -1$
ν_τ	0	non	$L_\tau = +1$
τ	–1	non	$L_\tau = +1$

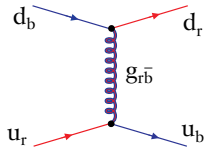
LES INTERACTIONS

Les interactions entre les particules s'effectuent par l'échange de **bosons de jauge**. Toutes les interactions conservent la charge électrique, la couleur, le nombre baryonique et chacun des nombres leptoniques.

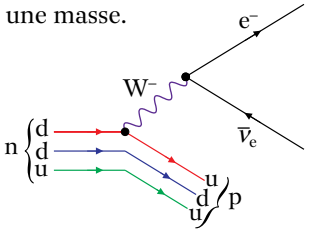
- L'**interaction électromagnétique** est une interaction entre les particules chargées.
  - Le boson de jauge est le photon (γ).
  - Les nombres quantiques de saveur sont conservés.



- L'**interaction forte** est une interaction entre les particules qui ont une couleur.
  - Le boson de jauge est le *gluon*.
  - Le gluon possède une couleur et une anticouleur.
  - À grande distance, la couleur est **confinée**.
  - À très faible distance, les quarks et les gluons sont libres. C'est la **liberté asymptotique**.



- L'**interaction faible** produit des changements de saveur des quarks par l'échange des bosons W^+ et W^-. L'échange du boson Z^0 ne change pas la saveur.
  - Chacun des nombres leptoniques est conservé.
  - La portée est finie, car les bosons ont une masse.



L'UNIFICATION

L'interaction faible et l'*interaction électromagnétique* sont unifiées pour produire l'**interaction électrofaible**.

- Le **mécanisme de Brout-Englert-Higgs** produit une **brisure spontanée de symétrie**. À basse énergie, les bosons W^+, W^- et Z^0 acquièrent une masse à cause de l'interaction avec le **champ de Higgs**. Le photon demeure sans masse.
- Le champ de Higgs interagit avec les fermions pour leur donner une masse.

LES HADRONS

La couleur est confinée dans les **hadrons**.

- Les **mésons** sont constitués d'un quark et d'un antiquark de couleurs complémentaires.
- Les **baryons** sont constitués de trois quarks de couleurs différentes.
- La masse des hadrons est causée principalement par l'interaction forte entre les quarks et les gluons.
- Un hadron contient les **quarks de valence** et de la **mer de quarks**, formée de gluons et de quarks virtuels.

QUESTIONS, EXERCICES ET PROBLÈMES

Q questions qualitatives • **E** exercices simples • **P** problèmes • solution disponible

Au besoin, consultez les tableaux du chapitre pour obtenir les propriétés des particules.

Section 14.2 Les particules et les antiparticules

E1 Donnez la charge électrique des antiparticules associées aux particules suivantes :

a. K^0 ;

b. Δ^{++} ;

c. W^- ;

d. ν_μ.

E2 Pour créer des paires particules-antiparticules, on accélère deux faisceaux différents de protons. Chaque proton acquiert une énergie cinétique K. Les faisceaux sont placés pour produire des collisions frontales, comme le montre la figure 14.33. Calculez l'énergie cinétique minimale pour créer les paires suivantes :

a. une paire positron-électron ;

b. une paire π^+-π^- ;

c. une paire proton-antiproton.

FIGURE 14.33 • Exercice 2

P3 Un positron ayant une quantité de mouvement $\vec{p}_i = p_{i,x}\vec{\imath}$ se déplace vers un électron immobile. Montrez que la réaction

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma$$

n'est pas possible, car elle ne respecte pas simultanément le principe de conservation de l'énergie et le principe de conservation de la quantité de mouvement.

Section 14.3 Les particules de matière : les fermions élémentaires

Q4 La matière ordinaire est composée de protons, de neutrons et d'électrons. Le proton et l'électron sont des particules stables lorsqu'ils sont libres. Quelle quantité n'est pas conservée dans les réactions suivantes :

a. $p \rightarrow e^+ + \nu_e$;

b. $e^- \rightarrow \nu_e + \nu_e + \bar{\nu}_e$.

E5 Complétez les réactions suivantes, faisant intervenir des protons et des neutrons, des leptons de la première génération, en plus de leurs antiparticules :

a. $e^- + p \rightarrow n + \cdots$;

b. $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + \cdots$;

c. ${}^2_1H + \nu_e \rightarrow {}^1_1H + \cdots$;

d. ${}^{48}_{20}Ca \rightarrow {}^{48}_{22}Ti + e^- + \cdots$.

Section 14.4 Les interactions : les bosons de jauge

E6 Le principe d'incertitude limite la distance pour un échange d'une énergie ΔE par l'échange d'un photon virtuel entre deux particules chargées. Soit la diffusion d'un électron par un proton :

$$e^- + p \rightarrow e^- + p\ .$$

Déterminez la distance minimale entre les deux particules pour les échanges d'énergie ΔE suivants :

a. $\Delta E = 1{,}00$ MeV ;

b. $\Delta E = 100$ MeV ;

c. $\Delta E = 1{,}00$ GeV.

E7 Des théories de grande unification sont des théories qui unifient l'interaction forte, l'interaction faible et l'interaction électromagnétique dans une théorie où il y a une symétrie qui relie les quarks et les leptons. L'une de ces théories prédit l'existence d'un boson X ayant une masse d'environ 1×10^{15} GeV/c^2. Ce boson produirait une désintégration du proton ; le proton deviendrait une particule dont la durée de vie moyenne dépasserait 1×10^{30} a. Quelle serait la portée associée à l'interaction du boson X ?

Section 14.5 Les diagrammes de Feynman

E8 La figure 14.34 montre un diagramme de Feynman qui illustre l'effet Compton, où un photon est diffusé par un électron. Le sommet a correspond à un électron qui absorbe un photon et devient un électron virtuel. Dans les diagrammes de Feynman, l'énergie et la quantité de mouvement sont conservées à chaque sommet, mais les particules virtuelles ne respectent pas la condition entre l'énergie et la quantité de mouvement $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$. Soit un photon de 150 keV qui est absorbé par l'électron initialement au repos au sommet a.

a. Quelle est l'énergie totale relativiste de l'électron virtuel ?

b. Quel est le module de la quantité de mouvement de l'électron virtuel ?

c. Calculez $\sqrt{E^2 - p^2c^2}$ pour l'électron virtuel.

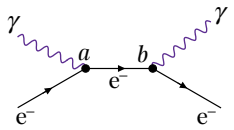


FIGURE 14.34 • Exercice 8

Section 14.7 L'interaction électromagnétique

Q9 Classez les diagrammes de Feynman illustrés à la figure 14.35 en ordre décroissant de l'amplitude de probabilité correspondante.

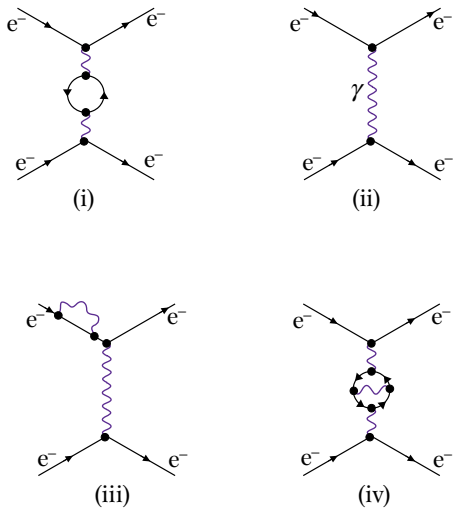


FIGURE 14.35 • Question 9

E10 La diffusion d'un électron et d'un positron ($e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$) est décrite par deux diagrammes de Feynman possédant deux sommets. Tracez ces deux diagrammes.

P11 Un pion neutre se désintègre en émettant deux rayons gamma :

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma .$$

Cette désintégration s'effectue par l'interaction électromagnétique. Un pion se déplace à une vitesse de 0,900 0 c lorsqu'il se désintègre. Les deux rayons gamma sont émis dans la même direction que la vitesse du pion.

a. Quelle est l'énergie du photon qui se déplace dans le même sens que le pion initial ?

b. Quelle est l'énergie du photon qui se déplace dans le sens opposé à la vitesse du pion ?

Section 14.9 Les hadrons

Q12 Lors d'une collision, on observe une particule a dont le spin est $s_a = 3/2$ et une particule b dont le spin est $s_b = 0$. Ces deux particules sont des hadrons.

a. Quelle particule est un méson ?

b. Quelle particule est un baryon ?

Q13 Le méson K^+ possède plusieurs états excités (des résonances). Chaque résonance a une masse et un spin particulier. On note les résonances en donnant la masse, (exprimée en MeV/c^2) entre parenthèses. Classez les résonances suivantes par ordre croissant de leur spin :

(i) $K^*(892)$;

(ii) $K_2^*(1430)$;

(iii) $K_3^*(1780)$;

(iv) $K_4^*(2045)$.

Q14 Le baryon Δ^{++} est un état lié constitué de trois quarks u ayant des spins alignés, donc le même nombre quantique $m_s = +1/2$. Le principe d'exclusion s'applique-t-il à cet état de trois quarks ?

E15 Indiquez si les réactions suivantes peuvent se produire par l'interaction forte ou non. Si ce n'est pas le cas, indiquez les nombres quantiques de saveur qui ne sont pas conservés.

a. $p + p \rightarrow \pi^+ + \Delta^+$;

b. $p + \bar{p} \rightarrow K^+ + K^-$;

c. $e^+ + e^- \rightarrow \Upsilon$;

d. $p + \pi^- \rightarrow D_s^+ + \Sigma^-$.

E16 Soit la réaction $\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+$.

a. Donnez la réaction en fonction des quarks de valence.

b. Tracez le diagramme de Feynman correspondant.

E17 Soit la réaction $e^+ + e^- \rightarrow D^+ + D^-$.

a. Donnez la réaction en fonction des quarks de valence.

b. Tracez le diagramme de Feynman correspondant.

Section 14.10 L'interaction faible

E18 La particule Ω^- est un baryon dont l'étrangeté est $S = -3$. La particule subit une chaîne de désintégrations, dont les premières étapes sont

$$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^- \quad (1)$$

$$\Xi^0 \rightarrow \pi^0 + \Lambda^0 \quad (2)$$

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma . \quad (3)$$

Déterminez l'interaction en cause dans les désintégrations suivantes :

a. la désintégration (1) ;

b. la désintégration (2) ;

c. la désintégration (3).

E19 Le tauon est le lepton de la troisième génération. Il y a plusieurs modes de désintégration, incluant l'émission de neutrinos et d'un muon ou l'émission de neutrinos et d'un électron.

a. Écrivez l'équation de désintégration lorsqu'un muon est émis.

b. Écrivez l'équation de désintégration lorsqu'un électron est émis.

E20 Pour démontrer l'existence du boson Z^0, on a observé la diffusion de neutrinos muoniques par des électrons :

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^- .$$

a. Tracez le diagramme de Feynman de cette diffusion.

b. Si les neutrinos muoniques sont remplacés par des neutrinos électroniques, la diffusion ne démontre pas nécessairement l'existence du boson Z^0, car la diffusion peut être produite par l'échange d'un boson W. Tracez le diagramme de Feynman correspondant à ce processus.

E21 Nous avons vu à la section 13.8 que la fusion nucléaire dans le cœur du Soleil produit des neutrinos électroniques. Étant donné que les neutrinos sont soumis uniquement à l'interaction faible, ils peuvent quitter le Soleil sans perdre d'énergie. Une expérience a été menée en 1970 pour mesurer le nombre de neutrinos solaires qui se propagent jusqu'à la Terre. Le but était de vérifier si le modèle de la fusion nucléaire dans le Soleil est correct. Dans cette expérience, la réaction suivante a été utilisée :

$$\nu_e + {}^{37}_{17}Cl \rightarrow {}^{37}_{18}Ar + e^- .$$

a. Écrivez l'équation de la réaction en fonction du proton et du neutron.

b. Écrivez l'équation de la réaction en fonction des quarks qui participent directement à la réaction.

c. Tracez le diagramme de Feynman pour la réaction trouvée en **a.**

d. Que se produit-il si les neutrinos électroniques sont remplacés par des neutrinos muoniques ou par des neutrinos tauiques ?

Cette expérience et d'autres expériences ont permis d'observer un nombre de neutrinos équivalent à environ 33 % du nombre attendu selon le modèle de la fusion nucléaire du Soleil. C'est le *problème des neutrinos solaires*. Le résultat indique que le modèle de la fusion nucléaire dans le Soleil est incorrect ou qu'une partie des neutrinos électroniques se transforment dans leur parcours entre le Soleil et la Terre.

E22 Pour résoudre le problème des neutrinos solaires (*voir l'exercice 21*), une expérience a été menée au Sudbury Neutrino Observatory (SNO), où de l'eau lourde est utilisée dans un grand détecteur de neutrinos. Dans l'eau lourde, les atomes d'hydrogène ${}^1_1H$ sont remplacés par l'isotope ${}^2_1H$, qu'on appelle le deutérium. La réaction utilisée est la suivante :

$$\nu + {}^2_1H \rightarrow {}^1_1H + n + \nu .$$

La diffusion du neutrino fournit l'énergie nécessaire pour briser le noyau de deutérium. La masse atomique du deutérium est de 2,014 102 u et celle de l'hydrogène est de 1,007 825 u.

a. Calculez l'énergie minimale que doit avoir le neutrino pour briser le noyau de deutérium en deux.

b. En quoi la réaction précédente est-elle utile pour compter le nombre de neutrinos venant du Soleil ?

En 2001, le groupe de recherche du SNO a démontré qu'une partie des neutrinos électroniques se transforment en neutrinos muoniques ou en neutrinos tauiques. C'est l'*oscillation des neutrinos*. Le modèle de la fusion nucléaire dans le Soleil est correct.

SOLUTIONS AUX TESTS DE COMPRÉHENSION

14.1	**a.** La charge électrique	Le neutrino et l'antineutrino n'ont pas de charge, alors $Q_i = -e$ et $Q_f = +e$.
	b. Le nombre baryonique	Pour l'antiproton, $B = -1$, alors que $B = 0$ pour l'électron et pour l'antineutrino, car ils ne sont pas composés de quarks.
	c. Le nombre leptonique	Pour l'électron, $L = 1$, alors que $L = 0$ pour le proton et le neutron, car ils ne sont pas des leptons.
	d. Le nombre leptonique	Pour le pion, $B = 0$ et $L = 0$, car c'est un méson. Pour l'électron, $L = 1$. Donc $L_i = +1$ et $L_f = 0$.
14.2	$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$	Dans la partie de gauche du diagramme, il y a un fermion (flèche vers la droite) et son antiparticule (flèche vers la gauche). Donc, les particules initiales sont un électron et un positron. Dans la partie de droite, il y a deux photons. Ce sont les particules finales.
14.3	**a.** Oui, car $\Delta I_3 = \Delta S = 0$.	L'interaction forte ne change pas la saveur des quarks. Une réaction pour laquelle l'étrangeté ou la beauté change ne peut pas être produite par l'interaction forte, car cela montre qu'un quark strange ou qu'un quark bottom s'est transformé en un autre quark.
	b. Non, car $\Delta S = +1$.	
	c. Non, car $\Delta C = +1$.	
14.4	$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + \mu^+$	En utilisant des antineutrinos muoniques, le nombre leptonique muonique est $L = -1$. On doit donc trouver dans les produits un antimuon. On vérifie aussi que la charge électrique est conservée.

Annexe A

Le système international d'unités

Les données suivantes proviennent du Bureau international des poids et mesures, *Le système international d'unités*, 8e édition, 2006.

Consulter le site du Bureau international des poids et mesures pour plus de détails.

Les unités de base

Nom	Unité	Symbole	Définition
temps, durée	seconde	s	La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. (1968)
longueur	mètre	m	Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 de seconde. (1983)
masse	kilogramme	kg	Le kilogramme est l'unité de masse; il est égal à la masse du prototype international du kilogramme. (1889)
courant électrique	ampère	A	L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à 2×10^{-7} newton par mètre de longueur. (1948)
température thermodynamique	kelvin	K	Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau. (1968)
quantité de matière	mole	mol	La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12. (1971)
intensité lumineuse	candela	cd	La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian. (1979)

Quelques unités dérivées

Grandeur	Unité	Symbole	Équivalence	Unité de base
angle plan	radian	rad	m/m	1
aire	mètre carré	m^2		m^2
volume	mètre cube	m^3		m^3
fréquence	hertz	Hz	s^{-1}	s^{-1}
masse linéique	kilogramme par mètre	kg/m		kg/m
masse volumique	kilogramme par mètre cube	kg/m^3		kg/m^3
vitesse	mètre par seconde	m/s		m/s
accélération	mètre par seconde carrée	m/s^2		m/s^2
force	newton	N		$kg \cdot m/s^2$
énergie, travail, chaleur	joule	J	$N \cdot m$	$kg \cdot m^2/s^2$
puissance	watt	W	J/s	$kg \cdot m^2/s^3$
quantité de mouvement	kilogramme mètre par seconde	$kg \cdot m/s$		$kg \cdot m/s$
vitesse angulaire	radian par seconde	rad/s		1/s
accélération angulaire	radian par seconde carrée	rad/s^2		$1/s^2$
moment d'inertie	kilogramme mètre carré	$kg \cdot m^2$		$kg \cdot m^2$
moment de force, couple	newton mètre	$N \cdot m$		$kg \cdot m^2/s^2$
moment cinétique, spin	kilogramme mètre carré par seconde	$kg \cdot m^2/s$		$kg \cdot m^2/s$
pression, contrainte	pascal	Pa	N/m^2	$kg/(m \cdot s^2)$
charge électrique	coulomb	C	$A \cdot s$	$A \cdot s$
charge linéique	coulomb par mètre	C/m		$A \cdot s/m$
charge surfacique	coulomb par mètre carré	C/m^2		$A \cdot s/m^2$
charge volumique	coulomb par mètre cube	C/m^3		$A \cdot s/m^3$
potentiel électrique, force électromotrice	volt	V	W/A	$kg \cdot m^2/(A \cdot s^3)$
champ électrique	volt par mètre	V/m	N/C	$kg \cdot m/(A \cdot s^3)$
capacité électrique	farad	F	C/V	$A^2 \cdot s^4/(kg \cdot m^2)$
densité de courant	ampère par mètre carré	A/m^2		A/m^2
résistance électrique	ohm	Ω	V/A	$kg \cdot m^2/(A^2 \cdot s^3)$
conductance électrique	siemens	S	A/V	$A^2 \cdot s^3/(kg \cdot m^2)$
champ magnétique	tesla	T	$N/(A \cdot m)$	$kg/(A \cdot s^2)$
flux magnétique	weber	Wb	$T \cdot m^2$	$kg \cdot m^2/(A \cdot s^2)$
inductance	henry	H	$V \cdot s/A$	$kg \cdot m^2/(A^2 \cdot s^2)$
éclairement énergétique	watt par mètre carré	W/m^2		kg/s^3
activité d'un radionucléide	bécquerel	Bq	s^{-1}	s^{-1}
dose absorbée	gray	Gy	J/kg	m^2/s^2
équivalent de dose	sievert	Sv	J/kg	m^2/s^2

D'autres unités utilisées dans le SI

Grandeur	Unité	Symbole	Valeur	Grandeur	Unité	Symbole	Valeur
temps	minute	min	1 min = 60 s	angle plan	degré	°	$1° = (\pi/180)$ rad
	heure	h	1 h = 60 min		minute	′	$1' = (1/60)°$
	jour	d	1 d = 24 h		seconde	″	$1'' = (1/60)'$
superficie	hectare	ha	$1 ha = 1 \times 10^4 m^2$	masse	tonne	t	1 t = 1 000 kg
volume	litre	L	$1 L = 0{,}001 m^3$				

Les préfixes du SI

Facteur	Nom	Symbole	Facteur	Nom	Symbole	Facteur	Nom	Symbole
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	milli	m	10^{1}	déca	da
10^{6}	méga	M	10^{-6}	micro	µ	10^{2}	hecto	h
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n	10^{-1}	déci	d
10^{12}	téra	T	10^{-12}	pico	p	10^{-2}	centi	c
10^{15}	péta	P	10^{-15}	femto	f			

D'autres unités en usage avec le SI

Grandeur	Unité	Symbole	Conversion
pression	bar	bar	1 bar = 100 kPa
	millimètre de mercure	mmHg	1 mmHg = 133,322 Pa
temps	année	a	1 a = 365,242... d
distance	mille marin	M	1 M = 1 852 m
section efficace	barn	b	1 b = 100 $\text{fm}^2 = 1 \times 10^{-28}\ \text{m}^2$
vitesse	nœud	kn	1 kn = (1 852/3 600) m/s
logarithme d'un rapport	néper	Np	
	bel	B	

Les règles d'écriture

- Les symboles des unités sont imprimés en caractères romains (droits), quelle que soit la police employée dans le texte où ils figurent. En général, les symboles des unités sont écrits en minuscules, mais, si le nom de l'unité dérive d'un nom propre, la première lettre du symbole est une majuscule. Le symbole du litre constitue une exception à cette règle.

  Dans l'expression $V = 2$ V, V représente le potentiel électrique et V indique des volts.
  m pour mètre
  N pour newton
  Pa pour pascal
  L pour litre

- Si on utilise un préfixe de multiple ou de sous-multiple, ce préfixe fait partie de l'unité et il précède le symbole de l'unité, sans espace entre le symbole du préfixe et le symbole de l'unité. Un préfixe n'est jamais utilisé seul, et on n'utilise jamais de préfixe composé.

  5 nm et non 5 mμm

- Les symboles d'unités sont des entités mathématiques et non des abréviations. Ils ne doivent donc pas être suivis d'un point, sauf s'ils se trouvent à la fin d'une phrase. Ils restent invariables au pluriel, et il ne faut pas mélanger des symboles avec des noms d'unités dans une même expression, puisque les noms ne sont pas des entités mathématiques.

  50 cm et non 50 cm.
  4 km et non 4 kms

- Les règles classiques de multiplication ou de division algébriques s'appliquent pour former les produits et quotients de symboles d'unités. La multiplication doit être indiquée par une espace ou un point à mi-hauteur centré (·), pour éviter que certains préfixes soient interprétés à tort comme des symboles d'unités. La division est indiquée par une ligne horizontale, une barre oblique (/) ou des exposants négatifs.

  45 N · m ou 45 N m, mais pas 45 Nm
  ms pour milliseconde
  m · s pour mètre seconde
  23 m/s ou 23 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, ou 23 m · s^{-1}

- Lorsque l'on combine plusieurs symboles d'unités, on doit prendre soin d'éviter toute ambiguïté, par exemple en utilisant des crochets ou des parenthèses, ou des exposants négatifs. Il ne faut pas utiliser plus d'une barre oblique dans une expression donnée s'il n'y a pas de parenthèses pour lever toute ambiguïté.

  m · kg/(s^3 · A), mais pas
  m · kg/s^3/A ni m · kg/s^3 · A

- La valeur d'une grandeur s'exprime comme le produit d'un nombre par une unité ; le nombre qui multiplie l'unité est la valeur numérique de la grandeur exprimée au moyen de cette unité. La valeur numérique d'une grandeur dépend du choix de l'unité. Ainsi, la valeur d'une grandeur particulière est indépendante du choix de l'unité, mais la valeur numérique est différente selon l'unité choisie.

  10 m/s et 36 km/h représentent la même vitesse.

- Les symboles des grandeurs sont en général formés d'une seule lettre en italique, mais ils peuvent être précisés par des informations complémentaires en indice, en exposant ou entre parenthèses.

Annexe B

Les constantes fondamentales

Les constantes présentées ici sont les valeurs recommandées de 2010 par le Committee on Data for Science and Technology (CODATA).

Visiter le site Internet du CODATA.

Les nombres entre parenthèses dans les valeurs recommandées représentent l'incertitude sur les derniers chiffres. Par exemple, $6{,}673\,84(80) \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2} = (6{,}673\,84 \pm 0{,}000\,80) \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.

Nom	Symbole	Valeur approchée	Valeur recommandée	Unité
vitesse de la lumière dans le vide	c	$3{,}00 \times 10^{8}$	299 792 458	m/s
constante magnétique	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	$4\pi \times 10^{-7}$	$\mathrm{N/A^2}$
constante électrique, $1/(c\mu_0)$	ϵ_0	$8{,}854 \times 10^{-12}$	$8{,}854\,187\,817... \times 10^{-12}$	F/m
constante gravitationnelle	G	$6{,}674 \times 10^{-11}$	$6{,}673\,84(80) \times 10^{-11}$	$\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$
constante de Planck	h	$6{,}626 \times 10^{-34}$	$6{,}626\,069\,57(29) \times 10^{-34}$	J · s
hc en eV · nm	hc	1 240	1 239,841 930(18)	eV · nm
constante de Planck réduite, $h/(2\pi)$	$\hbar$	$1{,}055 \times 10^{-34}$	$1{,}054\,571\,726(47) \times 10^{-34}$	J · s
$\hbar c$ en MeV · fm	$\hbar c$	197,3	197,326 971 8(44)	MeV · fm
charge élémentaire	e	$1{,}602 \times 10^{-19}$	$1{,}602\,176\,565(35) \times 10^{-19}$	C
constante de structure fine, $e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$	α	$7{,}297 \times 10^{-3}$	$7{,}297\,352\,569\,8(24) \times 10^{-3}$	
inverse	α^{-1}	137,0	137,035 999 074(44)	
magnéton de Bohr, $e\hbar/(2m_e)$	μ_B	$927{,}4 \times 10^{-26}$	$927{,}400\,968(20) \times 10^{-26}$	J/T
en eV/T		$5{,}788 \times 10^{-5}$	$5{,}788\,381\,806\,6(38) \times 10^{-5}$	eV/T
magnéton nucléaire, $e\hbar/(2m_p)$	μ_N	$5{,}05 \times 10^{-27}$	$5{,}050\,783\,53(11) \times 10^{-27}$	J/T
en eV/T		$3{,}152 \times 10^{-8}$	$3{,}152\,451\,260\,5(22) \times 10^{-8}$	eV/T
constante de Rydberg, $\alpha^2 m_e c/(2h)$	R_∞	$1{,}097 \times 10^{7}$	10 973 731,568 539(55)	$\mathrm{m^{-1}}$
$R_\infty hc$ en eV	$R_\infty hc$	13,6	13,605 692 53(30)	eV
rayon de Bohr, $\alpha/(4\pi R_\infty)$	a_0	$5{,}29 \times 10^{-11}$	$5{,}291\,772\,109\,2(17) \times 10^{-11}$	m
masse de l'électron	m_e	$9{,}109 \times 10^{-31}$	$9{,}109\,382\,91(40) \times 10^{-31}$	kg
en u		$5{,}486 \times 10^{-4}$	$5{,}485\,799\,094\,6(22) \times 10^{-4}$	u
énergie au repos	$m_e c^2$	0,511	0,510 998 928(11)	MeV
longueur d'onde de Compton (électron), $h/m_e c$	λ_C	$2{,}426 \times 10^{-12}$	$2{,}426\,310\,238\,9(16) \times 10^{-12}$	m
masse du proton	m_p	$1{,}673 \times 10^{-27}$	$1{,}672\,621\,777(74) \times 10^{-27}$	kg
en u		1,007 3	1,007 276 466 812(90)	u
énergie au repos	$m_p c^2$	938,3	938,272 046(21)	MeV
masse du neutron	m_n	$1{,}675 \times 10^{-27}$	$1{,}674\,927\,351(74) \times 10^{-27}$	kg
en u		1,008 7	1,008 664 916 00(43)	u
énergie au repos	$m_n c^2$	939,6	939,565 379(21)	MeV
masse de l'atome d'hydrogène	$\mathrm{m^1_H}$	1,007 8	1,007 825 032 1(4)	u
masse de la particule alpha ($^4_2$He)	m_α	4,001 5	4,001 506 179 125(62)	u
masse du muon	m_μ	$1{,}883 \times 10^{-28}$	$1{,}883\,531\,475(96) \times 10^{-28}$	kg
énergie au repos	$m_\mu c^2$	105,7	105,658 371 5(35)	MeV
nombre d'Avogadro	N_A	$6{,}022 \times 10^{23}$	$6{,}022\,141\,29(27) \times 10^{23}$	$\mathrm{mol^{-1}}$
constante des gaz parfaits	R	8,314	8,314 462 1(75)	J/(mol · K)
constante de Boltzmann, R/N_A	k	$1{,}381 \times 10^{-23}$	$1{,}380\,648\,8(13) \times 10^{-23}$	J/K
constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5{,}670 \times 10^{-8}$	$5{,}670\,373(21) \times 10^{-8}$	$\mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)}$
constante de Wien	b	$2{,}898 \times 10^{-3}$	$2{,}897\,772\,1(26) \times 10^{-3}$	m · K
unité de masse atomique	u	$1{,}661 \times 10^{-27}$	$1{,}660\,538\,921(73) \times 10^{-27}$	kg
en $\mathrm{MeV/c^2}$		931,5	931,494 061(21)	$\mathrm{MeV/c^2}$
électronvolt	eV	$1{,}602 \times 10^{-19}$	$1{,}602\,176\,565(35) \times 10^{-19}$	J

Annexe C

Les données utiles

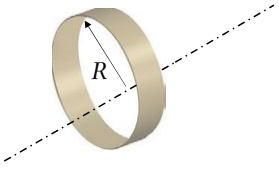
TABLEAU C.1

Quelques unités de longueur utilisées avec le SI (tableau 1.4 du tome 1).

Nom	Valeur
Unité astronomique (ua)	$1{,}496 \times 10^{11}$ m
année-lumière (al)	$9{,}461 \times 10^{15}$ m
parsec (pc)	$3{,}086 \times 10^{16}$ m
angström (Å)	1×10^{-10} m
mille marin	1852 m

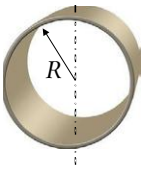
TABLEAU C.2

Le moment d'inertie de quelques solides homogènes de masse M pour un axe de rotation passant par le centre de masse (tableau 11.3 du tome 1).



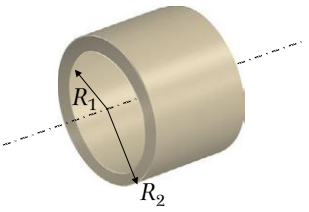
cerceau
par rapport à son axe

$I_{cm} = MR^2$



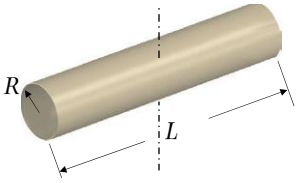
cerceau
par rapport à son diamètre

$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$



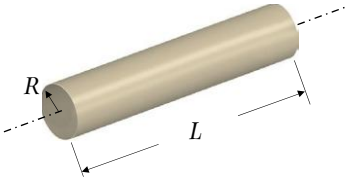
cylindre creux
par rapport à son axe

$I_{cm} = \frac{1}{2}M\,(R_2^2 + R_1^2)$



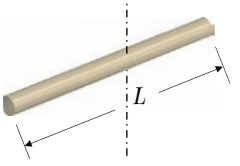
cylindre
par rapport à son diamètre central

$I_{cm} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$



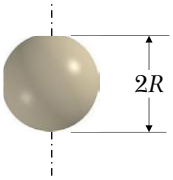
cylindre (disque)
par rapport à son axe

$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$



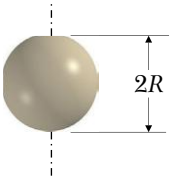
tige mince
par rapport à son diamètre central

$I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$



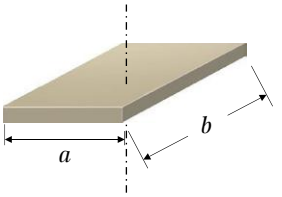
sphère pleine
par rapport à son diamètre

$I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$



sphère creuse
par rapport à son diamètre

$I_{cm} = \frac{2}{3}MR^2$



plaque
(axe perpendiculaire)

$I_{cm} = \frac{1}{12}M\,(a^2 + b^2)$

TABLEAU C.3

La valeur approximative de la constante diélectrique κ et de la rigidité diélectrique E_{max} à 20 °C (tableau 5.1 du tome 2).

Substance	κ	E_{max} (10^6 V/m)	Substance	κ	E_{max} (10^6 V/m)
Air	1,000 59	3	Plexiglas	3,4	
Eau	80,4		Polyéthylène	2,25	
Germanium	16		Polystyrène	2,6	24
Glycérine	42,5		Porcelaine	6 à 8	
Méthanol	33,6		PVC	3,4	40
Mica	3 à 6	150	Teflon	2,1	60
Papier	3	16	Verre	4 à 7	10 à 14

TABLEAU C.4

La résistivité (ρ) et le coefficient thermique de résistivité (α) de quelques métaux à 20 °C (tableau 6.1 du tome 2).

Matériau	ρ ($\Omega \cdot$ m)	α (K^{-1})	Matériau	ρ ($\Omega \cdot$ m)	α (K^{-1})
Aluminium	$2{,}65 \times 10^{-8}$	$3{,}9 \times 10^{-3}$	Nickel	$6{,}93 \times 10^{-8}$	$5{,}9 \times 10^{-3}$
Argent	$1{,}59 \times 10^{-8}$	$3{,}8 \times 10^{-3}$	Or	$2{,}21 \times 10^{-8}$	$3{,}4 \times 10^{-3}$
Cuivre	$1{,}68 \times 10^{-8}$	$3{,}9 \times 10^{-3}$	Platine	$1{,}05 \times 10^{-7}$	$3{,}92 \times 10^{-3}$
Fer	$8{,}57 \times 10^{-8}$	$5{,}0 \times 10^{-3}$	Plomb	$1{,}92 \times 10^{-7}$	$4{,}3 \times 10^{-3}$
Laiton	$6{,}08 \times 10^{-8}$	$2{,}0 \times 10^{-3}$	Tungstène	$5{,}28 \times 10^{-8}$	$4{,}5 \times 10^{-3}$
Nichrome	$1{,}08 \times 10^{-6}$	4×10^{-4}			

TABLEAU C.5

Les symboles des composants utilisés dans les circuits (tableau 7.1 du tome 2).

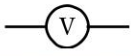
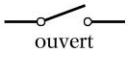
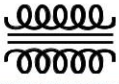
Composant	Symbole	Composant	Symbole
Pile		Voltmètre	
Condensateur		Ampèremètre	
Fil		Bobine d'induction	
Interrupteur	 ouvert fermé	Générateur	
		Transformateur	
Résistance		Diode	

TABLEAU C.6

Le module de la vitesse du son pour quelques substances à 20 °C et 1 atm, sauf avis contraire (tableau 3.2).

Substance	v (m/s)	Substance	v (m/s)	Substance	v (m/s)
Gaz		*Liquide*		*Solide*	
Air (0 °C)	331	Eau (0 °C)	1 401	Acier	5 940
Air (25 °C)	343	Eau	1 483	Aluminium	6 420
Hélium (0 °C)	965	Eau de mer	1 522	Cuivre	4 760
Hydrogène	1 310			Fer	4 994
Néon (0 °C)	435				

TABLEAU C.7

Les valeurs approximatives de l'indice de réfraction pour différentes substances à une longueur d'onde dans le vide de 589 nm. Ces valeurs varient en fonction des propriétés physiques des substances (pression, température...) (tableau 5.1).

Substance	Indice	Substance	Indice
Gaz à 0 °C *et* 1 atm		*Solide à* 20 °C	
Air	1,000 29	Ambre	1,55
Gaz carbonique	1,000 45	Chlorure de sodium	1,544
Hélium	1,000 036	Diamant	2,419
Hydrogène	1,000 132	Glace (0 °C)	1,31
		Plexiglass	1,51
Liquides à 20 °C		Pyrex	1,47
Disulfure de carbone	1,628	Saphir	1,77
Benzène	1,501	Verre crown	1,52
Eau	1,333	Verre de quartz	1,468
Éthanol	1,361	Verre flint	1,66
Glycérine	1,473	Verre flint au lanthane	1,80
Tétrachlorure de carbone	1,461	Zircon	1,923

TABLEAU C.8

Le travail d'extraction pour différents éléments (tableau 10.1).

Élément	Φ (eV)	Élément	Φ (eV)
Aluminium	4,1	Indium	4,09
Béryllium	4,98	Magnésium	3,66
Cadmium	4,08	Plomb	4,22
Césium	2,14	Potassium	2,29
Cuivre	4,7	Sodium	2,36
Étain	4,42	Titane	4,33
Fer	4,7		

TABLEAU C.9

La masse des particules qui interviennent en physique nucléaire (tableau 13.1).

Particule	en u	en MeV/c^2	en kg
Électron	0,000 548 6	0,511 003	$9{,}109 \times 10^{-31}$
Proton	1,007 276 5	938,272	$1{,}673 \times 10^{-27}$
Neutron	1,008 664 9	939,565	$1{,}675 \times 10^{-27}$
Atome d'hydrogène 1 $\left({}^{1}_{1}\mathrm{H}\right)$	1,007 825 0		
Atome d'hélium 4 $\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right)$	4,002 603 2		
Unité de masse atomique (1 u)	1	931,5	$1{,}661 \times 10^{-27}$

TABLEAU C.10

Le facteur de pondération selon le type de rayonnement ionisant (tableau 13.4).

Particules	Énergie	w_R
Photons	toutes	1
Électrons	toutes	1
Protons	toutes	2
Neutrons	$K < 10$ keV	2,5 à 3
	10 keV $< K <$ 100 keV	3 à 10
	100 keV$K <$ 2 MeV	10 à 17,5
	2 MeV$K <$ 20 keV	17,5 à 7
	$K >$ 20 keV	7 à 2,5
Particules alpha	toutes	20

TABLEAU C.11

Les fermions élémentaires (tableau 14.1).

Génération	Type	Saveur	Symbole	Charge (e)	Masse (MeV/c^2)	Durée de vie (s)
1	Quark	Up	u	+2/3	$2{,}3 \pm 0{,}7$	
		Down	d	–1/3	$4{,}8 \pm 0{,}7$	
	Lepton	Neutrino électronique	ν_e	0	$< 2 \times 10^{-6}$	
		Électron	e^-	–1	0,511 0	stable
2	Quark	Charm	c	+2/3	$1\,275 \pm 25$	
		Strange	s	–1/3	95 ± 5	
	Lepton	Neutrino muonique	ν_μ	0	$< 2 \times 10^{-6}$	
		Muon	μ^-	–1	105,7	$2{,}197\,0 \times 10^{-6}$
3	Quark	Top	t	+2/3	$(173{,}5 \pm 1{,}5) \times 10^3$	$3{,}3 \times 10^{-25}$
		Bottom	b	–1/3	$(4{,}18 \pm 0{,}03) \times 10^3$	
	Lepton	Neutrino tauique	ν_τ	0	$< 2 \times 10^{-6}$	
		tauon	τ^-	–1	$1\,776{,}82 \pm 0{,}16$	$2{,}91 \times 10^{-13}$

TABLEAU C.12

Les bosons élémentaires (tableau 14.2).

Interaction	Nom	Symbole	Charge (e)	Masse (GeV/c^2)	Spin
Forte	Gluons (8)	g	0	0	1
Électromagnétique	Photon	γ	0	0	1
Faible	Boson W^+	W^+	+1	$80{,}385 \pm 0{,}015$	1
	Boson W^-	W^-	–1	$80{,}385 \pm 0{,}015$	1
	Boson Z	Z^0	0	$91{,}187\,6 \pm 0{,}002\,1$	1
Gravitationnelle	Graviton ?	G	0	0	2
(Masse)	Boson de Higgs	H^0	0	≈ 126 ?	0

Annexe D

Quelques données astronomiques

Les propriétés orbitales

Nom	Rayon moyen (10^6 km)	Période orbitale (jours)	Inclinaison de l'orbite (°)	Excentricité de l'orbite
Mercure	57,91	87,97	7,00	0,21
Vénus	108,2	224,70	3,39	0,01
Terre	149,60	365,26	0,00	0,02
Lune	0,384	27,32	5,14	0,05
Mars	227,94	686,98	1,85	0,09
Jupiter	778,33	4332,71	1,31	0,05
Saturne	1429,4	10759,5	2,49	0,06
Uranus	2870,99	30685	0,77	0,05
Neptune	4504,3	60190	1,77	0,01

Les propriétés physiques

Nom	Rayon équatorial (km)	Masse (kg)	Masse volumique (g/cm^3)	Période sidérale de rotation* (jours)
Soleil	$6{,}95 \times 10^5$	$1{,}99 \times 10^{30}$	1,41	24,6
Mercure	2440	$3{,}30 \times 10^{23}$	5,43	58,6
Vénus	6052	$4{,}87 \times 10^{24}$	5,24	–243
Terre	6378	$5{,}974 \times 10^{24}$	5,52	0,9973
Lune	1738	$7{,}35 \times 10^{22}$	3,34	27,32
Mars	3397	$6{,}42 \times 10^{23}$	3,93	1,03
Jupiter	71492	$1{,}90 \times 10^{27}$	1,33	0,41
Saturne	60268	$5{,}68 \times 10^{26}$	0,69	0,45
Uranus	25559	$8{,}68 \times 10^{25}$	1,32	–0,72
Neptune	24766	$1{,}02 \times 10^{26}$	1,64	0,67

*Les valeurs négatives de période orbitale indiquent une rotation rétrograde.

D'autres données

Nom	Accélération en chute libre† (g)	Vitesse de libération (km/s)	Vitesse orbitale moyenne (km/s)	Température à la surface (K)	Pression (atm)
Mercure	0,378	4,44	47,87	440	0
Vénus	0,907	10,36	35,02	730	93
Terre	1,000	11,19	29,79	287	1
Mars	0,377	5,03	24,13	218	0,007
Jupiter	2,364	59,5	13,06	120	
Saturne	0,916	35,5	9,66	88	
Uranus	0,889	21,3	6,80	59	
Neptune	1,125	23,5	5,44	48	

†À l'équateur de l'astre

Annexe E

Les formules mathématiques

Les symboles mathématiques

$=$	égal
$\equiv$	défini par
$\neq$	différent
$\approx$	approximativement égal
$<$	plus petit
$\leq$	plus petit ou égal
$\ll$	beaucoup plus petit
$>$	plus grand
$\geq$	plus grand ou égal
$\gg$	beaucoup plus grand
∞	l'infini
$\propto$	proportionnel
$\sim$	du même ordre de grandeur
$\lvert x \rvert$	valeur absolue de x
!	factorielle
ln	logarithme népérien
$\log_a$	logarithme en base a
log	logarithme en base 10
$\lim_{x \to a}$	limite lorsque x tend vers a
Σ	somme
$f(x)$	une fonction de x
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	dérivée de f par rapport à x
$\frac{\partial f}{\partial x}$	dérivée partielle de f par rapport à x
$\mathrm{d}x$	différentielle de x
Δx	variation de x
$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	intégrale de f

L'équation quadratique

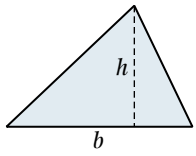
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a comme solution :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La géométrie

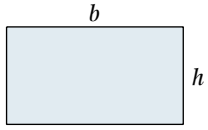
Le triangle

$$A = \frac{bh}{2}$$



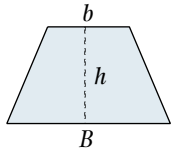
Le rectangle

$$A = bh$$



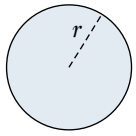
Le trapèze

$$A = \left(\frac{b+B}{2}\right)h$$



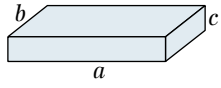
Le cercle

$$C = 2\pi r$$
$$A = \pi r^2$$



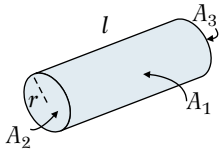
La boîte

$$V = abc$$



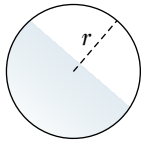
Le cylindre

$$A_1 = 2\pi rl$$
$$A_2 = A_3 = \pi r^2$$
$$V = \pi r^2 l$$



La sphère

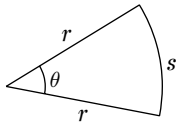
$$A = 4\pi r^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



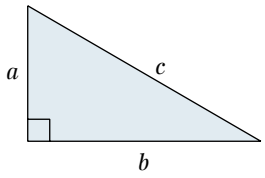
L'arc de cercle

$$s = r\theta$$

(θ en radians)



Le théorème de Pythagore



Pour un triangle rectangle,
$a^2 + b^2 = c^2$.

Les fonctions trigonométriques

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

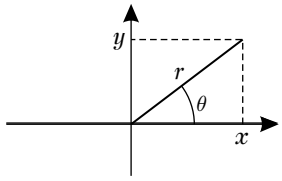
$$\sin\theta = \frac{x}{r}$$

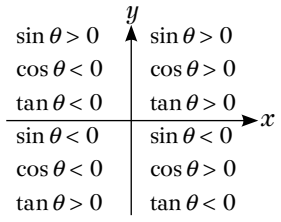
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\text{cotan}\,\theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin\theta}$$





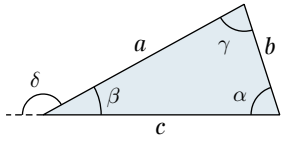
Les triangles

$\alpha + \beta + \gamma = 180° = \pi$ rad

$\delta = \alpha + \gamma$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



Les identités trigonométriques

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \quad \text{(E.1)}$$

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta \quad \text{(E.2)}$$

$$\sin(180° - \theta) = \sin\theta \quad \text{(E.3)}$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \quad \text{(E.4)}$$

$$\cos(90° - \theta) = \sin\theta \quad \text{(E.5)}$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \quad \text{(E.6)}$$

$$\tan(\theta + 180°) = \tan\theta \quad \text{(E.7)}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \text{(E.8)}$$

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \quad \text{(E.9)}$$

$$\text{cosec}^2\theta - \text{cotan}^2\theta = 1 \quad \text{(E.10)}$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \quad \text{(E.11)}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \text{(E.12)}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \quad \text{(E.13)}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \quad \text{(E.14)}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \quad \text{(E.15)}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad \text{(E.16)}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad \text{(E.17)}$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \quad \text{(E.18)}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right) \quad \text{(E.19)}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad \text{(E.20)}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad \text{(E.21)}$$

$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \quad \text{(E.22)}$$

Les exposants et les logarithmes

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn} \qquad \log_a(a^x) = x$$

$$\ln(e^x) = x \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab) \qquad \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \qquad \ln(x^n) = n\ln x$$

Les développements en série et les approximations

Le binôme

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots \qquad (x^2 < 1)$$

$$(1+x)^n \approx 1 + nx \qquad (\text{si } |x| \ll 1)$$

L'exponentielle

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Le logarithme

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \qquad (|x| < 1)$$

Les fonctions trigonométriques (θ en rad)

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \cdots \qquad (|\theta| < \pi/2)$$

L'approximation des petits angles

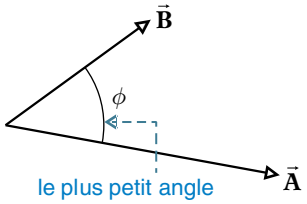
$$\left.\begin{array}{l}\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta \\ \cos\theta \approx 1\end{array}\right\} \qquad (|\theta| \ll 1\,\text{rad})$$

Cette approximation est valable pour $|\theta| \leq 5{,}0°$.

Les produits de vecteurs

Le produit scalaire

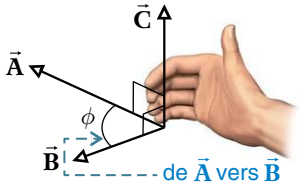
$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos\phi = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$



$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}}$$

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}}$$

Le produit vectoriel



$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$$

$$C = AB\sin\phi$$

$$\vec{\mathbf{C}} = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{\boldsymbol{\imath}} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{\boldsymbol{\jmath}} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{\boldsymbol{k}}$$

Le vecteur $\vec{\mathbf{C}}$ est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$. Son sens est donné par la règle de la main droite.

Les dérivées

Dans les équations suivantes, a et n représentent des constantes, alors que u et v représentent des fonctions quelconques de x.

$$\frac{da}{dx} = 0 \qquad \text{(E.23)}$$

$$\frac{dx}{dx} = 1 \qquad \text{(E.24)}$$

$$\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx} \qquad \text{(E.25)}$$

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \qquad \text{(E.26)}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} \qquad \text{(E.27)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \qquad \text{(E.28)}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) \qquad \text{(E.29)}$$

$$\frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du}\frac{du}{dx} \qquad \text{(E.30)}$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad \text{(E.31)}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{(E.32)}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{x\ln(a)} \qquad \text{(E.33)}$$

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \qquad \text{(E.34)}$$

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x) \qquad \text{(E.35)}$$

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x) \qquad \text{(E.36)}$$

$$\frac{d}{dx}\text{cotan}(x) = -\text{cosec}^2(x) \qquad \text{(E.37)}$$

$$\frac{d}{dx}\sec(x) = \tan(x)\sec(x) \qquad \text{(E.38)}$$

$$\frac{d}{dx}\text{cosec}(x) = -\text{cotan}(x)\,\text{cosec}(x) \qquad \text{(E.39)}$$

L'alphabet grec

Alpha	A	α	Êta	H	η	Nu	N	ν	Tau	T	τ
Bêta	B	β	Thêta	Θ	θ, ϑ	Xi	Ξ	ξ	Upsilon	Υ	υ
Gamma	Γ	γ	Iota	I	ι	Omicron	O	o	Phi	Φ	ϕ, φ
Delta	Δ	δ	Kappa	K	κ	Pi	Π	π, ϖ	Khi	X	χ
Epsilon	E	ϵ, ε	Lambda	Λ	λ	Rhô	P	ρ, ϱ	Psi	Ψ	ψ
Zêta	Z	ζ	Mu	M	μ	Sigma	Σ	σ, ς	Oméga	Ω	ω

Les intégrales

Une constante arbitraire doit être ajoutée à chaque intégrale indéfinie. Les arguments des fonctions trigonométriques doivent être exprimés en rad. Les lettres a, b et n représentent des constantes, alors que les lettres u et v représentent des fonctions quelconques de x.

$$\int au\,\mathrm{d}x = a\int u\,\mathrm{d}x \tag{E.40}$$

$$\int (u+v)\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}x + \int v\,\mathrm{d}x \tag{E.41}$$

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u \tag{E.42}$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1) \tag{E.43}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| \tag{E.44}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln|a+bx| \tag{E.45}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b\,(a+bx)} \tag{E.46}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}\ln|a+bx| \tag{E.47}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \tag{E.48}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad (x^2 > a^2) \tag{E.49}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| \quad (x^2 < a^2) \tag{E.50}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2 \pm x^2\right| \tag{E.51}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \quad (x^2 < a^2) \tag{E.52}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \tag{E.53}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} \tag{E.54}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} \tag{E.55}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} \tag{E.56}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \tag{E.57}$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2} \tag{E.58}$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} \tag{E.59}$$

$$\int x\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = (ax-1)\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2} \tag{E.60}$$

$$\int x^2\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)\,\mathrm{e}^{ax} \tag{E.61}$$

$$\int \ln(ax)\,\mathrm{d}x = x\ln|ax| - x \tag{E.62}$$

$$\int x\ln(x) = x^2\left(\frac{\ln(x)}{2} - \frac{1}{4}\right) \tag{E.63}$$

$$\int \sin(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax) \tag{E.64}$$

$$\int \cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax) \tag{E.65}$$

$$\int \tan(ax) = \frac{1}{a}\ln|\sec(ax)| \tag{E.66}$$

$$\int \operatorname{cotan}(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax)| \tag{E.67}$$

$$\int \sec(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|\sec(ax) + \tan(ax)| \tag{E.68}$$

$$\int \operatorname{cosec}(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{cosec}(ax) - \operatorname{cotan}(ax)| \tag{E.69}$$

$$\int \sin^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} \tag{E.70}$$

$$\int \cos^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} \tag{E.71}$$

$$\int \operatorname{cosec}^2(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\operatorname{cotan}(ax) \tag{E.72}$$

$$\int \sec^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\tan(ax) \tag{E.73}$$

$$\int \tan^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\tan(ax) - x \tag{E.74}$$

$$\int \operatorname{cotan}^2(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\operatorname{cotan}(ax) - x \tag{E.75}$$

$$\int_0^\infty x^n\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}} \tag{E.76}$$

$$\int_0^\infty x^{2n}\,\mathrm{e}^{-ax^2} = \frac{1\times 3\times\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{E.77}$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad (a>0) \tag{E.78}$$

Annexe F

Les propriétés des éléments

Le tableau suivant donne le numéro atomique (Z), la masse molaire (M) et la masse volumique (ρ) à 20 °C.

Consulter le site WebElements pour plus de détails.

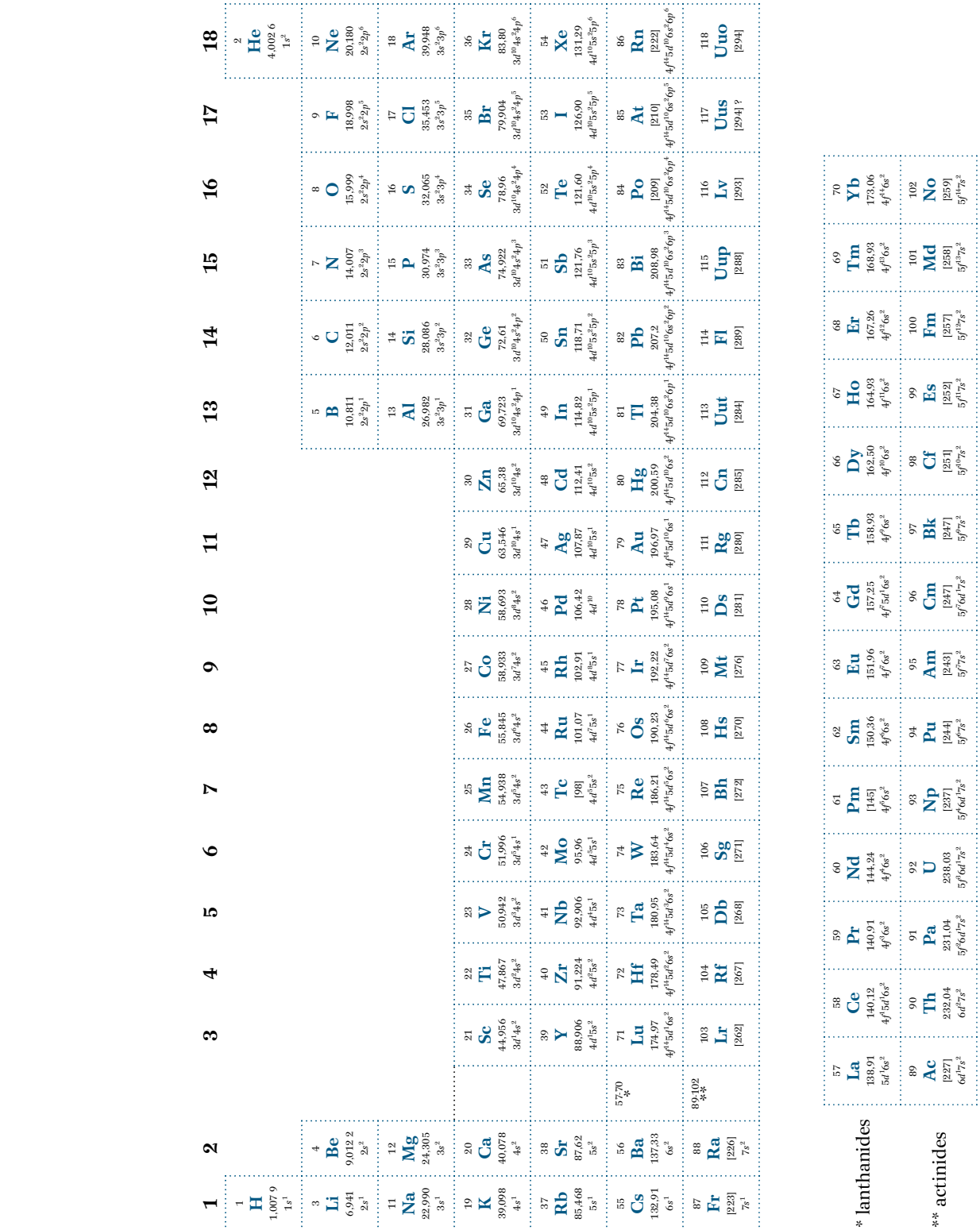
Élément	Symbole	Z	M (g/mol)	ρ (g/cm^3)	Élément	Symbole	Z	M (g/mol)	ρ (g/cm^3)
Actinium	Ac	89	[227]	10,070	Erbium	Er	68	167,26	9,066
Aluminium	Al	13	26,982	2,700	Étain	Sn	50	118,71	7,310
Américium	Am	95	[243]	13,670	Europium	Eu	63	151,96	5,244
Antimoine	Sb	51	121,76	6,697	Fer	Fe	26	55,845	7,874
Argent	Ag	47	107,87	10,490	Fermium	Fm	100	[257]	
Argon	Ar	18	39,948		Flerorium	Fl	114	[289]	
Arsenic	As	33	74,922	5,727	Fluor	F	9	18,998	
Astate	At	85	[210]		Francium	Fr	87	[223]	
Azote	N	7	14,007		Gadolinium	Gd	64	157,25	7,901
Baryum	Ba	56	137,33	3,510	Gallium	Ga	31	69,723	5,904
Berkélium	Bk	97	[247]	14,780	Germanium	Ge	32	72,61	5,323
Béryllium	Be	4	9,0122	1,848	Hafnium	Hf	72	178,49	13,310
Bismuth	Bi	83	208,98	9,780	Hassium	Hs	108	[270]	
Bohrium	Bh	107	[272]		Hélium	He	2	4,0026	
Bore	B	5	10,811	2,460	Holmium	Ho	67	164,93	8,795
Brome	Br	35	79,904		Hydrogène	H	1	1,0079	
Cadmium	Cd	48	112,41	8,650	Indium	In	49	114,82	7,310
Calcium	Ca	20	40,078	1,550	Iode	I	53	126,90	4,940
Californium	Cf	98	[251]	15,100	Iridium	Ir	77	192,22	22,650
Carbone	C	6	12,011	2,267	Krypton	Kr	36	83,80	
Cérium	Ce	58	140,12	6,689	Lanthane	La	57	138,91	6,146
Césium	Cs	55	132,91	1,879	Lawrencium	Lr	103	[262]	
Chlore	Cl	17	35,453		Lithium	Li	3	6,941	0,535
Chrome	Cr	24	51,996	7,140	Livermorium	Lv	116	[293]	
Cobalt	Co	27	58,933	8,900	Lutécium	Lu	71	174,97	9,841
Copernicium	Cn	112	[285]		Magnésium	Mg	12	24,305	1,738
Cuivre	Cu	29	63,546	8,920	Manganèse	Mn	25	54,938	7,470
Curium	Cm	96	[247]	13,510	Meitnerium	Mt	109	[276]	
Darmstadtium	Ds	110	[281]		Mendélévium	Md	101	[258]	
Dubnium	Db	105	[268]		Mercure	Hg	80	200,59	
Dysprosium	Dy	66	162,50	8,551	Molybdène	Mo	42	95,96	10,280
Einsteinium	Es	99	[252]		Néodyme	Nd	60	144,24	6,800

Élément	Symbole	Z	M (g/mol)	ρ (g/cm^3)	Élément	Symbole	Z	M (g/mol)	ρ (g/cm^3)
Néon	Ne	10	20,180		Rutherfordium	Rf	104	[267]	
Neptunium	Np	93	[237]	20,45	Samarium	Sm	62	150,36	7,353
Nickel	Ni	28	58,693	8,908	Scandium	Sc	21	44,956	2,985
Niobium	Nb	41	92,906	8,570	Seaborgium	Sg	106	[271]	
Nobélium	No	102	[259]		Sélénium	Se	34	78,960	4,819
Or	Au	79	196,97	19,300	Silicium	Si	14	28,086	2,330
Osmium	Os	76	190,23	22,610	Sodium	Na	11	22,990	0,968
Oxygène	O	8	15,999		Soufre	S	16	32,065	1,960
Palladium	Pd	46	106,42	12,023	Strontium	Sr	38	87,62	2,630
Phosphore	P	15	30,974	1,823	Tantale	Ta	73	180,95	16,650
Platine	Pt	78	195,08	21,090	Technétium	Tc	43	[98]	11,500
Plomb	Pb	82	207,2	11,340	Tellure	Te	52	127,60	6,240
Plutonium	Pu	94	[244]	19,816	Terbium	Tb	65	158,93	8,219
Polonium	Po	84	[209]	9,196	Thallium	Tl	81	204,38	11,850
Potassium	K	19	39,098	0,856	Thorium	Th	90	232,04	11,724
Praséodyme	Pr	59	140,91	6,640	Thulium	Tm	69	168,93	9,321
Prométhium	Pm	61	[145]	7,264	Titane	Ti	22	47,867	4,507
Protactinium	Pa	91	231,04	15,370	Tungstène	W	74	183,84	19,250
Radium	Ra	88	[226]	5,000	Uranium	U	92	238,03	19,050
Radon	Rn	86	[222]		Vanadium	V	23	50,942	6,110
Rhénium	Re	75	186,21	21,020	Xénon	Xe	54	131,29	
Rhodium	Rh	45	102,91	12,450	Ytterbium	Yb	70	173,06	6,570
Roentgenium	Rg	111	[280]		Yttrium	Y	39	88,906	4,472
Rubidium	Rb	37	85,468	1,532	Zinc	Zn	30	65,38	7,140
Ruthénium	Ru	44	102,91	12,370	Zirconium	Zr	40	91,224	6,511

Pour les éléments dont tous les isotopes sont instables, la colonne de la masse molaire indique la masse molaire de l'isotope le plus stable entre crochets.

Annexe G

Le tableau périodique des éléments



Les symboles des éléments sont ceux qui sont recommandés par l'International Union of Pure and Applied Chemistry.

Consulter le site WebElements pour plus de détails.

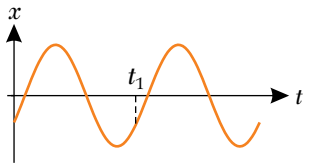
Réponses aux questions et exercices

CHAPITRE 1

1. (iv)

2. **a.** 5 **b.** 8 **c.** 1 et 7 **d.** 2 et 6

3. **a.**



b. Vers la droite

4. **a.** $x_{4m} < x_{3m} < x_{1m} < x_{2m}$

b. $T_3 < T_1 = T_4 < T_2$

c. $v_{4m} < v_{1m} = v_{2m} < v_{3m}$

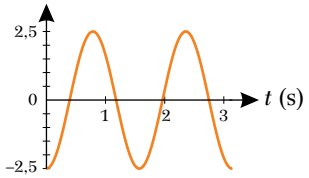
5. $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \dfrac{\pi}{2}$

6. $x_m = 20$ cm

7. **a.** $T = 1{,}6$ s **b.** $x_m = 11$ cm **c.** $a_m = 1{,}8$ m/s^2

8. **a.** $T = 1{,}57$ s et $f = 0{,}637$ Hz **b.** $d = 4x_m = 10{,}0$ cm

c. x (cm)



d. $v_x = -(10{,}0 \text{ cm/s}) \sin(4t + \pi)$, où t est en secondes.

e. $a_x = 0{,}384$ m/s^2

9. **a.** $v_x = 0{,}594$ m/s **b.** $a_x = 0{,}588$ m/s^2

c. $t = T = 3{,}17$ s

10. **a.** $T = 4{,}60$ s **b.** $x_m = 12{,}5$ cm **c.** $v_x = \pm 13{,}7$ cm/s

11. **a.** $T = 5{,}0$ s **b.** $x_m = 4{,}0$ cm **c.** $\phi = -0{,}72$ rad

d. $v_x = -\dfrac{8\pi}{5} \sin\left(\dfrac{2\pi}{5}t - 0{,}72\right)$

où v_x est en cm/s et t en s.

12. $x = 0{,}320 \cos(2{,}62t + 2{,}20)$, où x est en m et t, en s.

13. **a.** $T = 2{,}00$ s **b.** $x_m = 12{,}4$ cm

14. **a.** $\omega = 14{,}3$ rad/s

b. $v_y = -2{,}86 \text{ m/s} \cos(14{,}3t)$, où t est en secondes.

15. **a.** $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{4}$ **b.** $\dfrac{a_{1m}}{a_{2m}} = 4$

16. Le graphique (v)

17. **a.** $k = 30{,}8$ N/m **b.** $v_m = 0{,}785$ m/s

c. $x = 0{,}200 \text{ m} \cos(3{,}93t)$ où x est en m et t, en s.

d. $v_{moy,x} = -0{,}0541$ m/s

18. $T = 0{,}449$ s

19. $m_{éq} = 7{,}9 \times 10^2$ kg

20. **a.** $d = 8{,}18$ cm **b.** $N = 8{,}72$ oscillations

c. $v_m = 0{,}896$ m/s **d.** $a_m = 9{,}81$ m/s^2

21. $f = 2{,}2$ Hz

22. $x_m = 18{,}5$ cm

23. **a.** $k = 22{,}5$ N/m **b.** $x_m = 18{,}4$ cm **c.** $\phi = 1{,}84$ rad

24. $m = 120$ g

25. **a.** $y_m = 6{,}30$ cm **b.** $T = 0{,}504$ s

28. **a.** $v_{iii,m} < v_{ii,m} < v_{i,m}$

b. $\omega_{iii} < \omega_{ii} < \omega_i$

29. $x_m = 44{,}5$ cm

30. $k = 2{,}71 \times 10^4$ N/m

31. $x = \pm 30{,}3$ cm

32. **a.** $x = \pm\dfrac{x_m}{\sqrt{2}}$ **b.** $v = \dfrac{\omega x_m}{\sqrt{2}}$

33. T est augmentée d'un facteur $\sqrt{6} = 2{,}45$.

34. **a.** Deux fois **b.** Deux fois **c.** 50 % du temps

35. $T_{(ii)} < T_{(i)} < T_{(iii)}$

36. **a.** $L = 0{,}559$ m **b.** $\theta_m = 0{,}107 \text{ rad} = 6{,}12°$

37. **a.** $\Delta t = T = 5{,}67$ s **b.** $\omega_m = 9{,}66 \times 10^{-3}$ rad/s

39. **a.** $T = 1{,}64$ s **b.** $\theta_m = 4{,}48°$

40. $T = 1{,}01$ s

41. **a.** $T = 1{,}40$ s **b.** $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)_m = 0{,}24$ rad/s

c. $\alpha_z = -0{,}42$ rad/s^2

42. **a.** $T = 2{,}01$ s

b. $\theta = 0{,}175 \cos(3{,}13t + 1{,}05)$, où θ est en rad et t, en s.

c. $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)_m = 0{,}547$ rad/s

d. $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right) = \pm 0{,}473$ rad/s

e. $\alpha_z = -1{,}37$ rad/s^2

43. **a.** $T = 1{,}20$ s **b.** $T = 1{,}35$ s

c. Il n'y a pas d'oscillation.

44. **a.** $T = 11{,}8$ s **b.** $\alpha_z = -0{,}040$ rad/s^2

45. **a.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L^2 + 12x^2}{12gx}}$

b. $x = 0{,}289L$ **c.** $x = 28{,}9$ cm **d.** $T = 1{,}52$ s

46. **a.** $T = \sqrt{2}T_0$ **b.** $T = \sqrt{3}T_0$ **c.** $T = 4T_0$

47. $C = 37{,}7$ pF

48. $L = 0{,}20$ H

49. **a.** $\Delta t = 408$ µs **b.** $\Delta V_{Cm} = 4{,}14$ V

50. **a.** $Q = 150$ µC cos $(1{,}41 \times 10^3 t)$, où t est en secondes.
b. $i = 0{,}212$ A

51. **a.** La période diminue. **b.** La période augmente.
c. La période augmente.
d. La période ne change pas.

52. Un amortissement trop faible cause des oscillations qui durent quelques secondes chaque fois que l'auto est secouée par un cahot de la route, alors qu'un amortissement trop fort transmet plus directement le mouvement des roues à tout l'habitacle à chaque impact.

53. **a.** $b = 1{,}49 \times 10^{-3}$ kg/s **b.** $N = 47{,}7$ oscillations
c. $\Delta E/E_0 = 36{,}0$ %

54. $b = 237$ kg/s

55. $E_f/E_0 = 43{,}2$ %

56. **a.** $f = 483$ Hz **b.** $Q = -16{,}2$ µC

57. $d = 24{,}1$ m

58. **a.** amorti **b.** libre **c.** entretenu **d.** amorti
e. entretenu **f.** libre **g.** entretenu

59. $f = 142$ Hz

60. Le pendule de 1,00 m est en résonance avec les impulsions, et celui de 25 cm aussi, puisqu'il reçoit une impulsion toutes les deux oscillations.

61. 64,1 Hz $< f <$ 78,3 Hz

CHAPITRE 2

1. **a.** Une onde transversale
b. Ce n'est pas une onde progressive.
c. Une onde longitudinale
d. Une onde transversale
e. Une impulsion longitudinale
f. Une onde mixte

2. **a.** $d = 1{,}8 \times 10^2$ km **b.** $\Delta t = 25$ s

3. **a.** $v_{(i)} < v_{(iii)} < v_{(ii)}$
b. $s(x\,;t)$

5. $v_3 < v_4 < v_1 = v_2$

6. L'onde est plus rapide dans la section où le diamètre est plus petit. La tension est la même dans les deux sections de corde, et seule la masse linéique change d'une section à l'autre. La vitesse varie selon l'inverse de la racine carrée de la masse linéique.

7. $v/v_0 = \sqrt{3}$

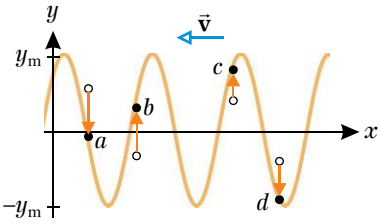
8. $v = 57{,}2$ m/s

9. $d_2 = 1{,}16$ mm

10. $t = 46{,}1$ ms

11. $F = 230$ N

12. Les points a et d sont en train de descendre, et les points b et c sont en train de monter, comme le montre la figure suivante, qui représente l'onde à un instant plus tard.



13. On trouve la vitesse à l'aide de la pente.
a. Vers le bas **b.** Vers le haut
c. Est immobile. **d.** Vers le bas

14. **a.** $v = v_m$: 2 fois par cycle
b. $a = a_m/2$: 4 fois par cycle
c. $v > 0$ et $y = y_m/3$: 2 fois par cycle

15. **a.** $v_3 < v_1 < v_2 < v_4$
b. $\mu_4 < \mu_2 < \mu_1 < \mu_3$

16. $\lambda = 730$ m

17. **a.** $y_m = 1{,}05$ cm **b.** $f = 3{,}33$ Hz **c.** $v = 5{,}83$ m/s

18. **a.** $f = 20{,}4$ Hz **b.** $\lambda = 83{,}8$ cm
c. $\vec{v} = 17{,}1$ m/s vers la droite
d. $\mu = 61{,}8$ g/m
e. $y = 1{,}09$ cm et $v_y = 78{,}3$ cm/s

19. $y(x\,;t) = 7{,}75$ cm sin $(0{,}073\,9x - 4{,}58t)$, où x est en centimètres et t, en secondes.

20. $\Delta\Phi = 1{,}06$ rad

21. **a.** $d = 8{,}22$ m
b. $y = 12{,}0$ mm sin $(0{,}573x - 88{,}0t + 5\pi/6)$, où x est en mètres et t, en secondes.

22. **a.** $y_m = 2{,}0$ cm **b.** $f = 38{,}5$ Hz
c. $y_m = 2{,}0$ cm sin $(4{,}2x - 2{,}4 \times 10^2 t + 2{,}6)$, où x est en mètres et t, en secondes.

23. La puissance doit quadrupler.

24. **a.** $v_1/v_2 = 1/2$
b. $P_1/P_2 = 2$

25. $F = 68{,}5$ N

26. **a.** $y_m = 2{,}80$ cm

b. $y = 2{,}80 \text{ cm} \sin(2{,}91x + 70{,}0\pi t + 1{,}11)$, où x est en mètres et t, en secondes.

c. $v_y = 2{,}75$ m/s

27.

a.

b.

28. La fréquence de l'onde transmise est la même que la fréquence de l'onde réfléchie, car le point de jonction doit osciller à une seule fréquence.

29. $t = 0{,}240$ s

30. **a.** Elle est inversée. **b.** $\Delta t = 3{,}02$ s

31. **a.** La corde sera effectivement droite au moment où les impulsions seront centrées sur le même point.

b. Les points de la corde aux environs du point de rencontre sont tout de même en mouvement, et ce mouvement contient toute l'énergie transportée. Les points de la corde soumis à la fois au passage des deux impulsions sont agités de façon plus violente que s'ils étaient soumis à une seule impulsion, d'où le fait que l'énergie totale des deux impulsions peut être contenue dans la même zone sur la corde.

32. $y = 15{,}3$ mm

33. **a.** Interférence destructive

b. Interférence intermédiaire

c. Interférence constructive

d. Interférence intermédiaire

34. **a.** $\Delta\Phi = 1{,}45$ rad **b.** $\Delta\Phi = 2{,}09 \text{ rad} = 2\pi/3$ rad

35. **a.** C'est une interférence intermédiaire.

b. amplitude $= 0{,}765 y_m$

36. $y_1 = 3{,}50 \text{ cm} \sin(125x - 25t - 0{,}775)$

$y_2 = 3{,}50 \text{ cm} \sin(125x - 25t + 0{,}775)$

37. $f = 3{,}50$ Hz

38. $y(x; t) = 0{,}060 \sin(20{,}9x) \cos(25{,}1t)$

39. **a.** $v = 33{,}3$ cm/s **b.** $f = 3{,}98$ Hz **c.** $d = 4{,}19$ cm

d. $v_y = 21{,}9$ cm/s **e.** $a_m = 12{,}5$ m/s^2

40. **a.** 6 nœuds **b.** 5 ventres

c. 2,5 longueurs d'onde

41. Augmentation de la fréquence d'un facteur 4/3

42. Le 4^e mode

43. $\mu_A / \mu_B = 0{,}444$

44. $n = (8i)$, où $i = 1, 2, 3, \ldots$

45. $f_2 = 392$ Hz et $f_3 = 588$ Hz

46. $F = 1{,}16$ kN

47. $L = 0{,}750$ m

48. $F = 90{,}2$ N

49. **a.** $v = 50{,}0$ m/s **b.** $x = 0{,}150$ m

c. $y(x; t) = 0{,}003\,7 \sin\left(\frac{10\pi}{3}x\right) \cos\left(\frac{500\pi}{3}t\right)$, où les distances sont en mètres et le temps, en secondes.

50. $f = 89{,}2$ Hz

CHAPITRE 3

1. Le point a se déplace vers la gauche, car il se déplace vers $-s_m$; le point b est immobile, car son déplacement est maximal ; le point c se déplace vers la droite, car son déplacement augmente.

2. **a.** v ne change pas (propriété du milieu).

b. $\omega = 2\pi f$, la fréquence angulaire double.

c. $\lambda = v/f$, la longueur d'onde diminue de moitié.

d. $k = 2\pi/\lambda$, le nombre d'onde double.

e. B ne change pas (propriété du milieu).

f. $\Delta p_m = Bks_m$, l'amplitude de pression double.

3. 17 m $\geq \lambda \geq$ 17 mm

4. $\lambda = 5{,}07$ cm

5. **a.** $\lambda_{air} = 76$ µm **b.** $\lambda_{tissu} = 0{,}33$ mm

6. $\Delta p_m = 0{,}35$ kPa

7. **a.** $f = 350$ Hz, $\lambda = 0{,}948$ m **b.** $v = 332$ m/s

c. $s_m = 0{,}96$ µm

8. **a.** $\lambda = 0{,}260$ m

b. $s(x; t) = 3{,}6$ µm $\sin(7{,}69\pi x + 2{,}60 \times 10^3 \pi t + 2{,}4)$

c. $\Delta p_m = 12$ Pa

d. $\Delta p = -12 \text{ Pa} \cos(7{,}69\pi x + 2{,}60 \times 10^3 \pi t + 2{,}4)$

9. Le module de la vitesse est plus grand dans l'hélium, car sa masse molaire est plus faible que celle de l'air. La longueur d'onde ne change pas parce qu'elle est liée aux modes des cordes vocales. Comme $f = v/\lambda$, la fréquence augmente.

10. $v'/v = 1{,}20$

11. **a.** $B = 95{,}7$ kPa **b.** $\rho = 0{,}494$ kg/m^3

12. **a.** $f = 160$ Hz **b.** $v = 347$ m/s **c.** $\lambda = 2{,}17$ m

d. $\Delta p = 555$ Pa

e. $s(x; t) = 1{,}35 \text{ mm} \sin(2{,}90x - 320\pi t)$

13. $s(x; t) = 0{,}644 \text{ mm} \sin(1{,}10x - 380t)$

14. $T = 50{,}0\ °C$

15. $d = 1{,}90\ km$

16. $v = 181\ m/s$

17. $v = 6{,}1\ km/s$

18. $L = 18{,}4\ m$

19. Les ondes auraient une forme elliptique, le petit axe des ellipses étant parallèle à l'axe des y.

20. $\Delta\Phi = 2{,}8\ rad$

21. **a.** $\vec{\mathbf{r}}_S = 3{,}10\ m\,\vec{\imath}$ **b.** $y_3 = \pm 2{,}98\ m$

22. $\phi = 50°$

23. **a.** $1/r$ **b.** Aucune diminution **c.** $1/r^2$
d. $1/r^2$ **e.** Aucune diminution

24. Oui, c'est un son dont l'intensité est plus faible que le seuil d'audibilité chez les humains. Un tel son peut être capté par certains animaux et des micros très sensibles.

25. $s_m = 6{,}20\ \mu m$

26. **a.** $I = 0{,}239\ W/m^2$ **b.** $\beta = 114\ dB$
c. $P = 13{,}4\ \mu W$

28. **a.** $I_p/I = 0{,}005\,0$ **b.** $\Delta p_{pm}/\Delta p_m = 0{,}071$

29. $\beta = 63{,}1\ dB$

30. **a.** $I = 20{,}0\ \mu W/m^2$ **b.** $s_m = 494\ nm$

31. $r = 94{,}9\ m$

32. **a.** $I = 475\ \mu W/m^2$ **b.** $\Delta p_m = 0{,}628\ Pa$
c. $\beta = 86{,}8\ dB$

33. **a.** La deuxième onde doit avoir la même amplitude, la même longueur d'onde et le même sens de propagation.
b. $\Delta\Phi = \pi\ rad$

34. **a.** Une interférence destructive, car $\Delta r = 3\lambda/2$.
b. Une succession d'interférences constructives, intermédiaires, destructives, car Δr change lorsque M s'éloigne.
c. Une interférence constructive, car $\Delta r = 0$.

35. $d = 0{,}128\ m,\ 0{,}814\ m,\ 1{,}50\ m,\ 2{,}19\ m,\ 2{,}87\ m$

36. $v = 1\,036\ m/s$

37. **a.** $\Delta r_1 = 0$ **b.** $\Delta r_2 = 2\lambda$ **c.** 8 maximums
d. 8 minimums **e.** 8 maximums

38. **a.** $\Delta x = 4{,}3\ cm$ **b.** $\Delta x = 19{,}3\ cm$

39. **a.** $D = 2{,}50\ m$ et $D = 0{,}314\ m$
b. $D = 0{,}959\ m$

40. $f = 118\ Hz,\ 354\ Hz,\ 590\ Hz$ et $826\ Hz$

41. Une fréquence de battements nulle

42. $f_{batt} = 3\ Hz$

43. $f = 442{,}5\ Hz$

44. **a.** La fréquence ne change pas, car la vitesse des ondes sur une corde ne dépend pas de la température.
b. La fréquence diminue, car le module de la vitesse du son diminue lorsque la température diminue.

45. La fréquence est plus élevée, car la colonne d'air est plus courte.

46. **a.** Un tuyau ouvert-fermé, car l'onde possède le même nombre de nœuds que de ventres.
b. Le 5e harmonique, car c'est le 3e mode.

47. $f_{(iii)} < f_{(ii)} < f_{(i)} < f_{(iv)}$

48. $f = 6{,}47\ kHz$

49. $58{,}1\ Hz < f < 638\ Hz$

50. $f = 441\ Hz$

51. **a.** $v = 348\ m/s$ **b.** $T = 28\ °C$

52. **a.** $L = 3{,}90\ m$ **b.** $n_i = 3$ et $n_f = 4$

53. **a.** $f_4^{tuyau} = 903\,Hz$
b. $f_1^{corde} = 150\,Hz$
c. $F = 6{,}11\ kN$

54. $f = 600\ Hz$

55. $f_g < f_0 < f_d$

56. $v = 68{,}1\ km/h$

57. $\vec{\mathbf{v}} = 171{,}5\ m/s\ \overrightarrow{\text{vers l'observateur}}$

58. $v = 57{,}2\ m/s$

59. $v = 83\ km/h$

60. **a.** $f_i' = 2{,}03\ kHz$ **b.** $f_f' = 1{,}97\ kHz$

61. **a.** $f'' = 41{,}91\ kHz$ **b.** $\vec{\mathbf{v}} = 3{,}77\ m/s\ \overrightarrow{\text{vers le mur}}$

62. $f = 2\,000\ Hz$

63. **a.** $f_a' = 1500\ Hz$
b. $f_b' = 1492\ Hz$
c. $f = 1\,508\ Hz$

64. $v_{balle} = 534\ m/s$

65. **a.** $\theta = 38{,}5°$ **b.** $d = 5{,}03\ km$ **c.** $\Delta t = 9{,}48\ s$

CHAPITRE 4

1. $\vec{\mathbf{B}}$ est orienté dans le sens opposé à l'axe des y.

2. **a.** L'onde se déplace dans le sens opposé à l'axe des y.
b. $\vec{\mathbf{E}}$ est dans le sens de l'axe des x.

3. **a.** $\vec{\mathbf{E}}$ oscille parallèlement à l'axe des y (parallèlement à l'antenne).
b. $\vec{\mathbf{B}}$ oscille parallèlement à l'axe des x (perpendiculairement à $\vec{\mathbf{E}}$ et au sens de propagation de l'onde, qui se déplace selon l'axe des z).

5. $\lambda = 123$ m

6. **a.** $f = 4{,}5$ GHz **b.** $\lambda = 6{,}7$ cm
c. Dans le même sens que l'axe des y
d. $B_m = 1{,}2 \times 10^{-8}$ T

7. **a.** $\lambda = 2{,}22$ cm **b.** $\vec{\mathbf{E}} = 0{,}972$ V/m vers le bas
c. $\vec{\mathbf{E}} = (1{,}94 \text{ V/m}) \sin(8{,}48 \times 10^{10} t + 0{,}524)$ vers le bas, où t est en secondes.

8. **a.** $\vec{\mathbf{E}} = (-7{,}30\vec{\imath} - 3{,}51\vec{\jmath} + 1{,}90\vec{k})$ V/m
b. $\vec{\mathbf{c}} = (0{,}617\vec{\imath} - 0{,}296\vec{\jmath} + 2{,}92\vec{k}) \times 10^8$ m/s

9. $7{,}89 \times 10^{14}$ Hz $> f > 3{,}75 \times 10^{14}$ Hz

10. **a.** $I_1/I_2 = \dfrac{4}{3}$
b. $E_{1m}/E_{2m} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

11. $I = 0{,}036$ W/m^2

12. $P = 2{,}87$ kW

13. $E_m = 194$ V/m et $B_m = 6{,}47 \times 10^{-7}$ T

14. $u = 5{,}00 \times 10^{-14}$ J/m^3

15. **a.** $I = 1{,}70 \times 10^{-9}$ W/m^2 **b.** $E_m = 1{,}13 \times 10^{-3}$ V/m

16. $r = 20{,}4$ m

17. **a.** $r = 6{,}00$ mm **b.** $I = 7{,}07$ W/m^2

18. **a.** p_{rad} est multipliée par 1/4 (divisée par 4).
b. p_{rad} ne change pas.
c. p_{rad} est multipliée par 2.

19. $F = 4{,}32 \times 10^{-6}$ N

20. $p_{rad} = 1{,}59 \times 10^{-7}$ Pa

21. $\dfrac{M}{A} = 0{,}85$ g/m^2

22. $F = 1{,}09 \times 10^{-4}$ N

23. $\Delta p = 6{,}5 \times 10^{13}$ kg · m/s

24. **a.** $P_{laser} = \dfrac{\rho a g c \pi r^2}{1 + \mathcal{R}}$
b. $P_{laser} = \dfrac{\rho a^3 g c}{1 + \mathcal{R}}$

25. On place le premier polariseur incliné à un angle $0° < \theta < 90°$ par rapport à la verticale, et le deuxième polariseur horizontalement.

26. **a.** I ne change pas.
b. I diminue.
c. I augmente.

27. **a.** $I/I_0 = 100$ % **b.** $I/I_0 = 0$ %
c. $I/I_0 = 75$ % **d.** $I/I_0 = 50$ %

28. $I = 2{,}4 \times 10^2$ W/m^2

29. **a.** $I_A = 0{,}500 I_0$ **b.** $I_C = 0{,}375 I_0$ **c.** $I_B = 0{,}093\,8 I_0$

30. $I_3 = 28{,}8$ mW/m^2

31. **a.** $\vec{\mathbf{E}} = (42{,}1 \text{ V/m}) \sin(9{,}94 \times 10^6 x - 2{,}98 \times 10^{15} t)\,\vec{\jmath}$
b. $\vec{\mathbf{B}} = (1{,}40 \times 10^{-7} \text{ T}) \sin(9{,}94 \times 10^6 x - 2{,}98 \times 10^{15} t)\,\vec{k}$, où x est en mètres et t, en secondes.

32. $m = 18$ g

33. $\theta = 25{,}4°$ et $\theta = 64{,}6°$

34. $I_p/I_0 = 73$ %

CHAPITRE 5

1. **a.** $\lambda_{(iii)} < \lambda_{(i)} < \lambda_{(ii)}$
b. $f_{(i)} = f_{(ii)} = f_{(iii)}$
c. $\Delta t_{(ii)} < \Delta t_{(i)} < \Delta t_{(iii)}$

2. $v = 2{,}11 \times 10^8$ m/s

3. **a.** $\lambda = 441{,}9$ nm **b.** $\lambda = 390$ nm **c.** $\lambda = 243{,}5$ nm

4. $t = 2{,}97 \times 10^{-10}$ s

5. Les miroirs retournent les rayons lumineux exactement dans le sens opposé à leur provenance. Trois réflexions ont lieu et produisent le même effet en trois dimensions que l'effet produit par deux miroirs perpendiculaires dans un plan (*voir l'exemple 5.2 avec* $\phi = 90°$).

6. $\alpha = 41{,}2°$

7. $\theta = 60°$

8. $\theta = 90°$

9. $N = 6$ réflexions

12. Le point c, car le rayon s'approche de la normale en entrant dans l'eau.

13. $n_4 < n_2 < n_1 < n_3$

14. $\theta = 41{,}39°$

15. $n = 1{,}27$

16. **a.** $x = 11{,}2$ m **b.** $x = 7{,}18$ m **c.** $x = 3{,}15$ m

17. **a.** $\theta_2 = 23{,}9°$ **b.** $\theta_3 = 31{,}1°$
c. $\theta_4 = 51{,}7°$ **d.** $\delta = 34{,}7°$

18. $\alpha = 120°$

21. $n_{min} = 1{,}41$

22. $d = 5{,}446$ m

23. $A = 8{,}50$ m^2

24. **a.** $\theta_c = 56{,}0°$ **b.** $\theta_{max} = 66{,}4°$

25. $\theta > 74{,}9°$

26. **a.** $\theta > 78{,}5°$ **b.** $\theta > 18{,}7°$ **c.** $\theta \leq 71{,}9°$

27. **a.** Rouge : point d ; violet : point e
b. Rouge : point b ; violet : point a

28. Les deux faces du verre étant parallèles, la divergence des différentes couleurs qui est produite par la première

face est annulée par la seconde. Les différentes longueurs d'onde d'un même rayon lumineux sont légèrement décalées, mais trop peu pour être distinguées.

29. Deux fois, à l'entrée et à la sortie de la goutte d'eau

30. $\theta = 0{,}10°$

31. $\theta_v - \theta_r = 3{,}50°$

32. **a.** $A = 1{,}522$, $B = 4{,}6 \times 10^3$ nm^2

b. $n = 1{,}535$

33. $n = 1{,}48$

34. Pour la première réflexion, si l'angle d'incidence est égal à l'angle de polarisation, le rayon réfléchi est polarisé parallèlement à la première surface. En plaçant la deuxième surface pour que son plan d'incidence soit perpendiculaire à la première, de telle sorte que l'angle d'incidence soit de nouveau égal à l'angle de polarisation, il n'y a pas de lumière réfléchie.

35. **a.** $\theta = 53{,}12°$ **b.** $\theta = 36{,}88°$

36. $n = 1{,}51$

CHAPITRE 6

1. $d = 3{,}20$ m

2. $d = 0{,}870$ m

3. $d = 3{,}00$ m, 8,00 m et 11,0 m

4. $I = 12{,}6$ mW/m^2

5. Non. Une source au foyer d'un miroir sphérique produit un faisceau de lumière parallèle. Un tel lampadaire n'éclairerait qu'une zone minuscule sous celui-ci.

6. $d = f$, pour être au foyer de la coupole.

7. À $d = R$

8. **a.** La courbe (i), car la distance tend vers l'infini lorsque l'objet s'approche du foyer.

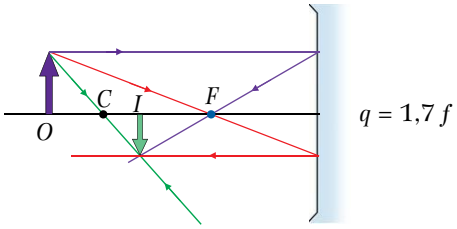
b. La courbe (iii), car la distance augmente graduellement de façon non linéaire et tend vers une valeur finie lorsque $p \to \infty$.

9. **a.** $q = 34{,}9$ cm **b.** $m = -0{,}397$ **c.** $y' = -13{,}9$ mm

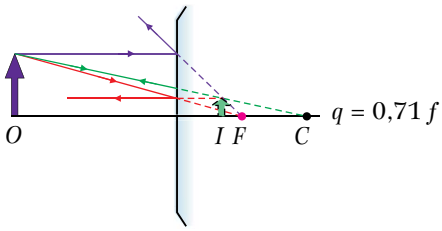
d. L'image est inversée.

10. **a.** $p = 37{,}2$ cm **b.** $f = -25{,}7$ cm

11. **a.**



b.



12. **a.** $d = 0{,}773$ m

b. C'est le grandissement qui produit l'impression de distance plus grande, et non la distance de l'image. Le grandissement produit par un miroir convexe est inférieur à 1.

13. **a.** $d = 13{,}7$ m **b.** $m = 0{,}026\,6$

14. **a.** $f = 363$ cm **b.** $f = 41{,}8$ cm

15. $R = 0{,}548$ m

16. **a.** $q_1 = -23{,}1$ cm **b.** $p_2 = 83{,}1$ cm

c. Vis-à-vis de la position $x = 33{,}7$ cm

17. $\vec{\mathbf{v}}_I = -\left(\dfrac{f}{p-f}\right)^2 \vec{\mathbf{v}}_O$

18. **a.** Les situations (ii) et (iii), car le faisceau réfracté est convergent.

b. Les situations (i) et (iv), car le faisceau réfracté est divergent.

19. Les énoncés (ii), (iv) et (v)

20. $h = 2{,}33$ m

21. **a.** $d = |q| = 4{,}0$ cm **b.** $m = 1{,}1$ **c.** $d = |q| = 79{,}2$ cm

22. $n = 1{,}4$

23. $d = 48{,}3$ cm

24. **a.** L'image est à 17 cm à droite de la face droite.

b. $m = -1{,}5$

25. **a.** À une distance de 10,0 cm sous la surface de l'eau

b. $y = -2{,}8$ cm

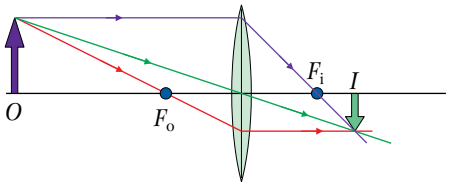
26. Le miroir, car sa distance focale ne change pas dans l'eau, alors que la distance focale de la lentille augmente.

27. $V_{(ii)} < V_{(iv)} < V_{(i)} < V_{(iii)}$

28. **a.** $p = f$ **b.** $p > f$ ou $p < 0$ **c.** $p = 2f$ **d.** $0 < p < f$

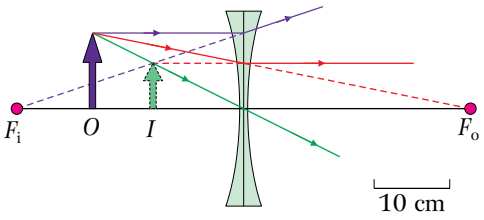
29. **a.** $p = f$ **b.** $f < p < 0$ **c.** $p = 2f$ **d.** $p < f$ ou $p > 0$

30. **a.**



b. $m = -\dfrac{1}{2}$

31.



32. **a.** L'image est à 13,8 cm à gauche de la lentille.
b. $m = 1{,}76$ **c.** $y' = 7{,}2$ cm

33. **a.** $V = 5{,}24$ D
b. L'image est à 80,3 cm à droite de la lentille.

34. **a.** $f = -7{,}07$ cm
b. L'image est à 5,22 cm à droite de la lentille.
c. L'image est virtuelle.
d. $y' = 0{,}47$ cm

35. $f = 63{,}1$ cm

36. **a.** $p_{\text{im. droite}} = 3{,}57$ cm et $p_{\text{im. inversée}} = 21{,}4$ cm
b. $p_{\text{im. droite}} = -8{,}33$ cm et $p_{\text{im. inversée}} = 33{,}3$ cm

37. $L' = 9{,}5$ cm

38. $p = 35{,}5$ cm et $p = 84{,}5$ cm

39. **a.** $p = 39{,}5$ cm **b.** $f = 29{,}1$ cm

40. **a.** L'image est à 58,7 à droite de la lentille.
b. $p_2 = -8{,}7$ cm **c.** $D = 1{,}07$ m **d.** $m = -3{,}8$

41. **a.** L'image est à 94,3 cm à droite de la lentille.
b. $y' = -6{,}0$ cm
c. L'image est inversée.

43. $d = 2{,}33f$

44. **a.** L'image se trouve à 13 cm à droite de la lentille.
b. L'image est virtuelle.
c. L'image est inversée.

46. **a.** La personne est hypermétrope.
b. $V_C = 2{,}46$ D

47. **a.** $f = -30{,}8$ cm **b.** $d_{PR} = 30{,}8$ cm
c. $d_{PP} = 53{,}2$ cm

48. **a.** $A_{acc} = 2{,}00$ D **b.** $V_C = -3{,}75$ D
c. $d_{PP'} = 50{,}0$ cm **d.** $V_{C'} = -1{,}75$ D

49. $d = 11{,}1$ cm

50. $G = 3{,}50$

51. **a.** $G = -19,2$ **b.** $L = 2{,}525$ m

52. $f_{ob} = 78{,}4$ cm

53. $\theta' = 1{,}4°$

54. **a.** $\ell = 10{,}8$ cm **b.** $G = -98{,}5$

CHAPITRE 7

1. Non, on ne peut pas produire une telle interférence de façon observable, car les deux sources ne sont pas cohérentes.

2. $L = \frac{5}{2}\lambda$

3. **a.** $\Delta r = d = \lambda$ **b.** $N_2 - N_1 = \frac{3}{2}$
c. Une interférence destructive

4. **a.** Une interférence constructive
b. Une interférence intermédiaire
c. Une interférence destructive
d. Une interférence constructive

5. **a.** $N_1 = 10{,}00$ **b.** $N_2 = 13{,}00$ **c.** $N_2 - N_1 = 3{,}00$

6. **a.** $D = 15{,}8$ cm ou $D = 3{,}4$ cm
b. $D = 36{,}0$ cm ou $D = 8{,}0$ cm

7. **a.** $N_1 = 40{,}3$ **b.** $N_2 = 13{,}3$ **c.** $N_2 - N_1 = -27{,}0$
d. L'interférence est constructive.

8. **a.** Δy augmente. **b.** Δy diminue.
c. Δy augmente. **d.** Δy diminue.

9. $\lambda = 654$ nm

10. **a.** $L = 4{,}70$ m **b.** $\theta = 0{,}061\,0°$

11. $\Delta y = 2{,}14$ mm

12. $\lambda = 513$ nm

13. **a.** $\lambda = 633$ nm **b.** $I = 2{,}5$ W/cm^2

14. **a.** $I/I_{\text{centre}} = 40{,}9$ % **b.** $I/I_{\text{centre}} = 7{,}59$ %
c. $I/I_{\text{centre}} = 100$ %

15. **a.** $I = 9{,}61$ mW/m^2 **b.** $I = 2{,}11$ mW/m^2

16. **a.** $y = 0{,}795$ mm **b.** $y = 3{,}29$ mm **c.** $y = 4{,}23$ mm

17. **a.** $y = 20{,}7$ mm **b.** $y = 25{,}3$ mm

18. $\ell = 21$ µm

19. Le modification dans l'apparence des franges indique que l'épaisseur de la pellicule varie.

20. Les franges circulaires indiquent que l'épaisseur varie de la même manière autour du centre de la tache et dans toutes les directions.

21. Les situations (ii) et (iv)

22. **a.** $N_1 = \frac{Ln}{\lambda}$ **b.** $N_2 = \frac{3Ln}{\lambda} + \frac{1}{2}$
c. $N_2 - N_1 = \frac{2Ln}{\lambda} + \frac{1}{2}$

23. **a.** $(N_2 - N_1)_{\text{violet}} = 0{,}687$
b. $(N_2 - N_1)_{\text{vert}} = 0{,}499$
c. $(N_2 - N_1)_{\text{rouge}} = 0{,}404$

24. **a.** $n = 1{,}37$ **b.** $m_c = 4$

25. **a.** $\lambda = 512$ nm
b. $\lambda = 427$ nm et $\lambda = 640$ nm

26. $L = 360$ nm

27. $d = 23{,}6$ µm

28. **a.** L'épaisseur du film n'est pas constante.
b. $\delta\theta = 0{,}022\,6°$

29. $n = 1{,}36$

30. **a.** $n = 1{,}46$ **b.** $\lambda = 408$ nm

31. **a.** $\lambda = 656$ nm, 525 nm et 438 nm
b. $\lambda = 750$ nm, 583 nm, 477 nm et 404 nm

32. **a.** $L = R - \sqrt{R^2 - r^2}$
b. $r = \sqrt{\left(m_c - \frac{1}{2}\right)\lambda R}$, avec $m_c = 1, 2, \ldots$
c. $r = 172$ µm

33. Il y a un défilement des franges, puisque la longueur d'onde est réduite dans l'un des bras.

34. On observe des cercles concentriques de différentes couleurs. Là où une couleur génère de l'interférence destructive, d'autres couleurs génèrent de l'interférence constructive ou intermédiaire.

35. $d = (2m - 1)\frac{\lambda}{4}$, où $m = 1, 2, 3, \ldots$

36. $\lambda = 404$ nm

37. $N = 142$

38. $n = 1{,}000\,036$

39. $|\Delta n| = 0{,}014\,0$

40. $\ell = 268$ µm

CHAPITRE 8

1. En principe, on peut observer une figure de diffraction. Par contre, celle-ci est imperceptible en raison des dimensions de la source et de la présence d'un grand nombre de longueurs d'onde dans la lumière du Soleil.

2. **a.** La largeur diminue. **b.** La largeur diminue.
c. La largeur augmente. **d.** La largeur diminue.

3. **a.** (iv) < (i) = (ii) < (iii)
b. (i) < (ii) = (iii) = (iv)

4. **a.** $\theta_1 = 0{,}792°$ **b.** $\Delta y = 20{,}7$ mm

5. $a = 0{,}30$ mm

6. $\lambda_{min} = a$

7. $a = 2{,}22$ µm

8. **a.** $L = 50{,}0$ cm
b. $\Delta y = 14{,}4$ cm

9. **a.** $\Delta y_{centre} = 0{,}862$ m **b.** $\Delta y_1 = 0{,}498$ m
c. $\Delta y_2 = 0{,}702$ m

10. **a.** Il y a 10 minimums.
b. Il y a 8 maximums secondaires.

12. **a.** $\theta = 0{,}573°$ **b.** $\alpha = 2{,}39$ rad **c.** $I/I_{max} = 8{,}06$ %

13. **a.** $I_{m1}/I_{max} = 4{,}72$ % **b.** $I_{m2}/I_{max} = 1{,}65$ %
c. $I_{m2}/I_{m1} = 34{,}9$ %

14. **a.** Le rouge **b.** Le violet

15. **a.** $D_{pic} = 2{,}7$ cm **b.** $D' = 0{,}15$ mm

16. $\lambda = 583$ nm

17. **a.** $\Theta = 2{,}57$ mrad **b.** $D_{pic} = 25{,}7$ mm
c. $I_{pic} = 1{,}3$ W/m^2

18. Le pouvoir de résolution de l'œil augmente lorsque la pupille est plus grande. Un prédateur aura alors une vision plus nette.

19. (i) pour diminuer θ_R ou (iv) pour augmenter β

20. **a.** $\theta_R = 0{,}005\,49°$ **b.** $\theta_R = 0{,}038\,4°$

21. $d_{objet} = 64{,}4$ m

22. **a.** $L = 6{,}8$ km **b.** $L = 2{,}3 \times 10^2$ km

23. **a.** $D_{pic} = 6{,}71$ µm **b.** $\theta_R = 4{,}47 \times 10^{-6}$ rad $= 0{,}923''$
c. $\Delta y = 3{,}36$ µm

24. **a.** $G_{com} = -952$ **b.** $\Delta y = 239$ nm **c.** $\theta' = 0{,}063\,9$ rad

25. **a.** Le système (i), car les maximums sont plus éloignés.
b. Le système (i), car le pic central est plus large.
c. Le système (ii), car il y a moins de maximums dans le pic central.

26. **a.** $N_{central} = 9$ **b.** $N_{secondaire} = 4$

28. **a.** $\Delta y = 2{,}40$ mm **b.** $y_1 - y_{-1} = 18{,}8$ mm
c. $y_2 - y_1 = 9{,}42$ mm **d.** $N = 7$ franges

29. $I = 3{,}50$ µW/m^2

30. $I/I_{max} = 0{,}678$ %

31. $\lambda_1 = 484$ nm et $\lambda_2 = 784$ nm

32. $e = 0{,}221$ mm

33. **a.** Le rouge **b.** Le violet

34. $d_{(ii)} < d_{(iii)} < d_{(iv)} < d_{(i)}$

35. $N = 13$

36. $N = 2{,}83 \times 10^3$ fentes

37. $\lambda = 506$ nm

38. Il y a chevauchement dès le deuxième ordre avec le troisième ordre.

39. **a.** $\Delta\theta_1 = 7{,}60°$ **b.** $\Delta\theta_2 = 18{,}51°$ **c.** $m_{max} = 2$

40. $n = 800$ lignes/mm

41. **b.** $\Delta\theta = 45{,}5°$

42. $N_{\text{points}} = 37$

43. **a.** $\lambda = 419$ nm **b.** $\theta_1 = 34{,}5°$ **c.** $\theta_1^{(\text{air})} = 61{,}4°$

CHAPITRE 9

1. Les référentiels inertiels sont (i), (iii) et (iv).

2. **a.** $\vec{\mathbf{v}}_{\text{b/a}} = (12{,}0\vec{\boldsymbol{\imath}} - 3{,}92\vec{\boldsymbol{\jmath}})$ m/s
b. $\vec{\mathbf{v}}_{\text{b/s}} = (27{,}5\vec{\boldsymbol{\imath}} - 3{,}92\vec{\boldsymbol{\jmath}})$ m/s
c. $t_{\text{a}} = 0{,}452$ s **d.** $t_{\text{f}} = 0{,}452$ s
e. $d_{\text{a}} = 5{,}42$ m **f.** $d_{\text{f}} = 12{,}4$ m

3. $\vec{\mathbf{a}} = 5{,}04$ m/s^2 $\overrightarrow{\text{vers l'arrière}}$

4. $v = c$, le module de la vitesse de la lumière est le même pour tous les référentiels inertiels.

5. $\vec{\mathbf{v}}_1 = c\vec{\boldsymbol{\imath}}$ et $\vec{\mathbf{v}}_2 = -c\vec{\boldsymbol{\imath}}$

6. **a.** Le travailleur dans la station mesure le temps propre.
b. Le commandant du vaisseau mesure un temps plus long.

7. **a.** Le vaisseau mesure le temps propre, car il a besoin d'une seule horloge immobile.
b. Ni l'un ni l'autre ne mesure le temps propre, car chacun a besoin de deux horloges immobiles.

8. Δt_{T}, car les gens de la Terre ne changent pas de référentiel inertiel durant le voyage.

9. **a.** $v = 0{,}001\,41c$ **b.** $v = 0{,}140c$ **c.** $v = 0{,}866c$
d. $v = 0{,}995c$

10. **a.** $\Delta t' = 33{,}36$ ns **b.** $\Delta t = 38{,}52$ ns

11. $v_1/v_2 = 1{,}46$

12. $\Delta t = 1{,}26$ a

13. **a.** $v = 0{,}928c$ **b.** $\Delta t_{\text{T}} = 51{,}9$ a

14. $v = 0{,}900c$

15. **a.** $v = 0{,}999c$ **b.** $\Delta t' = 32{,}4$ ns

16. **a.** $L_C < L_B < L_A$ **b.** $L_C < L_A < L_B$
c. $L_B < L_A < L_C$

17. (iii), car la largeur est contractée (parallèle à $\vec{\mathbf{v}}$, mais pas la hauteur).

18. $v = 0{,}686c$

19. **a.** $d = 9{,}520$ al **b.** $\Delta t = 15{,}87$ a **c.** $\Delta t = 19{,}83$ a
d. $\Delta t = 31{,}73$ a

20. **a.** $\Delta t_{\text{lab}} = 14{,}0$ ns **b.** $\Delta t_{\text{part}} = 9{,}51$ ns
c. $d_{\text{part}} = 2{,}09$ m

21. **a.** $\Delta t' = 2{,}49$ µs **b.** $v = 0{,}750c$ **c.** $L_S = 370$ m

22. **a.** $L' = 1{,}87$ m **b.** $\theta' = 76{,}2°$

23. $D < B < A < C$

24. $\vec{\mathbf{v}} = 0{,}508c$ $\overrightarrow{\text{en s'approchant}}$

25. **a.** $\vec{\mathbf{v}} = 0{,}600c$ $\overrightarrow{\text{en s'éloignant}}$
b. $\vec{\mathbf{v}} = 0{,}600c$ $\overrightarrow{\text{en s'approchant}}$

26. **a.** $f_{\text{T}} = 130{,}9$ MHz **b.** $f_{\text{s}} = 305{,}5$ MHz

27. **a.** $v = 0{,}174c$ **b.** $\lambda_0 = 537$ nm

28. **a.** $\lambda = 412{,}0$ nm **b.** $\vec{\mathbf{v}} = 0{,}046c$ $\overrightarrow{\text{en s'éloignant}}$

29. $t' = -9{,}8$ ns et $x' = 49{,}91$ m

30. **a.** $\Delta t_{\text{pêcheur}} = 2{,}67$ µs **b.** $\ell_{\text{pilote}} = 2{,}37$ km

31. **a.** $x = 15{,}2$ al **b.** $t = 13{,}6$ a

32. **a.** $v = 0{,}899c$ **b.** $\Delta t' = 5{,}03$ µs
c. $x' = -1\,232$ m

33. **a.** $t_{\text{av}} = 0{,}00$ µs, $t_{\text{ar}} = -1{,}93$ µs
b. $t_{\text{av}} = 7{,}70$ µs, $t_{\text{ar}} = 5{,}78$ µs
c. $\Delta t'_{\text{av}} = \Delta t'_{\text{ar}} = 6{,}67$ µs
d. $\Delta t_{\text{av}} = \Delta t_{\text{ar}} = 7{,}70$ µs

34. **a.** $\vec{\mathbf{u}}'_{\text{T}} = -0{,}25c\vec{\boldsymbol{\imath}}$ **b.** $\vec{\mathbf{u}}'_{\text{B}} = -0{,}47c\vec{\boldsymbol{\imath}}$

35. $\vec{\mathbf{u}} = 0{,}696c\vec{\boldsymbol{\imath}}$

36. $\vec{\mathbf{u}} = 0{,}980c$ $\overrightarrow{\text{à } 12{,}3 \text{ au-dessus de l'axe des } x}$

37. **a.** $\Delta t_{(\text{T})} = 2{,}04$ µs **b.** $\Delta t_{(\text{V})} = 2{,}73$ µs
c. $\Delta t_{(\text{p})} = 567$ ns

38. **a.** $E_{0,1} = E_{0,3} < E_{0,2} < E_{0,4}$
b. $K_4 < K_1 = K_2 < K_3$
c. $\gamma_{\text{p},4} < \gamma_{\text{p},2} < \gamma_{\text{p},1} < \gamma_{\text{p},3}$
d. $v_4 < v_2 < v_1 < v_3$

39. $v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c = 0{,}866c$

40. **a.** $p = 0{,}397$ MeV/c **b.** $K = 0{,}136$ MeV **c.** $v = 0{,}613c$

41. **a.** $E = 5m_0c^2$ **b.** $K = 2m_0c^2$ **c.** $v = 0{,}8c$

42. **a.** $W = 4{,}73$ MeV **b.** $W = 89{,}4$ MeV
c. $W = 4{,}59 \times 10^3$ MeV

43. $\Delta t_{\text{L}} = 44{,}3$ ns

44. **a.** $K = 1{,}20$ MeV $= 1{,}92 \times 10^{-13}$ J
b. $p = 1{,}63$ MeV/$c = 8{,}73 \times 10^{-22}$ kg · m/s

45. **a.** $v = 0{,}968\,7c = 2{,}904 \times 10^8$ m/s
b. $\Delta t_{\text{L}} = 104{,}8$ ns **c.** $d = 30{,}45$ m

46. $Q = 26{,}7$ MeV

47. $\Delta M = -0{,}568$ kg

48. $\Delta M = 4{,}28 \times 10^9$ kg

49. **a.** $p_{1\text{i}} = \dfrac{4}{3}mc = 1{,}33mc$ **b.** $E_{\text{i}} = \dfrac{14}{3}mc^2 = 4{,}67mc^2$
c. $M = \sqrt{20}\,m = 4{,}47m$ **d.** $v_{\text{f}} = \dfrac{2}{7}c = 0{,}286c$

CHAPITRE 10

1. La lampe à infrarouge émet plus de photons, car chacun des photons a moins d'énergie que les photons de la lumière ultraviolette.

2. **a.** $E = 56$ keV **b.** $E = 48{,}8$ µeV **c.** $E = 2{,}76$ eV

3. **a.** $E = 3{,}143 \times 10^{-19}$ J **b.** $E = 1{,}624 \times 10^{-24}$ J
c. $E = 6{,}50 \times 10^{-26}$ J

4. $n = 9{,}89 \times 10^{16}$ photons/s

5. $N = 2{,}55 \times 10^{5}$ noyaux

6. $P = 2{,}89 \times 10^{-17}$ W

7. **a.** $I = 14{,}4$ W/m^2 **b.** $n = 2{,}74 \times 10^{19}$ photons/(s · m^2)

8. Le rayonnement des objets est dans l'infrarouge.

9. $\frac{T_a}{T_b} = \sqrt[4]{2} = 1{,}19$

10. **a.** $T_2 < T_1 = T_3 < T_4$ **b.** $I_2 < I_1 = I_3 < I_4$
c. $P_2 = P_3 < P_1 < P_4$

11. $\lambda_{max} = 1{,}062$ mm

12. **a.** $P = 49{,}2$ mW **b.** $P = 2{,}52$ mW
c. $P = 69{,}9$ mW **d.** $P = 0{,}370$ W

13. $\lambda_{max} = 2{,}187$ µm

14. $T = 2{,}90 \times 10^{5}$ K

15. $R_T\,(\lambda_{max}) = 5{,}76 \times 10^{10}$ W/m^3

16. **a.** $I_{nette} = 455$ W/m^2 **b.** $P = 17{,}9$ W

17. **a.** $n = 5{,}31 \times 10^{15}$ photons/s **b.** $P = 204$ W
c. $T = 183$ K

18. **a.** Diminution du potentiel d'arrêt
b. Aucune influence sur le potentiel d'arrêt
c. Augmentation du potentiel d'arrêt
d. Aucune influence sur le potentiel d'arrêt

19. **a.** (i) < (ii) < (iii) **b.** $\Phi_{(iii)} < \Phi_{(ii)} < \Phi_{(i)}$

20. $\lambda_{seuil} = 318$ nm

21. $\Phi = 1{,}79$ eV

22. **a.** $V_{arrêt} = 2{,}82$ V **b.** $V_{arrêt} = 0{,}34$ V
c. Il n'y a pas d'effet photoélectrique.

23. **a.** $\Phi = 2{,}29$ eV **b.** $v_{é} = 4{,}5 \times 10^{5}$ m/s
c. $V_{arrêt} = 0{,}26$ V

24. **a.** $\lambda_i = 633$ nm **b.** $\Phi = 0{,}40$ eV **c.** $\lambda_{seuil} = 3{,}1$ µm

25. **a.** $\lambda_{violet} = 392$ nm et $\lambda_{vert} = 524$ nm
b. $h_{exp} = 6{,}61 \times 10^{-34}$ J · s **c.** $\Phi = 2{,}14$ eV

26. $3{,}26$ eV/$c \geq p \geq 1{,}55$ eV/c

27. $\Delta\lambda = 0{,}201$ pm

28. $\theta = 72{,}6°$

29. $K_{max} = 3{,}4$ keV

30. **a.** $\theta = 66{,}5°$ **b.** $K = 0{,}3$ keV $= 5 \times 10^{-17}$ J
c. $v = 0{,}04\ c = 1{,}1 \times 10^{7}$ m/s
d. $\phi = 56°$

31. **a.** $\theta = 56{,}9°$ **b.** $K = 268$ keV $= 4{,}29 \times 10^{-14}$ J
c. $v = 0{,}755\ c = 2{,}26 \times 10^{8}$ m/s
d. $\phi = 37{,}9°$

32. $\Delta\lambda = 1{,}53$ pm

33. **a.** La longueur d'onde est divisée par 2.
b. La longueur d'onde est divisée par $\sqrt{2}$.

34. **a.** $\frac{K_\alpha}{K_p} = \frac{1}{4}$
b. $\frac{v_\alpha}{v_p} = \frac{1}{4}$

35. **a.** $\vec{\mathbf{E}}_a$ est vers la droite, pour produire une force électrique qui fait diminuer la vitesse de l'électron.
b. $\vec{\mathbf{E}}_b$ est vers la gauche, pour produire une force électrique qui fait augmenter la vitesse de l'électron.
c. La longueur d'onde ne change pas, car la force magnétique ne change pas le module de la vitesse de l'électron.

36. $\lambda = 70{,}2$ pm

37. $\Delta V = 150$ V

38. $\lambda = 0{,}297$ nm

39. $\lambda = 0{,}35$ am $= 3{,}5 \times 10^{-19}$ m

40. **a.** $\frac{E_\gamma}{K_{é}} = 824$
b. $\frac{E_\gamma}{K_{é}} = 1{,}49$
c. $\frac{E_\gamma}{K_{é}} = 1{,}00$

41. **a.** $\theta = 103{,}7°$
b. $\lambda_{é} = 39$ pm

42. **a.** $\lambda = 0{,}100$ nm **b.** $d = 1{,}00$ µm

43. **a.** $\lambda = 0{,}165$ nm **b.** $\Delta y = 549$ µm

44. $\Delta x_{min} = 54$ fm

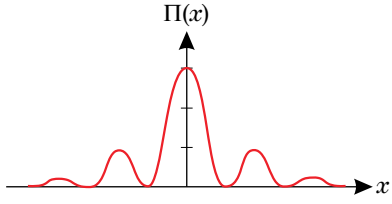
45. $\Delta v = 0{,}003\,7\ c = 1{,}1 \times 10^{6}$ m/s

46. $\Delta E_{min} = 13 \times 10^{-9}$ eV

CHAPITRE 11

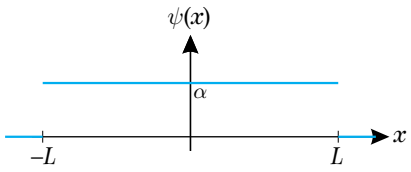
1. (iii) < (i) < (ii) < (iv)

2.



La densité de probabilité est $\Pi(x) = |\psi(x)|^2$.

4. **a.**



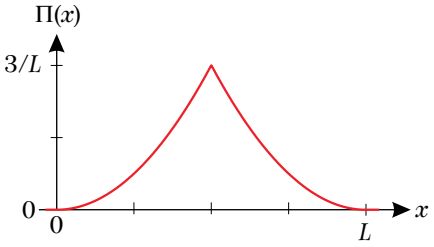
b. $\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{2L}}$

c. $P = 0{,}250$

5. **a.** $\beta = \sqrt{\dfrac{12}{L^3}}$

b. $P = 0{,}875$

c.



6. **a.** $A = \dfrac{2}{(a_0)^{3/2}}$

b. $x = a_0$ **c.** $\langle x \rangle = 3a_0/2$

7. **b.** $E = \dfrac{\hbar\omega}{2}$

8. **a.** (ii) = (iv) < (i) < (iii)

b. (ii) = (iv) < (i) < (iii)

9. Le proton, car E_1 est inversement proportionnelle à la masse de la particule.

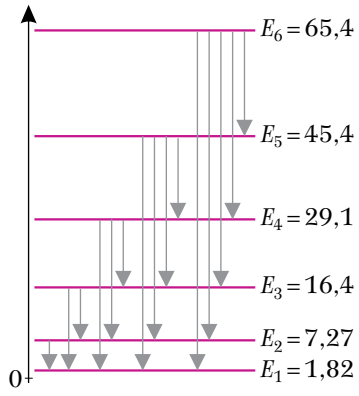
10. $\lambda_{(iv)} < \lambda_{(iii)} < \lambda_{(v)} < \lambda_{(ii)} < \lambda_{(i)}$

11. **a.** $E_3 = 11{,}6$ eV **b.** $\Delta E_{3\to1} = 10{,}3$ eV

c. $\lambda_{3\to1} = 120$ nm, $\lambda_{3\to2} = 192$ nm, $\lambda_{2\to1} = 320$ nm

12. $n_f = 5$, le 4e niveau excité

13. **a.** E (eV)



b. 15 transitions sont possibles.

14. **a.** Au 4e état excité

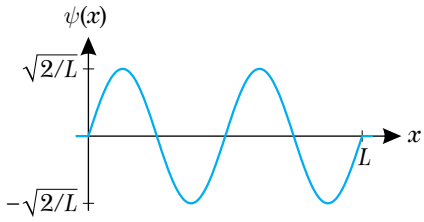
b. L'électron demeure à l'état fondamental.

c. Au 2e état excité

15. $L = 0{,}739$ nm

16. **a.** $E_1 = 0{,}9104$ MeV **b.** $m = 938{,}2$ MeV/c^2

17. **a.**



b. $n = 4$

c. À cinq endroits, les cinq nœuds de la fonction d'onde

d. À huit endroits

18. $\psi_p/\psi_é = 1$, car chaque fonction d'onde est égale à $\sqrt{2/L}$.

19. La probabilité diminue.

20. **a.** $L = 1{,}66$ nm **b.** $\lambda = 380$ nm

21. **a.** $x_1 = \dfrac{L}{8}, x_2 = \dfrac{3L}{8}, x_3 = \dfrac{5L}{8}$ et $x_4 = \dfrac{7L}{8}$

b. $P = 0{,}186$

22. **a.** $\lambda = 0{,}400$ nm **b.** $n = 6$ **c.** $\lambda = 431{,}6$ nm

23. $E_{1,1} < E_{1,2} < E_{2,1} < E_{2,2}$

24. **a.** Il y a un endroit ;

b. Il y a deux endroits ;

c. Il y a six endroits.

25. **a.** $E_{1,1} = 0{,}834$ eV, $E_{1,2} = E_{2,1} = 2{,}08$ eV, $E_{2,2} = 3{,}33$ eV, $E_{1,3} = E_{3,1} = 4{,}17$ eV

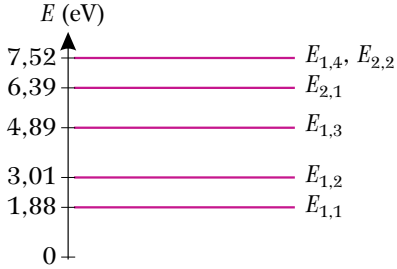
b. $(n_x = 1,\ n_y = 2)$ et $(n_x = 2,\ n_y = 1)$; $(n_x = 1,\ n_y = 3)$ et $(n_x = 3,\ n_y = 1)$

c.

26. **a.** $E_{1,1,1} = 0{,}638$ eV **b.** $E_{1,1,2} = 0{,}987$ eV

c. $\lambda = 3{,}56$ µm

27. **a.**



b. $\Delta E = 5{,}64$ eV

c. $\lambda = 1{,}10$ µm

d. $\lambda = 220$ nm

28. **a.** $\psi(x;y) = \dfrac{2}{L}\sin\left(\dfrac{3\pi x}{L}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi y}{L}\right)$

b. $E_{3,2} = \dfrac{13h^2}{8mL^2}$

29. (i) < (iii) < (iv) < (ii)

30. $k = 7{,}48\ \text{nm}^{-1}$

31. **a.** $\lambda = 780{,}9$ nm et $\lambda = 1{,}88$ µm
b. $\lambda < 700{,}2$ nm

32. $\lambda = 410{,}5$ nm

33. (ii) < (iii) < (i)

34. La probabilité de traverser la barrière diminue très rapidement.

35. Le proton, car sa masse est plus faible.

36. **a.** $T = 2{,}21 \times 10^{-4}$ **b.** $K = 1{,}10$ eV

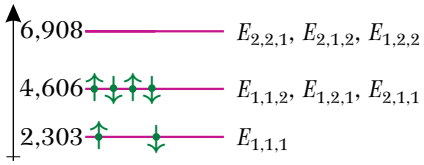
37. $E = 4{,}827$ eV

38. $T_i/T_f = 23{,}3$

39. Les situations (ii) et (iii) sont possibles.

40. **a.** $E_{fond} = 14{,}7$ eV **b.** $E_{1e} = 16{,}2$ eV **c.** $E_{2e} = 16{,}5$ eV

41. **a.** E (eV)



b. $\lambda = 538{,}5$ nm

CHAPITRE 12

1. **a.** $\lambda_{Lyman}^{max} = 121{,}5$ nm, $\lambda_{Lyman}^{min} = 91{,}16$ nm

b. $\lambda_{Balmer}^{max} = 656{,}3$ nm, $\lambda_{Balmer}^{min} = 364{,}6$ nm

c. $\lambda_{Paschen}^{max} = 1{,}875$ µm, $\lambda_{Paschen}^{min} = 820{,}4$ nm

2. $\dfrac{\lambda_{B,2}}{\lambda_{L,2}} = 4{,}741$

4. **a.** Il n'y a pas d'effet photoélectrique.
b. $V_{arrêt} = 0{,}35$ V **c.** $V_{arrêt} = 1{,}20$ V

5. $E_1 = -13{,}60$ eV, car la masse du positron est la même que celle de l'électron, et l'énergie potentielle est $U = -e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$, la même que pour l'atome d'hydrogène.

6. **a.** $n = 8$ **b.** $r_8 = 3{,}386$ nm
c. $v_8 = c/1\,096 = 2{,}735 \times 10^5$ m/s

7. $\Delta E = E_\infty - E_1 = 54{,}4$ eV

8. $\lambda_{3\to1} = 102{,}6$ nm , $\lambda_{3\to2} = 656{,}5$ nm

$\lambda_{2\to1} = 121{,}6$ nm

9. $K = 0{,}99$ eV

10. **a.** $n_i = 9$ et $n_f = 2$
b. La raie fait partie de la série de Balmer.

11. $\lambda_{7\to4} = 541{,}5$ nm, $\lambda_{6\to4} = 656{,}5$ nm, $\lambda_{4\to3} = 468{,}9$ nm

12. $T = \dfrac{h}{\alpha^2 mc^2} n^3$

13. À la température de la pièce, tous les atomes d'hydrogène sont dans leur état fondamental $n = 1$.

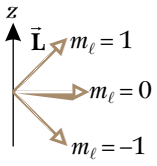
14. Les situations (ii) et (iv) sont possibles.

15. **a.** $E_4 = -0{,}850\,0$ eV **b.** $L = \sqrt{12}\hbar$
c. $m_\ell = \pm3, \pm2, \pm1, 0$

16. **a.** $E = 2{,}86$ eV **b.** $\lambda = 434{,}2$ nm

17. **a.** La sous-couche *f*, car $\ell = 3$.
b. $E_{min} = E_4 = -0{,}850\,0$ eV **c.** $\theta = 106{,}8°$

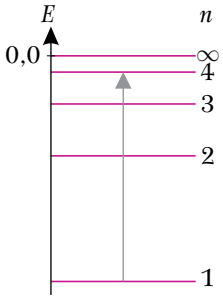
18. **a.**



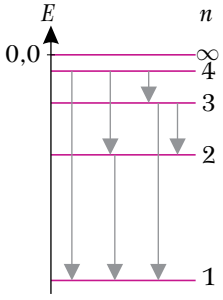
b. $\theta = 45{,}0°$, 90° et 135°

19. **a.** $n_h = 4$

b.



c.



d. $\lambda_{IR} = 1{,}874$ µm **e.** $\lambda_v = 656$ nm et $\lambda_v = 486$ nm

22. **a.** $E = 23{,}4$ keV **b.** $E' = 22{,}4$ keV
c. L'électron n'est pas sur un niveau ; l'atome est ionisé, car $E' - E = 1{,}0$ keV > 13,60 eV.
d. Non. On ne peut savoir où se trouve l'électron dans l'atome.

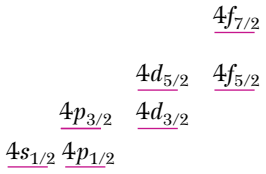
23. **a.** $E = 13{,}22$ eV $= 2{,}118 \times 10^{-18}$ J
b. $p = 13{,}22$ eV/$c = 7{,}065 \times 10^{-27}$ kg · m/s
c. $v = 4{,}222$ m/s

24. **a.** la sous-couche $3s$ **b.** la sous-couche $3d$
c. la sous-couche $3s$ **d.** la sous-couche $3d$

25. **a.** $P(0{,}50a_0) = 0{,}736\ \%$
b. $P(1{,}00a_0) = 1{,}08\ \%$
c. $P(2{,}00a_0) = 0{,}586\ \%$
d. $P(5{,}00a_0) = 0{,}009\,08\ \%$
e. $P(50{,}0a_0) = 7{,}44 \times 10^{-40}\ \%$

27. **a.** $r = 0{,}763\,9a_0$ et $r = 5{,}236a_0$
b. $d = 4{,}472a_0$

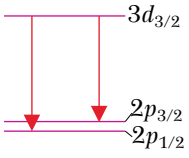
28.



29. **a.** $j = 3/2$ ou $j = 1/2$
b. $m_j = 3/2$, $m_j = 1/2$, $m_j = -1/2$ ou $m_j = -3/2$

30. **a.** $4p_{1/2} \rightarrow 2s_{1/2}$
b. $4p_{1/2} \rightarrow 3s_{1/2}$ ou $4p_{1/2} \rightarrow 3d_{3/2}$
c. $4p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$

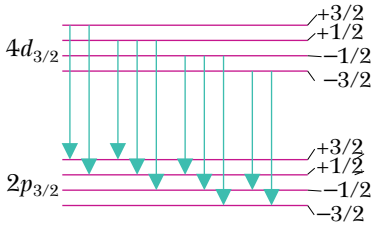
31. **a.**



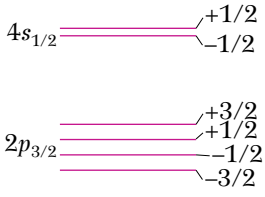
b. $E_{p_{3/2}} - E_{p_{1/2}} = 45{,}3\ \mu\text{eV}$

33. **a.** Il y a six niveaux.
b. $m_j = +5/2$

34.



35. **a.**



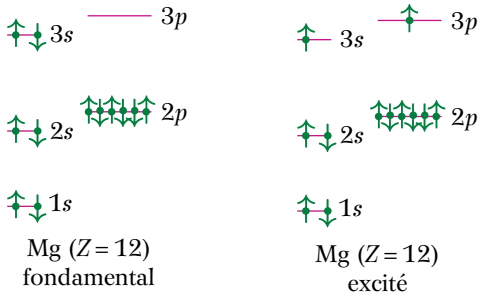
b. Il y a six raies.

36. **a.** $\lambda = 32{,}612\,255\,7$ mm
b. $\Delta E = 38{,}017\,668\,6\ \mu\text{eV}$

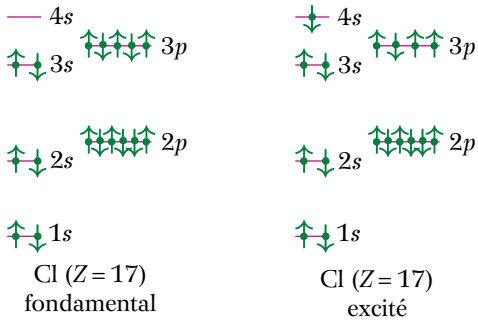
37. **a.** Le sodium, car $Z = 11$.
b. Un état excité, car la couche $2p$ est incomplète.

38. La dernière sous-couche ($4f$) est fermée pour cet élément lorsque ce dernier est dans son état fondamental.

39. **a.**



b.



40. De l'énergie cinétique de l'atome d'hélium

41. Oui, mais les émissions sont moins nombreuses que les absorptions.

42. **a.** $E = 40{,}0\ \mu\text{J}$ **b.** $N = 1{,}40 \times 10^{14}$ transitions

CHAPITRE 13

1. **a.** $({}^{13}_{5}\text{B}\ {}^{13}_{6}\text{C}\ {}^{13}_{7}\text{N}\ {}^{13}_{8}\text{O})$, $({}^{14}_{6}\text{C}\ {}^{14}_{7}\text{N}\ {}^{14}_{8}\text{O})$ et $({}^{15}_{7}\text{N}\ {}^{15}_{8}\text{O})$
b. $({}^{13}_{5}\text{B}\ {}^{14}_{6}\text{C}\ {}^{15}_{7}\text{N})$, $({}^{13}_{6}\text{C}\ {}^{14}_{7}\text{N}\ {}^{15}_{8}\text{O})$ et $({}^{12}_{6}\text{C}\ {}^{13}_{7}\text{N}\ {}^{14}_{8}\text{O})$
c. $({}^{12}_{6}\text{C}\ {}^{13}_{6}\text{C}\ {}^{14}_{6}\text{C})$, $({}^{13}_{7}\text{N}\ {}^{14}_{7}\text{N}\ {}^{15}_{7}\text{N})$ et $({}^{13}_{8}\text{O}\ {}^{14}_{8}\text{O}\ {}^{15}_{8}\text{O})$
d. Il y a quatre éléments différents, le bore, le carbone, l'azote et l'oxygène.

2. (iii) < (i) = (iv) < (ii)

3. **a.** $\rho = 1{,}11 \times 10^{25}\ \text{C/m}^3$ **b.** $\rho = 1{,}03 \times 10^{25}\ \text{C/m}^3$
c. $\rho = 8{,}81 \times 10^{24}\ \text{C/m}^3$

4. $K = 0{,}25$ MeV

5. $\Delta V = 710$ MV

6. (iii) < (iv) < (i) < (ii)

7. $E_\text{l} = 2{,}084\ \text{GeV} = 2{,}220E_{0,\text{H}}$

8. **a.** $E_{\text{l/n,K}} = 8{,}538$ MeV
b. $E_{\text{l/n,Ar}} = 8{,}595$ MeV

c. $^{40}_{19}\text{K}$, car son énergie de liaison par nucléon est plus faible.

9. a. $E_l(^{55}\text{Mn}) = 482{,}07$ MeV
b. $E_l(^{56}\text{Mn}) = 489{,}34$ MeV
c. $E_\gamma = 7{,}27$ MeV

10. Non, car le carbone 14 que contenaient les cellules des dinosaures s'est complètement désintégré en azote, étant donné que les dinosaures ont vécu il y a plus de 65 millions d'années.

11. a. $t_{1/2,\text{ii}} = t_{1/2,\text{iv}} < t_{1/2,\text{i}} = t_{1/2,\text{iii}}$
b. $\lambda_\text{i} = \lambda_\text{iii} < \lambda_\text{ii} = \lambda_\text{iv}$
c. $R_{0,\text{iii}} < R_{0,\text{i}} = R_{0,\text{iv}} < R_{0,\text{ii}}$

12. Oui. À $t = 0$, l'activité de l'échantillon B est plus grande que l'activité de l'échantillon A, car son activité a diminué en 2,0 min. L'échantillon A se désintègre moins rapidement que l'échantillon B, car la demi-vie de A est plus longue.

13. $R = 8{,}98 \times 10^{16}$ Bq

14. $t = 9{,}1$ d

15. a. $N_0 = 2{,}00 \times 10^{15}$ noyaux b. $R = 596$ MBq
c. $|\Delta N| = 1{,}40 \times 10^{15}$ noyaux

16. a. $\lambda = 0{,}04\,861\ \text{d}^{-1}$
b. $N_0 = 3{,}25 \times 10^{16}$ atomes
c. $R_0 = 18{,}3$ GBq
d. $R = 17{,}4$ GBq
e. $N = 2{,}32 \times 10^{16}$ atomes

17. a. $N = 7{,}43 \times 10^9$ atomes
b. $N_0 = 8{,}08 \times 10^9$ atomes
c. $t = 688$ a

18. $M_\text{He} = 7{,}62$ g

19. $t = 2{,}52 \times 10^9$ a

20. $^{268}_{109}\text{Mt} \rightarrow {}^{264}_{107}\text{Bh} \rightarrow {}^{260}_{105}\text{Db} \rightarrow {}^{256}_{103}\text{Lr} \rightarrow {}^{252}_{101}\text{Md}$

21. (iv) < (i) < (ii) < (iii)

22. $K_{\alpha_1} = 5{,}59$ MeV et $K_{\alpha_2} = 5{,}08$ MeV

23. a. $Q = 2{,}31$ MeV b. $v_\alpha = 0{,}0347\,c = 1{,}04 \times 10^7$ m/s

24. a. $\text{X} = {}^7_3\text{Li}$

b. $^7_3\text{Li} + \text{n} \rightarrow {}^8_3\text{Li} \rightarrow {}^8_4\text{Be} + \text{e}^- + \bar{\nu}$

c. $^8_4\text{Be} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He}$

25. $^{40}_{19}\text{K} \xrightarrow{\beta^-} {}^{40}_{20}\text{Ca} + \text{e}^- + \bar{\nu}$
$^{40}_{19}\text{K} \xrightarrow{\beta^+} {}^{40}_{18}\text{Ar} + \text{e}^+ + \nu$

26. $^{206}_{82}\text{Pb}$, avec $\Delta A = 32$, car une désintégration alpha fait diminuer le nombre de masse de 4 unités, et une désintégration bêta ne change pas le nombre de masse.

27. a. $Q = -782{,}4$ keV b. $\lambda = 1{,}585$ pm

28. $Q = 1{,}21$ MeV

29. a. $K_{\text{max,e}} = 2{,}00$ MeV b. $K_{\text{max,p}} = 0{,}85$ MeV

30. a. $Q = 0{,}634$ MeV b. $R = 33{,}8$ kBq

31. a. $Q = 1{,}710$ MeV b. $\lambda = 573{,}6$ fm
c. $\lambda_\text{max} = 2r = 7{,}62$ fm

32. a. $Q = 1{,}176$ MeV
b. $K_{\text{max},0} = 1{,}176$ MeV, $K_{\text{max},1} = 0{,}892$ MeV, $K_{\text{max},2} = 0{,}514$ MeV
c. $E_{3\rightarrow1} = 0{,}662$ MeV, $E_{3\rightarrow2} = 0{,}378$ MeV, $E_{2\rightarrow1} = 0{,}284$ MeV

33. (ii) < (iii) < (i)

34. a. $DE = 1{,}2$ Sv b. $\Delta E = 0{,}144$ J

35. $N = 3{,}90 \times 10^{12}$ photons

36. a. $E = 2{,}3$ J b. $m = 10$ ng
c. $DE = 0{,}37$ mSv d. $t = 20{,}2$ d

37. $^{97}_{39}\text{Y}$

38. $\Delta m = 46{,}55$ µg

39. a. $Q = 184{,}7$ MeV b. $m = 158$ µg

40. $M_{^3\text{He}} = 3{,}015\,48$ u

41. $\dfrac{E_{\text{Cr}+\alpha}}{E_{\text{Mn}+\text{p}}} = 0{,}747\,4$

42. $t = 10 \times 10^9$ a

CHAPITRE 14

1. a. $Q(\bar{K}^0) = 0$ b. $Q(\bar{\Delta}^{++}) = -2e$
c. $Q(\text{W}^+) = +e$ d. $Q(\bar{\nu}_\mu) = 0$

2. a. $K = 0{,}511\,0$ MeV b. $K = 139{,}57$ MeV
c. $K = 938{,}27$ MeV

4. a. Le nombre baryonique
b. La charge électrique

5. a. $\text{e}^- + \text{p} \rightarrow \text{n} + \nu_\text{e}$ (car $L = +1$).

b. $\bar{\nu}_\text{e} + \text{p} \rightarrow \text{n} + \text{e}^+$ (car $L = -1$).

c. $^2_1\text{H} + \nu_\text{e} \rightarrow {}^1_1\text{H} + \text{n} + \nu_\text{e}$ (car $B = 2$ et $L = 1$).

d. $^{48}_{20}\text{Ca} \rightarrow {}^{48}_{22}\text{Ti} + \text{e}^- + \text{e}^- + \bar{\nu}_\text{e} + \bar{\nu}_\text{e}$ (pour que Q soit conservée et $L = 0$).

6. a. $d = 197$ fm b. $d = 1{,}97$ fm c. $d = 0{,}197$ fm

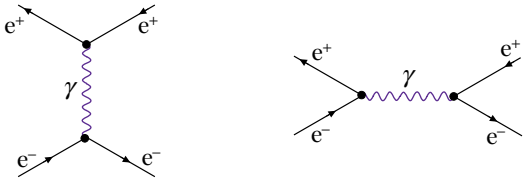
7. $R = 2 \times 10^{-31}$ m

8. a. $E = 661$ keV b. $p = 150$ keV/c

c. $\sqrt{E^2 - p^2c^2} = 644$ keV

9. (ii) > (i) = (iii) > (iv)

10.



11 **a.** $E_{\gamma_1} = 294$ MeV **b.** $E_{\gamma_2} = 16$ MeV

12. **a.** La particule *b*, car les mésons sont des bosons, avec *s* un entier.

b. La particule *a*, car les baryons sont des fermions, avec *s* un demi-entier.

13. (i) < (ii) < (iii) < (iv)

14. Oui, car les trois quarks n'ont pas la même couleur. Le nombre quantique de couleur est différent pour les trois quarks, donc ils ne sont pas dans le même état quantique.

15. **a.** Non, car I_3 et B ne sont pas conservés.

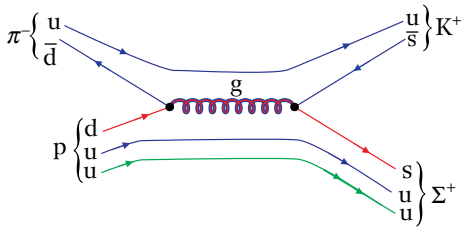
b. Oui, on a des paires particules-antiparticules dans les deux membres de l'équation.

c. Oui, car tous les nombres quantiques sont nuls dans les deux membres de l'équation.

d. Non, car I_3 et C ne sont pas conservés.

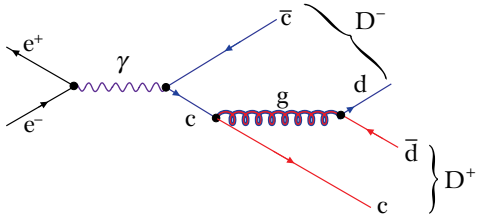
16. **a.** $(u\bar{d}) + (uud) \rightarrow (u\bar{s}) + (uus)$

b.



17. **a.** $e^+ + e^- \rightarrow (c\bar{d}) + (d\bar{c})$

b.



18. **a.** L'interaction faible, car $\Delta S \neq 0$.

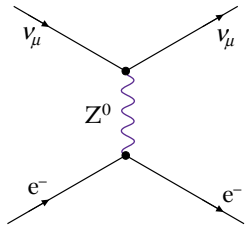
b. L'interaction faible, car $\Delta S \neq 0$.

c. L'interaction électromagnétique, car on obtient des photons.

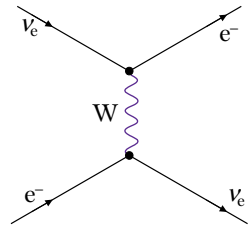
19. **a.** $\tau^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$

b. $\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau$

20. **a.**



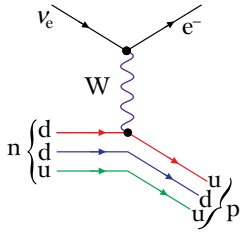
b.



21. **a.** $\nu_e + n \rightarrow p + e^-$

b. $\nu_e + d \rightarrow u + e^-$

c.



d. Il n'y a aucune réaction.

22. **a.** $E = 2{,}224$ MeV

b. La réaction fait intervenir l'échange d'un boson Z^0. Les trois saveurs de neutrinos peuvent produire la réaction. Donc, cette réaction peut compter le nombre total de neutrinos de toutes les saveurs.

Index

A

Aberration
  chromatique, 215
  sphérique, 192, 215
Accélération transversale, 56
Accommodation, 217
Activité
  d'un nucléide, 481
  optique, 148
Alpha
  désintégration, 486-489
  particule, 486
Ampère
  théorème d'_-Maxwell, 131
Amplitude, 5
  circuit *RLC*, 31
  d'accommodation, 217
  d'une onde, 53
  dans une interférence, 66
  de pression, 85, 87, 88
  de probabilité, 383
  modulée, 99
  oscillation amortie, 28
  oscillation forcée, 32
Angle
  critique, 170
  d'incidence, 163
  de Brewster, 177
  de divergence, 292 (P17)
  de polarisation, 177
  de réflexion, 163
  de réfraction, 166
Angström, 556
Anneaux de Newton, 265 (P32)
Année lumière, 556
Annihilation, 337, 493
Antenne, 128
Antibaryon, 515
Anticouleur, 528
Antihydrogène, 464 (Q5)
Antimatière, 514
Antineutrino électronique, 489
Antiparticule, 513
Approximation de l'optique géométrique, 162
Arc-en-ciel, 175-176
Association
  de dioptres, 204
  de lentilles, *voir* Système de lentilles
Astigmatisme, 219
Atome
  à plusieurs électrons, 453-458
  couche, 434
    fermée, 455, 456
  d'hydrogène
    énergie des états, 428, 434
    fonction d'onde, 438-443
    formule de Rydberg, 423
    modèle de Bohr, 425-431
    nombres quantiques, 434
    stabilité, 432-433
    structure fine, 443, 446
    théorie quantique, 431-437
  énergie d'ionisation, 455
  raie spectrale, 422-424
  résonance magnétique, 452-453
  sous-couche, 434
Axe optique, 192

B

Balmer
  formule de, 423
  série de, 424
Baryon, 515, 535-536
  tableau, 535
Battements, 98-99
Beauté, 531
Becquerel (unité), 481
Becquerel, Henri, 479
Bel (unité), 93
Bessel, méthode de, 233-234 (P45)
Bêta
  désintégration, 489-494
  rayons, 480
Biréfringence, 179
Blu-ray, 289
Bohr
  magnéton, 448
  modèle de, 425-431
  rayon de, 427
Bohr, Niels, 426
Boltzmann
  constante de, 353
  constante de Stefan-_, 351
  loi de Stefan-_, 351
Boltzmann, Ludwig, 350
Boom supersonique, 111
Bose, Satyendranath, 409
Boson, 409
  de Higgs, 518, 546
  de Yukawa, 519
  W, 518
  Z^0, 373, 518
Bottom (quark), 516
Brewster
  angle de, 177
  fenêtre de, 177
  loi de, 177
Brewster, David, 177
Brisure spontanée de symétrie, 544-545

C

Calcite, 179
Capture électronique, 493-494
Cauchy, Augustin Louis, 184
Cauchy, loi de, 184 (P32)
Cavité optique, 461
CD, 289
Centre de courbure
  d'un dioptre, 200
  d'un miroir, 192
Champ
  de Higgs, 544, 545
  électrique
    dans une onde électromagnétique, 124
    et irradiance, 137
    polarisation de la lumière, 142
  magnétique
    dans une onde électromagnétique, 124
Charm (quark), 516
Charme, 531
Chauve-souris, 108
Chromodynamique quantique, 528
  sur réseau, 539
Circuit
  LC, 24-26
  RLC, 30-31
    résonance, 32
Coefficient
  de réflexion, 139
  de résistance, 27
  de transmission par effet tunnel, 407
Cohérence, 239-241
Collisionneur, 513
Comète, 138
Compton
  décalage de, 361
  effet, 359-363
  longueur d'onde de, 361
Compton, Arthur, 359
Condition d'interférence, 242
  dans les pellicules minces, 253
Cône de Mach, 110
Confinement
  de la couleur, 529
  des quarks, 515
  inertiel par laser, 503
  magnétique, 502
Constante
  de Boltzmann, 353
  de désintégration, 480
  de phase, 5
  de Planck, 349, 353
    réduite, 371
  de Rydberg, 424
  de Stefan-Boltzmann, 351
  de structure fine, 427
Contraction des longueurs, 317-319
Convention de signes
  dioptre, 201
  lentille, 207
  miroir, 194
Corail quantique, 399, 400
Corps noir, 350

Couche, 434
fermée, 455, 456
Couleur, 515, 527
confinement, 529
liberté asymptotique, 530
tube de flux, 529
Couplage spin-orbite, 445-447
Courant
photoélectrique, 354
tunnel, 409
Création de paires, 336, 525, 530
Crête, 52
Creux, 52
Cristaux liquides, 146, 147
Critère de Rayleigh, 281
Curie (unité), 482
Curie, Marie, 479
Curie, Pierre, 470, 479, 482

D

D'Alembert, Jean le Rond, 48
Datation radioactive, 484-485
De Broglie, longueur d'onde de, 367
De Broglie, Louis, 367
Décalage de Compton, 361
Décibel, 93
Demi-vie, 482
Densité de probabilité, 383
radiale, 439
Déphasage, 54
et interférence, 66
expérience de Young, 252
onde sonore, 96
par la réflexion, 244-245
Descarte, René, 165
Désintégration, 479
alpha, 486-489
facteur Q, 486
puits de potentiel, 489
réaction, 486
spectre, 487
bêta, 489-494
β^-, 489-491
β^+, 491-494
facteur Q, 490-493
réaction, 489, 492
spectre, 491
capture électronique, 493-494
demi-vie, 482
loi de, 481
Détecteur de fumée, 488
Déviation
par la réflexion, 163
par la réfraction, 166
Diagramme
de Feynman, 519-522
des niveaux d'énergie, 391
Différence de marche, 96
Diffraction, 160-162
de Fraunhofer, 271
de Fresnel, 270
des électrons, 367
par deux fentes, 283-284
figure, 283
irradiance, 283
par une fente étroite, 271-274
figure, 271
irradiance, 275
largeur du pic central, 274
maximum central, 272
maximum secondaire, 276
minimum, 273
par une ouverture circulaire, 277-278
figure, 278
premier minimum, 278
pic central, 271, 278
réseau, 285-289
Dilatation du temps, 310-312
Dioptre, 199-205
association, 204
centre de courbure, 200
convention de signes, 201
équation, 201
grandissement, 202
plan, 203-204
Dioptrie, 207
Dirac, Paul, 446, 514
Distance
de cohérence, 240
focale, 192
et vergence, 208
lentille, 208
miroir sphérique, 194
image, 188
objet, 188
Doppler, effet, 104-109
relativiste, 322-324
Dose
absorbée, 494
équivalente, 495
Doublet de Fraunhofer, 215
Down (quark), 516
Dualité onde-particule
pour l'électron, 367-368
pour la lumière, 364-366
principe d'incertitude, 371
Durée de vie moyenne, 482
DVD, 289
Dynode, 358

E

Éclairement énergétique, *voir* Irradiance
Écran à cristaux liquides, 146, 147
Effet
Compton, 359-363
d'écran, 454
Doppler, 104-109
relativiste, 322-324
laser, 460
photoélectrique, 354-359
énergie cinétique maximale, 354
équation de, 356
longueur d'onde seuil, 356
potentiel d'arrêt, 354
tunnel, 405-409
désintégration alpha, 489
microscope à, 408
Zeeman, 448-449
Einstein, Albert, 298, 305, 348, 354, 355, 459
Électrodynamique quantique, 519, 525
Électron, 515, 516
de valence, 457
facteur g, 445
spin, 409
Électron-volt, 333
Émission
spontanée, 459
stimulée, 459
Énergie
au repos, 333, 335, 336
cinétique
maximale, 354
onde sur une corde, 60, 61
relativiste, 332
d'ionisation, 455
d'un photon, 349
dans un puits de potentiel infini
à deux dimensions, 398
à trois dimensions, 400
à une dimension, 391
de liaison du noyau, 476-479
par nucléon, 477
diagramme des niveaux d', 391
en relativité, 331-337
facteur Q, 337
potentielle, onde sur une corde, 60, 61
quantification de l', 390
système bloc-ressort, 17, 18
amorti, 28, 29
totale, 332
transition quantique, 391
Englert, François, 544
Équation
d'onde, 48, 132
de Schrödinger
à trois dimensions, 398
à une dimension, 387
indépendante du temps, 389
particule confinée à une dimension, 394
des dioptres, 201
des lentilles, 207, 208
des miroirs, 193
Équations de Maxwell, 124
État stationnaire, 390
dégénéré, 399
excité, 391, 479
fondamental, 391
Éther, 304
Étoile
fusion nucléaire, 500-502
Étrangeté, 531
Euler, formule d', 385
Événement, 307
Expérience
de Kennedy-Thorndike, 306
de Michelson-Morley, 257, 306
de Young, 246-250
avec des électrons, 368
déphasage, 252
et diffraction, 283-284
irradiance, 252
maximums et minimums, 249
un photon à la fois, 365-366

F

Facteur
  de Lorentz, 311
  de pondération radiologique, 495
  g
    de l'électron, 445, 526
    du proton, 450, 451
  Q, 337
    désintégration alpha, 486
    désintégration β^-, 490, 491
    désintégration β^+, 492, 493
Faisceau
Faraday
  loi de, 129
Faraday, Michael, 448
Fermi (unité), 473
Fermi, Enrico, 409, 473
Fermion, 409
  élémentaire, 515-517
Feynman, Richard, 519
Fibre optique, 171
Figure
  d'interférence, 239
  de diffraction, 270
    deux fentes, 283
    fente étroite, 271
    ouverture circulaire, 278
    réseau, 286, 288
Fission nucléaire, 496-498
Fonction d'onde
  atome d'hydrogène, 438-443
  onde de matière, 382-385
    particule confinée à deux dimensions, 398
    particule confinée à une dimension, 394-397
    particule libre, 387-389
  onde progressive sinusoïdale, 53
  onde stationnaire, 68
Fond diffus cosmologique, 375 (E11)
Force
  de frottement fluide, 27
  de radiation, 139
  nucléaire, 474
Formule
  d'Euler, 385
  de Balmer, 423
  de Rydberg, 423
  des opticiens, 208
Foyer, 192, 208
Franges d'interférence, 239
Fraunhofer
  diffraction de, 271
  doublet, 215
Fraunhofer, Joseph von, 271
Fréquence, 4
  angulaire, 5
    circuit LC, 25
    circuit RLC, 31
    de modulation, 99
    de résonance, 32
    oscillation amortie, 28
    pendule composé, 23
    pendule simple, 20
    relation avec la période, 5
    système bloc-ressort, 13
  de battements, 99
  de modulation, 99
  naturelle, 31
Fresnel, Augustin, 238, 271
Fresnel, diffraction de, 270
Front d'onde, 90
Fusion nucléaire, 500-503

G

Galilée
  lunette de, 227
  transformations de, 300-301
Gauss
  approximation de, 192
  théorème de, 128
Gaz
  noble, 456
  parfaits
    constante des, 88, 353
    loi des, 88
Génération, 516
Gluon, 518, 528
  plasma quark-, 530
GPS, *voir* Système de localisation mondiale
Grandissement
  dioptre, 202
  lentille, 210
  miroir, 195
Gray, (unité), 494
Grossissement, 222
  commercial, 222
  loupe, 208
  microscope, 223
  télescope, 226, 227

H

Hadron, 515, 530-539
Harmonique
  d'une corde, 71
  d'un tuyau, 101
Heisenberg, Werner, 371
Hélicité, 542
Hertz (unité), 4
Hertz, Heinrich, 4, 133
Higgs
  boson de, 518, 546
  champ de, 544, 545
Higgs, Peter, 544
Huygens, Christiaan, 160
Huygens, principe de, 160
  et diffraction, 272
  et réflexion, 164
  et réfraction, 168, 169
Hypermétropie, 218

I

Image, 188
  formée par un dioptre, 199-205
  formée par un miroir plan, 190-191
  formée par un miroir sphérique, 191-197
  formée par une lentille, 205-221
  réelle, 190
  virtuelle, 190
Impédance caractéristique
  acoustique, 91
  d'une corde, 59
  et réflexion, 63
Impulsion, 45, 46
Indice de réfraction, 157
  dispersion, 173
  gaz, 259
Infrarouge, 134
Instrument
  d'optique, 221-228
    pouvoir de résolution, 279-281
  de musique, 102-104
Intensité
  lumineuse, *voir* Irradiance
  sonore, 91-93
Interaction
  électrofaible, 540
  électromagnétique, 517, 518, 525-526
  faible, 517, 518, 539-543
    changement de saveur, 539
  forte, 474, 517, 518, 527-530
  gravitationnelle, 517, 518
Interférence
  battements, 98
  constructive, 66, 242
  de la lumière
    conditions d', 242
    et polarisation, 241
    par deux fentes, 246-250, 283-284
    pellicule mince, 252-255
  des électrons, 366
  destructive, 66, 242
  et déphasage, 66
  frange, 239
  intermédiaire, 66
  ondes en une dimension, 65-66
  onde sonore, 94-96
  ordre, 242
Interféromètre
  bras, 258
  de Mach-Zehnder, 260
  de Michelson, 257-260
Invariance de jauge, 522-525
Invariant relativiste, 301, 321, 331
Inversion de population, 460
Ion hydrogénoïde, 430
Irradiance, 135-137
  figure d'interférence par deux fentes, 252
  figure de diffraction, 275, 283
  transmise par un polariseur, 144, 145
Isobare, 472
Isospin, 531
Isotone, 472
Isotope, 471

J

Jauge
  boson de, 517
  champ de, 525
  invariance de, 522-525

transformation
globale, 523
locale, 524

L

Laser, 458-462, 503
Lentille, 205-221
aberration, 215-216
achromatique, 215
convention de signes, 207
convergente, 205
distance focale, 208
divergente, 205
équation, 206, 208
foyer, 208
grandissement, 210
système, 213
tracé des rayons principaux, 211-212
vergence, 207
Lepton, 515
LHC, 331, 378 (E39), 513
Liberté asymptotique, 530
Loi
de Brewster, 177
de Cauchy, 184 (P32)
de désintégration, 481
de Faraday, 129
de la réflexion, 163
de la réfraction, 165
de Malus, 144
de Snell-Descartes, *voir* Loi de la réfraction
de Stefan-Boltzmann, 351
des gaz parfaits, 88
du déplacement de Wien, 352
du rayonnement de Planck, 353
Longueur
contractée, 318
propre, 317
Longueur d'onde, 52
dans un milieu, 158
de Compton, 361
de De Broglie, 367
dans un puits de potentiel infini, 390
modes normaux, 71
seuil, 356
Lorentz
facteur de, 311
transformations de, 324-325
Lorentz, Hendrik Antoon, 325
Loupe, 221-222
Lumière, 134
d'un laser, 458-462
dispersion, 172-175
dualité onde-particule, 364
force de radiation, 139
irradiance, 135-137
non polarisée, 143
partiellement polarisée, 143
photon, 348-349
polarisée, 142
par réflexion, 176-178
quantité de mouvement, 138
réflexion, 162-165
totale interne, 169-172
réfraction, 165-169
spectre, 134
vitesse, 125, 133
dans un milieu, 157
Lunette, 226-228
Lyman, série de, 424

M

Mach
cône de, 110
nombre de, 111
Magnéton de Bohr, 448
Malus, loi de, 144
Masse d'un système, 335
Masse linéique, 49
Maxwell
équations de, 124
théorème d'Ampère-, 131
Mécanique quantique, 382
Mécanisme de Brout-Englert-Higgs, 543-546
Méson, 515, 531-533
Méthode de Bessel, 233-234 (P45)
Mètre (définition), 133
Michelson, Albert Abraham, 257
Michelson, interféromètre de, 257
Micro-onde, 134, 451, 452
Microscope, 223-224
à effet tunnel, 408
électronique, 369-370
Millikan, Robert Andrews, 355
Miroir
concave, 192
convexe, 192
distance focale, 192
grandissement, 195
plan, 190-191
sphérique, 191-197
centre de courbure, 192
convention de signes, 194
équation, 193
foyer, 192
sommet, 192
tracé des rayons principaux, 196-197
Mode d'oscillation, 71, 101
Modèle
de Weinberg-Salam, 540
planétaire, 425-426
standard, 512, 546
Modulation d'amplitude, 99
Module de compressibilité, 84, 88
Moment cinétique
et moment magnétique, 445
intrinsèque, *voir* Spin
modèle de Bohr, 426, 427
théorie quantique, 436-437
total, 443
Moment d'inertie, 19, 20
tableau, 556
théorème des axes parallèles, 22
Moment de force, 19
Moment magnétique
de spin, 445
du proton, 450
orbital, 445
Mouvement harmonique, 4
amorti, 28
forcé, 31-33
simple, 5
accélération, 7
circuit *LC*, 24
description, 4-7
énergie, 17-18
équation différentielle, 7
et onde progressive sinusoïdale, 52
onde stationnaire, 67
pendule composé, 23
pendule simple, 20
position, 5
système bloc-ressort, 13
vitesse, 6
Muon, 313, 316, 317, 515
Myopie, 217

N

Neutrino, 515
électronique, 492
oscillation, 550 (E22)
problème des neutrinos solaires, 550 (E21)
Newton
anneaux de, 265 (P32)
deuxième loi
onde sonore, 89
onde sur une corde, 50
pendule, 19, 22
relativiste, 330, 331
système bloc-ressort, 13
Newton, Isaac, 173
Niveau sonore, 93
Noether, Emmy, 524
Nœud, 67-68
Nombre
baryonique, 517
complexe, 383-385
d'onde, 53, 423
de longueurs d'onde, 242, 253
de Mach, 111
de masse, 472
imaginaire unitaire, 384
leptonique, 516, 539
quantique, 391, 399
dans l'atome, 434
dans le modèle de Bohr, 426
de saveur, 531
de spin, 409
du moment cinétique total, 444
magnétique, 433, 434, 445, 448
magnétique de spin, 409
orbital, 433, 434
principal, 433, 434
Normalisation de la fonction d'onde, 385
Noyau, mère et fille, 486
Noyau atomique
énergie de liaison, 476-479
propriétés, 471-475
rayon, 473
Nucléide, 471
carte des, 474-475
masse approximative, 472

Nucléon, 472
Nucléosynthèse, 502
Numéro atomique, 471

O

Objet
  à l'infini, 192
  réel, 189
  virtuel, 189
Œil, 215-221
Onde, 44
  amplitude, 52, 53
  circulaire, 90
  de choc, 110, 111
  de matière, 45, 367-368
    confinée à une dimension, 394-397
    fonction d'onde, 382-385
    longueur d'onde, 367
    normalisation, 385
    particule libre, 387-389
  dualité-particule, 364-366
  électromagnétique, 44
    polarisée, 142
    propriétés, 123-128
    source, 127
  équation d', 48
  évanescente, 172
  front d', 90
  gravitationnelle, 45
    détecteur, 259
  impulsion, 45
  interférence, 65-66
  linéaire, 64
  longitudinale, 45
  mécanique, 44
  micro-, 134
  mixte, 45
  paquet, 371
  plane, 91, 124
  progressive, 46
    à une dimension, 46-48
    constante de phase, 53
    fonction d'onde, 53
    longueur d'onde, 52
    nombre d'onde, 53
    phase, 54
    sinusoïdale, 52-56
    vitesse, 53, 54
  radio, 133
  réflexion, 62-64
  sonore, 82-86
    fonction d'onde, 84
    intensité, 91-93
    interférence, 94-96
    pression, 85
    stationnaire, 100-102
    vitesse, 87-90
  sphérique, 91
  stationnaire, 67-71, 100-102
  superposition, 64
  sur une corde, 46
    fonction d'onde générale, 47-48
    modes normaux, 70-71
    onde stationnaire, 70-71
    réflexion, 62-64
    transmission, 62-64
    vitesse, 49
  transmission, 62-63
  transversale, 45
Opticiens, formule des, 208
Optique, 123
  géométrique, 162
Orbitale, 455
Ordre d'interférence, 242
Oscillation, *voir* Mouvement harmonique
  amortie, 27-31
    amplitude, 28
  des neutrinos, 550 (E22)
  forcée, 31-33

P

Paquet d'onde, 371
Paradoxe des jumeaux, 314-316
Paramètre
  adiabatique, 88
  de vitesse, 311
Particule
  alpha, 486
  confinée
    à deux dimensions, 398-400
    à trois dimensions, 400
    à une dimension, 390-397
    dans un puits de hauteur finie, 402-404
    nombres quantiques, 399
  d'échange, 517
  libre, 387-389
  non confinée, 402-403
  virtuelle, 520
Pascal (unité), 84
Paschen, série de, 424
Patron d'interférence, *voir* Figure d'interférence
Pauli, principe d'exclusion de, 410
Pauli, Wolfgang Ernst, 410
Pellicule mince, interférence de la lumière, 252-255
Pendule, 19
  composé, 22-23
  simple, 19-21
Période, 4
  onde progressive, 53
  pendule simple, 20
  système bloc-ressort, 13
Phase, 5, 54
Photoélectrique, effet, 353-359
Photoélectron, 354
Photon, 298, 348-349, 517, 518, 525, 540
  énergie, 349
  quantité de mouvement, 359
  spin, 409
Pion, 306, 515, 516, 531
Planck
  constante de, 349, 353
    réduite, 371
  loi du rayonnement de, 353
Planck, Max, 298, 349, 352
Polarimètre, 148
Polarisation de la lumière, 142-148
  angle de polarisation, 177
  biréfringence, 179
  et interférence, 241
  par réflexion, 176-178
Polariseur, 143
Pompage optique, 460
Positron, 470, 492, 513, 514
Postulat de la vitesse de la lumière, 305
Potentiel
  d'arrêt, 354
  électrique, 523
  vecteur, 523
Pouvoir de résolution, 279-281
Presbytie, 220
Pression, 84
  dans une onde sonore, 85, 87
  de radiation, 138-139
Principe
  d'équivalence de Newton, 20
  d'exclusion de Pauli, 410
  d'incertitude, 370-373
    et portée d'une interaction, 518
  de Huygens, 160
    et diffraction, 272
    et réflexion, 164
    et réfraction, 168, 169
  de relativité
    d'Einstein, 298, 305
    de Galilée, 302
  de superposition, 64
Prisme, 171-175
Probabilité
  amplitude de, 383
  de détection, 383-385
  densité de, 383
  effet tunnel, 407
Profondeur de champ, 217
Proton
  facteur *g*, 450, 451
  moment magnétique, 450
  quarks de valence, 530
Puissance
  d'une lentille, *voir* Vergence
  moyenne d'une onde sur une corde, 59
Puits de potentiel
  effectif, 453
  fini, 402
  infini à deux dimensions, 398
  infini à trois dimensions, 400
  infini à une dimension, 390
  pour une particule alpha, 489
Pulsar, 502
Pulsation, *voir* Fréquence angulaire
Punctum proximum, 217
Punctum remotum, 217

Q

Quanta, 298, 353
Quantité de mouvement
  d'un photon, 359
  de la lumière, 138
  et énergie, 332
  relativiste, 330
Quark(s), 474, 515, 530-53

R

Rad (unité), 495
Radiance spectrale, 352
Radioactivité, 479
  activité, 481
  rayonnement, 480
Raie spectrale, 422-424
  de 21 cm, 451, 452
Rayon
  de Bohr, 427
  des noyaux, 473
Rayonnement
  de Tcherenkov, 111
  du corps noir, 350-353
  fond diffus cosmologique, 375 (E11)
  ionisant, 494
  thermique, 350
Rayons, 159
  alpha, 470, 480
  bêta, 480
  cosmiques, 512
  gamma, 135, 480, 487
  principaux, 196, 211
  X, 135
Référentiel inertiel, 300, 307, 308
Réflexion
  de la lumière, 162-165
    lors de la réfraction, 165
    polarisation, 176-178
  dure, 62, 244
  et déphasage, 244-245
  molle, 62, 245
  onde sur une corde, 62-63
  totale frustrée, 172
  totale interne, 169-172
Réfraction, 165-169
  indice de, 157
    dispersion, 173
Régime critique, 29
Région
  classiquement interdite, 404
  interdite, 390
Règle de sélection, 449
Relativité
  contraction des longueurs, 317-319
  de la simultanéité, 308-310
  deuxième loi de Newton, 330, 331
  dilatation du temps, 310-312
  effet Doppler, 322-324
  énergie, 331-337
  galiléenne, 299-302
  invariant, 301, 321, 332, 333
  restreinte
    postulats, 304-307
    vérifications expérimentales, 306-307, 316-317
Réseau de diffraction, 285-289
  pas, 286
  spectromètre à, 288-289
Résonance, 32-33
  magnétique, 452-453
Rutherford, Ernest, 135, 425, 470, 479
Rydberg
  constante de, 424
  formule, 423
Rydberg, Johannes Robert, 423

S

Saveur, 515
  nombre quantique de, 531
Schrödinger, équation de
  à trois dimensions, 398
  à une dimension, 387
  indépendante du temps, 389
Schrödinger, Erwin, 387
Séparateur de faisceau, 257
Série
  de Balmer, 424
  de Lyman, 424
Seuil
  d'audibilité, 93
  longueur d'onde, 356
Sievert (unité), 495
Sommet d'un miroir, 192
Son, *voir* Onde sonore
Sous-couches, 434
Spectre
  d'absorption, 423
  d'émission, 423
  électromagnétique, 133-135
  lumière visible, 134
  règle de sélection, 449
Spin, 409-410, 443-444
  boson, 409
  composante, 409
  couplage-orbite, 445-447
  électron, 409
  fermion, 409
  module, 409
  moment magnétique de, 445
  photon, 409
Stefan
  constante de _-Boltzmann, 351
  loi de _-Boltzmann, 351
Strange (quark), 516
Structure
  fine, 443
    constante de, 427
  hyperfine, 450-452
Substance fissible, 497
Superposition
  des ondes, 64
  principe de, 64
Symétrie CPT, 520
Système
  bloc-ressort, 13-16
    amorti, 27-30
    forcé, 31
  de coordonnées sphériques, 433
  de lentilles, 213
  de localisation mondiale, 316
  de vision de nuit, 359
  optique, 189

T

Tache d'Airy, 278
Tauon, 516
Taux de désintégration, *voir* Activité
Tcherenkov, rayonnement, 111
Télescope, 226-228
Temps
  de cohérence, 240
  dilaté, 311
  propre, 311, 321
Théorème
  d'Ampère-Maxwell, 131
  de Gauss, 128
  des axes parallèles, 22
Top (quark), 516
Tracé des rayons principaux
  lentille, 211-212
  miroir, 196-197
Transformation de jauge, 523, 524
Transformations
  de Galilée, 300-301
  de Lorentz, 324-325
  relativistes des vitesses, 328-329
Transition quantique, 391-392
Travail d'extraction, 355
Tremblement de terre, 33, 43
Tube photomultiplicateur, 358

U

Ultra-violet, 134
Up (quark), 516

V

Ventre, 67, 68
Vergence, 207
  de l'œil, 217
  et distance focale, 208
Vitesse
  limite, 330-331
  lumière, 125, 133
    dans un milieu, 157
    postulat de, 305
  onde progressive sinusoïdale, 53, 54
  onde sonore, 87-88
  onde sur une corde, 49
  paramètre de, 311
  transversale, 56

W

W (boson), 518, 540
Weinberg-Salam, modèle de, 540
Wien
  distribution, 352
  loi du déplacement de, 352

Y

Young, expérience, 246-250
  avec des électrons, 368
  un photon à la fois, 365-366
Young, Thomas, 238, 246
Yukawa, boson de, 519

Z

Z^0, 373, 518, 540
Zeeman, effet, 448-449

Physique 3

ONDES, OPTIQUE ET PHYSIQUE MODERNE

Conçu ici pour les étudiants d'aujourd'hui

Les trois tomes de cette **collection originale**, testée et éprouvée en classe, mettent en œuvre une approche intégrée de l'enseignement de la physique au collégial et sont adaptés à la réalité de l'étudiant d'aujourd'hui.

Actuelle, attrayante et efficace, la facture visuelle des ouvrages facilite la compréhension de la matière.

Les concepts abordés dans les chapitres vont du concret vers l'abstrait et les explications s'appuient sur des exemples réalistes. L'étudiant est guidé dans son apprentissage au moyen de notions théoriques rigoureusement présentées et d'une **stratégie de résolution de problèmes** appliquée dans les nombreux exemples résolus. Ces qualités pédagogiques permettront à l'étudiant de réussir ses cours de physique au collégial et de se distinguer à l'université.

De plus, la collection est accompagnée de ressources exceptionnelles et inédites :

- les **solutionnaires détaillés** des questions, exercices et problèmes ;
- des **problèmes synthèse** conceptuels qui facilitent l'intégration de la matière vue dans différents chapitres ;
- des **défis animés** qui relient la matière du manuel à de nombreuses simulations interactives en ligne.

Cette collection marque la véritable entrée des manuels de physique dans l'ère numérique, en bénéficiant des multiples et incomparables avantages offerts par la plateforme i+ Interactif.

René Lafrance détient un doctorat en physique de l'Université McGill. Il est également titulaire d'un baccalauréat et d'une maîtrise en physique de l'Université Laval. Ses recherches ont porté sur la théorie quantique des champs sur réseau et sur la gravité quantique. Elles ont mené à la publication de plusieurs articles scientifiques. René Lafrance a aussi participé à l'édition française du réputé ouvrage d'Halliday, Resnick et Walker, paru chez Chenelière Éducation. Il a été professeur de physique à titre de coopérant à l'Université des sciences et des techniques de Masuku au Gabon. Il enseigne présentement la physique au Collège de Bois-de-Boulogne.

CHENELIÈRE ÉDUCATION

www.cheneliere.ca/lafrance

ISBN 978-2-7650-3726-2

9 782765 037262