

Cours et exercices corrigés

IUT • IUP • écoles d'ingénieurs • 2^e cycle EEA

THÉORIE ET TRAITEMENT DU SIGNAL

1. Représentation des signaux et des systèmes

Messaoud Benaidja

THÉORIE ET TRAITEMENT DU SIGNAL

1. Représentation des signaux et des systèmes

Cours et exercices corrigés

Messaoud Benidir

Professeur à l'université Paris XI-Orsay
et à l'École Supérieure d'Électricité

DUNOD

Consultez nos catalogues
sur le Web

<http://www.dunod.com>



Illustration de couverture : Stéphane Degeilh

Ce pictogramme mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du **photocopillage**.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les

établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20 rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2002

ISBN 2 10 005984 X

Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite selon le Code de la propriété intellectuelle (Art L 122-4) et constitue une contrefaçon réprimée par le Code pénal. • Seules sont autorisées (Art L 122-5) les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, ainsi que les analyses et courtes citations justifiées par le caractère critique, pédagogique ou d'information de l'œuvre à laquelle elles sont incorporées, sous réserve, toutefois, du respect des dispositions des articles L 122-10 à L 122-12 du même Code, relatives à la reproduction par reprographie.

Table des matières

CHAPITRE 1 • REPRÉSENTATIONS TEMPORELLES ET FRÉQUENTIELLES D'UN SIGNAL DÉTERMINISTE	1
1.1 Représentations temporelles	1
1.1.1 Différents types de signaux	1
1.1.2 Différents types de systèmes	4
1.1.3 Les systèmes invariants ou filtres	5
1.2 Représentations fréquentielles	10
1.2.1 Série de Fourier et projections associées à un signal	10
1.2.2 Transformée de Fourier des signaux d'énergie finie	12
1.2.3 Transformée de Fourier des signaux d'énergie infinie	16
1.2.4 Transformée de Fourier d'un signal périodique	22
1.2.5 Transformée de Fourier multidimensionnelle	25
1.2.6 Transformée discrète et transformée rapide	25
EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS	31
CHAPITRE 2 • REPRÉSENTATIONS ÉNERGÉTIQUES ET SYMBOLIQUES D'UN SIGNAL DÉTERMINISTE	47
2.1 Représentations énergétiques	47
2.1.1 Corrélation et densité spectrale	47
2.1.2 Filtrage et formule des interférences	50
2.1.3 Filtrage, exemple du filtre adapté	51
2.2 Représentations symboliques	
2.2.1 Transformée de Laplace d'un signal à temps continu	53
2.2.2 Propriétés de la transformée de Laplace	54
2.2.3 Transformée en Z d'un signal à temps discret	56
2.2.4 Propriétés de la transformée en Z	57
2.2.5 Spectres symboliques	61
EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS	62
CHAPITRE 3 • ÉCHANTILLONNAGE ET MODULATION D'UN SIGNAL DÉTERMINISTE	69
3.1 Signal échantillonné et signal numérique	69
3.1.1 Condition de Shannon-Nyquist	69
3.1.2 Formule d'échantillonnage	70
3.1.3 Filtre antirepliement	72

3.1.4	Quantification d'un signal : numérisation	73
3.1.5	Chaîne d'acquisition d'un signal	74
3.2	Modulation d'un signal	75
3.2.1	Modulation d'amplitude (AM)	77
3.2.2	Modulation de fréquence (FM)	81
3.2.3	Comparaison des modulations AM et FM	82
	EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS	84
	 CHAPITRE 4 • BASES PROBABILISTES POUR LA REPRÉSENTATION D'UN SIGNAL ALÉATOIRE	97
4.1	Variable aléatoire	97
4.1.1	Espace probabilisé et loi de probabilité	97
4.1.2	Statistique à une dimension	105
4.1.3	Loi de probabilité d'une variable aléatoire	106
4.1.4	Fonction de répartition et densité de probabilité	109
4.1.5	Fonction d'une variable aléatoire	110
4.1.6	Espérance mathématique, variance et écart type	111
4.1.7	Fonctions caractéristiques, moments, cumulants	114
4.1.8	Fonction génératrice	116
4.1.9	Lois de probabilités classiques	117
4.2	Couple aléatoire	121
4.2.1	Statistiques à 2 dimensions	121
4.2.2	Fréquences partielles, marginales et conditionnelles	122
4.2.3	Loi conjointe, loi marginale et loi conditionnelle	122
4.2.4	Variables aléatoires indépendantes	127
4.2.5	Fonction de deux variables aléatoires	127
4.2.6	Covariance et coefficient de corrélation	130
4.2.7	Fonction caractéristique d'un couple aléatoire	132
4.2.8	Espérance et variance conditionnelles	132
4.2.9	Espérance conditionnelle et projection	134
4.3	Vecteur aléatoire	136
4.3.1	Passage d'un couple à un vecteur aléatoire	136
4.3.2	Fonction de plusieurs variables aléatoires	137
4.3.3	Indépendance statistique et orthogonalité	138
4.3.4	Vecteur gaussien réel, représentation complexe	140
4.4	Suites de variables aléatoires	143
4.4.1	Convergences d'une suite de variables aléatoires	143
4.4.2	Loi des grands nombres	146
4.4.3	Théorèmes de la limite centrée	147
4.4.4	Approximations des lois de probabilité classiques	148
4.4.5	Approximations des moments d'une variable aléatoire	148
	EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS	150

CHAPITRE 5 • REPRÉSENTATIONS D'UN SIGNAL ALÉATOIRE	167
5.1 Représentation temporelle	167
5.1.1 Signal à temps discret et signal à temps continu	167
5.1.2 Moyenne et covariance d'un signal	171
5.2 Principales classes de signaux	174
5.2.1 Signal stationnaire et spectre de puissance	174
5.2.2 Signal gaussien	180
5.2.3 Processus de Poisson	181
5.2.4 Bruit blanc théorique	184
5.2.5 Signal continu et signal différentiable	186
5.2.6 Signal ergodique	186
5.2.7 Signal markovien	188
5.3 Représentation spectrale	190
5.3.1 Signal harmonisable	190
5.3.2 Signal à covariance stationnaire et spectre	194
5.3.3 Propriété du périodogramme et applications	197
5.3.4 Pseudo-spectre d'un signal non stationnaire	201
5.4 Modélisations classiques d'un signal	204
5.4.1 Les bruits de fond dans les circuits électriques : bruits blancs	205
5.4.2 Les modèles ARMA (p, q)	207
5.4.3 Estimation linéaire d'un signal	210
5.4.4 Estimation des paramètres d'un modèle	211
EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS	215
 CHAPITRE 6 • REPRÉSENTATIONS, RÉALISATIONS ET SYNTHÈSES D'UN FILTRE	 231
6.1 Représentation externe et fonction de transfert	231
6.1.1 Représentations en série et en parallèle	231
6.1.2 Causalité, stabilité, phase minimale, phase linéaire	232
6.2 Représentation interne et équations d'état	239
6.2.1 Commandabilité et observabilité d'un filtre	241
6.2.2 Forme compagnon et fonction de transfert	244
6.3 Réalisations et synthèse d'un filtre numérique	245
6.3.1 Passage d'un filtre analogique à un filtre numérique	245
6.3.2 Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)	247
6.3.3 Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII)	247
6.3.4 Synthèse à partir d'un gabarit donné	249
6.3.5 Diagramme asymptotique de Bode	252
EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS	254
 BIBLIOGRAPHIE	 262
INDEX	263

À Sylvie Marcos et nos deux enfants : Yanis et Rayan

Chapitre 1

Représentations temporelles et fréquentielles d'un signal déterministe

1.1 REPRÉSENTATIONS TEMPORELLES

Dans ce chapitre, nous allons donner les différentes représentations linéaires des signaux déterministes et des systèmes linéaires.

1.1.1 Différents types de signaux

Nous appellerons signal toute grandeur physique susceptible de contenir de l'information. La représentation temporelle d'un signal est définie par une fonction $x(t)$, réelle ou complexe, de la variable réelle temps t qui doit approcher « au mieux » les informations contenues dans le signal. La dénomination fonction est prise au sens le plus général du terme, *i.e.*, $x(t)$ peut être une suite discrète, une fonction de la variable continue ou une distribution. Cette fonction peut être une fonction au sens classique et dans ce cas, on dira qu'elle représente un signal déterministe. Elle peut aussi être une « fonction aléatoire » et dans ce cas elle représente un signal dit aléatoire ou stochastique. Signalons que tout signal physique est forcément perturbé par un bruit plus ou moins important (bruit de mesure, influence des appareils utilisés *etc.*). Un signal physique est donc un signal aléatoire. La figure 1.1 montre l'effet du bruit : signal non bruité (réalisation 1), signal bruité (réalisations 2 et 3).

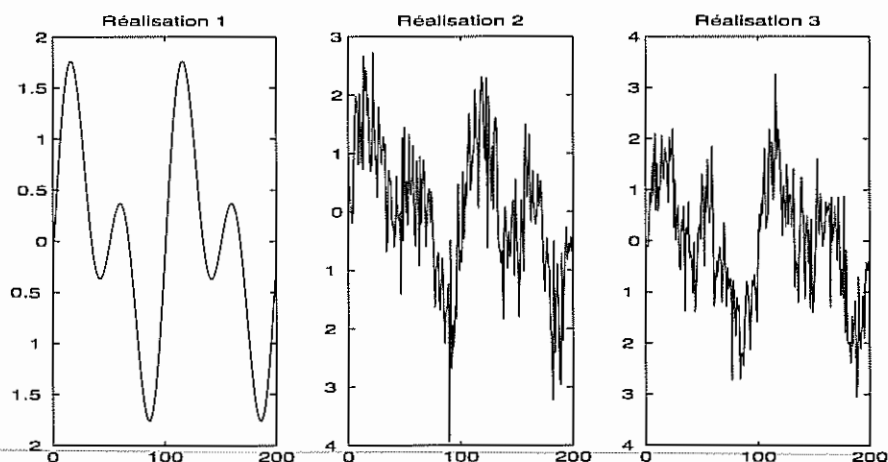


Figure 1.1 Trois réalisations d'un signal montrant l'effet du bruit.

Le signal peut aussi être représenté par une relation de récurrence entre les valeurs prises par le signal à des instants différents. La figure 1.2 donne une illustration d'un tel signal.

Un signal $x(t)$ est dit **causal** s'il vérifie $x(t) = 0$ pour $t < t_0$ où t_0 est un instant fixé (en général $t_0 = 0$). Un signal qui vérifie $x(t) = 0$ pour $t > t_0$ est dit **anticausal**. D'après le principe suivant : l'effet ne peut précéder la cause, tout signal physique est causal. Dans ce chapitre, nous allons exposer les principales représentations des signaux déterministes en distinguant les trois types de signaux suivants.

Signal (à temps) continu C'est un signal modélisable, la plupart du temps, par une fonction $x(t)$ continue par intervalles au sens mathématique du terme, ou par une distribution.

Signal (à temps) discret C'est un signal dont un modèle peut être une fonction définie par l'ensemble des valeurs x_n qu'elle prend sur un ensemble dénombrable $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$ de valeurs de la variable (la différence $t_{i+1} - t_i$ étant en général constante).

Signal numérique C'est un signal ne pouvant prendre qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs distinctes.

Exemple 1.1.1 Fonction porte et fonction sinus cardinal

On désignera dans toute la suite par $\Pi(t)$ la fonction rectangle normée, centrée à l'origine et de support 1, définie par

$$\Pi(t) = 1 \quad \text{si} \quad -1/2 \leq t \leq 1/2 \quad \text{et} \quad 0 \quad \text{ailleurs}$$

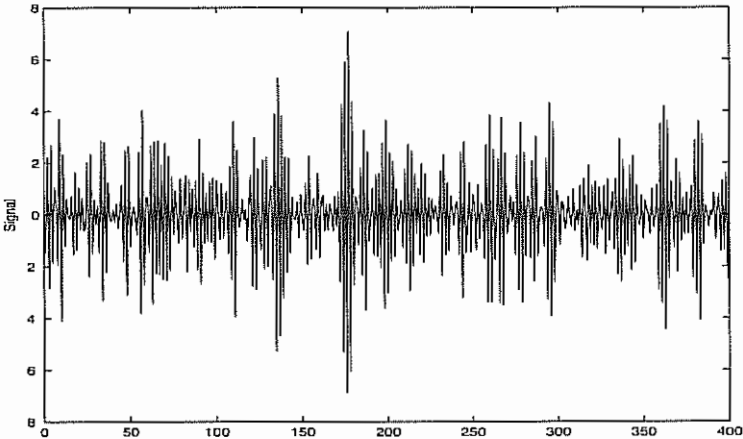


Figure 1.2 Signal non défini par une fonction classique simple.

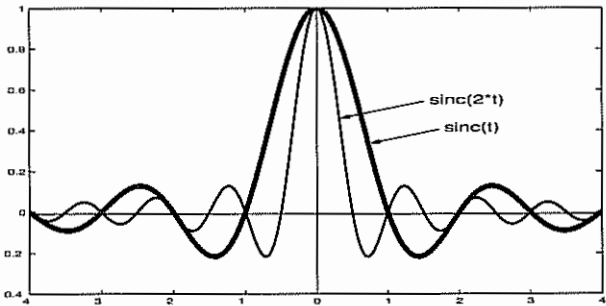


Figure 1.3 Fonction sinus cardinal.

et par sinc (*sinus cardinal*) la fonction définie par

$$\text{sinc}(t) \triangleq \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

On utilise parfois la notation $\text{sinc}(\pi t)$.

Toute fonction rectangle peut se déduire de $\Pi(t)$ par translation sur t et changement d'échelle. À titre d'exemple, $\Pi(\frac{t}{T})$ est la fonction rectangle centrée qui vaut 1 sur l'intervalle $[-T/2, T/2]$ et 0 ailleurs et $\Pi(\frac{t-T/2}{T})$ est la fonction rectangle qui vaut 1 sur l'intervalle $[0, T]$ et 0 ailleurs. Par souci de simplification, cette dernière fonction est parfois notée $\Pi_T(t)$.

Il est souvent assez commode de représenter un signal $x(t)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par sa puissance instantanée, sa puissance moyenne ou son énergie définies respectivement par :

$$P_x(t) \triangleq |x(t)|^2, \quad \overline{P_x} \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad \text{ou} \quad E_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt.$$

On peut vérifier qu'un signal d'énergie finie est forcément de puissance nulle. La réciproque est fautive : il suffit de prendre $x(t) = |t|^\alpha$ avec $-1 < \alpha < 0$. Un signal d'énergie infinie peut avoir une puissance infinie, par exemple, un signal périodique de puissance infinie.

1.1.2 Différents types de systèmes

Un système est un ensemble organisé d'éléments destinés à remplir une fonction physique. Il est souvent représenté par un schéma qui met en relation de cause à effet des grandeurs dites d'entrée $e_i(t)$ et des grandeurs dites de sortie $s_i(t)$, ce schéma devant faire apparaître au mieux le type de système considéré. Les systèmes que l'on peut rencontrer dans les applications appartiennent, en général, à l'un des types suivants. Les propriétés des principaux systèmes rencontrés dans la pratique seront développées plus loin dans la suite de ce chapitre.

Système à temps continu Dans le langage courant des systèmes, on appelle très souvent système « continu » un système dont les signaux d'entrée et de sortie sont « continus ». C'est en fait une expression contractée pour « Systèmes à signaux continus ». On les appelle aussi systèmes analogiques. Nous utiliserons indifféremment l'une ou l'autre de ces terminologies.

Système à temps discret C'est un système conçu pour fonctionner avec des signaux d'entrée et de sortie discrets.

Système hybride C'est un système faisant intervenir des signaux à temps continu et des signaux à temps discrets.

Système passif et système actif On appelle élément actif un élément capable de délivrer une énergie supérieure à celle qu'il reçoit, par exemple un moteur, un transistor ... , sont des éléments actifs. Tout élément qui n'est pas actif est dit passif, c'est le cas par exemple d'une résistance d'une inductance, d'un condensateur, d'un ressort, d'un amortisseur... Un système est dit passif lorsqu'il est exclusivement composé d'éléments passifs. Il est dit actif lorsqu'il contient au moins un élément actif.

Système à éléments localisés C'est un système décomposable en un nombre fini d'éléments, possédant chacun un nombre fini d'entrées et de sorties, dont les grandeurs de sortie s'expriment au moyen des grandeurs d'entrées, de leurs dérivées et de leurs primitives.

Système mathématiquement continu Soit $e_n(t)$ une suite d'excitations et $s_n(t)$ les réponses associées. Le système est dit mathématiquement continu si la réponse à $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n(t)$ est égale à $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t)$ et ceci quelle que soit la suite $e_n(t)$.

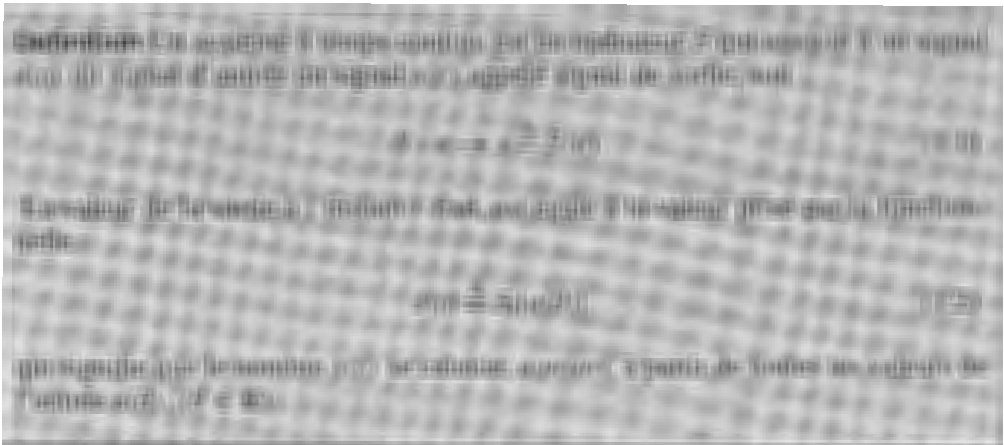
Système causal Un système est dit causal (ou non anticipatoire) si la réponse à toute excitation causale est causale. En d'autres termes, la réponse ne peut prendre naissance avant que n'ait été appliquée l'excitation. Les systèmes réels sont causaux. On montre par ailleurs qu'un système théorique n'est synthétisable ou réalisable que s'il est causal.

Système invariant ou stationnaire Un système est dit invariant si, lorsqu'on appelle $s(t)$ la réponse à une excitation $e(t)$, la réponse à $e(t - t_0)$ est $s(t - t_0)$ quel que soit t_0 constant. Autrement dit, un système est invariant si la réponse à une excitation donnée est indépendante de la date à laquelle s'effectue l'expérience. L'invariance exprime donc la permanence dans le temps du système. On rencontre aussi la dénomination de système stationnaire pour désigner un système invariant.

Système instantané et système à mémoire Un système est dit instantané ou sans mémoire si sa réponse à un instant donné dépend uniquement de la valeur du signal d'entrée au même instant. Un circuit électrique ne comportant que des résistances entre dans cette catégorie. Un amplificateur idéalisé qui fournit un signal de sortie $ae(t)$ (a réel) lorsque le signal d'entrée est $e(t)$ est aussi un système instantané. Un système non instantané est appelé système à mémoire ou à temps différé. Un tel système possède donc une certaine mémoire : c'est le cas d'un circuit électrique comportant des capacités ou des inductances. La plupart des systèmes réels sont à mémoire et on les suppose souvent linéaires et invariants. On introduit alors la notion de filtre linéaire qui sera développée dans le paragraphe suivant.

1.1.3 Les systèmes invariants ou filtres

On introduit souvent le terme filtre pour désigner un système invariant. On se limite ici aux cas des filtres linéaires. Nous allons tout d'abord introduire la définition suivante qui traduit de manière mathématique les principaux types de systèmes énumérés ci-dessus.



La causalité d'un système se traduit donc par le fait que la valeur $S_t[e(\theta)]$ ne dépend que des valeurs $e(\theta)$ pour $\theta \in]-\infty, t]$. Pour un système instantané la valeur $S_t[e(\theta)]$ ne dépend que de la valeur $e(t)$. L'invariance d'un système se traduit par :

$$s(t - \tau) \triangleq S_t[e(\theta - \tau)], \quad \forall \tau, \quad \forall t. \quad (1.3)$$

La linéarité d'un système se traduit par la condition suivante : si $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont les sorties associées respectivement aux entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$, alors la sortie associée à $\alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t)$ est égale à $\alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. La définition se transpose au cas d'un système à temps discret, il suffit de considérer t sur $\mathbb{Z}$. Dans la suite, s'il n'y a aucune ambiguïté, les définitions et propriétés seront donnés uniquement dans le cas continu. La linéarité est une notion importante car elle ramène l'étude d'un système à plusieurs entrées et sorties à celle d'un système à une entrée et une sortie, par application du principe de superposition. Les systèmes linéaires constituent une approche commode des systèmes non linéaires entre certaines limites de fonctionnement de ceux-ci.

Exemple 1.1.2 Différents types de systèmes

Les relations suivantes définissent des exemples de systèmes ayant pour entrée $e(t)$ et pour sortie $s(t)$.

Système non linéaire invariant instantané :

$$s(t) = \sin(e(t) + \phi)$$

Système non linéaire variable instantané :

$$s(t) = m(t)\sin(e(t) + \phi)$$

Système non linéaire variable à mémoire :

$$s(t) = \int_{-t}^t \sin[e(t) + \phi(\theta)]d\theta$$

Système linéaire variable instantané :

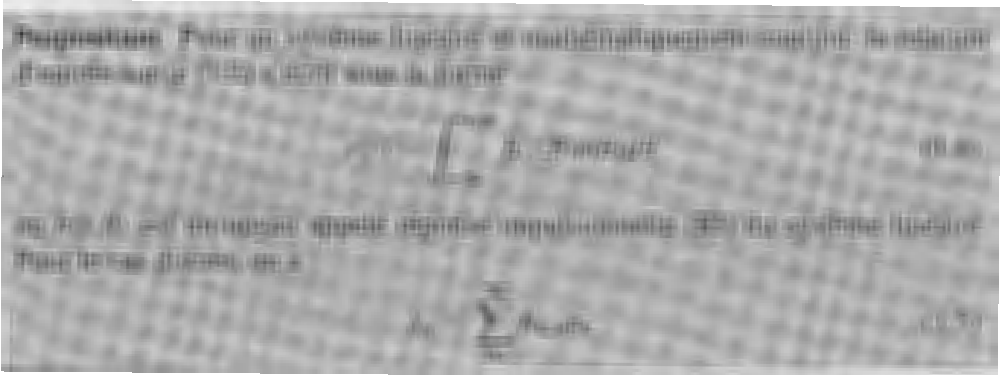
$$y(t) = m(t)e(t)$$

Système linéaire variable à mémoire :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \theta)e(\theta)d\theta$$

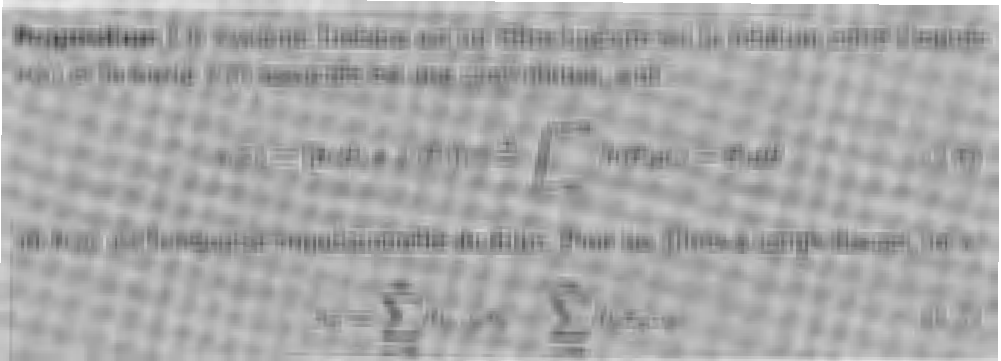
Système linéaire invariant :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)e(t - \theta)d\theta.$$



Un Filtre linéaire est un système linéaire qui vérifie les deux propriétés suivantes.

1. Il est invariant dans le temps
2. Si $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = e(t)$, alors on a $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(t) = s(t)$.



Rappelons que la convolution est une loi interne qui associe à deux fonctions $e(t), h(t)$ une autre fonction $s(t)$ que l'on note souvent par $s(t) = h(t) * e(t)$ mais il est recommandé de faire très attention aux variables. La convolution est associative, commutative et admet comme élément neutre la distribution de Dirac $\delta(t)$. On a donc :

$$[u(t) * v(t)] * h(t) = u(t) * [v(t) * h(t)]$$

$$e(t) * h(t) = h(t) * e(t)$$

$$s(t) * \delta(t) = s(t) .$$

La distribution de Dirac joue un rôle important dans la représentation des signaux et systèmes et elle peut être définie par la condition suivante (voir plus loin pour plus de détails) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt \triangleq \varphi(0), \quad \forall \varphi \in S$$

où S désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables et à « décroissance rapide ». On peut noter les résultats suivants utiles pour les calculs :

$$x(t) * \delta(t - \tau) = x(t - \tau) * \delta(t) = x(t - \tau).$$

Comme la réponse impulsionnelle d'un filtre est égale à la sortie du filtre lorsqu'il est attaqué par un Dirac dans le cas continu et par un symbole de Kronecker dans le cas discret, on peut illustrer la non causalité et la causalité d'un filtre à temps discret par les schémas de la figure 1.4.

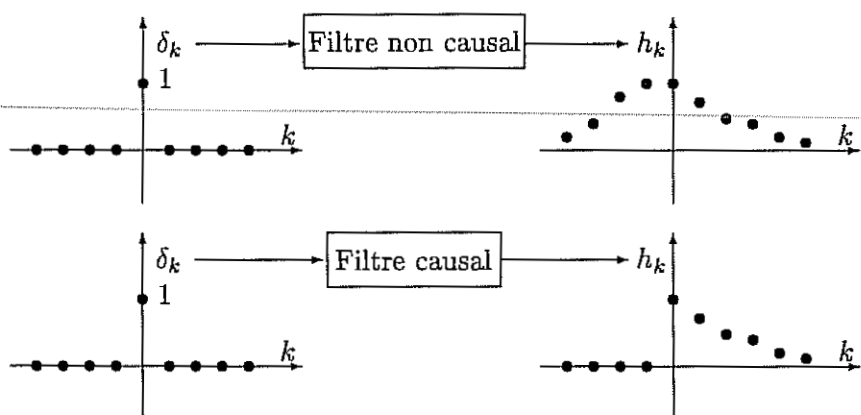


Figure 1.4 Réponses impulsionnelles d'un filtre non causal et un filtre causal.

Un filtre dynamique est un filtre linéaire dont la relation entrée-sortie est une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type :

$$\sum_{k=0}^p a_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^q b_k \frac{d^k e(t)}{dt^k}. \quad (1.8)$$

Exemple 1.1.3 Le circuit RLC est un filtre dynamique

Comme exemple de filtre dynamique, considérons un circuit RLC aux bornes duquel on a une tension instantanée $v(t)$. L'intensité instantanée $i(t)$ et la charge $q(t)$ vérifient les équations différentielles suivantes :

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\theta) d\theta = v(t)$$

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q}{C} = v(t).$$

On a bien une équation différentielle du type (1.8) avec $p = 2$ et $q = 0$. L'entrée du filtre est $e(t) = v(t)$ et la sortie est $s(t) = q(t)$.

Exemple 1.1.4 Une bobine est un filtre linéaire

Considérons une bobine d'inductance L constante aux bornes de laquelle on a une tension instantanée $v(t)$. L'intensité instantanée $i(t)$ est donnée par :

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\theta) d\theta$$

et cette expression montre que le système est linéaire et que si l'entrée est remplacée par $v(t - \tau)$, la sortie associée est $i(t - \tau)$. Le système est donc un filtre linéaire. On peut aussi vérifier que cette expression peut se mettre sous la forme d'un produit de convolution :

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} U(t - \theta) v(\theta) d\theta$$

où $U(t)$ est l'échelon unité qui vaut 0 pour $t < 0$ et 1 pour $t > 0$. Ceci montre d'une autre manière que le système est un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $\frac{U(t)}{L}$. En vertu de la Proposition de la page 8, ce système doit admettre les fonctions exponentielles comme fonctions propres. En effet, on obtient :

$$i(t) = \frac{V_m}{j2\pi f_0} v(t) \quad \text{pour} \quad v(t) = V_m e^{j2\pi f_0 t}$$

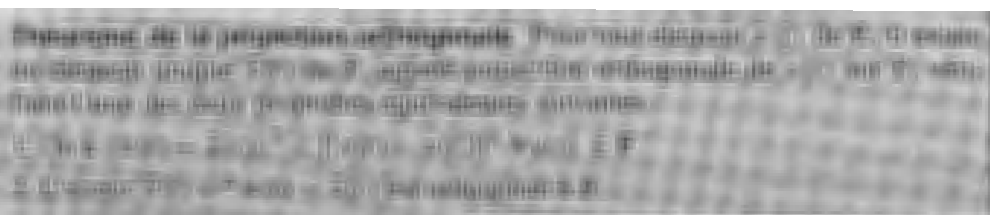
Tenant compte de l'importance du rôle joué par les signaux exponentiels périodiques en tant que fonctions propres des filtres linéaires, les méthodes d'analyse des signaux sont souvent fondées sur des représentations faisant intervenir ces signaux exponentiels. Les représentations les plus classiques sont la représentation fréquentielle (Transformé de Fourier) et les représentations symboliques (Transformée de Laplace et Transformée en Z). Nous allons développer les principales propriétés pratiques de ces trois représentations.

1.2 REPRÉSENTATIONS FRÉQUENTIELLES

La représentation temporelle d'un signal ne permet pas toujours de répondre à la question que l'on veut traiter. Comme les systèmes physiques utilisés sont souvent des filtres linéaires, admettant donc les signaux exponentiels comme fonctions propres, il est intéressant de représenter un signal donné comme combinaison linéaire de signaux exponentiels. Ceci conduit à la décomposition en série de Fourier. Cette dernière décomposition n'étant pas toujours valable, une autre représentation du signal $x(t)$ a été introduite afin d'améliorer l'analyse du problème à résoudre. Elle consiste à représenter le signal $x(t)$ par un autre signal $\tilde{x}(\nu)$ appelée transformée de Fourier (T.F) de $x(t)$. L'opérateur qui associe à $x(t)$ la fonction $\tilde{x}(\nu)$ de la variable réelle ν est appelé T.F et l'ensemble de définition de cet opérateur peut être très vaste et dépend du problème que l'on veut traiter. Nous distinguons l'ensemble des signaux d'énergie finie, à temps continu puis à temps discret et nous donnons ensuite quelques extensions aux cas des signaux d'énergie infinie et en particulier aux signaux périodiques.

1.2.1 Série de Fourier et projections associées à un signal

Considérons un espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie, muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et soit $\mathbb{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.



Pour le calcul de la projection $\hat{x}(t)$, on introduit souvent un système orthonormal dans $\mathbb{F}$. Si le système

$$e_n(t) \in \mathbb{F}, n = -N, \dots, N \in \mathbb{Z}, \quad \langle e_m(t), e_n(t) \rangle = \delta_{m,n}$$

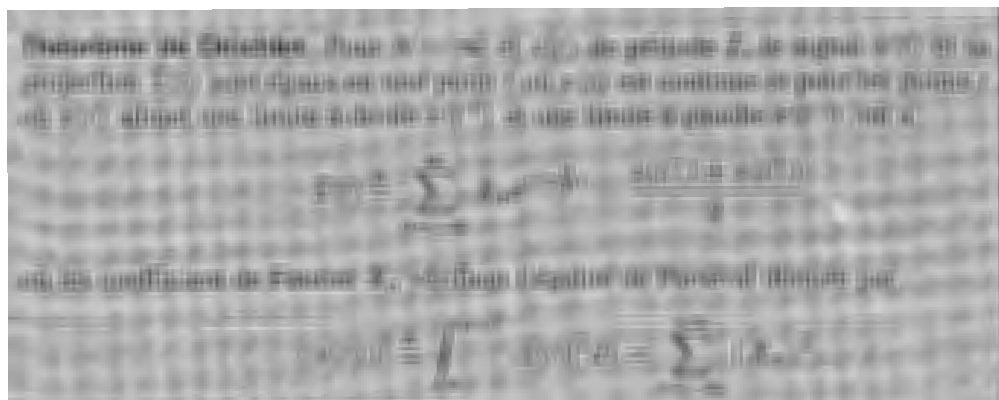
qui est orthonormal est en plus une base de $\mathbb{F}$, on peut décomposer $\hat{x}(t)$ d'une manière unique sous la forme

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-N}^N X_n e_n(t) \quad \text{avec} \quad X_n = \langle x(t), e_n(t) \rangle$$

où les X_n , appelés Coefficients de Fourier, vérifient l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{n=-N}^N \|X_n\|^2 \leq \|x(t)\|^2.$$

Le système particulier : $e_n(t) = e^{j2\pi \frac{n}{T}t}$ joue un rôle fondamental dans la « représentation spectrale » d'un signal et le résultat suivant précise la nature des signaux $x(t)$ pour lesquels la projection $\hat{x}(t)$ devient égale à $x(t)$ lorsque N tend vers l'infini.



Il est évident qu'un signal non périodique ne pourra jamais être égal à sa projection sur un espace $\mathbb{F}$ engendré par les $e^{j2\pi \frac{n}{T}t}$ même si $\mathbb{F}$ est de dimension infinie.

Exemple 1.2.1 Projection d'un signal particulier

On considère le signal $x(t) = \cos(2\pi \frac{t}{T} + \phi)$. On approxime ce signal par sa projection orthogonale sur l'espace vectoriel $\mathbb{F}$ engendré par les 2 signaux de période T : $u(t) = \cos(2\pi \frac{t}{T})$ et $v(t) = \sin(2\pi \frac{t}{T})$ et muni du produit scalaire :

$$\langle x(t), y(t) \rangle \triangleq \int_0^T x(t)y(t)dt.$$

La projection orthogonale de $x(t)$ sur $\mathbb{F}$ s'écrit $\hat{x}(t) = \alpha u(t) + \beta v(t)$ et elle est unique. Or on sait que $x(t) = \cos(\phi)u(t) - \sin(\phi)v(t)$. On obtient donc par unicité $\alpha = \cos(\phi)$ et $\beta = -\sin(\phi)$. Ce résultat signifie que $x(t)$ appartient au plan $\mathbb{F}$.

Un signal $x(t)$ de période T peut donc être complètement déterminé par la suite de ses coefficients de Fourier X_n . Si l'on trace les points dont les abscisses sont les nombres n/T , appelés fréquences discrètes, on obtient un graphe formé par des points qui ont des abscisses équidistantes. Ce graphe qui définit de manière unique les fonctions $e^{j2\pi \frac{n}{T}t}$ et le signal $x(t)$, est appelé spectre d'un signal périodique (ou harmonique). Ce graphe, appelé aussi spectre de raies, donne une représentation dans le domaine fréquentiel d'un signal périodique sur laquelle nous reviendrons plus loin. Remarquons qu'un signal quelconque observé sur l'intervalle $[\alpha, \alpha + T]$

peut toujours être considéré comme étant extrait d'un signal périodique de période T . La portion du signal observée peut donc être représentée par une série de Fourier unique. Dans la section suivante, on va étendre la représentation fréquentielle au cas des signaux non périodiques.

1.2.2 Transformée de Fourier des signaux d'énergie finie

a) Cas d'un signal à temps continu

Associons à un signal $x(t)$ non périodique ses «projections» sur le système de signaux particuliers $e^{j2\pi\nu t}$ où ν est un paramètre réel quelconque. Par abus de langage, nous définissons ces projections par :

$$X_\nu \triangleq \langle x(t), e^{j2\pi\nu t} \rangle$$

Ce procédé introduit naturellement l'opérateur $\mathcal{F}$ qui associe à $x(t)$ la fonction de la variable réelle ν :

$$\mathcal{F}[x(t)] \triangleq \tilde{x}(\nu) \triangleq X(\nu) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi\nu t} dt \quad (1.9)$$

dénommé Transformée de Fourier (T.F) directe de $x(t)$. On va exposer les principales propriétés de cet opérateur en utilisant, selon le contexte, l'une des trois notations associées. Les propriétés suivantes découlent alors immédiatement de la définition de la T.F.

Linéarité L'opérateur $\mathcal{F}$ est linéaire, soit :

$$\mathcal{F}[\alpha x(t) + \beta y(t)] = \alpha X(\nu) + \beta Y(\nu).$$

Symétries Pour tout signal admettant une T.F, on a :

$$\mathcal{F}[x(-t)](\nu) = \mathcal{F}[x(t)](-\nu) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}[x^*(t)](\nu) = \mathcal{F}[x(t)](-\nu)^*.$$

Décalage et changement d'échelle Pour tout signal admettant une T.F, on a :

$$\mathcal{F}[x(t - \tau)] = e^{-j2\pi\nu\tau} X(\nu)$$

$$\mathcal{F}[x(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{\nu}{\alpha}\right), \quad \alpha \text{ réel } \neq 0.$$

Ceci donne, pour $\alpha = -1$, la première relation de symétrie ci-dessus.

Les propriétés suivantes, plus difficiles à établir, font de la T.F une représentation très importante pour l'analyse des signaux physiques.

Conservation du produit scalaire L'opérateur $\mathcal{F}$ est une isométrie sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des signaux d'énergie finie ($E_x < \infty$). Il conserve le produit scalaire, et la norme, i.e., pour tout $x(t)$ et $y(t)$ de $L^2(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)Y(\nu)^* d\nu, \quad \text{produit scalaire}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu, \quad \text{égalité de Parseval.}$$

Inversibilité Comme $\mathcal{F}$ est une isométrie, il admet donc un opérateur inverse $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$ et on a pour tout $x(t)$ tel que $\mathcal{F}[x]$ et $\mathcal{F}[\mathcal{F}(x)]$ existent :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)e^{j2\pi\nu t} d\nu \triangleq \overline{\mathcal{F}}[X(\nu)].$$

Produit usuel et produit de convolution Si l'on considère des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, alors l'opérateur $\mathcal{F}$ transforme le produit usuel en produit de convolution et vice-versa :

$$\mathcal{F}(xy) = \mathcal{F}(x) * \mathcal{F}(y) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(x * y) = \mathcal{F}(x)\mathcal{F}(y).$$

Existence, majoration et dérivabilité Toute fonction $x(t)$ sommable a une T.F $\tilde{x}$ qui vérifie les propriétés suivantes.

La fonction $\tilde{x}$ est continue, elle admet 0 comme limite lorsque $|\nu|$ tend vers l'infini et on a :

$$|\tilde{x}(\nu)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt.$$

Si x est m fois continuellement dérivable et si ses dérivées $x^{(k)}$ d'ordres $k \leq m$ sont sommables, alors on a :

$$\mathcal{F}[x^{(m)}] = (j2\pi\nu)^m \tilde{x}(\nu).$$

Si $t^m x(t)$ est sommable, alors $\tilde{x}$ est m fois continuellement dérivable et l'on a

$$\tilde{x}^{(m)}(\nu) = \mathcal{F}[(-j2\pi t)^m x(t)].$$

Si l'on adopte la définition suivante :

$$\mathcal{F}[x](\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \triangleq X(\omega)$$

un simple changement de variable conduit à :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Dans toute la suite, on convient d'utiliser la même notation $\tilde{x}$ pour la T.F, la variable ω ou ν indiquera la définition qui a été retenue.

b) Cas d'un signal à temps discret

Un signal $x_n \triangleq x(nT_e)$, $T_e > 0$ à temps discret et d'énergie finie :

$$E_x \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 < \infty$$

est une suite de l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$. À toute suite de cet espace, on peut associer une fonction périodique de la variable réelle ν de période $1/T_e$, définie par

$$\mathcal{F}[x_n] \triangleq X(\nu) \triangleq \tilde{x}(\nu) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{-j2\pi\nu n T_e} \quad (1.10)$$

appelée T.F du signal à temps discret. Comme dans le cas des signaux à temps continu, la T.F d'une suite vérifie les propriétés suivantes.

Linéarité

$$\mathcal{F}[\alpha(x_n) + \beta(y_n)] = \alpha X(\nu) + \beta Y(\nu).$$

Décalage

$$\mathcal{F}[x_{n-k}] = X(\nu) e^{-j2\pi\nu k T_e}.$$

Conservation du produit scalaire, égalité de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n y_n^* = T_e \int_{\alpha}^{\alpha+1/T_e} X(\nu) Y(\nu)^* d\nu$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 = T_e \int_{\alpha}^{\alpha+1/T_e} |X(\nu)|^2 d\nu.$$

Inversibilité

$$x_n = T_e \int_{\alpha}^{\alpha+1/T_e} X(\nu) e^{j2\pi\nu n T_e} d\nu, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Comme dans le cas continu, si l'on adopte la définition :

$$\mathcal{F}[x_n] \triangleq \tilde{x}(\omega) \triangleq X(\omega) \triangleq \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n T_e}$$

on a :

$$x_n = \frac{T_e}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\frac{2\pi}{T_e}} X(\omega) e^{j\omega n T_e} d\omega.$$

c) Transformée de Fourier de signaux particuliers

Signaux réels et signaux pair Si $x(t)$ est un signal pair à valeurs réelles ou complexes, i.e., $x(t)$ vérifie $x(-t) = x(t)$, alors on a $\mathcal{F}(x) = \overline{\mathcal{F}(x)}$.

Si $x(t)$ est un signal réel, alors on a $\tilde{x}(-\nu) = \tilde{x}(\nu)^*$

Si $x(t)$ est un signal réel et pair, alors $\tilde{x}$ est aussi réelle et paire.

Signaux exponentiels symétriques Si l'on prend $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$, un calcul simple conduit à :

$$\mathcal{F}[e^{-a|t|}] = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\left[\frac{2a}{a^2 + \pi^2 t^2}\right] = e^{-a|\nu|}.$$

Signaux gaussiens On démontre que pour tout $\alpha > 0$, les signaux du type $\exp(-\pi\alpha^2 t^2)$, appelés signaux gaussiens, se conservent par l'opérateur $\mathcal{F}$ et l'on a :

$$\mathcal{F}[e^{-\pi\alpha^2 t^2}] = \frac{1}{\alpha} e^{-\pi\alpha^{-2}\nu^2}.$$

La T.F de la fonction $e^{-\pi t^2}$ est donc la fonction $e^{-\pi\nu^2}$ elle-même.

Fenêtre rectangulaire à temps continu Les deux signaux $\Pi(t)$ et $\text{sinc}(t)$ sont réels et pairs et on peut vérifier que

$$\mathcal{F}[\Pi(t)] = \text{sinc}(\nu) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}[\text{sinc}(t)] = \Pi(\nu).$$

Utilisant la propriété de changement d'échelle, on peut vérifier que la fonction rectangle de support $[-T, T]$, définie par

$$\Pi\left(\frac{t}{2T}\right) = 1 \quad \text{si} \quad -T \leq t \leq T \quad \text{et} \quad 0 \quad \text{ailleurs}$$

et la fonction $\text{sinc}(2Bt)$ sont reliées par :

$$\mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)\right] = 2T \text{sinc}(2T\nu) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}[\text{sinc}(2Bt)] = \frac{1}{2B} \Pi\left(\frac{\nu}{2B}\right).$$

Fenêtre rectangulaire à temps discret Soit Π_N le signal à temps discret définie par :

$$\Pi_N(k) \triangleq 1 \quad \text{si} \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad \text{et} \quad 0 \quad \text{ailleurs.}$$

La T.F de la fenêtre à temps discret Π_N est donnée par :

$$\tilde{\Pi}_N(\nu) = NT_e \text{sinc}(NT_e \nu) e^{-j2\pi \nu NT_e}.$$

Fenêtres de Hamming et de Hanning L'analyse d'un signal nécessite souvent l'introduction de fonctions appelées fenêtres de pondération autres que la fenêtre rectangulaire. La fonction suivante :

$$\begin{aligned} w_T(t) &= \alpha + (1 - \alpha) \cos \frac{2\pi t}{T} \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T \\ &= 0 \quad \text{ailleurs} \end{aligned}$$

dont la T.F est donnée par :

$$\tilde{w}_T(\nu) = T e^{-j\pi T \nu} \left[\alpha \delta(\nu) + \frac{1 - \alpha}{2} \left(\delta\left(\nu - \frac{1}{T}\right) + \delta\left(\nu + \frac{1}{T}\right) \right) \right] * \text{sinc}(T\nu)$$

définit pour $\alpha = 0.54$ et $\alpha = 0.5$ la fenêtre de Hamming et celle de Hanning respectivement. Pour $\alpha = 1$, on obtient la fenêtre rectangulaire dont la T.F est un sinus cardinal et pour $\alpha = 0.5$, on obtient une fenêtre dont la T.F est donnée par :

$$\tilde{w}_T(\nu) = \frac{1}{2} \frac{T e^{-j\pi T \nu}}{1 - T^2 \nu^2} \text{sinc}(T\nu).$$

Dans le cas discret, la fenêtre de pondération est définie par :

$$\begin{aligned} w_N(k) &= \alpha + (\alpha - 1) \cos \frac{2\pi k T_e}{N} \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \\ &= 0 \quad \text{ailleurs} \end{aligned}$$

1.2.3 Transformée de Fourier des signaux d'énergie infinie

On aura souvent besoin d'introduire des signaux d'énergie infinie qui ne sont pas forcément périodiques. Pour étendre la définition de la T.F à ces signaux, on doit représenter ces derniers par des « fonctions généralisées » appelées distributions.

Une fonction à décroissance rapide est une fonction qui tend vers 0, pour $|t| \rightarrow \infty$, plus vite que toute puissance de $\frac{1}{|t|}$. On désigne par S l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables et dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide.

a) Transformée de Fourier d'une distribution

Une distribution définie sur un ensemble $\mathbb{F}$ de fonctions est une forme linéaire sur $\mathbb{F}$. L'ensemble des distributions est donc le dual de $\mathbb{F}$ et sera noté $\mathbb{F}'$. Comme pour les fonctions classiques, dans la définition d'une distribution on doit obligatoirement préciser l'ensemble de définition de cette dernière. On introduit dans la suite trois ensembles de fonctions qui jouent un rôle important dans la définition des distributions.

D : Ensemble des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact.

S : Ensemble des fonctions indéfiniment dérivables et à décroissance rapide.

E : Ensemble des fonctions indéfiniment dérivables et à support quelconque.

On introduit sur D et S la notion de convergence suivante : une suite de fonctions $\varphi_n \in S$ ($\in D$) converge vers 0 au sens de S (D) si, quels que soient les entiers l et $m \geq 0$, les fonctions $t^l \varphi_n^{(m)}(t)$ convergent vers 0 uniformément sur l'axe des réels. Si $x(t)$ appartient à S , alors chaque fonction $t^l x^{(m)}(t)$ est bornée et sommable. En effet, comme $t^{l+2} x^{(m)}(t)$ est bornée par une constante M , alors $t^l x^{(m)}(t)$ est bornée par $\frac{M}{t^2}$. D'après la formule de Leibnitz donnant les dérivées d'un produit, on en déduit que $(t^l x(t))^{(m)}$ est bornée et sommable. On peut vérifier que si $x(t)$ appartient à S , alors sa T.F $X(\nu)$ appartient aussi à S .

Exemple 1.2.2 Fonction non dérivable et à support borné

La fonction rectangle $x(t) = \Pi(t/T)$ n'est pas continuellement différentiable. Sa T.F $X(\nu) = T \text{sinc}(T\nu)$ est telle que $|\nu X(\nu)|$ est bornée et $|\nu^2 X(\nu)|$ est non bornée. Comme $x(t)$ est à support borné, $t^m x(t)$ est sommable pour tout m . On vérifie ainsi que $X(\nu)$ est indéfiniment dérivable et que chacune de ses dérivées est bornée.

Afin de définir la T.F d'une distribution, commençons par exprimer $\mathcal{F}(x)$ en considérant x et $\mathcal{F}(x)$, non plus comme fonctions, mais comme distribution.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(x), \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\nu) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\nu t} x(t) dt d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\nu t} x(t) \varphi(\nu) dt d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\nu t} \varphi(\nu) dt d\nu \\ &= \langle x, \mathcal{F}(\varphi) \rangle, \quad \forall \varphi \in D. \end{aligned}$$

En effet, $|e^{-j2\pi\nu t} x(t)\varphi(\nu)| \leq |x(t)| |\varphi(\nu)|$ est sommable comme produit d'une fonction sommable $x(t)$ par une fonction sommable $\varphi(\nu)$ (cette formule reste valable lorsque $\varphi \notin D$, pourvu que $\varphi \in L^1$). Ce résultat suggère de définir la T.F d'une distribution U par la formule

$$\langle \mathcal{F}(U), \varphi \rangle \triangleq \langle U, \mathcal{F}(\varphi) \rangle, \quad \forall \varphi \in D. \quad (1.11)$$

Mais cette formule n'aura pas de sens pour $U \in E$ quelconque. En effet, si $\varphi \in E$, $\mathcal{F}(\varphi)$ n'a aucune raison d'appartenir à E . La T.F d'une distribution arbitraire n'existe pas. Nous considérons dans la suite uniquement le cas des distributions importantes dites tempérées pour lesquelles la T.F est définie par (1.11) où l'ensemble D est remplacé par S . En effet, soit U une distribution tempérée. Pour $\varphi(\nu) \in S$ le 2^{ème} membre de (1.11) a un sens, puisque $\mathcal{F}(\varphi) = \gamma(x)$ est dans S et U dans S' par hypothèse. Il définit alors une forme linéaire continue de $\varphi(\nu) \in S$ donc une distribution tempérée V , qui sera par définition $\mathcal{F}(U)$. On définit la dérivée T' d'une distribution tempérée T par :

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \quad (1.12)$$

b) T.F des distributions tempérées

Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur D et prolongeable par une forme linéaire continue sur S . Comme on le verra sur les exemples, le mot tempérée évoque une croissance lente à l'infini. On démontre qu'une fonction du type e^t , qui n'est pas à croissance lente pour t tendant vers l'infini, ne définit pas une distribution tempérée.

Exemple 1.2.3 Exemples de distributions tempérées

Les fonctions suivantes définissent des distributions tempérées.

1. Les fonctions sommables.
2. Les fonctions bornées.
3. Les fonctions localement sommables et à croissance lente, i.e, telles que :

$$|x(t)| \leq A|t|^k \text{ pour } |t| \rightarrow \infty.$$

4. Les distributions à support borné et leurs dérivées successives.
5. Le produit d'une distribution tempérée par une fonction polynomiale.

Les résultats suivants étendent les propriétés de la T.F des signaux d'énergie finie au cas des signaux d'énergie infinie.

Inversibilité Dans l'espace des distributions tempérées, les opérateurs $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont inverses l'un de l'autre, i.e.

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}U = U. \quad (1.13)$$

Dérivabilité Si U est une distribution tempérée, alors $V \triangleq \mathcal{F}(U)$ est tempérée et on a :

$$\mathcal{F}[U^{(m)}] = (j2\pi\nu)^m V \quad (1.14)$$

$$\mathcal{F}[(-j2\pi x)^m V] = V^{(m)} \quad (1.15)$$

Produit de convolution Si S et T sont deux distributions à supports bornés, alors le produit de convolution $S * T$ est aussi à support borné, et on a :

$$\mathcal{F}[S * T](\nu) = \tilde{S}(\nu)\tilde{T}(\nu) \quad (1.16)$$

Ce résultat reste vrai si S est une distribution tempérée quelconque et T une distribution à support borné.

Le résultat (1.13), dont une démonstration est donnée dans l'exercice 1.17, permet d'établir que si une distribution U vérifie $\mathcal{F}(U) = 0$, alors on a forcément $U = 0$. En effet, si $V = \mathcal{F}(U) = 0$, alors $U = \overline{\mathcal{F}}(V) = \overline{\mathcal{F}}(0)$ est bien nulle. Dans le cas où U est une fonction, cela prouve seulement que U est nulle en tant que distribution, c'est-à-dire nulle presque partout.

Exemple 1.2.4 T.F des distributions à support borné

La T.F d'une distribution ou d'une fonction est une distribution. Si $x(t)$ est une fonction à support borné, sa T.F est une fonction holomorphe et ne peut donc pas être à support borné sans être identiquement nulle. Comme $\mathcal{F}(\varphi)$ ne peut être nulle que si φ est nulle, on voit que si $\varphi(t) \in D$ n'est pas identiquement nulle, son image de Fourier n'est jamais dans D . À titre d'exemple, la formule (1.14) donne :

$$\mathcal{F}[\delta^{(m)}] = (j2\pi\nu)^m \quad \text{pour } m \geq 0. \quad (1.17)$$

Il existe plusieurs représentations possibles pour la distribution δ . On a vu que la T.F de la fonction rectangle de support $[-T, T]$, définie par $\Pi(\frac{t}{2T})$, est la fonction $\Delta(\nu) \triangleq 2T \text{sinc}(2T\nu)$. Lorsque T tend vers l'infini, on démontre que la fonction $\Delta(\nu)$ tend vers la distribution de Dirac $\delta(t)$ qui peut donc être interprétée comme la T.F de la fonction constante $x(t) = 1$.

c) Signaux particuliers et leur T.F

Signal signe Le signal signe est défini par :

$$\text{Sg}(t) = -1 \quad \text{si } t < 0 \quad \text{et} \quad \text{Sg}(t) = 1 \quad \text{si } t > 0.$$

On peut vérifier que la dérivée au sens des distributions de $\text{Sg}(t)$ est donnée par :

$$\text{Sg}(t)' = 2\delta(t).$$

Ce résultat et la relation (1.17) permettent d'exprimer les T.F des dérivées et des primitives au sens des distributions de la de la fonction signe. On obtient :

$$\mathcal{F}[\text{Sg}(t)] = \frac{1}{j\pi\nu} \triangleq \frac{1}{j\pi} \text{vp}\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

où la notation $\text{vp}(\cdot)$ signifie que la fonction ainsi obtenue doit être prise au sens des distributions et son application à une fonction se calcule en valeurs principales de Cauchy comme suit :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\nu) \frac{1}{j\pi\nu} d\nu \triangleq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} x(\nu) \frac{1}{j\pi\nu} d\nu + \int_{\varepsilon}^{\infty} x(\nu) \frac{1}{j\pi\nu} d\nu \right].$$

Échelon unité ou Heaviside C'est le signal défini par la fonction de Heaviside :

$$U(t) = 1 \quad \text{si } t > 0 \quad \text{et} \quad U(t) = 0 \quad \text{si } t < 0.$$

Pour calculer la T.F de $U(t)$, au sens des distributions, on peut utiliser la relation évidente entre les fonctions $\text{Sg}(t)$ et $U(t)$. On obtient :

$$U(t) = \frac{1}{2}[1 + \text{Sg}(t)] \quad \text{et} \quad \mathcal{F}[U(t)] = \frac{1}{2}\delta(\nu) + \frac{1}{j2\pi\nu}.$$

Partant de $\text{Sg}(t)' = 2\delta(t)$, on obtient aussi :

$$\mathcal{F}[U(t)] = \frac{1}{j2\pi\nu}$$

et la justification de la différence entre les deux expressions de $\tilde{U}(\nu)$ provient du fait que $\frac{1}{j\pi\nu}$ est une distribution qui est définie en valeurs principales et donc à un Dirac $\delta(\nu)$ près.

Signal analytique Soit le signal $x(t) = a(t)\cos(\phi(t))$. Dans le cas où $a(t)$ est une constante positive et $\phi(t)$ une fonction linéaire du temps, le signal ne peut contenir aucune information intéressante. Un tel signal sert souvent comme porteuse pour véhiculer un autre signal utile. On a alors recourt à des techniques de modulation qui conduisent au cas où $a(t)$ n'est plus une constante et $\phi(t)$ n'est plus une fonction linéaire du temps. Le problème est qu'un signal peut s'écrire d'une infinité de manière sous la forme $x(t) = a(t)\cos(\phi(t))$. Il existe une technique qui permet d'associer à un signal réel $x(t)$ un couple unique $[a(t), \phi(t)]$ et qui est fondée sur la notion de signal analytique. Un signal $z(t)$ est dit signal analytique, si sa T.F est nulle pour les fréquences négatives. Soit $x(t)$ un signal réel admettant une T.F $X(\nu)$.

On appelle signal analytique associé à $x(t)$ le signal $z(t)$ à valeurs complexes dont la T.F est définie par :

$$Z(\nu) = 2X(\nu)U(\nu) = [1 + \text{Sg}(\nu)]X(\nu). \quad (1.18)$$

Comme $F(z(t)^*) = Z(-\nu)^*$, on obtient de manière unique

$$x(t) = \frac{z(t) + z^*(t)}{2}.$$

Il y a donc une correspondance biunivoque entre un signal réel $x(t)$ et son signal analytique $z(t)$ associé. On peut alors poser

$$z(t) = x(t) + jy(t) \quad \text{soit} \quad Z(\nu) = X(\nu) + jY(\nu)$$

et la définition de $Z(\nu)$ conduit à :

$$Y(\nu) = -j\text{Sg}(\nu)X(\nu). \quad (1.19)$$

Le signal $y(t)$ ainsi défini est appelé signal en quadrature de $x(t)$ et on a :

$$y(t) = x(t) * \frac{1}{\pi}vp\left(\frac{1}{t}\right) \triangleq \mathcal{H}[x(t)] \quad (1.20)$$

où l'opérateur $\mathcal{H}$ est appelé transformée de Hilbert. On peut vérifier en utilisant (1.19) que $\mathcal{H}^{-1} = -\mathcal{H}$.

Comme $Z(\nu) = 0$ pour $\nu < 0$, le signal $z(t)$ n'est pas à valeurs réelles et on peut l'écrire d'une manière unique sous la forme :

$$z(t) = a(t)\exp(j\phi(t)), \quad a(t) \geq 0.$$

La notion de signal analytique permet donc d'associer à tout signal réel $x(t)$ le couple unique $[a(t), \phi(t)]$. Évidemment, le fait que $z(t)$ soit analytique impose à $a(t)$ et $\phi(t)$ de satisfaire des contraintes. Ces contraintes s'obtiennent en écrivant que $a(t)\cos(\phi(t))$ et $a(t)\sin(\phi(t))$ sont transformées de Hilbert l'une de l'autre. On peut vérifier facilement que la somme et le produit de deux signaux analytiques sont aussi des signaux analytiques. On a aussi le résultat suivant (Théorème de Bedrosian) : si $X(\nu) = 0$ pour $\nu > B$ et $Y(\nu) = 0$ pour $\nu < B$, alors

$$\mathcal{H}[x(t)y(t)] = x(t)\mathcal{H}[y(t)].$$

Exemple 1.2.5 Signal analytique associé à une sinusoïde

La T.F du signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ où ϕ désigne une phase à l'origine constante est donnée par

$$X(\nu) = \frac{1}{2}[e^{j\phi}\delta(\nu - f_0) + e^{-j\phi}\delta(\nu + f_0)].$$

Le signal analytique associé à $x(t)$ est donc $z(t) = e^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$

1.2.4 Transformée de Fourier d'un signal périodique

Soit $x(t)$ un signal périodique de période T . Ce signal est donc d'énergie infinie et pour définir sa T.F, il faut prendre des précautions particulières. Une méthode consiste à associer à ce signal son développement en série de Fourier, lorsqu'il existe, défini par :

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} \quad (1.21)$$

et de prendre la T.F de ce développement au sens des distributions :

$$\tilde{x}(\nu) \triangleq \sum_{-\infty}^{+\infty} X_n \delta(\nu - \frac{n}{T}) \quad (1.22)$$

On voit donc que la T.F d'un signal périodique est réduit à un ensemble de Dirac pondérés par les coefficients de Fourier et centrés en des points dénombrables et équidistants sur l'axe des fréquences ($\nu_n \triangleq n/T, n \in \mathbb{Z}$). On dit que l'on a un spectre de raies. Réciproquement, une fonction dont le support est réduit à un ensemble de points dénombrables et équidistants peut être interprétée comme la T.F d'un signal périodique. À titre d'exemple, nous donnons la T.F des sigaux exponentiels périodiques, $x(t) = e^{j2\pi\nu_0 t}$, lesquels jouent un rôle fondamental dans les applications. On a :

$$\mathcal{F}(e^{j2\pi\nu_0 t}) = \delta(\nu - \nu_0).$$

Exemple 1.2.6 Limitation de la T.F en analyse temps-fréquence

L'utilisation de la T.F pour rechercher des fréquences pures contenues dans le spectre suppose que les caractéristiques spectrales de ce signal sont « stationnaires ». En effet, la T.F conduit à une analyse en moyenne d'une représentation spectrale comme le montre la figure (1.5) où l'on trace la T.F de la juxtaposition de 2 sinusoïdes de fréquences différentes. Une façon de traiter ce problème consiste à découper le signal observé en plusieurs tranches chacune de durée T et calculer ensuite les T.F de chacune de ces tranches. Mais cela introduit des effets de bord dus aux différentes troncatures du signal dans le cas où T est assez petit. La figure (1.6) donne les T.F d'un signal observé sur une durée T puis sur une durée $2T$.

Peigne de Dirac La distribution définie par :

$$P_T(t) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

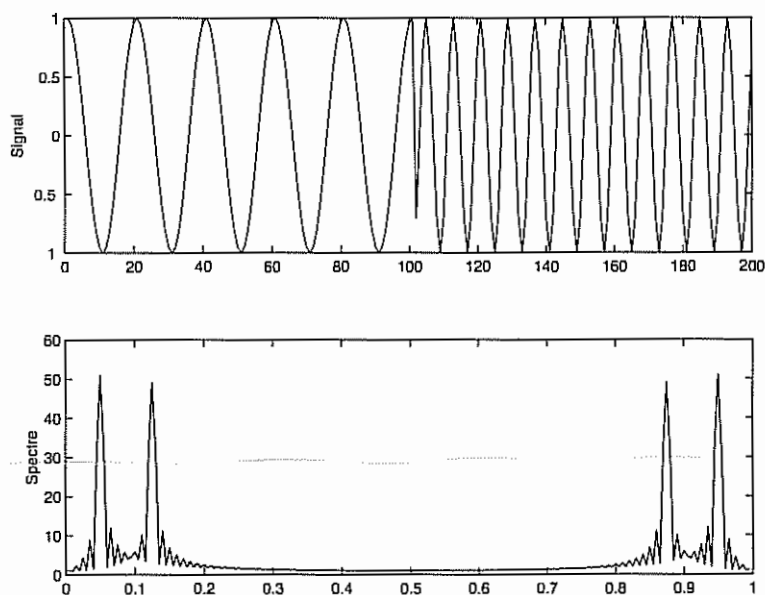


Figure 1.5 La juxtaposition de deux sinusoïdes et son spectre.

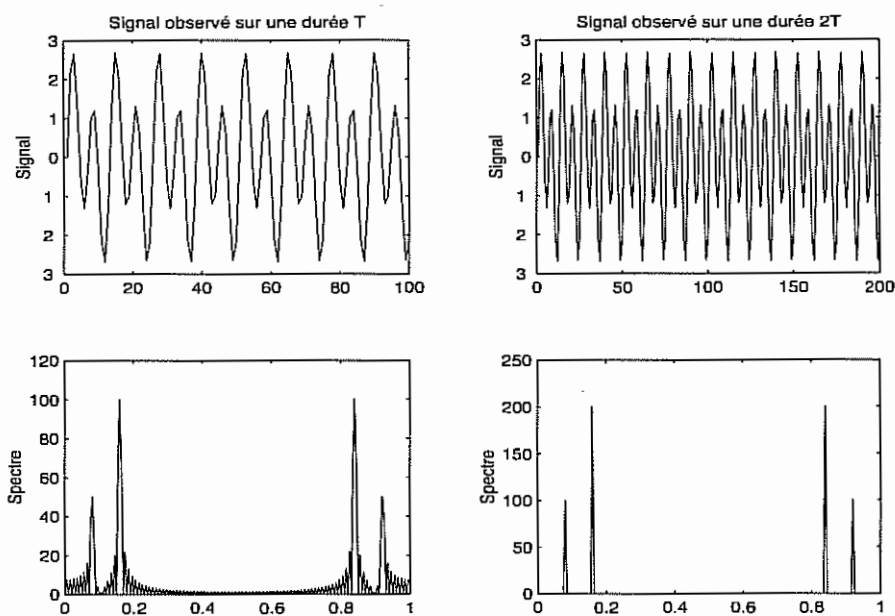


Figure 1.6 Effet de la durée d'observation sur le spectre.

est appelée peigne de Dirac de période T . Elle est identique à un Dirac en tout point $kT, k \in \mathbb{Z}$ et vaut zéro ailleurs. Tenant compte de la parité de $P_T(t)$, on démontre que pour tout T fixé, l'image de $P_T(t)$ par $\mathcal{F}$ est le peigne de Dirac de période $1/T$, i.e.

$$\mathcal{F}[P_T(t)](\nu) = \frac{1}{T} P_{1/T}(\nu). \quad (1.23)$$

Le peigne de Dirac de période 1 est donc invariant par $\mathcal{F}$. Comme $P_T(-t) = P_T(t)$, on a $\mathcal{F}\mathcal{F}[P_T(t)] = P_T(t)$ et par suite :

$$\frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \frac{n}{T} t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \quad (1.24)$$

Pour toute fonction $x(t)$ à décroissance rapide, on peut appliquer (1.23) et obtenir la formule suivante appelée formule sommatoire de Poisson :

$$\frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{n}{T}\right) = \langle P_{1/T}(\nu), X(\nu) \rangle = \langle \mathcal{F}[P_{1/T}](\nu), x(t) \rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(nT).$$

Exemple 1.2.7 Signal en dents de scie et peigne de Dirac

Considérons la fonction périodique de période T définie par :

$$V(t) \triangleq \frac{t}{T} \quad \text{pour } t \in [0, T].$$

La dérivée au sens des distribution de ce signal est définie en tout point $t \in \mathbb{R}$ par :

$$V'(t) \triangleq \frac{1}{T} - P_T(t)$$

où $P_T(t)$ est le peigne de Dirac.

Exemple 1.2.8 Lien entre coefficients de Fourier et T.F

Soit le signal $x(t)$, de durée finie, défini par $x(t) = t^2 \Pi(t/2T)$ et $y(t)$ le signal de période $2T$ qui coïncide avec $x(t)$. Donner la relation entre $x(t)$, $y(t)$ et la fonction rectangle $\Pi(t/T)$. On décompose $y(t)$ en série de Fourier sous la forme :

$$y(t) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n e^{j2\pi \frac{n}{2T} t}$$

où les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\begin{aligned} Y_n &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T t^2 \Pi(t/2T) e^{-j2\pi \frac{n}{2T} t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \Pi(t/2T) e^{-j2\pi \frac{n}{2T} t} dt \\ &= \mathcal{F}[t^2 \Pi(t/2T)]. \end{aligned}$$

1.2.5 Transformée de Fourier multidimensionnelle

La T.F d'un signal multidimensionnel $x(t_1, t_2, \dots, t_n) \in L^1$ est la fonction $\tilde{x}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$, définie par

$$\tilde{x}(\nu) = \int_{\mathbb{R}^n} x(\mathbf{t}) e^{-j2\pi \langle \nu, \mathbf{t} \rangle} d\mathbf{t} \triangleq \mathcal{F}(x)$$

où l'on adopte la notation $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ et $d\mathbf{t} = dt_1 \dots dt_n$.

Les propriétés de la T.F mutidimensionnelle sont similaires à celles établies dans le cas monodimensionnel. À titre d'exemple, on a :

$$\mathcal{F}[x(kt_1, kt_2, \dots, kt_n)] = \frac{1}{|k|^n} \tilde{x}\left(\frac{\nu_1}{k}, \dots, \frac{\nu_n}{k}\right)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial \delta}{\partial t_k}\right] = j2\pi \nu_k \quad \text{et} \quad \mathcal{F}[-j2\pi t_k] = \frac{\partial \delta}{\partial \nu_k}.$$

1.2.6 Transformée discrète et transformée rapide

Dans la pratique, on doit souvent traiter un signal à temps discret mais on ne dispose que d'un nombre fini d'échantillons $x_k, k = 0, 1, \dots, N - 1$. La question est de savoir comment peut-on obtenir des informations sur le spectre de $x_k, k \in \mathbb{Z}$ à partir de l'observation $x_k, k = 0, 1, \dots, N - 1$? Pour répondre à cette question, associons à $(x_k), k \in \mathbb{Z}$, le signal :

$$x_k^N \triangleq x_k \quad \text{pour} \quad k = 0, \dots, N - 1 \quad \text{et} \quad x_k^N = 0 \quad \text{sinon}$$

qui est complètement défini par le vecteur observation :

$$\mathbf{x} \triangleq [x_0, \dots, x_{N-1}]^T.$$

On a souvent $x_k = x(kT_e), k = 0, \dots, N - 1$ où $x(t)$ est un signal à temps continu et T_e est une constante appelée période d'échantillonnage. Pour simplifier les notations, on désignera par $\tilde{x}^N$ la T.F du signal (x_k^N) , i.e.,

$$\tilde{x}^N(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi \nu k T_e}.$$

Associons à la fonction $\tilde{x}^N(\nu)$ la suite X_k de période N , définie par le vecteur :

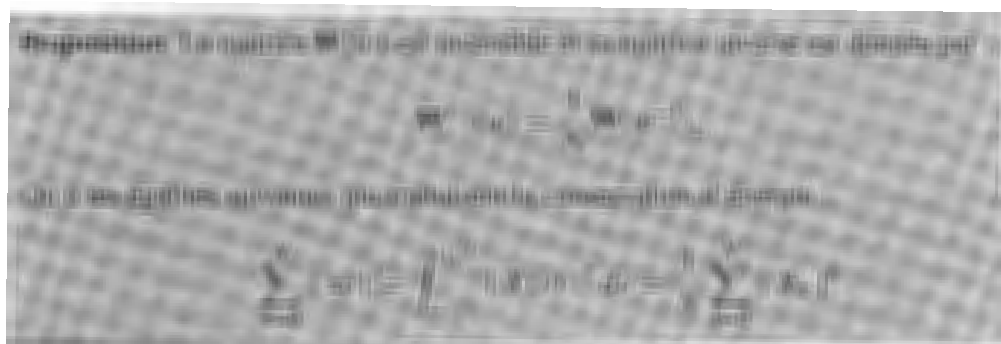
$$\mathbf{X} \triangleq [\tilde{x}^N(0), \dots, \tilde{x}^N(\frac{N-1}{N})]^T \triangleq [X_0, \dots, X_{N-1}]^T. \tag{1.25}$$

La suite X_k qui est complètement déterminée par le vecteur $\mathbf{X}$ est appelée Transformée de Fourier Discrète (TFD) du signal observé représenté par le vecteur $\mathbf{x}$ et on a les propriétés suivantes :

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}(w)\mathbf{x}$$

où $\mathbf{W}(w)$ désigne la matrice symétrique de Vandermonde suivante construite avec le nombre complexe $w = e^{-j\frac{2\pi T_e}{N}}$:

$$\mathbf{W}(w) \triangleq \begin{pmatrix} w^0 & w^0 & \dots & w^0 \\ w^0 & w^1 & \dots & w^{N-1} \\ w^0 & w^2 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w^0 & w^{N-1} & \dots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix}.$$



La démonstration de ces résultats repose sur le fait que la matrice $\mathbf{W}(w)$ est symétrique et vérifie :

$$\mathbf{W}(w)\mathbf{W}(w^{-1}) = N\mathbf{I}.$$

Exemple 1.2.9 Calcul de la TFD d'une fréquence pure

On va calculer la TFD du signal $s_n = e^{j2\pi f_0 \frac{n}{T}}$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. On obtient :

$$\begin{aligned} X(k/N) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi f_0 \frac{n}{T}} e^{-j2\pi \frac{k}{N} \frac{n}{T}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{n}{T} (f_0 - \frac{k}{N})} \\ &= \frac{1 - z^N}{1 - z}, \quad \text{pour } z = e^{j2\pi \frac{1}{T} (f_0 - \frac{k}{N})} \neq 1 \\ &= N \quad \text{pour } z = 1. \end{aligned}$$

On voit bien que cette fonction admet un maximum pour $f_0 = \frac{k}{N}$. La valeur ainsi obtenue est celle qui permet de remettre en phase tous les vecteurs s_n . Cette pro-

priété permet de déterminer une fréquence $f_0 \in [0, 1]$ inconnue de la manière suivante. On calcule la TFD, $X(\nu)$, pour $\nu_1, 2\nu_1, \dots, M\nu_1$, on trace le graphe de cette fonction en utilisant ces points et les échantillons $s_0, \dots, s_{N-1}$. L'abscisse du maximum de cette fonction nous donne la fréquence f_0 .

a) Effet spectral d'une troncature et fenêtres de pondérations

Dans la pratique, un signal discret provient souvent de l'échantillonnage d'un signal continu. Le problème est que la durée d'acquisition T est finie et l'information contenue dans cette observation ne permet pas de calculer la T.F du signal à moins que ce dernier soit périodique et que T soit un multiple de sa période. Même dans ce dernier cas, il faut en plus que la période d'échantillonnage vérifie une condition qui sera donnée plus loin. Le calcul de la TFD introduit alors des « effets de bord » comme le montre l'exemple suivant. Associons au signal $x(t)$, observé sur une durée finie T , le signal tronqué $x_T(t)$ défini par :

$$x_T(t) \triangleq x(t)\Pi_T(t) \quad (1.26)$$

où Π_T est la fonction rectangle de support $[0, T]$. Avant d'analyser l'effet de la troncature sur un signal à temps discret, considérons tout d'abord le cas continu. On obtient :

$$X_T(\nu) = X(\nu) * [T \operatorname{sinc}(T\nu) e^{-j\pi\nu T}] \quad (1.27)$$

Pour bien voir les similitudes entre le spectre $X(\nu)$ et celui $X_T(\nu)$ du signal tronqué, considérons le cas particulier suivant.

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t), \quad X(\nu) = \frac{A}{2} [\delta(\nu - f_0) + \delta(\nu + f_0)].$$

La T.F du signal tronqué est donnée par :

$$X_T(\nu) = \frac{AT}{2} e^{-j\pi\nu T} [e^{j\pi f_0 T} \operatorname{sinc} T(\nu - f_0) + e^{-j\pi f_0 T} \operatorname{sinc} T(\nu + f_0)]$$

On peut choisir $f_0 T$ entier et tracer le spectre d'amplitude du signal tronqué $x_T(t)$. Le graphe montre qu'il y a un effet de lissage et un effet de bord. Ces effets se traduisent par l'apparition de lobes secondaires qui ne devraient pas exister. Ces lobes secondaires proviennent de l'effet brutal de troncature du signal qui revient à remplacer ce dernier par zéro en dehors du support de la fenêtre d'observation Π_T . Ces effets réduisent la finesse d'analyse. En particulier, si l'on a deux raies spectrales distantes de moins de $1/T$, elles seront pratiquement indiscernables. Pour atténuer les effets de troncature, on introduit des « fenêtres de pondération » $w_T(t)$. Cela signifie qu'au lieu de traiter le signal tronqué $x_T(t)$, on traite le signal pondéré

$w_T(t)x_T(t)$. Il existe plusieurs types de fenêtres. Les plus utilisées sont celles de Hanning et Hamming introduites à la page 16 et celle de Gauss définie par : $w_T(t) = A \exp(-\alpha t^2)$, $\alpha, A > 0$. La figure 1.7 donne la partie réelle d'un signal égal à la somme de deux sinusôides (a), la TFD du signal calculée avec une fenêtre rectangulaire (b) et avec une fenêtre de Hamming (c).

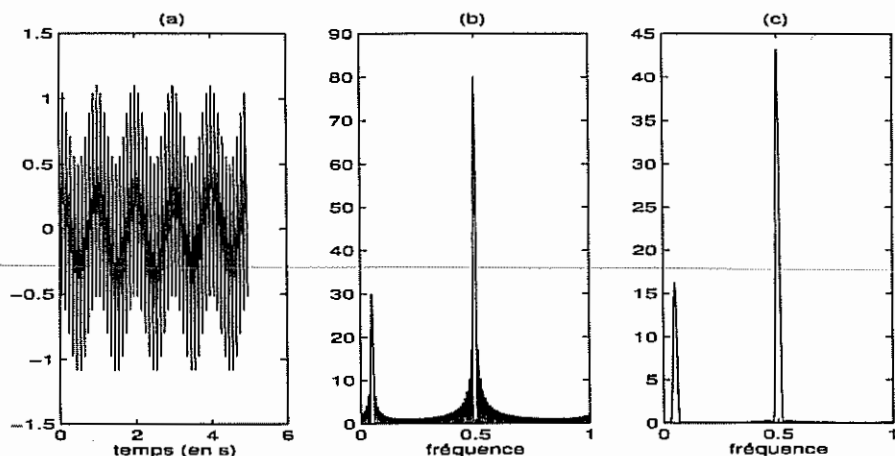


Figure 1.7 Effet d'une fenêtre de pondération sur la TFD.

b) Calcul de la TFD : Transformée de Fourier Rapide

Le calcul de $\mathbf{X}$ nécessite a priori $4N^2$ multiplications réelles. À titre d'exemple, pour $N = 32$, il faut 4096 ce qui est très important ! Ceci a conduit à la recherche d'algorithmes rapides pour effectuer ces calculs en tenant compte de l'application considérée.

Les calculs doivent se faire en temps réel à l'aide d'un faible nombre d'échantillons N mais dont le renouvellement est assez rapide (par exemple à une fréquence de 4 MHz).

Les calculs doivent se faire en temps différé à l'aide d'un grand nombre d'échantillons N et avec très peu de renouvellement.

Comme critère de rapidité d'un algorithme, on prend généralement en compte le nombre d'opérations arithmétiques et celui de places mémoires nécessaires pour les stockages intermédiaires. Durant la dernière décennie, les algorithmes utilisant la logique câblée ont été progressivement abandonnés au profit de l'introduction de processeurs programmables spécifiques dont la rapidité dépend fortement du type d'architecture utilisée.

Il existe plusieurs types d'algorithmes qui permettent de calculer le vecteur $\mathbf{X}$ à partir du vecteur $\mathbf{x}$. En particulier, il est possible de réduire considérablement le nombre d'opérations à effectuer en utilisant les propriétés de la matrice $\mathbf{W}$ et en choisissant N égal à une puissance de 2. Ceci conduit à des algorithmes connus sous la

dénomination Transformée de Fourier Rapide (TFR ou FFT en anglais) et qui ne seront pas développés ici.

À titre d'exemple, les algorithmes dénommés algorithmes de racines 2^k sont fondés sur l'idée qui consiste à décomposer une TFD de $N = 2^P$ points en 2^K TFD de 2^{P-K} points. Cette idée permet d'introduire des algorithmes itératifs ayant une structure modulaire répétitive, facile à mettre en oeuvre et nécessitant une faible complexité de calculs numériques. Actuellement, de nombreux constructeurs proposent des processeurs spécialisés optimisés pour le calcul de la FFT comme le processeur HOSP 66210.

c) Prolongement du signal observé par des zéros

Considérons un signal observé sur M échantillons. La question est de savoir s'il est plus intéressant de calculer la TFD $\mathbf{X}^M$ de longueur M en utilisant les M échantillons ou la TFD $\mathbf{X}^N$ de longueur N , $M < N$ en complétant les observations par $N - M$ échantillons égaux à 0. La TFD de dimension N s'écrit sous la forme :

$$X_n^N = \sum_{k=0}^{N-1} x_k u_k^M e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}, \quad M = 0, 1 \dots N-1, \quad n = 0, 1 \dots N-1$$

où u_k^M désigne la fenêtre rectangulaire de support $(0, M-1)$. Un calcul simple montre que le module de la TFD d'un signal prolongé par des zéros est indépendant de la position du support du signal et que cette opération revient à un échantillonnage plus serré. Comme ce prolongement correspond à une multiplication du signal par une fenêtre porte, la TFD du signal prolongé sera donc égale à la convolution du signal observé par une fonction sinc qui est la T.F de la fenêtre. Comme la fonction sinc n'est pas à support compact, la convolution considérée a pour effet, à cause de ses lobes secondaires, d'altérer la T.F du signal considéré. Cet effet est néfaste sur la résolution, c'est-à-dire la capacité de la TFD de distinguer deux fréquences spectrales proches. Des exemples simples permettent de voir que l'on peut séparer deux fréquences f_1 et f_2 si elles vérifient $f_1 - f_2 \geq 1/T$ où T est la durée d'observation du signal. Pour bien séparer les signaux, on a intérêt à avoir un lobe principal aussi étroit que possible et des lobes secondaires d'amplitudes très faibles. Malheureusement, il n'est pas possible d'avoir simultanément ces deux propriétés. Il est cependant possible de diminuer les amplitudes des lobes secondaires en remplaçant la fenêtre rectangulaire par une fenêtre plus douce et sans discontinuités. Les exemples suivants montrent comment on peut calculer la TFD avec fenêtre de pondération à partir d'une TFD sans fenêtre.

Exemple 1.2.10 Calcul de la TFD avec fenêtre de pondération

Associons à un signal à temps discret de durée finie $x_k, k = 0, 1, \dots, N-1$, le signal pondéré : $y_k \triangleq x_k w_k, k = 0, 1, \dots, N-1$, où $w_k \triangleq w_N(k)$ est la valeur de la

fenêtre de Hanning à temps discret introduite à la page 16. Le problème consiste à calculer la TFD $Y_k, k = 0, 2, \dots, N - 1$ de y_k en fonction de la TFD de x_k . Partant de la définition de la TFD du signal y_k et remplaçant w_k par son expression, on obtient la récurrence suivante :

$$Y_k = \frac{1}{2}X_k - \frac{1}{4}X_{k-1} - \frac{1}{4}X_{k+1}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Cette récurrence montre que l'application de la fenêtre de Hanning revient à faire un lissage de la TFD X_k par un filtre ayant une réponse impulsionnelle symétrique définie par : $h_0 = 1/2, h_1 = -1/4$ et $h_k = 0$ pour $k \geq 2$.

Exemple 1.2.11 Séparation de deux fréquences et TFD

On considère le signal à temps discret défini par :

$$x(t) = Ae^{j2\pi(f_1t+\phi_1)} + Ae^{j2\pi(f_2t+\phi_2)}$$

où f_1, f_2 désignent deux fréquences positives distinctes, ϕ_1, ϕ_2 deux phases à l'origine données. Soit $y(t)$ le signal observé, égal à $x(t)$ sur l'intervalle $[-T/2, T/2]$ et nul partout ailleurs. La T.F de $y(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} Y(\nu) &= [Ae^{j\phi_1}\delta(\nu - f_1) + Ae^{j\phi_2}\delta(\nu - f_2)] * Tsinc(\pi T\nu) \\ &= ATe^{j\phi_1}sinc(\pi T(\nu - f_1)) + ATe^{j\phi_2}sinc(\pi T(\nu - f_2)). \end{aligned}$$

Soit M l'ordonnée du creux entre les deux lobes principaux du graphe de $|Y(\nu)|^2$. On se propose de déterminer la durée d'observation T pour laquelle $(M/AT)^2 < 1/2$. L'abscisse du creux entre les deux lobes est $f_0 = (f_1 + f_2)/2$ et on a $M = |Y(f_0)| = 2ATsinc(\pi T(f_0 - f_1)) = 2ATsinc(\pi T(f_2 - f_1))$. D'où

$$\frac{\sin(\pi T(f_2 - f_1))}{\pi T(f_2 - f_1)} < \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Il suffit de choisir T tel que $\frac{1}{\pi T(f_2 - f_1)} < \frac{1}{2\sqrt{2}}$. La figure 1.8 montre l'influence du choix de T sur la possibilité de détecter les deux fréquences contenues dans le signal.

T.F et convolution cycliques On associe aussi parfois au signal observé $x_k, k = 0, \dots, N - 1$ le signal périodique de période N et qui coïncide avec (x_k) pour $k = 0, \dots, N - 1$. On définit ensuite le produit scalaire, la T.F et la convolution en limitant les sommations à N termes. On obtient ce que l'on appelle la T.F et la convolution cycliques. Ces définitions permettent d'étendre certaines propriétés de la T.F et de la convolution à la T.F et à la convolution cycliques.

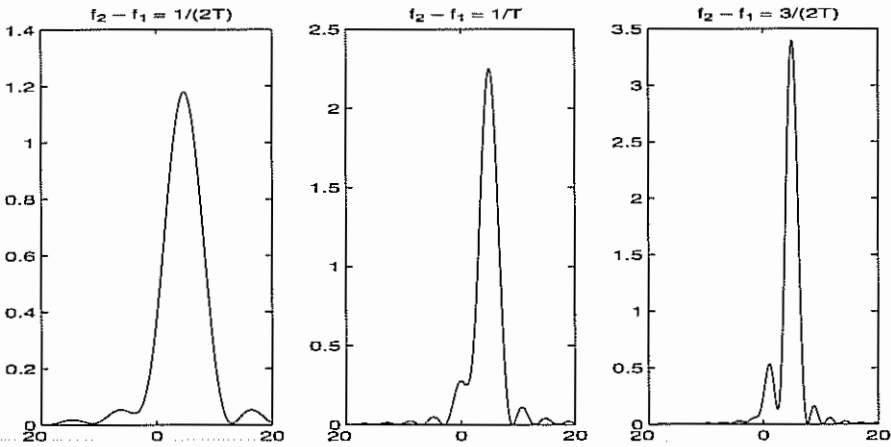


Figure 1.8 Durée d’observation et séparation de fréquences.

EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS

1.1 Représentation d’un système

Dire, dans chacun des cas suivants, si la relation d’entrée-sortie définit un système linéaire, instantané, invariant, causal (entrée : $e(t)$, sortie : $s(t)$).

$$s(t) = \sin(t)e(t)$$

$$s(t) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q a_{i,j} e(t - iT_0) e(t - jT_0)$$

$$s(t) = A \sin(e(t - t_0)), \quad s(t) = \int_{t-T}^t \sin[e(t) + \theta] d\theta.$$

1.2 Fonctions propres d’un filtre linéaire

1. On considère le système défini par la relation entrée-sortie suivante :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \theta) e(\theta) d\theta.$$

Démontrer que c’est un filtre linéaire et exprimer la sortie associée au signal $e(t) = e^{j\omega t}$ en fonction de $e(t)$.

2. On considère un filtre linéaire F . Démontrer que pour tout signal du type $x(t) = z^t$ où z est un nombre complexe fixé, on a $F[x(t)] = \alpha x(t)$ où α est une fonction de z indépendante de t . On dit que $x(t) = z^t$ est une fonction propre de F et la fonction $\alpha(z)$ est appelée fonction de transfert du filtre.

3. On suppose que la réponse impulsionnelle du filtre est la fonction rectangle $\Pi(\frac{t}{T})$ de support T . Calculer la sortie $s(\tau)$ de ce filtre associée à l'entrée

$$e(t) = \Pi(\frac{t}{T'}), \quad T' > T.$$

4. En déduire le produit de convolution $r(\tau) \triangleq [\Pi_T * \Pi_T](\tau)$ d'un rectangle par lui-même et tracer le graphe de $r(\tau)$.

1.3 Projection orthogonale et série de Fourier

1. Soient deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ d'énergies finies, à valeurs complexes. Exprimer l'énergie

$$E_z = \int_{-\infty}^{+\infty} |z(t)|^2 dt$$

du signal $z(t) = x(t) + \lambda y(t)$ en fonction de celles de $x(t)$ et $y(t)$.

2. On suppose les signaux réels. Étudier le signe du polynôme E_z et en déduire l'inégalité suivante (inégalité de Schwarz) :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt \quad (1.28)$$

3. On suppose maintenant les signaux complexes. On pose $\lambda = |\lambda| \exp(j\theta)$. Choissant convenablement θ , démontrer l'inégalité de Schwarz pour les signaux à valeurs complexes.

4. Que peut-on dire de $x(t)$ et $y(t)$ dans le cas où (1.28) est une égalité ?

5. Développer en série sur le système de fonctions $\phi_n(t) \triangleq e^{j2\pi n \frac{t}{T}}$ les signaux $x(t) = \cos(2\pi k_0 \frac{t}{T})$ puis $x(t) = |\cos(2\pi k_0 \frac{t}{T})|$ où k_0 est un entier fixé.

1.4 Projection orthogonale d'un signal

On considère le signal à temps continu

$$x(t) = e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$$

où φ est une phase à l'origine constante et f_0 une fréquence positive donnée. On projette le signal $x(t)$ sur l'espace vectoriel muni du produit scalaire :

$$\langle x(t), y(t) \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt$$

et engendré par les 2 signaux $\phi_1(t) = \frac{\sin(\pi B t)}{\pi B t}$ et $\phi_2(t) = \frac{\sin(2\pi B t)}{2\pi B t}$ où B est une constante positive donnée.

1. Déterminer la projection orthogonale $\hat{x}(t)$ de $x(t)$.
2. Calculer l'énergie de $\hat{x}(t)$ et discuter sa valeur en fonction de f_0 et B .
3. Calculer la T.F du signal $x(kT_e)$, $k = 0, 1 \dots N - 1$, et déterminer l'abscisse du maximum de son module.

1.5 Signal périodique

On considère le signal $x(t) = \Pi(t/T)$.

1. Tracer le graphe de $y(t) = x(t) + x(t - \frac{T}{2})$ et calculer sa T.F.
2. On introduit le signal de période $2T$ défini par

$$z(t) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t - 2nT)$$

et on décompose $z(t)$ en série de Fourier sous la forme :

$$z(t) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n e^{j2\pi \frac{n}{2T} t}.$$

Exprimer le coefficient Z_n en fonction d'une intégrale faisant apparaître le signal $y(t)$.

3. Donner l'expression de Z_n en fonction de la T.F de $y(t)$ en un point particulier que l'on précisera et calculer Z_n .

1.6 Utilisation de la conservation du produit scalaire

1. Rappeler la propriété de conservation du produit scalaire par la T.F et appliquer ce résultat pour calculer l'intégrale

$$P \triangleq \langle x(t), y(t) \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t)^* dt$$

dans les cas suivants :

(a) – $x(t) = \text{sinc}(At)$ et $y(t) = \text{sinc}(Bt)$

(b) – $x(t) = \text{sinc}(At)$ et $y(t) = \sin(\pi Bt)$

(c) – $x(t) = \text{sinc}(At)$ et $y(t) = e^{-a|t|}$.

2. Calculer la T.F du signal $x(t) = B[\text{sinc}(Bt)]^2$ et son énergie E_x .

3. On « module » $x(t)$ par le signal $m(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$ pour obtenir le signal $y(t) = m(t)x(t)$, $\nu_0 > 2B$. Cette opération définit-elle un filtre linéaire ?

4. Calculer la T.F du signal $y(t)$ et son énergie E_y .

1.7 T.F d'un signal à support borné

Soit $x(t)$ un signal à support $[-T/2, T/2]$, c'est à dire $x(t)$ vérifie l'identité : $x(t) = x(t)\Pi(t/T)$. Soit $x_p(t)$ le signal de période T qui coïncide avec $x(t)$ sur $[-T/2, T/2]$ et

$$x_p(t) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t}$$

son développement en série de Fourier.

1. Écrire les relations entre $x(t)$ et X_n .

2. On admet que $x(t)$ possède une T.F $X(\nu)$. Exprimer les coefficients X_k en fonction de $X(\nu)$.

3. Partant de l'identité $x(t) = x_p(t)\Pi(t/T)$, exprimer $X(\nu)$ en fonction des coefficients X_k et de la fonction sinus cardinal définie par $\text{sinc}(u) = \sin(\pi u)/(\pi u)$.

4. Vérifier l'expression obtenue pour $X(\nu)$ pour les fréquences multiples de la fréquence fondamentale $1/T$.

1.8 Transformée de Fourier et dérivation

1. Donner l'expression de $X(\nu)$ en fonction de $x(t)$ et exprimer $x(t)$ en fonction de $X(\nu)$.

2. Exprimer la dérivée de la T.F $X(\nu)$ d'un signal $x(t)$ en fonction de $y(t) = tx(t)$. Utilisant la transformée inverse, donner l'expression de la T.F de $y(t)$ en fonction de $X'(\nu)$.

3. On suppose dans toute la suite que $x(t)$ est le signal rectangulaire $\Pi(t/T)$. Calculer la T.F de $x(t)$.

4. Montrer que le signal :

$$r(t) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(t - nT)$$

est périodique et déterminer sa période.

5. On décompose $r(t)$ en série de Fourier sous la forme :

$$r(t) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t}.$$

Donner l'expression du coefficient R_n en fonction de $Y(\nu)$ et calculer ce coefficient.

6. Exprimer $r(t)$ sous forme d'une série de Fourier faisant intervenir les fonctions $\sin(\frac{2\pi nt}{T})$.

7. On note $y_1(t)$ la dérivée de $y(t)$. Calculer la T.F de $y_1(t)$ et comparer cette T.F à celle de $x(t)$ et expliquer le résultat.

1.9 Approximation d'un signal par projection

On considère l'ensemble des signaux $\phi_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, définis par :

$$\phi_k(t) \triangleq \text{sinc}(Bt - k), \quad \text{sinc}(t) \triangleq \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

et on introduit le produit scalaire suivant :

$$\langle x(t), y(t) \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t)^* dt$$

1. Calculer $a_{m,n} \triangleq \langle \phi_n(t), \phi_m(t) \rangle$. Que peut-on dire des signaux $\phi_n(t)$?
2. Soit le signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$, $f_0 > 0$. Calculer la TF $X(\nu)$ de $x(t)$.
3. On approxime $x(t)$ par sa projection orthogonale

$$\hat{x}(t) \triangleq \sum_{k=0}^N \alpha_k \phi_k(t)$$

sur l'espace vectoriel $\mathcal{E}_N$ engendré par les signaux $\phi_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, N$. Calculer les coefficients α_k en distinguant les cas $f_0 < B/2$ et $f_0 > B/2$. Interpréter le résultat.

4. Expliciter $\hat{x}(t)$ dans le cas $x(t) = \text{sinc}(B't)$, $B' < B$, et interpréter le résultat.

1.10 Approximation d'un signal par un autre

On pose dans toute la suite $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ et on désigne par $\Pi(\nu)$ la fonction rectangle de support $[-1/2, 1/2]$. On admettra que la T.F de $\text{sinc}(t)$ est $\Pi(\nu)$. On veut approximer le signal

$$x(t) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \pi^2 t^2}, \quad \alpha > 0$$

par un signal de la forme $s(t) = A \text{sinc}(2Bt)$ où A est un paramètre réel à déterminer et B un réel positif connu. On admettra que la T.F de $x(t)$ est égale à $e^{-2\alpha|\nu|}$ et on introduit le signal erreur $e(t) = x(t) - s(t)$.

1. Exprimer en fonction de A l'énergie définie par :

$$E(A) = \int_{-\infty}^{\infty} e^2(t) dt.$$

2. Déterminer la valeur A_0 de A pour laquelle cette énergie est minimale.

3. Calculer, pour $A = A_0$, le produit scalaire :

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} e(t) \text{sinc}(2Bt) dt.$$

4. On fait passer le signal $s(t)$, A quelconque, dans un filtre linéaire dont la réponse impulsionnelle est $h(t) = \text{sinc}(\frac{t}{2T})$. On suppose $0 < BT < 1/4$, calculer la T.F $Y(\nu)$ du signal $y(t)$ à la sortie de ce filtre. En déduire $y(t)$.

1.11 Signal triangulaire

On désigne par $\text{Tri}(t)$ la fonction triangle de support $[-T/2, T/2]$ définie par $\text{Tri}(t) = \text{Tri}(-t)$ et :

$$\begin{aligned} \text{Tri}(t) &= t + T/2 \quad \text{pour} \quad -T/2 \leq t \leq 0 \\ &= 0 \quad \text{pour} \quad t < -T/2 \end{aligned}$$

où T désigne un réel positif donné.

1. Tracer le graphe de la fonction $\text{Tri}(t)$.

2. On rappelle que la fonction $\text{Tri}(t)$ est égale au produit de convolution d'une fonction porte par elle-même. Déterminer cette fonction porte que l'on désignera par $\text{Rec}(t)$.

3. Rappeler l'expression de la T.F de $\text{Rec}(t)$ et calculer la T.F de $\text{Tri}(t)$.
4. On introduit le signal $x(t)$ de période T défini par $x(t) = \text{Tri}(t)$ pour $|t| < T/2$. Calculer la T.F de $x(t)$.
5. On projette le signal $x(t)$ sur l'espace vectoriel engendré par les N signaux :

$$\Pi_k(t) = \Pi\left(\frac{t - kT}{T}\right), \quad k = 0, \dots, N-1$$

où $\Pi(t)$ désigne la fonction porte de support $[-T/2, T/2]$. Déterminer la projection orthogonale $\hat{x}(t)$ de $x(t)$.

1.12 Séparation de deux fréquences

On considère le signal à temps discret défini par :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \text{avec} \quad x_i(t) = e^{j2\pi(f_i t + \phi_i)}, \quad i = 1, 2$$

où f_1, f_2 désignent deux fréquences positives distinctes, ϕ_1, ϕ_2 deux phases à l'origine données.

1. Calculer la T.F $X(\nu)$ de $x(t)$.
2. On considère le signal observé $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ égal à $x(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$ et nul partout ailleurs. Calculer la T.F $Y(\nu)$ de $y(t)$.
3. Représenter l'allure du graphe de $|Y_1(\nu)|$.
4. Déterminer les deux fréquences ν_1 et ν'_1 les plus proches de f_1 pour lesquelles $Y_1(\nu)$ s'annule (ces fréquences sont symétriques par rapport à f_1).
5. Représenter dans le même repère la fonction

$$|\hat{Y}(\nu)| = |\hat{Y}_1(\nu)| + |\hat{Y}_2(\nu)|$$

où

$$\begin{aligned} |\hat{Y}_i(\nu)| &= |Y_i(\nu)| \quad \text{pour} \quad \nu \in [\nu_i, \nu'_i] \\ &= 0 \quad \text{ailleurs} \end{aligned}$$

6. Discuter le choix de T qui permet de séparer les fréquences f_1 et f_2 .

1.13 Exemple de signal analytique

On considère le signal complexe $x(t)$ défini par :

$$x(t) = \frac{a - \exp(j\omega t)}{1 - a\exp(j\omega t)}.$$

où a est réel et tel que $|a| < 1$ et $\omega > 0$.

1. Calculer le module $|x(t)|$ de $x(t)$.

2. On admet que le signal $x(t)$ est analytique si tous les pôles de $x(t)$ ont une partie imaginaire négative. Calculer les pôles de $x(t)$ et en déduire que ce signal est analytique.

3. Déterminer le signal réel $s(t)$ dont $x(t)$ est le signal analytique.

1.14 Calcul d'une TFD

On considère le signal à temps continu

$$x(t) = e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$$

où φ est une phase à l'origine constante et f_0 une fréquence positive donnée. On ne dispose que des N échantillons $x_k = x(kT_e)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, où T_e est une constante positive donnée. On introduit la transformation suivante qui associe à ces N échantillons, un ensemble de N autres échantillons définis par :

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi k T_e \frac{n}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

1. Calculer X_n pour $n = 0, 1, \dots, N-1$ et tracer les N points de coordonnées $(n/N, |X_n|)$ sur un même graphique.

2. On calcule maintenant la fonction de θ :

$$Y(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi k \theta}.$$

Tracer le graphe de la fonction $|Y(\theta)|$ et déterminer la valeur $\hat{\theta}$ de θ pour laquelle $|Y(\theta)|$ est maximale.

3. On se place dans le cas $N = 2$ et on se fixe une valeur particulière pour θ , soit θ_0 . Représenter dans le même plan les nombres complexes x_0 et x_1 d'une part et X_0 et X_1 d'autre part. Interpréter géométriquement à quoi correspond la valeur $\hat{\theta}$.

1.15 Majoration de la T.F, dérivation, intégration

1. Soit $x \in L^1$, une fonction continue et dérivable. Démontrer en intégrant par parties l'expression de la T.F x la majoration suivante :

$$|2\pi\nu||X(\nu)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x'(t)|dt \triangleq \|x'\|_{L^1} \quad (1.29)$$

2. Supposons x m fois continuellement différentiable avec des dérivées d'ordre $\leq m$ sommables. Démontrer la formule suivante :

$$|(2\pi\nu)^m X^{(l)}(\nu)| \leq \|(j2\pi t)^l x(t)^{(m)}\|_{L^1} \quad (1.30)$$

3. Par dérivation sous le signe intégral, établir la formule suivante :

$$X'(\nu) = \mathcal{F}[-j2\pi t x(t)] \quad (1.31)$$

et généraliser ce résultat dans le cas où $x^{(m)}(t)$ est aussi sommable et $X(\nu)$ m fois continuellement différentiable.

4. Montrer que si x est indéfiniment dérivable et que toutes ses dérivées sont sommables, alors $X(\nu)$ décroît plus rapidement que toute puissance de $\frac{1}{|\nu|}$.

5. Montrer que si $t^l x(t)$ est sommable quel que soit l , alors $X^{(l)}(\nu)$ décroît plus vite que toute puissance de $\frac{1}{|\nu|}$ lorsque $|\nu| \rightarrow \infty$.

1.16 T.F d'une distribution à support borné

Démontrer que si U est une distribution à support borné, son image de Fourier est une fonction prolongeable pour les valeurs complexes de ν en une fonction holomorphe entière, définie par la formule :

$$\mathcal{F}[U](\nu) = \langle U, e^{-j2\pi\nu t} \rangle. \quad (1.32)$$

1.17 Propriétés de la T.F d'une distribution

1. Soit U une distribution à support borné, justifier pourquoi le calcul suivant est possible :

$$V(\nu) = \langle U, e^{-j2\pi\nu t} \rangle.$$

2. Démontrer que $V(\nu)$ est une fonction indéfiniment dérivable de ν .
 3. Démontrer que $V(\nu)$ existe pour ν complexe et qu'elle est indéfiniment dérivable.
 4. Démontrer que $V(\nu)$, considérée pour ν réel, est la transformée du Fourier de U .
- Soit $x(t)$ une fonction appartenant à S . Démontrer que $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(x) = x$.
5. Démontrer la même formule pour $U \in S'$.
 6. Soit $x(t)$ une fonction à support borné, 2 fois continuellement différentiable. Partant de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

et remplaçant $x(t)$ par son expression en fonction de $X(\nu)$, démontrer la formule suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu$$

7. En déduire la formule :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)Y^*(\nu)d\nu.$$

SOLUTIONS

- 1.1 1. Le système est linéaire, instantané, causal et variable.
2. Le système est non linéaire, non instantané, causal et invariant.
3. Le système est non linéaire, instantané, causal et invariant.
4. Le système est non linéaire, non instantané, causal et variable.

- 1.2 1. C'est un système linéaire invariant puisqu'à une entrée $e(t - \theta)$ il associe une sortie $s(t - \theta)$.

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \theta)e^{j\omega\theta}d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)e^{j\omega(t-\theta)}d\theta = s(t)G\left(\frac{\omega}{2\pi}\right). \quad (1.33)$$

Le signal $e(t) = e^{j\omega t}$ est bien une fonction propre du filtre de Gain $G\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$.

2. La sortie associée à z^t est égale à la convolution de la réponse impulsionnelle par l'entrée. Soit :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)z^{t-\theta}d\theta = z^t\alpha(z).$$

$$3. \quad s(t) = s(t) * e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{\theta}{T}\right) \Pi\left(\frac{t-\theta}{T'}\right) d\theta.$$

On peut vérifier que $s(t)$ est une fonction paire. Il suffit donc de la déterminer pour $t < 0$. On obtient le trapèze définie par :

$$\begin{aligned} s(t) &= 0 \quad \text{pour} \quad t < -\frac{T+T'}{2} \\ &= t + \frac{T+T'}{2} \quad \text{pour} \quad -\frac{T+T'}{2} < t < \frac{T-T'}{2} \\ &= T \quad \text{pour} \quad \frac{T-T'}{2} < t < 0. \end{aligned}$$

4. Le produit de convolution $r(\tau)$ s'obtient en faisant $T = T'$ dans le résultat précédent. On obtient le triangle de support $[-T, T]$ et qui prend la valeur T pour $t = 0$.

1.3 On utilise les notations $E_{xy} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt$ et $E_{xx} \triangleq E_x$. La linéarité du produit scalaire conduit à :

$$E_z = |\lambda|^2 E_y + 2\text{Re}[\lambda E_{yx}] + E_x.$$

1. Pour les signaux réels, E_z est un polynôme en λ qui ne prend pas de valeurs négatives. Donc son discriminant doit rester toujours négatif. Cette condition se traduit par l'inégalité (1.28).

2. Dans le cas de signaux complexes, on pose $\lambda^* = |\lambda|\exp(j\theta)$ et on choisit comme valeur pour θ l'argument de E_{yx} . Cela nous conduit au polynôme

$$E = |\lambda|^2 E_y + |\lambda| |E_{yx}| + E_x$$

dont l'indéterminée est $|\lambda|$ et donc à la même inégalité (1.28).

3. Dans le cas où l'on a égalité, les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont proportionnels.

4. On obtient :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \phi_n(t) dt$$

avec

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} dt.$$

Dans le premier cas, on choisit $\alpha = -T/2$, et le calcul de l'intégrale conduit à : $X_{k_0} = X_{-k_0} = 1/2$ et tous les autres coefficients nuls.

Dans le second cas, on choisit $\alpha = -T/4$, on pose $t/T = \tau$ et l'expression de X_n s'écrit :

$$\begin{aligned}
X_n &= \int_{-1/4}^{1/4} \cos(2\pi\tau) e^{-j2\pi n\tau} d\tau - \int_{1/4}^{3/4} \cos(2\pi\tau) e^{-j2\pi n\tau} d\tau \\
&= \int_{-1/4}^{1/4} \cos(2\pi\tau) [1 + (-1)^n] e^{-j2\pi n\tau} d\tau = 0 \quad \text{pour } n = 2k + 1 \\
&= \int_{-1/4}^{1/4} [e^{-j2\pi(2k-1)\tau} + e^{-j2\pi(2k+1)\tau}] d\tau \quad \text{pour } n = 2k \\
&= \left[\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{(2k-1)\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{(2k+1)\frac{\pi}{2}} \right] \\
&= (-1)^{k+1} \frac{4}{\pi(n^2 - 1)} \quad \text{pour } n = 2k.
\end{aligned}$$

1.4 1. La projection orthogonale est donnée par

$$\hat{x}(t) = \alpha_1 \phi_1(t) + \alpha_2 \phi_2(t)$$

où les coefficients α_1 et α_2 vérifient le système suivant

$$\langle x(t), \phi_1(t) \rangle = \alpha_1 \|\phi_1\|^2 + \alpha_2 \langle \phi_2, \phi_1 \rangle$$

$$\langle x(t), \phi_2(t) \rangle = \alpha_1 \langle \phi_1, \phi_2 \rangle + \alpha_2 \|\phi_2\|^2$$

avec

$$\|\phi_1\|^2 = \langle \phi_1, \phi_1 \rangle = \langle \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_1 \rangle = \frac{1}{B}$$

$$\|\phi_2\|^2 = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \langle \phi_2, \phi_1 \rangle = \frac{1}{2B}$$

$$\langle x(t), \phi_1(t) \rangle = \frac{1}{B} e^{j\varphi} \Pi\left(\frac{f_0}{B}\right), \quad \langle x(t), \phi_2(t) \rangle = \frac{1}{2B} e^{j\varphi} \Pi\left(\frac{f_0}{2B}\right).$$

On a donc le système suivant

$$\alpha_1 + \alpha_2/2 = e^{j\varphi} \Pi\left(\frac{f_0}{B}\right)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = e^{j\varphi} \Pi\left(\frac{f_0}{2B}\right).$$

Sa solution est donnée par

$$\alpha_1 = e^{j\varphi} [2\Pi\left(\frac{f_0}{B}\right) - \Pi\left(\frac{f_0}{2B}\right)] \quad \text{et} \quad \alpha_2 = 2e^{j\varphi} [\Pi\left(\frac{f_0}{2B}\right) - \Pi\left(\frac{f_0}{B}\right)].$$

Les valeurs de α_1 et α_2 dépendent de la position de f_0 par rapport à $B/2$ et B .

2. L'énergie de $\hat{x}(t)$ est donnée par

$$E_{\hat{x}} = \|\hat{x}\|^2 = \langle x(t), \hat{x} \rangle = \alpha_1^* \langle x(t), \phi_1 \rangle + \alpha_2^* \langle x(t), \phi_2 \rangle.$$

D'où

$$E_{\hat{x}} = \frac{1}{B} \Pi\left(\frac{f_0}{B}\right) + \frac{1}{2B} \left[\Pi\left(\frac{f_0}{2B}\right) - \Pi\left(\frac{f_0}{B}\right) \right].$$

D'où la discussion : $E_{\hat{x}} = 1/B$ si $f_0 < B/2$, $E_{\hat{x}} = 1/2B$ si $B/2 < f_0 < B$, $E_{\hat{x}} = 0$ si $B < f_0$.

3. On a

$$Y(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-j2\pi k T_e \nu} = e^{j\varphi} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi k T_e (\nu - f_0)} = \frac{w^N - 1}{w - 1}$$

avec $w = e^{-j2\pi(\nu - f_0)T_e}$. Un calcul simple conduit à

$$|Y(\nu)| = \frac{\sin[\pi N T_e (\nu - f_0)]}{\sin[\pi T_e (\nu - f_0)]}$$

et donc le maximum de $|Y(\nu)|$ est atteint pour $\nu = f_0$.

1.5 1. On a $Y(\nu) = X(\nu) + X(\nu)e^{j\pi\nu T}$.

2. Le coefficient de Fourier Z_n est donné par :

$$\begin{aligned} Z_n &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T z(t) e^{-j2\pi \frac{n}{2T} t} dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) e^{-j2\pi \frac{n}{2T} t} dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi \frac{n}{2T} t} dt = \frac{1}{2T} Y\left(\frac{n}{2T}\right). \end{aligned}$$

3. On obtient finalement :

$$Z_n = \frac{1}{2T} X\left(\frac{n}{2T}\right) [1 + e^{j\pi \frac{n}{2}}] = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) [1 + e^{j\pi \frac{n}{2}}] = \frac{(-1)^n}{n\pi} [1 + e^{j\pi \frac{n}{2}}].$$

1.6 1. La propriété de conservation du produit scalaire par la T.F est donnée par l'égalité suivante :

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t)^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) Y(\nu)^* d\nu.$$

La quantité P peut donc se calculer de deux manières différentes.

(a) Comme $X(\nu) = \frac{1}{A} \Pi\left(\frac{\nu}{A}\right)$, on obtient :

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{AB} \Pi\left(\frac{\nu}{\inf(A, B)}\right) d\nu = \frac{\inf(A, B)}{AB}.$$

(b) Comme $Y(\nu) = \frac{1}{2} [\delta(\nu - B) - \delta(\nu + B)]$, on obtient :

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2A} \Pi\left(\frac{\nu}{A}\right) [\delta(\nu - B) - \delta(\nu + B)] d\nu = \frac{1}{A} \quad \text{si } |B| < A$$

et $P = 0$ si $|B| > A$.

(c) Comme $Y(\nu) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}$, on obtient :

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} \Pi\left(\frac{\nu}{A}\right) \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2} d\nu = \frac{1}{A} \int_{-B/2}^{B/2} \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2} d\nu$$

2. La T.F du signal $x(t) = B[\text{sinc}(Bt)]^2$ est égale B fois le produit de convolution de la T.F de $\text{sinc}(Bt)$ par elle-même. On sait que ce produit est la fonction triangle. D'où

$$X(\nu) = \frac{1}{B} \Pi\left(\frac{\nu}{B}\right) * \Pi\left(\frac{\nu}{B}\right) = \text{Tri}_{2B}(\nu)$$

où

$$\begin{aligned} \text{Tri}_{2B}(\nu) &= 0 \text{ pour } \nu < -B, \text{Tri}_{2B}(\nu) = \frac{\nu}{B} + 1 \text{ pour } -B < \nu < 0 \\ &\text{et } \text{Tri}_{2B}(\nu) = \text{Tri}_{2B}(-\nu). \end{aligned}$$

Pour calculer l'énergie E_x , il suffit de calculer l'intégrale de la fonction $\text{Tri}_{2B}(\nu)^2$.

3. Cette opération ne définit par un filtre linéaire puisque la sortie associée à $x(t - \tau)$ est égale à $m(t)x(t - \tau)$. Elle n'est donc pas égale à $y(t - \tau)$ qui vaut $m(t - \tau)x(t - \tau)$.

4. On a

$$Y(\nu) = M(\nu) * X(\nu) = \frac{1}{2} [(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0))] * X(\nu) = \frac{1}{2} [X(\nu - \nu_0) + X(\nu + \nu_0)].$$

Comme $\nu_0 > 2B$, le graphe de $Y(\nu)$ est constitué par les deux triangles $\text{Tri}_{2B}(\nu - \nu_0)$ et $\text{Tri}_{2B}(\nu + \nu_0)$ qui ne se chevauchent pas. On obtient donc $E_y = E_x$.

1.11 1. Tracer le graphe de la fonction $\text{Tri}(t)$.

2. La fonction $\text{Tri}(t)$ est égale au produit de convolution d'une fonction porte de support $[-T/4, T/4]$ par elle-même. On a donc

$$\text{Tri}(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right).$$

3. On sait que

$$\mathcal{F}(\text{Rec}(t)) = \frac{T}{2} \text{sinc}\left(\frac{\pi T \nu}{2}\right).$$

D'où

$$\mathcal{F}(\text{Tri}(t)) = \frac{T^2}{4} \text{sinc}\left(\frac{\pi T \nu}{2}\right)^2$$

4. La T.F de $x(t)$ s'obtient en développant en série $x(t)$ et en prenant les T.F de cette série terme à terme. On obtient :

$$X(\nu) = \sum_{-\infty}^{\infty} X_k \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right)$$

où les coefficients X_k sont donnés par :

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tri}(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{T} \mathcal{F}(\text{Tri}(t))\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{T}{4} \text{sinc}\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2 = \frac{2T}{k^2 \pi^2} \quad \text{pour } k = 2h + 1. \end{aligned}$$

5. On a :

$$\hat{x}(t) = \sum_0^{N-1} \alpha_k \Pi_k(t).$$

On peut vérifier que les $\Pi_k(t)$ sont orthogonaux et donc les α_k sont donnés par :

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{T}{4}.$$

On constate que α_k est la valeur moyenne de $x(t)$ sur une période.

Chapitre 2

Représentations énergétiques et symboliques d'un signal déterministe

2.1 REPRÉSENTATIONS ÉNERGÉTIQUES

Si $X(\nu)$ est la T.F de $x(t)$, la fonction $|X(\nu)|^2$ est appelée spectre ou bien densité spectrale (d'énergie ou de puissance) de $x(t)$. Si le support de $|X(\nu)|^2$ est réduit à un ensemble discret de fréquences, on dit qu'on a un spectre de raies. Le spectre d'un signal périodique $x(t)$ est donc un spectre de raies particuliers où les raies sont équidistantes et où leurs amplitudes sont les coefficients de Fourier associés à $x(t)$. Nous allons donner quelques précisions sur ces définitions et pour plus de détails, on peut consulter les références suivantes [14] [15].

2.1.1 Corrélation et densité spectrale

L'intercorrélation de deux signaux à temps continu est définie par l'une des deux expressions suivantes selon que l'on considère des signaux d'énergie finie ou infinie. Dans ce dernier cas, on se limitera aux signaux de puissance finie en insistant sur les signaux périodiques qui sont évidemment d'énergie infinie.

Signaux d'énergie finie

$$\gamma_{xy}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt \quad (2.1)$$

Signaux de puissance finie et signaux périodiques

$$\gamma_{xy}(\tau) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y^*(t - \tau) dt \quad (2.2)$$

Dans le cas des signaux à temps discret, les définitions s'écrivent :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}(k) &\triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y^*(n - k) \\ &\triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N x(n) y^*(n - k). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Il existe un lien étroit entre le produit scalaire et les deux lois internes qui définissent le produit de convolution et l'intercorrélation. Ces deux lois internes définissent des applications de $L^2 \times L^2$ dans L^2 et on peut vérifier facilement les identités suivantes :

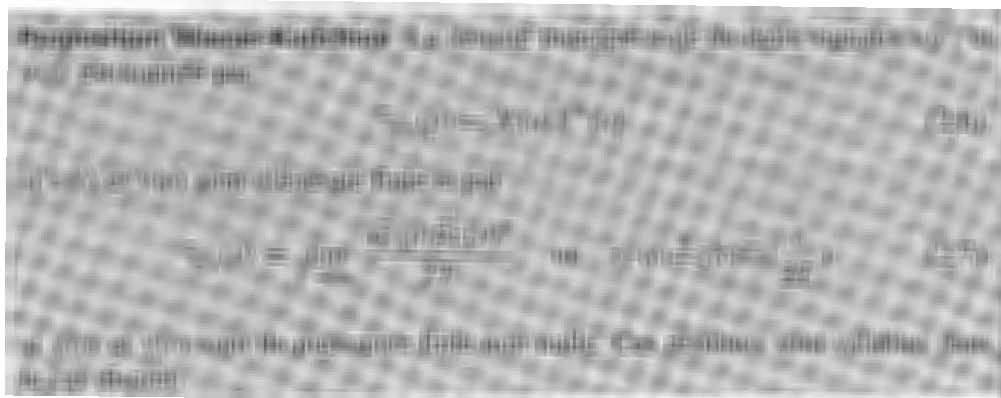
$$\gamma_{xy}(\tau) = [x(t) * y(-t)^*](\tau) = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle. \quad (2.4)$$

La T.F de la fonction d'intercorrélation de deux signaux est appelée densité interspectrale de ces signaux. Dans le cas de signaux d'énergies finies, on obtient la densité d'énergie et dans le cas de signaux de puissances finies, on obtient la densité de puissance.

Dans le cas où l'on considère un seul signal, i.e. $x = y$, on utilise la dénomination *auto* à la place d'*inter* pour toutes les grandeurs introduites ci-dessus. On supprime souvent le préfixe auto et on ne garde qu'un seul indice : par exemple γ_{xx} est appelée autocorrélation ou corrélation et on l'écrit simplement γ_x .

Si $x(t)$ est un signal d'énergie finie, l'expression de cette énergie est donnée par :

$$E_x = \gamma_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\nu)|^2 d\nu. \quad (2.5)$$



Exemple 2.1.1 DSP d'un signal tronqué ou périodisé

On considère le signal observé $y(t)$ de l'exemple 1.2.11. La T.F de $y(t)$ est donnée par (1.28). Soit $z(t)$ le signal périodique égal à $y(t)$ sur $[-T/2, T/2]$. Le calcul de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de $z(t)$ donne :

$$\Gamma_z(\nu) = A^2 T \text{sinc}(\pi T(\nu - f_1))^2 + B^2 T e^{j\phi_2} \text{sinc}(\pi T(\nu - f_2))^2.$$

La figure (2.1) montre que la DSP du signal périodisé est plus adaptée que celle du signal prolongé par des zéros pour séparer les fréquences contenues dans le signal considéré.

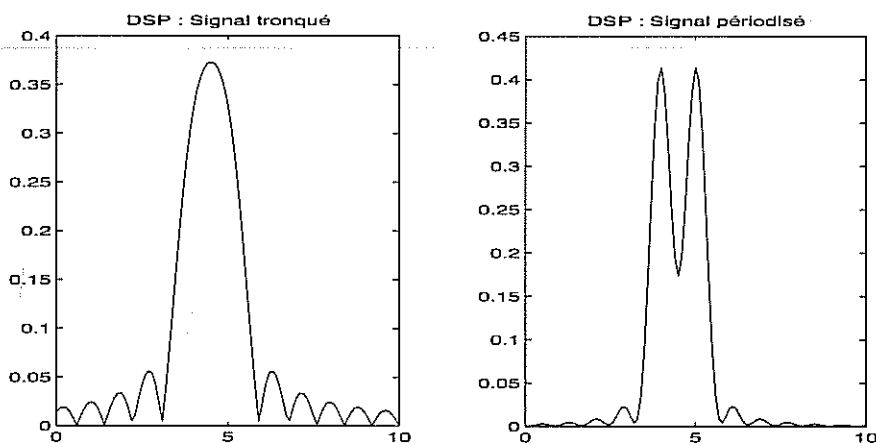


Figure 2.1 DSP : signal prolongé par des zéros et signal périodisé.

Exemple 2.1.2 La corrélation d'un rectangle est un triangle

La fonction rectangle $x(t) = \pi(\frac{t}{T})$ a pour T.F la fonction $\Pi(\nu) \triangleq T \text{sinc}(T\nu)$, pour fonction d'autocorrélation la fenêtre triangulaire, symétrique de support $[-T, T]$: $\gamma_x(\tau) = \sup(0, T - |\tau|)$ et pour densité spectrale de puissance :

$$|P_x(\nu)|^2 = T^2 \text{sinc}(\nu T)^2.$$

Exemple 2.1.3 Orthogonalité des signaux sinusoïdaux

Considérons les deux signaux sinusoïdaux définis par :

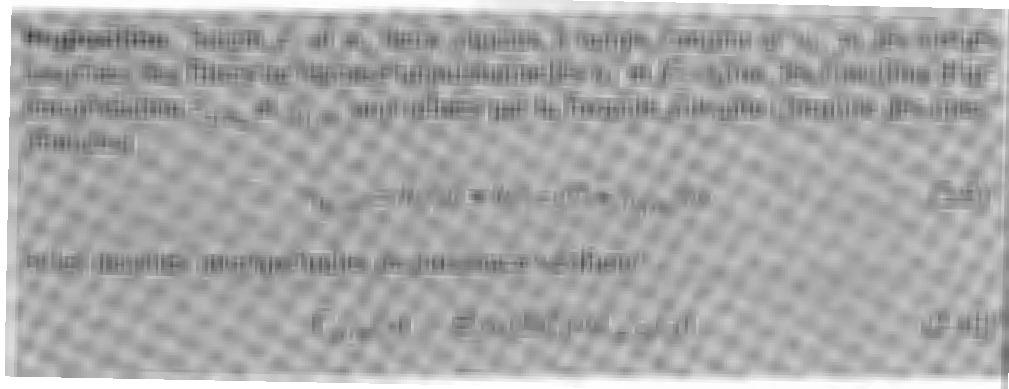
$$x(t) = a \cos(2\pi\nu t + \theta), \quad y(t) = b \cos(2\pi\nu' t + \varphi). \quad (2.8)$$

La fonction d'intercorrélation de ces signaux est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{ab}{2T} \int_{-T}^T \cos(2\pi\nu t + \theta) \cos(2\pi\nu'(t - \tau) + \varphi) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{ab}{4T} \int_{-T}^T \cos[2\pi(\nu + \nu')t - 2\pi\nu'\tau + \theta + \varphi] dt \\
 &\quad + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{ab}{4T} \int_{-T}^T \cos[2\pi(\nu - \nu')t + 2\pi\nu'\tau + \theta - \varphi] dt \\
 &= 0 \quad \text{si } \nu \neq \nu' \\
 &= \frac{ab}{2} \cos(2\pi\nu\tau + \theta - \varphi) \quad \text{si } \nu = \nu'.
 \end{aligned}$$

Ce résultat montre que deux fréquences pures différentes sont orthogonales au sens du produit scalaire défini par la fonction d'intercorrélation.

2.1.2 Filtrage et formule des interférences



Exemple 2.1.4 Translation du spectre par modulation

On considère le filtre à temps continu de réponse impulsionnelle $h(t) = \Pi(\frac{t-A}{A})$ où A est un réel positif donné. On suppose que l'entrée du filtre est le signal $x(t) = \text{sinc}(Bt)$. Le module de la réponse en fréquence $G(\nu)$ du filtre est $|G(\nu)|^2 = A^2 \text{sinc}(2A\nu)^2$. La densité spectrale de la sortie $y(t)$ de ce filtre est $\Gamma_y(\nu) = |G(\nu)|^2 \Gamma_x(\nu) = \frac{A^2}{B^2} \text{sinc}(2A\nu)^2 \Pi(\frac{\nu}{B})$. On suppose $B = 100$ Hz et on veut transmettre le signal $y(t)$ ainsi obtenu dans un canal qui ne laisse passer que les fréquences comprises dans l'intervalle [1000 Hz, 1300 Hz]. Un traitement préalable devient nécessaire et il consiste à moduler le signal pour ramener son spectre dans la bande [1000 Hz, 1300 Hz].

Exemple 2.1.5 Corrélation de la sortie d'un dérivateur

On considère un filtre dont la sortie $y(t)$ est égale à la dérivée $x'(t)$ de l'entrée $x(t)$ (filtre dérivateur). Utilisant la formule des interférences dans le domaine spectral, on obtient $\Gamma_y(\nu) = |Y(\nu)|^2 = |G(\nu) X(\nu)|^2 = |j2\pi\nu|^2 \Gamma_x(\nu)$. Les propriétés de la T.F conduisent immédiatement à : $\gamma_y(\tau) = -\gamma_x''(\tau)$.

2.1.3 Filtrage, exemple du filtre adapté

Le filtrage est un traitement qui consiste à extraire une information « utile » d'un signal composite. Par exemple, sur une chaîne stéréophonique, on trouve généralement un amplificateur-égaliseur comportant plusieurs filtres réglables par l'utilisateur. Ainsi, on peut actionner ces filtres pour supprimer les basses fréquences pour n'entendre que les violons. L'atmosphère joue le rôle d'un filtre pour les signaux Infra Rouge (IR). La fonction de transfert d'un tel filtre dépend des conditions climatiques et on a affaire à un système qui est un filtre sur des durées d'observation limitées. L'atténuation que ce système apporte dépend des longueurs d'onde des signaux qui traversent l'atmosphère. On peut citer un grand nombre d'autres exemples tels que les milieux marins, les câbles de transmission, etc.

Généralement, on distingue les filtres passe bas, passe bande et passe haut. On introduit alors la largeur de bande d'un filtre qui est la bande fréquentielle à -3dB , i.e., le support fréquentiel de la réponse en fréquence défini par :

$$\{\nu \text{ telles que } |H(\nu)|^2 \geq \frac{|H_{\max}(\nu)|^2}{2}.$$

On introduit aussi le temps de montée d'un filtre. Ce nombre permet de caractériser l'inertie du filtre, il est relié directement à la réponse impulsionnelle et il est pratiquement inversement proportionnel à la bande fréquentielle.

D'une manière générale, les caractéristiques d'un filtre sont définies par l'application envisagée. À titre d'exemple, on va développer ci-dessous les propriétés d'un filtre particulier.

Filtre adapté Considérons un filtre dont le gain complexe est $H(\nu)$. Les sorties $y_s(t)$ et $y_n(t)$ associées respectivement aux entrées $s(t)$ et $n(t)$ sont données par :

$$y_s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu) S(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu$$

$$y_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu) N(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu.$$

Supposons que $s(t)$ et $n(t)$ désignent respectivement un signal utile et un bruit nuisible. Un filtre adapté au couple $[s(t), n(t)]$ est un filtre qui maximise le rapport

appelé rapport signal à bruit (SNR) défini par :

$$\alpha(t) \triangleq \frac{|y_s(t)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |y_n(t)|^2 dt}.$$

On obtient en utilisant les expressions dans le domaine fréquentiel :

$$|y_s(t)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu) S(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu \right|^2$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |y_n(t)|^2 dt &= \int_{\mathbb{R}^3} H(\nu) N(\nu) H(f)^* N(f)^* e^{j2\pi(\nu-f)t} d\nu df dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu) N(\nu) H(f)^* N(f)^* \delta(\nu-f) d\nu df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\nu)|^2 |N(\nu)|^2 d\nu. \end{aligned}$$

Finalement, l'expression de $\alpha(t)$ peut se mettre sous la forme d'un rapport de deux produits scalaires :

$$\alpha(t) = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu) S(\nu) d\nu \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\nu)|^2 |N(\nu)|^2 d\nu} = \frac{|\langle A(\nu), B(\nu) \rangle|^2}{\langle A(\nu), A(\nu) \rangle}$$

où l'on a posé :

$$A(\nu) \triangleq H(\nu) N(\nu), \quad B(\nu) \triangleq \frac{S(\nu)^*}{N(\nu)^*} e^{-j2\pi\nu t}.$$

On a donc d'après l'inégalité de Schwarz :

$$\alpha(t) \leq \langle B(\nu), B(\nu) \rangle.$$

Comme $\langle B(\nu), B(\nu) \rangle$ est indépendant du filtre cherché, l'inégalité de Schwarz montre que, pour t fixé, le maximum du rapport $\alpha(t)$ est atteint pour le filtre H tel que A et B soient proportionnels. D'où :

$$H(\nu) = \lambda \frac{S(\nu)^*}{|N(\nu)|^2} e^{-j2\pi\nu t}. \quad (2.11)$$

Dans le cas particulier important où $N(\nu) \triangleq e^{j\phi(\nu)}$, on obtient :

$$H(\nu) = \lambda S(\nu)^* e^{-j2\pi\nu t}, \quad h(\theta) = \lambda s(t - \theta) \quad (2.12)$$

et

$$y(\theta) = \lambda \gamma_{ns}(t - \theta). \quad (2.13)$$

Dans ce cas particulier, le filtre adapté au signal $s(t)$ a donc pour réponse impulsionnelle le signal $s(t)$ retourné et décalé de t . Ce décalage signifie qu'il faut attendre pendant une durée t après l'apparition du signal pour le détecter.

2.2 REPRÉSENTATIONS SYMBOLIQUES

La modélisation d'un signal peut se faire de plusieurs manières. Soit E un ensemble de signaux et O un opérateur inversible de E sur son image $O(E)$. Si x est un signal de E et $y = O[x]$ son image par O , nous dirons que y est aussi une représentation du signal x . D'une manière générale, l'opérateur O est choisi de façon à ce que les opérations classiques (somme, produit, convolution...) sur les signaux de départ, x , se transforment en opérations simples sur les signaux images, y . Nous allons présenter dans cette section deux opérateurs classiques connus sous les dénominations transformée de Laplace et transformée en Z .

2.2.1 Transformée de Laplace d'un signal à temps continu

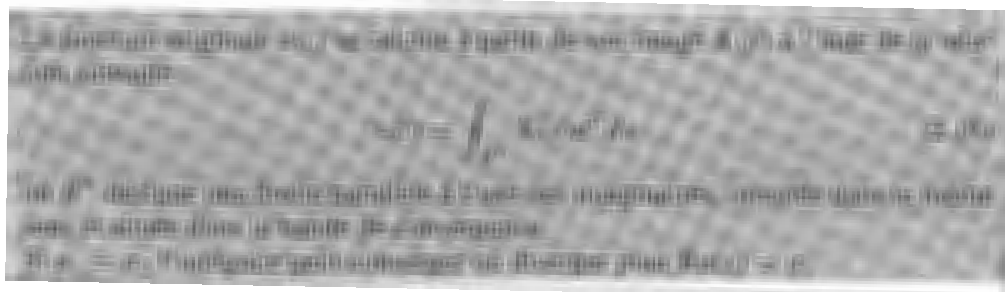
À toute fonction $x(t)$ de la variable réelle t , on peut associer la fonction de la variable complexe s , définie par

$$\mathcal{L}[x] \triangleq X(s) \triangleq \int_{-\infty}^0 e^{-st} x(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt \quad (2.14)$$

et

$$B(\sigma_1, \sigma_2) \triangleq \{s \text{ tel que } \sigma_1 < \operatorname{Re}(s) < \sigma_2\} \quad (2.15)$$

où $B(\sigma_1, \sigma_2)$ est la bande de convergence de l'intégrale (2.14), i.e., σ_1 (resp. σ_2) est le plus petit (resp. le plus grand) réel pour lequel la première (resp. deuxième) intégrale converge absolument pour tout s vérifiant $\operatorname{Re}(s) > \sigma_1$ (resp. $\operatorname{Re}(s) < \sigma_2$).



Lorsque $\sigma_1 < \sigma_2$, le couple $\mathcal{L}[x(t)], B(\sigma_1, \sigma_2)$ associé à un signal continu $x(t)$ est appelé transformée de Laplace (T.L) du signal $x(t)$. Plus généralement, étant donnée une fonction $X(s)$, une fonction $x(t)$ et une bande $B(\sigma_1, \sigma_2)$ telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}$ converge absolument vers $X(s)$ et que $B(\sigma_1, \sigma_2)$ soit sa bande de convergence. Alors, le couple $\{X(s), B(\sigma_1, \sigma_2)\}$ est la T.L. de $x(t)$.

On peut étendre la définition de la T.L. au cas des signaux d'énergie infinie en introduisant une représentation de ces signaux par des fonctions généralisées appelées distributions. Si $d(t)$ est une distribution tempérée, définie sur l'ensemble des fonctions à décroissance rapide $\mathcal{S}$, on définit sa T.L. par :

$$\langle \mathcal{L}[d], x(t) \rangle \triangleq \langle d, \mathcal{L}[x] \rangle \quad \forall x(t) \in \mathcal{S} \quad (2.17)$$

La transformée $X(p)$ d'un signal $x(t)$ est appelée représentation symbolique de ce signal.

Exemple 2.2.1 Bande de convergence d'un signal causal

Comme un signal causal est modélisable par une fonction $x(t)$ nulle pour $t < 0$ ou par une distribution dont le support est contenu dans la demi-droite $t \geq 0$, la bande de convergence d'une T.L. associée à un signal causal est forcément du type $B(\sigma, \infty)$.

2.2.2 Propriétés de la transformée de Laplace

Un problème important dans la pratique consiste à déterminer les fonctions $h(t)$ admettant comme T.L. une fonction donnée $H(s)$. On se limite au cas des fractions rationnelles. Soient $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_p$ les parties réelles des différents pôles de la fraction $H(s)$. Dans chacune des $p+1$ bandes $B(-\infty, \sigma_1)$, $B(\sigma_1, \sigma_2), \dots, B(\sigma_p, \infty)$, $H(s)$ admet un développement en série de Laurent unique qui définit $H(s)$ en tout point de cette bande. On peut donc associer à $H(s)$ $p+1$ fonctions différentes $x_i(t)$ admettant $H(s)$ comme T.L. sur

$$B(\sigma_{i-1}, \sigma_i), i = 1, \dots, p+1, \sigma_0 \triangleq -\infty, \sigma_{p+1} \triangleq \infty.$$

Si l'on veut associer à $H(s)$ une fonction unique, il faudra préciser la bande sur laquelle on se limite pour la définition de $H(s)$. Ainsi chaque couple $\{H(s), B(\sigma_{i-1}, \sigma_i)\}$ est la T.L. d'une fonction unique $x_i(t)$ admettant $H(s)$ comme T.L. sur la bande $B(\sigma_{i-1}, \sigma_i)$ définie par deux pôles consécutifs de $H(s)$.

L'opérateur $\mathcal{L}$ vérifie les propriétés suivantes.

Linéarité

$$\mathcal{L}[\alpha x(t) + \beta y(t)] = \alpha \mathcal{L}[x(t)] + \beta \mathcal{L}[y(t)], \quad B_x \cap B_y \quad (2.18)$$

Propriété de décalage

$$\mathcal{L}[x(t - \tau)] = e^{-s\tau} \mathcal{L}[x(t)], \quad B_x \quad (2.19)$$

Changement d'échelle Pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\mathcal{L}[x(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{s}{\alpha}\right), \quad B(\alpha\sigma_1, \alpha\sigma_2) \quad (2.20)$$

Conservation du produit scalaire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)^* dt = \frac{1}{j2\pi} \int_B X(s)Y(-s) ds \quad (2.21)$$

Produit de convolution

$$\mathcal{L}[x(t) * y(t)] = X(s)Y(s), \quad B_x \cap B_y \quad (2.22)$$

Dérivation

$$\mathcal{L}[x'(t)] = sX(s), \quad B_x \quad (2.23)$$

Intégration

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t x(u) du\right] = \frac{1}{s} X(s), \quad B_x \cap (0, \infty) \quad (2.24)$$

Valeurs initiale et finale Pour les signaux causaux qui n'ont pas de singularités en 0, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (2.25)$$

Fonction porte et fonction sinus cardinal Pour la fonction rectangle $\Pi(t)$, on a :

$$\mathcal{L}[\Pi(t/2)] = 2 \frac{\text{sh}(s)}{s}, \quad B(-\infty, \infty) \quad (2.26)$$

où sh désigne le sinus hyperbolique. La fonction sinc n'admet pas de T.L car elle décroît lentement à l'infini. Il en est de même pour un signal constant. La distribution de Dirac admet comme T.L la fonction 1.

Signaux exponentiels pondérés Des signaux périodiques (comme $\cos \omega t$, $e^{j\omega t}$...) n'ont pas de T.L. Par contre, pour les signaux $t^k e^{\alpha t}$ où α est un nombre arbitraire, on a :

$$\mathcal{L}[U(t)t^k e^{\alpha t}] = \frac{k!}{(s - \alpha)^{k+1}}, \quad B[\operatorname{Re}(\alpha), \infty] \quad (2.27)$$

$$\mathcal{L}[U(-t)t^k e^{\alpha t}] = \frac{-k!}{(s - \alpha)^{k+1}}, \quad B[-\infty, \operatorname{Re}(\alpha)] \quad (2.28)$$

Signal de Heaviside On peut vérifier que

$$\mathcal{L}[U(t)] = \frac{1}{s}, \quad B(0, \infty). \quad (2.29)$$

2.2.3 Transformée en Z d'un signal à temps discret

À toute suite (x_n) on peut associer la série définie par

$$Z[x_n] \triangleq X(z) \triangleq \sum_{-\infty}^{-1} x_n z^{-n} + \sum_0^{+\infty} x_n z^{-n} \triangleq Z_-[x_n] + Z_+[x_n] \quad (2.30)$$

et

$$A(r_1, r_2) \triangleq \{z \text{ tel que } r_1 < |z| < r_2\} \quad (2.31)$$

où $A(r_1, r_2)$ est l'anneau de convergence de la série de Laurent définie par (2.30), i.e., r_1 (resp. r_2) est le plus petit (resp. le plus grand) réel positif pour lequel la première (resp. deuxième) série converge absolument pour tout z vérifiant $|z| > r_1$ (Resp. $|z| < r_2$). On a les trois situations possibles suivantes :

1. Si $r_1 > r_2$, la série (2.30) ne converge en aucun point du plan complexe.
2. Si $r_1 = r_2$, la série peut converger ou diverger pour les z vérifiant $|z| = r_1$.
3. Si $r_1 < r_2$, alors cette série est absolument convergente dans l'anneau $A(r_1, r_2)$ sur lequel elle définit une fonction holomorphe et elle diverge en tout point situé strictement à l'extérieur de $A(r_1, r_2)$. Dans ce cas, la suite originale (x_n) se calcule à partir de son image $X(z)$ à l'aide de la relation suivante :

$$x_n = \frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} X(z) z^{n-1} dz \quad (2.32)$$

où C^+ désigne un cercle orienté dans le sens positif et situé dans l'anneau de convergence.

Le développement de la fonction $X(z)$ en série est donné par :

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k}. \quad (2.33)$$

Comme cette série est uniformément convergente sur l'anneau de convergence, on peut intégrer terme à terme la fonction $X(z)z^{n-1}$. On obtient :

$$\int_{C^+} X(z)z^{n-1}dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{C^+} x_k z^{-k} z^{n-1} dz. \quad (2.34)$$

Tenant compte du résultat classique suivant (lemme de Cauchy)

$$\int_{C^+} z^m dz = j2\pi \quad \text{pour } m = -1 \quad \text{et } 0 \quad \text{sinon} \quad (2.35)$$

on obtient

$$x(k) = \frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} z^{k-1} X(z) dz. \quad (2.36)$$

Lorsque $r_1 > r_2$, le couple $Z[x_n], A(r_1, r_2)$ associé à un signal discret (x_k) est appelé transformée en Z (notation T.Z) de ce signal. Inversement, étant donnée une fonction $X(z)$ développable en série de Laurent sur une couronne maximale $A(r_1, r_2)$ et soit (x_n) la suite apparaissant dans son développement. Alors, le couple $\{X(z), A(r_1, r_2)\}$ est appelé T.Z de la suite (x_n).

La transformée en z, $\{X(z), A(r_1, r_2)\}$ d'un signal discret (x_n) est appelée représentation symbolique de ce signal.

Exemple 2.2.2 Anneau de convergence d'un signal causal

Comme un signal causal discret est modélisable par une suite (x_n) nulle pour $n < n_0$ (par changement d'indice, on peut se ramener à $n_0 = 0$), l'anneau de convergence de la T.Z d'une suite discrète causale est de la forme $A(r, \infty)$ et réciproquement. À titre d'exemple, la T.Z de l'échelon unité à temps discret : $u_k = 1$ pour $k \geq 0$ et 0 pour $k < 0$ est donnée par :

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad A(1, +\infty).$$

2.2.4 Propriétés de la transformée en Z

Un problème important consiste à déterminer les suites admettant une fonction $X(z)$ donnée comme T.Z. Commençons par l'exemple suivant qui montre que deux

signaux différents (x_n) et (y_n) peuvent avoir la même image $X(z) = Y(z)$ mais dans ce cas, les séries associées ont forcément des régions de convergence différentes.

Exemple 2.2.3 Importance de l'anneau de convergence

Pour $|az^{-1}| < 1$, on a

$$X(z) = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \sum_0^{\infty} a^k z^{-k}.$$

Le signal

$$x_k = a^k \text{ pour } k \geq 0 \text{ et } x_k = 0 \text{ pour } k < 0$$

a donc pour T.Z la fonction

$$X(z) = \frac{z}{z-a}, A(|a|, +\infty)$$

On vérifie que le signal

$$y_k = -a^{k-1} \text{ pour } k \leq 0 \text{ et } y_k = 0 \text{ pour } k > 0$$

a pour T.Z la fonction

$$Y(z) = \frac{z}{z-a}, A(-\infty, |a|).$$

Les T.Z des signaux ainsi définis ne diffèrent donc que par leurs anneaux de convergence.

La donnée d'une fonction $X(z)$ ne permet pas de déterminer une suite unique (x_n) telle que $\mathcal{Z}[x_n] = X(z)$. Cependant la donnée du couple $X(z), A(\rho_1, \rho_0)$ où $A(\rho_1, \rho_0)$ est un anneau sur lequel $X(z)$ est développable en série de Laurent, permet de trouver un seul signal (x_n) admettant $X(z), A(\rho_1, \rho_0)$ comme $\mathcal{Z}$. Il existe plusieurs méthodes pour calculer la suite (x_n) . On peut, par exemple, développer en série la fonction $X(z)$ sur l'anneau de convergence associé et déduire la suite (x_n) en vertu de l'unicité de ce développement. On peut aussi calculer l'intégrale (2.32) en utilisant le théorème des résidus qui donne le résultat sous la forme suivante.

Inversibilité de la T.Z Si l'on désigne par C^+ un cercle arbitraire situé dans l'anneau de convergence de $X(z)$ et orienté dans le sens positif, alors on a :

$$x_k = \sum_{p_i \in C^+} \text{Res}[z^{k-1} X(z)]_{p_i} \text{ pour } k \geq 0 \quad (2.37)$$

où la somme porte sur l'ensemble des pôles p_i situés à l'intérieur de C^+ .

Pour $k < 0$, l'origine peut devenir un pôle pour $z^{k-1}X(z)$. Moyennant des conditions générales de décroissance de $|z^k X(z)|$ lorsque $|z|$ tend vers l'infini, on peut utiliser le théorème des résidus pour les domaines infinis qui tient compte du pôle à l'infini. Pour le calcul des résidus, on peut utiliser par exemple les formules suivantes.

Cas d'un pôle simple $z = a$:

$$Res_a^1 \triangleq \lim_{z \rightarrow a} (z - a) z^{k-1} X(z). \quad (2.38)$$

Cas où $z = a$ est un pôle d'ordre q :

$$Res_a^q \triangleq \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} [(z - a) z^{k-1} X(z)]. \quad (2.39)$$

Exemple 2.2.4 Calcul de la T.Z par la méthode des résidus

Le signal x_k associé à la T.Z :

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad A(1, \infty)$$

est donné par :

$$x_k = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{z^{k-1}}{1 - z^{-1}} dz = \frac{1}{j2\pi} \int_C \frac{z^k}{z - 1} dz.$$

où C est un cercle de rayon supérieur à 1. Pour $k \geq 0$, on a un pôle simple $z = 1$ et donc :

$$x_k = Res_1^1 = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{z^k}{z - 1} = 1.$$

Pour $k < 0$, $z = 1$ est un pôle simple et $z = 0$ un pôle d'ordre k . Les résidus en ces points sont donnés par :

$$Res_1^1 = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{z^k}{z - 1} = 1$$

et

$$Res_0^k = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[\frac{z^{k+1}}{z - 1} \right] = -1.$$

D'où

$$x_k = \text{Res}_0^k + \text{Res}_1^1 = 0.$$

Un cas pratique très important correspond aux fonctions $X(z)$ qui sont des fractions rationnelles. Appelons dans ce cas $r_1 < r_2 < \dots < r_u$ les modules des différents pôles de $X(z)$. Dans chacun des $u + 1$ anneaux $A(0, r_1)$, $A(r_1, r_2)$, $\dots$, $A(r_u, \infty)$, $X(z)$ admet un développement en série de Laurent unique qui définit $X(z)$ en tout point de cet anneau. Il existe donc $u + 1$ suites différentes x_n admettant $X(z)$ comme T.Z sur les $u + 1$ anneaux $A(r_{i-1}, r_i)$, $i = 1, \dots, u + 1$, avec les conventions : $r_0 \triangleq 0$ et $r_{u+1} \triangleq \infty$. Chaque couple $\{X(z), A(r_{i-1}, r_i)\}$ est la T.Z d'une suite unique (x_n) admettant $X(z)$ comme T.Z sur l'anneau $A(r_{i-1}, r_i)$ défini par deux pôles consécutifs de $X(z)$. Lorsque le domaine de z est précisé, l'opérateur T.Z est donc inversible. La méthode générale du calcul du signal original fait intervenir les trois étapes suivantes.

- Développer $X(z)$ en éléments simples.
- Déterminer le développement en série de chacun des éléments simples.
- Additionner les différentes séries obtenues.

Exemple 2.2.5 Calcul de la T.Z d'une fraction rationnelle

Toute fraction rationnelle

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^1 + \dots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z^1 + \dots + a_n z^n} \quad (2.40)$$

s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$X(z) = P(z) + H(z), \quad H(z) \triangleq \frac{N(z)}{D(z)} \quad (2.41)$$

où $N(z)$ est un polynôme de degré inférieur à n et $P(z)$ est un polynôme nul ou de degré $m - n$. Le développement en éléments simples de $X(z)$ est donné comme suit.

1. Si $X(z)$ ne possède que des pôles simples p_i , alors :

$$H(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{z - p_i} \quad \text{avec} \quad \alpha_i = (z - p_i)H(z)|_{z=p_i}.$$

2. Si $X(z)$ admet un pôle p_ℓ d'ordre q , alors :

$$X(z) = \sum_{i \neq \ell}^n \frac{\alpha_i}{z - p_i} + \sum_{j=1}^q \frac{\beta_j}{(z - p_\ell)^j} \quad \text{avec} \quad \beta_{q-j} = \frac{1}{j!} \frac{d^j [(z - p_\ell)H(z)]}{dz^j} \Big|_{z=p_\ell}.$$

3. Il existe plusieurs pôles multiples. On fera intervenir dans la somme un nombre de termes égal à l'ordre de multiplicité pour chacun de ces pôles comme indiqué dans le cas précédent.

Comme la T.L, la T.Z vérifie les principales propriétés suivantes qui sont données sans démonstration. Pour plus de détails, on pourra consulter [15].

Linéarité

$$\mathcal{Z}[\alpha(x_n) + \beta(y_n)] = \alpha\mathcal{Z}[(x_n)] + \beta\mathcal{Z}[(y_n)], \quad A_x \cap A_y \quad (2.42)$$

Propriété de décalage

$$\mathcal{Z}[(x_{n-k})] = z^{-k} \mathcal{Z}[(x_n)] \quad (2.43)$$

Transformée du produit usuel

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[(x_n y_n)] &= \frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} X(u) Y\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u} \\ &\triangleq X(z) * Y(z), \quad A_x \cap A_y \end{aligned} \quad (2.44)$$

Produit de convolution

$$\mathcal{Z}[(x_n) * (y_n)] = X(z) \cdot Y(z), \quad A_x \cap A_y \quad (2.45)$$

Conservation du produit scalaire

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} x_n y_n^* = \frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} X(z) Y^*(z^{-1}) \frac{dz}{z} \quad (2.46)$$

2.2.5 Spectres symboliques

L'interspectre symbolique de deux signaux à temps continu (resp. à temps discret) est défini par T.L (resp. T.Z) de la fonction d'intercorrélation des deux signaux. On a donc :

$$\Gamma_{xy}(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad \Gamma_{xy}(z) \triangleq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(i) z^{-i}. \quad (2.47)$$

Si $x(t)$ admet une T.L. $\{X(s), B(\sigma_1, \sigma_2)\}$ et si l'on a $\sigma_1 < 0 < \sigma_2$, alors sa T.F. existe et elle est donnée par :

$$\mathcal{F}[x(t)](\nu) = X(j2\pi\nu). \quad (2.48)$$

Si un signal (x_n) admet une T.Z. $\{X(z), A(r_1, r_2)\}$ et si l'on a $r_1 < 1 < r_2$, alors la transformée de Fourier de (x_n) est donnée par :

$$\mathcal{F}[x_n](\nu) = X(e^{j2\pi\nu}). \quad (2.49)$$

Si l'axe des imaginaires appartient à la bande de convergence du spectre symbolique $\Gamma_{xy}(s)$, on a la relation suivante :

$$\tilde{\gamma}_{xy}(\nu) \triangleq \Gamma_{xy}(j2\pi\nu). \quad (2.50)$$

Si le cercle unité appartient à l'anneau de convergence du spectre symbolique $\Gamma_{xy}(z)$, on a la relation suivante :

$$\tilde{\gamma}_{xy}(\nu) \triangleq \Gamma_{xy}(e^{j2\pi\nu}). \quad (2.51)$$

Par souci de simplification, on utilise souvent la même notation Γ_{xy} pour désigner l'interspectre symbolique et l'interspectre de puissance et ceci aussi bien pour le cas discret que pour le cas continu, les variables s, z, ν permettent de préciser la fonction que l'on considère. Par exemple, on remplace souvent la notation $\tilde{\gamma}_{xy}(\nu)$ par $\Gamma_{xy}(\nu)$.

À titre d'exemple, pour un signal réel à temps discret, on a $\gamma_x(k) = \gamma_x(-k)$ et donc la T.Z. de $\gamma_x(k)$ vérifie $\Gamma_x(z) = \Gamma_x(z^{-1})$ et son domaine de convergence est donc de la forme: $\rho < |z| < \rho^{-1}$ avec $\rho < 1$.

EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS

2.1 Intercorrélation et énergie

On considère un signal $x(t)$ de T.F. $X(\nu) = A\Pi(\frac{\nu}{2B})$ où A et B sont des constantes positives.

1. Déterminer $x(t)$.
2. Déterminer A pour que l'énergie de $x(t)$ soit égale à 1. On prendra cette valeur dans la suite.
3. On pose $y(t) = x'(t)$. Calculer la T.F. de $y(t)$.

4. Calculer l'énergie de $y(t)$.
5. Calculer la T.F de la fonction d'intercorrélation $\gamma_{yx}(\tau)$ de $x(t)$ et $y(t)$. En déduire $\gamma_{yx}(0)$.

2.2 Corrélation et densités spectrales

1. Rappeler la définition de la fonction d'intercorrélation $\gamma_{xy}(\tau)$ de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ à temps continu, périodiques, de même période T_0 et de puissance moyenne finie ?
2. Montrer que $\gamma_{xy}(\tau)$ est une fonction périodique du temps dont on précisera la période.
3. Exprimer $\gamma_{xy}(\tau)$ en fonction des coefficients de Fourier respectifs X_n et Y_n de $x(t)$ et $y(t)$.
4. Démontrer que la fonction d'autocorrélation d'un signal sinusoïdal est aussi un signal sinusoïdal.
5. En distinguant le cas des signaux d'énergie finie et celui des signaux de puissance finie non nulle, donner l'expression de la densité spectrale.

2.3 Mesure du retard par l'intercorrélation

On considère les signaux à temps continu définis par :

$$x(t) = A_1 \sin c[B_1(t - t_1)], \quad y(t) = A_2 \sin c[B_2(t - t_1)]. \quad (2.52)$$

1. Calculer les T.F $X(\nu)$ et $Y(\nu)$ de $x(t)$ et $y(t)$.
2. Calculer les densités spectrales de puissance $\Gamma_x(\nu)$ et $\Gamma_y(\nu)$.
3. Calculer la fonction d'intercorrélation $\gamma_{xy}(\tau)$.
4. Déterminer l'abscisse du maximum de $\gamma_{xy}(\tau)$ et en déduire une méthode pour mesurer le retard $t_1 - t_2$ entre $x(t)$ et $y(t)$.

2.4 Filtre adapté

On considère le signal déterministe $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ où f_0 désigne une fréquence positive. On introduit le filtre linéaire F_k de réponse impulsionnelle $h_k(t)$ définie par :

$$h_k(t) = e^{j2\pi \nu_k t} \Pi(t) \quad (2.53)$$

où ν_k est une fréquence positive donnée et $\Pi(t)$ la fonction porte de support $[0, 2T]$.

1. Déterminer la T.F $H_k(\nu)$ de $h_k(t)$.
2. Soit $y(t)$ la sortie de F_k associée à $x(t)$. Donner l'expression de l'énergie de $y(t)$ définie par

$$J(\nu_k) = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt.$$

3. On fait varier ν_k , donner l'allure du graphe de $J(\nu_k)$ en fonction de ν_k .
4. On suppose que la fréquence f_0 est inconnue et que $f_0 \in [0, \nu_{\max}]$. On se propose de déterminer f_0 en utilisant N filtres F_k , $k = 1, \dots, N$. Expliquer comment l'examen des énergies des sorties de ces filtres permet d'approximer la fréquence f_0 .

2.5 Séparation de fréquences non bruitées

On désigne par $\Pi(t)$ la fonction porte de support $[-1/2, 1/2]$.

1. On considère le signal défini par :

$$s(t) = A_1 e^{j2\pi f_1 t} + A_2 e^{j2\pi f_2 t}$$

où f_1 et f_2 sont des fréquences positives et A_1 et A_2 des constantes positives. On introduit le signal d'énergie finie suivant :

$$x(t) = s(t) \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

où T est un réel positif. Calculer la densité spectrale $\Gamma_x(\nu)$ de $x(t)$.

2. On fait passer $x(t)$ dans un filtre dont la réponse en fréquence est $G(\nu) = \Pi(\frac{\nu}{2f_2})$ et on désigne par $y(t)$ la sortie de ce filtre. A quelle fréquence minimale f_e doit-on échantillonner $y(t)$ pour pouvoir le reconstituer sans erreur à partir de ses échantillons ?
3. Calculer la fonction de corrélation $\gamma_x(t)$ de $x(t)$.
4. Calculer la densité spectrale $\Gamma_x(\nu)$ de $x(t)$.
5. Tracer le graphe de $\Gamma_x(\nu)$ pour $f_2 = 2f_1$ et $A_1 = 2A_2$.
6. Tracer le graphe de la densité spectrale $\Gamma_y(\nu)$.
7. On échantillonne $y(t)$ à la fréquence $f_e = \frac{3}{2T}$ pour obtenir un signal y_e . Tracer le graphe de la densité spectrale $S_y(\nu)$ de y_e .

8. On se place maintenant dans les hypothèses suivantes :

$$A_1 \gg A_2 \text{ et } f_2 = f_1 + \frac{3}{2T}. \text{ Tracer le graphe de } \Gamma_x(\nu).$$

9. L'examen de la densité spectrale permet-elle toujours de détecter l'existence des fréquences f_1 et f_2 dans le signal $x(t)$?

2.6 Réponse impulsionnelle et fonction de transfert

On considère le filtre à temps discret F de réponse impulsionnelle

$$h_k = (1/2)^k \text{ pour } 0 \leq k \leq \infty \text{ et } h_k = 0 \text{ ailleurs}$$

On appelle e_k l'entrée de F et y_k la sortie associée.

1. Que peut-on dire de la causalité et de la stabilité du filtre ainsi défini ?

2. Calculer la fonction de transfert du filtre F .

3. On fait passer le signal y_n dans un filtre F_1 causal de fonction de transfert $H_1(z) = 1/(1 - 4z)$ et on désigne par s_k la sortie de F_1 . Donner la relation qui existe entre les transformées en Z : $E(z)$ et $S(z)$ des signaux (e_k) et (s_k) .

4. Déterminer la réponse impulsionnelle du filtre stable qui associe à e_k le signal s_k .

2.7 Filtre non causal et non stable

1. On considère le filtre causal à temps discret de fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{3z^2 - 13z - 38}{z^3 - 2z^2 - 11z + 12}.$$

Quelles sont les régions de convergence possibles dans le plan complexe ? Calculer la réponse impulsionnelle $h(n)$ qui correspond au système qui n'est ni causal si anticausal.

2. On considère le filtre causal à temps discret, défini par la relation :

$$s_k = as_{k-1} + e_k, \quad k = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty$$

où a est un réel vérifiant $a^2 < 1$, e_k le signal d'entrée et s_k le signal de sortie.

i) Donner l'expression de la fonction de transfert $H(z)$ de ce filtre.

ii) Déterminer la réponse impulsionnelle h_k du filtre causal dont la fonction de transfert est $H(z)$.

iii) Déterminer la sortie s_k lorsque l'entrée est définie par : $e_0 = 1$ et $e_k = 0$ pour $k \neq 0$.

SOLUTIONS

$$2.1 \quad 1. \quad x(t) = A \int_{-B}^{+B} e^{2\pi j\nu t} d\nu = A \frac{1}{2\pi j t} [e^{2\pi j B t} - e^{-2\pi j B t}] = 2AB \operatorname{sinc}(2\pi B t).$$

2. On a $E_x = 2BA^2$ et donc il faut choisir $A = 1/\sqrt{2B}$.

3. La relation entre la T.F d'une fonction et celle de sa dérivée donne $Y(\nu) = A2\pi j\nu$ pour $|\nu| \leq B$ et 0 sinon.

$$4. \quad E_y = 4\pi^2 A^2 \int_{-B}^{+B} \nu^2 d\nu = \frac{4}{3}\pi^2 B^2.$$

5. $\Gamma_{yx}(\nu) = A^2 2\pi j\nu$ pour $|\nu| \leq B$ et 0 sinon. D'où $\gamma_{yx}(0) = 0$.

2.2 1. Voir le cours.

2. Partant de la définition de la fonction d'intercorrélation de deux signaux périodiques, on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}(\tau + T_0) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y^*(t - \tau - T_0) dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT_0} \int_{-NT_0}^{+NT_0} x(t) y^*(t - \tau) dt = \gamma_{xy}(\tau) \end{aligned}$$

puisque les signaux sont de période T_0 .

3. Remplaçant $x(t)$ et $y(t)$ par leurs séries de Fourier, on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}(\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT_0} \int_{-NT_0}^{+NT_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi \frac{k}{T_0} t} \sum_{h=-\infty}^{\infty} Y_h^* e^{-j2\pi \frac{h}{T_0} (t-\tau)} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} X_k Y_h^* e^{j2\pi \frac{k}{T_0} \tau} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT_0} \int_{-NT_0}^{+NT_0} e^{-j2\pi \frac{k-h}{T_0} t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k Y_k^* e^{j2\pi \frac{k}{T_0} \tau} \end{aligned}$$

4. La fonction d'autocorrélation d'un signal sinusoïdal $a \cos(2\pi \nu t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \gamma_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{2T} \int_{-T}^T \cos(2\pi \nu t) \cos(2\pi \nu (t - \tau)) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [\cos(2\pi \nu (2t - \tau)) + \cos(2\pi \nu \tau)] dt \\ &= \frac{a^2}{2} \cos(2\pi \nu \tau). \end{aligned}$$

5. Dans le cas des signaux d'énergie finie, la conservation du produit scalaire par la T.F. permet d'écrire :

$$\gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) Y^*(\nu) e^{j2\pi\nu\tau} d\nu.$$

La densité interspectrale d'énergie est donc donnée par (2.6).

Dans le cas des signaux de puissance finie non nulle, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{xy}(\nu) &= \mathcal{F}[\gamma_{xy}(\tau)] = \mathcal{F}\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t-\tau)^* dt\right] \\ &= \mathcal{F}\left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)y_T(t-\tau)^* dt\right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \mathcal{F}[x_T(t) * y_T(-t)^*] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \tilde{x}_T(\nu) \tilde{y}_T(\nu)^* \end{aligned}$$

où x_T et y_T sont définis par la relation (2.7).

2.3 1. On a

$$X(\nu) = \frac{A_1}{B_1} \Pi\left(\frac{\nu}{B_1}\right) e^{-j2\pi\nu t_1} \quad \text{et} \quad Y(\nu) = \frac{A_2}{B_2} \Pi\left(\frac{\nu}{B_2}\right) e^{-j2\pi\nu t_2}.$$

2. Les densités spectrales sont égales aux carrés des modules de $X(\nu)$ et $Y(\nu)$. D'où :

$$\Gamma_x(\nu) = \frac{A_1^2}{B_1^2} \Pi\left(\frac{\nu}{B_1}\right) \quad \text{et} \quad \Gamma_y(\nu) = \frac{A_2^2}{B_2^2} \Pi\left(\frac{\nu}{B_2}\right).$$

3. La fonction d'intercorrélation $\gamma_{xy}(\tau)$ est égale à la T.F. inverse de la densité interspectrale $\Gamma_{xy}(\tau)$. Soit :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}[X(\nu)Y(\nu)^*](\tau) = \int \frac{A_1 A_2}{B_1 B_2} \Pi\left(\frac{\nu}{B_1}\right) \Pi\left(\frac{\nu}{B_2}\right) e^{j2\pi\nu(\tau-t_1+t_2)} d\nu \\ &= \frac{A_1 A_2}{B} \text{sinc}[B(\tau+t_2-t_1)] \end{aligned}$$

où B désigne le plus petit des deux nombres B_1 et B_2 .

4. L'abscisse du maximum de $\gamma_{xy}(\tau)$ correspond à $\tau - t_1 + t_2 = 0$. Il suffit donc de calculer cette abscisse pour déterminer le retard $\tau = t_1 - t_2$ entre $x(t)$ et $y(t)$.

2.6 1. Le filtre est causal car sa réponse impulsionnelle vérifie $h_k = 0$ pour $k < 0$. Il est stable car $\sum_{-\infty}^{\infty} |h_k| < \infty$.

2. La fonction de transfert est donnée par

$$H(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} h_k z^{-k} = \frac{1}{1 - (2z)^{-1}} = \frac{2z}{2z - 1}.$$

3. On a $Y(z)H_1(z) = S(z)$ et $y(z) = H(z)E(z)$. Donc $S(z) = H(z)H_1(z)E(z)$. La fonction de transfert du nouveau filtre est égale au produit des deux fonctions de transfert. On a donc

$$H_2(z) = \frac{1}{1-4z} \frac{2z}{2z-1}.$$

4. Pour déterminer la réponse impulsionnelle du filtre stable qui associe à e_k le signal s_k , on développe chacun des termes de

$$H_2(z) = \frac{-1}{1-4z} + \frac{1}{1-2z}$$

dans le domaine $|z| > 1/2$. On obtient : $h_k = -2^{-k} + 4^{-k}$ pour $k > 0$ et $h_k = 0$ pour $k \leq 0$.

Chapitre 3

Échantillonnage et modulation d'un signal déterministe

3.1 SIGNAL ÉCHANTILLONNÉ ET SIGNAL NUMÉRIQUE

3.1.1 Condition de Shannon-Nyquist

Nous allons présenter succinctement quelques résultats sur l'échantillonnage et la quantification d'un signal. Pour plus de détails, on peut consulter les références suivantes [1] [10] [12] [17]. En communications numériques, on transmet une suite de symboles appartenant à un certain alphabet, généralement binaire : $\{0,1\}$. Pour transmettre un signal $x(t)$ analogique, on commence par l'échantillonner avec un certain pas T , on forme donc la suite numérique $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$. On quantifie ensuite chaque échantillon $x(nT)$ en le remplaçant par un nombre appartenant à un alphabet bien déterminé et on code ce nombre à l'aide d'une suite de p symboles choisis dans $\{0,1\}$. Parmi les problèmes fondamentaux, on peut chercher à savoir dans quelle mesure la suite $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, peut-elle représenter de manière satisfaisante le signal $x(t)$. Pour répondre à cette question, associons à un signal analogique $x(t)$ le signal défini par :

$$x_T(t) \triangleq \sum_{-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT) \quad (3.1)$$

appelé signal échantillonné associé à $x(t)$. Le lien qui existe entre les T.F d'un signal $x(t)$ et son signal échantillonné $x_T(t)$ est précisé dans la proposition suivante.

Théorème d'échantillonnage La T.F $X(\nu)$ d'un signal $x(t)$ et celle $X_T(\nu)$ de son signal échantillonné sont reliées par :

$$X_T(\nu) = f_e \sum_{-\infty}^{+\infty} X(\nu - n f_e), \quad f_e \triangleq \frac{1}{T}. \quad (3.2)$$

La fonction $X_T(\nu)$ est de période f_e et on a les deux situations suivantes.

1. Si $X(\nu)$ est à support borné, i.e., il existe $f_{\min}$ et $f_{\max}$ telles que $X(\nu) = 0$ pour $\nu \notin [f_{\min}, f_{\max}]$, alors, pour que $X(\nu)$ puisse être déterminé sans erreur à partir de $X_T(\nu)$, il suffit de choisir :

$$f_e \geq |f_{\max} - f_{\min}| \quad (\text{Condition de Shannon-Nyquist}).$$

2. Si le spectre $X(\nu)$ n'est pas à support borné, quelle que soit la valeur de T , la connaissance de $X_T(\nu)$ ne permet pas de déterminer sans erreur $X(\nu)$.

En général, on a $|X(\nu)| = |X(-\nu)|$. Dans ce cas, $f_{\min} = -f_{\max}$ et il suffit donc de prendre $f_e \geq 2f_{\max}$.

3.1.2 Formule d'échantillonnage

Un signal $x(t)$ est dit à bande limitée $[-B, B]$ s'il admet la représentation suivante :

$$x(t) = \int_{-B}^{+B} \sigma(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu \quad (3.3)$$

où $\sigma(\nu)$ est une fonction de $L^1(-B, B)$. Si la fonction $x(t)$ appartient à $L^1(-\infty, \infty)$, alors sa T.F est donnée par

$$X(\nu) = \sigma(\nu) \quad \forall \nu \in]-B, B[\quad \text{et} \quad X(\nu) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

À titre d'exemple, $\text{sinc}(2Bt)$ est un signal à BL $[-B, B]$ et $e^{-\alpha^2 t^2}$ n'est pas à BL. Dans la pratique, on associe à un signal réel quelconque, une durée moyenne T_s et une largeur de bande B_s définies par :

$$T_s^2 \triangleq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |x(\tau)|^2 d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau} \quad \text{et} \quad B_s^2 \triangleq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \nu^2 |X(\nu)|^2 d\nu}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\nu)|^2 d\nu}.$$

Un signal à BL $x(t)$ peut être défini sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ en remplaçant tout simplement la variable t réelle par la variable complexe z . On obtient alors la fonction $x(z)$ qui est une fonction analytique sur le corps $\mathbb{C}$ et qui vérifie :

$$|x(z)| \leq A e^{B|z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad \int_{-B}^{+B} |\sigma(\nu)| d\nu < \infty.$$

Exemple 3.1.1 Signal à bande limitée

On peut établir que tout signal à BL $[-B + f_0, B + f_0]$, $f_0 > B$, peut se mettre sous la forme :

$$x(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t) - n(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

où $m(t)$ et $n(t)$ sont deux signaux à BL $[-B, B]$, appelés composantes en quadrature du signal $x(t)$. L'expression ci-dessus de $x(t)$ peut se représenter par un diagramme appelé diagramme des phases.

Tenant compte de la symétrie du spectre d'un signal réel, il est possible de décrire un signal réel de bande $[-B, B]$ en utilisant seulement la moitié de la bande. L'autre moitié pourra être utilisée par un autre signal. Cette démarche permet, par exemple, de transmettre simultanément deux signaux réels de bande $[-B, B]$ chacun dans un même canal de largeur de bande $2B$. Il existe plusieurs manières de réaliser cette opération, par exemple, la méthode dite de multiplexage en quadrature (MAQ) consiste à associer aux signaux $u(t)$ et $v(t)$ de bande $[-B, B]$, à transmettre simultanément, le signal unique :

$$x(t) = u(t)\cos(2\pi f_0 t) - v(t)\sin(2\pi f_0 t).$$

Une méthode, dite détection synchrone, permet de retrouver les deux signaux $u(t)$ et $v(t)$.

Considérons l'ensemble $L^2(\mathbb{R})$ des signaux d'énergie finie. Cet ensemble contient le signal $\text{sinc}(2Bt)$ ainsi que tous les signaux obtenus par des translations de pas $t_n = 1/2B$:

$$\pi_n(t) \triangleq \text{sinc}[2B(t - t_n)], \quad t_n = \frac{n}{2B}.$$

On a vu que le spectre de tout signal à bande limitée $[-B, B]$ peut être reconstitué sans erreur à partir de celui du signal échantillonné associé à condition d'échantillonner à une fréquence $f_e \leq 2B$. On peut énoncer la formule d'interpolation exacte suivante.

La démonstration de cette formule repose sur le fait que la T.F du peigne de Dirac

$$P_T(t) \triangleq \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT)$$

de période $T = 1/2B$ est égale au peigne de Dirac de période $2B$ définie par :

$$P_{2B}(\nu) = 2B \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - m2B)$$

En effet, le signal étant à bande limitée $[-B, B]$, on a

$$X(\nu) = \frac{1}{2B} [X(\nu) * P_{2B}(\nu)] \tilde{\Pi}_{2B}(\nu).$$

L'application de la T.F (théorème de Borel) conduit à

$$x(t) = [x(t) P_T(t)] * \text{sinc}(2Bt).$$

Le développement de la convolution donne (3.4).

La formule d'échantillonnage est indépendante de l'instant initial, i.e., on peut remplacer tous les instants $n/2B$ par les instants $n/2B + \tau$ où τ est un paramètre fixé. On a donc la formule :

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(\tau + \frac{n}{2B}) \text{sinc}[2B(t - \tau - \frac{n}{2B})]. \quad (3.5)$$

Comme tout signal à BL $[-B', B']$ est aussi à BL $[B, B]$ si $B' \leq B$, la formule d'échantillonnage donnée par (3.4) est aussi valable pour tous les signaux d'énergie finie à BL $[-B', B']$.

La formule d'échantillonnage ne doit pas être étendue sans précautions aux cas des signaux d'énergie infinie. Il suffit de prendre $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$. On obtient : $B = f_0$ et $x(n/2B) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3.1.3 Filtre antirepliement

Un signal d'énergie finie peut être représenté comme le produit d'un signal de puissance moyenne finie non nulle par une fonction de pondération du type rectangle de

support fini T . Le spectre d'un tel signal est donc représenté par le produit de convolution de deux termes dont l'un est à support infini. Même si un signal de puissance moyenne finie est à BL, on obtient un produit de convolution qui a un support infini. Ainsi un signal physiquement réalisable ne peut jamais être à BL. L'échantillonnage d'un signal physiquement réalisable entraîne donc toujours un recouvrement spectral qui exclut toute possibilité de reconstitution parfaite. Cependant, comme le spectre d'un signal d'énergie finie vérifie

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(\nu)|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (3.6)$$

il tend vers zéro lorsque la fréquence ν tend vers l'infinie. Il est donc possible de choisir une fréquence d'échantillonnage qui garantit une reconstitution acceptable des signaux d'énergie finie. Plus $X(\nu)$ décroît lentement vers zéro, plus la fréquence d'échantillonnage doit être grande. On peut alors utiliser un filtre, appelé filtre anti-repliement, pour ne pas avoir recours à une fréquence d'échantillonnage abusivement grande. On procède à un pré-filtrage adéquat du signal analogique avant de l'échantillonner. Pour un signal $y(t)$ dont la T.F $Y(\nu)$ vérifie $Y(\nu) = 0$ pour $\nu < 300$ Hz et $\nu > 500$ Hz, la fréquence minimale d'échantillonnage est, a priori, $f_e = 1000$ Hz. Mais on peut translater le spectre de ce signal à l'aide d'un traitement préalable pour diminuer f_e .

Généralement, le spectre du signal est perturbé par une composante large bande due à la présence de bruits de fond additionnels causés par les mesures. Le filtre antirepliement serait donc un filtre passe-bas idéal de bande $B = f_e/2$. Mais un tel filtre n'est pas réalisable car il est non causal. Pour être réalisable, tout filtre doit comporter forcément une bande de transition qui reporte la bande passante limite B_m au-delà de la bande passante effective B . La fréquence d'échantillonnage $f_{e,min}$ doit donc vérifier $f_{e,min} = 2B_m > 2B$. La largeur de bande de transition dépend du type de filtre utilisé et du critère choisi pour fixer B_m . Par exemple, le choix d'un filtre du type Butterworth (voir plus loin) de degré n maintient dans la bande passante une réponse plate optimale avec une atténuation de -3 dB pour $\nu = f_c$ et une pente asymptotique d'atténuation de $-20n$ dB par décade ($-6n$ dB par octave) pour $\nu > f_c$, $n \in \mathbb{N}$. Le cas $n = 1$ correspond au circuit RC.

3.1.4 Quantification d'un signal : numérisation

Considérons un échantillon $x(kT_e)$ d'un signal échantillonné. À priori sa valeur est définie par un réel quelconque ou par deux réels s'il est complexe. Dans la pratique, on veut associer à $x(kT_e)$ supposé réel un nombre bien défini nq où n est un entier

choisi dans un ensemble donné et q un réel fixé définissant le « pas de quantification ». Cela revient à approximer $x(kT_e)$ par un nombre x_k vérifiant :

$$(n - \frac{1}{2})q \leq x_k < (n + \frac{1}{2})q. \quad (3.7)$$

On réalise une quantification ou un codage du signal échantillonné $x(kT_e)$ en lui associant le signal codé x_k appelé signal numérique. L'analyse de cette opération de codage ne sera pas développée ici. Elle est fondée sur la recherche de lien existant entre la densité de probabilité de $x(t)$ supposé aléatoire et celle de sa version quantifiée x_n et sur le résultat suivant.



Soit $[-A, A]$ l'intervalle à coder, i.e. l'intervalle des valeurs possibles de la V.A. $x(t)$. Le nombre N défini à partir de A et du pas q par :

$$A = 2^N \frac{q}{2} \quad (3.9)$$

est appelé nombre de « bits » nécessaires au codage de x .

3.1.5 Chaîne d'acquisition d'un signal

Un schéma type d'une chaîne d'acquisition d'un signal comprend les éléments suivants :

1. Un conditionneur dont la fonction est d'adapter électriquement le signal.
2. Un filtre anti-repliement.
3. Un échantillonneur bloqueur (« sample-hold »).
4. Un codeur analogique-numérique (CAN).
5. Une horloge pour les impulsions de période T_e .
6. Un générateur d'adresse.
7. Une mémoire.

On distingue trois types de codeurs CAN.

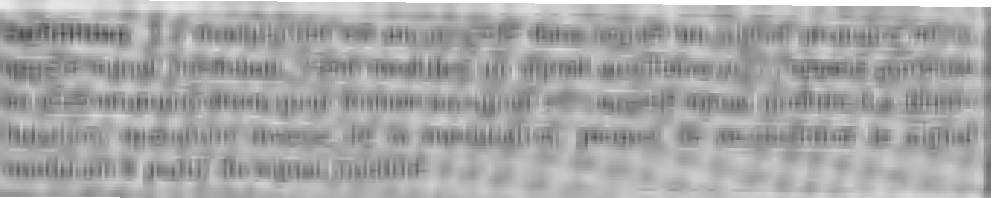
1. Les codeurs parallèles (flash converters). Ils sont à conversion directe précédée ou pas d'un échantillonneur bloqueur (EB). Ils sont couramment utilisés dans les domaines de la vidéo et du radar. Ils sont chers, rapides et assez précis. Leur principe consiste à générer à partir d'une source de tension continue de référence, tous les niveaux de quantification à l'aide d'un pont diviseur à résistances. Une batterie de comparateurs, compare la tension d'entrée à tous ces niveaux.

2. Les codeurs à approximations successives. Par rapport aux codeurs parallèles, ils sont moins chers, moins rapides et très précis. On les utilise surtout dans le domaine de l'instrumentation. Leur principe de fonctionnement est fondé sur la génération d'une tension continue d'opposition E_y , créée à l'aide d'un convertisseur numérique-analogique (CNA) piloté par un système logique qui engendre à chaque coup d'horloge des mots binaires qui commandent le CNA. Lorsque la tension E_y est approximativement égale à celle E_x du signal, il suffit alors de lire le mot binaire pilotant le CNA.

3. Les codeurs à rampes. Ces codeurs ne sont pas précédés d'un échantillonneur bloqueur. Ils intègrent une tension pendant une durée θ , ensuite pendant une durée θ' , une tension de référence de signe inverse remet à zéro l'intégrateur. On peut montrer que la T.F du signal ainsi échantillonné est doublement modulée par l'effet de la fenêtre dû au bloqueur pendant le temps τ et par celui de la fenêtre dû à l'intégration pendant le temps θ d'ouverture de l'échantillonneur-moyenleur. On obtient :

$$X(\nu) = F_e \tau \operatorname{sinc}(\nu \tau) [\operatorname{sinc}(\nu \theta) X(\nu)] * \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n F_e). \quad (3.10)$$

3.2 MODULATION D'UN SIGNAL



La modulation est un moyen qui permet de réaliser, en particulier, les opérations suivantes.

1. Coder l'information contenue dans le signal modulant $m(t)$ que l'on désire transmettre.
2. Transposer, sans perte d'information, le spectre d'un signal $m(t)$ dans une bande de fréquence adaptée à des conditions imposées. Par exemple, il est important de transposer le spectre du signal dans une bande contenue dans celle du canal de transmission pour lequel la bande de fréquences est souvent imposée.
3. Immuniser un signal $m(t)$ contre des bruits parasites dont on connaît la bande de fréquences en déplaçant le spectre de $m(t)$ à l'extérieur de la bande des bruits parasites.
4. Permettre le partage d'un canal de transmission entre plusieurs signaux à transmettre simultanément (multiplexages fréquentiel ou temporel).
5. Obtenir une amplification et un filtrage efficace de signaux basse fréquence et de faible puissance en s'affranchissant d'un bruit parasite qui est souvent un bruit de fond en $1/f$.

6. Enregistrer des signaux dont le spectre s'étend jusqu'à 0 sur des supports magnétiques.

7. Modifier le spectre du signal émis afin d'améliorer les conditions de travail sur ce signal.

L'opération qui consiste à associer au signal $x(t)$ à BL $[-B, B]$ le signal

$$s(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t), \quad f_0 > B$$

se traduit par une transposition en fréquence. En effet, $s(t)$ ainsi construit est un signal à BL $[-B + f_0, B + f_0]$. En communication, au lieu de transmettre le signal $x(t)$ par voie herzienne ou par câble, on transmet le signal $s(t)$ appelé signal modulé et la récupération de $x(t)$ se fait par détection synchrone.

D'une manière générale, la porteuse $p(t)$ est une suite périodique d'impulsions et le signal modulé $x(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$x(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g\left(\frac{t - \tau_k - kT}{\Delta_k}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g\left(\frac{t}{\Delta_k}\right) * \delta(t - \tau_k - kT) \quad (3.11)$$

où a_k , τ_k et Δ_k désignent respectivement des paramètres d'amplitude, de position et de durée susceptibles d'être fonction du signal modulant $m(t)$. Cette définition générale de la modulation ne permet pas d'établir une expression de la densité spectrale du signal modulé. Généralement, le signal auxiliaire $p(t)$ est périodique et se réduit souvent à une porteuse sinusoïdale de fréquence f_0 définie par :

$$p(t) \triangleq A \cos(2\pi f_p t + \phi_p). \quad (3.12)$$

On se limite dans la suite à une porteuse sinusoïdale. En général, on a le choix entre trois types de modulation.

1. La modulation d'amplitude qui est un procédé dans lequel c'est l'amplitude A de la porteuse qui est fonction du signal modulant.
2. La modulation de phase qui est un procédé dans lequel c'est la phase ϕ_p de la porteuse qui est fonction du signal modulant.
3. La modulation de fréquence qui est un procédé dans lequel c'est la fréquence f_p de la porteuse qui est fonction du signal modulant.

Comme on le verra plus loin, la modulation de phase peut être considérée comme un cas particulier de la modulation d'amplitude. On ne traitera donc que la modulation d'amplitude et la modulation de fréquence. Dans le premier cas, l'amplitude de la porteuse est souvent une fonction linéaire du signal modulant. Dans le deuxième cas, le signal modulé est forcément une fonction non linéaire du signal modulant.

Nous allons donner dans la suite les principales caractéristiques de ces deux types de modulations. On introduit pour cela la représentation complexe en associant au signal modulant $m(t)$ le signal analytique défini par :

$$z_m(t) \triangleq \mathcal{A}e^{j(2\pi f_0 t)} \quad (3.13)$$

où $\mathcal{A}$ est une fonction à valeurs complexes appelée enveloppe complexe du signal $z_m(t)$ caractérise le type de modulation considérée. Le signal modulé $x(t)$ est souvent un signal à bande limitée qui est représenté par la partie réelle de $z_m(t)$, i.e., sous la forme :

$$x(t) = \text{Re}[z_m(t)]. \quad (3.14)$$

Si l'on pose

$$\mathcal{A} \triangleq a(t) + jb(t) \triangleq Ae^{j\Delta\phi(t)} \quad (3.15)$$

où $A[(m(t))]$ est une fonction à valeurs réelles, le signal modulé $x(t)$ prend les formes équivalentes suivantes :

$$x(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t) - b(t) \sin(2\pi f_0 t) = A[(m(t))] \cos[\Delta\phi(t)]$$

où $A[(m(t))]$ est appelée enveloppe réelle et $\Delta\phi(t)$ phase instantanée de $x(t)$.

3.2.1 Modulation d'amplitude (AM)

La modulation d'amplitude représente une famille de techniques de modulations dans lesquelles l'amplitude d'une porteuse sinusoïdale varie en fonction du signal modulant. On considère souvent quatre classes de modulation d'amplitude et on introduit les appellations suivantes :

1. la modulation d'amplitude avec porteuse (AM),
2. la modulation d'amplitude sans porteuse (AM-P),
3. la modulation à bande latérale unique (SSB),
4. la modulation à bande latérale résiduelle (VSB).

La modulation d'amplitude est une opération linéaire qui conserve, en général, la forme du spectre unilatéral du signal modulant en lui faisant subir une translation en fréquence. L'opération de base dans les quatre types de modulation est la multiplication du signal modulant ou d'une fonction de ce signal par une porteuse sinusoïdale.

Les quatre classes de modulation d'amplitude sont définies par des signaux modulés dont les enveloppes complexes ont pour expression :

$$\begin{aligned}
A[m(t)] &= A[1 + m_0(t)] && \text{Modulation : AM} \\
&= Am_0(t) && \text{Modulation : AM - P} \\
&= \frac{A}{2}[m_0(t) + j\mathcal{H}(m_0)] && \text{Modulation : SSB} \\
&= \frac{A}{2}(1 + m_0(t) + j[\mathcal{H}(m_0) * h]) && \text{Modulation : VSB}
\end{aligned}$$

où $m_0(t)$ est le signal modulant réduit obtenu en divisant $m(t)$ par une valeur caractéristique appropriée et A l'amplitude de la porteuse sinusoïdale définie par (3.12). Selon le procédé de modulation, l'information contenue dans $m(t)$ est portée par l'enveloppe réelle $A(t)$ ou par l'écart de phase instantanée $\Delta\phi(t)$ ou encore par ces deux grandeurs à la fois. Les spectres des signaux modulés en amplitude avec porteuse sinusoïdale seront déterminés dans la suite dans les deux cas suivants.

1. La modulation d'amplitude sans porteuse où le signal modulé s'écrit :

$$x(t) = Am(t) \cos(2\pi f_0 t). \quad (3.16)$$

2. La modulation d'amplitude avec porteuse où le signal modulé s'écrit :

$$x(t) = A[1 + km(t)] \cos(2\pi f_0 t) \quad (3.17)$$

où le nombre k est une constante qui caractérise l'amplitude relative de $m(t)$ par rapport à $x(t)$.

Dans le cas de la modulation de phase, le signal modulé est souvent mis sous la forme

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + m(t)) \quad (3.18)$$

Il est facile de vérifier que cette modulation peut être considérée comme une modulation d'amplitude complexe.

Exemple 3.2.1 Modulation d'un signal à bande limitée

Soit $x(t) = Am(t)p(t)$ un signal modulé en amplitude par un signal $m(t)$ à bande limitée $[-F, +F]$ et supposons que la porteuse $p(t)$ est un signal périodique, de période $T_0 = 1/f_0$. Partant du développement en série de Fourier de $p(t)$, on obtient :

$$P(\nu) = \sum_{-\infty}^{\infty} P_n \delta(\nu - nf_0). \quad (3.19)$$

où les P_n désignent les coefficients de Fourier de $P(t)$, on peut calculer la T.F $X(\nu)$ de $x(t)$ et obtenir :

$$X(\nu) = A \sum_{-\infty}^{\infty} P_n M(\nu - nf_0). \quad (3.20)$$

Le support du spectre de $x(t)$ est donc constitué par la réunion des intervalles $[nf_0 - F, nf_0 + F]$. Si $F < f_0/2$, ces intervalles sont disjoints et donc la puissance de $x(t)$ se répartit sur des bandes de fréquence disjointes. Dans le cas d'une porteuse sinusoïdale, la relation (3.20) se réduit à :

$$X(\nu) = \frac{A}{2}[M(\nu + f_0) + M(\nu - f_0)].$$

Dans le cas particulier :

$$m(t) = 1 + \alpha \cos(2\pi Ft)$$

on obtient

$$M(\nu) = \delta(\nu) + \frac{\alpha}{2}[\delta(\nu - F) + \delta(\nu + F)]$$

et le spectre de $x(t)$ est constitué par un ensemble de 6 raies spectrales.

Pulses annulant l'interférences inter-symboles Considérons un système de communication dans lequel on transmet une suite de nombres réels ou complexes $x_n, n \in \mathbb{Z}$ sous forme d'un signal analogique

$$s(t) = \sum_n x_n h(t - nT)$$

où h est une fonction réelle ou complexe et T un réel positif définissant la cadence avec laquelle on transmet l'information et on prélève le signal à la réception. À l'instant kT , le signal reçu est donné par

$$s(kT) = \sum_n x_n h(kT - nT) = x_k h(0) + \sum_{i \neq 0} x_{k-i} h(iT).$$

Si l'on veut récupérer seulement le terme x_k , il faut choisir h de sorte que $h(iT) = 0, \forall i \neq 0$. On se restreint souvent à des fonctions h pour lesquelles la formule sommatoire de poisson est vérifiée, i.e.,

$$T \sum_n h(nT) = \sum_n H(\nu - \frac{n}{T}), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, la fonction recherchée doit vérifier la condition suivante, appelée condition de Nyquist [12], garantissant l'absence d'interférences entre symboles :

$$\sum_n H(\nu - \frac{n}{T}) = Th(0) \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

Les fonctions pulses $h(t)$ utilisées en communication sont toujours à bande limitée, $[-A, A]$, à cause des contraintes des canaux de transmission et des bandes de fré-

quences allouées à l'utilisateur. Pour assurer une transmission sans interférences entre symboles, la condition de Nyquist conduit à

$$2A \geq \frac{1}{T}.$$

Cette condition signifie que pour transmettre un symbole x_n toutes les T secondes sans interférence entre les symboles transmis, il faut une largeur de bande minimale $2A = 2B \triangleq 1/T$. Dans ces conditions, le pulse est donné par $h(t) = \text{sinc}(2\pi Bt)$. Supposons que l'échantillonnage de $x(t)$ se fasse non plus aux instants nT mais aux instants $nT + \epsilon$, $\epsilon > 0$. On obtient

$$s(nT + \epsilon) = x_n \text{sinc}(2\pi B\epsilon) + \sum_{i \neq 0} x_{n-i} \frac{\sin(2\pi B\epsilon)}{2\pi B(\epsilon - iT)}.$$

Comme la série

$$\sum_{i \neq 0} \frac{1}{|\epsilon - iT|}$$

est divergente, la quantité

$$e_n \triangleq |s(nT + \epsilon) - x_n| \quad (3.21)$$

qui représente l'erreur commise ne reste pas bornée pour toute suite x_n . Cette difficulté constitue l'inconvénient majeur du pulse $h(t)$ considéré. On préfère alors utiliser le pulse, appelé cosinus surélevé, défini par

$$g(t) = \text{sinc}(2\pi Bt) \frac{\cos(2\pi Bt)}{1 - 16B^2t^2}$$

ayant pour T.F $G(\nu) = \cos^2(\frac{\pi\nu}{4B})\Pi(\frac{\nu}{4B})$ et pour lequel l'erreur (3.21) reste bornée pour toute suite x_n . En effet, on peut écrire

$$s(nT + \epsilon) = x_n \frac{\text{sinc}(4\pi\epsilon)}{1 - 16B^2\epsilon^2} + \sum_{i \neq 0} x_{n-i} \frac{\epsilon \text{sinc}(4\pi B\epsilon)}{(\epsilon - iT)[1 - 16B^2(\epsilon - iT)^2]}.$$

Un autre inconvénient du pulse $h(t)$ provient du fait que la réalisation pratique d'un signal dont la T.F a une forte pente aux points $-B$ et B . On a alors recours à un codage qui permet quand même d'atteindre la borne de Nyquist. Par exemple, au lieu de transmettre le signal $x(t)$, on transmet

$$y(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (x_i + x_{i-1})h(t - iT) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i h_0(t - iT)$$

où

$$h_0(t) = h(t) + h(t + T).$$

Avec le pulse $h(t)$, on obtient $y(nT) = x_n + x_{n+1} = c_n$. Connaissant x_0 et la suite c_n , on peut retrouver la suite x_n . Au lieu de construire le signal $y(t)$ en introduisant le pulse irréalisable $h(t)$, on construit $y(t)$ à l'aide du pulse réalisable $h_0(t)$. En effet, comme

$$H_0(\nu) = 2T \cos(\pi\nu T) e^{-j2\pi\nu T} \Pi\left(\frac{\nu}{2B}\right), \quad T = \frac{1}{2B}$$

le pulse $h_0(t)$ est à largeur de bande $2B$ et il ne présente pas de pente infinie. Le procédé décrit ci-dessus est un cas particulier d'une méthode générale qui consiste à remplacer dans la définition du signal $x(t)$ faisant intervenir $h(t)$ les x_n par une fonction de $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$ (en général on prend une fonction linéaire).

3.2.2 Modulation de fréquence (FM)

La modulation de fréquence est une transformation non linéaire du signal modulant dans laquelle le signal modulé est donné par :

$$x(t) = A \cos \left(2\pi \int_0^t f[m(\theta)] d\theta \right). \quad (3.22)$$

C'est la dérivée de l'argument de $x(t)$ qui est fonction du signal modulant. En général, on a le modèle de modulation de fréquence suivant :

$$x(t) = A \cos \left(2\pi \int_0^t [f_0 + \beta m(\tau)] d\tau \right) \quad (3.23)$$

où le nombre β est appelée excursion maximale de fréquence.

Exemple 3.2.2 Spectre d'un signal modulé en fréquence

Considérons le signal modulé en fréquence :

$$x(t) = A \cos \left[2\pi \left(f_0 t + \beta \int_0^t m(\tau) d\tau \right) \right] \quad (3.24)$$

où le signal $m(t)$ est supposé vérifier $|m(t)| \leq 1$. On va calculer le spectre de $x(t)$ dans le cas $m(t) = \cos(2\pi F t)$, avec $F \ll f_0$. Le signal défini par (3.24) s'écrit sous la forme :

$$x(t) = A \cos [2\pi f_0 t + \mu \sin (2\pi F t)] \quad (3.25)$$

où $\mu = \beta/F$ est appelé indice de modulation. Pour établir l'expression du spectre, on admet le développement suivant :

$$\exp[j\mu \sin(2\pi Ft)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\mu) e^{j2\pi nFt}$$

où $J_n(\mu)$ est une fonction à valeurs réelles qui possède la propriété suivante : $J_{-n}(\mu) = (-1)^n J_n(\mu)$. On obtient alors le développement suivant de $x(t)$ en série d'exponentielles :

$$x(t) = \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\mu) [e^{j2\pi(f_0+nF)t} + (-1)^n e^{-j2\pi(f_0-nF)t}].$$

Le spectre du signal $x(t)$ est alors donné par :

$$X(\nu) = \frac{A}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\mu) [\delta(\nu - f_0 - nF) + (-1)^n \delta(\nu + f_0 - nF)].$$

Les fonctions $J_n(\mu)$ ont des propriétés particulières qui permettent de montrer que l'on peut approximer la largeur de bande utile du signal $x(t)$ par $B = 2(\mu + 1)F \approx 2\beta$ et que cette largeur est en général supérieure à celle de la modulation d'amplitude.

3.2.3 Comparaison des modulations AM et FM

Dans la modulation d'amplitude, l'information est portée par la valeur instantanée de « l'amplitude » du signal modulé qui dépend fortement des conditions de propagation. Pour lutter contre les bruits parasites, on ne peut qu'augmenter la puissance du signal et ceci limite les possibilités de transmission à l'aide de ce type de modulation. L'examen du spectre, montre qu'une large part de la puissance est concentrée sur la porteuse ; or celle-ci ne véhicule pas d'information. La modulation d'amplitude se propage mal à longue distance mais elle a l'avantage d'avoir une bande de fréquence étroite. Dans la modulation de fréquence, l'information est portée par la valeur instantanée de la fréquence du signal modulé. Elle n'est donc pas très altérée par les variations d'amplitude de la porteuse. La modulation de fréquence a cependant le grand inconvénient de conduire à un encombrement spectral important puisque le signal modulé a une grande largeur de bande et il a plus de risques d'être masqué par d'autres signaux.

Exemple 3.2.3 Modulations d'une impulsion radar

Considérons le cas où l'impulsion émise par un radar $v(t)e^{j\omega_0 t}$ est un signal modulé en amplitude et non en fréquence. La fonction $u(t)$ est souvent modélisée par une

gaussienne approximant une impulsion brève. Afin d'obtenir une bonne résolution en distance, cette impulsion doit être aussi brève que possible. De plus, la précision des mesures est inversement proportionnelle à l'énergie du signal émis. Pour satisfaire à ces deux conditions, on doit émettre des puissances élevées (beaucoup d'énergie pendant la courte durée de l'impulsion). On se heurte alors à de diverses limitations technologiques et un moyen qui permet de pallier à cette difficulté consiste à utiliser une modulation en fréquence de l'impulsion. Le cas le plus simple et qui est fréquemment utilisé dans la pratique est celui d'une impulsion à modulation linéaire en fréquence.

Exemple 3.2.4 Récupération d'un signal modulant

Un amplificateur radio-fréquence délivre un signal modulé en amplitude de la forme $x(t) = A[1 + m(t)] \cos(2\pi\nu_0 t)$. La fréquence ν_0 de la porteuse appartient à la bande [0.5 MHz, 1,7 MHz]. Le signal modulant $m(t)$ est à bande limitée [50 Hz, 5 kHz] et vérifie $|m(t)| \leq 1$ (caractéristiques de la radiophonie en « grandes ondes »). Le spectre du signal $x(t)$ est donné par :

$$X(\nu) = \frac{A}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0) + M(\nu - \nu_0) + M(\nu + \nu_0)].$$

Dans le cas particulier où $m(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi\nu_s t)$, on a

$$M(\nu) = \frac{1}{4} [\delta(\nu - \nu_s) + \delta(\nu + \nu_s)].$$

La puissance totale est $P_x = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{16}$ et la puissance qui correspond à l'information utile transportée par $x(t)$ et contenue dans $m(t)$ est $P_u = \frac{A^2}{16}$.

L'oscillateur local délivre un signal sinusoïdal de la forme $p(t) = B \cos 2\pi(\nu_0 + \nu_1)t$, où ν_1 est une fréquence fixe dite « fréquence intermédiaire », et choisie égale à $\nu_1 = 455$ kHz. Au signal $p(t)$, on associe $q(t) = x(t)p(t)$ et l'on fait passer ce dernier dans un amplificateur à fréquence intermédiaire considéré comme filtre passe-bande idéal dont la bande passante est centrée en ν_1 et de largeur 10 kHz. L'expression du signal de sortie $y(t)$ est donné par :

$$y(t) = \frac{BA}{2} [1 + m(t)] [\cos 2\pi\nu_1 t + \cos 2\pi(\nu_1 + 2\nu_0)t].$$

En général, on a $\nu_1 + 2\nu_0 \gg \nu_1$. Donc un filtrage passe-bas idéal, centré en ν_1 permet de ne conserver que la composante $\frac{BA}{2} [1 + m(t)] \cos 2\pi\nu_1 t$.

EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS

3.1 Formule sommatoire de Poisson

On désigne par

$$P_T(t) \triangleq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

le peigne de Dirac de période T et on rappelle que la T.F d'un peigne de Dirac est aussi un peigne de Dirac, i.e.,

$$\mathcal{F}[P_T(t)] = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \frac{n}{T}).$$

On pose

$$y(t) \triangleq P_T(t) * x(t) \tag{3.26}$$

1. En développant la convolution, exprimer $y(t)$ en fonction des signaux $x(t - nT)$.
2. Utilisant la conservation du peigne de Dirac par la T.F, exprimer la T.F de y en fonction des échantillons $X(n/T)$.
3. En déduire une autre expression de $y(t)$ en fonction des échantillons $X(n/T)$.
4. En déduire la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\frac{n}{T}) e^{j2\pi n \frac{t}{T}}. \tag{3.27}$$

5. On suppose que x est à BL $[-B, B]$, avec $2B = 1/T$. Montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT) = \text{constante}. \tag{3.28}$$

3.2 Formule d'échantillonnage

Soit $s(t)$ le signal dont la T.F est $S(\nu) = \Pi(\frac{\nu}{2B})$ et

$$s_n(t) \triangleq s(t - t_n) \quad n \in \mathbb{Z}, \quad s_0(t) \triangleq s(t).$$

1. Déterminer le signal $s(t)$ et calculer l'énergie E de ce signal.
2. Déterminer toutes les valeurs t_n de t pour lesquelles les signaux s_n sont orthogonaux à $s(t)$.
3. Montrer que les $s_n(t)$ sont alors orthogonaux deux à deux.
4. Déterminer la projection orthogonale $\hat{x}(t)$ d'un signal $x(t)$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{E}_N$ engendré par $s_n(t)$, $-N \leq n \leq +N$.
5. On suppose que $x(t)$ est à bande limitée $[-B, +B]$. Expliciter $\hat{x}(t)$ en fonction des valeurs échantillonnées de $x(t)$.
6. On prend $N = \infty$. Comparer les T.F de $\hat{x}(t)$ et $x(t)$ toujours dans le cas où $x(t)$ est à bande limitée $[-B, +B]$. Donner la formule qui permet d'exprimer un signal $x(t)$ à BL $[-B, +B]$ en fonction des échantillons $x(n/2B)$, $n \in \mathbb{Z}$.
7. On fait passer le signal $x(t)$ dans un filtre linéaire de réponse impulsionnelle (RI) $h(t)$. Montrer que la sortie $y(t)$ de ce filtre est aussi à BL $[-B, B]$.
8. Montrer que le signal échantillonné $y_n \triangleq y(n/2B)$ se déduit du signal $x_n \triangleq x[n/2B]$ par un filtrage linéaire à temps discret dont on calculera la RI g_k à l'aide de $h(t)$. Donner la fonction g telle que $g_k \triangleq g(n/2B)$.
9. Que devient la fonction $g(t)$ dans le cas particulier où $h(t)$ est aussi à BL $[-B, +B]$?
10. On suppose que le filtre $h(t)$ est un dérivateur, c'est-à-dire que sa sortie $y(t)$ est la dérivée par rapport au temps de $x(t)$. Calculer dans ce cas la fonction $g(t)$.
11. En déduire l'expression de la dérivée d'un signal $x(t)$ à BL $[-B, +B]$ en fonction de ses échantillons x_n .

3.3 Fréquence d'échantillonnage

Soit e_k un signal réel dont la fonction de corrélation vérifie $\gamma_e(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$ où $\delta(\tau)$ désigne la distribution de Dirac. On considère le filtre à temps continu défini par

$$s(t) = \int_{-T/2}^{T/2} e(t - \theta) d\theta.$$

1. Écrire $s(t)$ sous forme d'une convolution en faisant intervenir une fonction porte et en déduire la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre ainsi défini.

2. On désigne par $G(\nu)$ la T.F de $h(t)$. Calculer la densité spectrale $\Gamma_s(\nu)$ du signal $s(t)$ et tracer son graphe.
3. Calculer l'énergie du signal $s(t)$.
4. On fait passer le signal $s(t)$ dans un filtre linéaire de réponse en fréquences $H(\nu) = \frac{\nu}{2B}$ et on désigne par $x(t)$ la sortie de ce filtre. On échantillonne $x(t)$ à une fréquence f_e . Donner une borne inférieure de f_e qui permet la reconstruction de $s(t)$ sans erreur.
5. On fait passer le signal à temps discret, $x_n = x(nT_e), n \in \mathbb{Z}$ dans un filtre linéaire dont la sortie est définie par

$$y_n = ay_{n-1} + x_n.$$

Calculer la densité spectrale de y_n ainsi que la puissance $E(y_n^2)$ en fonction de $\Gamma_x(\nu)$.

3.4 Fréquence d'échantillonnage d'un signal analytique

Dans un récepteur de radio communication le signal utile est superposé à une fréquence dite porteuse choisie en fonction de différents critères. On se propose de voir comment, dans ces conditions et en l'absence de bruit pour simplifier l'exercice, extraire un signal échantillonné et numérisé représentatif de la DSP du signal utile.

1. On considère deux signaux : $p(t) = e^{-a^2 t^2}$ et $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$. Sachant que :

$$\mathcal{F}[e^{-a^2 t^2}] = k e^{-\frac{\nu^2}{4a^2}} \quad \text{avec} \quad k = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}$$

quel est le spectre de $s(t) = x(t)p(t)$?

2. On considère un signal analytique $y(t)$ dont la DSP est inconnue mais contenue dans une gaussienne centrée sur la fréquence f_0 et d'écart-type σ . C'est le signal entrant dans le récepteur. Quelle fréquence d'échantillonnage F_e faut-il choisir pour que la bande passante $B_p = [f_0 - a, f_0 + a]$ soit correctement restituée ? Introduit-on alors un signal parasite dans la bande B_p ?
3. Si on multiplie $y(t)$ avant échantillonnage par $\exp[-j2\pi f_0 t]$ pour obtenir un signal $z(t)$, quelle conséquence cela a-t-il sur F_e ? Introduit-on alors un signal parasite dans la bande B_p ?
4. On suppose $F_e = f_0/N < f_0$. Quelle condition doit respecter F_e par rapport à a ? Quel choix de F_e proposez-vous pour avoir des codeurs les plus simples possibles ? Comment isoler l'information cherchée en utilisant un filtrage ?
5. A-t-on perdu théoriquement de l'information entre ces trois façons d'échantillonner le signal ?

6. Applications : $f_0 = 500$ Mhz , $a = 5$ Mhz , on veut de plus numériser le signal sur 12 bits, quelle méthode choisir parmi les trois ?

3.5 Transmission d'une impulsion rectangulaire

On considère un canal de transmission équivalent à un filtre passe bas idéal avec une fréquence de coupure B . On transmet une impulsion $x(t) = \Pi(\frac{t}{T})$.

1. Calculer la densité spectrale d'énergie de $x(t)$ et le dessiner sur le même repère que la réponse en fréquence du canal lorsque $1/T \ll B$.
2. Donner l'expression du signal de sortie $s(t)$ (sous forme d'intégrale) et tracer son graphe pour $1/T \ll B$ et pour $1/T = B$.
3. On veut transmettre 2 impulsions successives. Quelle condition doit-on vérifier pour éviter les recouvrements (importants) en sortie du canal ?

3.6 Modulation d'un signal

1. On considère le signal à temps continu, périodique de période T_0 , défini par $p(t) = p(t + T_0)$ et $p(t) = \Pi(\frac{t}{T})$ avec $T < T_0$. Calculer la transformée de Fourier $P(\nu)$ de $p(t)$ et déterminer le spectre de puissance de $p(t)$.
2. On considère un second signal $m(t)$ à temps continu, d'énergie finie, et à bande limitée $[-B, +B]$. Calculer la T.F $X(\nu)$ du signal modulé $x(t) = m(t) p(t)$.
3. Quelle condition doit vérifier B pour que le spectre de $x(t)$ soit constitué d'une succession de motifs élémentaires à supports fréquentiels limités et disjoints ? On supposera cette condition vérifiée dans la suite.
4. Montrer que le passage de $x(t)$ dans un filtre passe-bas idéal permet de retrouver $m(t)$ en sortie (démodulation). Ce même principe de démodulation peut-il être appliqué au signal modulé $y(t) = m(t) \cos(2\pi t/T_0)$? Le fait que les impulsions constituant $p(t)$ soient rectangulaires joue-t-il un rôle dans ce cas ?

3.7 Signal modulé et signal analytique

Soit le signal modulé suivant :

$$x(t) = m(t) \cos(2\pi\nu_0 t + \phi)$$

dont l'amplitude $m(t)$ est un signal réel à bande limitée dans l'intervalle $[-B, +B]$, avec $B < \nu_0$.

1. Calculer la T.F de $x(t)$. On désignera par $M(\nu)$ la T.F de $m(t)$.

2. En déduire l'expression du signal analytique de $x(t)$ que l'on notera $z(t)$.
3. Calculer les parties réelle et imaginaire de $z(t)$. Comment sont-elles liées ?
4. On pose : $z(t) = a(t)\exp[j\Phi(t)]$, $0 \leq \Phi(t) \leq 2\pi$. Calculer l'amplitude instantanée $a(t)$ et la phase instantanée $\Phi(t)$. En déduire l'expression de la fréquence instantanée :

$$\nu_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

3.8 Filtrage d'un bruit blanc

Soit e_k un signal réel dont la fonction de corrélation vérifie $\gamma_e(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$ où $\delta(\tau)$ désigne la distribution de Dirac. On considère le filtre à temps continu défini par

$$s(t) = \int_{-T/2}^{T/2} e(t - \theta) d\theta.$$

1. Écrire $s(t)$ sous forme d'une convolution en faisant intervenir une fonction porte et en déduire la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre ainsi défini.
2. On désigne par $G(\nu)$ la T.F de $h(t)$. Calculer la densité spectrale $\Gamma_s(\nu)$ du signal $s(t)$ et tracer son graphe.
3. Calculer l'énergie du signal $s(t)$.
4. On fait passer le signal $s(t)$ dans un filtre linéaire de réponse en fréquences $H(\nu) = \frac{\nu}{2B}$ et on désigne par $x(t)$ la sortie de ce filtre. On échantillonne $x(t)$ à une fréquence f_e . Donner une borne inférieure de f_e qui permet la reconstruction de $s(t)$ sans erreur.
5. On fait passer le signal à temps discret, $x_n = x(nT_e)$, $n \in \mathbb{Z}$ dans un filtre linéaire dont la sortie est définie par

$$y_n = ay_{n-1} + x_n$$

Calculer la densité spectrale de y_n .

3.9 Causalité et stabilité d'un filtre

On considère le filtre à temps discret F de réponse impulsionnelle

$$h_k = (1/2)^k \quad \text{pour } 0 \leq k \leq \infty \quad \text{et} \quad h_k = 0 \quad \text{ailleurs}$$

On appelle e_k l'entrée de F et y_k la sortie associée.

1. Que peut-on dire de la causalité et de la stabilité du filtre ainsi défini ?
2. Calculer la fonction de transfert du filtre F .
3. On fait passer le signal y_n dans un filtre $F1$ causal de fonction de transfert $H_1(z) = 1/(1 - \alpha z)$ et on désigne par s_k la sortie de $F1$. Donner la relation qui existe entre les transformées en Z : $E(z)$ et $S(z)$ des signaux (e_k) et (s_k) .
4. Déterminer la réponse impulsionnelle du filtre stable qui associe à e_k le signal s_k .

SOLUTIONS

3.1 1.

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT)$$

2.

$$Y(\nu) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\nu}{T}\right) \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)$$

3. Par transformée de Fourier inverse, on obtient :

$$y(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\nu}{T}\right) e^{j2\pi\nu\frac{n}{T}}$$

4. La comparaison des deux expressions de $y(t)$ conduit à la formule (3.27).
5. Si x est à BL $[-B, B]$, on a $X(\frac{n}{T}) = 0$ pour $n \neq 0$ et ceci donne la formule (3.28).

3.2 1. Ce signal est un sinus cardinal. Soit $s(t) = 2B \operatorname{sinc}(2Bt)$. L'énergie E de ce signal est égale à l'intégrale de $|S(\nu)|^2$. On obtient $E = 4B^2$.

2. On a :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t-u)s(t-v)^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\nu)|^2 e^{j2\pi\nu(v-u)} d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) e^{j2\pi\nu(v-u)} d\nu = s(v-u) = 2B \operatorname{sinc}(2B(v-u)). \end{aligned}$$

Donc ce produit scalaire est nul si, et seulement si, $v-u$ est un entier relatif non nul. Les signaux cherchés sont donc les signaux $s(t - t_n)$, $n \in \mathbb{Z}$ avec $t_n = n/(2B)$.

3. Par construction, les signaux $s_n(t)$ sont orthogonaux deux à deux et on a $\|s_n\|^2 = E$.

4. On a

$$\widehat{x(t)} = \sum_{-N}^N \alpha_n s_n(t)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{2B} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) s_n(t)^* dt = \frac{1}{2B} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) S(\nu)^* e^{j2\pi\nu t_n} d\nu \\ &= \frac{1}{2B} \int_{-B}^B X(\nu) e^{j2\pi\nu t_n} d\nu. \end{aligned}$$

5. Si $x(t)$ est à bande limitée $[-B, +B]$, on peut remplacer les bornes $\pm B$ de l'intégrale par $\pm\infty$. On obtient

$$\alpha_n = \frac{1}{2B} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) e^{j2\pi\nu t_n} d\nu = x(t_n).$$

On a donc

$$\widehat{x(t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(t_n) s_n(t).$$

$$\mathcal{F}(\widehat{x(t)}) = S(\nu) \sum_{-\infty}^{\infty} x(t_n) e^{-j2\pi\nu t_n}.$$

6. Les T.F de $\widehat{x(t)}$ et $x(t)$ sont égales et on peut donc déduire que $\widehat{x(t)} = x(t)$. Finalement

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n/2B) s_n(t)$$

qui est la formule d'échantillonnage.

7. Ce résultat se déduit de la relation de filtrage $Y(\nu) = H(\nu)X(\nu)$.

8. Les signaux $x(t)$ et $y(t)$ se décomposent en utilisant la formule d'échantillonnage. Remplaçant dans

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) x(t - \theta) d\theta$$

$x(t)$ par sa décomposition :

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_n \operatorname{sinc}(2Bt - n)$$

on obtient

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_n \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) \operatorname{sinc}[2B(t - \theta) - n] d\theta.$$

D'où

$$y_k \triangleq y\left(\frac{k}{2B}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_n g_{n-k}$$

avec

$$g_k \triangleq g\left(\frac{k}{2B}\right) \text{ avec } g(t) = h(t) * \operatorname{sinc}(2Bt).$$

9. Si $h(t)$ est aussi à BL $[-B, +B]$, la conservation du produit scalaire donne :

$$g_k = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu) S(\nu)^* e^{j2\pi\nu t_k} d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu) e^{j2\pi\nu t_k} d\nu = h(t_k).$$

10. Le calcul direct de la fonction $g(t)$ conduit à (utiliser $g(t) = T \cdot F^{-1}(G(\nu))$) :

$$g(t) = \frac{\cos(2\pi Bt)}{t} - \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt^2}$$

et par suite, $g_k = (-1)^n \frac{2B}{n}$. Comme la relation $x(t)' = h(t) * x(t)$ est vraie pour $\operatorname{sinc}(2Bt)$, alors $g(t)$ est égale à la dérivée de $\operatorname{sinc}(2Bt)$. Ceci donne une autre méthode pour calculer $g(t)$.

11. L'expression de la dérivée d'un signal $x(t)$ à BL $[-B, +B]$ en fonction de ses échantillons x_n est donc :

$$x_k' = 2B \sum_{-\infty}^{+\infty} x_n \frac{(-1)^{k-n}}{k-n}.$$

3.3 1. L'intégrale est égale au produit de convolution de la fonction porte de support T par $e(t)$. Soit

$$s(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) * e(t)$$

et donc la réponse impulsionnelle est $h(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$.

2. La T.F de $h(t)$ donne le gain complexe du filtre : $G(\nu) = T \operatorname{sinc}(\pi T \nu)$. D'après la formule des interférences, la densité spectrale est donnée par :

$$\Gamma_s(\nu) = T^2 \operatorname{sinc}(\pi T \nu)^2 \sigma^2.$$

On obtient le graphe classique de la fonction sinc élevée au carré.

3. L'énergie du signal $s(t)$ est donnée par

$$E_s = \gamma_s(0) = \int \Gamma_s(\nu) d\nu = T \sigma^2.$$

4. On applique la formule des interférences et on obtient :

$$\Gamma_x(\nu) = |H(\nu)|^2 \Gamma_s(\nu).$$

Le signal $x(t)$ est donc à bande limitée $[-B, B]$ et le théorème d'échantillonnage donne comme borne inférieure pour f_e le nombre $2B$.

5. Prenant les transformées en Z des deux membres, on obtient $Y(z) = az^{-1}Y(z) + X(z)$. Soit

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

La densité spectrale de y_n a donc pour expression

$$\Gamma_y(\nu) = \frac{1}{|1 - ae^{-j2\pi\nu}|^2} \Gamma_x(\nu).$$

La puissance est donnée par $E(y_n^2) = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_y(\nu) d\nu$.

3.4 1. La T.F de $s(t)$ est donnée par :

$$S(\nu) = X(\nu) * P(\nu) = k\delta(\nu - f_0) * e^{-\frac{\nu^2}{4a^2}} = ke^{-\frac{(\nu-f_0)^2}{4a^2}}$$

2. La T.F du signal analytique $y(t)$ est de la forme :

$$Y(\nu) = \beta U(\nu) e^{-\frac{(\nu-f_0)^2}{4a^2}}$$

Le signal échantillonné associé à $y(t)$ est :

$$y_{F_e}(t) = \sum y(kT_e)\delta(t - kT_e) = y(t) \sum \delta(t - kT_e).$$

Sa T.F est

$$Y_{F_e}(\nu) = Y(\nu) * \frac{1}{T_e} \sum \delta(\nu - \frac{k}{T_e}) = \frac{1}{T_e} \sum Y(\nu - \frac{k}{T_e}).$$

La fréquence d'échantillonnage F_e qu'il faut choisir pour que la bande passante $B_p = [f_0 - a, f_0 + a]$ soit correctement restituée vérifie $2a + 2f_0 < F_e$. Comme le spectre du signal ne contient pas de fréquences négatives, il suffit de choisir une fréquence vérifiant $a + f_0 < F_e$. Ce choix n'introduit aucun signal parasite dans la bande B_p .

3. On a $Z(\nu) = Y(\nu + f_0)$. La DSP du signal $z(t)$ est toujours contenue dans la gaussienne centrée cette fois-ci à l'origine et d'écart type inchangé a . Pour restituer la bande $[-a, a]$, il suffit maintenant de choisir $2a < F_e$. On introduit alors un signal parasite dans la bande Bp qui est du au repliement du spectre.

4. Il faut que $F_e > 2a$. Pour avoir des codeurs les plus simples possibles, il faut que F_e soit le plus petit possible. Comme $F_e = f_0/N$, on obtient $N < \frac{f_0}{2a}$. La valeur maximum de N est égale à la partie entière de $\frac{f_0}{2a}$ soit $E(\frac{f_0}{2a})$. La fréquence F_e minimale est alors

$$F_e = \frac{f_0}{E(\frac{f_0}{2a})}.$$

Pour isoler l'information cherchée, on doit utiliser un filtre passe-bas de fréquence de coupure $F_c = a$.

5. Théoriquement, il y a une perte d'information due au repliement de spectre dans les deux dernières méthodes et des pertes dues aux filtrage.

6. La première méthode n'est pas envisageable car on obtient $F_e > 105$ MHz. La seconde méthode donne $F_e > 10$ MHz. Dans la troisième méthode, comme $E(\frac{f_0}{2a}) = 50$, on obtient $F_e > 10$ MHz. On a donc intérêt à choisir la troisième méthode pour sa simplicité puisqu'elle ne nécessite pas la multiplication du signal avant échantillonnage comme c'est le cas pour la seconde méthode. Dans le cas où $\frac{f_0}{2a}$ n'est pas entier, on a plutôt intérêt à choisir la seconde méthode car elle conduit à une fréquence F_e inférieure à celle obtenue dans la troisième méthode.

3.5 1. La densité est donnée par :

$$\Gamma_x(\nu) = T^2 \text{sinc}(\pi T \nu)^2.$$

2. La réponse impulsionnelle du canal est un sinus cardinal $h(t) = A \text{sinc}(2\pi B t)$. Le signal $s(t)$ est égal au produit de convolution de $x(t)$ par $h(t)$. Soit :

$$s(t) = \int \text{sinc}(2\pi B u) \Pi\left(\frac{t-u}{T}\right) du.$$

Tenant compte des hypothèses, l'intégrale qui est une fonction symétrique peut être approximée par une constante pour $|t| \leq T/2 - 1/(2B)$, par 0 pour $|t| > T/2 + 1/(2B)$ et pour $T/2 - 1/(2B) < t < T/2 + 1/(2B)$ elle est égale à une fonction décroissante. Pour $1/T = B$, on obtient un signal semblable au lobe principal de $h(t)$ mais sur un support double. Soit un signal $s(t)$ de support $[-1/B, 1/B]$. D'où une approximation du graphe de $s(t)$.

3. Soit T_e la période des impulsions. Pour $1/T \ll B$, on doit choisir $T_e \geq T + 1/B$. Pour $1/T = B$, on doit choisir $T_e \geq 2/B$.

3.6 1. Par définition, on doit développer $p(t)$ en série de Fourier, soit :

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{j2\pi t \frac{n}{T_0}}$$

puis prendre la T.F de ce développement, soit :

$$P(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\nu - \frac{n}{T_0})$$

où les P_n sont les coefficients de Fourier donnés par

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} p(t) e^{-j2\pi t \frac{n}{T_0}} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi t \frac{n}{T_0}} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \frac{e^{j\pi T \frac{n}{T_0}} - e^{-j\pi T \frac{n}{T_0}}}{j2\pi \frac{n}{T_0}} = \frac{\sin(n\pi \frac{T}{T_0})}{n\pi}. \end{aligned}$$

2. On a :

$$X(\nu) = M(\nu) * P(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n M(\nu - \frac{n}{T_0})$$

3. C'est un signal de période $1/T_0$. On doit donc avoir $1/T_0 > 2B$ pour que les motifs ne se chevauchent pas.

4. Il suffit de faire passer le signal dans un filtre passe-bas idéal de largeur de bande $[-B, B]$ pour isoler et donc retrouver $m(t)$. On a :

$$Y(\nu) = \frac{M(\nu)}{2} * (\delta(\nu - \frac{n}{T_0}) + \delta(\nu + \frac{n}{T_0})) = \frac{1}{2} [M(\nu - \frac{n}{T_0}) + M(\nu + \frac{n}{T_0})].$$

Le fait que les impulsions constituant $p(t)$ soient rectangulaires ne joue aucun rôle.

3.7 1. On a :

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \frac{1}{2} M(\nu) * [e^{j\phi} \delta(\nu - \nu_0) + e^{-j\phi} \delta(\nu + \nu_0)] \\ &= \frac{1}{2} e^{j\phi} M(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2} e^{-j\phi} M(\nu + \nu_0). \end{aligned}$$

2. Le signal analytique de $x(t)$ a pour T.F $Z(\nu) = e^{j\phi} M(\nu - \nu_0)$. Donc on a :

$$z(t) = m(t) e^{j(2\pi\nu_0 t + \phi)}.$$

3. Les parties réelle et imaginaire de $z(t)$ sont des transformées de Hilbert l'une de l'autre.

4. On a :

$$x(t) = a(t)e^{j\phi(t)} = m(t)e^{j(2\pi\nu_0 t + \phi)}.$$

L'amplitude instantanée est $a(t) = m(t)$ si $m(t) > 0$ et $a(t) = -m(t)$ si $m(t) < 0$. La phase est une fonction linéaire périodique. La fréquence instantanée est égale à $\nu_i(t) = \nu_0$.

3.8 1. L'intégrale est égale au produit de convolution de la fonction porte de support T par $e(t)$. Soit

$$s(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) * e(t)$$

et donc la réponse impulsionnelle est $h(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$.

2. La T.F de $h(t)$ donne le gain complexe du filtre : $G(\nu) = T \operatorname{sinc}(\pi T \nu)$. D'après la formule des interférences, la densité spectrale est donnée par :

$$\Gamma_s(\nu) = T^2 \operatorname{sinc}(\pi T \nu)^2 \sigma^2.$$

dont le graphe est bien connu.

3. L'énergie du signal $s(t)$ est donnée par

$$E_s = \gamma_s(0) = \int \Gamma_s(\nu) d\nu = T \sigma^2.$$

4. On applique la formule des interférences et on obtient :

$$\Gamma_x(\nu) = |H(\nu)|^2 \Gamma_s(\nu).$$

Le signal $x(t)$ est donc à bande limitée $[-B, B]$ et le théorème d'échantillonnage donne comme borne inférieure pour f_e le nombre $2B$.

5. Prenant les transformées en Z des deux membres, on obtient $Y(z) = az^{-1}Y(z) + X(z)$. Soit

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

La densité spectrale de y_n a donc pour expression

$$\Gamma_y(\nu) = \frac{1}{|1 - ae^{-j2\pi\nu}|^2} \Gamma_x(\nu).$$

3.9 1. Comme $h_k = 0$ pour $k < 0$, le filtre est causal. Comme $\sum_{k=0}^{\infty} |h_k| < \infty$, le filtre est stable.

2. La fonction de transfert est égale à la T.Z de la réponse impulsionnelle.

D'où :

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^{-1} = \frac{1}{1 - (2z)^{-1}}.$$

3. On a :

$$S(z) = H(z)H_1(z)E(z) = \frac{1}{1 - (2z)^{-1}} \frac{1}{1 - \alpha z} E(z).$$

4. La fonction de transfert, $H_2(z)$, du filtre qui associe $s(t)$ à $e(t)$ admet $1/2$ et $1/\alpha$ comme pôles. Cette fonction définit un seul filtre causal stable si, et seulement si, $|\alpha| > 1$. Pour obtenir la réponse impulsionnelle de ce filtre, on développe $H_2(z)$ en série dans le domaine défini par : $|z| > \sup(\frac{1}{2}; \frac{1}{|\alpha|})$. On commence par décomposer $H(z)$ en éléments simples sous la forme :

$$H(z) = \frac{2}{2 - \alpha} \left[\frac{1}{1 - (2z)^{-1}} - \frac{1}{1 - (\alpha z) - 1} \right].$$

Le développement en série de chacun des deux termes donne

$$H(z) = \frac{2}{2 - \alpha} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (2z)^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha z)^{-k} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k z^{-k}.$$

Par identification, on obtient la réponse impulsionnelle h_k .

Chapitre 4

Bases probabilistes pour la représentation d'un signal aléatoire

4.1 VARIABLE ALÉATOIRE

4.1.1 Espace probabilisé et loi de probabilité

a) Espace probabilisable

Une expérience aléatoire est une expérience pouvant conduire à plusieurs résultats possibles et dont le résultat ne peut être prévu avec certitude. Cela signifie que si l'on répète plusieurs fois la même expérience, on obtient à chaque fois un résultat bien défini mais qui n'est pas toujours le même. L'ensemble des résultats possibles sera noté Ω .

Exemple 4.1.1 Le lancer d'un dé cubique ne pouvant rester en équilibre sur aucune de ses arêtes et dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est une expérience aléatoire. Les résultats possibles de cette expérience sont les six chiffres 1, 2,..., 6.

D'une manière générale toute expérience physique est aléatoire. En effet, même les expériences pour lesquelles on peut appliquer le principe classique suivant : la même cause produit toujours le même effet sont aléatoires dans le sens où la mesure de l'effet peut introduire des incertitudes. Chaque résultat possible d'une expérience

aléatoire est appelé événement aléatoire élémentaire. L'ensemble de tous ces événements est appelé ensemble fondamental et il est souvent désigné par Ω . Toute partie de Ω est appelé événement aléatoire. L'ensemble de tous les événements liés à une expérience aléatoires est donc confondu avec l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω .

Un événement lié au lancer d'un dé cubique est par exemple $A = \{1, 3, 5\}$.

Avant de procéder à une expérience aléatoire, on peut être intéressé par un événement donné A et vouloir faire une prévision sur la chance que cet événement a de se réaliser. On peut dire *a priori* que $A = \{1, 3, 5\}$ a une chance sur deux de se réaliser si la symétrie du dé est parfaite.

L'événement Ω qui par définition a toutes les chances de se réaliser est appelé événement certain et l'événement Φ , ensemble vide, qui n'a aucune chance de se réaliser est appelé événement impossible.

L'événement certain $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ correspond à l'affirmation « l'expérience va conduire à l'un des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 ».

L'événement impossible Φ correspond à l'affirmation « l'expérience ne conduit à aucun des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 ».

Soit une expérience aléatoire conduisant à un nombre fini n de résultats possibles, par exemple, pour un lancer de dé on a $n = 6$. Dans ce cas le nombre d'événements possibles est donné par

$$\text{Card}\{\mathcal{P}(\Omega)\} = 2^{\text{Card}(\Omega)} = 2^n$$

où l'on désigne par $\text{Card}(\Omega)$ le cardinal de Ω . À la suite d'une telle expérience, on est amené naturellement à s'intéresser à la réalisation d'un événement A ou à sa non réalisation, à la réalisation simultanée de deux ou plusieurs événements, à la réalisation d'au moins un événement faisant partie d'un sous-ensemble de deux ou plusieurs autres événements, etc... On introduit ainsi sur l'ensemble des événements $\mathcal{P}(\Omega)$ les trois opérations classiques suivantes.

1. La réunion pour indiquer la réalisation de A ou B : $A \cup B$.
2. L'intersection pour indiquer la réalisation simultanée de A et B : $A \cap B$.
3. La complémentation par rapport à Ω pour indiquer la non réalisation de A : C^A_Ω .

Considérons l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ muni des opérations intersection, complémentation et réunion. Les différents sous-ensembles de $\mathcal{P}(\Omega)$ ne présentent pas tous le même intérêt pour l'expérimentateur qui est amené à considérer des parties T de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui sont plus ou moins grandes. Donnons quelques exemples de sous-ensembles de $\mathcal{P}(\Omega)$.

1. Le joueur est intéressé par chacun des numéros et par toute réunion de ces numéros. Il doit donc considérer le sous-ensemble T de $\mathcal{P}(\Omega)$ le plus grand possible, i.e.

$$T = \mathcal{P}(\Omega).$$

2. Le joueur est intéressé uniquement par la parité du numéro de la face du dé. Dans ce cas, il peut résoudre son problème en considérant le sous-ensemble

$$T = \{\Phi, \Omega, (1,3,5), (2,4,6)\} \subset \mathcal{P}(\Omega).$$

3. Le joueur est intéressé par miser sur un ensemble de numéros parmi lesquels au moins un est gagnant ou ne pas engager de mise. Le plus petit sous-ensemble qu'il doit considérer pour résoudre son problème est :

$$T = \{\Omega, \Phi\} \subset \mathcal{P}(\Omega).$$

Soit un ensemble Ω fini et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω . On appelle tribu de Ω (ou σ -algèbre) toute famille T de $\mathcal{P}(\Omega)$ contenant Ω et stable pour la réunion et la complémentation par rapport à Ω . Le couple (Ω, T) est appelé espace probabilisable. Les trois ensembles définis ci-dessus sont des tribus de Ω .

b) Espace probabilisé fini

Avant de procéder à une expérience aléatoire, intéressons-nous à une réalisation particulière dénommée ω_i et appelée événement élémentaire ou singleton. On peut vouloir faire une estimation de la chance que cet événement a de se réaliser. Pour obtenir une telle estimation on procède comme suit. On répète N fois l'expérience dans les mêmes conditions et on associe à ω_i le nombre

$$p_i = \frac{n_i}{N}, \quad 0 \leq p_i \leq 1$$

où n_i représente le nombre de fois où ω_i s'est réalisé. On fait tendre N vers l'infini et le nombre p_∞ ainsi obtenu est appelé probabilité de ω_i . On définit ainsi une application P de Ω dans $[0,1]$ par :

$$P(\omega_i) = p_\infty^i, \quad i = 1, \dots, \text{Card}(\Omega) \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{\text{Card}(\Omega)} P(\omega_i) = 1.$$

Si le nombre $P(\omega_i)$ associé à chacun des singletons ω_i est indépendant de ce dernier, l'application P est constante et définit sur Ω une probabilité uniforme. Dans cette hypothèse d'équiprobabilité, on peut étendre la définition de P à l'ensemble Ω lui-même de la manière suivante :

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

Soit (Ω, T) un espace probabilisable fini et P l'application qui associe à chaque ω_i le nombre

$$P(\omega_i) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}.$$

L'application P se prolonge d'une manière unique et définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$. Une probabilité est donc une application de $(\Omega, \mathcal{T})$ sur $[0, 1]$ qui vérifie les axiomes suivants :

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P\{\omega_i\} \quad \text{et} \quad \sum_{\omega_i \in \Omega} P\{\omega_i\} = 1.$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité des événements élémentaires, le calcul de la probabilité d'un événement quelconque se ramène à un calcul de dénombrement. Ce calcul repose sur les relations classiques qui donnent les nombres d'arrangements, de permutations et de combinaisons de n objets.

Nombre d'arrangements Le nombre de façons différentes de choisir p objets tous différents parmi n objets tous différents (tenant compte de l'ordre des p objets choisis) est donné par

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Nombre de permutations Le nombre de façons différentes d'ordonner n objets tous différents est donné par

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!.$$

Nombre de combinaisons Le nombre de façons différentes de choisir p objets tous différents (sans tenir compte de l'ordre des p objets choisis) parmi n objets tous différents est donné par (tirage sans remise) :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Nombre de combinaisons avec répétitions Le nombre de façons différentes de choisir p objets, non tous forcément différents, (sans tenir compte de l'ordre des p objets choisis) parmi n objets tous différents est donné par (tirage avec remise) :

$$\Gamma_n^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}.$$

c) Espace probabilisé quelconque

Soit un ensemble Ω quelconque et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω . On appelle tribu ou σ -algèbre de Ω toute famille $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $\mathcal{T}$ contient Ω
- $\mathcal{T}$ est stable pour la réunion dénombrable
- $\mathcal{T}$ est stable pour la complémentation par rapport à Ω .

Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé espace mesurable et les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés parties mesurables de Ω . Si B est une partie d'un espace $\mathbb{E}$, la plus petite tribu de $\mathbb{E}$ contenant B est appelée tribu engendrée par B .

Exemple 4.1.2 Tribus classiques

- Tribu fine : $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$
- Tribu grossière : $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$
- Tribu de Bernoulli : $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$.
- Tribu de Borel : Soit $(\mathbb{E}, \Theta)$ un espace topologique. Il est clair que la topologie Θ n'est pas une tribu. La tribu engendrée par Θ est appelée tribu de Borel sur $\mathbb{E}$. Si $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, on admettra que la tribu de Borel est engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$ et qu'elle est aussi engendrée par des demi-droites $] -\infty, \alpha[$. Cette tribu sera notée $\mathbb{B}$.

Une mesure positive est une application μ d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T})$ sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ muni de sa tribu de Borel qui vérifie les axiomes suivants :

- Positivité : pour tout élément A de $\mathcal{T}$ on a $\mu(A) \in \mathbb{R}^+$
- Additivité complète : pour toute suite finie ou dénombrable d'éléments A_n de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints, on a :

$$\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est appelé espace mesuré. Toute mesure positive P vérifiant $P(\Omega) = 1$ est appelée probabilité. Un espace mesuré où la mesure est une probabilité est appelé espace probabilisé.

Produit d'espaces probabilisés : Si $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), P_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), P_2)$ sont deux espaces probabilisés, on peut considérer sur l'espace probabilisable $[\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)]$ la fonction P définie par

$$P(\omega_1, \omega_2) \triangleq P_1(\omega_1) P_2(\omega_2) \quad \forall \quad (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Il est facile de vérifier que P définie une probabilité sur l'espace $[\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)]$ appelé espace produit. On peut étendre ce procédé pour définir de proche en proche l'espace produit de n espaces probabilisés.

d) Règles de calcul sur un espace probabilisé

La probabilité de la réunion de deux événements quelconques est donnée par la formule des probabilités totales :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (4.1)$$

Deux événements sont dits incompatibles ou disjoints si leur intersection est réduite à l'ensemble vide. L'axiome d'additivité complète conduit à l'identité suivante :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (4.2)$$

Deux événements sont dits complémentaires s'ils sont disjoints et si en plus leur réunion est égale à l'ensemble Ω . Dans ce cas on a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1. \quad (4.3)$$

Un système complet d'événements est un ensemble d'événements deux à deux disjoints et tels que leur réunion donne l'ensemble Ω . Un tel système forme une partition de Ω . La probabilité de la réunion des événements d'un système complet est toujours égale à 1. Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment un système complet, alors tout événement B se décompose sous la forme :

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n \quad \text{avec} \quad B_i \triangleq A_i \cap B \quad (4.4)$$

et on a

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B_i).$$

Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable et P une probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Alors les événements élémentaires de Ω , i.e. les singletons $\{\omega_i\}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ forment un système complet. De plus P est définie de manière unique par la donnée des $P(\{\omega_i\})$. En effet, les ensembles $\{\omega_i\}$ forment une partition de Ω et donc tout événement B peut s'écrire

$$B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B \cap \{\omega_i\}.$$

La valeur de $P(B)$ est alors définie d'une manière unique par

$$P(B) \triangleq \sum_{i \in \mathbb{N}} P(B \cap \{\omega_i\}) = \sum_{\omega_i \in B} P\{\omega_i\}.$$

Toute mesure de probabilité possède les propriétés élémentaires suivantes.

$$\Phi \subset A \subset \Omega \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$\bar{A} = C_{\Omega}^A \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

e) Probabilité conditionnelle, Indépendance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et A un événement de probabilité non nulle. Soit l'application P_A définie par

$$P_A(B) \triangleq \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \triangleq P(B|A) \quad (4.5)$$

où la notation $P(B|A)$ se lit couramment probabilité de B sachant A . Il est facile de vérifier que P_A définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$. Cette probabilité est appelée probabilité conditionnelle (conditionnellement à la réalisation de A). On a donc :

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) \quad (4.6)$$

et aussi par symétrie, pour $P(B) \neq 0$,

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) \quad (4.7)$$

Les deux expressions de $P(A \cap B)$ conduisent à la relation suivante dénommée formule de Bayes :

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B|A). \quad (4.8)$$

Plus généralement, si $A_1, A_2, \dots, A_n$ est un système complet de Ω et B un événement quelconque, on obtient la seconde formule de Bayes suivante :

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.9)$$

Cette identité se déduit immédiatement de la première formule de Bayes qui donne

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} \quad (4.10)$$

et de la définition d'un système complet qui permet d'écrire

$$P(B) = \sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j). \quad (4.11)$$

Les formules de Bayes sont à la base de la branche de la statistique appelée statistique Bayésienne. Ces formules sont couramment appelées formules des probabilités des causes. En effet, les A_i peuvent s'interpréter comme des causes incompatibles pouvant provoquer l'événement B . Les probabilités $P(A_i)$ sont appelées probabilité a priori alors que les $P(A_i|B)$ portent le nom de probabilités a posteriori.

Exemple 4.1.3 Application de la formule de Bayes

Dans une usine deux machines A_1 et A_2 fabriquent des boulons de même type. A_1 sort en moyenne 0,3 % de boulons défectueux et A_2 0,8 %. On a $P(D|A_1) = 0,003$ et $P(D|A_2) = 0,008$. On mélange 1000 boulons dans une caisse, 650 provenant de A_1 et 350 de A_2 . Lorsque l'on tire un boulon au hasard les probabilités dites a priori qu'il provienne de A_1 ou de A_2 sont : $P(A_1) = 0,65$ et $P(A_2) = 0,35$. Sachant que l'événement, noté D : le boulon tiré est défectueux, s'est réalisé, les probabilités précédentes sont modifiées et remplacées par les probabilités plus précises dites a posteriori : $P(A_1|D)$ et $P(A_2|D)$. Pour calculer ces probabilités, on applique la 2^{ème} formule de Bayes.

Indépendance Soient $A_1, \dots, A_n$ un ensemble de n événements définis sur un espace probabilisé. Ces événements sont dits indépendants deux à deux si, et seulement si :

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad i \neq j \quad (4.12)$$

ils sont dits indépendants dans leur ensemble si pour toute partie I de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ on a :

$$P(\cap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i). \quad (4.13)$$

Remarque Si l'on considère un ensemble de trois événements, les deux formes d'indépendances sont équivalentes si, et seulement si, la formule (4.13) est valable pour $I = \{1, 2, 3\}$.

Remarque On peut trouver des ensembles de n événements indépendants dans leur ensemble et tel que tout sous ensemble de $n - 1$ événements constitue un ensemble d'événements non indépendants dans leur ensemble.

L'incompatibilité de deux événements est définie sur un espace probabilisable sur lequel aucune probabilité n'a été définie. L'incompatibilité de A et B ne fait pas

intervenir la probabilité, elle exprime simplement la condition $A \cap B = \phi$. Par contre l'indépendance de A et B est directement liée à une probabilité. Elle peut donc changer avec la probabilité définie sur l'espace probabilisable considéré. Deux événements A et B peuvent être en même temps :

- Indépendants et incompatibles
- Indépendants et compatibles
- Dépendants et incompatibles
- Dépendants et compatibles.

4.1.2 Statistique à une dimension

Nous considérons dans ce chapitre, une population Ω d'effectif total N , et dont chaque élément présente un caractère X . Soit, par exemple, un ensemble Ω d'individus dont on veut étudier la taille X . À chaque individu ω on associe la valeur de sa taille $x = X(\omega)$. Pour cela, on peut supposer que x appartient à un intervalle $[a, b]$. On subdivise alors $[a, b]$ en r sous-intervalles de même amplitude et on appelle $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_r$ les centres de ces intervalles. Au lieu d'associer à chaque individu ω , le nombre x , on convient de lui associer le nombre x_i défini par le centre de l'intervalle contenant x . Ainsi un même nombre x_i peut être associé à plusieurs individus ω . On appelle série statistique pour le caractère X l'application qui à chaque élément ω de Ω associe le nombre x_i . Soit une série statistique dont le caractère X a pour valeurs $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_r$. On appelle effectif partiel du nombre x_i le nombre n_i des éléments ω de la population Ω dont la valeur du caractère est x_i . Les fréquences partielles sont définies par :

$$f_i = \frac{n_i}{N} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^r f_i = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq f_i \leq 1.$$

La moyenne, la variance et l'écart type de X sont respectivement définis par :

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^r f_i x_i, \quad \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^r f_i (x_i - \bar{X})^2, \quad \sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Dans ce qui précède, nous avons introduit une application X qui associe à chaque élément ω le nombre x de $\mathbb{R}$ et les nombres f_i compris entre 0 et 1 et tels que leur somme vaut 1. Lorsque le nombre N tend vers l'infini, chaque f_i tend vers une limite appelée probabilité du nombre vers lequel tend x_i . La fonction X tend vers une fonction limite appelée variable aléatoire (V.A) discrète. Le concept de V.A a été introduit pour « quantifier » les résultats d'une expérience aléatoire [2] [13] [16] [20]. Par exemple, le lancer d'une pièce peut conduire aux deux résultats possibles :

obtenir face ou pile. On peut associer à ces deux résultats respectivement les nombres -1 et 1 et parler des résultats possibles -1 et 1 . Chacun parmi ces deux nombres est alors entaché d'une probabilité qui sera celle de la face qui lui est associée. On a ainsi défini une application X de l'espace probabilisé associé à l'expérience sur l'ensemble des réels, chacune des valeurs x prises par cette application étant affectée d'une probabilité égale à celle de tous les antécédents de x . La loi de probabilité d'une V.A est complètement déterminée à partir de la probabilité P introduite sur Ω . On considère $\mathbb{R}$ muni de sa tribu de Borel et on doit imposer à X de vérifier la propriété suivante :

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{T}, \quad \forall B \in \mathbb{B}$$

qui signifie que X est une application mesurable de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ dans l'espace probabilisable $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Si $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, toute application X est mesurable. Toute application mesurable de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est appelée V.A. Une V.A complexe est une application d'un espace probabilisé sur l'ensemble des nombre complexes telle que ses parties réelle et imaginaire sont des V.A réelles.

4.1.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

À chaque V.A définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est associée sa « loi de distribution de probabilités » ou simplement sa « loi de probabilité ». La loi de probabilité d'une V.A X , notée P_X , est définie à partir de P par :

$$P_X(B) = P(\omega | X(\omega) \in B) = P[X^{-1}(B)], \quad \forall B \in \mathbb{B}. \quad (4.14)$$

Pour une autre V.A, Y , définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, la loi de probabilité sera notée P_Y mais s'il n'y a pas d'ambiguïté, on utilise la même notation P pour la loi de probabilité de X , de Y et même pour celles de toutes les V.A définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Exemple 4.1.4 Variable certaine et variable aléatoire

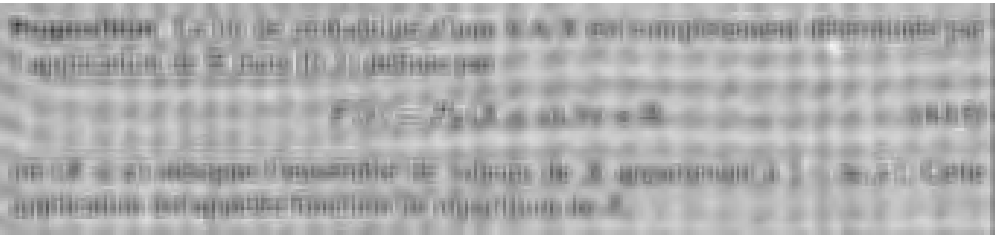
Si l'espace probabilisé est défini par la tribu grossière $\mathcal{T} = \{\Omega, \Phi\}$, toute application constante de Ω dans $\mathbb{R}$ est une V.A. Ce cas correspond à une variable dite certaine. Si l'espace est défini par une tribu de Bernoulli $\{\Phi, A, \bar{A}, \Omega\}$ la fonction indicatrice de A est une V.A dite variable indicatrice de l'événement A . Si l'espace est défini par une tribu engendrée par une partition $A_1, A_2, \dots, A_n$, une application X est une V.A. si, et seulement si, X est constante sur chaque A_i .

Exemple 4.1.5 La notion de V.A dépend de la tribu choisie

On considère l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$ avec $\mathcal{T} = \{\Omega, \Phi\}$. Soit X l'application numérique telle que, ω_1 et ω_2 étant deux éléments distincts de Ω , on ait :

$$X(\omega_1) = x_1 \text{ et } X(\omega_2) = x_2 \neq x_1$$

Montrer que X n'est pas une V.A sur l'espace probabilisable considéré. En déduire que les seules fonctions pouvant être des V.A sur $(\Omega, \mathcal{T})$ sont les fonctions constantes.



Parfois la fonction de répartition est définie par :

$$\tilde{F}(x) = P_X(X < x)$$

et on a l'identité :

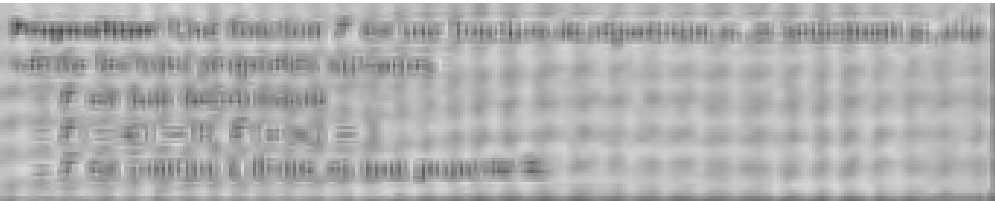
$$F(x) = \tilde{F}(x) + P_X(X = x).$$

On conviendra dans toute la suite que la fonction de répartition est définie par (4.14). Elle possède alors les propriétés suivantes.

Non décroissance : $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

Valeurs à l'infini : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Continuité : la fonction de répartition F admet des limites à droite et à gauche en tout point x , ses discontinuités éventuelles sont bornées et elle est continue à droite en tout point x .



Exemple 4.1.6 Exemples de fonctions de répartition

Les fonctions suivantes sont des fonctions de répartition.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= 0 \quad \text{pour } x < -c \\
 &= 1/2 \quad \text{pour } -c \leq x < c \\
 &= 1 \quad \text{pour } x \geq c, \quad c > 0 \\
 G(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1 - e^{-x}}{2(1 + e^{-x})} \\
 H(x) &= e^x/2 \quad \text{pour } x < 0 \\
 &= 1 \quad \text{pour } x \geq 0.
 \end{aligned}$$

La fonction F est la fonction de répartition d'une V.A discrète qui ne peut prendre que les valeurs $\pm c$ avec une probabilité $1/2$. On a une seule V.A associée à F , car F est une fonction en escaliers. La fonction G est la fonction de répartition d'une V.A continue qui peut prendre « toute les valeurs réelles ». Il existe une infinité de V.A admettant G comme fonction de répartition. Deux telles V.A ne peuvent être différentes que sur un ensemble de $\mathbb{R}$ de probabilité nulle (elles sont dites égales presque partout au sens de la mesure G). La fonction H est la fonction de répartition d'une V.A continue ne pouvant prendre que des valeurs négatives et la valeur 0 avec une probabilité $1/2$. Comme pour G , il existe une infinité de V.A admettant H comme fonction de répartition.

Dans la majorité des problèmes pratiques, on ignore complètement l'espace probabilisé et on définit une V.A X par la donnée de sa fonction de répartition F . Il existe une infinité de V.A associées à F et l'information contenue dans F est commune à toutes ces V.A. La probabilité pour que chacune de ces V.A prenne ses valeurs dans un intervalle $]a, b]$ s'exprime à l'aide de F par :

$$P_X(a < X \leq b) = F(b) - F(a). \quad (4.16)$$

Variable aléatoire discrète Une V.A X définie sur $\mathbb{R}$ est dite discrète si elle ne prend qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs avec des probabilités non nulles. Il existe donc une suite de nombres strictement positifs P_k dont la somme vaut 1 et une suite de réels x_k tels que $P_X(X = x_k) = P_k, k = 1, 2, \dots$ et $P_X(X \neq x_k) = 0$.

Variable aléatoire continue Une V.A X définie sur $\mathbb{R}$ est dite absolument continue s'il existe une fonction f telle que la fonction de répartition de X se mette sous la forme

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.17)$$

La fonction de répartition d'une V.A absolument continue est dite fonction absolument continue et la fonction f est appelée densité de probabilité de X . On a donc

$$F'(x) = f(x). \quad (4.18)$$

Une fonction f positive, continue par morceau et qui vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1 \quad (4.19)$$

est une densité de probabilité. La fonction de répartition associée est alors définie par (4.17).

4.1.4 Fonction de répartition et densité de probabilité

D'une manière générale, une V.A peut être définie par la donnée d'une fonction F non décroissante vérifiant $F(-\infty) = 0$ et $F(\infty) = 1$. Cette fonction est la fonction de répartition de la V.A considérée. Un élément différentiel dx de $\mathbb{R}$, centré en x , porte l'élément de probabilité :

$$dF(x) = f(x)dx + \sum_{k=1}^n \delta(x - x_k) P_k dx \quad (4.20)$$

où $f(x)$ représente la dérivée de F qui doit exister sauf aux points x_k et $\delta(x - x_k)$ la distribution de Dirac centrée en x_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Cette forme de dF fait apparaître une densité généralisée au sens des distributions qui est valable aussi bien pour représenter les V.A discrètes que les V.A continues. Dans toute la suite, il ne sera fait aucune distinction entre dP , dP_X et dF . On utilisera surtout la notation dF et si l'on considère plusieurs V.A en même temps, on introduira des indices pour distinguer les fonctions F associées (par exemple, $F_X, F_Y \dots$). Pour une V.A absolument continue, l'élément $dF(u)$ se réduit au seul terme $f(u)du$ et pour une V.A discrète, $dF(u)$ ne contient pas le terme $f(u)du$. D'où

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x dF(u) \\ &= \int_{-\infty}^x f(u) du \quad \text{pour une V.A continue} \\ &= \sum_{x_i \leq x} x_i P_i \quad \text{pour une V.A discrète.} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Exemple 4.1.7 Fonction de répartition d'une V.A discrète

Une V.A pouvant prendre les valeurs discrètes $1, 2, \dots, 6$ avec les probabilités respectives $P_1, P_2, \dots, P_6$ admet comme fonction de répartition, la fonction F définie par :

$$dF(x) = \sum_{k=1}^6 P_k \delta(x - x_k) dx. \quad (4.22)$$

4.1.5 Fonction d'une variable aléatoire

Soit une fonction déterministe h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. À toute V.A réelle X on associe la nouvelle V.A Y dont chacune des valeurs y est obtenue comme image d'au moins une valeur x de X . On pose

$$Y = h(X) \quad (4.23)$$

et l'on dit que la V.A Y est l'image de X par la fonction h . On se propose alors de déterminer la densité de probabilité f_Y et la fonction de répartition F_Y de Y à partir de la densité f_X et de la fonction de répartition F_X de X . Le cas le plus simple correspond à des fonction h monotones. Par exemple si h est une bijection croissante, on obtient

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = P[X \leq h^{-1}(y)] \\ &= [F_X \circ h^{-1}](y), \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'où

$$F_Y = F_X \circ h^{-1}. \quad (4.24)$$

Si l'on suppose F_X et h dérivables, on obtient, en distinguant les cas h croissante et h décroissante :

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|h'(x)|}, \quad \text{avec } y = h(x). \quad (4.25)$$

Exemple 4.1.8 Fonction affine d'une V.A

Dans le cas d'une fonction affine $y = h(x) = ax + b$, un raisonnement direct conduit à :

$$f_Y(y) = \frac{f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}{|a|}.$$

Exemple 4.1.9 Fonction quadratique d'une V.A

Considérons maintenant le cas de la fonction $y = h(x) = x^2$. Pour déterminer F_Y , introduisons l'événement :

$$A_y = \{\omega / -\infty < Y \leq y\} = \{\omega / -\infty < X^2 \leq y\}.$$

On a par définition $F_Y(y) = P(A_Y)$. D'où $F_Y(y) = 0$ pour $y < 0$ et pour $y \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(A_Y) = P(\{\omega / -\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) + P(X = -\sqrt{y}). \end{aligned}$$

La dérivée de $F_Y(y)$ donne la densité $f_Y(y) = 0$ pour $y \leq 0$ et

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} + \frac{f_X(-\sqrt{y})}{\sqrt{y}}, \quad \text{pour } y > 0.$$

Cette densité peut se mettre sous la forme :

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|h'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|h'(x_2)|} \quad \text{avec } y = h(x_1) = h(x_2). \quad (4.26)$$

Ce résultat peut s'obtenir directement en partant de (4.25) et en introduisant les restrictions monotones de h définies sur $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$. Utilisant ce même raisonnement, on peut généraliser (4.26) au cas des fonctions h quelconques pour obtenir la relation suivante :

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|h'(x_1)|} + \dots + \frac{f_X(x_n)}{|h'(x_n)|} \quad (4.27)$$

avec

$$y = h(x_1) = \dots = h(x_n).$$

4.1.6 Espérance mathématique, variance et écart type

L'espérance mathématique d'une V.A X , si elle existe, est donnée par :

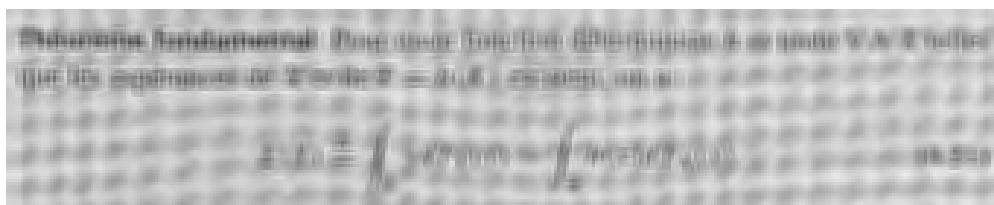
$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\Omega} x(\omega) dP(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad \text{pour une V.A continue} \\ &= \sum_i x_i P_i \quad \text{pour une V.A discrète.} \end{aligned} \quad (4.28)$$

L'espérance $E(X)$ n'existe pas toujours. Par exemple, pour la densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad \text{Loi de Cauchy} \quad (4.29)$$

l'intégrale $E(X)$ est divergente. De même, on peut déterminer a pour que la fonction définie par $f(x) = 0$ pour $x \leq 1$ et $f(x) = ax^{-3/2}$ pour $x > 1$ soit une densité de probabilité. On peut vérifier que $E(X)$ n'existe pas. Lorsque $E(X)$ existe, pour tout réel α donné on a :

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \alpha \\ E(\alpha X) &= \alpha E(X) \\ E(\alpha + X) &= \alpha + E(X). \end{aligned} \quad (4.30)$$



Pour faciliter la compréhension de ce théorème, nous donnons sa démonstration dans le cas d'une V.A. discrète. Supposons que X peut prendre les valeurs suivantes : $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1} \quad x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2} \quad \dots \quad x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn_k}$ avec les probabilités $p_{ij} \triangleq P(X = x_{ij})$. Supposons que la fonction h qui n'est pas forcément injective, prend les valeurs $y_1, y_2, \dots, y_k$ et que

$$y_i = h(x_{i1}) = h(x_{i2}) = \dots = h(x_{in_i}), \quad i = 1, \dots, k.$$

Comme $P(Y = y_i) \triangleq q_i = \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij}$ on obtient :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{j=1}^k y_i q_i = \sum_{i=1}^k y_i \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_i p_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} h(x_{ij}) p_{ij} = \int_{\mathbb{R}} h(x) dF_X(x). \end{aligned}$$

Cette démonstration se généralise sans difficulté au cas d'une V.A. continue.

On peut établir que si g est une fonction convexe et X une V.A telle que les espérances de X et de $g(X)$ existent, alors on a :

$$g(E[X]) \leq E[g(X)]. \quad (4.32)$$

Le théorème fondamental ci-dessus est très important puisqu'il permet de calculer $E(Y)$ directement à partir de $F_X(x)$ sans passer par la détermination de la loi de Y . Il permet aussi d'introduire les grandeurs suivantes associées à une V.A.

La variance d'une variable aléatoire est la quantité positive ou nulle définie par

$$\sigma^2 \triangleq \text{var}(X) \triangleq E[(X - E(X))^2] = \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^2 dF_X(x). \quad (4.33)$$

Le nombre positif σ défini par (4.33) est appelé écart type de X .

La fonction déterministe $f(a) = E[(X - a)^2]$ atteint son minimum pour $a = E(X)$ et l'on a

$$f(a) = E((X - a)^2) = \text{var}(X) + [E(X) - a]^2 \quad (4.34)$$

Cette relation est à comparer avec la formule de König-Huyghens sur les moments d'inertie. On déduit de (4.34) les résultats suivants valables pour tout nombre déterministe a

$$\text{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\text{var}(X) = \text{var}(X + a) \quad \text{et} \quad \text{var}(aX) = a^2 \text{var}(X).$$

On a souvent besoin de connaître un majorant de la probabilité de l'ensemble des valeurs de X vérifiant $|X - E(X)| \geq k\sigma$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev donnée par :

$$P(|X - E(X)| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad \forall k \in \mathbb{R}^+ \quad (4.35)$$

permet d'avoir un tel majorant en fonction de la valeur moyenne et de l'écart type de la V.A. Cette inégalité ne nécessite donc pas la connaissance complète de X .

Pour établir ce résultat, il suffit de minorer l'expression de σ^2 comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^2 dF_X(x) \\ &\geq \int_{\{x/|x-E(X)| \geq k\sigma\}} (x - E(X))^2 dF_X(x) \geq k^2 \sigma^2 \int_{\{x/|x-E(X)| \geq k\sigma\}} dF_X(x) \\ &= k^2 \sigma^2 P(|X - E(X)| \geq k\sigma). \end{aligned}$$

Exemple 4.1.10 Autre inégalité

Soit Y une V.A réelle ne pouvant prendre que des valeurs non négatives et pour laquelle l'espérance mathématique $E(Y)$ existe. On suppose que Y admet une densité de probabilité $f_Y(y)$. Alors, on a :

$$P(Y \geq k) \leq \frac{E(Y)}{k}, \quad \forall k > 0.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} E(Y) &\geq \int_{y \geq k} y dF_Y(y) \geq k \int_{y \geq k} dF_Y(y) \\ &\geq k P(Y \geq k). \end{aligned}$$

Si l'on applique ce résultat à $X = |Y - a|^n$ en prenant $k = \varepsilon^n$, on obtient :

$$P(|Y - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(|Y - a|^n)}{\varepsilon^n}, \quad \forall \varepsilon > 0, \forall n > 0.$$

Exemple 4.1.11 V.A prenant des valeurs entières

Si X est une V.A à valeurs entières > 0 , on a l'égalité suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n P[X = n] = \sum_{k=1}^{\infty} P[X \geq k]. \quad (4.36)$$

En effet, on a $P(X \geq k) = \text{Prob}[X = k] + \text{Prob}[X = k + 1] + \dots + \text{Prob}[X = \infty]$. D'où en prenant $k = 1, \dots, \infty$ et en sommant membre à membre les égalités obtenues, on obtient le résultat énoncé.

4.1.7 Fonctions caractéristiques, moments, cumulants

La fonction caractéristique d'une V.A réelle X est la transformée de Fourier de sa mesure de probabilité. Elle est notée couramment Φ_X et on a par définition :

$$\Phi_X(u) \triangleq E(e^{iuX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} dF_X(x), \quad i^2 = -1. \quad (4.37)$$

Comme F_X est une mesure bornée et $|e^{iu}| = 1$, la fonction Φ_X existe toujours et elle est continue. Lorsque F_X est une mesure absolument continue on a :

$$\Phi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f_X(x) dx \quad (4.38)$$

où f_X désigne la densité de probabilité de X . La fonction caractéristique possède les propriétés suivantes qui découlent directement de sa définition.

$$\Phi_X(0) = 1, \quad \Phi_{(\alpha X)}(u) = \Phi_X(\alpha u), \quad \Phi_{(X+\alpha)}(u) = e^{iu\alpha} \Phi_X(u).$$

Pour tout entier positif k , on définit le moment centré d'ordre k , s'il existe, par

$$m_k \triangleq E([X - E(X)]^k) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^k dF_X(x)$$

et les moments non centrés par

$$\mu_k \triangleq E(X^k).$$

Les moments μ_k peuvent se calculer à partir de la fonction caractéristique. En effet, si $\Phi_X(u)$ est dérivable à l'ordre k on a :

$$\Phi_X^{(k)}(0) = i^k E(X^k) \quad (4.39)$$

et si $\Phi_X(u)$ admet un développement en série au voisinage de 0, il est donné par :

$$\Phi_X(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} i^k E(X^k). \quad (4.40)$$

D'après les propriétés de la transformée de Fourier, deux V.A ayant la même fonction caractéristique ont forcément la même loi de probabilité. Les formules d'inversion de la transformée de Fourier permettent d'obtenir

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} \Phi_X(u) \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{iu} du. \quad (4.41)$$

Si

$$\int_{\mathbb{R}} |\Phi_X(u)| du < \infty$$

alors X admet une densité de probabilité $f(x)$ continue donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \Phi_X(u) e^{-iux} du. \quad (4.42)$$

Il est facile d'établir qu'une fonction caractéristique vérifie toujours :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Phi_X(u_i - u_j) z_i z_j^* \geq 0 \quad (4.43)$$

et ceci pour toute famille finie de réels $u_1, u_2, \dots, u_n$ et pour toute famille finie de complexes $z_1, z_2, \dots, z_n$. Une fonction vérifiant cette propriété est dite définie non négative.

Théorème de Bochner Une fonction continue est une fonction caractéristique si, et seulement si, elle est définie non négative.

Exemple 4.1.12 Fonction caractéristique d'une V.A. uniforme

Soit X une variable aléatoire réelle de densité uniforme sur $[0, \pi]$. On définit les variables $Y = \cos(\alpha X)$ et $Z = \sin(\alpha X)$ où α désigne un réel fixé.

1. Déterminer les espérances mathématiques $E(Y)$ et $E(Z)$.
2. En déduire, sans calcul, la fonction caractéristique de X .

Comme toute fonction caractéristique est continue au voisinage de 0 et vérifie $\Phi_X(0) = 1$, il existe un voisinage Δ de 0 dans lequel $\Phi_X(u) \neq 0$. Pour $u \in \Delta$, on peut donc définir la seconde fonction caractéristique de X par :

$$\Psi_X(u) \triangleq \text{Log} \Phi_X(u). \quad (4.44)$$

Comme $\Psi_X(u)$ est complexe, on choisit la détermination de la fonction logarithme qui s'annule pour $u = 1$. Si $\Psi_X(u)$ est dérivable à l'ordre k on pose

$$\Psi_X^{(k)}(0) \triangleq i^k C_k(X)$$

et le réel $C_k(X)$ est appelé cumulant d'ordre k de X . Si $\Psi_X(u)$ admet un développement en série au voisinage de 0, ce dernier est donné par :

$$\Psi_X(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} i^k C_k(X).$$

Remarque Partant de la relation entre $\Psi_X(u)$ et $\Phi_X(u)$ et utilisant un développement limité, on peut établir des relations entre les cumulants $C_k(X)$ et les moments μ_k d'une V.A. X .

4.1.8 Fonction génératrice

Soit X une V.A. pouvant prendre les valeurs $0, 1, 2, \dots, k, \dots$ avec les probabilités $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$. On peut associer à X sa fonction caractéristique Φ_X mais on lui préfère la fonction définie par

$$g_X(z) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad |z| < 1 \quad (4.45)$$

appelée fonction génératrice de la V.A. X . Toute fonction génératrice g_X est holomorphe sur le disque $|z| < 1$. En effet, comme

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

la série est absolument et donc uniformément convergente sur le disque $|z| < 1$. La fonction génératrice peut se mettre sous la forme suivante :

$$g_X(z) = E(z^X), \quad g_X(1) = 1$$

qui permet d'introduire les moments factoriels d'ordre n d'une V.A. X . Ces moments sont définis par :

$$\nu_n[X] = E[X(X-1)\dots(X-n+1)].$$

Ces moments factoriels sont définis aussi bien pour une V.A. discrète que pour une V.A. continue mais ils présentent un intérêt surtout dans le cas d'une V.A. à valeurs entières grâce au résultat suivant :

$$\nu_n(X) = g_X^{(n)}(1).$$

4.1.9 Lois de probabilités classiques

Loi uniforme Une V.A. discrète est dite uniforme si elle prend un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les mêmes probabilités $1/n$. Une V.A. continue est dite uniforme sur $[0, a]$ si elle admet une densité de probabilité définie par :

$$f(x) = \frac{1}{a} I_a(x)$$

où I_a est la fonction indicatrice de $[0, a]$. On a :

$$E(X) = \frac{a}{2}, \quad \text{var}(X) = \frac{a^2}{12}, \quad \Phi_X(u) = \frac{e^{iua} - 1}{iua}.$$

Loi de Benoulli et loi binomiale $B(n, p)$ La loi de Benoulli de paramètre p est la loi d'une V.A. ne pouvant prendre que deux valeurs, en général on se ramène à 1 et 0, avec les probabilités p et $q = 1 - p$. On a donc $X^2 = X$ et par suite

$$E(X) = p, \quad \text{var}(X) = p(1 - p) = pq, \quad \Phi_X(u) = pe^{iu} + q.$$

La loi binomiale peut être introduite de plusieurs manières différentes. C'est la loi de la variable X égal au nombre de succès lorsqu'on répète une même expérience n

fois dans des conditions indépendantes sachant que cette expérience conduit à deux résultats complémentaires : succès ou échec. Introduisons cette loi en considérant une urne contenant N boules dont la couleur est soit blanche soit noire. Soit p la proportion de boules blanches et $q = 1 - p$ celle des boules noires. Supposons que l'on effectue un tirage avec remise de n boules. Nous supposons donc que les n tirages successifs sont des épreuves indépendantes. On définit ainsi une V.A X prenant comme valeurs le nombre de boules blanches tirées. La loi de X est donnée par :

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (4.46)$$

Les probabilités $P(X = k)$ sont données par le développement du binôme

$$(p + q)^n = \sum_{k=1}^n C_n^k p^k q^{n-k}$$

et pour cette raison, cette loi est appelée loi binomiale de paramètres n et p . On la note $\mathcal{B}(n, p)$ et on a :

$$E(X) = np, \quad \text{var}(X) = npq, \quad \Phi_X(u) = (pe^{iu} + q)^n.$$

Il est facile de voir que si X suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$, la variable définie par $Y = n - X$ suit alors une loi $\mathcal{B}(n, 1 - p)$. Dans la pratique on est souvent conduit à étudier la V.A $F = \frac{X}{n}$ appelée fréquence. Si la variable X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, on obtient facilement

$$P(F = k/n) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$$

$$E(F) = p, \quad \text{var}(F) = \frac{pq}{n}.$$

La variable F prend des valeurs non entières mais suit elle aussi la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Loi multinomiale et loi du tirage exhaustif Soit une urne contenant N boules dont les k couleurs sont numérotées par $1, 2, \dots, k$. Soit p_i la proportion de boules de couleur i , $i = 1, 2, \dots, k$. Supposons que l'on effectue un tirage avec remise de n boules. Nous supposons donc que les n tirages successifs sont des épreuves indépendantes. On définit ainsi une V.A $\mathbf{x} = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ prenant comme valeurs $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ où n_i représente le nombre de boules de couleur i tirées. On obtient après calculs :

$$P\{\mathbf{x} = (n_1, n_2, \dots, n_k)\} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}.$$

Cette loi est appelée loi multinomiale car $P\{X = (n_1, n_2, \dots, n_k)\}$ est donné par le terme général du développement suivant :

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_k)^n = \sum_{n_1, \dots, n_k} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}.$$

Soit une population de N individus parmi lesquels une proportion p possède une propriété A . On prélève un échantillon de n individus parmi cette population (le tirage s'effectuant d'un seul coup ou au fur-et-à-mesure mais sans remise). Soit X la V.A prenant comme valeur le nombre d'individus de l'échantillon possédant la propriété A . On montre alors que

$$P(X = k) = \frac{C_{N-p}^k C_{N-N-p}^{n-k}}{C_N^n} \quad (4.47)$$

et un simple calcul donne

$$E(X) = np, \quad \text{var}(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p).$$

Loi de Poisson de paramètre λ : $\mathcal{P}(\lambda)$ C'est la loi d'une V.A entière pouvant prendre les valeurs $0, 1, \dots, \infty$ avec les probabilités suivantes :

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.48)$$

Un calcul simple donne

$$E(X) = \lambda, \quad \text{var}(X) = \lambda, \quad g_X(z) = e^{\lambda(z-1)}, \quad \Phi_X(u) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{iu}}.$$

Exemple 4.1.13 Loi de Poisson pondérée

Déterminer la fonction génératrice d'une V.A N à valeurs entières pour laquelle les p_k sont donnés par :

$$p_k = \int_0^\infty \frac{e^{-u} u^n}{n!} \epsilon(u) du, \quad \text{avec} \quad \epsilon(u) = \frac{1}{a} e^{-\frac{u}{a}}$$

On a, en prenant comme définition $g(s) \triangleq E[(1-S)^N]$:

$$\begin{aligned} g(s) &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-u} u^n}{n!} (1-s)^n \epsilon(u) du = \int_0^\infty e^{-u} e^{u(1-s)} \epsilon(u) du \\ &= \int_0^\infty e^{-us} \frac{1}{a} e^{-\frac{u}{a}} du = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-u(s+\frac{1}{a})} du = \frac{1}{a} \left[\frac{e^{-u(s+\frac{1}{a})}}{-s-\frac{1}{a}} \right]_0^\infty = \frac{1}{1+as}. \end{aligned}$$

Loi exponentielle de paramètre λ : $\mathcal{E}(\lambda)$ Cette loi est définie par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ pour } x \geq 0 \text{ et } = 0 \text{ pour } x < 0.$$

On a :

$$E(X) = 1/\lambda, \quad \text{var}(X) = 1/\lambda^2, \quad \Phi_X(u) = \frac{-\lambda}{iu - \lambda}.$$

Loi de Laplace-Gauss ou Loi normale : $\mathcal{N}(m, \sigma)$ Cette loi joue un rôle fondamental dans la pratique. Elle constitue un modèle fréquemment utilisé dans diverses applications. Une V.A X suit une loi normale si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (4.49)$$

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, on montre que

$$E(X) = m, \quad \text{var}(X) = \sigma^2, \quad \Phi_X(u) = e^{imu} e^{-\frac{1}{2}u^2\sigma^2}.$$

Si on effectue le changement de variable :

$$T = h(X) = \frac{X - m}{\sigma}$$

la nouvelle variable T suit aussi une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ appelée loi normale centrée et réduite et on a :

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

La graphe de f_T , appelé courbe en cloche, admet comme asymptote l'axe des abscisses t/t et deux points d'inflexion aux points $|t| = 1$. La fonction caractéristique de la variable réduite T est donnée par :

$$\Phi_T(u) = e^{-u^2/2}.$$

La probabilité pour que X appartienne à l'intervalle $[a, b]$ est donnée soit par

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f_X(x) dx$$

soit par :

$$P(X \in [a, b]) = P\left(T \in \left[\frac{a-m}{\sigma}, \frac{b-m}{\sigma}\right]\right).$$

Dans la pratique, on introduit la fonction de répartition de T et on utilise des tables pour calculer les valeurs de cette fonction.

4.2 COUPLE ALÉATOIRE

4.2.1 Statistiques à 2 dimensions

Nous considérons une population Ω d'effectif total N et dont chaque élément présente deux caractères X et Y . Soit, par exemple, un ensemble Ω d'individus dont on veut étudier la taille X et le poids Y . À chaque individu ω on associe la valeur de sa taille $x = X(\omega)$ et celle de son poids $y = Y(\omega)$. Dans la pratique, on peut supposer que x et y appartiennent respectivement aux intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$. On subdivise alors $[a, b]$ en r sous-intervalles de même amplitude et on appelle $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_r$ les centres de ces intervalles. La même opération sur $[c, d]$ conduit à s sous-intervalles de même amplitude dont les centres sont $y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_s$. Au lieu d'associer à chaque individu ω , le couple (x, y) , on convient de lui associer le couple (x_i, y_j) défini par les centres des intervalles contenant respectivement x et y . Ainsi un même couple (x_i, y_j) peut être associé à plusieurs individus ω . On appelle série statistique double de Ω pour les caractères X et Y l'application qui à chaque élément ω de Ω associe le couple (x_i, y_j) . Si, par rapport à un repère cartésien xOy , nous marquons les points de coordonnées x_i, y_j , nous obtenons un graphique appelé nuage de points ou « graphe » de la série statistique double. Soit une série statistique double, dont le caractère X a pour valeurs $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_r$ et le caractère Y a pour valeurs $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_s$. On appelle effectif partiel du couple (x_i, y_j) le nombre n_{ij} des éléments ω de la population Ω dont les valeurs des caractères sont respectivement x_i et y_j . Nous obtenons le tableau 4.1 dont certains éléments sont définis dans la suite.

TABLEAU 4.1 STATISTIQUES À 2 DIMENSIONS

y x	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_s	Totaux
x_1	n_{11}	n_{12}	$\dots$	n_{1j}	$\dots$	n_{1s}	$n_{1.}$
x_2	n_{21}	n_{22}	$\dots$	n_{2j}	$\dots$	n_{2s}	$n_{2.}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	n_{i1}	n_{i2}	$\dots$	n_{ij}	$\dots$	n_{is}	$n_{i.}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_r	n_{r1}	n_{r2}	$\dots$	n_{rj}	$\dots$	n_{rs}	$n_{r.}$
Totaux	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$\dots$	$n_{.j}$	$\dots$	$n_{.s}$	N

4.2.2 Fréquences partielles, marginales et conditionnelles

Les fréquences partielles sont définies par :

$$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N} \quad \text{avec} \quad 0 \leq f_{ij} \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s f_{ij} = 1.$$

La somme des effectifs partiels contenus dans la ligne de x_i est égale à l'effectif des éléments dont la valeur du caractère X est x_i . On représente par le symbole $n_{i.}$ cette somme, le point remplaçant l'indice de sommation j qui disparaît. Les nombres $n_{i.}$ sont appelés effectifs marginaux et ils vérifient :

$$n_{i.} = \sum_{j=1}^s n_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (4.50)$$

On appelle fréquence marginale de $x_i, i = 1, 2, \dots, r$, le rapport

$$f_{i.} = \frac{n_{i.}}{N}.$$

On suppose que tous les effectifs marginaux sont différents de 0 et on appelle fréquence conditionnelle de la valeur x_i sachant y_j , le nombre noté $f_{i|j}$ donné par :

$$f_{i|j} = \frac{n_{ij}}{n_{.j}} = \frac{f_{ij}}{f_{.j}}.$$

On obtient la relation suivante qui relie les trois types de fréquence :

$$f_{ij} = f_{.j} f_{i|j}.$$

Inversant les rôles de i et j , on obtient :

$$f_{j|i} = \frac{f_{ij}}{f_{i.}} \quad \text{et} \quad f_{ij} = f_{i.} f_{j|i}.$$

Comme les fréquences conditionnelles vérifient :

$$0 \leq f_{i|j} \leq 1, \quad 0 \leq f_{j|i} \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r f_{i|j} = \sum_{j=1}^s f_{j|i} = 1$$

les nombres $f_{i|j}$ pour j fixé (res. $f_{j|i}$ pour i fixé) définissent des distributions de probabilité, appelées probabilités conditionnelles du caractère X sachant $Y = y_j$ (res. du caractère Y sachant $X = x_i$).

4.2.3 Loi conjointe, loi marginale et loi conditionnelle

Dans ce qui précède, nous avons introduit une application qui associe à chaque élément ω le couple $(x, y) = (x_i, y_j)$ de $\mathbb{R}^2$ et le nombre f_{ij} compris entre 0 et 1. On a

ainsi défini une variable aléatoire sur $\mathbb{R}^2$ à partir des probabilités associées à toutes les valeurs possibles du couple (x, y) . On remarque que la connaissance des deux V.A X et Y est insuffisante pour déterminer la loi du couple (X, Y) . Considérons une population Ω d'effectif total pouvant être fini, dénombrable ou non dénombrable. Chaque élément ω présente deux caractères X et Y . Chacun des deux caractères X et Y peut être considéré comme une V.A et l'on se propose de faire une étude conjointe du couple (X, Y) . Soient deux V.A X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Ces variables sont donc des fonctions mesurables de Ω sur $\mathbb{R}$ associant à tout élément ω de Ω un couple de réels $(x, y) = \{X(\omega), Y(\omega)\}$. La V.A (X, Y) à deux dimensions est définie par :

$$(X, Y) : (\Omega, \mathcal{T}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2) \quad (4.51)$$

où B_2 représente la tribue de Borel sur $\mathbb{R}^2$.

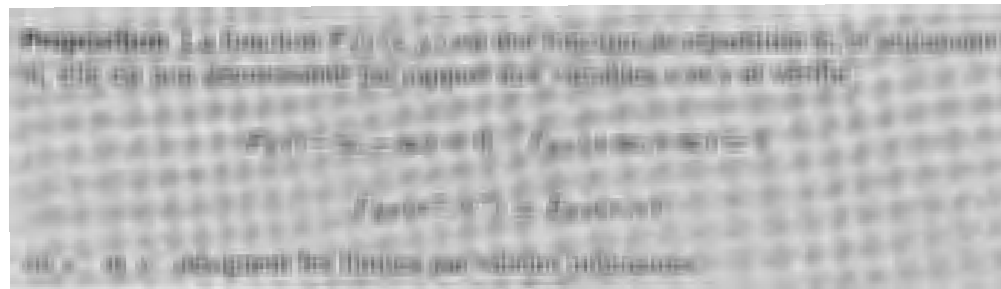
Loi conjointe La loi de probabilité conjointe d'un couple aléatoire est la loi qui donne la probabilité, notée P_{XY} , du couple (X, Y) . Elle est définie par la connaissance, pour tout $(A_1, A_2) \in \mathbb{B}_2$, des probabilités :

$$P_{XY}\{(X, Y) \in (A_1, A_2)\} = P\{\omega \in X^{-1}(A_1) \cap Y^{-1}(A_2)\}. \quad (4.52)$$

Les ensembles de valeurs de (X, Y) qui n'ont pas d'antécédent ont donc une probabilité nulle.

Fonction de répartition La fonction de répartition d'un couple aléatoire est la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $[0, 1]$ définie par

$$F_{XY}(x, y) = P_{XY}(X \leq x, Y \leq y). \quad (4.53)$$



La loi de probabilité est une mesure de masse totale 1 définie sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction de répartition $F_{XY}(x, y)$ donne la valeur de cette mesure sur le quart de plan $] - \infty, x] \times] - \infty, y]$ comme l'indique la relation :

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y dP_{XY}(u, v). \quad (4.54)$$

Si la fonction $F_{XY}(x, y)$ est absolument continue sur $\mathbb{R}^2$, i.e., il existe une fonction f_{XY} telle que

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(u, v) du dv \quad (4.55)$$

le couple aléatoire (X, Y) est dit absolument continu et la fonction f_{XY} est appelée densité de probabilité conjointe de (X, Y) . La fonction F_{XY} est alors dérivable en tout point (x, y) , sauf sur un ensemble fini ou dénombrable de points, et l'on a

$$\frac{\partial^2 F_{XY}}{\partial x \partial y} = f_{XY}(x, y). \quad (4.56)$$

Comme F_{XY} est non décroissante par rapport à x et y , on peut en déduire que

$$f_{XY}(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.57)$$

Dans le cas où (X, Y) ne peut prendre qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs (x_i, y_j) avec des probabilités ponctuelles $P_{ij} = P_{XY}(X = x_i, Y = y_j)$, le couple est dit discret. On lui associe alors la densité définie par la distribution suivante :

$$f_{XY}(x, y) = \sum_{x_i, y_j} P_{ij} \delta(x - x_i, y - y_j) \quad (4.58)$$

où $\delta(x - x_i, y - y_j)$ est la distribution de Dirac à deux dimensions.

D'une manière générale, un couple (X, Y) est défini par la donnée d'une fonction de répartition. À cette fonction, on peut associer une densité de probabilité égale à la somme d'une composante continue et d'une autre composante discrète. Soit :

$$dF_{XY}(x, y) = \{f_{XY}(x, y) + \sum_{x_i, y_j} P_{ij} \delta(x - x_i, y - y_j)\} dx dy \quad (4.59)$$

où les P_{ij} sont tous nuls pour un couple continu et $f_{XY}(x, y)$ est identiquement nulle pour un couple discret. La fonction de répartition s'écrit donc

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(u, v) du dv + \sum_{x_i \leq x, y_j \leq y} P_{ij}. \quad (4.60)$$

Si (X, Y) est absolument continu, on a forcément $P\{X = x\} = 0$ et $P\{Y = y\} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$. Une simple observation du graphe représentant le rectangle $R = \{(x, y) / a \leq x < b, c \leq y < d\}$ conduit à la relation :

$$\begin{aligned}
 P(R) &= F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c) \\
 &= \int_a^b \int_c^d dP_{XY}(u,v) = \int_a^b \int_c^d f_{XY}(u,v) du dv.
 \end{aligned}$$

Cette probabilité peut donc être représentée par le volume du prisme compris entre le rectangle R xy et la surface d'équation $z = f_{XY}(u,v)$.

Loi marginale On peut s'intéresser à la projection de la probabilité P_{XY} sur chacune des coordonnées X et Y . On définit alors les fonctions de répartition des variables X et Y prises indépendamment l'une de l'autre. Ces fonctions, appelées aussi fonctions de répartition marginales, ont pour expressions :

$$F_X(x) = F_{XY}(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} dP_{XY}(u,v) \quad (4.61)$$

et

$$F_Y(y) = F_{XY}(+\infty, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{+\infty} dP_{XY}(u,v). \quad (4.62)$$

Ce sont des fonctions d'une seule variable : x ou y . Pour un couple continu, les densités de probabilité (appelées densités marginales) s'introduisent alors naturellement comme suit :

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y) dy \quad (4.63)$$

et

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y) dx. \quad (4.64)$$

Loi conditionnelle Pour mesurer un lien éventuel pouvant exister entre deux V.A. X et Y , on introduit le concept de lois de probabilités conditionnelles. Il s'agit de trouver la loi de probabilité d'une V.A. lorsque la seconde a une valeur fixée. On se place directement dans le cas d'un couple continu. Soit A et B les événements définis par :

$$A = \{(X,Y)/x \leq X < x + dx \text{ et } -\infty < y < +\infty\}$$

et

$$B = \{(X,Y)/y \leq Y < y + dy \text{ et } -\infty < x < +\infty\}.$$

On a

$$P_{XY}(A) = dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y) dy \quad \text{et} \quad P_{XY}(B) = dy \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y) dx$$

$$P_{XY}(A \cap B) = \int_{XY} f_{XY}(x, y) dx dy.$$

Le théorème sur les probabilités conditionnelles conduit à la définition de la probabilité de X conditionnellement à $Y = y$ comme suit :

$$P_{XY}(A|B) = \frac{P_{XY}(A \cap B)}{P_{XY}(B)} = \frac{f_{XY}(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx} dx. \quad (4.65)$$

On définit alors la densité de probabilité de X conditionnellement à $Y = y$, notée $f_{X|Y=y}(x)$, de sorte que :

$$P_{XY}(A|B) \triangleq \int_{X|Y=y} f_{X|Y=y}(x) dx = \frac{f_{XY}(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx} dx. \quad (4.66)$$

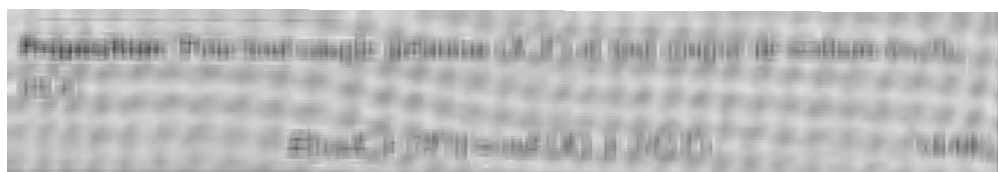
Pour $Y = y$ fixé, le couple (X, y) est une V.A dont la densité de probabilité est donnée par $f_{X|Y=y}(x)$. On introduit aussi la fonction de répartition conditionnelle définie par

$$F_{X|Y=y}(x) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y=y}(u) du.$$

Inversant les rôles de X et Y , on définit la densité $f_{Y|X=x}(y)$ et la fonction de répartition $F_{Y|X=x}(y)$ de Y .

Espérance mathématique et loi conjointe L'espérance d'une V.A X se calcule à partir de la loi conjointe du couple (X, Y) comme suit :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{XY}(x, y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x, y) dx dy \quad \text{Pour un couple continu} \\ &= \sum_{i,j} x_i P_{ij} \quad \text{Pour un couple discret.} \end{aligned} \quad (4.67)$$



4.2.4 Variables aléatoires indépendantes

Deux V.A réelles définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ sont dites indépendantes si $\forall (A, B) \in \mathbb{B}_2$, on a :

$$P_{XY}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P_X(X \in A) \cdot P_Y(Y \in B) \quad (4.69)$$

ceci équivaut à dire que la loi de probabilité du couple (X, Y) est égale au produit des lois (lois marginales) de chacune des variables X et Y prises séparément.

Proposition. Deux V.A. (X, Y) sont indépendantes si, et seulement si, la fonction de répartition du couple (X, Y) est égale au produit des fonctions de répartition marginales de X et Y :

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$
 (4.70)

Comme conséquence directe de la définition, on peut établir que si X et Y sont deux V.A indépendantes, on a :

$$E(XY) = E(X)E(Y). \quad (4.71)$$

4.2.5 Fonction de deux variables aléatoires

Cas d'une fonction quelconque Soit une fonction déterministe h de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$h : (X, Y) \rightarrow (Z, T) = h(X, Y) \quad (4.72)$$

On dit que le couple aléatoire (Z, T) est l'image par h du couple (X, Y) . Comme dans le cas d'une V.A, on peut être conduit à déterminer la densité de probabilité f_{ZT} et la fonction de répartition F_{ZT} de (Z, T) à partir de la densité f_{XY} et de la fonction de répartition F_{XY} de (X, Y) .

Proposition. Si le V.A. Z est définie par $Z = h(X, Y)$, son espérance peut se calculer à partir de la densité de probabilité f_{XY} du couple (X, Y) :

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z f_{XY}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy.$$
 (4.73)

Ce résultat est la généralisation au cas d'un couple du théorème déjà établi pour une V.A. Il permet de calculer l'espérance de Z directement à partir de la loi du couple (X, Y) et sans passer par la détermination de la loi de Z .

Somme et produit de deux V.A, inverse d'une V.A On va déterminer la loi de la V.A définie par $Z = X + Y$ en fonction de celle du couple (X, Y) dans le cas général où les variables ne sont pas forcément indépendantes. Nous considérons direc-

tement le cas d'un couple continu, le cas discret pouvant être traité d'une façon similaire. Nous allons faire ce calcul de deux manières différentes. La première consiste à introduire la fonction déterministe h de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par :

$$h(X, Y) = (Z = X + Y, W = Y).$$

Calculer ensuite la densité f_{ZW} en fonction de f_{XY} et déterminer enfin la densité f_Z de Z comme densité marginale. La deuxième méthode consiste à calculer directement la fonction de répartition F_Z de Z et d'en déduire ensuite f_Z en dérivant par rapport à z .

Méthode 1 L'expression de $h(X, Y)$ peut s'inverser et conduire à la solution unique $X = Z - W, Y = W$. Comme le Jacobien de l'application (4.71) vérifie $J(x, y) = 1$ pour tout (x, y) , l'application h est inversible et tout élément de surface infinitésimale $dS = dx dy$ centré en (x, y) se transforme en un élément $d\Sigma = dz dw$ centré en (z, w) et réciproquement. Les probabilités associées à dS et $d\Sigma$ sont les mêmes et l'on a :

$$f_{ZW}(z, w) |d\Sigma| = f_{XY}(x, y) |dS| = f_{XY}(z - w, w) |dS|.$$

Comme les deux surfaces dS et $d\Sigma$ vérifient $|d\Sigma| = |J(x, y)| |dS| = |dS|$, on obtient

$$f_{ZW}(z, w) = f_{XY}(z - w, w).$$

La densité de Z , définie en tant que densité marginale, est donnée par

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(z - w, w) dw. \quad (4.74)$$

Méthode 2 On commence par calculer la fonction de répartition :

$$F_Z(z) = P\{(x, y)/x + y \leq z\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_{XY}(x, y) dx dy.$$

La dérivation de $F_Z(z)$ sous le signe intégral, par rapport à z , conduit immédiatement à l'expression de f_Z obtenue ci-dessus. Si les V.A X et Y sont indépendantes, la densité f_{XY} se factorise et on obtient :

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy.$$

Propriétés La densité de la somme de deux V.A indépendantes est égale au produit de convolution des densités de chacune des V.A X et Y .

On peut vérifier facilement les résultats suivants :

1. La somme des deux V.A de Poisson indépendantes de paramètres λ_1 et λ_2 est une V.A de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
2. La somme de deux V.A binomiales indépendantes de lois $B(n, p_1)$ et $B(n, p_2)$ est une V.A binomiale $B(n, p_1 + p_2)$.
3. La somme de deux V.A gaussiennes (normales) indépendantes de lois $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ est une V.A gaussienne de loi $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. On verra plus loin que la somme de n V.A gaussiennes dans leur ensemble est aussi une V.A gaussienne même si ces V.A sont liées. Mais dans ce dernier cas la variance de la somme n'est plus égale à la somme des variances.

Exemple 4.2.1 Indépendance de V.A uniformes sur un rectangle

Soit (X, Y) uniforme sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. On peut vérifier facilement que X et Y sont indépendantes et donc la densité f_Z de $Z = X + Y$ est égale au produit de convolution :

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - w) f_Y(w) dw.$$

C'est donc le produit de convolution de la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, a]$ par elle-même. On obtient la fonction triangle symétrique de support $[a, a]$ et qui admet $(0, a)$ comme sommet.

Exemple 4.2.2 Mise en série de deux résistances

On considère deux résistances $R_i, i = 1, 2$. On suppose que R_1 et R_2 sont deux V.A indépendantes et que chaque R_i a une loi uniforme sur l'intervalle $[m_i - \Delta R, m_i + \Delta R]$, $m_2 > m_1$.

1. Exprimer l'espérance et l'écart type de R_i en fonction de m_i et de ΔR .
2. On s'intéresse à la mise en série des résistances $R_i, i = 1, 2$. Donner la densité de probabilité $f_s(\omega)$ de la résistance $R_s = R_1 + R_2$ et tracer son graphe.

La loi du produit de deux V.A peut être établie à partir de la loi conjointe en suivant la démarche adoptée pour établir la loi d'une somme. On sait que si les 2 V.A sont indépendantes, cette loi est égale au produit des lois de chacune des 2 V.A. Dans le cas général, on n'a pas d'expression explicite.

Exemple 4.2.3 Mise en parallèle de deux résistances

On considère deux résistances $R_i, i = 1, 2$. On suppose que R_1 et R_2 sont deux V.A indépendantes et que chaque R_i a une loi uniforme sur l'intervalle $[m_i - \Delta R, m_i + \Delta R]$, $m_2 > m_1$. On s'intéresse à la mise en parallèle des résistances $R_i, i = 1, 2$. On suppose que $\Delta R_i / R_i \ll 1$ (résistances de bonne qualité).

Donner des expressions simplifiées pour les densités suivantes.

1. Densité de $X_i = 1/R_i$
2. Densité de $1/R_p = 1/R_1 + 1/R_2$.
3. Densité de R_p .

4.2.6 Covariance et coefficient de corrélation

Comme dans le cas d'une V.A à une dimension, la variance de la V.A X est définie par

$$\text{var}(X) = E([X - E(X)]^2) = E[(X)^2] - [E(X)]^2 \quad (4.75)$$

et on a une expression analogue pour la variable Y . Mais les grandeurs $E(X)$, $E(Y)$, $\text{var}(X)$ et $\text{var}(Y)$ ne permettent pas de mesurer un lien éventuel pouvant exister entre X et Y . On introduit alors la nouvelle quantité, appelée covariance de X et Y , définie par :

$$\text{Cov}(X, Y) = E[[X - E(X)][Y - E(Y)]]. \quad (4.76)$$

On peut vérifier, directement à partir de sa définition, que l'opérateur $\text{Cov}(X, Y)$ possède les propriétés suivantes :

$$\text{Cov}(X, X) = \text{var}(X)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

$$\text{Cov}(\alpha X, \beta Y) = \alpha\beta \text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

L'espérance $E\{[X + aY]^2\}$ est un polynôme de degré 2 par rapport à la variable a . Comme ce polynôme ne prend que des valeurs non négatives lorsque a varie sur $\mathbb{R}$, on peut en déduire l'inégalité suivante (Inégalité de Schwarz) :

$$|\text{Cov}(X, Y)|^2 \leq |\text{Cov}(X, X)| |\text{Cov}(Y, Y)|. \quad (4.77)$$

Cette inégalité montre que le nombre

$$r \triangleq \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)}\sqrt{\text{var}(Y)}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (4.78)$$

appelé coefficient de corrélation linéaire de (X, Y) , vérifie

$$-1 \leq r \leq 1. \quad (4.79)$$

Deux V.A X et Y sont dites non corrélées si elles vérifient la propriété suivante :

$$\text{Cov}(X, Y) = 0. \quad (4.80)$$

On dit aussi que les deux V.A sont orthogonales. Il est facile de voir que X et Y sont non corrélées si, et seulement si, $r = 0$. On admet que plus la valeur absolue de r est proche de 1, plus les V.A sont corrélées. Donc plus r est proche de 0, plus les V.A sont décorréées et elles sont orthogonales pour $r = 0$. Deux V.A indépendantes sont forcément non corrélées et ceci pour toute loi de probabilité. La réciproque est fausse pour une loi de probabilité quelconque mais peut être vraie pour certaines lois particulières comme la loi de Gauss. Cependant la non corrélation conduit au résultat suivant important dans la pratique : si deux V.A X et Y sont non corrélées, on a pour tout couple (α, β) de nombres réels :

$$\text{var}(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 \text{var}(X) + \beta^2 \text{var}(Y). \quad (4.81)$$

Le coefficient de corrélation entre X et Y représente le cosinus de l'angle formé par les vecteurs $X - E\{X\}$ et $Y - E\{Y\}$. Un coefficient de corrélation nul exclut l'existence de relation linéaire entre X et Y mais n'exclut pas l'existence d'autres types de relations.

Dans la pratique, la notion d'indépendance est difficile à vérifier et on préfère se limiter à savoir si deux V.A sont plus ou moins corrélées. L'étude d'un couple aléatoire se fait donc souvent, de manière incomplète, à partir de la seule connaissance de la matrice définie par :

$$\Gamma \triangleq \begin{bmatrix} \text{var}(X) & \text{Cov}(Y, X) \\ \text{Cov}(X, Y) & \text{var}(Y) \end{bmatrix}. \quad (4.82)$$

Cette matrice symétrique, dénommée matrice de covariance ou matrice de corrélation du couple aléatoire est complètement déterminée par les moments du second ordre du couple (X, Y) . Elle possède des propriétés importantes qui seront énoncées plus loin dans le cas général d'un vecteur aléatoire.

Exemple 4.2.4 V.A non corrélées et dépendantes

On considère le couple aléatoire (X_1, X_2) uniformément réparti à l'intérieur d'un cercle de rayon R et centré à l'origine des coordonnées. Les densités marginales sont données pour $|x| > R$ par $f_{X_i} = 0$ et pour $|x| \leq R$ par :

$$f_{X_i}(x) = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2} \quad (i = 1, 2).$$

On vérifie que $f_{X_1} f_{X_2} \neq f_{X_1 X_2}$ et les variables X_1 et X_2 ne sont donc pas indépendantes.

Un calcul simple conduit à $E(X_1) = E(X_2) = E(X_1 X_2) = 0$ et donc les variables sont corrélées.

Exemple 4.2.5 V.A corrélées et indépendantes

Les deux V.A (X, Y) de densité conjointe :

$$f_{XY}(x, y) = \frac{k}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

sont évidemment indépendantes et un calcul simple montre qu'elles sont corrélées.

4.2.7 Fonction caractéristique d'un couple aléatoire

On appelle fonction caractéristique d'un couple aléatoire (X, Y) la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \Phi_{XY}(u, v) = E[e^{i(uX+vY)}]. \quad (4.83)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \Phi_{XY}(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(uX+vY)} dF_{XY}(x, y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(uX+vY)} f_{XY}(x, y) dx dy \quad \text{Pour un couple continu} \\ &= \sum_{k, j} e^{i(ux_k + vy_j)} P_{kj} \quad \text{Pour un couple discret.} \end{aligned} \quad (4.84)$$

La fonction caractéristique est la transformée de Fourier de la densité de probabilité du couple aléatoire. Elle possède donc des propriétés importantes qui ne seront pas développées ici. Par exemple, deux V.A X et Y sont indépendantes si, et seulement si, la fonction caractéristique du couple (X, Y) est égale au produit de celles de X et Y , i.e.,

$$\Phi_{XY}(u, v) = \Phi_X(u) \Phi_Y(v). \quad (4.85)$$

4.2.8 Espérance et variance conditionnelles

Soit Y une V.A réelle et X une V.A pouvant être qualitative. Pour une valeur $X = x$ fixée (ou une situation possible dans le cas où X est qualitative), le couple (X, Y) se réduit à la V.A (x, Y) . L'espérance mathématique de (x, Y) est une fonction à valeurs réelles de la variable x :

$$h(x) \triangleq E(Y|X = x) \in \mathbb{R}. \quad (4.86)$$

Cette fonction est donc une V.A qui prend les valeurs $h(x)$ avec les probabilités $P(X = x)$. Cette V.A est appelée espérance conditionnelle de Y sachant X .

On la note $E(Y|X)$ et l'on a :

$$E(Y|X) \triangleq h(X) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y) dy. \quad (4.87)$$

On définit de la même manière l'espérance conditionnelle de X sachant Y par

$$E(X|Y) \triangleq k(Y) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x) dx. \quad (4.88)$$

Si X_1, X_2 et Y sont trois V.A définies sur le même espace probabilisé et (α, β) un couple de réels, la définition de l'espérance conditionnelle conduit à la relation suivante :

$$E[(\alpha X_1 + \beta X_2)|Y] = \alpha E(X_1|Y) + \beta E(X_2|Y). \quad (4.89)$$

Théorème de l'espérance totale Si X et Y sont deux V.A définies sur le même espace probabilisé alors l'espérance de Y , appelée espérance totale, est donnée par

$$E(Y) = E[E(Y|X)]. \quad (4.90)$$

La démonstration de ce résultat important est donné ci-dessous, dans le cas d'un couple continu. On a :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X=x}(y) dy \right] f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E(Y|X = x) f_X(x) dx = E[E(Y|X)]. \end{aligned}$$

Théorème de la variance totale Si X et Y sont deux V.A définies sur le même espace probabilisé alors la variance de Y , appelée variance totale, est donnée par :

$$\text{var}(Y) = \text{var}[E(Y|X)] + E[\text{var}(Y|X)]. \quad (4.91)$$

où

$$\text{var}(Y|X) \triangleq E[(Y - E(Y|X))^2|X]$$

est appelée variance conditionnelle.

On introduit parfois le nombre $\rho_{X|Y}$, appelé rapport de corrélation de X en Y , défini par :

$$\rho_{X|Y}^2 \triangleq \frac{\text{var}[E(X|Y)]}{\text{var}[X]}. \quad (4.92)$$

Ce nombre vérifie $-1 \leq \rho_{X|Y} \leq 1$. Si $\rho_{X|Y}^2 = 1$, alors X est reliée à Y par une relation fonctionnelle au sens de l'analyse classique.

Si $\rho_{X|Y}^2 = 0$, alors $E(X|Y)$ est égal à une constante avec une probabilité 1.

En effet, si $\rho_{X|Y}^2 = 1$, alors on a $E[\text{var}(X|Y)] = 0$, i.e. $\text{var}(X|Y) = 0$ avec une probabilité 1. Pour Y fixé, la V.A. X ne prend qu'une seule valeur $X = \Phi(Y)$. Le rapport $\rho_{X|Y}^2$ est donc maximal ($= 1$) si X est reliée à Y par une relation fonctionnelle au sens de l'analyse classique.

Si $\rho_{X|Y}^2 = 0$, alors on a $\text{var}[E(X|Y)] = 0$, i.e. $E(X|Y)$ est égal à une constante avec une probabilité 1. On dit qu'il y a absence de dépendance en moyenne entre X et Y .

4.2.9 Espérance conditionnelle et projection

Nous allons donner une interprétation des grandeurs associées à un couple aléatoire en se plaçant directement dans le cas des V.A. complexes. Un couple (X, Y) à valeurs complexes est une application d'un espace probabilisé sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}^2$ dont chacune des deux composantes X et Y est une V.A. à valeurs complexes. Rappelons que X est une V.A. à valeurs complexes si ses parties réelle et imaginaire sont des variables aléatoires réelles. Soit $\mathbb{E}$ l'ensemble des V.A. réelles ou complexes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ pour lesquelles

$$\langle X, Y \rangle \triangleq E\{X\bar{Y}\} < \infty. \quad (4.93)$$

Considérons sur $\mathbb{E}$ la relation d'équivalence $X = Y$ ssi $X = Y$ avec une probabilité 1, c'est-à-dire la probabilité de l'ensemble des ω pour lesquels $X(\omega) \neq Y(\omega)$ est nulle. L'ensemble, dénommé $L^2(P)$, de toutes les classes d'équivalence ainsi définies est un espace vectoriel complet pour la topologie définie par la norme

$$\|X\|^2 \triangleq E(|X|^2). \quad (4.94)$$

En effet, il est facile de vérifier que (4.94) définit bien une norme puisque

$$E(|X|^2) = 0 \iff X = 0 \quad \text{sur} \quad L^2(P). \quad (4.95)$$

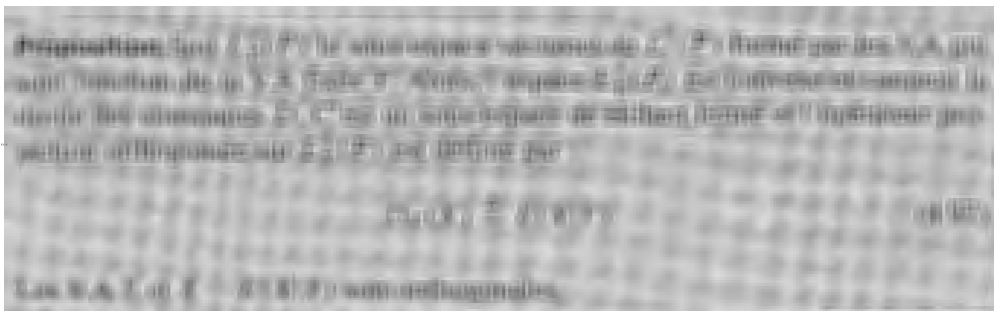
L'ensemble $L^2(P)$ est donc un espace de Hilbert et il est appelé ensemble des V.A. de carré sommable ou d'ordre deux. La définition de la covariance d'un couple aléatoire complexe se généralise comme suit :

$$\text{Cov}(X, Y) \triangleq E[(X - E(X))\{\bar{Y} - E(\bar{Y})\}]. \quad (4.96)$$

où $\bar{Z}$ désigne le complexe conjugué de Z . L'écart type et la covariance sont donc la norme et le produit scalaire des V.A centrées.

Proposition L'ensemble des V.A constantes (nombres déterministes) est une droite vectorielle D de $L^2(P)$. L'opérateur qui à une V.A X de $L^2(P)$ associe le nombre scalaire $E(X)$ est l'opérateur projection orthogonale sur D .

Ce résultat est une conséquence directe du fait que le minimum de $E\{(X - a)^2\}$ est atteint pour $a = E(X)$.



Démontrons à titre d'exemple que l'opérateur Π_Y vérifie les deux propriétés suivantes (c'est donc un projecteur) :

$$\Pi_Y \Pi_Y(X) = \Pi_Y(X) \text{ (opérateur idempotent)}$$

$$\langle Z, \Pi_Y(X) \rangle = \langle \Pi_Y(Z), X \rangle \text{ (opérateur auto-adjoint)}$$

La première propriété est évidente d'après la définition de l'espérance conditionnelle. La deuxième propriété s'obtient en utilisant le théorème de l'espérance totale. On a en effet :

$$E\{ZE(X|Y)\} = E\{E[ZE(X|Y)|Y]\} = E\{E(X|Y) \cdot E(Z|Y)\}$$

et ceci prouve la propriété par symétrie.

Remarque Le théorème de la variance totale s'interprète comme le théorème de Pythagore appliqué au triangle dont les cotés sont $X - E(X)$, $X - E(X|Y)$ et $E(X|Y) - E(X)$ qui est rectangle en $E(X|Y)$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &\triangleq \|E(X|Y) - E(X)\|^2 + \|X - E(X|Y)\|^2 \\ &= \text{var}[E(X|Y)] + E\{[X - E(X|Y)]^2\} \\ &= \text{var}[E(X|Y)] + E\{E\{[X - E(X|Y)]^2|Y\}\} \\ &= \text{var}(E(X|Y)) + E\{\text{var}(X|Y)\}. \end{aligned}$$

4.3 VECTEUR ALÉATOIRE

4.3.1 Passage d'un couple à un vecteur aléatoire

L'étude de la loi de probabilité d'une V.A X_1 peut dépendre de la connaissance des valeurs prises par d'autres V.A $X_2, X_3, \dots, X_n$. Pour faire cette étude, il faut connaître en premier lieu la distribution de probabilité du n -uplet $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ qui est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ dans $\mathbb{R}^n$. D'où la notion de vecteur aléatoire. Associons aux n V.A $X_1, X_2, \dots, X_n$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, le n -uplet

$$\mathbf{x} \triangleq (X_1, X_2, \dots, X_n)^T \quad (4.99)$$

appelé variable aléatoire à n dimensions ou vecteur aléatoire à n composantes. La loi de probabilité d'un vecteur aléatoire est la loi qui donne la probabilité, notée $P_{\mathbf{x}}$, pour que $\mathbf{x}$ prenne ses valeurs dans un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}^n$. Cette loi est définie naturellement par :

$$P_{\mathbf{x}}\{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in (A_1, A_2, \dots, A_n)\}$$

$$\triangleq P\{X_1^{-1}(A_1) \cap X_2^{-1}(A_2) \cap \dots \cap X_n^{-1}(A_n)\} \quad (4.100)$$

$$\triangleq P\{(\omega) / X_i(\omega) \in A_i, i = 1, \dots, n\} \quad (4.101)$$

et ceci pour toute partie $A_1 \times \dots \times A_n$ de $\mathbb{R}^n$.

Proposition La loi d'un vecteur aléatoire $\mathbf{x}$ est complètement déterminée à partir de l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $[0, 1]$ définie par

$$F_{\mathbf{x}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_{\mathbf{x}}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n). \quad (4.102)$$

Cette application est appelée fonction de répartition de $\mathbf{x}$.

L'espérance mathématique d'un vecteur aléatoire est le vecteur certain de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\mathbf{m} \triangleq E(\mathbf{x}) \triangleq \{E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n)\}^T. \quad (4.103)$$

Un vecteur aléatoire est dit centré s'il vérifie la condition

$$E(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (4.104)$$

4.3.2 Fonction de plusieurs variables aléatoires

Soit une fonction déterministe $\mathbf{h}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ définie par

$$\mathbf{h} : (X_1, \dots, X_n) \rightarrow (Y_1, \dots, Y_m). \quad (4.105)$$

Si les X_i désignent des V.A, alors chaque Y_i est une V.A monodimensionnelle, $Y_i = h_i(X_1, \dots, X_n)$, fonction des V.A $X_1, \dots, X_n$. Comme dans le cas d'un couple aléatoire, on a le théorème suivant.

Proposition Si la V.A Y_i est définie par $Y_i = h_i(X_1, \dots, X_n)$, son espérance peut se calculer à partir de la loi conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$ comme suit :

$$E(Y_i) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} h_i(x_1, \dots, x_n) dP_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n). \quad (4.106)$$

Ce résultat généralise les théorèmes déjà énoncés pour une V.A et pour un couple. Les notions de densités conjointes, de lois marginales et de lois conditionnelles, introduites pour un couple aléatoire, se généralisent également de manière naturelle aux vecteurs aléatoires. La loi d'un vecteur aléatoire se rattache à celle d'une V.A comme le précise le résultat important suivant.

Proposition La loi de probabilité d'un vecteur aléatoire $\mathbf{x}$ est entièrement déterminée par celles de toutes les combinaisons linéaires des composantes de $\mathbf{x}$. Elle est donc déterminée par l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) \triangleq E[e^{i\mathbf{u}^T \mathbf{x}}] \quad (4.107)$$

et dénommée fonction caractéristique du vecteur $\mathbf{x}$.

Exemple 4.3.1 Soit $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, une suite de n V.A de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p . La loi de probabilité de la variable définie par

$$X = \sum_{k=1}^n X_k \quad (4.108)$$

est une loi $\mathcal{B}(n, p)$. Démontrer que la fonction caractéristique $\Phi_X(u)$ de X est égale au produit de celles des X_i . En déduire que

$$\Phi_X(u) = (pe^{iu} + q)^n. \quad (4.109)$$

Exemple 4.3.2 Loi d'une somme aléatoire de V.A indépendantes

On considère N V.A, $X_1, \dots, X_N$ définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et de même loi (*iid*). On suppose que N est aussi une V.A. On se propose d'exprimer la fonction caractéristique de la nouvelle V.A :

$$Y \triangleq \sum_{k=1}^N X_k. \quad (4.110)$$

On obtient en appliquant le théorème de l'espérance totale :

$$\begin{aligned} \Phi_Y(u) &= E\{E[e^{iu \sum_{k=1}^N X_k} | N]\} = E\left\{\prod_{k=1}^N E[e^{iu X_k} | N]\right\} \\ &= E\{\Phi_X(u)^N\} = E\{e^{j(-j \text{Log}[\Phi_X(u)]N)}\} \\ &= \Phi_N(-j \text{Log}[\Phi_X(u)]). \end{aligned}$$

4.3.3 Indépendance statistique et orthogonalité

Les composantes de $\mathbf{x}$ sont dites statistiquement indépendantes dans leur ensemble si la fonction caractéristique est égale au produit des fonctions caractéristiques de chacune des composantes de $\mathbf{x}$, i.e.,

$$\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^n \Phi_{X_i}(u_i). \quad (4.111)$$

L'indépendance ainsi définie est difficile à vérifier dans la pratique. On se limite souvent à l'information contenue dans les moments d'ordre 2 des composantes de $\mathbf{x}$. On introduit alors la matrice de variance-covariance (ou matrice de covariance) définie par :

$$\Gamma_{\mathbf{x}} \triangleq E\{[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})][\mathbf{x} - E(\mathbf{x})]^T\}. \quad (4.112)$$

Si x est complexe, on doit remplacer $[x - E(x)]^T$ par son conjugué.

Cette matrice est complètement déterminée par les moments d'ordre 2 associés au vecteur $\mathbf{x}$ et joue un rôle important dans les applications pratiques. Si les composantes de $\mathbf{x}$ sont des V.A réduites, i.e. des V.A de variances égales à l'unité, la matrice de covariance de $\mathbf{x}$ est appelée matrice de corrélation. Par abus de langage, on ne fait pas de distinctions entre matrice de corrélation et matrice de covariance. Si $\mathbf{x}$ a des composantes réelles, la matrice $\Gamma_{\mathbf{x}}$ est symétrique et elle est hermitienne dans le cas où les composantes sont complexes. Dans les deux cas, $\Gamma_{\mathbf{x}}$ vérifie la propriété suivante (matrice définie non négative) :

$$\sum_{i,j=1}^n \lambda_i \bar{\lambda}_j \gamma_{ij} \geq 0, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}$$

où les γ_{ij} représentent les éléments de Γ_x . En effet, si Z est la V.A complexe définie par

$$Z \triangleq \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$$

où les λ_i sont des nombres complexes arbitraires, on a :

$$E[|Z|^2] = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \bar{\lambda}_j \gamma_{ij} \geq 0, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{C}$$

puisque l'espérance $E[|Z|^2]$ est forcément non négative.

Proposition Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit une matrice de covariance d'un vecteur aléatoire est qu'elle soit définie non négative.

Les n V.A $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont dites non corrélées si la matrice de corrélation du vecteur x ayant pour composantes les X_i est une matrice diagonale. Soit

$$X_1, X_2, \dots, X_n : \text{non corrélées} \quad \text{ssi} \quad \text{Cov}(X_i, X_j) = 0 \text{ pour } i \neq j.$$

Remarque Il n'y a pas de distinction entre la non corrélation deux à deux et la non corrélation tout court. Par contre, des V.A indépendantes deux à deux ne sont pas forcément indépendantes dans leur ensemble.

Variance d'une somme de V.A non corrélées La variance d'une somme de V.A non corrélées est égale à la somme des variances de chacune de ces V.A.

Pour établir ce résultat très utile dans les calculs, il suffit d'utiliser la linéarité de l'espérance et d'appliquer la définition de la non corrélation, i.e., si X_i et X_j sont non corrélées on a $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$.

Exemple 4.3.3 Variance d'une somme de V.A indépendantes

Un avion long-courrier peut transporter 100 passagers et leurs bagages. Il pèse 120 tonnes, sans passagers ni bagages, mais équipage compris et plein de carburant. Les consignes de sécurité interdisent au commandant de bord de décoller si le poids de l'appareil chargé dépasse 129.42 tonnes. Les 100 places ont été réservées. Le poids d'un voyageur suit une loi d'espérance mathématique 70 kg et d'écart-type 10 kg. Le poids de ses bagages suit une loi d'espérance mathématique

20 kg et d'écart-type 10 kg. Toutes ces variables aléatoires sont supposées indépendantes.

1. L'espérance mathématique du poids total de l'appareil au moment du décollage est-elle conforme aux consignes de sécurité ?
2. Calculer l'écart-type σ du poids total de l'appareil.
3. Donner un majorant de la probabilité pour que le poids réel de l'appareil au décollage dépasse 129,42 tonnes.

4.3.4 Vecteur gaussien réel, représentation complexe

Un vecteur aléatoire $\mathbf{x}$ est dit vecteur gaussien à n dimensions si toute combinaison linéaire de ses composantes est une V.A gaussienne, i.e., pour tout vecteur déterministe $\mathbf{a}$, la V.A scalaire définie par $Y \triangleq \mathbf{a}^T \mathbf{x}$ est gaussienne.

Tenant compte des propriétés de la fonction caractéristique, on peut supposer que $\mathbf{x}$ est centré. Le théorème de Cramer-Wold [6] permet d'établir que la loi de $\mathbf{x}$ est alors parfaitement déterminée. L'expression de la fonction caractéristique $\Phi_{\mathbf{x}}$ se déduit de la relation :

$$\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}) = \Phi_Y(1) \quad \text{si} \quad Y \triangleq \mathbf{a}^T \mathbf{x}.$$

Comme, Y est par définition une gaussienne centrée et de variance :

$$\text{var}(Y) = \mathbf{a}^T \Gamma \mathbf{a}$$

où $\Gamma \triangleq E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]$ désigne la matrice de covariance du vecteur $\mathbf{x}$, on obtient : $\Phi_Y(u) = e^{-\frac{u^2}{2}\text{var}(Y)}$. D'où l'expression suivante pour $\Phi_{\mathbf{x}}$:

$$\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{u}^T \Gamma \mathbf{u}}. \quad (4.113)$$

Partant de cette expression, on peut établir les résultats suivants pour un vecteur gaussien.

1. Les composantes de $\mathbf{x}$ sont indépendantes si elles sont non corrélées, i.e., si et seulement si la matrice de covariance est diagonale.
2. Si la matrice de covariance Γ d'un vecteur aléatoire gaussien $\mathbf{x}$ est inversible, $\mathbf{x}$ admet une densité de probabilité et cette dernière est donnée par :

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \rightarrow f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n [\det(\Gamma)]}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T \Gamma^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})}. \quad (4.114)$$

3. Les moments d'ordres impairs sont nuls, i.e.

$$E(X_{i_1} \dots X_{i_{2k+1}}) = 0 \quad (4.115)$$

et les moments d'ordres pairs sont donnés par :

$$E[x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{2k}}] = \sum_{\sigma} E[x_{\sigma(i_1)} x_{\sigma(i_2)}] \dots E[x_{\sigma(i_{2k-1})} x_{\sigma(i_{2k})}] \quad (4.116)$$

où σ désigne une permutation de $(1, 2, \dots, 2k)$ et où la somme est étendue à l'ensemble de tous les σ donnant des termes différents. Le membre de droite de (4.116) comprend une somme de $(2k-1)!! \triangleq 1.3.5 \dots (2k-1)$ termes. En particulier si l'on prend $i_1 = i_2 = \dots = i_{2k}$, on obtient

$$E[X_i^{2k}] = [(2k-1)!!][E(X_i^2)]^k \quad (4.117)$$

Tous les cumulants d'ordre $n \neq 2$ sont nuls et la seconde fonction caractéristique est donnée par :

$$\Psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \Gamma \mathbf{u}. \quad (4.118)$$

Exemple 4.3.4 Moment d'ordre 4 d'une V.A gaussienne

La relation (4.120) donne pour $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X$, $E(X^4) = 3\sigma^2$ où σ^2 désigne la variance d'une V.A gaussienne centrée.

Il est possible d'introduire la définition d'un vecteur gaussien comme étant un vecteur dont la loi est définie par (4.114). On démontre alors que le caractère gaussien se conserve dans toute transformation linéaire, i.e., si $\mathbf{x}$ est un vecteur gaussien, alors il en est de même pour $\mathbf{y} = h(\mathbf{x})$ où h est une transformation linéaire. Cette propriété fondamentale s'obtient en calculant la fonction caractéristique de $\mathbf{y}$. Cette propriété est valable pour les vecteurs de dimension finie ce qui est souvent le cas des espaces fonctionnels rencontrés dans différents domaines tels que l'automatique et le traitement du signal. Par contre, $h(\mathbf{x})$ n'est plus gaussien si h est non linéaire. Les V.A gaussiennes jouent un rôle important dans la pratique pour les raisons suivantes.

La loi de Gauss introduit de grandes simplifications dans les calculs.

Toute combinaison linéaire de V.A gaussiennes dans leur ensemble est une V.A gaussienne.

La loi de Gauss s'introduit naturellement dans un très grand nombre de problèmes en raison du « théorème central limite » qui sera énoncé plus loin. Ce théorème relie la moyenne arithmétique d'une infinité dénombrable de V.A à une V.A gaussienne.

Il y a équivalence entre la notion d'indépendance et celle de non-corrélation dans le cas de V.A. gaussiennes.

Exemple 4.3.5 Carré d'une V.A. gaussienne

Soit X une V.A. gaussienne centrée et de variance σ^2 . On pose $Y = X^2$. Les variables X et Y sont statistiquement liées puisqu'il existe une relation entre ces deux variables. On a $E(XY) = E(X^3) = 0$ puisque c'est le moment d'ordre trois d'une variable gaussienne centrée. Les variables X et Y sont donc orthogonales. On a $E(XY^n) = E(X^{2n+1}) = 0$ puisque c'est un moment d'ordre impair d'une variable gaussienne centrée.

Exemple 4.3.6 Combinaison linéaire de deux V.A. gaussiennes

Soit (X, Y) un couple aléatoire réel, centré et de matrice de covariance :

$$\Gamma \triangleq \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}, 0 < \alpha < 1.$$

On définit la nouvelle variable aléatoire $Z \triangleq aX + bY$ où a et b sont deux constantes déterministes.

1. On suppose que chacune des V.A. X et Y est gaussienne. Alors Z est non gaussienne.
2. On suppose que chacune des V.A. X et Y est gaussienne et que X et Y sont indépendantes. Alors Z est aussi gaussienne.
3. On suppose que le couple (X, Y) est gaussien. Alors le calcul de la fonction caractéristique ϕ_Z de Z en fonction de a et b montre que Z est gaussienne.

Exemple 4.3.7 Représentation complexe d'un vecteur gaussien

Pour des raisons pratiques, la notion de V.A. à valeurs complexes joue un rôle important dans plusieurs applications. Les définitions de moments, de cumulants et de V.A. gaussienne, ont été introduites dans le cas complexe en utilisant des démarches plus ou moins différentes [16]. Si Z est une V.A. réelle ou complexe, sa fonction caractéristique est définie par :

$$\Phi_Z(w, \bar{w}) \triangleq E[e^{\frac{j}{2}(\bar{w}Z + w\bar{Z})}], \quad j^2 = -1$$

où w est une variable déterministe complexe et $\bar{w}$ le complexe conjugué de w . La fonction Φ_Z est donc une fonction des deux variables complexes w et $\bar{w}$ qui prend des valeurs réelles. Pour les variables réelles, $Z = X$, Φ_Z est reliée à la fonction caractéristique classique par :

$$\Phi_X(u) = \Phi_Z(u, \bar{u}) = \Phi_Z(u, u)$$

où u est une variable réelle. Ainsi cette extension permet d'avoir une seule définition de la fonction caractéristique qui est valable aussi bien pour des V.A à valeurs réelles que complexes. En particulier, les concepts de moments, cumulants, variable gaussienne seront définis sans distinction entre le cas réel et le cas complexe. Les résultats dans le cas complexe ne seront pas développés dans ce chapitre.

4.4 SUITES DE VARIABLES ALÉATOIRES

Si X_1 et X_2 sont deux VA définies sur le même espace probabilisé, leur somme $X_1 + X_2$ et leur produit $X_1 X_2$ définissent des V.A sur cet espace. Ce résultat s'étend au cas de plusieurs V.A. L'ensemble des V.A définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un sous-espace vectoriel $\mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R})$ de l'espace vectoriel des applications de Ω dans $\mathbb{R}$. C'est également un sous-anneau de l'anneau des applications de Ω dans $\mathbb{R}$. Supposons que la loi de probabilité $F_X(x, n)$ d'une V.A X dépend d'un paramètre n pouvant prendre toutes les valeurs entières. Les fonctions $F_X(x, n)$ sont déterminées à partir de la loi de probabilité P introduite sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On peut s'intéresser aux propriétés asymptotique des $F_X(x, n)$. On introduit alors pour chaque n fixé, une V.A notée X_n admettant $F_X(x, n)$ comme fonction de répartition. Il est clair que X_n n'est pas unique. On définit ainsi une suite de V.A. Les différentes notions de voisinage d'un point donnée de l'espace $\mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R})$ permettent d'introduire différents types de convergences d'une suite de V.A sur $\mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R})$ [13] [16] [20].

4.4.1 Convergences d'une suite de variables aléatoires

Une suite de V.A X_n , $n \in N$, appartenant à $\mathcal{E}(\Omega, \mathbb{R})$ étant une suite de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, il existe diverses façons de définir la notion de convergence de X_n vers une V.A limite X . Certains types de convergences jouent un rôle important en calcul des probabilités. Quatre types de convergences vont être examinés dans cette section.

a) Convergence en probabilité ou convergence faible

La suite (X_n) converge en probabilité vers la V.A X si pour tout réel ϵ fixé, la suite numérique

$$P_{n,\epsilon} \triangleq P\{\omega / |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \epsilon\} \triangleq \int_{\{\omega / |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \epsilon\}} dP(\omega)$$

converge vers 1. On dénomme cette convergence par la P -convergence. Cette convergence exprime que pour n suffisamment grand et ϵ quelconque, la probabilité de l'événement

$$A_{n,\epsilon} \triangleq \{\omega / |X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon\} \quad (4.119)$$

est arbitrairement voisine de 1. Cette convergence est la convergence en mesure classique où la mesure est définie par la mesure de probabilité P .

b) Convergence presque sûre ou convergence forte

La suite (X_n) converge presque sûrement (p.s.) vers X si la suite des ensembles

$$A_{n,0} \triangleq \{\omega / |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0\}$$

tend vers un ensemble A de probabilité 1 : $P(A) = 1$. Cette convergence est la convergence presque partout classique où la mesure est définie par la mesure de probabilité P .

Condition suffisante La suite (X_n) converge p.s. vers X si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1. Pour tout μ fixé, la série à termes positifs suivante est convergente :

$$S \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} P[\{\omega / |X_n(\omega) - X(\omega)| > \mu\}]$$

2. Il existe un réel $s > 0$ tel que la série à termes positifs suivante est convergente :

$$S \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} E\{|X_n - X|^s\}.$$

On peut vérifier à titre d'exemple que la preuve du point 2 découle du point 1. en utilisant l'inégalité de Tchebyshev qui permet d'écrire :

$$P\{\omega / |X_n(\omega) - X(\omega)| > \mu\} \leq E\{|X_n - X|^s\} / \mu^s.$$

c) Convergence en moyenne d'ordre p

La suite (X_n) converge en moyenne d'ordre p vers X si la suite numérique

$$V_n \triangleq E\{|X_n - X|^p\}$$

converge vers 0. Le cas le plus fréquent en pratique correspond à $p = 2$ et l'on parle dans ce cas de convergence en moyenne quadratique (m.q.).

Lemme de Loève Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite (X_n) converge en m.q. est que, lorsque m et n tendent vers l'infini, indépendamment l'un de l'autre, la suite suivante tende vers une limite :

$$u_{n,m} \triangleq E\{X_n X_m^*\}.$$

d) Convergence en loi

La suite de V.A. (X_n) de fonctions de répartition F_{X_n} converge en loi vers la V.A. X de fonction de répartition F_X si en tout point x où $F_X(x)$ est continue, la suite numérique $F_{X_n}(x)$ converge vers le nombre $F_X(x)$. Pour des V.A. discrètes la convergence en loi vers une V.A. s'exprime par $P(X_n = k)$ converge vers $P(X = k)$ pour toutes les valeurs k de X_n .

Une suite de V.A. discrètes peut cependant converger vers une V.A. continue (par exemple, la loi de Poisson converge vers une loi de Gauss : voir dans la suite de ce chapitre).

Si une suite de V.A. X_n admettant des densités f_n et X une densité f , alors la convergence en loi de (X_n) vers X implique la convergence ponctuelle de la suite $f_n(x)$ vers $f(x)$ en tout point x .

e) Convergence des fonctions caractéristiques

La convergence en loi est liée à la convergence des fonctions caractéristiques comme le précise le théorème suivant.

Levy-Cramer-Dugué 1. Si la suite (X_n) converge en loi vers X alors ϕ_{X_n} converge uniformément sur tout intervalle $[a, b]$ vers ϕ_X .

2. Si la suite de fonctions (ϕ_{X_n}) converge vers une fonction ϕ dont la partie réelle est continue à l'origine, alors ϕ est une fonction caractéristique et la suite (X_n) converge en loi vers une V.A. X dont la fonction caractéristique est donnée par $\phi_X = \phi$.

f) Liens entre les différents types de convergence

Nous allons donner très brièvement quelques résultats sur les liens entre les 4 notions de convergence.

La p.s. convergence implique la convergence en probabilité. En effet, il est clair que $A_{n,0}$ est contenu dans $A_{n,\epsilon}$, introduit en (4.119) et donc $P(A_{n,0}) \leq P(A_{n,\epsilon})$. Comme la probabilité est majorée par 1, la condition $P(A_{n,0})$ tend vers 1 entraîne $P(A_{n,\epsilon})$ tend vers 1.

La convergence en m.q. implique la convergence en probabilité. En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |X_n - X|^2 dP(\omega) &\geq \int_{\{\omega/|X_n - X| \geq \epsilon\}} |X_n - X|^2 dP(\omega) \\ &\geq \epsilon^2 \int_{\{\omega/|X_n - X| \geq \epsilon\}} dP(\omega) = \epsilon^2 P[\{\omega/|X_n - X| \geq \epsilon\}]. \end{aligned}$$

D'où

$$P[\{\omega/|X_n - X| \geq \epsilon\}] \leq \frac{E\{|X_n - X|^2\}}{\epsilon^2} = \frac{V_n}{\epsilon^2} \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+. \quad (4.120)$$

La convergence en probabilité implique la convergence en loi. En effet, la convergence en probabilité implique que pour n suffisamment grand et ϵ quelconque, l'événement $A_{n,\epsilon}$ défini par (4.119) est quasi certain. La suite des fonctions F_{X_n} converge donc ponctuellement vers la fonction de répartition de X .

La convergence en loi est la convergence la plus faible dans le sens où elle est entraînée par les trois autres. Cependant, c'est la convergence la plus utilisée en pratique car elle permet d'approximer la fonction de répartition de X_n par celle de X pour les grandes valeurs de n .

Exemple 4.4.1 Égalités en moyenne quadratique et presque sûrement

On a $X = Y$ en moyenne quadratique ($X \stackrel{m.q.}{=} Y$) si, et seulement si, $X = Y$ presque sûrement ($X \stackrel{p.s.}{=} Y$). En effet, $X \stackrel{m.q.}{=} Y$ équivaut à $E(|X - Y|^2) = 0$ et $X \stackrel{p.s.}{=} Y$ équivaut à $P[\{\omega/X \neq Y\}] = 0$. Le résultat énoncé se déduit immédiatement de l'égalité suivante.

$$\begin{aligned} E(|X - Y|^2) &= \int_{\{\omega/|X-Y| \neq 0\}} |X - Y|^2 dP(\omega) + \int_{\{\omega/X=Y\}} |X - Y|^2 dP(\omega) \\ &= \int_{\{\omega/X \neq Y\}} |X - Y|^2 dP(\omega) \triangleq P[\{\omega/X \neq Y\}]. \end{aligned}$$

4.4.2 Loi des grands nombres

La somme de V.A indépendantes et de même loi, on utilise souvent l'abréviation V.A *iid* qui signifie « independent and identically distributed », joue un rôle fondamental en statistique. Nous donnons ici quelques résultats fondamentaux concernant ce problème.

Proposition 4.4.1 Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ une suite de V.A. indépendantes d'espérance finie μ et de variance finie σ^2 . On pose

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

alors on a (loi forte des grands nombres)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = 0 \quad \text{p.s.}$$

La loi forte des grands nombres.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = 0 \quad \text{p.s.}$$

La loi faible des grands nombres.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = 0 \quad \text{en prob.}$$

4.4.1 Théorème des grands nombres

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{\sqrt{n}} = 0 \quad (4.123)$$

converge en probabilité vers 0 si X_k converge presque sûrement vers μ .

Si (X_n) est une suite d'échantillons, on a : $\mu_n = \mu$ et $\sigma_n^2 = \sigma^2$ et dans ce cas, la condition (4.124) est toujours vérifiée.

4.4.3 Théorèmes de la limite centrée

Proposition. Soit X_n une suite de V.A. ayant une même loi de probabilité μ et d'écart-type σ . Alors on a :

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad (4.125)$$

converge en loi vers une V.A. normale centrée et réduite $N(0, 1)$.

Pour démontrer ce résultat, il suffit de poser $nY_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Ce résultat se généralise comme suit.

Proposition. Soit X_n une famille de V.A. indépendantes sachant chacune une loi de probabilité μ_n et d'écart-type σ_n et telle que la fonction de répartition F_n de $X_n = \mu_n$ vérifie la condition :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{|x| > \epsilon \sqrt{n}} dF_k(x) = 0 \quad (4.126)$$

où

$$\mu_n = \sum_{j=1}^m \frac{x_j}{\sigma_n}$$

Alors, la suite F_n tend vers :

$$F_n = \frac{\sum_{k=1}^n \mu_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad (4.127)$$

converge en loi vers une V.A. normale centrée et réduite.

4.4.4 Approximations des lois de probabilité classiques

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson Soit X_n une suite de V.A binomiales de loi $\mathcal{B}(n, p)$ telles que n et p tendent respectivement vers ∞ et 0 de manière à ce que le produit np tende vers une limite finie λ . Alors la suite X_n converge en loi vers une V.A de Poisson de paramètre λ .

Approximation d'une loi multinomiale par une loi binomiale Lorsque N tend vers l'infini, la loi $H(N, n, p)$ tend vers la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale Si X_n est une suite de V.A binomiales de loi $\mathcal{B}(n, p)$, alors la suite de V.A définie par

$$Y_n \triangleq \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$$

converge en loi vers une V.A normale centrée et réduite.

Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale Soit X_λ une famille de V.A suivant la même loi de Poisson $P(\lambda)$, alors la famille

$$Y_\lambda \triangleq \frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

converge en loi vers une V.A normale réduite.

4.4.5 Approximations des moments d'une variable aléatoire

Soient $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, n$ une suite d'observations indépendantes et de même loi (*iid*) de la même V.A vectorielle $\mathbf{x}$ à p dimensions et soit θ un vecteur déterministe. Une fonction g des variables $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ telle que

$$E[g(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)] = \theta \quad (4.128)$$

est un estimateur non biaisé de θ . Deux situations importantes dans la pratique correspondent aux cas où $g(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ est un estimateur d'un moment ou d'un cumulants. Différents types d'estimateurs des moments et des cumulants sont proposés dans la littérature. Les plus importants sont fondés sur les k -statistiques et correspondent aux cas où la fonction $g(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ est un polynôme symétrique des composantes des $\mathbf{x}_i$. Nous rappelons ci-dessous des résultats sur ces estimateurs dans le cas multidimensionnel puis monodimensionnel.

Proposition Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a. indépendantes de même loi que X . Alors, la suite des estimateurs empiriques des moments $\hat{\mu}_{n,k}$ converge presque sûrement vers μ_k si et seulement si μ_k existe.

$$\hat{\mu}_{n,k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu_k$$

convergence en probabilité vers μ_k si et seulement si μ_k existe.

Proposition Soit X une V.A. scalaire réelle dont les moments μ_k existent pour tout entier k et $\hat{\mu}_{n,k}$ l'estimateur empirique défini par

$$\hat{\mu}_{n,k} \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

où $X_1, \dots, X_n$ sont des V.A. indépendantes et de même loi que X . Alors, la variable $\hat{\mu}_{n,k}$ possède les propriétés suivantes.

- 1. On a : $\text{var}(\hat{\mu}_{n,k}) = \frac{\mu_{2k} - \mu_k^2}{n}$.
- 2. La V.A. $\hat{\mu}_{n,k}$ converge presque sûrement vers μ_k et on a $E(\hat{\mu}_{n,k}) = \mu_k$.
- 3. Pour les grandes valeurs de n , $\hat{\mu}_{n,k}$ peut être approximée par une V.A. normale de moyenne μ_k et de variance $\text{var}(\hat{\mu}_{n,k})$.

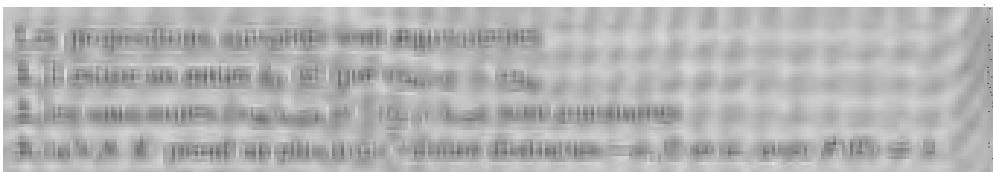
Pour un nombre d'échantillons fixé n , une mesure de la précision de l'estimateur de μ_k peut être faite à l'aide de la quantité :

$$w_k \triangleq \frac{\text{var}(\mu_k)}{E^2(\mu_k)} = \frac{1}{n} (v_k - 1) \quad \text{avec} \quad v_k \triangleq \frac{m_{2k}}{m_k^2}, \quad m_k \neq 0$$

appelées variances relatives. Les résultats suivants montrent que la suite des variances relatives des estimateurs empiriques des moments n'est pas croissante dans le cas général. En revanche, si la loi de x est symétrique et centrée, seule l'estimation des moments pairs présente un intérêt et dans ce cas la suite des variances relatives est croissante.

Proposition Pour une V.A. X , on a :

- 1. La suite des variances relatives des estimateurs empiriques des moments n'est pas croissante.
- 2. Si la loi de X est symétrique et centrée, la suite des variances relatives des estimateurs empiriques des moments pairs est croissante.
- 3. Si la loi de X est symétrique et centrée, la suite des variances relatives des estimateurs empiriques des moments impairs est nulle.



EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS

4.1 Dénombrement et calcul de probabilités

Soient n et p deux entiers naturels. Calculer le nombre de n -uplets solutions de l'équation $x_1 + \dots + x_n = p$ dans chacun des deux cas suivants : $x_i \in \{0, 1\}$ puis $x_i \in \mathbb{N}$.

4.2 Fonction d'une V.A

Soient X une V.A continue et h une fonction déterministe dérivable. La fonction h permet d'associer à X une autre V.A notée $Y = h(X)$ et par définition, une valeur y de Y est obtenue comme image par h d'une valeur x de X , i.e. $y = h(x)$. On suppose h dérivable et on se propose de calculer la densité de probabilité f_Y de Y en fonction de celle de X notée f_X . Traiter le problème dans les cas suivants.

1. $h(x) = 2x - 3$.
2. $h(x) = -2x$.
3. $h(x) = \sin x$ et X distribuée uniformément sur $] -\pi, \pi]$.

4.3 Formule de Huyghens et Inégalité de Tchebyshev

1. On appelle variance d'une variable aléatoire X la quantité notée $\text{var}(X)$ ou σ^2 , définie par

$$\text{var}(X) = E[(X - E(X))^2].$$

Démontrer les propriétés suivantes reliant $\text{var}(X)$ et $E(X)$:

$$\text{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E[(X - a)^2] = \text{var}(X) + (E(X) - a)^2, a \in \mathbb{R} \quad (\text{Huyghens}).$$

2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{4} - \lambda x^2 \quad \text{pour } x \in [-1, 1] \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Déterminer λ pour que f soit une densité de probabilité. Soit X une V.A de densité f . Calculer $E(X)$, $\text{var}(X)$. Utilisant l'inégalité de (Bienaymé-Tchebyshev) déterminer une valeur du nombre k , $k > 0$, pour que l'inégalité

$$P[X \in [-k, k]] \geq \frac{3}{4}$$

soit vérifiée. Commenter le résultat obtenu.

3. Soit Y une V.A réelle ne pouvant prendre que des valeurs non négatives et pour laquelle l'espérance mathématique $E(Y)$ existe. On suppose que Y admet une densité de probabilité $f_Y(y)$. Alors, on a :

$$P(Y \geq k) \leq \frac{E(Y)}{k}, \quad \forall k > 0.$$

4.4 Fonction de répartition

Soient X une V.A uniformément répartie sur l'intervalle réel $[-c, c]$ et h la fonction déterministe définie par :

$$\begin{aligned} h(x) &= x - c \quad \text{pour } x \geq c \\ &= 0 \quad \text{pour } |x| < c \\ &= x + c \quad \text{pour } x \leq -c, \quad c > 0. \end{aligned}$$

On introduit la nouvelle V.A $Y = h(X)$. Calculer la fonction de répartition F_Y , la densité de probabilité f_Y de Y et l'espérance mathématique $E(Y)$ de la nouvelle V.A Y .

4.5 Fonction génératrice

On considère une variable aléatoire N ne prenant que des valeurs entières positives ou nulles et on appelle $p[k]$ la probabilité $p[k] = \text{Prob}[N = k]$, $k \geq 0$, k entier. On appelle fonction génératrice de N la fonction

$$g(s) \triangleq E[(1-s)^N]. \quad (4.130)$$

1. Donner l'expression de $g(s)$ à l'aide de $p[k]$ et calculer $g(0)$.

2. Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de $g(s)$. En choisissant une valeur appropriée de s , en déduire l'expression de $E[N]$ et de $E[N(N-1)]$.

3. On appelle moment factoriel d'ordre p (p entier) de N la quantité $f_p = E[N(N-1)\dots(N-p)]$. Exprimer f_p en introduisant la fonction $g(s)$.

4. Calculer explicitement $g(s)$ lorsque N est une variable aléatoire obéissant à une loi de Poisson de paramètre m . En déduire les moments factoriels dans ce cas.

4.6 Fonction caractéristique

On considère une variable aléatoire réelle X dont la densité de probabilité est donnée par

$$f(x) = \frac{a}{\alpha^2 + x^2}.$$

1. Exprimer a en fonction de α .
2. Déterminer la fonction caractéristique de X .
3. Que peut-on dire de l'existence des moments $\mu_n \triangleq E(X^n)$ pour n entier positif ?

4.7 Loi exponentielle

Soient λ une constante positive et X une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est définie par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Déterminer la densité de la variable aléatoire $Y = e^X$.
2. Calculer l'espérance de Y .
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable $Z = [X]$ où $[X]$ désigne la partie entière de X . (On rappelle que $[x]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x).
4. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois exponentielles de paramètres λ et μ respectivement. Calculer la probabilité de l'événement $\{X \leq Y\}$.

4.8 Loi du carré d'une V.A gaussienne

On rappelle que la densité de probabilité d'une V.A gaussienne X de valeur moyenne m et de variance σ^2 est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

On se propose de calculer les moments centrés définis par : $m_h \triangleq E\{(X-m)^h\}$.

1. Établir une relation de récurrence entre m_h et m_{h-2} et en déduire l'expression de m_h en fonction de σ .

2. On suppose $m = 0$ et on considère la nouvelle V.A $Y = h(X)$ où la fonction h est définie par :

$$h(x) = ax^2, a > 0.$$

Exprimer la fonction caractéristique $\Phi_Y(u)$ de Y en fonction de la densité de X et se ramenant à une intégrale sur $[0, \infty[$, introduire le changement de variable défini par : $y = ax^2, x > 0$.

3. En déduire, sans aucun calcul d'intégrale, la densité de probabilité $f_Y(y)$ de Y .

4. Déterminer, sans aucun calcul d'intégrale, l'espérance mathématique de Y .

4.9 Loi conjointe et lois marginales

Soit (X, Y) un couple aléatoire uniforme sur le triangle $T = \{(x, y), x > 0, y > 0, x + y < a\}$

1. Tracer le triangle T dans le plan xoy et donner l'expression de la densité de probabilité conjointe de (X, Y) .

2. Déterminer les densités marginales de X et Y .

3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4.10 Corrélation et indépendance

Soit (X, Y) un couple aléatoire continu réel de densité uniforme définie par :

$$f_{XY}(x, y) = \alpha, \quad \text{si } |x| + |y| \leq 1 \\ = 0 \quad \text{ailleurs.}$$

1. Déterminer la constante α .

2. Déterminer la densité (marginale) f_X de la V.A X et calculer $E(X)$. Traiter les mêmes questions pour Y .

3. Calculer $E(XY)$ et en déduire la valeur du coefficient de corrélation de X et Y .

4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

On considère une V.A à deux dimensions (X, Y) uniforme sur le carré $[0, a] \times [0, a]$.

1. Déterminer les densités de probabilité marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$ de X et Y .

2. Démontrer que X et Y sont indépendantes.

3. Déterminer la densité de $Z = X + Y$.

4.11 V.A à valeurs complexes

On considère la V.A à valeur complexes définie par :

$$x_n = A_1 e^{j2\pi(f_1 n + \phi_1)} + A_2 e^{j2\pi(f_2 n + \phi_2)} + B$$

où f_1, f_2, A_1, A_2 sont des constantes positives, n un entier relatif fixé et ϕ_1, ϕ_2, B trois V.A indépendantes deux à deux et de même loi uniforme sur $[-a, a]$.

1. Calculer l'espérance mathématique $E[x_n]$.
2. On choisit pour a la plus petite valeur pour laquelle $E[x_n] = 0, \forall n$. Déterminer cette valeur et calculer la covariance $\gamma_{n,m} \triangleq E[x_n x_m^*]$.

4.12 Somme de deux V.A

Deux personnes se donnent rendez-vous à la sortie de leur travail entre 19 et 20 h. On suppose qu'on peut associer aux deux instants d'arrivée des deux personnes respectivement deux V.A X et Y , continues, indépendantes et uniformes sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_W de la variable aléatoire W qu'on peut associer au temps d'attente de la première personne arrivée.
2. En déduire la densité de probabilité f_W de W .
3. Calculer $E(W)$.
4. Les deux personnes conviennent que la première arrivée s'en ira après une attente égale à $2E(W)$. Quelle est la probabilité pour que le rendez-vous ait lieu ?

4.13 Produit de deux V.A

On considère le couple aléatoire continu (X, Y) de densité de probabilité uniforme sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. On construit à partir de (X, Y) la nouvelle variable aléatoire W dont les valeurs sont définies par :

$$w = h(x, y) \triangleq xy.$$

Déterminer la fonction de répartition F_W de la variable W . En déduire l'expression de la densité f_W de W .

4.14 Rapport de deux V.A

On considère le couple aléatoire (X, Y) de densité de probabilité

$$f_{XY}(x, y) = \frac{k}{(1 + x^2)(1 + y^2)}.$$

1. Déterminer la valeur de la constante k .
2. Trouver la fonction de répartition de $F_{XY}(x, y)$.
3. Calculer la probabilité pour que le couple aléatoire (X, Y) appartienne au rectangle $[0, 1] \times [0, 1]$.
4. On construit à partir de (X, Y) la nouvelle variable aléatoire Z dont les valeurs sont définies par :

$$z = h(x, y) \triangleq \frac{y}{x}.$$

Exprimer la fonction de répartition F_Z de la variable Z en fonction de f_{XY} . En déduire l'expression de la densité f_Z de Z .

4.15 Couple gaussien

On rappelle que la densité de probabilité d'un vecteur aléatoire V à n dimensions, réel, centré et gaussien est donnée par

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \det(\Gamma)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Gamma^{-1} \mathbf{x}\right] \quad (4.131)$$

où $\mathbf{x}$ est un vecteur à n dimensions, $\mathbf{x}^T$ sont transposé et Γ la matrice d'autocorrélation de V définie par

$$\Gamma \triangleq E(VV^T).$$

Dans toute la suite de l'exercice on se place dans le cas $n = 2$ et on appelle X et Y les composantes du vecteur V . On suppose que $E(X^2) = E(Y^2) = \sigma^2$ et on introduit le coefficient de corrélation c défini par :

$$c = \frac{E(XY)}{\sqrt{E(X^2)E(Y^2)}}.$$

1. Exprimer la densité de probabilité en fonction de c et σ et calculer la probabilité $p = P[X \geq 0 \text{ et } Y \geq 0]$. Pour ce calcul on peut utiliser les coordonnées polaires et on doit trouver :

$$p = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \text{Arctg} \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \right].$$

2. On construit à partir du couple aléatoire (X, Y) le nouveau couple (Z, T) défini par :

$$(Z, T) \triangleq \left(\frac{|X|}{X}, \frac{|Y|}{Y} \right).$$

Calculer la fonction caractéristique $\Phi_{ZT}(u, v)$ de (Z, T) ainsi que les moments $E(Z)$, $E(T)$, $E(Z^2)$, $E(T^2)$ et $E(ZT)$.

4.16 Bornes inférieure et supérieure de plusieurs V.A

Soient $X_1, \dots, X_n$ une suite de n V.A réelles de même loi.

1. Soit Y la V.A définie par

$$Y = \min(X_1, \dots, X_n).$$

Démontrer que les fonctions de répartition de Y et de X_1 vérifient l'inégalité

$$F_Y(y) \leq n F_{X_1}(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

2. On suppose, en plus, que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes. Établir la relation qui existe entre la densité de X_1 et celle de la V.A, Z , définie par

$$Z = \max(X_1, \dots, X_n).$$

4.17 Mouvement brownien

On considère la suite de V.A x_n , $n = 1, 2, \dots$, définie par :

$$x_n = \sum_{j=1}^n U_j$$

où les U_j sont des V.A réelles, centrées, indépendantes deux à deux, et toutes de même variance σ^2 . Donner la structure de la matrice de covariance du vecteur aléatoire $\mathbf{x}$ de composantes x_j , $1 \leq j \leq N$.

4.18 Propriétés d'une matrice de corrélation

Soit M une matrice à éléments dans $\mathbb{C}$ définie positive ($M > 0$).

1. Montrer que pour toute matrice A inversible, on a

$$M > 0 \quad \text{ssi} \quad A^H M A > 0.$$

2. Montrer que pour toute matrice N ayant le même nombre de lignes que M , on a

$$M > 0 \text{ implique } M + NN^H > 0.$$

3. On sait que toute matrice hermitienne d'ordre n s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$M = \sum_{k=1}^n \lambda_k U_k U_k^H$$

où les λ_k sont les valeurs propres de M et les U_k les vecteurs propres associés, supposés de norme 1. Démontrer que les λ_k sont réels et que deux vecteurs U_i et U_j associés à deux valeurs distinctes λ_i et λ_j sont orthogonaux, i.e., $U_i^H U_j = 0$ pour $\lambda_i \neq \lambda_j$.

4. Soient X un vecteur dont les composantes sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et soit M sa matrice de covariance définie par $M = E[XX^H]$. Démontrer que M est définie non négative.

4.19 Espaces propres associés à une matrice de corrélation

On considère M vecteurs orthonormés de $\mathbb{C}^N$, $S_1, \dots, S_M$ et on introduit le vecteur aléatoire :

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^M A_j S_j$$

où les A_j sont des V.A non corrélées, de variance σ_j^2 et indépendantes du vecteur $\mathbf{b}$. On suppose que les composantes de $\mathbf{b}$ sont orthogonales et de même variance σ_b^2 . On suppose $N > M$ et on pose $K = N - M$.

1. Déterminer la matrice de covariance $\Gamma_{\mathbf{x}}$ du vecteur aléatoire $\mathbf{x}$.
2. Vérifions que les S_k sont des vecteurs propre de $\Gamma_{\mathbf{x}}$ et déterminer les valeurs propres associées.
3. Démontrer que la matrice $\Gamma_{\mathbf{y}}$ est de rang M .
4. Démontrer que σ_b^2 est valeur propre minimale de $\Gamma_{\mathbf{x}}$ et donner sa multiplicité μ .
5. Soit V un vecteur propre de $\Gamma_{\mathbf{x}}$ associé à σ_b^2 . Démontrer que V est orthogonal à chacun des $S_1, \dots, S_M$.

6. Démontrer qu'on peut trouver K vecteurs propres $B_1, \dots, B_K$ de $\mathbb{C}^N$ deux à deux orthogonaux et pour lesquels la fonctionnelle suivante s'annule :

$$F(V_1, \dots, V_K) = \sum_{j=1}^M V_j^H S_j.$$

Les deux espaces vectoriels engendrés par $S_1, \dots, S_M$ et par $B_1, \dots, B_K$ sont appelés respectivement espace signal et espace bruit et ils jouent un rôle important en analyse spectrale.

4.20 Suites de V.A

Soient $A_j, j = 1, 2, \dots$ une suite de V.A indépendantes et prenant chacune la valeur 0 ou 1 avec les probabilités $q, p = 1 - q$. Pour n fixé, on définit la V.A $X = A_1 + A_2 + \dots + A_n$. La loi de probabilité de X , notée $\mathcal{B}(n, p)$, est appelée loi binomiale de paramètres n et p . Démontrer que

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Calculer la moyenne m , l'écart type σ et la fonction caractéristique $\Phi_X(u)$ de X .

Approximation de la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $T = (X - m)/\sigma$. Calculer la fonction caractéristique $\Phi_T(v)$ de T et en donner un développement limité par rapport à $1/n$. En déduire que lorsque n tend vers $+\infty$, $\Phi_T(v)$ tend vers la fonction caractéristique de la loi normale réduite.

Approximation de la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson. On pose

$$p = \lambda/n + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

où $o(1/n)$ désigne une quantité qui tend vers zéro avec $1/n$. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $\Phi_X(u)$ tend vers la fonction caractéristique d'une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

SOLUTIONS

4.1 Dans le premier cas, le nombre de solutions est égal au nombre de façons différentes de tirer p variables x_i parmi les n . Il suffit ensuite d'attribuer la valeur 1 aux variables sélectionnées et la valeur 0 à celles non choisies pour obtenir une solution. Le nombre de solutions est donc égal à C_n^p . Si $p > n$ il n'y a pas de solution. Dans le second cas, le nombre de solutions est égal au nombre de façons différentes de tirer p variables x_i parmi les n mais cette fois-ci le tirage se fait avec remise. Ainsi, une même variable peut être tirée k fois avec $0 \leq k \leq p$. Il suffit d'attribuer ensuite la valeur k à la variable qui a été tirée k fois pour obtenir une solution. Le nombre de solutions est donc égal au nombre de combinaisons avec répétitions de n objets pris p à p .

4.4 La détermination de la fonction de répartition se fait en distinguant les trois cas suivants :

1. $y < 0$:

$$F_Y = P[Y \leq y] = P[X + c \leq y] = P[X < -c] = 0$$

2. $y = 0$:

$$\begin{aligned} F_Y &= P[Y \leq 0] = P[X \leq -c] + P[-c \leq X \leq c] \\ &= 0 + F_X[c] - F_X[-c] = 1. \end{aligned}$$

3. $y > 0$: on a $F_Y(y) = 1$.

La V.A Y ainsi construite est donc le nombre certain 0.

4.5 1. On a

$$g(s) = E[(1-s)^N] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (1-s)^k$$

D'où $g(0) = p_0 + p_1 + p_2 + \dots = 1$

2. D'après le théorème fondamental, on a :

$$E(f(N)) = \sum_k f(n_k) p_k = f(0)p_0 + f(1)p_1 + f(2)p_2 + \dots$$

D'où $f_0 = E[N] = -g'(0)$. Le moment factoriel d'ordre 1 est donné par :

$$f_1 = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k = g''(0).$$

3. La généralisation est immédiate et on obtient : $f_p = (-1)^{p+1} g(s)^{(p+1)}$.

4. Dans le cas d'une loi de Poisson de paramètre m , on obtient :

$$\begin{aligned} g(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k (1-s)^k = e^{-m} \left[\frac{[m(1-s)]^0}{0!} + \frac{[m(1-s)]^1}{1!} + \dots \right] \\ &= e^{-m} [e^{m(1-s)}] = e^{-ms}. \end{aligned}$$

Le moment factoriel d'ordre p est

$$\begin{aligned} f_p &= (-1)^{p+1} g^{(p+1)}(0) = (-1)^{p+1} (-m)^{p+1} \\ &= m^{p+1}. \end{aligned}$$

4.6 1. Il suffit d'écrire que l'intégrale de $f(x)$ vaut 1. On obtient :

$$\int \frac{a}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{a}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{a\pi}{\alpha} = 1.$$

On a donc $\alpha = a\pi$.

2. La fonction caractéristique de X est donnée par :

$$\phi_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} \frac{a}{a^2\pi^2 + x^2} dx.$$

3. Il est clair que l'intégrale suivante diverge pour tout entier positif n :

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \frac{a}{a^2\pi^2 + x^2} dx.$$

4.7 1. La fonction de répartition de la variable $Y = e^X$ est donnée par $F_Y(y) = 0$ pour $y < 0$ et :

$$F_Y(y) = \text{Prob}[X/e^X \leq y] = F_X(\text{Log}(y)).$$

La dérivée par rapport à y donne :

$$f_Y(y) = f_X(\text{Log}(y)) \frac{1}{y} = \lambda e^{-\lambda \text{Log}(y)}.$$

2. On peut utiliser le théorème fondamental qui donne pour $\lambda > 1$:

$$E(Y) = \lambda \int_0^{\infty} e^x e^{-\lambda x} dx = \frac{-\lambda}{1-\lambda}.$$

3. La V.A Z prend des valeurs entières $k \in \mathbb{Z}$ et on a :

$$\text{Prob}[Z = k] = \text{Prob}[k-1 < X \leq k] = \int_{k-1}^k \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

4. Comme les V.A sont indépendantes, la densité de la somme $W = X + Y$ est égale au produit de convolution des densités de X et Y . Soit :

$$f_W(w) = \lambda \mu \int_0^w e^{-\lambda \theta} e^{-\mu(w-\theta)} d\theta = \lambda \mu e^{-\mu w} \int_0^w e^{(\mu-\lambda)\theta} d\theta.$$

Comme X et Y sont indépendantes la loi conjointe est égale au produit des densités de X et Y et on obtient :

$$\text{Prob}[X \leq Y] = \int_0^{\infty} \int_0^y f_X(x) f_Y(y) dx dy.$$

4.8 1. On a :

$$m_h = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^h \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^h e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$$

Une intégration par parties conduit à la relation de récurrence

$$m_{h+2} = (h+1)\sigma^2 m_h$$

Comme les moments sont centrés, on obtient $m_{2k+1} = 0$ et

$$m_{2k} = \frac{(2k)! \sigma^{2k}}{2^k k!}.$$

2. La fonction caractéristique est donnée par :

$$\begin{aligned}\Phi_Y(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{juax^2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{juy} \exp\left\{-\frac{y}{2a\sigma^2}\right\} \frac{dy}{2\sqrt{ay}}.\end{aligned}$$

3. La relation entre densité et fonction caractéristique est biunivoque. Par identification de la relation ci-dessus et la suivante :

$$\Phi_Y(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{juy} f_Y(y) dy$$

on obtient $f_Y(y) = 0$ pour $y < 0$ et

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y}{2a\sigma^2}\right\} \frac{dy}{2\sqrt{ay}} \quad \text{pour } y > 0.$$

4. On a $E(Y) = aE[X^2] = a\sigma^2$ puisque X est gaussienne de variance σ^2 .

4.9 1. C'est le triangle rectangle dont les côtés sont portés par les axes de coordonnées. La densité conjointe est égale à une constante α sur T et cette constante est égale à l'inverse de la surface de T , soit $\alpha = 2/a^2$.

2. L'intégrale de la densité conjointe $f_{XY}(x, y)$ par rapport à x (resp. y) est égale à $f_X(x)$ (resp. $f_Y(y)$). D'où :

$$f_X(x) = \int_0^{a-x} \frac{2}{a^2} dy = \frac{2(a-x)}{a^2} \quad \text{pour } 0 < x < a \quad \text{et } 0 \quad \text{sinon.}$$

Par symétrie du domaine d'intégration, on a le même résultat pour $f_Y(y)$.

3. Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes puisque $f_{XY} \neq f_X f_Y$.

4.10 1. Le domaine est le carré dont les sommets ont pour coordonnées $(0, \pm 1)$ et $(\pm 1, 0)$. La constante α est égale à l'inverse de la surface de ce carré, soit $\alpha = 1/2$.

2. La densité (marginale) f_X est donnée par :

$$f_X(x) = \int_{|x|-1}^{1-|x|} \frac{dy}{2} = 1 - |x| \quad \text{pour } -1 < x < 1 \quad \text{et } 0 \quad \text{sinon.}$$

Par symétrie du domaine d'intégration, on a le même résultat pour $f_Y(y)$. On a $E(X) = E(Y) = 0$ car la densité conjointe est uniforme et le domaine admet l'origine comme centre de symétrie.

3. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes puisque $f_{XY} \neq f_X f_Y$.

On considère (X, Y) uniforme sur le carré $[0, a] \times [0, a]$.

1. La densité f_X est donnée par :

$$f_X(x) = \int_0^a \frac{dy}{a^2} = \frac{1}{a} \quad \text{pour } 0 < x < a \quad \text{et } 0 \quad \text{sinon.}$$

Par symétrie du domaine d'intégration, on a le même résultat pour $f_Y(y)$.

2. Les variables X et Y sont indépendantes puisque $f_{XY} = f_X f_Y$.

3. Comme les 2 V.A sont indépendantes, la densité de $Z = X + Y$ est égale au produit de convolution de $f_X(x)$ et $f_Y(y)$. On peut vérifier que le produit de convolution de la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, a]$ par elle-même est la fonction triangle symétrique de support $[-a, a]$ et qui admet $(0, a)$ comme sommet. On peut retrouver ce résultat en déterminant directement la fonction de répartition de Z .

4.11 1. On peut mettre x_n sous la forme :

$$x_n = \alpha_1(n)X_1 + \alpha_2(n)X_2 + B$$

où les V.A : X_1, X_2, B sont indépendantes.

2. On a

$$\begin{aligned} E(x_n) &= \alpha_1(n)E[X_1] + \alpha_2(n)E[X_2] + E[B] \\ &= \alpha_1(n) \int_{-a}^a \frac{e^{j2\pi\phi_1}}{2a} d\phi_1 + \alpha_2(n) \int_{-a}^a \frac{e^{j2\pi\phi_2}}{2a} d\phi_2 \\ &= \frac{\sin(2\pi a)}{2\pi a} [\alpha_1(n) + \alpha_2(n)]. \end{aligned}$$

La plus petite valeur strictement positive de a est $1/2$. Pour cette valeur, on a $E[x_n] = 0$ pour toutes les valeurs de n . Comme les trois V.A sont indépendantes et centrées, dans le développement de $E[x_n x_m^*]$ il ne restera que trois termes. On obtient :

$$\gamma_{n,m} = |A_1|^2 e^{j2\pi(n-m)} E[X_1^2] + |A_2|^2 e^{j2\pi(n-m)} E[X_2^2] + E(B^2).$$

4.12 1. $F_W(w) = P\{(x, y)/|x - y| \leq w\} = 0$ pour $w < 0$

$$\begin{aligned} &= P\{(x, y)/-w < x - y < w\} = 1 - (1 - w)^2 \quad \text{pour } 0 < w < 1 \\ &= 1 \quad \text{pour } 1 < w. \end{aligned}$$

2. La dérivation de $F_W(w)$ conduit immédiatement à l'expression de $f_W = 2(1 - w)$ pour $0 < w < 1$ et zéro ailleurs.

3. On obtient $E(W) = 1/3$.

4. La probabilité pour que le rendez-vous ait lieu est $P = F_W(2/3) = 8/9$.

4.13 La fonction de répartition F_W est donnée par

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P\{(x, y)/xy \leq w\} \\ &= P\{(x, y)/x < 0 \text{ et } y \geq \frac{w}{x}\} + P\{(x, y)/x > 0 \text{ et } y \leq \frac{w}{x}\} \\ &= \int_{x=-\infty}^0 \int_{w/x}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy + \int_{x=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{w/x} f_{XY}(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

La dérivation de $F_W(w)$ sous le signe intégral donne la densité :

$$\begin{aligned} f_W(w) &= - \int_{x=-\infty}^0 \frac{1}{x} f_{XY}(x, \frac{w}{x}) dx + \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x} f_{XY}(x, \frac{w}{x}) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_{XY}(x, w/x) dx. \end{aligned}$$

4.14 1. On doit avoir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1$$

La valeur de k est donc égale à l'inverse de l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} dy.$$

2. La fonction de répartition est

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{1+u^2} du \int_{-\infty}^y \frac{1}{1+v^2} dv$$

puisque la fonction à intégrer est à variables séparables.

3. La probabilité pour que le couple aléatoire (X, Y) appartienne au rectangle $[0, 1] \times [0, 1]$ est

$$P = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du \int_0^1 \frac{1}{1+v^2} dv.$$

4. La fonction de répartition F_Z est donnée par

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{(x, y)/\frac{y}{x} \leq z\} \\ &= P\{(x, y)/x < 0 \text{ et } y \geq zx\} + P\{(x, y)/x > 0 \text{ et } y \leq zx\} \\ &= \int_{x=-\infty}^0 \int_{zx}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy + \int_{x=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{zx} f_{XY}(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

La dérivation de $F_Z(z)$ sous le signe intégral donne la densité :

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= - \int_{x=-\infty}^0 x f_{XY}(x, zx) dx + \int_{x=0}^{\infty} x f_{XY}(x, zx) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{XY}(x, zx) dx. \end{aligned}$$

4.15 1. On a $E(XY) = c\sigma^2$ et la matrice de corrélation est donnée par :

$$\Gamma = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma^{-1} = \frac{1}{\sigma^2(1-c^2)} \begin{pmatrix} 1 & -c \\ -c & 1 \end{pmatrix}$$

La densité de probabilité a pour expression :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{1-c^2}} e^{-\frac{1}{2}Q(x, y)} \quad \text{avec} \quad Q(x, y) \triangleq x^2 + y^2 - 2cxy.$$

Pour le calcul de p , on introduit le changement de variable $x = \rho \cos(\theta)$ et $y = \rho \sin(\theta)$. On obtient :

$$p = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y) dx dy = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{1-c^2}} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{\rho^2(1-c\sin(2\theta))}{2\sigma^2(1-c^2)}} \rho d\rho d\theta$$

Utilisant les résultats classiques, on intègre par rapport à ρ ensuite par rapport à θ , et on obtient l'expression de p .

2. La fonction caractéristique Φ_{ZT} est donnée par : $\Phi_{ZT}(u, v) = E[e^{j(uZ+vT)}]$. La V.A. $(uZ + vT)$ prend quatre valeurs et tenant compte des symétries de la densité f_{XY} , on a :

$$\begin{aligned} P[Z = 1 \text{ et } T = 1] &= P[X \geq 0 \text{ et } Y \geq 0] = p \\ P[Z = -1 \text{ et } T = -1] &= P[X \leq 0 \text{ et } Y \leq 0] = p \\ P[Z = 1 \text{ et } T = -1] &= P[X \geq 0 \text{ et } Y \leq 0] = 1 - p \\ P[Z = -1 \text{ et } T = 1] &= P[X \leq 0 \text{ et } Y \geq 0] = 1 - p. \end{aligned}$$

La définition de l'espérance conduit à l'expression :

$$\Phi_{ZT}(u, v) = 2p \cos(u + v) + 2(1 - p) \cos(u - v).$$

Les moments peuvent se calculer en utilisant directement la définition de l'espérance ou bien en utilisant la formule :

$$\frac{\partial^{k+h} \Phi_{ZT}}{\partial^k u \partial^h v}(0, 0) = j^{k+h} E(Z^k T^h).$$

On obtient : $E(Z) = E(T) = 0$, $E(Z^2) = E(T^2) = 1$, $E(ZT) = 2(1 - 2p)$.

4.16 1. On a

$$F_Y(y) = \text{Prob}(X_1 \leq y \text{ ou } X_2 \leq y \text{ ou } \dots \text{ ou } X_n \leq y) \\ \leq \text{Prob}(X_1 \leq y) + \dots + \text{Prob}(X_n \leq y) \leq n F_{X_1}(y).$$

2. On a

$$F_Z(z) = \text{Prob}(X_1 \leq z \text{ et } \dots \text{ et } X_n \leq z)$$

Comme les X_i sont indépendantes et de même loi, on obtient

$$F_Z(z) = [\text{Prob}(X_1 \leq z)]^n = [F_{X_1}(z)]^n.$$

D'où $f_Z(z) = n F_{X_1}(z)^{n-1} f_{X_1}(z)$.

4.17 Les covariances des composantes x_p et x_q du vecteur aléatoire sont données par :

$$\gamma(p, q) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q E[U_i U_j] = \sum_{i=1}^{\inf(p, q)} \sigma^2 = \inf(p, q) \sigma^2.$$

Par définition, la matrice de covariance de $\mathbf{x}$ a pour expression :

$$\Gamma = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & N \end{pmatrix}.$$

4.18 1. On a

$$\lambda^H A^H M A \lambda = \theta^H M \theta > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Comme la matrice A est inversible, la propriété ci-dessus est vraie $\forall \theta \in \mathbb{C}$ et donc on a $A^H M A > 0$.

2. On a

$$\lambda^H M \lambda + \lambda^H N N^H \lambda = \lambda^H M \lambda + (N \lambda)^H (N \lambda) > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

puisque le premier terme de la somme est strictement positif et le second positif.

3. On a

$$U_j^H M U_j = U_j^H (\lambda_j U_j) = \lambda_j \|U_j\|^2.$$

Comme $M > 0$, on a $U_j^H M U_j > 0$ et donc les λ_j sont des réels positifs. On a :

$$U_k^H M U_j = U_k^H (\lambda_j U_j) = \lambda_j U_k^H U_j$$

et

$$(U_k^H M U_j)^H = U_j^H M U_k = U_j^H (\lambda_k U_k) = \lambda_k U_j^H U_k$$

puisque H est hermitienne. D'où $(\lambda_k U_j^H U_k)^H = \lambda_j U_k^H U_j$. Comme les λ_i sont réelles, on obtient $[U_j^H U_k]^H (\lambda_k - \lambda_j) = 0$ et donc $U_j^H U_k = 0$ si $\lambda_k \neq \lambda_j$.

4. On a $(\forall \lambda \in \mathbb{C})$:

$$\lambda^H M \lambda = \lambda^H E[XX^H] \lambda = E[(X^H \lambda)^H ((X^H \lambda))] = E[|Z|^2] \geq 0.$$

puisque $|Z|^2$ est une V.A à valeurs positives.

Chapitre 5

Représentations d'un signal aléatoire

5.1 REPRÉSENTATION TEMPORELLE

5.1.1 Signal à temps discret et signal à temps continu

a) Signal à temps discret

Considérons une suite infinie de variables aléatoires $x_k(\omega)$ dépendant d'un paramètre entier $k \in \mathbb{N}$ et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Nous dirons que $x_k(\omega)$ est un signal aléatoire à temps discret ou une suite aléatoire, ou encore un signal aléatoire. Le qualificatif « aléatoire » est couramment remplacé par « stochastique ». Du point de vue mathématique, un signal aléatoire à temps discret est une application

$$X(\omega, k) : (\Omega, \mathcal{T}, P) \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n)$$

de deux variables, l'une k représentant généralement le temps et l'autre ω décrivant les résultats possibles d'une épreuve dans un certain espace probabilisé de sorte que, pour chaque valeur de k fixée, $X(\omega, k)$ est une variable aléatoire V.A. Souvent on utilise la notation simplifiée :

$$x_k \stackrel{\Delta}{=} x(\omega, k).$$

Associions au signal x_k le vecteur aléatoire arbitraire à n dimensions $\mathbf{x} \stackrel{\Delta}{=} [x_{k_1}, \dots, x_{k_n}]^T$ et désignons par :

$$F_{\mathbf{x}}(k_1, \dots, k_n, x_1, \dots, x_n) = P[x_{k_1} \leq x_1, \dots, x_{k_n} \leq x_n]. \quad (5.1)$$

sa fonction de répartition. Si, quels que soient le nombre n et les instants $k_1, \dots, k_n$, la fonction de répartition F_X du vecteur $\mathbf{X}$ est connue, on dira que la suite aléatoire est définie par sa loi temporelle. Comme cette définition est difficile à utiliser dans la pratique, on se limite souvent à $n \leq 2$. On admet donc que la loi temporelle du signal est pratiquement connue si l'on se donne les fonctions F_X pour $n = 1$ et $n = 2$. Cela revient à se donner les lois de probabilité de chaque x_k et les lois des couples $[x_{k_1}, x_{k_2}]$ pour tous les entiers k_1 et k_2 . Une suite de V.A. x_k indépendantes et de même loi (*iid*) est appelée bruit blanc à temps discret. Comme on le verra plus loin, les bruits blancs jouent un rôle fondamental dans les applications.

b) Signal à temps continu

Au lieu d'un nombre fini ou dénombrable de variables aléatoires, considérons une famille de variables aléatoires $x(\omega, t)$ dépendant d'un paramètre continu t qui varie sur un intervalle Δ de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$) et d'un paramètre ω qui représente l'aléa. Nous dirons que $x(\omega, t)$ définit une fonction aléatoire ou un signal aléatoire à temps continu ou encore un signal aléatoire. Un signal aléatoire est donc une fonction d'une variable déterministe t et d'une variable ω représentant l'aléatoire. Du point de vue mathématique, un signal aléatoire est une application

$$x(\omega, t) : (\Omega, \mathcal{T}, P) \times \Delta \rightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n)$$

à deux variables t et ω telle que, pour chaque valeur de t fixée, $x(\omega, t)$ est une V.A. Si le signal prend ses valeurs dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, pour chaque valeur de t fixée $x(\omega, t)$ est une V.A. complexe. Si le signal prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, on dit que le signal est vectoriel et pour chaque t fixée $x(\omega, t)$ est un vecteur aléatoire à n composantes qui sont des V.A. réelles ou complexes selon le cas considéré. Si l'intervalle de variation de t est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, on dit que le signal est multidimensionnel. Par exemple une image est un signal bidimensionnel ($n = 2$) et une image en mouvement est un signal tridimensionnel ($n = 3$). Dans la suite, si aucune indication n'est donnée, les fonctions aléatoires seront à valeurs dans $\mathbb{R}$ et t représentera une variable réelle. Souvent on fait apparaître la seule variable déterministe t en adoptant la notation simplifiée :

$$x(t) \stackrel{\Delta}{=} x(\omega, t).$$

Pour une valeur fixée du paramètre ω on obtient une fonction classique de la seule variable déterministe t appelée trajectoire ou réalisation du signal aléatoire. Le résultat de l'épreuve qui permet de mesurer une variable aléatoire est un nombre alors que celui de l'épreuve qui permet de mesurer une fonction aléatoire est une fonction classique dite fonction « déterministe » par opposition à fonction aléatoire. La figure 5.1 donne l'exemple d'un signal égal à la somme de deux sinusôides. Les 2 figures de gauche donnent deux réalisations de ce même signal et elles sont donc identiques. Les 2 figures de droite donnent deux réalisations de ce signal affecté par

un bruit dont l'effet change d'une réalisation à l'autre. Dans ce dernier cas, on a un signal aléatoire. Pour un tel signal, les trajectoires sont en général toutes différentes mais elles ont des propriétés statistiquement semblables.

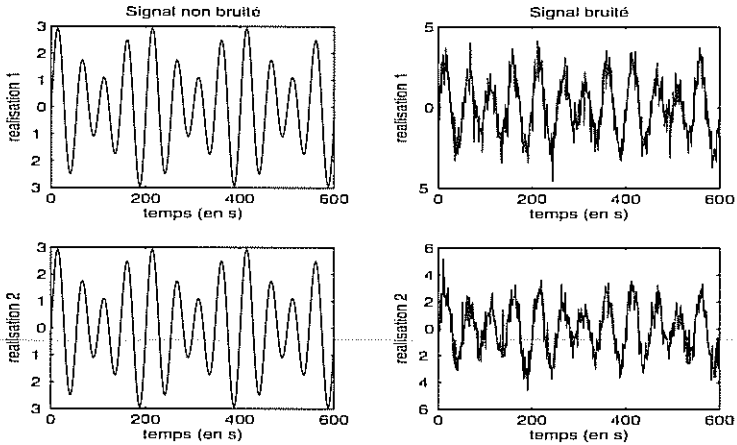


Figure 5.1 Réalisations d'un signal déterministe et d'un signal aléatoire.

Exemple 5.1.1 Vitesse de l'air dans une soufflerie

Si l'on enregistre en un point la composante longitudinale $x(t)$ de la vitesse de l'air dans une soufflerie on obtient en fonction du temps une représentation compliquée et irrégulière. Si l'on répète plusieurs fois de suite la même mesure, dans la même soufflerie et dans des conditions identiques (même vitesse de rotation des ventilateurs, mêmes grilles, même température, même humidité ...), nous obtenons plusieurs courbes du type $x(t)$ qui représenteront le même phénomène, mais qui ne seront pas superposables. Nous interprétons ces courbes comme les résultats d'une série d'épreuves (trajectoires) du même signal aléatoire $x(t)$.

Définition : Slutsky Le signal aléatoire $x(t)$ est défini par sa loi temporelle si nous connaissons les fonctions de répartition :

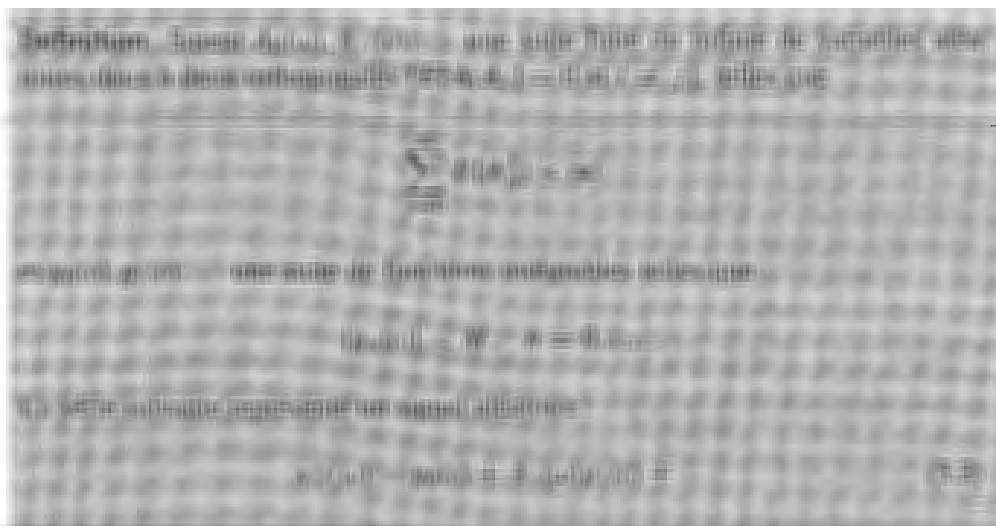
$$F_{\mathbf{x}}(n, t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) = P[x(t_1) \leq x_1, \dots, x(t_n) \leq x_n] \quad (5.2)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toutes les valeurs $t_1, \dots, t_n$ de l'ensemble Δ . Les fonctions de répartition ainsi définies dépendent des $n+1$ paramètres arbitraires $n, t_1, t_2, \dots, t_n$ et sont fonctions des n variables déterministes $x_1, x_2, \dots, x_n$ que l'on représente parfois pour simplifier par $\mathbf{x}$.

Pour $n = 1$, la fonction de répartition de $x(t)$ permet d'étudier chacune des V.A. $x(t)$ prise indépendamment les unes des autres.

Pour $n = 2$, la fonction de répartition de $[x(t_1), x(t_2)]$ dépend de t_1 et de t_2 et permet d'étudier les propriétés du couple de V.A. $[x(t_1), x(t_2)]$. Elle permet, en particulier, d'étudier la corrélation entre deux valeurs prises par le signal aux instants t_1 et t_2 . Si l'on s'intéresse au lien entre les valeurs du signal aux instants $t_1, \dots, t_n$, il faudra considérer la fonction de répartition du vecteur $[x(t_1), \dots, x(t_n)]^T$.

Lorsque la loi temporelle est utilisée dans la pratique, on se limite très souvent à $n \leq 2$. Même dans ce cas, on conçoit qu'une telle définition reste encore peu pratique et on se contente souvent de définitions moins complètes, mais plus simples à utiliser. On définit alors un signal aléatoire à l'aide d'un modèle de la manière suivante.



Cette définition se justifie par la convergence de la série (5.3). En effet, d'après les hypothèses, le reste :

$$R_n(t) = \sum_{p=n+1}^{\infty} A_p g_p(t)$$

vérifie

$$E[R_n(t)^2] < M^2 \left\{ \sum_{p=n+1}^{\infty} E[A_n^2] \right\} < \infty.$$

Donc la série aléatoire (5.3) converge en moyenne quadratique.

On démontre que le modèle (5.3) permet de représenter une classe très générale de fonctions aléatoires appelées fonctions aléatoires « séparables » du second ordre.

5.1.2 Moyenne et covariance d'un signal

L'analyse d'un signal aléatoire à partir de sa loi temporelle est rarement possible dans la pratique. En effet, dans les applications pratiques, il est souvent difficile d'établir un modèle pour la loi temporelle du signal à analyser. On ne dispose, en général, que d'un nombre limité d'échantillons du signal à partir desquels on doit faire l'analyse. Une méthode couramment utilisée consiste à estimer, à partir des échantillons disponibles, des grandeurs déterministes, appelées moments statistiques, qui permettent de faire une analyse plus ou moins complète du signal considéré. Dans le cas d'un signal à valeurs réelles, on définit le moment d'ordre $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\gamma(t_1, \dots, t_n) \triangleq E[x(t_1) \dots x(t_n)]. \quad (5.4)$$

Ce moment est une fonction déterministe des variables $t_1, \dots, t_n$. Des difficultés d'ordre théorique et calculatoire imposent souvent aux traiteurs de signaux de se limiter aux informations contenues dans les moments d'ordre 1 et 2 seulement. On va donc se limiter dans la suite à présenter les définitions et les propriétés des moments pour $n = 1$ et $n = 2$.

a) Signal à temps discret

L'espérance mathématique, appelée aussi moyenne, d'une suite aléatoire x_n est la suite déterministe $m_n \triangleq E[x_n]$. Pour tout couple α et β de réels on a

$$E[\alpha x_n + \beta y_n] = \alpha E[x_n] + \beta E[y_n]. \quad (5.5)$$

Une suite aléatoire x_n est dite centrée si la suite déterministe m_n est identiquement nulle. Nous savons que le coefficient de corrélation de deux variables aléatoires X et Y permet de se faire une idée de la dépendance statistique entre ces deux variables. Pour une suite aléatoire x_n , on introduit la suite double déterministe définie par :

$$\gamma_{m,n} \triangleq E[(x_m - E(x_m))(x_n - E(x_n))] \quad (5.6)$$

appelée covariance ou fonction d'autocorrélation ou encore fonction de corrélation de x_n . La définition de $\gamma_{m,n}$ est donnée parfois sans les termes $E(x_m)$ et $E(x_n)$ même si la suite x_n n'est pas centrée. Les propriétés d'une covariance seront étudiées plus loin dans un cadre plus général.

b) Signal à temps continu

Les définitions précédentes se transposent au cas d'une fonction aléatoire de la variable t comme suit. La moyenne de $x(t)$ est la fonction déterministe

$$m(t) \triangleq E[x(t)] \quad (5.7)$$

et $x(t)$ est dite centrée si $E[x(t)] = 0 \forall t$. La fonction de t_1 et t_2 définie par :

$$\gamma(t_1, t_2) \triangleq E[\{x(t_1) - m(t_1)\}\{x(t_2) - m(t_2)\}] \quad (5.8)$$

est appelée indifféremment covariance ou fonction de corrélation ou fonction d'autocorrélation de $x(t)$. La définition de $\gamma(t_1, t_2)$ est donnée parfois sans les termes $m(t_1)$ et $m(t_2)$ même si la fonction $x(t)$ n'est pas centrée. Dans le cas où le signal est à valeurs complexes, on pose :

$$\gamma(t_1, t_2) \triangleq E[\{x(t_1) - m(t_1)\}\{x(t_2) - m(t_2)\}^*].$$

Si l'on considère deux signaux $x(t_1)$ et $y(t_2)$, on introduit la fonction d'intercorrélation par :

$$\gamma_{xy}(t_1, t_2) \triangleq E[\{x(t_1) - m_x(t_1)\}\{y(t_2) - m_y(t_2)\}^*] \quad (5.9)$$

où m_x et m_y désignent les espérances des deux signaux.

Exemple 5.1.2 Interprétation de la covariance

Une première interprétation de la covariance peut se faire en utilisant l'égalité suivante :

$$E(|x(t_1) - x(t_2)|^2) = E(|x(t_1)|^2) + E(|x(t_2)|^2) - 2\gamma(t_1, t_2)$$

qui s'obtient en développant le premier membre et en utilisant la linéarité de l'espérance. Cette égalité montre que plus $\gamma(t_1, t_2)$ est petit plus $E(|x(t_1) - x(t_2)|^2)$ est grand et donc moins $x(t_1)$ et $x(t_2)$ se « ressemblent ». La covariance $\gamma(t_1, t_2)$ peut donc être utilisée pour mesurer la « ressemblance » entre les valeurs du signal aux instants t_1 et t_2 . Les exemples suivants donnent deux signaux particuliers qui schématisent la propriété qu'a la fonction de corrélation de mesurer le « lien statistique » pouvant exister entre les valeurs d'un signal à deux instants t et $t - \tau$.

Exemple 5.1.3 Signal très fortement corrélé

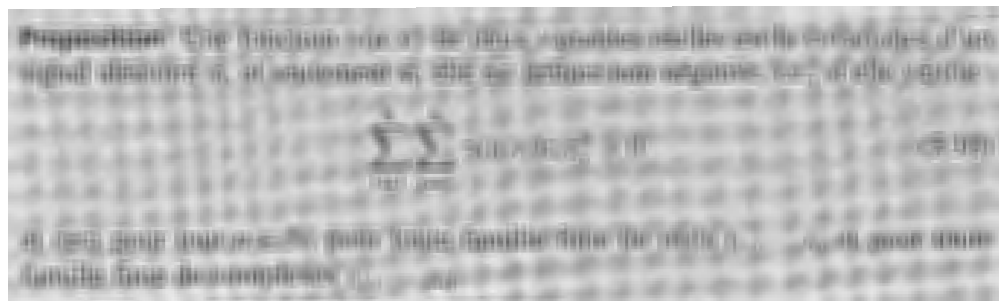
Considérons le signal $x(t) = A$ où A désigne une variable aléatoire donnée (signal constant). La fonction de corrélation de $x(t)$ est égale à la variance σ_A^2 de A . Elle est donc constante et cela signifie que le lien entre les valeurs de $x(t)$ aux instants t et $t - \tau$ est maximal et ceci pour τ quelconque. Ce résultat était prévisible puisque la connaissance statistique du signal à un instant donné suffit pour connaître A et donc le signal pour tous les instants.

Exemple 5.1.4 Signal très faiblement corrélé

Soit A_t une famille de variables aléatoires centrées et de même variance σ_A^2 . On suppose que pour $t \neq \tau$ A_t et A_τ sont indépendantes. La fonction de corrélation du signal $y(t) = A_t$ est égale à $\sigma_A^2 \delta(\tau)$ où δ est la distribution de Dirac. Elle est donc maximale pour $\tau = 0$ et nulle partout ailleurs. Ce résultat était prévisible puisque la connaissance statistique du signal à un instant donné ne contient aucune information sur la valeur de ce signal à un autre instant.

c) Propriétés de la corrélation de signaux centrés

Une fonction quelconque de deux variables ne peut évidemment pas être une fonction de corrélation. En effet, cette dernière fonction doit satisfaire à certaines conditions comme celle énoncée ci-dessous.



Ce résultat permet d'interpréter la corrélation de deux signaux centrés $x(t_1)$ et $x(t_2)$ comme étant le produit scalaire de ces deux V.A aux instants t_1 et t_2 fixés. Cette interprétation permet d'établir d'autres propriétés d'une covariance. En particulier, l'inégalité de Schwarz classique est vérifiée et elle se traduit par l'inégalité suivante qui va jouer un rôle important dans la suite.

$$|\gamma(t_1, t_2)|^2 \leq \gamma(t_1, t_1) \gamma(t_2, t_2), \quad \forall t_1, t_2.$$

On peut démontrer, par exemple, que si l'on pose :

$$\rho(t_1, t_2) \triangleq \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sqrt{\gamma(t_1, t_1)} \sqrt{\gamma(t_2, t_2)}}$$

alors les trois nombres $\rho(t_2, t_3)$, $\rho(t_3, t_1)$, $\rho(t_1, t_2)$ sont les cosinus des angles au sommet d'un trièdre et ceci pour t_1, t_2, t_3 quelconques.

On peut aussi établir directement à partir des définitions les propriétés suivantes.

$$\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_2, t_1)^*, \quad \forall t_1, t_2$$

$$\gamma(t_1, t_1) = E[|x(t_1)|^2] \geq 0, \quad \forall t_1$$

Pour l'intercorrélation, on a les propriétés suivantes.

$$\gamma_{xy}(t_1, t_2) = \gamma_{yx}(t_2, t_1)^*, \quad \forall t_1, t_2$$

$$|\gamma_{xy}(t_1, t_2)|^2 \leq \gamma_x(t_1, t_1) \gamma_y(t_2, t_2), \quad \forall t_1, t_2$$

où l'on adopte la convention $\gamma_{zz} \triangleq \gamma_z$.

5.2 PRINCIPALES CLASSES DE SIGNAUX

Les signaux que l'on rencontre dans les applications de l'ingénieur peuvent être représentés par des signaux aléatoires vérifiant des propriétés plus ou moins difficiles à décrire d'une manière à la fois complète, rigoureuse et sans trop de complexité mathématique. Dans la pratique, on introduit des hypothèses qui permettent de définir des classes de signaux conduisant ainsi à l'élaboration de modèles mathématiques valables pour les signaux d'une même classe. On définit ainsi plusieurs classes, par exemple les signaux harmonisables, les signaux stationnaires, les processus de Poisson, les signaux Gaussiens, les bruits blancs, *etc.* Pour une étude détaillée de ces différentes classes on peut se reporter aux références [2] [13]. Dans cette section, on se limite à donner les définitions des processus utiles en traitement du signal. Les résultats de cette section sont présentés dans le cas des signaux à temps continu et se transposent de façon immédiate au cas des signaux à temps discret.

5.2.1 Signal stationnaire et spectre de puissance

Stationnarité stricte Un signal aléatoire est dit stationnaire au sens strict si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes dans tout changement de l'origine du temps. Ceci se traduit sur la loi temporelle de la manière suivante.

$$F_x[n, t_1, \dots, t_n, \mathbf{x}] = F_x[n, t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau, \mathbf{x}], \quad \forall \tau. \quad (5.11)$$

Donc, pour tout signal stationnaire au sens strict, la loi de probabilité de la V.A $x(t)$ pour t fixé est indépendante de t et la loi conjointe de tout couple $\{x(t_1), x(t_2)\}$ ne dépend que de la différence des instants $\tau = t_1 - t_2$. Deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont dits stationnaires dans leur ensemble si $\{x(t), y(t)\}$ et $\{x(t + \tau), y(t + \tau)\}$ ont les mêmes statistiques pour tout réel τ . Le signal complexe $x(t) + jy(t)$ est dit stationnaire si $x(t)$ et $y(t)$ sont stationnaires dans leur ensemble.

Un signal aléatoire $x(t)$ est dit du second ordre (puissance finie) s'il vérifie :

$$E[|x(t)|^2] < +\infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

L'application de l'inégalité de Schwarz montre que cette condition entraîne l'existence de $m(t)$ et de $\gamma(t_1, t_2)$ définis par (5.7) et (5.8). Les fonctions aléatoires du second ordre jouent un rôle important dans la pratique et leurs propriétés découlent de celles des formes bilinéaires définies non négatives.

Stationnarité au sens large Un signal $x(t)$ est dit stationnaire au sens large s'il est du second ordre et s'il vérifie en plus les deux propriétés suivantes.

$$E[x(t)] = \text{constant}$$

$$E[x(t_1)x^*(t_2)] = \gamma_x(\tau), \quad \tau = t_1 - t_2.$$

Cela équivaut à dire que $E[x(t)]$ est indépendant de t et que le moment d'ordre 2, que l'on note $m_{2,x}(\tau)$ ou $\gamma_x(\tau)$, ne dépend que de la seule variable $\tau = t_1 - t_2$.

Exemple 5.2.1 Interprétation géométrique de la stationnarité

Pour chaque τ fixé, la valeur de la fonction d'autocorrélation d'un signal $x(t)$ centré est égale au produit scalaire des deux vecteurs $x(t)$ et $x(t - \tau)$. Si, par exemple, $x(t) = Ae^{j2\pi(f_0 t + \phi)}$, ce produit scalaire est indépendant de l'origine des temps des vecteurs considérés. Ce résultat reste vrai pour un signal $x(t)$ quelconque.

Pour un signal $x(t)$ stationnaire, on a

$$E[|x(t) - x(t - \tau)|^2] = 2\gamma_x(0)[1 - \frac{\gamma_x(\tau)}{\gamma_x(0)}].$$

Cette égalité montre que plus $\gamma_x(\tau)$ est petit plus la valeur moyenne de $|x(t) - x(t - \tau)|$ est grande et donc moins $x(t)$ et $x(t - \tau)$ se « ressemblent ». En général, pour les signaux du second ordre, γ_x vérifie la condition :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \gamma_x(\tau) = 0$$

qui signifie que plus τ est grand, plus les V.A $x(t)$ et $x(t - \tau)$ sont décorrélés. En plus de ce résultat qui permet d'interpréter $\gamma_x(\tau)$ comme une fonction qui mesure le lien statistique entre les valeurs de $x(t)$ aux instants t et $t - \tau$, la fonction de corrélation vérifie les propriétés suivantes.

$$\gamma_x(-\tau) = \gamma_x(\tau)^* \quad \text{et} \quad |\gamma_x(\tau)| \leq \gamma_x(0) \quad \forall \tau.$$

On dira qu'un signal certain est stationnaire s'il peut se mettre sous la forme :

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k e^{j(2\pi f_k t + \phi_k)}$$

avec $(\phi_k, f_k) \in \mathbb{R}^2$ et $A_k \in \mathbb{R}^+$. Cette notion de stationnarité qui dépasse le cadre de ce chapitre correspond naturellement à celles de régime établi et de stabilité temporelle dans les systèmes physiques.

Exemple 5.2.2 Signaux stationnaires particuliers

Les signaux aléatoires :

$$e^{j(\alpha t + \phi)}, \quad \cos(\alpha t + \phi) \quad \text{et} \quad \sin(\alpha t + \phi)$$

où ϕ est une V.A. uniforme sur $[0, 2\pi]$ sont centrés, stationnaires au sens large et admettent respectivement comme fonction de corrélation :

$$e^{j\alpha\tau}, \quad \frac{1}{2} \cos(\alpha\tau) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \sin(\alpha\tau).$$

Le signal aléatoire :

$$x(t) = A \cos(\alpha t) + B \sin(\alpha t), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

défini à partir des deux variables aléatoires A et B , centrées, orthogonales et vérifiant $E[A^2] = E[B^2] = 1$ correspond à un cas particulier de (5.3) où les fonctions g_n sont des cosinus et des sinus. Les trajectoires de $x(t)$ sont des sinusoïdes de période $2\pi/\alpha$. La covariance de $x(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \gamma_x(t_1, t_2) &\triangleq E[(A \cos \alpha t_1 + B \sin \alpha t_1)(A \cos \alpha t_2 + B \sin \alpha t_2)] \\ &= E[A^2] \cos \alpha t_1 \cos \alpha t_2 + E[B^2] \sin \alpha t_1 \sin \alpha t_2 \\ &\quad + E[AB] \sin \alpha(t_1 + t_2) = \cos \alpha(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

Comme $E[x(t)] = 0$, le signal $x(t)$ est stationnaire au sens large.

Exemple 5.2.3 Signal binaire à temps continu

Considérons le signal défini par $y(t) = x(t)e^{j2\pi f_0 t}$ avec

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \Pi\left(\frac{t - kT}{T}\right)$$

où les A_k forment une suite de V.A. binaires, centrées et de même variance σ^2 , indépendantes et pouvant prendre chacune les valeurs réelles x_0 ou x_1 .

Un calcul simple montre que

$$\gamma_y(t, \tau) = E[y(t)y(t-\tau)^*] = E[x(t)x(t-\tau)]e^{j2\pi f_0\tau}.$$

À titre d'exemple, pour $A_p = 1$ et $A_k = 0, \forall k \neq p$, on a

$$\gamma_y(t, \tau) = \Pi\left(\frac{t-pT}{T}\right)\Pi\left(\frac{t-\tau-pT}{T}\right)e^{j2\pi f_0\tau}$$

et le signal $y(t)$ est non stationnaire. Pour $A_k = 1, \forall k$, on a $x(t) = 1$ et le signal $y(t)$ est stationnaire.

Pour tenir compte de l'incertitude sur les instants kT de transition entre les valeurs x_0 et x_1 , on remplace ces instants par $kT + \epsilon$ où ϵ désigne une V.A. uniforme sur $[0, T]$ indépendante des A_k . Sous ces hypothèses, on va établir que $\gamma_x(t, t-\tau)$ est indépendante de t . En effet, on a en posant $h(t) = \pi(t/T)$:

$$\gamma_x(t, t-\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} E[A_k A_i]^* E[h(t-kT-\epsilon)h(t-\tau-iT-\epsilon)]$$

car les A_k sont indépendantes de ϵ . Comme les A_k sont orthogonales et ϵ est uniforme sur $[0, T]$, on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma_x(t, t-\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma^2 E[h(t-kT-\epsilon)h(t-\tau-kT-\epsilon)] \\ &= \frac{\sigma^2}{T} \int_0^T \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(t-kT-\epsilon)h(t-\tau-kT-\epsilon) d\epsilon \\ &= \frac{\sigma^2}{T} \sum_k \int_{t-kT-T}^{t-kT} h(u)h(u-\tau) du \\ &= \frac{\sigma^2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(u-\tau) du = \frac{\sigma^2}{T} h(u) * h(-u)[\tau]. \end{aligned}$$

Exemple 5.2.4 Signaux à temps discret et stationnarité

Soit $U_j, j \in \mathbb{Z}$ une suite de V.A. réelles, centrées, deux à deux orthogonales et toutes de même variance σ^2 . Considérons les signaux aléatoires à temps discret définis par :

$$x_k = \sum_{j=1}^k U_j, k > 0, \quad y_k = \sum_{j=1}^N U_{k-j} \quad \text{et} \quad z_k = y_k - y_{k-1}.$$

Le signal x_k , appelé promenade aléatoire est centré, sa fonction de corrélation est donnée par :

$$\gamma_x(k, h) = E(x_k x_h) = \ell \sigma^2 \quad \text{avec} \quad \ell = \inf(k, h)$$

et il est donc non stationnaire.

Le signal y_k est aussi centré et sa fonction de corrélation est donnée par :

$$\gamma_y(k, h) = \frac{1}{N^2} \sum_{i, j=0}^{N-1} \sigma^2 \delta_{k-h-i+j}$$

où les termes non nuls dans cette somme correspondent à $k - h - i + j = 0$, soit $i = k - h + j$ avec $0 \leq i, j \leq N - 1$. D'où $k - h \leq i < N - 1$. Donc, il y a $N - 1 - (k - h) + 1 = N - (k - h)$ termes non nuls. On obtient $\gamma_y(k, h) = \frac{(N - |k - h|)}{N^2}$ pour $N > |k - h|$ et $\gamma_y(k, h) = 0$ pour $N \leq |k - h|$. Le signal y_k est donc stationnaire.

Le signal z_k est centré, sa fonction de corrélation est donnée par :

$$\gamma_z(k, n) = 2\gamma_y(n) + \gamma_y(n + 1) + \gamma_y(n - 1)$$

et il est donc stationnaire.

Stationnarité au sens large et spectre de puissance La T.F de la fonction de corrélation, $\gamma_x(\nu)$, d'un signal stationnaire $x(t)$ de puissance finie vérifie :

$$\Gamma_x(\nu) \geq 0. \quad (5.12)$$

La fonction $\Gamma_x(\nu)$ est appelée densité spectrale de puissance (DSP) du signal $x(t)$ et on a :

$$\gamma_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_x(\nu) e^{j2\pi\tau\nu} d\nu \quad \text{ou} \quad \gamma_x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_x(\nu) e^{j2\pi k\nu} d\nu$$

suivant que le signal est à temps continu ou à temps discret. Les expressions de la puissance $P_x = \gamma_x(0)$ sont :

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_x(\nu) d\nu \quad \text{ou} \quad P_x = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_x(\nu) d\nu. \quad (5.13)$$

Estimation du spectre à l'aide du périodogramme Dans la pratique, on est souvent conduit à chercher une « estimation » de la densité spectrale d'un signal à partir de la connaissance d'un nombre d'échantillons fini : $x_k = x(kT_e)$, $k = 0, \dots, N - 1$. Comme les coefficients de corrélation γ_n sont souvent difficiles à déter-

miner, au lieu de chercher à calculer la T.F de la fonction de corrélation on introduit la fonction suivante, dénommée périodogramme :

$$P(\nu) \triangleq \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi\nu n T_e} \right|^2. \quad (5.14)$$

On va démontrer plus loin que $P(\nu)$ donne une bonne approximation de la densité spectrale du signal x_n supposé stationnaire. On introduit souvent une fenêtre de pondération $w_N(n)$, i.e., au lieu de traiter le signal x_n , on traite le signal pondéré $y_n \triangleq w_N(n)x_n$. De plus, afin de diminuer la variance du périodogramme, on introduit souvent un périodogramme moyenné $\bar{P}$ égal à la moyenne arithmétique de plusieurs périodogrammes.

Exemple 5.2.5 Estimation de la DSP à l'aide du périodogramme

Considérons le signal aléatoire à temps continu défini par

$$s(t) = A_1 e^{j(2\pi f_1 t + \phi_1)} + A_2 e^{j(2\pi f_2 t + \phi_2)}$$

où f_1, f_2 désignent des fréquences réelles déterministes, A_1, A_2 des amplitudes déterministes positives, ϕ_1, ϕ_2 des variables aléatoires uniformes sur $[0, 2\pi]$ et indépendantes. La fonction d'autocorrélation et la DSP théoriques de $s(t)$ sont données par :

$$\gamma(\tau) = A^2 e^{j2\pi f_0 \tau} + B^2 e^{j2\pi f_1 \tau}, \quad \Gamma(\nu) = A^2 \delta(\nu - f_0) + B^2 \delta(\nu - f_1).$$

La fonction d'autocorrélation du signal $s_T(t)$, égal à $s(t)$ sur $[-T/2, T/2]$ et nul ailleurs, est donnée par :

$$\gamma_T(t, \tau) = \gamma(\tau) \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \Pi\left(\frac{t-\tau}{T}\right).$$

Ce n'est donc pas un signal stationnaire. En fait, dans la pratique on ne dispose que de N échantillons $s_k = s(kT_e)$, $k = 0, \dots, N-1$ d'une seule réalisation sur $[-T/2, T/2]$. Ces échantillons doivent nous fournir une estimation de la DSP en prenant par exemple comme estimateur le périodogramme :

$$|P_T(\nu)| = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-j2\pi\nu n T_e} \right|^2 = \frac{1}{N} |\text{TFD}[(x_k)](\nu)|^2.$$

Les figures 5.2 donnent, de gauche à droite respectivement, la partie réelle d'une réalisation de $s_T(t)$, la DSP théorique de $s_T(t)$ et l'estimation de cette DSP à l'aide d'un périodogramme moyenné, i.e., la moyenne de plusieurs (ici 10) périodogrammes.

de réalisations d’une même V.A uniformément répartie sur $[0, 1]$. Il existe des logiciels qui permettent de générer sur un ordinateur une telle suite. À partir de ces échantillons, on peut générer un échantillon x_k approximant un bruit blanc gaussien comme suit.

$$x_k = 0, \quad x_k = x_k + u_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

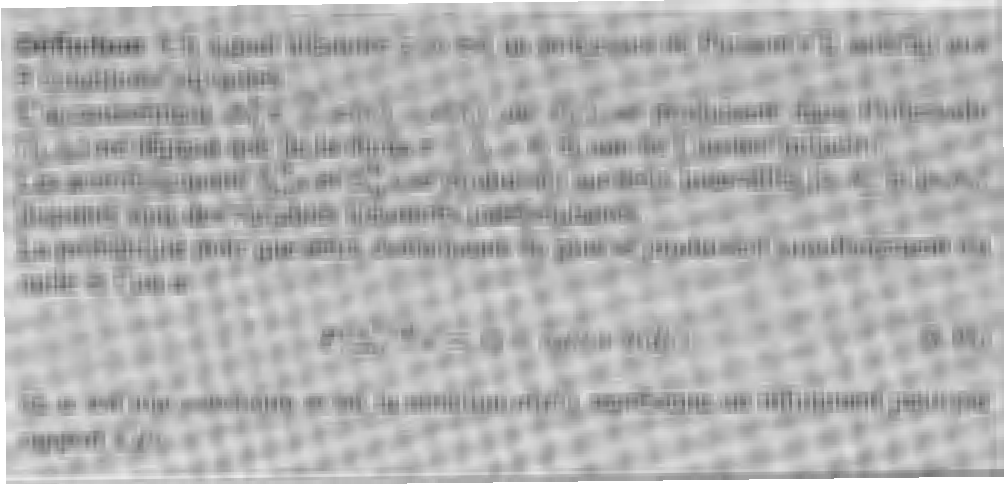
L’approximation est d’autant meilleure que le nombre d’itérations k est élevé. On peut vérifier facilement que la moyenne et l’écart type sont respectivement $1/2$ et $1/12$.

La méthode suivante permet d’approximer encore mieux un bruit blanc gaussien. Cette méthode introduit 2 variables intermédiaires : α et μ et elle permet de construire l’échantillon x_k comme suit.

$$\alpha = 2\pi u_k, \quad \mu = \sigma \sqrt{-\ln(1 - u_k)}, \quad x_k = \mu \cos(\alpha), \quad k = 1, 2, \dots$$

5.2.3 Processus de Poisson

Considérons une suite d’événements identiques $E_1, E_2, \dots$ (par exemple : appels téléphoniques, passages de voitures à un carrefour,...) qui se succèdent dans le temps à des instants aléatoires $\theta_1, \theta_2, \dots$. Le nombre d’événements $x(t)$ qui se sont produits dans l’intervalle de temps $[0, t]$ définit un signal aléatoire à valeurs entières. L’introduction d’hypothèses plus ou moins restrictives sur $x(t)$ conduit à des modèles plus ou moins importants dans les applications. L’un des plus connus est le processus de Poisson que nous allons définir ci-dessous.



Un évènement E_k a une probabilité très faible αdt de se produire une fois dans un intervalle de temps très petit de durée dt . Cependant, dans un intervalle de temps

fini de durée t il y a une probabilité finie $\alpha t e^{-\alpha t}$ que E_k se produise une fois. L'accroissement de $x(t)$ dans un intervalle de temps $[t_0, t_0 + \tau]$ de durée τ est égal au nombre k d'événements qui se sont produits dans cet intervalle indépendamment des valeurs de $x(t)$ pour t extérieur à $[t_0, t_0 + \tau]$. Si l'on connaît $x(t_0)$, la valeur $x(t_0 + \tau)$ est aléatoire et ne dépend que de $x(t_0)$ et de la loi de probabilité de l'accroissement $\Delta_{t_0}^{t_0+\tau} x$ de $x(t)$. Ainsi un processus de Poisson est markovien. Un processus ponctuel $x(t)$ possédant une distribution de Poisson peut être représenté par une suite d'impulsions de Dirac de poids α_k placées en des instants aléatoires t_k . Soit :

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \delta(t - t_k). \quad (5.17)$$

Proposition Pour tout processus de Poisson de cadence α , on a les propriétés suivantes.

La probabilité, $p_0(h)$, qu'aucun événement ne se produise pendant une durée h est donnée par

$$p_0(h) = \alpha e^{-\alpha h} U(h)$$

Le nombre, $\Delta_{t_0}^{t_0+t} x$, d'événements se produisant dans l'intervalle $[t_0, t_0 + t]$ suit une loi de Poisson de paramètre αt . Soit

$$P[x(t) = n] = e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} \quad (5.18)$$

La durée $T = t_{k+n+1} - t_k$ séparant $n + 1$ événements consécutifs a pour densité de probabilité la fonction :

$$f_n(t) = \alpha (\alpha t)^{n-1} \frac{e^{-\alpha t}}{(n-1)!} \quad (5.19)$$

Exemple 5.2.6 Autocorrélation d'un processus de Poisson

Par hypothèse, si $t_1 < t_2$, $x(t_2) - x(t_1)$ est indépendant de $x(t_1) = x(t_1) - x(0)$. Donc

$$E\{[x(t_2) - x(t_1)]x(t_1)\} = E[x(t_2) - x(t_1)]E[x(t_1)]$$

soit

$$E[x(t_2)x(t_1)] - E[x(t_1)^2] = E[x(t_2)]E[x(t_1)] - \{E[x(t_1)]\}^2.$$

D'où

$$\begin{aligned}\gamma(t_2, t_1) &\stackrel{\Delta}{=} E\{x(t_2)x(t_1)\} - E[x(t_2)]E[x(t_1)] \\ &= E[x(t_1)^2] - \{E[x(t_1)]\}^2.\end{aligned}$$

Comme $x(t_1)$ et $x(t_2)$ sont des variables de Poisson on a :

$$E[x(t_1)] = \alpha t_1, \quad E[x(t_1)^2] = \alpha^2 t_1^2 + \alpha t_1.$$

On trouve donc :

$\gamma(t_2, t_1) = \alpha t_1$ avec $t_1 < t_2$ et le coefficient de corrélation entre $x(t_1)$ et $x(t_2)$ a pour expression :

$$\frac{\gamma(t_2, t_1)}{\sqrt{\gamma(t_1, t_1)\gamma(t_2, t_2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\tau}{t_1}}} \quad \text{avec } \tau = t_2 - t_1 > 0.$$

Exemple 5.2.7 Basculeur Poissonnien

C'est la fonction aléatoire $x(t)$ définie par les propriétés suivantes :

1. La V.A $x(t)$ peut prendre les valeurs 1 et 0 avec les probabilités $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.
2. Entre les instants t_0 et $t_1 = t_0 + \tau$, $x(t)$ subit un nombre $N(t)$ de changements (passages de 0 à 1 ou de 1 à 0). Ce nombre $N(t)$ est aléatoire et obéit à une loi de Poisson de paramètre $m = \alpha\tau$. Moyennant un choix convenable de l'unité de temps, on peut supposer $\alpha = 1$. On a donc :

$$P\{N(t) = n\} = \frac{\tau^n}{n!} e^{-\tau} \quad (5.20)$$

Cette probabilité dépend de la longueur de l'intervalle τ mais non de son origine t_0 ; elle est stochastiquement indépendante de la valeur initiale $x(t_0)$. Si l'on connaît $x(t_0)$, la valeur de $x(t)$ à l'instant ultérieur t_1 dépend du nombre n de sauts subis par $x(t)$ entre t_0 et t_1 . La fonction aléatoire $x(t)$ se rencontre fréquemment dans les applications.

On peut l'attacher à un phénomène donné qui tantôt se manifeste ($x(t) = 1$), tantôt s'arrête ($x(t) = 0$), ces changements ayant lieu à des dates aléatoires. Calculons la fonction de corrélation :

$$\gamma(t, t + \tau) = E[x(t)x(t + \tau)].$$

Comme pour t et τ fixés, la V.A $x(t)x(t + \tau)$ peut prendre l'une parmi les deux valeurs 0 et 1, $\gamma(t, t + \tau)$ est égale à la probabilité pour que $x(t)x(t + \tau)$ prenne la valeur 1. Ceci équivaut à la réalisation simultanée de l'événement $x(t) = 1$ et

$x(t + \tau) = 1$, i.e., $x(t) = 1$ et la variation du nombre de sauts entre les instants t et $t + \tau$ est paire. D'après le théorème des probabilités totales, on a :

$$P\{N(t) = \text{pair}\} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\tau^{2p}}{(2p)!} e^{-\tau} = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\tau}).$$

D'après le théorème des probabilités composées, la probabilité pour que $x(\theta) = 1$ est égale à $\frac{1}{2}$. Les deux événements intervenants sont indépendants et donc :

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{4}(1 + e^{-2\tau}).$$

Comme $E[x(t)] = 1$ et que la fonction de corrélation est paire, on obtient :

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{4}e^{-2|\tau|}.$$

5.2.4 Bruit blanc théorique

Au sens le plus large, tout signal indésirable par rapport à un autre signal dit utile est appelé bruit. Le terme bruit est employé dans un cadre très général même s'il a été utilisé au départ pour désigner le phénomène acoustique venant perturber un son utile. On peut distinguer deux classes de bruits : ceux provenant de perturbations imprévisibles donc aléatoires et ceux dus à des interférences provoquées par le captage accidentel d'autres signaux utiles (couplage entre des lignes de transmissions voisines par exemple). Du point de vue mathématique, on introduit la notion fondamentale de bruit blanc qui conduit à des traitements simples et qui se retrouve à la base de la modélisation mathématique d'une large classe de signaux.

Définition Un signal aléatoire à temps continu est appelé bruit blanc (BB) au sens large s'il est stationnaire au sens large et si sa fonction de corrélation est une distribution de Dirac, i.e., $\gamma_X(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$. Le nombre σ^2 est appelé variance du bruit.

La puissance moyenne d'un BB est infinie et donc un BB n'est qu'un modèle mathématique sans réalité physique. Un BB peut être cependant considéré comme l'idéalisation d'un signal aléatoire à corrélation microscopique observé à travers un filtre qui réintroduit une certaine corrélation.

Une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de V.A est appelée bruit blanc discret pur si ces V.A sont indépendantes dans leur ensemble et bruit blanc au sens fort si ces V.A vérifient :

$$\hat{x}_k \triangleq E[x_k | (x_l)_{l \neq k}] = E[x_k], \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (5.21)$$

Il existe plusieurs autres notions de bruits blancs qui ne seront pas considérées ici. La définition d'un bruit blanc au sens large énoncée dans le cas continu s'étend immédiatement au cas discret en remplaçant la distribution de Dirac par le symbole de Kronecker.

Exemple 5.2.8 Bruit blanc complexe

On considère les signaux à valeurs complexes : $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$ où ϕ est une V.A. uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$ et $b(t)$ un bruit dont chaque composante est blanche, centrée, d'écart type σ^2 ; ces composantes étant indépendantes entre elles et de ϕ .

1. Comme la fonction d'autocorrélation de $b(t)$ est égale au produit scalaire des vecteurs $b(t)$ et $b(t - \tau)$, on peut conclure que l'angle formé par ces derniers est indépendant de l'origine des temps t et il est égal à $\pi/2$.
2. On pose $y(t) = x(t) + b(t)$ et $z(t) = x(t)b(t)$. Comme $x(t)$ et $b(t)$ sont indépendants et que $b(t)$ est centré, les fonctions de corrélation de $y(t)$ et $z(t)$ sont données par :

$$\gamma_y(\tau) = A^2 e^{j2\pi f_0 \tau} + \sigma^2 \delta(\tau)$$

$$\gamma_z(\tau) = \sigma^2 A^2 e^{j2\pi f_0 \tau} \delta(\tau) = B^2 \delta(\tau).$$

On voit ainsi que l'altération d'un signal par un bruit multiplicatif conduit à un nouveau signal qui est lui même un bruit blanc. Ceci complique les traitements en présence d'un bruit multiplicatif.

La figure (5.3) donne des réalisations d'un bruit blanc gaussien et un bruit blanc uniformément réparti.

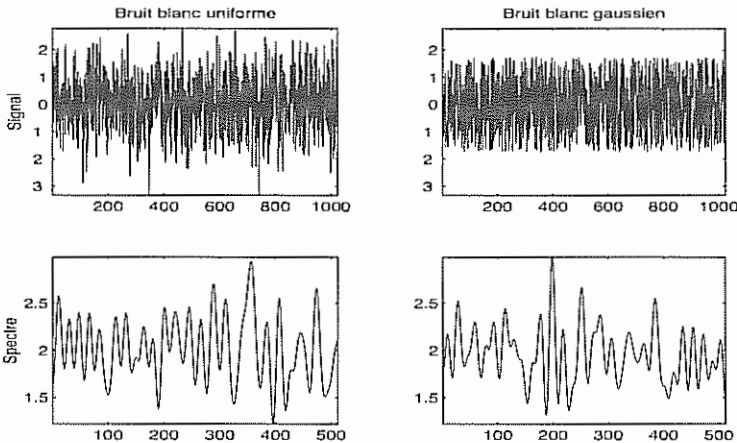


Figure 5.3 Bruits blancs gaussien et uniforme.

5.2.5 Signal continu et signal différentiable

Soit $x(t, \omega)$ une famille de V.A $X_t(\omega)$, $t \in \mathbb{R}$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Pour chaque t , $X_t(\omega)$ est une fonction mesurable sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et on a donc plusieurs types de convergence pour une famille $x(t, \omega)$. Les quatre plus importants sont :

1. la convergence en loi
2. la convergence en probabilité
3. la convergence en moyenne quadratique
4. la convergence presque sûrement ou avec une probabilité 1.

Les notions de continuité et de dérivabilité d'un signal dépendent du type de convergence que l'on considère. Nous rappelons ici quelques résultats élémentaires relatifs à ces notions et pour plus de détails, on peut se reporter aux références [2] [5].

Définition Un signal $x(t, \omega)$ est continu au point t si

$$\lim_{h \rightarrow 0} x(t+h, \omega) = x(t, \omega).$$

Un signal $x(t, \omega)$ est dérivable au point t si la limite suivante existe :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h, \omega) - x(t, \omega)}{h}.$$

Le type de convergence utilisé définit le type de continuité et de dérivabilité.

Dans les applications pratiques la convergence la plus utilisée est la convergence en moyenne quadratique (m.q) et on a le résultat suivant.

Proposition Un signal $x(t)$ est continu en m.q en t_0 ssi sa fonction covariance $\gamma_x(t, t - \tau)$ est continue au point $(t, t - \tau) = (t_0, t_0)$.

Le signal $x(t)$ est dérivable en m.q en t_0 ssi la dérivée $\frac{\partial^2 \gamma_x(t, t - \tau)}{\partial t \partial \tau}$ de sa fonction covariance $\gamma_x(t, t - \tau)$ existe au point $(t, t - \tau) = (t_0, t_0)$.

5.2.6 Signal ergodique

En général, le calcul probabiliste n'est possible que dans le cas de signaux particuliers, mais très importants, appelés « signaux ergodiques ». En effet, il arrive souvent que l'expérience aléatoire ne peut être faite qu'une seule fois. Par exemple,

observer l'évolution du niveau d'un fleuve en un point précis en fonction du temps ne peut se faire qu'une seule fois dans les mêmes conditions. Ce niveau est une « fonction aléatoire » dont on ne peut connaître qu'une seule trajectoire $x(\omega, t)$ pour ω fixé. Dans ce cas, le calcul des moments statistiques à partir de la définition est impossible. L'idée de la théorie ergodique consiste à chercher des conditions sous lesquelles les portions de la trajectoire $x(\omega, t)$ sur les intervalles de temps $[0, T[, [T, 2T[, [2T, 3T[$ etc... nous donnent une information du même type que l'examen de plusieurs trajectoires $x(\omega, t)$ pour différentes valeurs $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, etc... Il existe plusieurs notions d'ergodicité et nous commençons par définir l'ergodicité au sens large qui est la plus simple à utiliser dans la pratique.

Définition Un signal du second ordre $x(t)$ est dit ergodique au sens large s'il vérifie les deux conditions :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt = E([x(t)]) \quad (5.22)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x^*(t-\tau) dt = E[x(t)x^*(t-\tau)]. \quad (5.23)$$

Par définition, un signal ergodique au sens large est donc forcément stationnaire au sens large.

Exemple 5.2.9 Signal ergodique

Les moments du signal $x(t) = e^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$ où ϕ est une variable uniforme sur $[0, 2\pi]$ sont donnés par :

$$E(x(t)) = E(e^{j2\pi f_0 t} e^{j2\pi \phi}) = e^{j2\pi f_0 t} \int_0^1 e^{j2\pi \phi} d\phi = 0$$

$$E[x(t)x(t-\tau)^*] = e^{j2\pi f_0 \tau}.$$

$$\bar{x}_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{j2\pi(f_0 t + \phi)} dt = 0$$

$$\bar{x}_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{j2\pi(f_0 t + \phi)} e^{-j2\pi(f_0(t-\tau) + \phi)} dt = e^{j2\pi f_0 \tau}.$$

Comme les moments temporels sont égaux aux moments statistiques de même ordre, le signal $x(t)$ est ergodique au sens large. Ce signal est donc stationnaire au sens large.

Pour expliquer la notion d'ergodicité dans un cadre plus général, considérons un grand ensemble de trajectoires $x(t, \omega_n), n = 1, \dots, N$ d'un même signal à temps

continu et introduisons les moyennes temporelles et « statistiques » définies respectivement par :

$$\overline{m}_k(\tau_1, \dots, \tau_k, \omega_n) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \prod_{i=1}^k x(t - \tau_i, \omega_n) dt \quad (5.24)$$

et

$$m_k(\tau_1, \dots, \tau_k, t) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \prod_{i=1}^k x(t - \tau_i, \omega_n). \quad (5.25)$$

Les signaux pour lesquels les moyennes temporelles $\overline{m}_k$ sont indépendantes de ω_n et peuvent approximer des moments statistiques m_k jouent un rôle important dans la pratique. Ces signaux sont appelés signaux ergodiques. Pour l'étude théorique de tels signaux, on peut consulter les références [2] [11]. On se limite ici à la définition suivante.

Définition Le signal $x(t)$ est dit ergodique si, pour tout n , pour tout ensemble de réels fixés : $\tau_1, \dots, \tau_n$ et pour toute fonction déterministe f telle que

$$E(f[x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n)]) < M \quad (5.26)$$

où M est une constante, la limite suivante

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f[x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n)] dt \quad (5.27)$$

définit une fonction déterministe indépendante de ω . Les différents types de convergence conduisent à différents types d'ergodicité.

Signalons que cette définition est difficile à mettre en application et dans les problèmes pratiques on se limite à la notion d'ergodicité au sens large qui correspond au cas particulier de la définition générale obtenu pour $n = 1$, $\tau_1 = 0$, $f(x) = x$ puis $n = 2$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \tau$, $f(x, y) = xy^*$.

5.2.7 Signal markovien

Un signal stochastique est dit markovien ou de Markov si pour tout n et tout ensemble d'instants $t_1, \dots, t_n$ vérifiant : $t_1 < \dots < t_n$, on a

$$P[x(t_n) \leq x_n | x(t_1), \dots, x(t_{n-1})] = P[x(t_n) \leq x_n | x(t_{n-1})] \quad (5.28)$$

où $P[A|x]$ représente la probabilité conditionnelle. Cette définition est équivalente à la suivante

$$P[x(t_n) \leq x_n | x(t) \text{ pour tout } t \leq t_{n-1}] = P[x(t_n) \leq x_n | x(t_{n-1})].$$

Proposition Si $x(t)$ est un signal de Markov, alors pour t_1 et t_2 , vérifiant $t_1 < t_2$, on a

$$P[x(t_1) \leq x_1 | x(t) \text{ pour tout } t \geq t_2] = P[x(t_1) \leq x_1 | x(t_2)].$$

Un signal de Markov est donc un signal pour lequel le passé et le futur sont indépendants à condition de connaître le présent.

Exemple 5.2.10 Circuit RLC et signal markovien

Considérons une bobine d'inductance L constante aux bornes de laquelle on a une tension instantanée $v(t)$. L'intensité instantanée $i(t)$ est donnée par :

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\theta) d\theta.$$

Pour connaître $i(t)$, il suffit donc de connaître $i(t_0)$ et $v(\theta)$ pour $t_0 \leq \theta \leq t$. La connaissance de $i(t_{-1})$ à un instant t_{-1} antérieur à t_0 n'apporte aucune information de plus lorsque $i(t_0)$ est connu. Ainsi le signal déterministe $i(t)$ est markovien.

Considérons un circuit RLC aux bornes duquel on a une tension instantanée $v(t)$. La charge instantanée $q(t)$ du condensateur vérifie l'équation différentielle suivante :

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q}{C} = v(t). \quad (5.29)$$

L'expression générale de la solution de cette équation différentielle montre que la connaissance de $q(t_0)$ et de $v(\theta)$ pour $t_0 \leq \theta < t$ ne suffit pas pour calculer $q(t)$. On a besoin de connaître en plus une autre condition initiale, par exemple $q'(t_0)$. Le signal déterministe $q(t)$ n'est donc pas markovien. Par contre, si l'on considère la fonction vectorielle $[q(t), q'(t)]$, on sait que la connaissance de $[q(t_0), q'(t_0)]$ et celle de $v(\theta)$ pour $t_0 \leq \theta < t$ suffisent pour déterminer $[q(t), q'(t)]$. La fonction vectorielle $[q(t), q'(t)]$ est donc markovienne.

Dans la suite, on introduira pour les fonctions de répartition la notation

$$F[x_1 | x_2] \triangleq P[x(t_1) \leq x_1 | x(t_2) = x_2] \quad (5.30)$$

qui représente une fonction de la variable x_1 dans laquelle x_2 est un paramètre fixé.

Définition Une suite de V.A. $X_1, X_2, \dots$ est une chaîne de Markov si, pour tout n , on a

$$F[x_n | x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1] = F[x_n | x_{n-1}]. \quad (5.31)$$

Proposition Une suite $X_1, X_2, \dots$ est une chaîne de Markov si, et seulement si, la fonction de répartition vérifie pour tout n :

$$F[x_1, x_2, \dots, x_n] = F[x_n | x_{n-1}] F[x_{n-1} | x_{n-2}] \dots F[x_2 | x_1] F[x_1].$$

Toute suite extraite d'une chaîne de Markov est aussi une chaîne de Markov.

Si $X_1, X_2, \dots$ est une chaîne de Markov alors $X_{-1}, X_{-2}, \dots$ est aussi une chaîne de Markov.

Comme dans le cas continu, pour une chaîne de Markov, si le présent est connu, le passé et le futur sont indépendants.

5.3 REPRÉSENTATION SPECTRALE

5.3.1 Signal harmonisable

Un signal aléatoire $x(t)$ est dit harmonisable s'il peut être écrit sous la forme :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\nu t} dX(\nu) \quad \text{Signal à temps continu}$$

$$x(n) = \int_{-1/2}^{+1/2} e^{j2\pi\nu n} dX(\nu) \quad \text{Signal à temps discret}$$

où $dX(\nu)$ représente l'accroissement d'une mesure $X(\nu)$ appelée distribution spectrale du signal aléatoire. Les intégrales ci-dessus sont des intégrales aléatoires au sens de Riemann-Stieltjes définies comme limites en m.q. [4]. Dans toute la suite, nous considérons seulement le cas continu, le cas discret s'en déduit en remplaçant t par n et ∞ par $1/2$ dans les intégrales. Dire qu'un signal est harmonisable signifie que ce signal admet une décomposition sur les signaux déterministes $e^{j2\pi\nu t}$, les coefficients de la décomposition étant des V.A. Cette décomposition existe si l'on peut passer de $x(t)$ à $X(\nu)$.

Exemple 5.3.1 Signal ayant un Dirac comme mesure spectrale

Le signal

$$x(t) = Ae^{j2\pi\nu_1 t} + Be^{j2\pi\nu_2 t}$$

où A et B sont deux V.A indépendantes peut se représenter par

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [A\delta(\nu - \nu_1) + B\delta(\nu - \nu_2)] e^{j2\pi\nu t} d\nu.$$

C'est donc un signal harmonisable dont la mesure spectrale est la distribution $A\delta(\nu - \nu_1) + B\delta(\nu - \nu_2)$.

Analysons maintenant l'effet d'un filtrage linéaire sur un signal harmonisable. Désignons pour cela par $y(t)$ la sortie associée à une entrée $x(t)$ dans un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h(t)$, i.e.,

$$y(\tau) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau - t)x(t)dt$$

où la convolution est définie comme une intégrale stochastique. Le gain complexe du filtre $h(t)$ est alors donné par :

$$H(\nu) = \int_{\mathbb{R}} h(t)e^{-j2\pi\nu t} dt.$$

Proposition Si $x(t)$ est harmonisable et si le gain $H(\nu)$ du filtre est uniformément borné, i.e., il existe une constante A telle que

$$|H(\nu)| < A, \quad \forall \nu \in \mathbb{R}$$

alors le signal $y(t)$ est harmonisable et sa distribution spectrale est donnée par :

$$dY(\nu) = H(\nu)dX(\nu).$$

On suppose dans la suite les signaux centrés ce qui n'est pas une restriction si l'on s'intéresse aux signaux vérifiant : $|E[x(t)]| < \infty$. En effet, il suffit d'étudier le signal $x(t) - E[x(t)]$. Pour des raisons pratiques, on doit imposer (Hypothèse $\mathcal{H}1$) aux signaux que l'on veut décomposer d'être tels que l'intégrale :

$$\mathcal{I}_G(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} G(\nu)e^{j2\pi\nu t} dX(\nu) \quad (5.32)$$

soit convergente en m.q et ceci pour toute fonction $G(\nu)$ à valeurs réelles ou complexes vérifiant $|G(\nu)| \leq 1$. Moyennant des conditions qui permettent d'intervertir l'ordre des intégrales, on peut dire que $\mathcal{I}_G(t)$ est la transformée de $x(t)$ dans un filtre de gain $G(\nu)$. Imposer la condition $|G(\nu)| \leq 1$ équivaut à interdire tout phénomène d'amplification sur une fréquence quelconque. Cela revient à dire aussi que le dispositif physique qui réalise le filtre est un dispositif passif qui ne contient aucune source d'énergie interne. Un tel filtre agit en écran coloré à travers lequel on observe des radiations qui sont plus ou moins absorbées par le filtre et dont l'intensité ne peut jamais dépasser celle de la radiation de départ. Le lemme de Loève [2] donne une condition suffisante sur $X(\nu)$ qui assure l'existence de $\mathcal{I}_G(t)$ quel que soit t .

Proposition [2] [7] L'intégrale $\mathcal{I}_G(t)$ existe si l'intégrale double suivante existe :

$$\mathcal{I}_G(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\nu_1) G(\nu_2)^* e^{j2\pi(\nu_1 - \nu_2)t} d\mu_x(\nu_1, \nu_2) \quad (5.33)$$

où

$$\mu_x(\nu_1, \nu_2) \triangleq E[dX(\nu_1)dX^*(\nu_2)]. \quad (5.34)$$

L'existence de $\mathcal{I}_G(t)$ est assurée pour tout filtre vérifiant $|G(\nu)| \leq 1$ si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu_x(\nu_1, \nu_2) < C < +\infty. \quad (5.35)$$

Dans ces conditions, la covariance de $x(t)$ se met sous la forme :

$$\gamma_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(\nu_1 t_1 - \nu_2 t_2)} d\mu_x(\nu_1, \nu_2) \quad (5.36)$$

et on dit qu'elle est harmonisable.

Hypothèse d'harmonisabilité ($\mathcal{H}2$) : Un signal vérifie l'hypothèse $\mathcal{H}2$ si sa covariance peut se mettre sous la forme (5.36) où les accroissements $d\mu_x(\nu_1, \nu_2)$ satisfont à la condition (5.35).

L'hypothèse $\mathcal{H}2$ porte uniquement sur la covariance $\gamma_x(t_1, t_2)$ et ne nécessite aucune hypothèse sur la stationnarité de $x(t)$. Elle implique que $\gamma_x(t_1, t_2)$ est uniformément bornée et qu'elle est continue dans tout le plan $t_1 \times t_2$. Ceci implique que le signal $x(t)$ est continu en m.q.

Exemple 5.3.2 Signal ne vérifiant pas $\mathcal{H}2$

Si $x(t) = U(t)$ est la fonction échelon unité, alors $\gamma_x(t_1, t_2) = 0$ sauf sur le domaine $]-\infty, 0] \times]-\infty, 0]$ où elle vaut 1. Donc $\gamma_x(t_1, t_2)$ ne peut pas se mettre sous la forme (5.37) à cause des discontinuités sur les axes de coordonnées. Le signal $x(t)$ ne vérifie par $\mathcal{H}2$ pour les deux raisons suivantes.

Le signal contient des fréquences très basses qui permettent à un signal d'avoir une moyenne égale à $U(t)$.

Le signal contient des fréquences très élevées qui sont introduites par des discontinuités à l'origine des temps.

Exemple 5.3.3 Signal vérifiant $\mathcal{H}2$

Si $x(t) = Ae^{j2\pi t}$ où A est une V.A de variance σ^2 , on a : $\gamma_x(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{j2\pi\nu(t_1 - t_2)}$. Le signal $x(t)$ vérifie donc $\mathcal{H}2$ sans être forcément stationnaire puisque $E[x(t)]$ peut dépendre de t .

Si l'on fait passer un signal ne satisfaisant pas à $\mathcal{H}2$ dans un filtre qui supprime le voisinage de la fréquence 0 et qui atténue les fréquences élevées, on obtient un signal qui peut satisfaire $\mathcal{H}2$.

Proposition [2] [7] Si la covariance $\gamma_x(t_1, t_2)$ de $x(t)$ est harmonisable, alors $x(t)$ est aussi harmonisable et les distributions spectrales $X(\nu)$ et $\mu_x(\nu_1, \nu_2)$ vérifient l'identité :

$$\mu_x(\nu_1, \nu_2) \stackrel{\Delta}{=} E[X(\nu_1)X^*(\nu_2)]. \quad (5.37)$$

Si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont deux signaux vérifiant l'hypothèse $\mathcal{H}2$, on peut déduire à partir de l'inégalité de Schwarz que la fonction d'intercorrélation définie par (5.9) peut s'écrire sous la forme :

$$\gamma_{x_1, x_2}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(\nu_1 t_1 - \nu_2 t_2)} d\mu_{x_1, x_2}(\nu_1, \nu_2) \quad (5.38)$$

où $d\mu_{x_1, x_2}$ désigne la différentielle d'une fonction déterministe μ_{x_1, x_2} appelée distribution interspectrale de γ_{x_1, x_2} . On dit alors que Γ_{x_1, x_2} est harmonisable. S'il existe une fonction Γ_{x_1, x_2} telle que $d\mu_{x_1, x_2}$ peut se mettre sous la forme

$$d\mu_{x_1, x_2}(\nu_1, \nu_2) = \Gamma_{x_1, x_2}(\nu_1, -\nu_2) d\nu_1 d\nu_2 \quad (5.39)$$

alors la fonction Γ_{x_1, x_2} est la TF de γ_{x_1, x_2} . On doit souvent calculer la fonction γ_{y_1, y_2} où $y_1(t)$, $y_2(t)$ sont les sorties de deux filtres attaqués par des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Ceci peut se faire à l'aide de la formule suivante.

Formule des interférences Soient $y_1(t)$ et $y_2(t)$ les sorties des filtres F_1 et F_2 de gains $H_1(\nu)$ et $H_2(\nu)$ associées aux entrées $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont harmonisables et si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ existent, alors on a :

$$\gamma_{y_1, y_2}(t_1, t_2) = \int_{\mathbb{R}^2} H_1(\nu_1) H_2^*(\nu_2) e^{j2\pi(\nu_1 t_1 - \nu_2 t_2)} d\mu_{x_1, x_2}(\nu_1, \nu_2). \quad (5.40)$$

Si, de plus, $d\mu_{x_1, x_2}(\nu_1, \nu_2) = \Gamma_{x_1, x_2}(\nu_1, -\nu_2) d\nu_1 d\nu_2$, alors la T.F de γ_{x_1, x_2} est donnée par :

$$\Gamma_{y_1, y_2}(\nu_1, \nu_2) = H_1(\nu_1) H_2^*(\nu_2) \Gamma_{x_1, x_2}(\nu_1, \nu_2). \quad (5.41)$$

Pour $F_1 = F_2$ et $x_1(t) = x_2(t)$, on a $y_1(t) = y_2(t) \triangleq y(t)$, la formule (5.40) où $t_1 = t_2 = 0$ montre que la distribution $d\mu_x$ vérifie l'inégalité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu_1) H^*(\nu_2) d\mu_x(\nu_1, \nu_2) = \gamma_y(0, 0) = E[|y(0)|^2] \geq 0$$

et pour tout n fini, la matrice carrée dont les éléments sont $d\mu_x(\nu_i, \nu_j)$, $1 \leq i, j \leq n$ est définie non négative.

On voit également d'après (5.40) que si F_1 et F_2 sont deux filtres passe-bande de largeurs de bande $\Delta\nu_1$ et $\Delta\nu_2$, alors on a

$$\gamma_{y_1 y_2}(t_1, t_2) = \int_{\Delta\nu_1} \int_{\Delta\nu_2} e^{j2\pi(\nu_1 t_1 - \nu_2 t_2)} d\mu_{x_1 x_2}(\nu_1, \nu_2).$$

Exemple 5.3.4 Interférences entre deux radiations lumineuses

Soit $x(t)$ une radiation émise par une source lumineuse et $y_1(t)$, $y_2(t)$ les radiations filtrées par deux écrans colorés. Les phénomènes d'interférences dans un certain plan entre $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont décrits par la fonction $E[y_1(t_1)y_2(t_2)]$ dont le calcul se fait à l'aide de la formule des d'interférences.

5.3.2 Signal à covariance stationnaire et spectre

Une covariance $\gamma_x(t_1, t_2)$ est dite stationnaire si elle ne dépend que de la différence $\tau \triangleq t_1 - t_2$, i.e., pour tout τ et tout t_1 , on a

$$\gamma_x(t_1, t_1 - \tau) \triangleq \gamma_x(\tau).$$

Par abus de notation, dans toute la suite, on désigne par γ_x deux fonctions différentes qui prennent les mêmes valeurs : l'une $\gamma_x(t_1, t_1 - \tau)$ étant une fonction de deux variables et l'autre $\gamma_x(\tau)$ une fonction d'une seule variable. S'il est nécessaire de faire la distinction entre ces deux fonctions, on précisera les variables.

Proposition Soit $\gamma_x(t_1, t_1 - \tau)$ une covariance stationnaire. Alors si cette covariance est harmonisable, la distribution $\mu_x(\nu_1, \nu_2)$ apparaissant dans (5.36) est de la forme :

$$d\mu_x(\nu_1, \nu_2) = dF_x(\nu_1) \delta(\nu_1 - \nu_2) d\nu_2$$

où F_x est une fonction déterministe et δ la distribution de Dirac. Dans ce cas, on a :

$$\gamma_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{j2\pi\nu\tau} \delta(\nu - \theta) dF_x(\nu) d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\nu\tau} dF_x(\nu).$$

Si F_x est la primitive d'une certaine fonction Γ_x , alors $\Gamma_x \triangleq F'_x$ est appelée densité spectrale de puissance de $x(t)$ ou spectre de puissance de $x(t)$. On a alors les relations (5.13).

Proposition (Wiener-Kintchine) [2] Une covariance $\gamma_x(t, t - \tau)$ stationnaire est harminisable si $\gamma_x(\tau)$ est continue en $\tau = 0$.

Formule des interférences Soient $y_1(t)$ et $y_2(t)$ les sorties des filtres F_1 et F_2 de gains $H_1(\nu)$ et $H_2(\nu)$ associées aux entrées $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont stationnaires au sens large dans leur ensemble et si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ existent, alors on a :

$$\gamma_{y_1 y_2}(\tau) = [h_1(t) * h_2^*(-t) * \gamma_{x_1 x_2}(t)](\tau) \quad (5.42)$$

et si la densité interspectrale $\Gamma_{x_1 x_2}$ existe, on a :

$$\Gamma_{y_1 y_2}(\nu) = H_1(\nu) H_2^*(\nu) \Gamma_{x_1 x_2}(\nu). \quad (5.43)$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \gamma_{y_1 y_2}(t_1, t_2) &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t_1 - \theta_1) h_1(\theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_2^*(t_2 - \theta_2) h_2^*(\theta_2) d\theta_2 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1) h_2(\theta_2)^* E[x_1(t_1 - \theta_1) x_2^*(t_2 - \theta_2)] d\theta_1 d\theta_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\theta_1) h_2(\theta_2)^* \gamma_{x_1 x_2}(\tau - \theta_1 + \theta_2) d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned}$$

Exemple 5.3.5 Corrélation d'une fonction dérivée

Comme application de la formule des interférences, établissons la relation entre la fonction de corrélation d'un signal $x(t)$ et celle de la dérivée de $x(t)$. La relation qui permet de passer de $x(t)$ à $x'(t)$ se traduit dans le domaine fréquentiel par $x'(f) = j2\pi f \tilde{x}(f)$. On passe donc de $x(t)$ à $x'(t)$ par un un filtre linéaire de gain complexe $G(f) = j2\pi f$. La formule des interférences donne :

$$\Gamma_{x'}(f) = |j2\pi f|^2 \Gamma_x(f) = (2\pi f)^2 \Gamma_x(f).$$

Prenant les transformées de Fourier inverses des deux membres, on obtient $\gamma_{x'}(\tau) = -\gamma''_x(\tau)$.

Filtrage des signaux vectoriels Le filtrage linéaire d'un signal à plusieurs composantes est défini dans le domaine fréquentiel par la relation :

$$d\mathbf{y}(\nu) = \mathbf{G}(\nu) d\mathbf{x}(\nu) \quad (5.44)$$

où $\mathbf{G}(\nu)$ n'est plus un gain complexe scalaire mais une matrice dont les éléments sont des fonctions scalaires. Dans le cas stationnaire, on a

$$E[d\mathbf{x}(\nu)d\mathbf{y}^H(f)] = \Gamma(\nu)\delta(\nu - f)d\nu df \quad (5.45)$$

où $\Gamma(\nu)$ est une matrice dénommée matrice spectrale ou interspectrale. Utilisant alors un filtre matriciel faisant passer de $\mathbf{x}$ à $\mathbf{y}$, on voit que la matrice spectrale du vecteur $\mathbf{y}$ se déduit de celle du vecteur $\mathbf{x}$ par la relation

$$\Gamma_y(\nu) = \mathbf{G}(\nu)\Gamma_x(\nu)\mathbf{G}^H(\nu). \quad (5.46)$$

Factorisation d'un spectre et blanchiment d'un signal Dans le cas particulier

$x_1 = x_2$, et $h_1 = h_2$, on obtient $y_1 = y_2 \triangleq y$ et

$$\gamma_y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\nu)|^2 e^{j2\pi\tau\nu} dF_x(\nu). \quad (5.47)$$

Si x admet une densité spectrale, i.e., si $dF_x(\nu) = \Gamma_x(\nu)d\nu$, on a :

$$\Gamma_y(\nu) = |H(\nu)|^2 \Gamma_x(\nu). \quad (5.48)$$

Si $x(t)$ est un bruit blanc, stationnaire au sens large, i.e., sa densité spectrale $\Gamma_x(\nu)$ est égale à une constante σ_x^2 , on obtient :

$$\Gamma_y(\nu) = |H(\nu)|^2 \sigma_x^2 \quad (5.49)$$

Cette relation est appelée factorisation spectrale de Γ_y à l'aide du filtre H . La factorisation d'un spectre donné $\Gamma_y(\nu)$ consiste à déterminer la réponse en fréquences $H(\nu)$ d'un filtre de sorte que $\Gamma_y(\nu)$ vérifie (5.49). Il est clair que cette relation ne permet pas de déterminer la phase du filtre et donc, lorsqu'il existe, ce filtre n'est pas unique.

Proposition [2] [7] La factorisation spectrale d'un spectre $\Gamma_y(\nu)$ est possible ssi ce spectre vérifie l'inégalité suivante (condition de Paley-Wiener).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\text{Log}[\Gamma_y(\nu)]| d\nu < +\infty.$$

Blanchir un signal $x(t)$ signifie rechercher le filtre linéaire qui associe à ce signal une sortie qui est un bruit blanc. L'existence de ce filtre dépend de ce que l'on

entend par bruit blanc. Classiquement, le problème est traité dans le cas où le bruit blanc est un signal stationnaire au sens large ayant une densité spectrale constante (bruit blanc au sens des statistiques d'ordre deux). Se plaçant dans ce cadre et tenant compte de (5.48), on doit déterminer la fonction $H(\nu)$ telle que

$$\sigma_y^2 = \Gamma_x(\nu) |H(\nu)|^2. \quad (5.50)$$

La solution $H(\nu)$ de ce problème existe toujours à un facteur de phase $\text{Arg}[H(\nu)]$ près et elle est discutée dans des ouvrages classiques. Le cas d'un bruit blanc au sens des statistiques d'ordre supérieur à deux sera examiné plus loin.

Considérons un filtre quelconque de réponse en fréquence $G(\nu)$ qui reçoit en entrée un bruit $x(t)$ et soit $y(t)$ la sortie associée. Soit $y_i(t)$ la sortie du filtre idéal placé dans les mêmes conditions. On appelle bande équivalente de bruit, la largeur de bande du filtre idéal telle que les puissances de $y(t)$ et $y_i(t)$ soient les mêmes. On a donc :

$$B_{\text{eq}} = \frac{1}{2|G(0)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\nu)|^2 d\nu.$$

On a toujours intérêt à avoir B_{eq} aussi petit que possible pour limiter les effets du bruit dans la bande du filtre. On admettra que le filtre qui minimise B_{eq} est celui qui maximise le rapport signal à bruit en sortie.

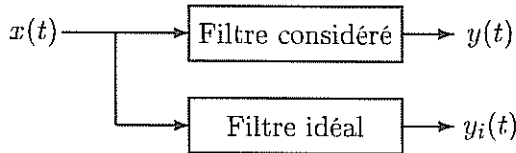


Figure 5.4 Bande équivalente de bruit : $y(t)$ et $y_i(t)$ de même puissance.

5.3.3 Propriété du périodogramme et applications

Nous allons revenir sur le périodogramme $P(\nu)$ défini par (5.15). Comme, il est possible d'introduire plusieurs estimateurs différents pour un même paramètre, nous commençons par définir les qualités qui permettent de comparer de tels estimateurs.

Définition Soit Y une grandeur certaine ou aléatoire et $\hat{Y}_n = g(Y_1, \dots, Y_n)$ où g est une fonction déterministe. La V.A ainsi définie est appelée estimateur de Y construit à partir des n échantillons $Y_1, \dots, Y_n$.

1. L'estimateur est dit **convergent** si $\hat{Y}_n \rightarrow Y$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
2. L'estimateur est dit **sans biais** si $E(\hat{Y}_n) = E(Y)$.
3. La précision d'un estimateur est définie par sa variance et, parmi deux estimateurs sans biais, le plus précis est celui qui a la plus petite variance.

Soit x_n un signal réel à temps discret, de moyenne nulle et stationnaire au sens strict. Sa fonction de corrélation et sa densité spectrale sont définies par

$$\gamma_n = \gamma_{-n} = E(x_m x_{m+n}) \quad \text{et} \quad \tilde{\gamma}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-j2\pi\nu k}.$$

On admet que le signal est ergodique et on introduit l'un des deux estimateurs suivants pour les coefficients γ_n :

$$\hat{\gamma}_n^N = \hat{\gamma}_{-n}^N = \alpha_1 \sum_{m=0}^{N-1-n} x_m x_{m+n}, \quad \alpha_1 \triangleq \frac{1}{N}$$

$$\hat{\hat{\gamma}}_n^N = \hat{\hat{\gamma}}_{-n}^N = \alpha_2 \sum_{m=0}^{N-1-n} x_m x_{m+n}, \quad \alpha_2 \triangleq \frac{1}{N-n}.$$

Pour estimer la densité spectrale de x_n , on peut prendre la T.F d'un estimateur de la fonction de corrélation de x_n . Mais cela peut conduire à une fonction pouvant prendre des valeurs négatives et ceci n'est pas autorisé pour une densité spectrale. On préfère alors calculer, à partir des échantillons $x_0, \dots, x_{N-1}$, le périodogramme :

$$P(\nu) \triangleq \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi\nu n} \right|^2 \quad (5.51)$$

et étudier son comportement pour les grandes valeurs de N . On peut démontrer que $P(\nu)$ est un estimateur non biaisé de la densité spectrale du signal x_n supposé stationnaire.

Cyclostationnarité Dans un grand nombre d'applications, on suppose que le signal est stationnaire. Mais pour certaines applications telles que les communications, le canal est non linéaire et les entrées sont non stationnaires mais elles possèdent cependant une propriété proche de la stationnarité dénommée cyclostationnarité. Nous nous limitons pour expliquer cette notion à la définition suivante et nous donnons ensuite un exemple. Pour plus de détails, on peut consulter les références sui-

vantes [9]. Un signal à temps continu $x(t)$ est dit cyclostationnaire si sa fonction d'autocorrélation γ_x peut se mettre sous la forme :

$$\gamma_x(t, t - \tau) = \sum_{\alpha \in A} \gamma_x^{(\alpha)}(\tau) e^{j2\pi\alpha t} \quad (5.52)$$

où A désigne un ensemble cyclique de fréquences et

$$\gamma_x^{(\alpha)}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)x(t) e^{-j2\pi\alpha t} dt$$

est appelée autocorrélation cyclique de $x(t)$.

Exemple 5.3.6 Signal cyclostationnaire

Considérons le signal défini par

$$x(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k h(t - kT)$$

où T est une constante, (A_k) une suite de variables aléatoires binaires de même loi de probabilité pouvant prendre chacune les valeurs x_0 ou x_1 et $h(t)$ une fonction dont le support est contenu dans $[0, T]$. On peut vérifier que, pour tout t , on a $E[x(t + T)] = E[x(t)]$ et $\gamma_x(t, t - \tau) = \gamma_x(t + T, t + T - \tau)$. Ces deux fonctions sont de période T par rapport à la variable t et le signal $x(t)$ n'est donc pas stationnaire. On peut établir que, sous des hypothèses générales, pour chaque τ fixé, la fonction $\gamma_x(t, t - \tau)$ admet une décomposition en série de Fourier, i.e. $\gamma_x(t, t - \tau)$ peut se mettre sous la forme (5.52).

Exemple 5.3.7 Estimation de la direction d'une source à l'aide d'un réseau de capteurs

Soit un réseau de N capteurs omnidirectionnels dans un demi-plan, alignés, numérotés de 0 à $N - 1$ et espacés entre eux de $w/2$. On considère une onde plane $x(t)$ émise par une source ponctuelle supposée à l'infinie, de fréquence f_0 , d'amplitude A , de longueur d'onde w et de vitesse de propagation v . Soit $x(t) = A \exp[j2\pi f_0 t]$. Le signal reçu par le capteur 0 est alors $x_0(t) = A \exp[j2\pi(f_0 t + \phi)]$ où ϕ est une phase à l'origine quelconque ($f_0 = v/w$).

La différence de « trajet » pour aller du plan π_0 du capteur 0 au plan π_1 du capteur 1 est égale à :

$$d = \frac{\lambda}{2} \sin(\theta) = \frac{w}{2} \sin(\theta).$$

Comme on a $w = \lambda T$, le temps mis pour effectuer ce trajet est

$$\Delta T = \frac{d}{v} = \frac{w \sin(\theta)}{2v}.$$

Comme la vitesse du front d'onde est v , le déphasage temporel est de :

$$\Delta_n T = n\delta T = \frac{nw \sin(\theta)}{2v}$$

c'est une avance ou un retard selon la valeur de θ . Le signal reçu par le capteur n est donc :

$$x_n(t) = Ae^{j2\pi f_0(t+n\Delta T)+\varphi} = x_0(t)w_0^n, \quad w_0 = e^{j2\pi f_0\Delta T}.$$

La fonction d'autocorrélation et la DSP du signal $x_n(t)$ sont données par :

$$\gamma_{x_n}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2B} \int_{-B}^B x_n(t)x_n(t-\tau)^* dt = |A|^2 e^{j2\pi f_0\tau}$$

et

$$\Gamma_n(\nu) = |A|^2 \delta(\nu - f_0).$$

Les vecteurs $x_n(t)$ et $x_{n-1}(t)$ se déduisent donc l'un de l'autre dans une rotation d'angle $\arg w_0$ indépendant de n . On peut déterminer w_0 à partir des N signaux $x_n(t), n = 0, \dots, N-1$ en faisant une TFD. On peut retrouver alors la direction θ de la source en calculant le signal

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i(t)w^{-i} \quad \text{où} \quad w = \exp[j2\pi u]$$

et en déterminant ensuite la valeur de u qui permet de remettre en phase tous les vecteurs $x_i(t)$. On obtient

$$y(t) = x_0(t) \sum_{i=0}^{N-1} w_0^i w^{-i} = x_0(t) \frac{1 - (w_0/w)^N}{1 - w_0/w}$$

et la valeur de u cherchée est obtenue en écrivant que $|y(t)|$ est maximum (on choisira $y(t)$ réel). On obtient $u = f_0\Delta T$ et on peut déduire la direction θ_ℓ . Soit $\theta_\ell = \text{Arcsin}(\frac{2\ell}{N})$.

Comme la DSP du bruit est égale à $\Gamma_b = \sigma^2$, la puissance de b_n est infinie. On peut limiter la puissance totale de bruit reçue par chaque capteur en mettant un filtre dont la réponse en amplitude est la plus proche possible de 1 sur $[-f_{\max}, f_{\max}]$ et nulle ailleurs. Dans la pratique ce filtre n'existe pas. Le filtre aura une fréquence de coupure $F_c > f_{\max}$.

5.3.4 Pseudo-spectre d'un signal non stationnaire

Nous allons aborder seulement trois cas assez importants dans la pratique : le cas d'un signal stationnaire tronqué, celui d'un signal cyclostationnaire et enfin celui d'un signal non stationnaire plus général.

Signal tronqué Soit un signal $x(t)$ stationnaire de densité spectrale $\Gamma(\nu)$. On tronque $x(t)$ pour obtenir le nouveau signal $y(t)$ défini par $y(t) = x(t)$ pour $t \in [-T/2, T/2]$ et $y(t) = 0$ ailleurs. Cette situation se rencontre dans la pratique à chaque fois que l'on ne dispose que d'un signal $x(t)$ observé sur $t \in [-T/2, T/2]$ et prolongé par zéro à l'extérieur de cet intervalle. Il est clair que $y(t)$ est non stationnaire et donc sa fonction d'autocorrélation $\gamma_y(t, t - \tau)$ dépend de t et τ . En effet, si l'on écrit $y(t)$ sous la forme $y(t) = x(t)\Pi(\frac{t}{T})$ où $\Pi(\frac{t}{T})$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[-T/2, T/2]$, on obtient :

$$\begin{aligned}\gamma_y(t, t - \tau) &= E[x(t)x^*(t - \tau)\Pi(\frac{t}{T})\Pi(\frac{t - \tau}{T})] \\ &= \gamma_x(\tau) \Pi(\frac{t}{T})\Pi(\frac{t - \tau}{T}).\end{aligned}$$

Afin d'introduire une densité spectrale qui approxime celle de $x(t)$, considérons la fonction suivante :

$$\bar{\gamma}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \gamma_y(t, t - \tau) dt. \quad (5.53)$$

D'où

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_x(\tau) &= \gamma_x(\tau) \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\frac{t}{T})\Pi(\frac{t - \tau}{T}) dt \\ &= \gamma_x(\tau) \frac{1}{T} [\Pi(\frac{t}{T}) * \Pi(\frac{t}{T})](\tau).\end{aligned}$$

On définit alors le pseudo-spectre du signal $x(t)$ comme étant la T.F de $\bar{\gamma}_x$, soit :

$$\bar{\Gamma}_x(f) = \Gamma_x(f) * \frac{1}{T} |\tilde{\Pi}(\frac{t}{T})|^2(f) = \Gamma_x(f) * T \text{sinc}^2(Tf) \quad (5.54)$$

Exemple 5.3.8 Application à la séparation de deux fréquences

Considérons le signal aléatoire à temps continu défini par

$$x(t) = s(t) + b(t)$$

où $b(t)$ est un bruit blanc de variance σ^2 et $s(t)$ un signal indépendant de $b(t)$ défini par :

$$s(t) = \sum_{k=1}^3 A_k e^{j(2\pi f_k t + \phi_k)}$$

où les f_k désignent des fréquences réelles déterministes, les A_k des amplitudes déterministes positives, les ϕ_k des variables aléatoires uniformes sur $[0, 2\pi]$ et indépendantes. On a :

$$\gamma_x(\tau) = \sum_{k=1}^3 A_k^2 e^{j2\pi f_k \tau} + \sigma^2 \delta(\tau).$$

D'où :

$$\Gamma_x(f) = \sigma^2 + \sum_{k=1}^3 A_k^2 \delta(f - f_k).$$

On observe le signal sur $[-T/2, T/2]$, tenant compte de (5.56), le pseudo-spectre de $x(t)$ a pour expression :

$$\bar{\Gamma}_x(f) = \sigma^2 + \sum_{k=1}^3 T A_k^2 \text{sinc}^2 T(f - f_k)$$

car

$$\sigma^2 * \text{sinc}^2(Tf) = \frac{\sigma^2}{T}.$$

La figure 5.5 donne le pseudo-spectre pour deux valeurs de T différentes. On peut constater que plus T est grand plus le pseudo-spectre permet de voir l'existence des 3 fréquences présentes dans le signal.

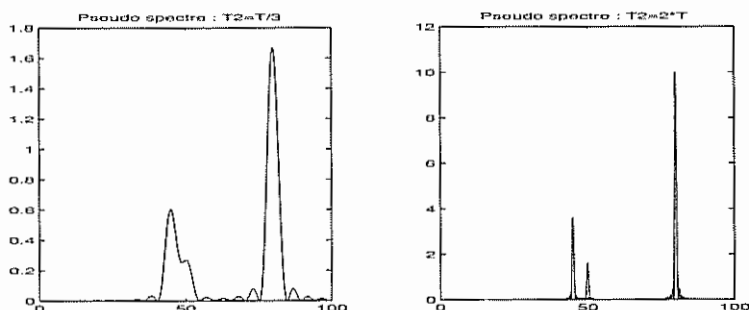


Figure 5.5 Durée d'observation et pouvoir de résolution du pseudo-spectre.

Signal cyclostationnaire

On a vu dans l'exemple 5.3.6 que le signal

$$x(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k h(t - kT)$$

où T est une constante, A_k des variables aléatoires binaires pouvant prendre les valeurs x_0 ou x_1 et $h(t)$ la fonction rectangle de support $[0, T]$ n'est pas stationnaire mais cyclostationnaire. On peut lui associer une pseudo-corrélation en remplaçant $\gamma_x(t, t - \tau)$ par sa moyenne par rapport à t sur l'intervalle $[0, T]$. On obtient alors une fonction de la seule variable τ qui a pour expression :

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_x(\tau) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_A(nT) \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT) h(t - \tau + (n - k)T) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_A(nT) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{t-kT-T}^{t-kT} h(u) h(u - \tau + nT) du \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_A(nT) \int_{-\infty}^{\infty} h(u) h(u - \tau + nT) du \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_A(nT) g(\tau - nT), \quad \text{avec } g(u) \triangleq h(u) * h(-u). \end{aligned}$$

Le pseudo-spectre de $x(t)$ est égal à la T.F $S_x(\nu)$ de $\hat{\gamma}_x$, soit :

$$\begin{aligned} S_x(\nu) &= \frac{1}{T} G(\nu) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_A(nT) e^{-j2\pi\nu nT} \\ &= T^2 \left(\frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T} \right)^2 [E(|A|)^2 + \sigma_A^2 \delta(\nu)]. \end{aligned}$$

Spectre évolutif d'un signal non stationnaire Dans beaucoup d'applications, on doit traiter des signaux aléatoires non stationnaires plus généraux que le signal tronqué et le signal cyclostationnaire. Pour ce faire, des méthodes d'analyse temps-fréquence des signaux déterministes ont été étendues pour traiter les signaux aléatoires [3]. L'une des méthodes les plus connues pour traiter les signaux déterministes est la distribution de Wigner-Ville définie par :

$$W_x(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau/2) x^*(t - \tau/2) e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau. \quad (5.55)$$

Afin d'introduire une extension de cette distribution pour les signaux aléatoires non stationnaires et pour des raisons de symétrie, on définit la covariance d'un signal $x(t)$ par :

$$\gamma_x(t, \tau) \triangleq \gamma_x(t + \tau/2, t - \tau/2) = E\{x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2)\}. \quad (5.56)$$

Moyennant des hypothèses qui permettent d'intervertir l'ordre d'intégration, on peut établir que l'espérance mathématique de la distribution de Wigner-Ville est égale à la T.F de la covariance. En effet,

$$\begin{aligned} S_x(t, \nu) &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_x(t, \tau) e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E[x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2)] e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2) e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau\right] \\ &= E[W_x(t, \nu)]. \end{aligned}$$

Ce résultat justifie l'utilisation de $S_x(t, \nu)$ comme une extension de la distribution de Wigner-Ville au cas des signaux aléatoires. La distribution temps-fréquence $S_x(t, \nu)$ ainsi définie peut s'interpréter comme un « spectre évolutif » du signal aléatoire non stationnaire $x(t)$. En effet, pour chaque t fixé $S_x(t, \nu)$ représente une sorte de densité spectrale.

5.4 MODÉLISATIONS CLASSIQUES D'UN SIGNAL

La modélisation d'un signal joue un rôle important dans l'analyse qui permet de connaître les caractéristiques de ce dernier. Pour un signal déterministe $x(t)$, souvent entaché de bruit, son analyse temporelle fait apparaître la présence ou l'absence d'informations utiles contenues dans ce signal. L'analyse fréquentielle, généralement fondée sur la transformée de Fourier $X(\nu)$ de $x(t)$ permet de voir quelles sont les fréquences présentes dans le signal et quelles sont leurs amplitudes. Pour un signal aléatoire stationnaire, l'analyse est fondée sur l'estimation de la fonction d'autocorrélation γ_x de $x(t)$ et de l'étude de γ_x en tant que signal déterministe. Pour les signaux non stationnaires, on introduit des méthodes d'analyse temps-fréquence qui dépassent le cadre de ce manuscrit. On peut aussi considérer les statistiques d'ordre supérieur à 2 et faire une analyse polyspectrale qui peut contenir plus d'information sur le signal à traiter. Le problème de l'analyse du signal modélisé consiste généralement à « estimer » les paramètres du modèle considéré pour le signal. Nous allons présenter succinctement quelques modèles pratiques qui permettent de représenter une large classe de signaux réels.

5.4.1 Les bruits de fond dans les circuits électriques : bruits blancs

Les sources génératrices de bruit sont essentiellement de deux sortes : les sources extérieures à un système de traitement et les sources internes au système. Les premières, localisées à l'extérieur du système de traitement, agissent par influence et peuvent être naturelles ou artificielles. Les secondes génèrent des « bruits internes » au système qui sont indépendants des conditions extérieures. On dispose de peu de moyens pour lutter contre un bruit externe. La principale méthode consiste à filtrer au maximum le signal bruité à l'aide d'un filtre adapté qui permet de réduire l'influence du bruit parasite avant de procéder au traitement du signal reçu. Pour un bruit interne, il existe des méthodes adaptées, par exemple utiliser des blindages pour réduire les bruits dus aux commutations, aux couplages, etc.

Dans les circuits électriques, on a soit des perturbations de type impulsif engendrées par des commutations de courants (interrupteurs électroniques, circuits logiques), soit des bruits de fond générés dans les câbles et les composants électroniques. Ceux sont les bruits de fond sur lesquels on ne peut le moins agir car ils résultent du déplacement erratique de particules chargées en équilibre thermodynamique (mouvement Brownien) ou sous l'influence de champs appliqués. On assimile ces bruits à un signal stationnaire et ergodique et parmi ces bruits les trois principaux sont : le bruit thermique, le bruit de grenaille et le bruit additionnel de basse fréquence.

a) Bruit thermique (Johnson Noise)

Au-dessus du zéro absolu, les électrons libres d'un matériau conducteur sont soumis à des vibrations aléatoires (agitation thermique). L'ensemble de ces mouvements erratiques provoque, même en l'absence de différence de potentiel aux bornes du conducteur, une fluctuation aléatoire de la valeur instantanée de la tension observable. En l'absence de champ électrique appliqué, la valeur moyenne de la $ddp\ e(t)$ est nulle. Par ailleurs, si l'on observe la valeur quadratique moyenne de $e(t)$ à l'aide d'un appareil de grande sensibilité, on constate que celle-ci est une fonction croissante de la température. Cette tension $e(t)$ est un signal aléatoire appelé bruit thermique et parfois Johnson Noise qui est présent dans tout composant passif ou actif opposant une certaine résistance électrique R au passage d'un courant. On peut modéliser ce bruit par un signal stationnaire ergodique du second ordre, centré et de spectre constant. Le bruit thermique constitue l'exemple le plus important du bruit blanc. La densité spectrale de puissance de ce signal est donnée par la formule suivante, connue en thermodynamique sous la dénomination de Formule de Nyquist :

$$\Gamma_e(\nu) = \frac{2h|\nu|}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

où $h = (6,62)10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ et $k = (1,38)10^{-23} \text{ J/K}$ désignent les constantes de Planck et de Boltzmann respectivement et T la température exprimée en degrés Fahrenheit. La fréquence de coupure $f_c = kT/h$ est assez élevée et on admet dans la pratique que l'intervalle $[-f_c, f_c]$ contient les supports des spectres de tous les signaux étudiés. On obtient comme approximation du premier ordre de la densité spectrale :

$$\Gamma_e(\nu) \approx 2kT.$$

La puissance électrique active délivrée par $e(t)$, dans une résistance adaptée R , est donnée par $P(t) = e^2/4R$.

b) Bruit de grenaille (shot noise)

On appelle bruit de grenaille (ou shot noise) les fluctuations statistiques du nombre de porteurs de charges (électron ou trou) qui participent à la création d'un courant en traversant une barrière de potentiel. Une telle barrière existe à chaque jonction PN d'un dispositif à semiconducteur. Elle intervient dans les mécanismes d'émission thermoélectrique et photoélectrique. Si l'on admet que les porteurs sont indépendants, la distribution de leur nombre par unité de temps suit une loi de Poisson. On peut, en première approximation, considérer le flux des porteurs comme une suite aléatoire d'impulsions de courant représentées par des distributions de Dirac pondérées par la charge de l'électron. L'équation du courant est donnée par :

$$i(t) = \sum_k e\delta(t - t_k)$$

où les t_k sont les instants aléatoires de passage de chaque porteur à travers la barrière de potentiel et $e = (1,6)10^{-19} \text{ C}$. La fonction d'autocorrélation de $i(t)$ est donnée par :

$$\gamma_i(\tau) = e^2[\alpha^2 + \alpha\delta(\tau)]$$

où α désigne le nombre moyen de charges par unité de temps. La densité spectrale de puissance a donc pour expression :

$$\Gamma_i(\nu) = I_0^2\delta(\nu) + eI_0, \quad I_0 = e\alpha$$

où I_0 désigne le courant moyen (composante continue). Le premier terme correspond à la distribution spectrale de la composante continue et le deuxième à celle des fluctuations de courant dues à l'effet grenaille. Le bruit de grenaille est donc un bruit blanc de puissance I_0^2 .

c) Bruit additionnel de basse fréquence

Aux fréquences supérieures à quelques kHz pour les composants électriques, ou quelques dizaines de kHz pour les composants électroniques, le bruit de fond de ces

composants est essentiellement un bruit blanc. Ce bruit, appelé bruit de fond additionnel, résulte surtout de l'effet thermique et de l'effet de grenaille. Aux fréquences inférieures, on observe que la densité spectrale de puissance décroît en fonction de la fréquence. Il n'existe pas de modèle précis permettant d'établir une expression théorique de la DSP d'un bruit additionnel. On constate que cette densité varie approximativement comme l'inverse de la fréquence. On introduit la loi empirique suivante :

$$\Gamma_a(\nu) = k \frac{\nu_a}{|\nu|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 2. \quad (5.57)$$

La validité de cette loi à été vérifiée jusqu'à des fréquences très basses, de l'ordre de 10^{-6} Hz et le réel α est souvent proche de 1, d'où le nom de bruit en $1/\nu$. Si l'on admet que le bruit est stationnaire, lorsque la fréquence tend vers zéro la puissance devient infinie et l'on doit imposer des limitations théoriques. On suppose que le bruit n'est pas stationnaire et que le passé a une grande influence sur l'état présent. Le bruit en $1/\nu$ impose des limitations importantes à l'amplification directe de signaux constants ou de très basses fréquences. Pour certaines applications critiques, on a recourt à une technique d'amplification indirecte fondée sur la modulation-démodulation synchrone.

De nombreux signaux aléatoires, n'ayant aucun rapport avec les problèmes de conduction, ont des fluctuations dont le spectre est aussi défini par la loi empirique (5.60). On peut citer par exemple, la fréquence des oscillateurs à quartz, certaines grandeurs économiques et biologiques, des phénomènes musicaux. . . Ces constatations permettent de penser que le modèle non stationnaire du bruit en $1/\nu$ est susceptible de s'appliquer à de nombreux phénomènes naturels.

5.4.2 Les modèles ARMA (p, q)

On considère dans cette section des signaux à temps discret définis par des récurrences sur la variable instant.

a) Signal autorégressif : AR(p) (Autoregressive signal)

Un signal x_n est dit récursif ou autorégressif d'ordre p s'il est défini par la récurrence suivante :

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_p x_{n-p} + u_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

où le signal u_n est un bruit blanc. Cette relation peut s'écrire sous la forme condensée :

$$x_n = \mathbf{a}^T \mathbf{x}_n + u_n, \quad \mathbf{x}_n = [x_{n-1}, \dots, x_{n-p}]^T$$

où $\mathbf{a}$ désigne le vecteur de régression et $\mathbf{x}_n$ le vecteur des p échantillons passés. En terme de filtrage, le signal x_n se déduit de u_n par le passage dans un filtre dit récur-sif dont la fonction de transfert est donnée par

$$H(z) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}}.$$

On peut établir que si la fonction $H(z)$ définit un filtre causal et stable, i.e., tous les pôles de $H(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité, alors x_n est un signal du second ordre. Dans la majorité des applications, le signal u_n est un bruit blanc au sens large et centré, i.e., les u_n forment une suite de variables aléatoires centrées et non corrélées (pas forcément indépendantes). Sous cette hypothèse on peut déduire que, pour tout n fixé, l'espace vectoriel engendré par $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{-\infty}$ est identique à celui engendré par $u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{-\infty}$. Par conséquent, chaque V.A u_n est ortho-gonale à toutes les V.A $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{-\infty}$ et ceci pour n quelconque. On a donc $E[\mathbf{x}_n u_n] = 0$ et ceci conduit au système suivant :

$$\mathbf{c} = E[\mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T] \mathbf{a} \triangleq \Gamma_x \mathbf{a}, \quad \mathbf{c} \triangleq E[x_n x_n]$$

qui relie le vecteur de corrélation $\mathbf{c}$, le vecteur de régression $\mathbf{a}$ et la matrice de cova-riance Γ_x de $\mathbf{x}_n$. Ce système, appelé équation normale (ou équation de Yule-Walker) permet de calculer $\mathbf{a}$ à partir des $p + 1$ premières valeurs de la fonction de corréla-tion du signal x_n .

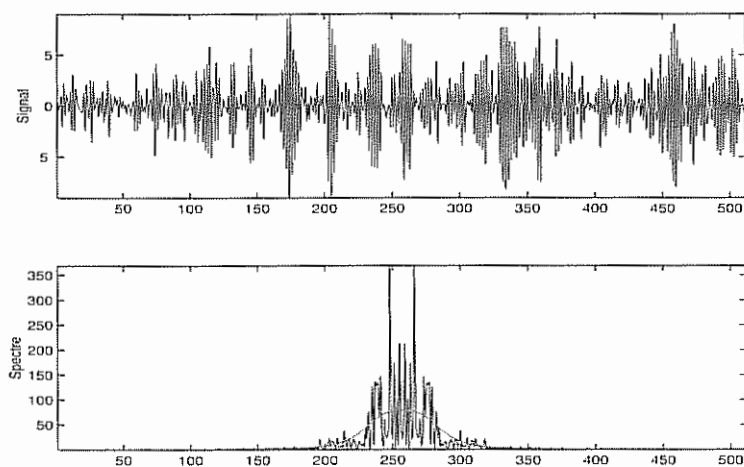


Figure 5.6 Exemple de modèle AR (2).

b) Signal à moyenne mobile : MA (q) (Moving Average)

Un signal à moyenne mobile d'ordre q est défini par la relation de récurrence sui-vante :

$$x_n = b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + \dots + b_q u_{n-q}$$

où u_n est un bruit blanc. La relation ci-dessus définit un filtre appelé filtre à moyenne ajustée (moving average) d'ordre q que l'on note $MA(q)$. C'est un filtre de Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) : $b_0, \dots, b_q$. Le calcul de cette réponse impulsionnelle à partir de la fonction de corrélation de la sortie x_n est plus délicat que dans le cas des signaux autorégressifs. En effet la fonction de corrélation de x_n qui vérifie $\gamma_x(-k) = \gamma_x(k)$ est donnée par $\gamma_x(k) = 0$ pour $k > q$ et :

$$\gamma_x(k) = \sigma_u^2(b_0b_k + b_1b_{k+1} + \dots + b_{q-k}b_q) \quad \text{pour } 0 \leq k \leq q.$$

On voit donc que la connaissance de la suite des $\gamma_x(k)$ ne permet pas de déterminer simplement les b_i puisque le système d'équations à résoudre est non linéaire et on peut vérifier qu'il n'admet pas une solution unique. Ceci signifie que plusieurs signaux $MA(q)$ distincts peuvent avoir la même fonction de corrélation. On peut enfin noter que si le bruit générateur u_n est blanc au sens fort, alors x_n et x_{n-k} sont indépendants dès que $|k| > q$.

Exemple 5.4.1 Modèle MA(10)

Considérons un signal MA(10) dont tous les coefficients sont égaux à 1. L'expression ci-dessus de la fonction de corrélation d'un tel signal conduit à : $\gamma_x(k) = 0$ pour $|k| > 10$ et $\gamma_x(k) = \gamma_x(-k) = (11 - k)\sigma_u^2$ pour $0 \leq k \leq 10$.

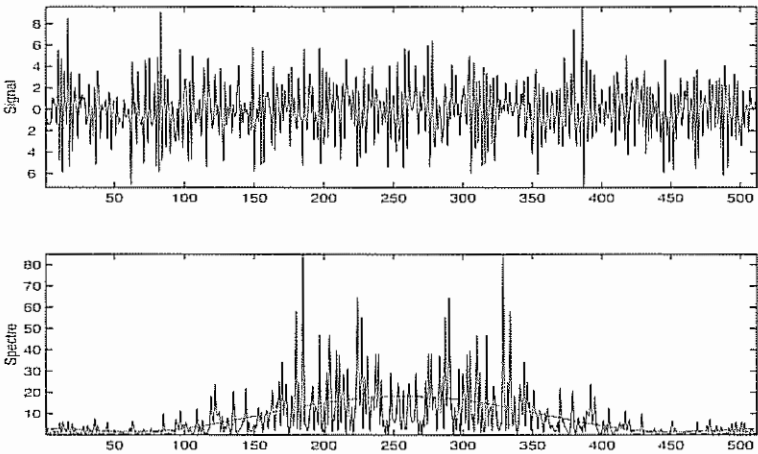


Figure 5.7 Exemple de modèle MA (2).

c) Modèle ARMA(p,q)

Un signal $ARMA(p,q)$ est une combinaison linéaire des deux types précédents. Il est défini par la récurrence :

$$x_n - \sum_{i=1}^p a_i x_{n-i} = \sum_{i=0}^q b_i u_{n-i}, \quad b_0 = 1. \tag{5.58}$$

Un tel signal correspond au passage d'un bruit blanc dans un filtre dont la fonction de transfert est une fraction rationnelle :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^q b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}}.$$

Ces signaux n'ont aucune des propriétés évoquées précédemment pour les signaux $AR(p)$ et $MA(q)$ mais ils jouent un rôle important dans la pratique.

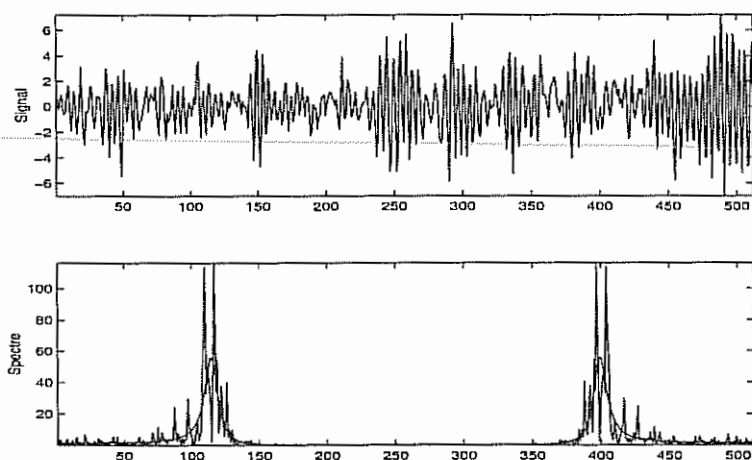


Figure 5.8 Exemple de modèle ARMA (2,2).

5.4.3 Estimation linéaire d'un signal

Les techniques d'estimation linéaire dépassent le cadre de ce chapitre. On va se limiter ici à un exemple d'estimation dans le cas particulier de la prédiction. Soit $x(t)$ un signal aléatoire scalaire, réel, centré, stationnaire et possédant une fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau)$ connue. On cherche à estimer la valeur de ce signal à l'instant $(t + \Delta t)$, $\Delta t > 0$ à partir de toute fonction linéaire des échantillons $x(t - u)$, $u \geq 0$ supposés connus. On désigne par $\hat{x}(t + \Delta t)$ cette estimation que l'on appelle prédiction et on introduit l'erreur d'estimation définie par :

$$x(t + \Delta t) - \hat{x}(t + \Delta t) = \tilde{x}(t + \Delta t).$$

Dans la majorité des cas, on introduit un modèle pour $\hat{x}(t + \Delta t)$ qui fait intervenir des paramètres. Le problème de l'estimation linéaire revient à déterminer des estimateurs de ces paramètres au sens d'un critère donné. On peut par exemple chercher une estimation au sens des « moindres carrés », du « maximum de vraisemblance », ou du « maximum a posteriori »... (voir les définitions dans la suite).

Par exemple, si l'on ne connaît $x(t)$ qu'aux instants t et $t - \tau$, on peut prendre comme fonction $\hat{x}(t + \Delta t) = ax(t) + bx(t - \tau)$.

Dans certaines applications, on connaît le signal $x(t)$ et sa dérivée ; on peut construire le modèle :

$$\hat{x}(t + \Delta t) = ax(t) + bx'(t).$$

Dans les deux cas considérés, le problème revient à déterminer les paramètres a et b au sens d'un critère approprié.

Exemple 5.4.2 Estimation de paramètres déterministes

Lors d'une transmission, le signal reçu est souvent modélisé par :

$$x(t) = as(t) + b(t)$$

où $b(t)$ est un bruit de perturbation du au canal, a une grandeur non aléatoire définissant une modulation d'amplitude contenant l'information à transmettre et $s(t)$ un signal déterministe connu. On suppose que le bruit parasite est un bruit blanc centré. On se propose d'estimer l'amplitude inconnue a à partir de l'observation de N échantillons du signal $x(t)$. On introduit la forme vectorielle :

$$\mathbf{x} = a\mathbf{s} + \mathbf{b}$$

où $\mathbf{x}$ est le vecteur dont les composantes sont les N échantillons observés, $\mathbf{s}$ un vecteur connu, a l'amplitude à déterminer et $\mathbf{b}$ un vecteur aléatoire décrivant la perturbation. Toutes les quantités considérées sont réelles. On appelle estimateur linéaire de a toute V.A notée $\hat{a}$ définie par :

$$\hat{a} = \mathbf{h}^T \mathbf{x}$$

où $\mathbf{h}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^N$ à déterminer suivant le critère considéré (voir la section suivante). Déterminer $\hat{a}$ revient à déterminer $\mathbf{h}$.

5.4.4 Estimation des paramètres d'un modèle

L'objectif est de donner seulement quelques exemples de critères classiques qui sont à la base de l'estimation des paramètres d'un modèle.

Estimateur au sens des moindres carrés Soient $x(1), x(2), \dots, x(n)$ un ensemble d'observations et $y(1), y(2), \dots, y(n)$ un ensemble de références. On cherche un modèle de la forme :

$$y(k) = ax(k) + e(k), \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, n$$

qui traduise « au mieux » le lien entre les observations et les références. La méthode des moindres carrés consiste à déterminer le coefficient a pour lequel la fonction :

$$C(a) \triangleq \sum_{k=1}^n |y(k) - ax(k)|^2$$

est minimale. Un calcul simple conduit à l'expression suivante pour l'estimateur de a :

$$\hat{a} = \frac{\sum_{k=1}^n x(k)y(k)}{\sum_{k=1}^n |x(k)|^2}.$$

Cette technique peut se généraliser au cas vectoriel, c'est-à-dire au cas où le paramètre scalaire a est remplacé par un vecteur $\mathbf{a}$. La même démarche que dans le cas scalaire conduit au système suivant [1] :

$$\mathbf{R}\mathbf{a} = \mathbf{r} \quad \text{avec} \quad \mathbf{R} \triangleq \mathbf{X}\mathbf{W}\mathbf{X}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{r} \triangleq \mathbf{X}\mathbf{W}\mathbf{y}$$

où $\mathbf{R}$ et $\mathbf{r}$ sont les matrices « d'autocorrélation » et « d'intercorrélations » avec facteur d'oubli, définies à partir des moyennes temporelles pondérées des observations et des références.

Estimateur du maximum de vraisemblance On veut estimer une variable scalaire ou vectorielle certaine $\mathbf{X}$ à l'aide d'une suite d'échantillons $Y_1, \dots, Y_N$. On introduit la densité de probabilité conjointe $f(Y_1, \dots, Y_N, \mathbf{X})$ qui dépend de la variable à estimer $\mathbf{X}$. La densité ainsi définie est appelée vraisemblance. La méthode du maximum de vraisemblance (MV) consiste à prendre comme estimateur de $\mathbf{X}$ la V.A. $\hat{\mathbf{X}}$ qui maximise la vraisemblance. En fait, cela équivaut à prendre la solution de l'équation de vraisemblance définie par :

$$\text{Grad}(\ln(f)) \triangleq \frac{\partial \ln(f)}{\partial \mathbf{X}} = 0. \quad (5.59)$$

Proposition Si $\hat{\mathbf{X}}$ est l'estimateur au sens du MV de $\mathbf{X}$ et g une fonction déterministe, alors $g(\hat{\mathbf{X}})$ est l'estimateur au sens du MV de $g(\mathbf{X})$.

Exemple 5.4.3 Modèle gaussien quelconque

Supposons que les échantillons $(Y_1, \dots, Y_N)$ sont les composantes d'un vecteur gaussien $\mathbf{Y}$ de moyenne $\mathbf{m}_y$ et de matrice d'autocorrélation Γ pouvant dépendre d'un paramètre $\mathbf{X}$ à estimer. La densité de probabilité de $\mathbf{Y}$ est donnée par :

$$f(\mathbf{y}) = \alpha \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)^T \Gamma^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)\right] \quad (5.60)$$

où $\mathbf{y}$ est un vecteur à N dimensions et α une constante donnée par :

$$\alpha \triangleq \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\Gamma)}}.$$

Dans ce cas, important dans les problèmes pratiques, l'équation de vraisemblance devient :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)^T \Gamma^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y) = 0. \quad (5.61)$$

La méthode du MV s'étend sans difficultés au cas où la quantité à estimer $\mathbf{X}$ est une V.A [20].

Exemple 5.4.4 Modèle gaussien linéaire

Un problème pratique consiste à déterminer au mieux un vecteur $\mathbf{X}$ à partir des observations faites sur un autre vecteur $\mathbf{Y}$. On considère souvent le modèle linéaire suivant :

$$\mathbf{Y} = g(\mathbf{X}) \triangleq \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B} \quad (5.62)$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice déterministe de dimension $m \times n$ et $\mathbf{B}$ un vecteur gaussien centré et de matrice de covariance Γ_B . On va développer les calculs dans le cas où $\mathbf{X}$ est déterministe et on le note $\mathbf{x}$. Le vecteur $\mathbf{Y}$ est donc gaussien de moyenne $\mathbf{m}_y = \mathbf{A}\mathbf{x}$ et de matrice de covariance $\Gamma_Y = \Gamma_B$. La densité de probabilité de $\mathbf{Y}$ est donnée par :

$$f_Y(\mathbf{y}) = \delta e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}]^T \Gamma_B^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}]}.$$

Le vecteur $\mathbf{x}$ qui maximise la densité $f_Y(\mathbf{y})$ et qui est appelé estimateur de $\mathbf{x}$ au sens du maximum de vraisemblance sera noté $\mathbf{x}_{mv}$ et il vérifie donc :

$$\mathbf{A}^T \Gamma_B^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x}_{mv} = \mathbf{A}^T \Gamma_B^{-1} \mathbf{Y}.$$

Si la matrice $\mathbf{A}^T \Gamma_B^{-1} \mathbf{A}$ est inversible, le vecteur $\mathbf{x}_{mv}$ est donné de manière unique par :

$$\mathbf{x}_{mv} = [\mathbf{A}^T \Gamma_B^{-1} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^T \Gamma_B^{-1} \mathbf{Y}. \quad (5.63)$$

Estimateur du maximum a posteriori Pour expliquer le principe de cet estimateur, nous allons nous placer directement dans le cas du modèle linéaire introduit par (5.65) où l'on suppose $\mathbf{X}$ gaussien d'espérance $\mathbf{m}_X$ et de matrice de covariance

Γ_X . Le principe du maximum a posteriori consiste à trouver le vecteur $\hat{\mathbf{X}}$ qui maximise la densité conditionnelle :

$$f_{X/Y=y}(\mathbf{x}) = \frac{f_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{f_Y(\mathbf{y})}. \quad (5.64)$$

La densité marginale de $\mathbf{y}$ étant une fonction $f_Y(\mathbf{y})$ indépendante de $\mathbf{x}$, il suffit de calculer f_{XY} . Or, la formule de Bayes donne :

$$f_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_{Y/X=\mathbf{x}}(\mathbf{y}) f_X(\mathbf{x}) = \beta e^{-\frac{1}{2} Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$$

où

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq [\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}]^T \Gamma_B^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}] + [\mathbf{x} - \mathbf{m}_X]^T \Gamma_X^{-1} [\mathbf{x} - \mathbf{m}_X]$$

Finalement, tenant compte de (5.67), la densité $f_{X/Y=y}$ prend la forme :

$$f_{X/Y=y}(\mathbf{x}) = \frac{\beta}{f_Y(\mathbf{y})} e^{-\frac{1}{2} Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})}.$$

Le vecteur $\mathbf{x}$ qui maximise $f_{X/Y=y}(\mathbf{x})$, appelé estimateur de $\mathbf{X}$ au sens du maximum a posteriori et noté $\mathbf{x}_{map}$, vérifie :

$$[\mathbf{A}^T \Gamma_B^{-1} \mathbf{A} + \Gamma_X^{-1}] \mathbf{x}_{map} = \mathbf{A}^T \Gamma_B^{-1} \mathbf{Y} + \Gamma_X^{-1} \mathbf{m}_X.$$

Si la matrice $\mathbf{A}^T \Gamma_B^{-1} \mathbf{A} + \Gamma_X^{-1}$ est inversible, $\mathbf{x}_{map}$ est déterminé de manière unique par :

$$\mathbf{x}_{map} = [\mathbf{A}^T \Gamma_B^{-1} \mathbf{A} + \Gamma_X^{-1}]^{-1} [\mathbf{A}^T \Gamma_B^{-1} \mathbf{Y} + \Gamma_X^{-1} \mathbf{m}_X].$$

Exemple 5.4.6 Estimateur et matrice de Fisher

On considère un vecteur aléatoire défini par :

$$\mathbf{x} = s \mathbf{b}$$

où s est un réel positif et $\mathbf{b}$ un vecteur gaussien, centré et de matrice de covariance Γ . On cherche à estimer le nombre s à partir du vecteur observation $\mathbf{x}$. On pose $\sigma = s^2$.

1. Exprimer la densité de probabilité p_X du vecteur observation en fonction de $\mathbf{x}$, σ et Γ .
2. Calculer l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance, $\hat{\sigma}_{mv}$, de σ .

3. Calculer le biais de $\hat{\sigma}_{mv}$.
4. Calculer la variance de $\hat{\sigma}_{mv}$.
5. Un estimateur centré est dit efficace si sa variance est égale à l'inverse de l'information de Fisher définie par :

$$I_{\sigma} = E\left(\frac{\partial \log p_x(\mathbf{x}, \sigma)}{\partial \sigma}\right).$$

Que peut-on dire de l'estimateur $\hat{\sigma}_{mv}$?

6. On suppose $n = 1$. Calculer l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance $\hat{s}_{mv}$ du paramètre s . Que vaut son biais et sa variance et l'information de Fisher associée I_s .

EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS

5.1 Signaux aléatoires et stationnarité

On considère le signal aléatoire $x(t) = \cos(\alpha t + B)$ où B est une V.A dont on désigne la fonction caractéristique par $\Phi_B(u) = E(\exp(juB))$.

1. Exprimer $E(x(t))$ en fonction de $E(\cos(B))$ et $E(\sin(B))$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\Phi_B(1)$ pour que la fonction $x(t)$ soit centrée.
3. On suppose la fonction $x(t)$ centrée.
 - Donner l'expression de la covariance $\gamma_x(t, t - \tau) = E(x(t)x(t - \tau)^*)$ en fonction de $E(\cos(2B))$ et $E(\sin(2B))$.
 - Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\Phi_B(2)$ pour que la fonction $x(t)$ soit stationnaire puis donner l'expression de $\gamma_x(t, t - \tau)$ dans l'hypothèse de stationnarité.
4. On suppose que B est uniformément répartie sur $]-\pi, \pi]$.
 - Calculer $\Phi_B(u)$.
 - La fonction $x(t)$ est-elle centrée ?
 - La fonction $x(t)$ est-elle stationnaire ?

On considère maintenant le signal aléatoire $w(t)$ défini par :

$$w(t) = x(t)\cos(\alpha t) + \sin(\alpha t)y(t) \quad (5.65)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont deux fonctions aléatoires réelles, centrées et stationnaires dans leur ensemble, et α un nombre déterministe.

1. Exprimer la fonction d'autocorrélation $\gamma_w(t, t - \tau)$ de $w(t)$ à l'aide des fonctions $\gamma_x(\tau)$, $\gamma_y(\tau)$ et $\gamma_{xy}(\tau)$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $w(t)$ soit stationnaire au sens large.
3. Donner alors l'expression de γ_w dans le cas stationnaire.

5.2 Signaux aléatoires et stationnarité

On considère le signal réel à temps continu défini par :

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \phi)$$

où A et ϕ sont deux variables aléatoires statistiquement indépendantes, f_0 une fréquence positive donnée et t une variable représentant le temps. On suppose que A est uniforme sur $[0, 1]$ et que ϕ est aussi uniforme sur $[0, 2\pi]$. Pour chaque t fixé, $x(t)$ est donc une variable aléatoire.

1. Calculer l'espérance $E[x(t)]$.
2. Calculer la fonction de corrélation

$$\gamma(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)].$$

3. Que peut-on dire de la stationnarité de $x(t)$?

5.3 Signaux aléatoires et stationnarité

On considère le signal $s(t)$, définie par

$$s(t) = \sum_{k=1}^q e^{j(2\pi f_k t + \phi_k)}, \quad j^2 = -1$$

où les f_k sont des fréquences positives et les ϕ_k des variables aléatoires statistiquement indépendantes et uniformément réparties sur $[0, 2\pi]$.

1. Calculer $E[s(t)]$ pour t fixé.
2. Déterminer la covariance des deux V.A $X_1 = s(t_1)$ et $X_2 = s(t_2)$.
3. On prend $q = 2$ et on désigne par $\text{Re}(x)$ la partie réelle de x . Exprimer sous forme d'une intégrale la densité de probabilité, f_Y , de la V.A $Y = \text{Re}(s(0))$.
4. Donner la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy$.
5. On pose maintenant $x(t) = s(t) + b(t)$ où $b(t)$ est un bruit blanc centré, de variance σ^2 indépendant des ϕ_k . Calculer $E[x(t)]$ et déterminer la fonction de corrélation γ_x .
6. Que peut-on dire de la stationnarité de $x(t)$?

5.4 Signal à temps discret

Soit un signal à temps discret u_k réel, centré et de fonction de corrélation $\gamma_u[p] = E\{u_k u_{k-p}\} = \sigma^2 \delta(p)$, p entier et $\delta(p) = 0$ pour $p \neq 0$ et $\delta(0) = 1$.

1. Le signal u_k est-il stationnaire au sens large ?
2. On fait passer ce signal dans un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h_k = a^k$ pour $k \geq 0$ et $h_k = 0$ pour $k < 0$, $|a| < 1$. Calculer la sortie x_k de ce filtre et en déduire sa moyenne $E\{x_k\}$.
3. Calculer la fonction de corrélation $\gamma_x[p]$ de $x[k]$ pour $p \geq 0$ et établir, sans aucun calcul, l'expression de $\gamma_x[p]$ quel que soit p .
4. Calculer la densité spectrale $\Gamma(\nu)$ de x_k .
5. On suppose que x_k est connu. Montrer que x_{k+1} peut se calculer à l'aide de x_k et de l'entrée u_{k+1} . Généraliser la propriété et donner l'expression de x_{k+p} , $p > 0$, en fonction de x_k et de u_l pour $k < l \leq k + p$.
6. On suppose maintenant que les variables aléatoires u_k sont indépendantes entre elles. Montrer que si x_k est connu, alors x_{k+p} , est indépendant des valeurs antérieures x_{k-q} , $q > 0$ (propriété de Markov).

5.5 Densité spectrale et filtrage

On considère le signal aléatoire à temps discret, x_i , défini par

$$x_i = \sum_{j=0}^p a^j U_{i-j}, \quad i \in \mathbb{N}$$

où les U_j , $j \in \mathbb{Z}$ sont des variables aléatoires réelles, centrées, deux à deux orthogonales et toutes de même variance σ^2 ($E(U_m U_n) = 0$ pour $m \neq n$ et $E(U_m^2) = \sigma^2$ pour $m \in \mathbb{Z}$) et a un réel positif vérifiant $0 < a \leq 1$.

1. Déterminer la fonction de corrélation $\gamma_{m,n} = E(x_m x_n)$. On commencera par le cas $0 \leq n \leq m$.
2. On suppose $a = 1$. Expliciter la fonction de corrélation et tracer son graphe.
3. On suppose $a = 1$ et $p = 1$. Expliciter la fonction de corrélation et déterminer la densité spectrale $\Gamma(\nu)$.

4. On fait passer le signal $x(t)$ dans un filtre linéaire dont la sortie est définie par

$$y_n = cy_{n-1} + x_n.$$

Toujours dans le cas $a = 1$ et $p = 1$, calculer la densité spectrale de y_n et la puissance $E(y_n^2)$.

5.6 Transmission d'un signal quasimonochromatique

Un émetteur génère un signal aléatoire $x(t)$ supposé réel, centré et stationnaire. On suppose dans toute la suite que $x(t)$ est quasimonochromatique de fréquence moyenne ν_0 , c'est-à-dire la densité spectrale de $x(t)$ vérifie pour $\nu > 0$:

$$\Gamma_x(\nu) = 0 \text{ pour } |\nu - \nu_0| > \Delta\nu$$

où ν_0 est un nombre positif certain et $\Delta\nu$ un nombre petit devant ν_0 . Le signal reçu après transmission et réflexion double s'écrit :

$$y(t) = x(t) + x(t - \theta)$$

où θ est un retard constant.

1. Calculer $E[y(t)]$ puis la fonction de corrélation γ_y de $y(t)$ en fonction de celle de $x(t)$.
2. Calculer la puissance $E[y(t)^2]$ du signal $y(t)$ ainsi que sa densité spectrale $\Gamma_y(\nu)$.
3. Justifier que $y(t)$ s'obtient par filtrage linéaire de $x(t)$, donner la réponse en fréquence du filtre et retrouver l'expression de $\Gamma_y(\nu)$ en utilisant la formule des interférences.
4. Est-ce que $y(t)$ est quasimonochromatique ?
5. On suppose que $x(t)$ est égal à la partie réelle du signal complexe défini par

$$z(t) = e^{j[2\pi\nu_0 t + \varphi(t)]}, \quad j^2 = -1$$

où $\varphi(t)$ est un signal aléatoire, réel. Exprimer $E[z(t)]$ et donner une condition sur la fonction caractéristique de $\varphi(t)$ pour que $z(t)$ soit centré.

6. Calculer la fonction de corrélation $\gamma_z(t_1, t_2)$ dans chacun des cas suivants et étudier la stationnarité de $z(t)$.

(a) $\varphi(t) = At$ où A désigne une V.A uniformément répartie sur $[-\pi, \pi]$.

(b) $\varphi(t) = At^2$ où A désigne une V.A uniformément répartie sur $[-\pi, \pi]$.

(c) $\varphi(t) = At + B$ où A désigne une V.A gaussienne de variance σ_A^2 et B une V.A indépendante de A . On rappelle que la fonction caractéristique d'une V.A gaussienne X , centrée et de variance σ^2 , est donnée par $\phi_X(u) = \exp\{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}\}$.

(d) $\varphi(t)$ est un signal aléatoire stationnaire, gaussien et dont la covariance est donnée par : $\gamma_\varphi(\tau) = E[\varphi(t)\varphi(t-\tau)]$. Pour cela, on introduira la VA $Y = \varphi(t) - \varphi(t-\tau)$, on justifiera que cette variable est gaussienne et on exprimera sa variance en fonction de γ_φ .

7. On pose $w(t) = z(t) + z(t-\theta)$. Calculer la puissance $I = E(|w(t)|^2)$ en supposant que $z(t)$ est stationnaire.

5.7 Détection de fréquence et pseudo-spectre

On considère le signal observé sur l'intervalle de temps $[0, T]$:

$$x_1(t) = A_1 e^{j2\pi(f_1 t + \phi_1)} \Pi_T(t)$$

où f_1 est une fréquence réelle déterministe, A_1 une amplitude réelle aléatoire centrée de variance σ_1^2 , ϕ_1 une phase aléatoire uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de A_1 et $\Pi_T(t)$ la fonction porte de support $[0, T]$.

1. Exprimer la fonction de corrélation $\gamma_1(t_1, t_2)$ de $x_1(t)$ en fonction de Π_T .

2. Exprimer la fonction de corrélation moyennée :

$$\gamma_1(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \gamma_1(t, t-\tau) dt$$

sous forme d'un double produit de convolution faisant intervenir la fonction Π_T .

3. Calculer la T.F $\Gamma_1(\nu)$ de $\gamma_1(\tau)$ appelée pseudo-spectre de $x_1(t)$.

4. Calculer le rapport

$$\rho_1 = \frac{|\Gamma_1(f_1 + \frac{1}{2T})|}{|\Gamma_1(f_1)|}.$$

5. On considère maintenant le signal $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ où $x_2(t)$ est défini de la même façon que $x_1(t)$ et l'on suppose que les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont indépendants.

(a) Calculer la fonction de corrélation $\gamma(t_1, t_2)$ de $x(t)$.

(b) Calculer le pseudo-spectre $\Gamma(\nu)$ de $x(t)$.

(c) On suppose $f_1 \leq f_2$, tracer le graphe de $\Gamma(\nu)$.

- (d) On suppose $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Donner un équivalent de $\Gamma(\frac{f_1+f_2}{2})$ pour les grandes valeurs de T . On suppose que $f_2 - f_1 = 1/T$. Quel est le comportement de $\Gamma(\nu)$ pour les grandes valeurs de T ?
- (e) En déduire une règle sur le choix de T, f_1 et f_2 si l'on veut discerner deux composantes fréquentielles.
- (f) On veut échantillonner le signal $x(t)$. Sachant que seule la fréquence f_1 nous intéresse, que peut-on proposer comme solution ?

5.8 Pseudo-spectre et somme de signaux non stationnaires

On considère le signal

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) + b(t) \triangleq y(t) + b(t)$$

$$x_k(t) = e^{j2\pi[\nu_k t + \varphi_k]} \Pi\left(\frac{t - T_k - T/2}{T}\right) \quad \text{avec} \quad \nu_k \triangleq f_0 + k\Delta f$$

où $\Pi(t)$ désigne la fonction rectangle de support $[-1/2, 1/2]$ et les φ_k des V.A indépendantes, uniformément distribuées sur $[0, 1]$ et $b(t)$ un bruit blanc complexe centré de variance $2\sigma^2$ indépendant de $y(t)$. On suppose $T_{k+1} - T_k > T$ et on pose $T_0 = T$.

1. Calculer $E[x(t_0)]$.
2. Calculer la fonction d'autocorrélation de $x(t)$.
3. Que peut-on dire de la stationnarité de $x(t)$?
4. Calculer le pseudo-spectre de $x_k(t)$. Peut-on définir un pseudo-spectre pour $x(t)$?

5.9 Signal cyclostationnaire

Considérons le signal défini par

$$x(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k h(t - t_k) + b(t), \quad t_k \in \mathbb{Z} \quad (5.66)$$

où $b(t)$ est un bruit blanc de puissance σ_b^2 , A_k une suite de V.A binaires, indépendantes de $b(t)$, pouvant prendre chacune les valeurs 0 ou 1 et $h(t)$ une fonction dont le support est contenu dans $[0, T]$, T constante positive. Le signal $x(t)$ est un

exemple de signaux que l'on rencontre en transmission. C'est un signal dont la valeur bascule entre 0 et 1 à des instants t_k . Ces instants sont souvent des multiples de T définis par $t_k = kT$. Parfois, les t_k ne sont pas exactement des multiple de T mais sont définis par $t_k = kT + \epsilon$ où ϵ est une V.A uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, T[$. On se propose de déterminer la fonction de corrélation de $x(t)$ sous différentes hypothèses.

1. On suppose que les A_k sont déterministes, les t_k donnés par $t_k = kT$ et $h(t) = \Pi(\frac{t-T/2}{T})$ où $\Pi(u)$ est la fonction porte de support $[-1/2, 1/2]$. Déterminer la fonction de corrélation de $y(t)$ dans les cas suivants et étudier la stationnarité de ce signal.

(a) $A_p = 1$ et $A_k = 0$ pour $k \neq p$.

(b) $A_p = A_{p+1} = 1$ et tous les autres A_k sont nuls.

(c) $A_k = 1$ pour toutes les valeurs de k .

2. Pour tenir compte de l'incertitude sur l'origine des temps, on définit les t_k par $t_k = kT + \epsilon$ où ϵ désigne une V.A uniforme sur $[0, T]$ indépendante des A_k et de $b(t)$.

(a) On suppose que les A_i sont orthogonales et de même variance σ^2 . Déterminer la fonction de corrélation de $y(t)$. Ce signal est-il stationnaire ?

(b) Reprendre la question précédente dans le cas où les A_i forment un signal à temps discret centré et stationnaire de fonction de corrélation $\gamma_A(nT)$.

(c) On se place dans les hypothèses de la question précédente et on suppose que

$h(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$. Déterminer la densité spectrale $\Gamma_y(\nu)$.

5.10 Estimation de la direction d'une source à l'aide d'un réseau de capteurs

Soit un réseau de N capteurs omnidirectionnels dans un demi-plan, alignés, numérotés de 0 à $N - 1$ et espacés entre eux de $w/2$. On considère une onde plane $x(t)$ émise par une source ponctuelle supposée à l'infinie, de fréquence f_0 , d'amplitude A , de longueur d'onde w et de vitesse de propagation v . Soit $x(t) = A \exp[j2\pi f_0 t]$. Le signal reçu par le capteur 0 est alors $x_0(t) = A \exp[j2\pi(f_0 t + \phi)]$ où ϕ est une phase à l'origine quelconque ($f_0 = v/w$).

1. Calculer le signal reçu par chaque capteur, sa fonction d'autocorrélation puis sa DSP.

2. Comment peut-on à partir des N signaux $x_n(t), n = 0, \dots, N - 1$, retrouver la direction θ de la source. Y-a-t-il des directions favorisées ?

3. Chaque capteur rajoute un bruit blanc centré stationnaire $b_n(t)$ de variance σ^2 , indépendant de l'onde reçue et des autres capteurs. Calculer la DSP de $b_n(t)$ ainsi que sa puissance totale P_{b_n} . Est-ce possible ?
4. Lors d'une acquisition des signaux (par exemple par un enregistreur magnétique continu) si $|f_0| \leq f_{\max}$, comment peut-on limiter la puissance totale de bruit reçue par chaque capteur ? Que vaut alors le rapport $\rho_n = \frac{P_{x_n}}{P_{b_n}}$ pour chaque capteur en fonction de la bande équivalente de bruit B . Qu'en déduire sur le choix de B ?
5. Les signaux $s_n(t) = x_n(t) + b_n(t)$ sont échantillonnés à la fréquence F_e après avoir été filtrés par un filtre de fréquence de coupure f_c et de pente -12 dB par octave. Comment doit-on choisir F_e par rapport à f_c pour que le recouvrement spectral n'injecte dans la bande $[-f_c, +f_c]$ que des signaux atténués d'au moins 48 dB ?
6. En ne retenant que M échantillons numérisés de $s_n(t), n = 0, \dots, M - 1$, comment peut-on encore augmenter le rapport signal sur bruit ρ_n ?
7. Faire un schéma fonctionnel du traitement global pour estimer la direction de la source en faisant d'abord un traitement par capteur pour augmenter le rapport signal sur bruit. Indiquer quelles sont les valeurs de N et de M préférables et pourquoi.

5.11 Exemples de prédicteurs linéaires

Soit $x(t)$ un signal aléatoire scalaire, réel, centré, stationnaire et possédant une fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau)$ connue. On suppose que $x(t)$ à l'instant t est également connu. On désigne par $\hat{x}(t + \Delta t)$ une estimation de $x(t + \Delta t)$ et on introduit l'erreur d'estimation définie par :

$$x(t + \Delta t) - \hat{x}(t + \Delta t) = \tilde{x}(t + \Delta t).$$

1. On considère le modèle linéaire suivant :

$$\hat{x}(t + \Delta t) = ax(t).$$

- (a) Calculer le biais de cet estimateur et exprimer l'erreur quadratique moyenne (EQM) $\epsilon(a) \triangleq E(|\tilde{x}(t + \Delta t)|^2)$ de cet estimateur en fonction de $\gamma_x(0)$, $\gamma_x(\Delta t)$ et a .
- (b) Démontrer que la valeur de a qui minimise $\epsilon(a)$ est donnée par :

$$a_0 = \frac{\gamma_x(\Delta t)}{\gamma_x(0)}$$

et calculer la valeur minimale $\epsilon(a_0)$.

(c) Calculer le produit scalaire $E[\tilde{x}(t + \Delta t)x(t)]$ et commenter le résultat.

(d) Que devient cet estimateur pour un bruit blanc ou un signal faiblement corrélé.

2. On considère maintenant le modèle :

$$\hat{x}(t + \Delta t) = ax(t) + bx'(t)$$

et on suppose dans toute la suite que la fonction de corrélation du signal $x(t)$ est dérivable deux fois.

(a) Calculer $E[x'(t)]$.

(b) Utilisant la formule des interférences, établir les résultats suivants :

$$E[x(t)x'(t - \tau)] = -\gamma'_x(\tau)$$

$$E[x'(t)x'(t - \tau)] = -\gamma''_x(\tau).$$

(c) Justifier les propriétés suivantes : $\gamma'_x(0) = 0$ et $\gamma''_x(0) < 0$.

(d) Calculer le biais de l'estimateur proposé.

(e) Exprimer l'EQM, $\epsilon(a, b)$, en fonction de $\gamma_x(0)$, $\gamma_x(\Delta t)$, $\gamma''_x(0)$, a , et b .

(f) Démontrer que les coefficients qui minimisent $\epsilon(a, b)$ sont donnés par :

$$a_0 = \frac{\gamma_x(\Delta t)}{\gamma_x(0)}, \quad b_0 = \frac{\gamma'_x(\Delta t)}{\gamma''_x(0)}$$

et calculer $\epsilon(a_0, b_0)$.

(g) Calculer les produits scalaires $E[\tilde{x}(t + \Delta t)x(t)]$ et $E[\tilde{x}(t + \Delta t)x'(t)]$ et commenter le résultat.

3. Comparer les deux estimateurs étudiés ci-dessus en considérant les biais et les EQM associés. Discuter le cas où Δt tend vers zéro.

4. Le signal $x(t)$ est une sinusoïde :

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \quad (5.67)$$

de fréquence f_0 certaine et de phase à l'origine uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$. Le signal $x(t)$ est stationnaire et ergodique.

(a) Calculer la valeur moyenne ainsi que la puissance de ce signal.

(b) Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma_x(\tau)$ de ce signal et vérifier qu'elle est périodique.

- (c) Vérifier que la connaissance de $\gamma_x(\tau)$ en tout point τ permet de déterminer l'amplitude A et la fréquence f_0 .
- (d) Exprimer les deux estimateurs $\hat{x}(t + \Delta t)$ étudiés ci-dessus et commenter les résultats obtenus.
- (e) Peut-on améliorer l'estimation de $x(t + \Delta t)$ en introduisant les dérivées d'ordre supérieur à 1 ?

SOLUTIONS

5.1 1. On a $E(x(t)) = \cos(\alpha t)E(\cos(B)) - \sin(\alpha t)E(\sin(B))$.

2. Une condition nécessaire et suffisante pour que $x(t)$ soit centrée est donnée par $E(\cos(B)) = E(\sin(B)) = 0$. Ce qui équivaut à

$$E[\cos(B) + j\sin(B)] = E[e^{jB}] \stackrel{\Delta}{=} \Phi_B(1) = 0.$$

3. On a :

$$\begin{aligned}\gamma_x(t, t - \tau) &= E[\cos(\alpha t + B)\cos(\alpha(t - \tau) + B)] \\ &= \frac{1}{2}E[\cos(\alpha\tau)] - \frac{1}{2}E[\cos(\alpha 2t - \alpha\tau + 2B)] \\ &= \frac{1}{2}\cos(\alpha\tau) - \cos[(\alpha(2t - \tau))]E[\cos(2B)] + \sin[\alpha(2t - \tau)]E[\sin(2B)]\end{aligned}$$

Comme le signal est centré, il est stationnaire si γ_x est indépendante de t . Ceci est vérifié si et seulement si $E(\cos(2B)) = E(\sin(2B)) = 0$. Cela équivaut à $\Phi_B(2) = 0$ et dans ce cas, on a $\gamma_x(t, t - \tau) = \frac{1}{2}\cos(\alpha\tau)$.

4. On suppose que B est uniformément répartie sur $]-\pi, \pi[$.

– On a $\Phi_B(u) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jub} \frac{db}{2\pi} = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$

– La fonction $x(t)$ est centrée car $\Phi_B(1) = 0$.

– La fonction $x(t)$ est stationnaire car $\Phi_B(2) = 0$.

1. Comme les signaux sont réels, on a $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ et donc :

$$\begin{aligned}\gamma_w(t, t - \tau) &= \gamma_x(\tau)\cos\alpha t\cos\alpha(t - \tau) + \gamma_y(\tau)\sin\alpha t\sin\alpha(t - \tau) + \gamma_{xy}(\tau)\cos\alpha\tau \\ &= [\gamma_{xy}(\tau) + \frac{1}{2}(\gamma_x(\tau) + \gamma_y(\tau))]\cos\alpha\tau + \frac{1}{2}(\gamma_x(\tau) - \gamma_y(\tau))\cos\alpha(t - \tau)\end{aligned}$$

2. Une condition nécessaire et suffisante pour que $w(t)$ soit stationnaires est $\gamma_x = \gamma_y$.

3. Dans le cas stationnaire, on a $\gamma_w = [\gamma_{xy}(\tau) + \gamma_x(\tau)]\cos\alpha\tau$.

5.2 1. On a $E[x(t)] = E[A]E[\sin(2\pi f_0 t + \phi)] = 0$ car les variables A et ϕ sont indépendantes et ϕ est uniforme sur $[0, 2\pi]$.

2. La fonction de corrélation est

$$\gamma(t_1, t_2) = E[A^2] \cos(2\pi f_0 \tau), \quad \tau = t_1 - t_2.$$

3. Le signal $x(t)$ est donc stationnaire.

5.3 1. Comme les ϕ_k sont uniformément réparties sur $[0, 2\pi[$, on obtient :

$$E[s(t)] = \sum_{k=1}^q e^{j f_k t} E[e^{j \phi_k}] = 0.$$

2. La covariance de X_1 et X_2 est donnée par :

$$E[x(t_1)x(t_1)^*] = \sum_{k=1}^q e^{j f_k (t_1 - t_2)}.$$

3. On a $Y = \cos(\phi_1) + \cos(\phi_2) = Y_1 + Y_2$. Comme ϕ_1 et ϕ_2 sont indépendantes, alors Y_1 et Y_2 le sont aussi et la densité de Y est donc égale au produit de convolution des densités de Y_1 et Y_2 . Si l'on désigne par g la densité de Y_1 (égale à celle de Y_2 , voir cours), on a :

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} g(u)g(y-u)du.$$

4. La détermination de f_Y n'est pas nécessaire. On a

$$\int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) dy = E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2) = E[\cos(\phi_1)] + E[\cos(\phi_2)] = 0.$$

5. On a

$$E[x(t)] = \sum_{k=1}^q e^{j 2\pi f_k t} E[e^{j \phi_k}] + E[b(t)] = 0.$$

$$\gamma_x(\tau) = \sum_{k=1}^q e^{j 2\pi f_k \tau} + \sigma^2 \delta(\tau).$$

6. Le signal est donc stationnaire.

5.4 1. Le signal est centré et vérifie $\gamma_u(p) = \sigma^2 \delta(p)$. Il est donc stationnaire.

2. $x_k = \sum_{p=0}^{\infty} a^p u(k-p)$ et donc $E(x_k) = \sum a^p E(u(k-p)) = 0$.

3. On obtient pour $p > 0$

$$\begin{aligned}
\gamma_x(p) &= E\left(\sum_{m=0}^{\infty} a^m u(k-m) \sum_{n=0}^{\infty} a^n u(k-p-n)\right) \\
&= E\left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a^{m+n} E[u(k-m)u(k-p-n)]\right) \\
&= \sum_m \sum_n a^{m+n} \gamma_u(p+n-m) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a^{p+2n} \gamma_u(0) = \frac{\sigma^2 a^p}{1-a^2}.
\end{aligned}$$

Comme la fonction de corrélation est paire, on a $\gamma_x(-p) = \gamma_x(p)$ et finalement $\gamma_x(p) = \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^{|p|}$ pour p quelconque.

4. Il suffit de calculer la TF de $\gamma_x(p)$. On obtient

$$\begin{aligned}
\Gamma(\nu) &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2}{1-a^2} a^{|p|} e^{-j2\pi\nu p} \\
&= \frac{\sigma^2}{1-a^2} \left(\sum_{p=-\infty}^0 (ae^{j2\pi\nu})^{-p} + \sum_1^{\infty} (ae^{-j2\pi\nu})^p \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{1-a^2} \left(1 + \sum_1^{\infty} [(ae^{j2\pi\nu})^p + (ae^{-j2\pi\nu})^p] \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{1+a^2-2a\cos(2\pi\nu)}.
\end{aligned}$$

On peut aussi appliquer la formule des interférences, $\Gamma(\nu) = |\tilde{h}(\nu)|^2 \sigma^2$, pour obtenir le résultat ci-dessus.

5. On a :

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= \sum_{p=0}^{\infty} a^p u_{k+1-p} = u_{k+1} + \sum_{p=1}^{\infty} a^p u_{k+1-p} \\
&= u_{k+1} + ax_k
\end{aligned}$$

On obtient de proche en proche

$$\begin{aligned}
x_{k+p} &= u_{k+p} + ax_{k+p-1} = u_{k+p} + a(u_{k+p-1} + ax_{k+p-2}) \\
&= u_{k+p} + au_{k+p-1} + a^2 u_{k+p-2} + \dots + a^p x_k
\end{aligned}$$

6. On a $x_{k-q} = f_q(x_k, u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-q+1})$. D'où

$$E(e^{mx_{k+p}} / x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-q}) = E(e^{mx_{k+p}} / x_k, u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-q+1}).$$

5.5 1. Comme $\gamma_{m,n} = \gamma_{n,m}$, on peut supposer $m \geq n$ et poser $k = m - n \geq 0$. On obtient

$$\begin{aligned}\gamma_{m,n} &= E\left(\sum_{j=0}^p a^j U_{m-j} \sum_{i=0}^p a^i U_{n-i}\right) \\ &= \sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^p a^{j+i} E(U_{m-j} U_{n-i}).\end{aligned}$$

Comme les U_k sont deux à deux orthogonales et toutes de même variance σ^2 , on obtient $\gamma_{m,n} = 0$ pour $k > p$ et pour $k \leq p$:

$$\gamma_{m,n} = \sigma^2 \sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^p a^{j+i} \delta((m-j) - (n-i)) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{p-k} a^{k+2i}.$$

2. On obtient pour $a = 1$, $\gamma_x(k) = p - k + 1$ et pour $a \neq 1$

$$\gamma(k) = \sigma^2 a^k \frac{1 - a^{2p-2k+2}}{1 - a^2}.$$

3. Pour $a = 1$ et $p = 1$, on a

$$\gamma_0 = \sigma^2(1 + a^2), \gamma_1 = \sigma^2 a \text{ et } \gamma_k = 0 \text{ pour } k > 1.$$

La densité spectrale $\Gamma(\nu)$ est donnée par :

$$\Gamma(\nu) = \sigma^2(1 + a^2) + 2a\sigma^2 \cos(2\pi\nu).$$

4. La densité spectrale de y_n est donnée par la formule des interférences

$$\Gamma_y(\nu) = |H(\nu)|^2 \Gamma(\nu).$$

où $H(\nu) = 1/(1 - ce^{j2\pi\nu})$ désigne le gain complexe du filtre. La puissance $E(y_n^2)$ a pour expression $E(y_n^2) = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_y(\nu) d\nu$.

5.6 1. On a $E(y(t)) = 0$.

2. La fonction de corrélation de $y(t)$ est égale à

$$\gamma_y(t_1, t_2) = 2\gamma_x(\tau) + \gamma_x(\tau + \theta) + \gamma_x(\tau - \theta).$$

Le signal est donc stationnaire.

3. On a

$$E(|y(t)|^2) = 2\gamma_x(0) + \gamma_x(\theta) \text{ et } \Gamma_y(\nu) = 2\gamma_x(\nu)[1 + \cos(2\pi\nu\theta)]$$

et

$$\Gamma_y(\nu) = X(\nu) + X(\nu)e^{j2\pi\nu\theta} = X(\nu)[1 + e^{j2\pi\nu\theta}].$$

Donc $H(\nu) = 1 + e^{j2\pi\nu\theta}$ et la formule des interférences permet de retrouver

$$\Gamma_y(\nu) = |H(\nu)|^2 \Gamma_x(\nu) = \Gamma_x(\nu)[1 + \cos(2\pi\nu\theta)].$$

4. Cette relation permet de voir que $y(t)$ est aussi quasimonochromatique.

5. Si $\phi_\varphi(1) = 0$, on obtient $E[z(t)] = e^{j2\pi\nu_0 t} \phi_\varphi(1) = 0$.

6. La fonction de corrélation est donnée par :

$$\gamma_z(t_1, t_2) = e^{j2\pi\nu_0\tau} E[e^{j(\varphi_1(t_1) - \varphi_2(t_2))}].$$

(a) Pour $\varphi(t) = At$, on a

$$\gamma_z(t_1, t_2) = e^{j2\pi\nu_0\tau} \text{sinc}(\pi\tau).$$

(b) Pour $\varphi(t) = At^2$, on a

$$\gamma_z(t_1, t_2) = e^{j2\pi\nu_0\tau} \text{sinc}(\pi(t_1^2 - t_2^2)).$$

(c) Pour $\varphi(t) = At + B$, on a

$$\gamma_z(t_1, t_2) = e^{j2\pi\nu_0\tau} e^{-\sigma_A^2(t_1 - t_2)^2/2}.$$

(d) La V.A Y est gaussienne centrée de variance $\sigma_Y^2 = 2\gamma_\varphi(0) - 2\gamma_\varphi(\tau)$ et on a

$$\gamma_z(t_1, t_2) = e^{j2\pi\nu_0\tau} E(e^{jY}) = e^{j2\pi\nu_0\tau} e^{-\sigma_Y^2/2}.$$

7. On a

$$I = E(|w(t)|^2) = \gamma_z(t, t) + \gamma_z(t - \theta, t - \theta) + \gamma_z(t - \theta, t) + \gamma_z(t, t - \theta)$$

Si $z(t)$ est stationnaire, on obtient :

$$I = 2\gamma_z(0) + 2\gamma_z(\theta).$$

5.8 1. D'après les hypothèses, on a :

$$E(e^{j2\pi\varphi_k}) = 0$$

et par suite $E(x(t_0)) = 0$.

2. On a $\gamma_x(t, \tau) = \gamma_y(t, \tau) + \gamma_b(\tau)$ avec

$$\gamma_y(t, \tau) = \sum \gamma_{x_k}(t, \tau) + \sum_{k \neq h} E(x_k(t)x_h(t - \tau))^*.$$

Comme les φ_k sont indépendants et les $e^{j2\pi\varphi_k}$ sont centrées, on obtient

$$\gamma_y(t, \tau) = \sum_k \gamma_{x_k}(t, \tau).$$

Soit

$$\gamma_x(t, \tau) = \sum_k \gamma_{x_k}(t, \tau) e^{j2\pi\nu_k \tau} \Pi(t - T_k - T/2) \Pi(t - \tau - T_k - T/2) + \sigma^2 \delta(\tau).$$

3. Le signal $x(t)$ n'est donc pas stationnaire au sens large.

On a

$$\underline{\gamma}_{\nu_k}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{T_k}^{T_k+T} \gamma_{x_k}(t, \tau) dt = \frac{1}{T} e^{j2\pi\nu_k \tau} \Pi(t) * \Pi(t)[\tau].$$

D'où

$$\underline{\Gamma}_{\nu_k}(\tau) = \frac{1}{T} \delta(\nu - \nu_k) * |\tilde{\Pi}(\nu)|^2.$$

Pour $\gamma_x(t, \tau)$, on doit calculer l'intégrale sur un ensemble qui contient la réunion des supports des $\Pi(t - T_k - T/2)$. Dans ce cas, la contribution de $b(t)$ est infinie. Il faut donc une porte pour filtrer le bruit.

Chapitre 6

Représentations, réalisations et synthèses d'un filtre

6.1 REPRÉSENTATION EXTERNE ET FONCTION DE TRANSFERT

6.1.1 Représentations en série et en parallèle

La représentation symbolique d'un filtre joue un rôle fondamental dans l'étude de la stabilité, de la synthèse et de la réalisation de ce dernier. Elle consiste à représenter un filtre par une fonction de la variable complexe, appelée fonction de transfert. Cette fonction est en fait la T.L (respectivement T.Z) de la réponse impulsionnelle du filtre analogique (respectivement filtre numérique). Prenant la T.L de l'expression (1.8), on obtient $X(s) = H(s)U(s)$ avec :

$$H(s) \triangleq \frac{\sum_{k=0}^q b_k s^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^p a_k s^{-k}}. \quad (6.1)$$

Dans le cas d'un signal à temps discret, on obtient le même résultat en remplaçant (1.8) par une équation aux différences et en prenant la T.Z. Un filtre dynamique est donc un filtre dont la fonction de transfert est une fraction rationnelle. Nous allons donner les principaux résultats concernant ces filtres en commençant, tout d'abord, par les définitions suivantes.

Le filtre équivalent à deux filtres en parallèles a pour réponse impulsionnelle $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$.

Le filtre équivalent à deux filtres en série a pour réponse impulsionnelle $h = h_1 * h_2$.

Si l'on décompose la transmittance d'un filtre sous la forme d'un produit de transmittances élémentaires (souvent du premier ou du second ordre) :

$$H(z) = \prod_{i=0}^q H_i(z) \quad (6.2)$$

on obtient la représentation en série ou en cascade du filtre : figure 6.1, droite.

Si l'on décompose la transmittance d'un filtre en éléments simples (souvent du premier ou du second ordre) :

$$H(z) = \sum_{i=0}^q H_i(z) \quad (6.3)$$

on obtient la représentation en parallèle du filtre : figure 6.1, gauche.

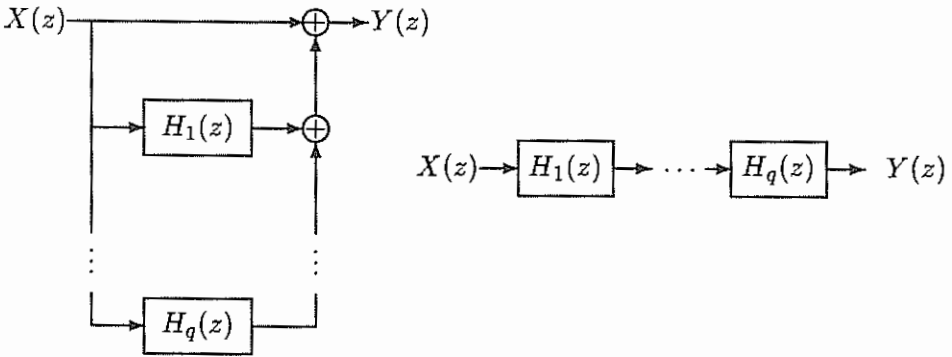


Figure 6.1 Représentations en parallèle et en cascade.

6.1.2 Causalité, stabilité, phase minimale, phase linéaire

Un filtre linéaire est dit stable au sens strict (Entrée Bornée - Sortie Bornée) si à toute entrée bornée correspond une sortie bornée. Il est dit stable au sens large si $|h(t)| < M \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un filtre soit stable au sens strict est que sa réponse impulsionnelle vérifie :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty. \quad (6.4)$$

En effet, si la réponse impulsionnelle vérifie (6.4) et si $x(t)$ est un signal borné tel que $|x(t)| \leq A$, alors la sortie $y(t)$ vérifie :

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\theta)| |x(t - \theta)| d\theta \leq A \int_{-\infty}^{\infty} |h(\theta)| d\theta < \infty.$$

Réciproquement, comme le signal $x(t) = e^{-j\text{Arg}(h(-t))}$ est borné, la sortie associée à ce signal vérifie :

$$|y(0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) x(-\theta) d\theta \right| = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\theta)| d\theta < \infty.$$

Un filtre stable au sens large peut être instable au sens strict et réciproquement. En effet, si $h(t)$ est égal à l'échelon unité $u(t)$, le filtre est stable au sens large mais instable au sens strict et si $h(t) = \delta(t)$, le filtre est stable au sens strict mais instable au sens large.

Un filtre à temps continu est dit à phase minimale s'il est stable et si tous ses zéros sont à partie réelle négative.

Un filtre est à phase linéaire si l'argument de sa fonction de transfert est une fonction linéaire (i.e. $A(\theta) = \text{Arg}[H(z)] = a\theta$).

Proposition Un filtre RIF à temps discret est à phase linéaire si sa fonction de transfert est un polynôme autoréciproque.

Ce résultat se traduit par $h_i = \varepsilon h_{n-i}$ pour $i = 0, 1, \dots, n$ avec $|\varepsilon| = 1$, les coefficients $h_0, h_1, \dots, h_n$ étant les termes non nuls de la réponse impulsionnelle du filtre RIF.

Proposition Soit un filtre dynamique causal dont la fonction de transfert est une fraction rationnelle $H(s)$. Alors le filtre est stable au sens strict si et seulement si tous les pôles de $H(s)$ sont dans le demi-plan complexe gauche ouvert (i.e. les racines du dénominateur sont à partie réelle strictement négative). Le filtre est stable au sens large si et seulement si $H(s)$ n'admet aucun pôle à partie réelle strictement positive et s'il existe des pôles sur l'axe des imaginaires, ils doivent avoir des multiplicités égales à 1.

Il existe des critères qui permettent de tester la stabilité des filtres linéaires. Parmi les plus connus, on peut énoncer le critère de stabilité de Routh et ses extensions [8]. L'étude de la stabilité se ramène à celle de la position des racines d'un polynôme par rapport à l'axe des imaginaires. On appellera polynôme de Hurwitz tout polynôme n'ayant que des racines à partie réelle négative. Les algorithmes qui permettent de tester la stabilité calculent de manière récursive, à partir d'un polynôme donné de degré n , une suite de n paramètres dont le simple examen permet de dire

si le filtre est stable ou non. Le principe consiste à associer à un polynôme $g(s)$ de degré n (supposé ici à coefficients réels), mis sous la forme

$$g(s) = r_n(s) + r_m(s), \quad m < n \quad (6.5)$$

où $r_n(s)$ et $r_m(s)$ sont ses parties paire et impaire de degrés n et m , une suite de polynômes

$$f_n, f_{n-1} \dots$$

vérifiant chacun $\deg(f_p) = p$ et l'identité suivante :

$$f_p(-s) = (-1)^p f_p(s) \quad \forall s.$$

Cette identité signifie que $f_p(s)$ ne comporte que des monômes de même parité que p et pour cette raison, tout polynôme vérifiant cette propriété sera appelé polynôme pair.impair (p.i). Le premier polynôme de la suite est $f_n = r_n$ et le second est construit à partir de r_m . Chaque polynôme $f_{p-1}(s)$ est construit à partir du reste $r_q(s)$ de la division euclidienne :

$$f_{p+1}(s) = \alpha_{p+1} f_p(s) + r_q(s), \quad q < p \quad (6.6)$$

de $f_{p+1}(s)$ par $f_p(s)$ selon une règle qui sera précisée dans la suite. On peut vérifier que $r_q(s)$ est un polynôme p.i dont le degré q est de même parité que $p+1$. On commence par le cas, dit régulier, où $m = n-1$ et $q = p-1$ à chaque étape de l'algorithme. Dans ce cas, on a $f_{p-1} = r_q$ et l'algorithme se réduit à la récurrence d'ordre trois suivante, $p = n-1, n-2, \dots, 1$:

$$f_{p+1}(s) = \alpha_{p+1} s f_p(s) + f_{p-1}(s). \quad (6.7)$$

Les paramètres $\alpha_p, p = n, n-1, \dots, 1$, ainsi construits définissent la représentation en fraction continue du polynôme $g(s)$ donnée par :

$$\frac{r_n(s)}{r_m(s)} \triangleq \alpha_n s + \frac{1}{\alpha_{n-1} s + \frac{1}{\alpha_{n-2} s + \dots + \frac{1}{\alpha_1 s}}}. \quad (6.8)$$

En effet, (6.7) conduit immédiatement à

$$\frac{f_{p+1}(s)}{f_p(s)} = \alpha_{p+1} s + \frac{f_{p-1}(s)}{f_p(s)} \quad (6.9)$$

et l'itération de cette relation conduit à (6.8). À titre d'exemple, pour $n = 4$, on obtient :

$$H(s) \triangleq \frac{r_4(s)}{r_3(s)} = \alpha_4 s + \frac{1}{\alpha_3 s + \frac{1}{\alpha_2 s + \frac{1}{\alpha_1 s}}}.$$

Nous allons donner différents énoncés du critère de stabilité d'un filtre linéaire, chacun étant fondé sur des concepts adaptés à une application spécifique. Pour les démonstrations et pour plus de détails, on peut consulter les références [8]. Posons $f_p(s) = a_p^p s^p + a_{p-1}^p s^{p-1} + \dots$, $p = n, n-1, \dots, 0$, et associons à chaque polynôme f_p , la ligne

$$R_p \quad : \quad a_p^p \quad a_{p-1}^p \quad \dots \quad (6.10)$$

L'écriture de toutes les lignes $R_n, R_{n-1}, \dots$, l'une à la suite de l'autre conduit à un tableau triangulaire connu sous la dénomination table de Routh et on a le résultat suivant.

Stabilité et Table de Routh Le polynôme $g(s)$ est de Hurwitz si et seulement si la première colonne de la table de Routh associée à $g(s)$ comporte $n+1$ coefficients $a_n^n, a_{n-1}^{n-1}, \dots, a_0^0$ et que ces coefficients sont tous non nuls et de même signe, i.e., $\alpha_p = a_p^p / a_{p-1}^{p-1} > 0$ pour $p = n, n-1, \dots, 1$.

Une fraction rationnelle $H(s)$ est dite « sans perte » si elle satisfait les 3 propriétés suivantes :

$$H(s) \text{ est irréductible} \quad (6.11)$$

$$\operatorname{Re}[H(j\omega)] = 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (6.12)$$

$$\operatorname{Re}[H(s)] > 0 \quad \forall s \text{ tel que } \operatorname{Re}[s] > 0. \quad (6.13)$$

La fonction $H(j\omega)$ est évidemment la réponse en fréquence du filtre linéaire de fonction de transfert $H(s)$ et (6.12) signifie que la partie résistive est nulle ou que le filtre est purement réactif (sans perte). Par exemple, si $H(s)$ est une fraction impaire à coefficients réels, elle est sans perte si et seulement si elle vérifie les deux conditions (6.11) et (6.13).

Stabilité et fonction sans perte [8] Les 3 propositions suivantes sont équivalentes.

1. Le polynôme $g(s) = r_n(s) + r_m(s)$ est de Hurwitz.
2. La fraction rationnelle $\frac{r_n(s)}{r_m(s)}$ est sans perte.
3. On a $m = n-1$ et si $r_q(s)$ et α_n sont définis par (6.6), alors la fraction $\frac{r_m(s)}{r_q(s)}$ est sans perte et le nombre α_n est strictement positif.

Cette propriété est à la base du développement en fraction continue associé à un polynôme de Hurwitz introduit ci-dessus.

Stabilité et propriété d'entrelacement des zéros [8] Le polynôme $g(s)$ est de Hurwitz si et seulement si les α_p sont tous strictement positifs et toutes les racines des polynômes $r_n(s)$ et $r_m(s)$ sont simples, distinctes, situées sur l'axe imaginaire et lorsqu'on parcourt cet axe, on rencontre ces racines de façon alternative.

Associions au polynôme :

$$g(s) \triangleq \sum_{i=0}^n a_i s^{n-i}, a_0 \triangleq -1 \quad (6.14)$$

sa matrice compagnon :

$$G \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad \text{on a } \det(G - sI) = g(s). \quad (6.15)$$

Stabilité et matrice définie positive Les 3 propriétés suivantes sont équivalentes.

1. Le polynôme $g(s)$ est de Hurwitz.
2. Pour toute matrice Q définie positive, l'équation matricielle

$$GP + PG = -Q \quad (6.16)$$

admet au moins une solution P définie positive. Cette solution est alors unique.

3. Il existe une matrice P définie positive vérifiant l'équation :

$$GP + PG = -I. \quad (6.17)$$

Détermination du nombre de zéros instables La table de Routh étendue [8] que nous allons présenter dans la suite permet de déterminer le nombre de zéros à partie réelle positive d'un polynôme g sans calculer explicitement ces derniers. Ce nombre, noté $n^+(g)$, tient compte de la multiplicité de chacun de ces zéros et sera dénommé aussi nombre de zéros instables du polynôme g . La construction de la table consiste à déduire, à partir des composantes paire et impaire du polynôme g et par divisions successives, une suite de polynômes pair-impair (pair ou impair selon leurs degrés) une suite de polynômes : $f_n, f_{n-1}, \dots, f_0$.

L'algorithme qui permet de construire la table de Routh étendue comporte trois cas selon le degré q du reste r_q de la division de f_{p+1} par f_p donnée par (6.6).

Si $q = p - 1$, on prend $f_{p-1} \triangleq r_q$.

Si $r_q = 0$, on prend f_{p-1} égal à la dérivée de f_p .

Si $r_q \neq 0$ et $q < p - 1$, on construit f_{p-1} comme suit. Soit A la ligne associée à r_q et h le nombre des premières colonnes de A formées par des zéros. On construit la ligne R_{p-1} comme suit.

Décaler les éléments de $(-1)^h A$ de h positions vers la gauche pour obtenir une ligne intermédiaire B :

$$B \quad : \quad (-1)^h a_{p-h-1}^{p-1} \quad (-1)^h a_{p-h-2}^{p-1} \quad \dots$$

Additionner colonne par colonne les lignes A et B pour obtenir la ligne :

$$R_{p-1} \quad : \quad a_{p-1}^{p-1} \quad a_{p-2}^{p-1} \quad \dots$$

Cet algorithme, plus simple que la procédure classique de Routh, associe à un polynôme quelconque de degré n un tableau ayant $n + 1$ lignes $R_n, R_{n-1}, \dots, R_0$. À tout polynôme g , on peut associer une suite : $a_n^n, a_{n-1}^{n-1}, \dots, a_0^0$ et on a le résultat suivant.

Proposition Le nombre de zéros du polynôme g , tenant compte de leurs multiplicités, qui sont à partie réelle positive est donné par

$$n^+(g) = V(a_n^n, a_{n-1}^{n-1}, \dots, a_0^0) \tag{6.18}$$

où le second membre désigne le nombre de variations de signe dans la suite : $a_n^n, a_{n-1}^{n-1}, \dots, a_0^0$ qui constitue la première colonne de la table de Routh associée à g .

Exemple 6.1.1 Table associée à un polynôme singulier

La table associée à $g(s) = (s^6 + 3s^4 + 3s^2 + 1) + (s^5 + 3s^3 + 2s)$ se construit comme suit.

R_6	:	1	3	3	1	
R_5	:	1	3	2		
A_5	:	0	1	1		On a $h = 1$
B_5	:	-1	-1			Obtenu en décalant $- A_5$ d' une position
R_4	:	-1	0	1		Obtenu en calculant $A_5 + B_5$
R_3	:	3	3			
R_2	:	1	1			
A_2	:	0				Prendre la dérivée de R_2
R_1	:	2				
R_0	:	1				

D'où $n^+(g) = V(1,1,-1,3,1,2,1) = 2$.

Les définitions et propriétés précédentes se transposent assez naturellement aux cas des filtres numériques. Par exemple, un filtre numérique est dit à phase minimale s'il est stable et si tous ses zéros sont situés à l'intérieur du cercle unité. Pour l'étude de la stabilité des filtres numériques, il suffit de remplacer la transformée de Laplace par la transformée en z , l'axe des imaginaires par le cercle unité et le demi-plan gauche par l'intérieur du cercle unité. Cela revient à remplacer la variable s par $(1+z)/(1-z)$ et par transformation homographique polynômiale, on obtient des algorithmes qui permettent d'associer à un polynôme de la variable z une suite de polynômes $F_p(z)$ autoréciproques, i.e., vérifiant l'identité suivante :

$$F_p(z) = z^p \overline{F}_p(z^{-1}) \quad \forall z \quad (6.19)$$

où $\overline{F}_p$ est le polynôme obtenu en conjuguant les coefficients de F_p . Partant d'un polynôme $G(z)$, mis sous la forme :

$$G(z) = R_n(z) + (1-z)R_m(z) \quad (6.20)$$

où $R_n(z)$ et $R_m(z)$ sont des polynômes autoréciproques, on construit une suite de polynômes F_p à l'aide de la récurrence :

$$F_{p+1}(z) = \nu_p(1+z)F_p(z)[1-z]^2 F_{p-1}(z) \quad (6.21)$$

et une suite de coefficients ν_p , $p = 1, 2, \dots, n$. On a alors le critère suivant [8].

Proposition Le polynôme $G(z)$ a toutes ses racines à l'intérieur du cercle unité (polynôme de Schur) si et seulement si la récurrence (6.21) permet de calculer n coefficients $\nu_n, \nu_{n-1}, \dots, \nu_1$ tous strictement positifs.

Dans la suite, on se limitera surtout à la présentation des filtres numériques. En effet, le filtrage numérique est de plus en plus utilisé pour différentes raisons : modélisation parfaite des filtres, filtres très précis, possibilité de reconfiguration aisée, composants numériques de plus en plus rapides, efficaces et de faible coût.

Exemple 6.1.2 Filtre inverse

L'inverse d'un filtre, à temps continu ou à temps discret, de réponse impulsionnelle $h(t)$ est un filtre qui associe à l'entrée $h(t)$ une sortie égale à un Dirac. L'existence du filtre inverse n'est pas toujours possible. Considérons, à titre d'exemple, les deux filtres causaux définis par les équations suivantes avec $a^2 < 1$:

$$y_k = x_k - ax_{k-1}, \quad H_1(z) = 1 - az^{-1} \quad (6.22)$$

$$y_k = x_k + ay_{k-1}, \quad H_2(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}. \quad (6.23)$$

Le premier est un filtre MA stable et à phase minimale. Dans ces conditions, le second est un filtre AR stable qui est l'inverse du premier. Les gains $|H_1(e^{j2\pi\nu})|$ et $|H_2(e^{j2\pi\nu})|$ sont donnés par la figure 6.2.

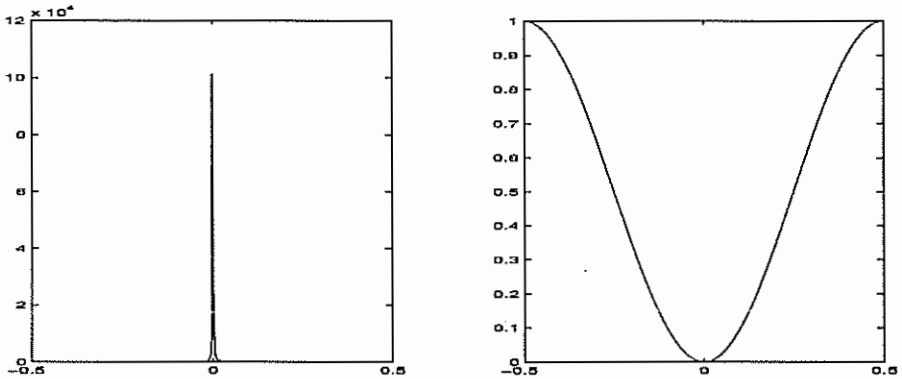


Figure 6.2 Gains $|H_1(e^{j2\pi\nu})|$ et $|H_2(e^{j2\pi\nu})|$

6.2 REPRÉSENTATION INTERNE ET ÉQUATIONS D'ÉTAT

On se place dans le cas où les observations sont scalaires. Le modèle d'état s'écrit :

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) : \text{équation d'état} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) : \text{équation d'observation} \quad (6.25)$$

dont l'évolution dynamique est modélisée par l'équation d'état où les différentes grandeurs sont définies comme suit :

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur qui définit l'état du système à l'instant t

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^p$ est l'observation ou sortie du système à l'instant t

$\mathbf{A}(t)$ est la matrice d'évolution (n,n) dépendant en général de l'instant t

$\mathbf{C}(t)$ est la matrice d'évolution (p,n) dépendant en général de l'instant t (système non stationnaire). Dans le cas d'une observation y scalaire, la solution générale du système (6.24) est donnée par :

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t,t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (6.26)$$

où $\phi(t,t_0)$ est une matrice du type (n,n) , appelée matrice de transition. Si la matrice $\mathbf{A}$ ne dépend pas du temps, le système est dit invariant, dans le cas contraire, il est

dit variable. Dans le cas d'un système invariant, la matrice $\phi(t, \tau)$ ne dépend que de la différence $t - \tau$ et elle est donnée par :

$$\phi(t, \tau) = e^{(t-\tau)A}. \quad (6.27)$$

La matrice de transition $\phi(t, \tau)$, où τ est considéré comme paramètre arbitraire mais fixé et t comme variable, est inversible et vérifie les propriétés suivantes :

$$\frac{d\phi(t, \tau)}{dt} = A(t)\phi(t, \tau)$$

$$\phi(t_1, t_2) = \phi(t_1, t_3)\phi(t_3, t_2)$$

$$\phi(t_1, t_1) = I, \quad \phi(t_1, t_2) = \phi(t_2, t_1)^{-1}.$$

Soit $x_i(t)$, $1 \leq i \leq n$, n solutions linéairement indépendantes de l'équation d'état libre, i.e., les $x_i(t)$ sont solution de

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

et soit $X(t)$ une matrice ayant pour colonnes les n vecteurs $x_i(t)$:

$$X(t) \triangleq [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)].$$

Alors, une matrice de transition associée à $A(t)$ est donnée par

$$\phi(t, \tau) \triangleq X(t)X^{-1}(\tau).$$

Les transformées de Laplace monolatérales des deux membres de l'équation d'état (6.24) et l'équation d'observation (6.25) conduisent aux deux relations :

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

et

$$Y(s) = CX(s)$$

où les lettres majuscules désignent les transformées de Laplace monolatérales des lettres minuscules correspondantes. D'où

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s).$$

La matrice de type (q, m) définie par

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (6.28)$$

et qui relie $Y(s)$ et $U(s)$ est appelée matrice de transfert du système. C'est l'extension de la fonction de transfert au cas vectoriel. Pour rester dans le cas général, nous parlerons toujours de matrice de transfert, la fonction de transfert étant considérée comme matrice de type $(1, 1)$. La sortie d'un système linéaire est reliée à son entrée par la relation

$$Y(s) = H(s)U(s) + C(sI - A)^{-1}x(0) \tag{6.29}$$

où $H(s)$ est la matrice de transfert définie par (6.28). Si au lieu du vecteur d'état $x(t)$, on considère le vecteur $q(t)$ défini par :

$$x(t) = Pq(t)$$

où P est une matrice inversible. La représentation d'état à l'aide des variables q est donnée par :

$$q(t)' = P^{-1}APq(t) + P^{-1}Bu(t) : \text{équation d'état}$$

$$y(t) = CPq(t) : \text{équation d'observation}$$

et la matrice de transfert reste inchangée.

Propriété markovienne Soit une fonctionnelle scalaire ou vectorielle $y(t) = f(t, u(\theta))$, dont la valeur à l'instant t dépend de t et des valeurs prises par une fonction scalaire ou vectorielle $u(\theta)$. On dit que $f(t, u(\theta))$ possède la propriété markovienne si la connaissance de $y(t_0)$ et celle de $u(\theta)$ pour $t_0 \leq \theta < t$ suffisent pour déterminer $y(t)$ et ceci pour tout t . Par exemple,

$$y(t) = \int_{-\infty}^t u(\theta)d\theta = y(t_0) + \int_{t_0}^t u(\theta)d\theta.$$

est marcovienne. Comme la propriété markovienne joue un rôle important dans la pratique, il est souvent intéressant d'introduire une fonctionnelle vectorielle qui possède cette dernière propriété et à partir de laquelle on peut exprimer facilement $y(t)$. On peut montrer qu'un vecteur d'état $x(t)$ possède la propriété markovienne.

6.2.1 Commandabilité et observabilité d'un filtre

Commandabilité Aux matrices **A** et **B**, on associe la matrice définie par

$$C \triangleq (A^0B, A^1B, \dots, A^{n-1}B) \tag{6.30}$$

appelée matrice de commandabilité. Soit $\text{Im}(\mathcal{C})$ l'espace image de $\mathcal{C}$, engendré par les colonnes de $\mathcal{C}$ et $E_{\mathcal{C}}$ un sous-espace complémentaire quelconque de $\text{Im}(\mathcal{C})$ dans $\mathbb{R}^n$, i.e.,

$$\mathbb{R}^n = \text{Im}(\mathcal{C}) \oplus E_{\mathcal{C}}. \quad (6.31)$$

L'espace $\text{Im}(\mathcal{C})$ est appelé sous-espace commandable de $\mathbb{R}^n$ et le système est dit commandable si $\text{Im}(\mathcal{C}) = \mathbb{R}^n$. De plus, comme le théorème de Cayley-Hamilton permet d'écrire A^n comme combinaison linéaire des A^k pour $k \leq n-1$, on a

$$\exp(tA)[\text{Im}(\mathcal{C})] \subset \text{Im}(\mathcal{C}). \quad (6.32)$$

L'étude de la commandabilité d'un système consiste à déterminer l'espace vectoriel $\text{Im}(\mathcal{C})$. La méthode consiste à remplacer la matrice $\mathcal{C}$ par une matrice $\widehat{\mathcal{C}}$ plus simple et vérifiant

$$\text{Im}(\mathcal{C}) = \text{Im}(\widehat{\mathcal{C}}).$$

On peut vérifier que les opérations linéaires sur les colonnes d'une matrice $\mathcal{C}$ qui consistent, soit à intervertir l'ordre des colonnes, soit à remplacer une colonne par une colonne proportionnelle, soit à ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes, ne modifient pas l'image de $\mathcal{C}$. Comme ces opérations reviennent à multiplier à droite la matrice $\mathcal{C}$ par une matrice inversible $\mathbf{M}$, on peut donc remplacer $\mathcal{C}$ par

$$\widehat{\mathcal{C}} = \mathcal{C}\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 \dots \mathbf{M}_k \quad (6.33)$$

où les matrices $\mathbf{M}_k$ représentent des opérations élémentaires décrites ci-dessus sur les colonnes de $\mathcal{C}$ et qui conduisent à une matrice $\widehat{\mathcal{C}}$ triangulaire. Les colonnes indépendantes de $\widehat{\mathcal{C}}$ donnent directement $\text{Im}(\mathcal{C})$.

Observabilité Aux matrices A et $\mathcal{C}$, on associe la matrice définie par

$$\mathcal{O} \triangleq \begin{pmatrix} \mathcal{C}A^0 \\ \mathcal{C}A^1 \\ \vdots \\ \mathcal{C}A^{n-1} \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

appelée matrice d'observabilité. On introduit le noyau :

$$\text{Ker}(\mathcal{O}) \triangleq \{x \mid \mathcal{O}x = 0\} \quad (6.35)$$

de $\mathcal{O}$ et un sous-espace complémentaire quelconque de $\text{Ker}(\mathcal{O})$ dans $\mathbb{R}^n$, i.e.,

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(\mathcal{O}) \oplus E_0. \quad (6.36)$$

L'espace $\text{Ker}(\mathcal{O})$ est appelé sous-espace non observable de $\mathbb{R}^n$ et le système est dit observable si le noyau de sa matrice d'observabilité est réduit au seul vecteur nul, i.e., $\text{Ker}(\mathcal{O}) = \{\mathbf{0}\}$. De plus, comme le théorème de Cayley-Hamilton permet d'écrire $\mathbf{A}^n$ comme combinaison linéaire des $\mathbf{A}^k$ pour $k \leq n-1$, on a

$$\text{Ker}(\mathcal{O}) \subset \text{Ker}(\mathcal{C}). \quad (6.37)$$

Comme pour la commandabilité, l'étude de l'observabilité d'un système consiste à déterminer $\text{Ker}(\mathcal{O})$ et de remplacer $\mathcal{O}$ par une autre matrice $\widehat{\mathcal{O}}$ plus simple et vérifiant :

$$\text{Ker}(\mathcal{O}) = \text{Ker}(\widehat{\mathcal{O}}). \quad (6.38)$$

Il est simple de vérifier que les opérations linéaires sur les lignes d'une matrice $\mathcal{O}$ qui consistent, soit à intervertir l'ordre des lignes, soit à remplacer une ligne par une ligne proportionnelle, soit à ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes, ne modifient pas $\text{Ker}(\mathcal{O})$. Comme ces opérations se traduisent par des multiplications à gauche de la matrice $\mathcal{O}$ par une matrice inversible $\mathbf{M}$, on peut donc remplacer $\mathcal{O}$ par

$$\widehat{\mathcal{O}} = \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \dots \mathbf{M}_k \mathcal{O} \quad (6.39)$$

où les $\mathbf{M}_k$ représentent des opérations élémentaires décrites ci-dessus sur les lignes de $\mathcal{O}$ et conduisant à une matrice $\widehat{\mathcal{O}}$ triangulaire. Le rang de la matrice ainsi obtenue est égal à la dimension de l'espace $\text{Ker}(\mathcal{O})$ et une base de $\text{Ker}(\mathcal{O})$ est donnée par une base de $\text{Ker}(\widehat{\mathcal{O}})$ d'après (6.39).

Décomposition de Kalman Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{O}$ les matrices de commandabilité et d'observabilité associées à un système. Posons

$$\mathbb{E}_1 \triangleq \text{Im}(\mathcal{C}) \cap \text{Ker}(\mathcal{O})$$

$$\text{Im}(\mathcal{C}) \triangleq \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2$$

$$\text{Ker}(\mathcal{O}) \triangleq \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_3$$

$$\mathbb{R}^n \triangleq \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2 \oplus \mathbb{E}_3 \oplus \mathbb{E}_4$$

et introduisons une nouvelle base formée par la réunion des bases des $\mathbb{E}_i$. On obtient dans cette base une nouvelle représentation d'état pour laquelle seules les variables correspondant à l'espace $\mathbb{E}_1$ jouent un rôle important.

6.2.2 Forme compagnon et fonction de transfert

Soit un système dont l'équation d'état est donnée par (6.24), et $\mathbf{P}$ une matrice inversible définissant un changement de base $\mathbf{x} \triangleq \mathbf{P}\mathbf{q}$. On se propose de trouver une matrice $\mathbf{P}$ telle que les matrices apparaissant dans la nouvelle équation d'état faisant intervenir le vecteur $\mathbf{q}$, aient les formes suivantes :

$$\mathbf{S} \triangleq \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

Proposition Soit un système commandable et $\mathbf{L}$ la dernière ligne de la matrice inverse de sa matrice de commandabilité (6.30). Alors la matrice

$$\mathbf{P}^{-1} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{L}\mathbf{A}^0 \\ \mathbf{L}\mathbf{A}^1 \\ \mathbf{L}\mathbf{A}^2 \\ \dots \\ \mathbf{L}\mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

est inversible et la matrice $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ a la forme donnée par (6.40).

La matrice $\mathbf{S}$ introduite en (6.40) est appelée matrice compagnon du polynôme

$$D(\lambda) \triangleq (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^n a_i \lambda^{n-i}, \quad a_0 \triangleq -1 \quad (6.42)$$

On peut vérifier facilement que le polynôme caractéristique de la matrice $\mathbf{S}$ est égal à D , soit :

$$\det(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I}) = D(\lambda) \quad (6.43)$$

et que la dernière colonne de la matrice inverse de $(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I})$ est donnée par :

$$\Lambda \triangleq [\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I}]_n^{-1} = (\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^{n-1})^T. \quad (6.44)$$

Supposons que les matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ satisfont (6.40) et que la matrice $\mathbf{C}$ est une matrice ligne définie par :

$$\mathbf{C} \triangleq (c_0, c_1, \dots, c_{n-1}). \quad (6.45)$$

Tenant compte des formes de $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ et de l'expression de la fonction de transfert H , on obtient :

$$H(\lambda) = \mathbf{C}[\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{C}^T \Lambda = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} c_i \lambda^i}{\sum_{i=0}^n a_i \lambda^{n-i}}. \tag{6.46}$$

La fonction de transfert du système est donc une fraction rationnelle. Il est clair d'après (6.43) que les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ apparaissant dans une représentation d'état quelconque sont les pôles de la fonction de transfert du système.

6.3 RÉALISATIONS ET SYNTHÈSE D'UN FILTRE NUMÉRIQUE

6.3.1 Passage d'un filtre analogique à un filtre numérique

Soit $x(t)$ un signal à bande limitée $(-B, B)$. Alors la sortie d'un filtre $h(t)$ associée à $x(t)$ est aussi à bande limitée $(-B, B)$. Si l'on pose $x_k \triangleq x(\frac{k}{2B})$ et $y_k \triangleq y(\frac{k}{2B})$, alors le système qui fait passer du signal à temps discret x_k au signal y_k est un filtre numérique dont la réponse impulsionnelle g_k se déduit de $h(t)$ comme suit :

$$g_k \triangleq g(\frac{k}{2B}) \quad \text{avec} \quad g(t) \triangleq h(t) * \text{sinc}(2Bt). \tag{6.47}$$

Le gain complexe $G_T(\nu)$ du filtre numérique est obtenu par repliement de celui du filtre analogique associé $G_T(\nu)$ selon la relation :

$$G_T(\nu) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} G(\nu - \frac{n}{T}).$$

Utilisation de la réponse fréquentielle Cette technique consiste à associer à la suite des entrées $x_1, \dots, x_N$ la suite $X_1, \dots, X_N$ du domaine spectral obtenue en calculant la TFD, multiplier cette dernière par le gain fréquentiel du filtre puis revenir dans le domaine temporel en calculant les sorties $y_1, \dots, y_N$ par T.F inverse.

Utilisation de la fonction de transfert : forme directe et forme canonique Un filtre $\text{ARMA}(p, q)$ est défini soit par une relation entrée-sorties du type (5.61) soit par sa fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{i=0}^q b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} \triangleq \frac{P(z)}{Q(z)}. \tag{6.48}$$

La réalisation de ce filtre peut se faire de plusieurs manières. Une forme dite directe s'obtient en considérant le diagramme qui traduit tout simplement la relation entrée-sortie où l'on désigne par z^{-1} l'opérateur de retard. Cette structure est très sensible

© Dunod. La photocopie non autorisée est un délit.

à la précision des coefficients lorsque les pôles sont proches les uns des autres ou proches du cercle unité. On peut aussi décomposer la fonction de transfert sous la forme :

$$H(z) \triangleq H_1(z)H_2(z), \quad H_1(z) \triangleq \frac{1}{Q(z)}, \quad H_2(z) \triangleq P(z)$$

et introduire le signal fictif w_k qui est la sortie du filtre H_1 . Si l'on désigne par $W(z)$ la T.Z de w_k , on a les relations suivantes :

$$Q(z)W(z) = U(z) \quad \text{et} \quad X(z) = P(z)W(z)$$

qui se traduisent dans le domaine temporel par :

$$w_k = u_k - \sum_{i=1}^q a_i w_{k-i} \quad \text{et} \quad x_k = \sum_{i=0}^p b_i w_{k-i}.$$

Ces relations conduisent à la structure dite canonique qui minimise le nombre d'éléments de retard, i.e., la taille mémoire. Les réalisations de ces deux structures sont données par la figure 6.3.1. (Afin de simplifier la figure, les coefficients de pondération a_i et b_i n'apparaissent pas.)

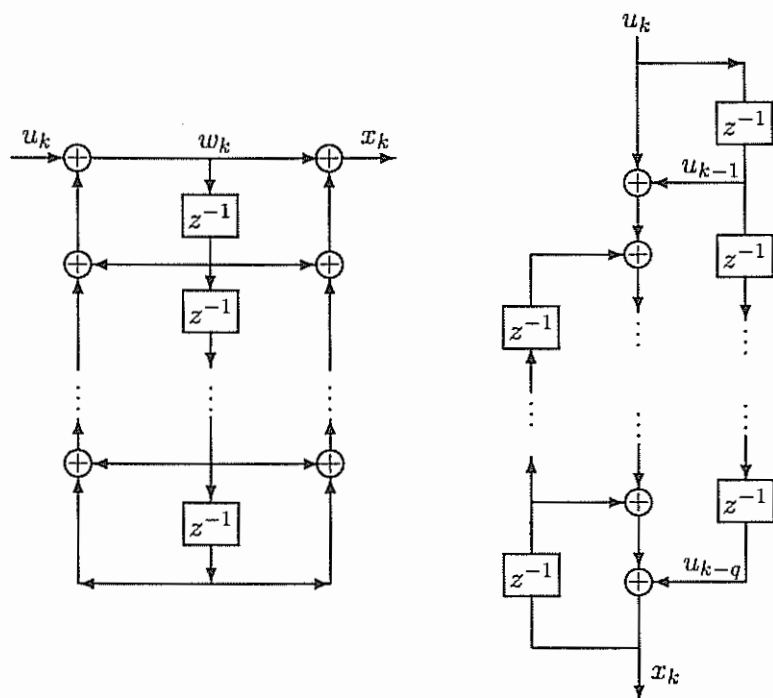


Figure 6.3 Forme directe et forme optimisée.

Exemple 6.3.1 Filtre ARMA(1,2)

Soit le filtre défini par l'équation aux différences suivante :

$$y(k) - 2y(k-2) = x(k) - 2x(k-1) + x(k-2)$$

où $x(k)$ est le signal d'entrée. Prenant les T.Z, on obtient pour fonction de transfert la fraction $H(z) = \frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{1-2z^{-2}}$. On a donc un filtre ARMA(1,2) dont le diagramme qui synthétise la transmittance est donné par la figure 6.3.1 où l'on prend $p = 1$ et $q = 2$.

6.3.2 Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF)

Les avantages des filtres RIF sont la synthèse aisée, la stabilité assurée et la possibilité d'être à phase linéaire. L'inconvénient majeur est la réalisation plus complexe et un ordre plus élevé que celui du filtre RII pour des performances égales.

Technique de fenêtre On peut imposer l'identité des réponses fréquentielles du filtre idéal et du filtre synthétisé. Par T.Z inverse, on calcule la réponse impulsionnelle h_k . Le problème est qu'on arrive à un filtre RII non causal. On prend alors seulement N termes de la réponse impulsionnelle. Ceci revient à multiplier la réponse impulsionnelle du filtre idéal par une fenêtre rectangulaire et donc à convoluer la réponse fréquentielle par un sinus cardinal. On a vu que cela introduit des lobes secondaires parasites et conduit donc à des bandes de transition plus larges. Pour limiter ces effets parasites, on introduit des fenêtres de pondération appropriées.

Échantillonnage de la réponse fréquentielle On considère N points $G_1, \dots, G_N$ de la réponse fréquentielle et par TFD inverse, on détermine N points $g_1, \dots, g_N$. Ces points déterminent la réponse impulsionnelle d'un filtre RIF d'ordre N . On a donc une méthode simple mais qui nécessite le calcul d'une TFD inverse. Cette méthode conduit à une réponse fréquentielle qui ne coïncide avec celle du filtre cherché que pour les N points considérés.

6.3.3 Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII)

On s'intéresse à des méthodes fondées sur les techniques classiques dans la synthèse des filtres analogiques.

Invariance temporelle Le principe de cette méthode consiste à partir d'un gabarit donné dans le plan de Bode, de calculer ensuite la fonction de transfert du filtre analogique qui approxime au mieux le gabarit donné puis, par transformation de Laplace inverse, déterminer la réponse impulsionnelle du filtre analogique. Le filtre numérique est alors obtenu par échantillonnage de cette réponse. Soit

$$H(p) = \sum_{i=0}^q \frac{A_i}{p - p_i}$$

La fonction de transfert du filtre analogique cherché supposé stable. La réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h(t) = \sum_{i=0}^q A_i e^{p_i t}$$

et celle du filtre numérique associé est prise égale à $h_k = h(kT_e)$. La fonction de transfert du filtre numérique causal est

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} = \sum_{i=0}^q A_i \sum_{k=0}^{\infty} e^{p_i k T_e} z^{-k} = \sum_{i=0}^q \frac{A_i}{1 - e^{p_i T_e} z^{-1}}.$$

On voit donc que $H(z)$ s'obtient en substituant dans l'expression de $H(p)$ chacun des termes $p - p_i$ par $1 - e^{p_i T_e} z^{-1}$. Le problème majeur provient de l'échantillonnage de $h(t)$ qui peut conduire à des effets de repliement de spectres et ceci peut diminuer considérablement l'atténuation du filtre numérique pour les fréquences hors bande. Le phénomène de recouvrement des spectres se traduit dans le plan des pôles de $H(p)$ par le fait que 2 pôles ayant la même partie réelle et des parties imaginaires distantes de $\frac{2\pi}{T_e}$ auront la même image dans le plan des z . Cette technique n'est alors utilisée que pour les filtres analogiques à bande limitée.

Invariance indicielle On écrit que la réponse indicielle du filtre numérique est égale à l'échantillonnée de celle du filtre analogique. On a donc :

$$Y(p) = \frac{H(p)}{p}.$$

La T.Z de la suite $b_k = y(kT_e)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} B(z) &\triangleq \mathcal{Z}(b_k) = \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}(Y(p))(kT_e)] \\ &= H(z)U(z) = H(z) \sum_{p=0}^{\infty} z^{-p} = H(z) \frac{1}{1 - z^{-1}}. \end{aligned}$$

La fonction de transfert du filtre numérique cherché est

$$H(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}(\frac{H(p)}{p})(kT_e)]. \quad (6.49)$$

Le recouvrement de spectre dans cette méthode est moins important qu'avec la méthode d'invariance impulsionnelle. Le terme $1/p$ assure une atténuation plus forte des fréquences élevées. L'inconvénient de cette méthode est de faire apparaître des zéros dans $H(z)$ lorsque le filtre analogique associé ne possède que des pôles.

Transformations conformes Lorsque la transmittance $H(p)$ du filtre analogique ne présente que des pôles stables, on pense qu'il est plus intéressant de réaliser le filtre numérique en passant directement par une forme cascade. La méthode consiste alors à déterminer $H(z)$ en remplaçant dans $H(p)$ les termes $p - p_i$ par $1 - e^{p_i T_e} z^{-1}$ et $p - z_i$ par $1 - e^{z_i T_e} z^{-1}$ où les p_i et les z_i représentent les pôles et les zéros de $H(p)$ respectivement. Le $H(z)$ ainsi obtenu a les mêmes pôles que celui obtenu par la méthode de l'invariance impulsionnelle mais les zéros sont différents.

Transformation d'Euler On passe de l'équation différentielle qui définit le filtre analogique à l'équation aux différences en effectuant les opérations suivantes. On associe à la valeur $x'(kT_e)$ de la dérivée l'accroissement $\frac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$. On associe au terme $pX(p)$ le terme $\frac{1-z^{-1}}{T_e} X(z)$. La méthode consiste alors à déduire $H(z)$ en remplaçant dans $H(p)$ la variable p par $\frac{1-z^{-1}}{T_e}$. On obtient un filtre numérique dont le domaine de stabilité est le disque de centre $1/2$ et de rayon $1/2$.

Transformation homographique Cette technique permet d'éviter l'erreur due au repliement du spectre rencontrée dans la méthode de « l'invariance impulsionnelle ». La méthode est fondée sur l'approximation d'une intégrale par la méthode du trapèze. On associe à l'intégrale $y(t) \triangleq \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ l'équation aux différences $y_k = y_{k-1} + T_e \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$. La transformation consiste alors à déduire $H(z)$ en remplaçant dans $H(p)$ la variable p par $\frac{z}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$. Le domaine de stabilité est le disque unité.

6.3.4 Synthèse à partir d'un gabarit donné

Paramètres définissant le gabarit Soit $H(\omega) = M(\omega)e^{jF(\omega)}$, $\omega = 2\pi f$, la réponse en fréquence d'un filtre, où $M(\omega)$ représente le module et $F(\omega)$ la phase de $H(\omega)$. L'atténuation du filtre est définie par :

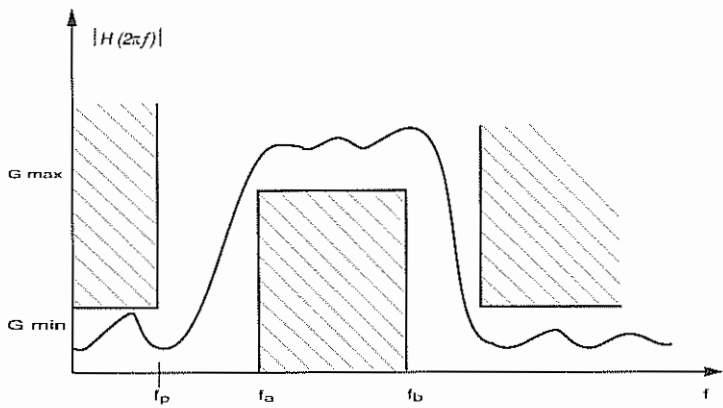
$$A^2(\omega) = \frac{1}{M^2(\omega)} = A^2(0)[1 + K(\omega^2)]$$

où $K(\omega^2)$ est une fonction mesurant la qualité du filtre appelée fonction caractéristique. La bande passante d'un filtre réel est la valeur de la fréquence pour laquelle

l'atténuation est égale à 3dB. Le filtre idéal (passe-bas) transmet toutes les composantes spectrales du signal appartenant à la bande passante $[f_a, f_b]$ sans atténuation ni déphasage et élimine toutes les autres (Bande coupée). Cependant un tel filtre est non causal et n'est donc pas réalisable physiquement. Dans la pratique, on considère des filtres réalisables. De tels filtres sont caractérisés par ce que l'on appelle un gabarit. Pour un filtre passe bande, ce gabarit est défini par la donnée des 5 paramètres : $G_{\min}$, $G_{\max}$, f_p , f_a et f_b vérifiant les conditions suivantes.

- 1. Dans la bande atténuée $[0, f_p]$, on doit avoir $|H(2\pi f)| \leq G_{\min}$.
- 2. Dans la bande passante $[f_a, f_b]$, on doit avoir $|H(2\pi f)| \geq G_{\max}$.
- 3. Dans la bande $[f_b + f_a - f_p, \infty]$, on doit avoir $|H(2\pi f)| \leq G_{\min}$.

Le nombre f_p/f_a et la bande $[f_p, f_p]$ sont appelés respectivement raideur et bande de transition du filtre. Le filtre est dit à bande étroite si $B \triangleq f_b - f_a < 0.1$ et à bande large si $B > 0.5$. La figure ci-dessous donne une courbe qui approxime la fonction de transfert d'un filtre idéal en faisant rentrer le module de cette fonction dans un gabarit donné.



La synthèse consiste souvent à partir d'un filtre analogique dont le gain complexe est défini par une fonction connue mais dépendant d'un certain nombre de paramètres. Il s'agit ensuite de déterminer ces paramètres afin de satisfaire les conditions imposées au filtre. En général, on dispose de trois principales classes de filtres analogiques passe bas : les filtres de Butterworth, les filtres de Chebyshev et les filtres elliptiques. On utilise ensuite des transformations qui conduisent à des filtres passe bande ou passe haut. Les gains complexes des filtres de Butterworth, G_n , et de Chebyshev, H_n , sont donnés par

$$|G_n(j\omega)|^2 \triangleq \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^{2n}} \quad \text{et} \quad |H_n(j\omega)|^2 \triangleq \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega)}$$

où T_n désigne le polynôme de Chebyshev de degré n défini récursivement à l'aide de la relation :

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), n > 2, \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.$$

Distortion due à un recouvrement spectral Si l'on échantillonne une sinusoïde $x(t)$ de fréquence f_0 à la cadence $f_e = 1.25f_0$, on obtient les points $M_k = [kT_e, x(kT_e)]$. Il existe une infinité de sinusoïdes $x_n(t)$ qui passent par ces points, chacune étant définie par une fréquence $f_n = nf_e + |f_0|$. En l'absence d'autres informations sur $x(t)$, la suite de points M_k est toujours interprétée, par un filtre passe-bas de reconstitution, comme provenant de la sinusoïde de plus basse fréquence $f_e - f_0$. Cette distortion qui est due à un recouvrement spectral ne peut pas se produire si l'on respecte le théorème d'échantillonnage. Lorsque le signal analogique $x(t)$ possède un spectre de support non borné et que la fréquence d'échantillonnage introduit un recouvrement important, la déformation subie par le signal reconstitué $y(t)$ peut être assez significative.

Exemple 6.3.2 Approximation d'un filtre antirepliement

L'approximation d'un filtre antirepliement par un Butterworth de degré n est définie par :

$$|G_n(\nu)|^2 \triangleq \frac{1}{1 + (\frac{\nu}{\nu_c})^{2n}}.$$

Ce filtre doit maintenir dans la bande passante une réponse plate optimale avec une atténuation de -3dB pour $\nu = f_c$ et une pente asymptotique d'atténuation de $-20n\text{dB}$ par décade (ou $-6n\text{dB}$ par octave) pour $\nu > f_c$. Le cas $n = 1$ correspond au circuit RC. La figure (6.4) donne des exemples de gains complexes en fonction du paramètre n qui intervient dans la définition.

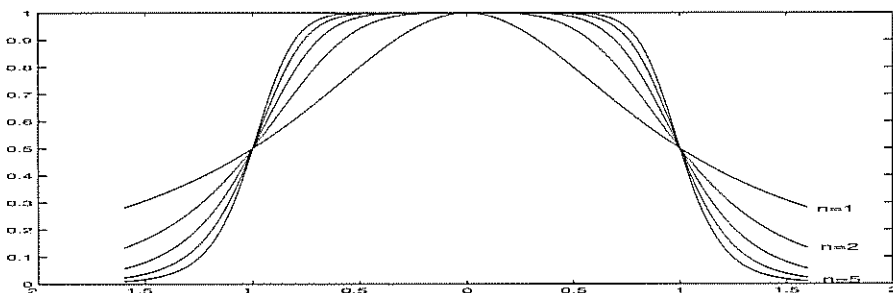


Figure 6.4 Gains complexes d'un filtre de Butterworth en fonction de n .

6.3.5 Diagramme asymptotique de Bode

Dans la pratique, on est conduit à faire des tracés asymptotiques pour le module et l'argument de la réponse en fréquence d'un filtre linéaire. On obtient les diagrammes de Bode. D'une manière générale, la réponse en fréquence $H(j\omega)$ est un produit de termes du type suivant :

$$K = Cte \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2ja\frac{\omega}{\omega_0}}.$$

Le principe du diagramme consiste à tracer les demi-asymptotes du module de $H(j\omega)$ correspondant à $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ et à $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$, l'axe vertical étant gradué en dB.

Fonction du premier ordre Considérons la fonction $H(p)$ qui admet un pôle réel. On a pour une fonction $H(j\omega)$ ayant un numérateur égal à K :

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \text{Log} K - 10 \text{Log} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right).$$

Le diagramme se compose de l'ensemble des deux demi-droites d'équation

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \text{Log} K \quad \text{pour} \quad \frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$$

et

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \text{Log} K - 20 \text{Log} \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{pour} \quad \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1.$$

Ces deux droites se coupent pour $\omega = \omega_0$. Pour obtenir le tracé réel, on utilise les trois points suivants :

$$|H(j\omega_0)|_{dB} = 20 \text{Log} K - 3$$

$$|H(j\omega_0/2)|_{dB} = 20 \text{Log} K - 1$$

$$|H(j2\omega_0)|_{dB} = 20 \text{Log} K \omega_0 - 20 \text{Log} 2\omega_0 - 1.$$

Pour l'argument $A(\omega) = -\text{Arctg}(\omega/\omega_0)$, on a :

$$A(\omega) = -\text{Arg}(K) \quad \text{pour} \quad \omega \ll \omega_0$$

$$= -\text{Arg}\left(\frac{K}{j\omega/\omega_0}\right) = -\pi/2 \quad \text{pour} \quad \omega \gg \omega_0$$

$$A(\omega_0) = -\text{Arg}\left(\frac{K}{1+j}\right) = -\pi/4.$$

Fonction du second ordre Soit $H(p)$ une fonction admettant deux pôles conjugués. On a, pour $H(j\omega)$ ayant un numérateur $K = 1$:

$$|H(j\omega)|_{dB} = 0 \quad \text{et} \quad A(\omega) = 0 \quad \text{pour} \quad \omega \ll \omega_0$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = -40 \operatorname{Log}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad \text{et} \quad A(\omega_0) = -\pi/2 \quad \text{pour} \quad \omega \gg \omega_0$$

$$|H(j\omega_0)|_{dB} = -20 \operatorname{Log} 2a \quad \text{et} \quad A(\omega_0) = -\pi/2.$$

Le terme du second degré provient de la présence de deux pôles conjugués. Pour les termes polynomiaux, les courbes représentant les amplitudes se déduisent de celles tracées par symétrie par rapport à l'axe horizontal $20 \operatorname{Log} K$ et les courbes représentant les arguments se déduisent de celles tracées par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Cas général Tenant compte des propriétés élémentaires des nombres complexes, pour construire le tracé dans le cas général où $H(j\omega)$ comporte plusieurs facteurs élémentaires, on doit effectuer les opérations suivantes.

1. Ordonner les facteurs de $H(p)$ par valeurs croissantes des valeurs ω_i .
2. Tracer le diagramme dans chaque intervalle

$$\frac{1}{\omega_i} < \omega < \frac{1}{\omega_{i+1}}$$

en se plaçant dans les conditions limites suivantes

$$\frac{1}{\omega_k} \ll \omega \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots, i$$

$$\frac{1}{\omega_k} \gg \omega \quad \text{pour} \quad k = i + 1, \dots, n.$$

Construire les tracés asymptotiques du facteur correspondant à la valeur la plus faible de ω_0 .

3. On complète ensuite ce tracé en faisant intervenir successivement les autres facteurs par valeurs croissantes de ω_0 .

EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS

6.1 Bande équivalente de bruit

On considère deux filtres linéaires F_1 et F_2 de réponse en fréquence respectivement $G_1(\nu)$ et $G_2(\nu) = G_1(0)\Pi(\frac{\nu}{B})$, où B désigne une constante à déterminer et G_1 est donné. L'entrée de ces deux filtres étant un bruit blanc réel de densité spectrale de puissance (DSP) $\Gamma_b = \sigma^2$, on note respectivement $y_1(t)$ et $y_2(t)$ les sorties de F_1 et F_2 associées à ce bruit.

1. Donner les expressions des puissances P_1 et P_2 de $y_1(t)$ et $y_2(t)$ en fonction des grandeurs caractéristiques des filtres et du signal d'entrée.
2. Comment doit-on choisir le nombre B pour avoir $P_1 = P_2$? Ce nombre est appelé bande équivalente de bruit du filtre F_1 .

6.2 Filtres en cascade, causalité, stabilité

On considère un filtre à temps discret dont la réponse impulsionnelle est donnée par :

$$h_i = a^i \text{ pour } i \geq 0 \text{ et } h_i = 0 \text{ pour } i < 0.$$

1. Donner la condition sur a pour que le filtre soit stable. On suppose que a vérifie cette condition dans toute la suite du problème.
2. Déterminer la fonction de transfert $H_1(z)$ de ce filtre.
3. Soit x_k la sortie de ce filtre associée à l'entrée u_k définie par :

$$u_k = b^k \text{ pour } 0 \leq k \leq N-1 \text{ et } u_k = 0 \text{ ailleurs}$$

où N est un entier positif et b un réel vérifiant $b > a$. Déterminer les transformées en z , $U(z)$ et $X(z)$ de u_k et x_k .

4. On considère un deuxième filtre de fonction de transfert :

$$H_2(z) = \frac{z-a}{(a+z)(b+z)}, \quad A(\rho_1, \rho_2)$$

et on appelle y_k sa sortie associée au signal x_k . Préciser les bornes ρ_1 et ρ_2 pour lesquelles le filtre ainsi défini est causal.

5. Donner la fonction de transfert $H(z)$ du filtre causal $\mathcal{H}$ qui associe à u_k la sortie y_k .

6. Déterminer la condition sur b pour que $\mathcal{H}$ soit stable au sens strict. On suppose cette condition vérifiée dans la suite du problème.
7. Déterminer la réponse impulsionnelle de $\mathcal{H}$.
8. Donner l'expression de la densité spectrale de puissance $\Gamma_y(\nu)$ du signal y_k en fonction de celle de u_k .

6.3 Filtres équivalents

On considère le signal suivant :

$$x(t) = \cos(2\pi t + \pi/2) \quad \text{pour } t > 0, \quad \text{et } 0 \quad \text{sinon}$$

On échantillonne $x(t)$ à $T_e = 1/4$ et on note $x_k = x(k/4)$.

1. Calculer les valeurs de x_k pour $k = 0, 1, \dots, 10$ et tracer x_k .
2. On introduit le filtre numérique défini par : $y_k = x_k - x_{k-1}$ où y_k est le signal à la sortie du filtre. Calculer les valeurs de y_k pour $k = 0, 1, \dots, 10$ et tracer ce signal.
3. Calculer la réponse impulsionnelle h_k du filtre et la tracer.
4. Calculer le produit de convolution $z_k = x_k * h_k$.
5. Représenter ce filtre en synthétisant directement sa transformée en Z .
6. On considère le signal s_k délivré à la sortie de deux filtres identiques à celui défini ci-dessus et mis en série. Calculer la réponse impulsionnelle g_k du filtre équivalent F2.
7. Calculer la fonction de transfert de F2.

6.4 Causalité et changement de l'origine des temps

On considère un filtre causal à temps discret dont la fonction de transfert est donnée par

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |a| < |z|, \quad |a| < 1.$$

1. Calculer la réponse impulsionnelle h_n de ce filtre puis celle du filtre inverse et préciser la causalité de ces filtres.
2. Calculer les réponses impulsionnelles des filtres de fonction de transfert

$$H_1(z) \triangleq z^4 H(z), |a| < |z| \quad \text{et} \quad H_2(z) \triangleq \frac{z-b}{z-a} \quad |a| < |z| < |b|$$

et étudier leur causalité.

6.5 Filtre éliminateur de fréquence pure

On considère le filtre causal à temps discret qui admet comme fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{1}{1 - (z/a)^2}.$$

1. Donner la condition sur a qui assure la stabilité de ce filtre.
2. Déterminer la réponse impulsionnelle h_n du filtre à temps discret, causal et stable, qui admet $H(z)$ comme fonction de transfert.
3. Donner l'expression de la réponse en fréquence $G(\nu)$ du filtre ainsi construit.
4. On désigne par y_n la sortie de ce filtre associée à l'entrée x_n . Donner la relation de récurrence qui lie les signaux x_n et y_n .
5. On prend $x_n = A_1 e^{2j\pi f_1 n} + A_2 e^{2j\pi f_2 n}$ où les A_i et f_i sont des constantes positives. Peut-on choisir f_1 et A_2 pour que la sortie y_n soit identiquement nulle ?
6. Calculer le module de la T.F de y_n dans le cas $A_1 A_2 \neq 0$ pour $a = 1/2$.

6.6 Filtre éliminateur de bruit

On considère le signal $x(t) = s(t) + b(t)$ où $s(t)$ et $b(t)$ sont des signaux aléatoires à temps continu, réels, centrés, indépendants et de DSP $\Gamma_s(\nu)$ et $\Gamma_b(\nu)$. Le système F dont l'entrée est $x(t)$ et la sortie $y(t)$ est un filtre linéaire de réponse en fréquence $G(\nu)$.

1. Calculer la DSP de $x(t)$ en fonction de $\Gamma_s(\nu)$ et $\Gamma_b(\nu)$.
2. Calculer la densité interspectrale $\Gamma_{ys}(\tau)$ de $x(t)$ et $s(t)$ puis celle, $\Gamma_{ys}(\tau)$, de $y(t)$ et $s(t)$.
3. Calculer la fonction d'autocorrélation $\gamma_e(\tau)$ de l'erreur $e(t) = y(t) - s(t)$ ainsi que la DSP $\Gamma_e(\nu)$.
4. Montrer que minimiser $\gamma_e(0)$ équivaut à minimiser $\Gamma_e(\nu)$ pour chaque fréquence ν fixée.
5. Montrer que le filtre qui minimise $\Gamma_e(\nu)$ a nécessairement une réponse en fréquence $G(\nu)$ réelle.
6. Déterminer en fonction de $\Gamma_s(\nu)$ et $\Gamma_b(\nu)$ la réponse en fréquence $G(\nu)$ minimisant la variance de l'erreur $e(t)$ et donner l'expression σ^2 de cette variance.
7. Déterminer les DSP $\Gamma_s(\nu)$ et $\Gamma_b(\nu)$ telles que la variance σ^2 soit nulle. Calculer le filtre $G(\nu)$ correspondant et discuter son effet sur le bruit.

6.7 Filtrage sélectif de signaux reçus

On note dans la suite $\gamma_z(\tau)$ et $\Gamma_z(\nu)$ respectivement la fonction de corrélation et la DSP d'un signal $z(t)$ aléatoire et stationnaire. Un émetteur transmet simultanément 2 signaux destinés à 2 récepteurs différents notés R1 et R2 et utilisant la même antenne de réception. Le signal émis est de la forme :

$$x(t) = A_1(t)x_1(t) + A_2(t)x_2(t) + b(t)$$

avec

$$x_i(t) = \sin(2\pi \frac{t}{T_e} + \varphi_i) \quad (i = 1, 2)$$

où les φ_i désignent deux phases aléatoires uniformément réparties sur $[0, 2\pi[$, les $A_i(t)$ des signaux stationnaires, centrés de DSP $\Gamma_{A_i}(\nu)$ et $b(t)$ un bruit blanc centré de DSP σ^2 . Toutes les grandeurs aléatoires sont indépendantes.

1. Calculer la fonction de corrélation γ_{x_i} et la DSP Γ_{x_i} de $x_i(t)$. On rappelle que $\sin(a)\sin(b) = [\cos(a-b) - \cos(a+b)]/2$. Discuter la stationnarité de $x(t)$.

2. Calculer la fonction de corrélation γ_x de $x(t)$ en fonction des γ_{A_i} , des γ_{x_i} et de σ^2 . En déduire la DSP de $x(t)$ en fonction des Γ_{A_i} , des Γ_{x_i} et de σ^2 .

3. Chaque récepteur R_i met en œuvre un filtre linéaire F_i dont la sortie est définie par :

$$y_i(t) = \alpha_i x(t) + \beta_i x(t - T_e), \quad (i = 1, 2), \quad T_e > 0$$

où α_i et β_i sont des réels donnés. En déduire la réponse impulsionnelle $h_i(t)$ du filtre F_i (réponse à une impulsion à déterminer sans aucun calcul).

4. Expliciter la réponse en fréquence $G_i(\nu)$ du filtre F_i . Tracer le graphe de $|G_1(\nu)|^2$ dans le cas particulier $\alpha_1 = -\beta_1 = 1$.

5. On suppose que les DSP Γ_{A_i} sont des Dirac à l'origine, soit $\Gamma_{A_1}(\nu) = \Gamma_{A_2}(\nu) = \delta(\nu)$. Expliciter la DSP de $y_1(t)$.

6. Quel est le signal qui a été supprimé par le filtre F_1 ?

7. Comment doit-on choisir les coefficients α_2 et β_2 pour avoir un filtre F_2 qui agit de la même façon que F_1 sur le signal qui n'a pas été supprimé ?

8. On veut échantillonner le signal dans chacun des récepteurs. On suppose que la DSP de chaque $A_i(t)$ est nulle pour $|\nu| > T_e/4$, quelle fréquence doit-on choisir ?

9. Le signal $y_i(t)$ est correctement échantillonné, quel traitement peut-on utiliser pour augmenter le rapport signal sur bruit ?

SOLUTIONS

6.1 1. On a

$$P_i = \int_{-\infty}^{\infty} |G_i(\nu)|^2 \sigma^2 d\nu, \quad \text{donc} \quad P_2 = |G_1(0)|^2 \int_{-B/2}^{B/2} d\nu = B |G_1(0)|^2.$$

2. La bande équivalente de bruit du filtre F_1 est donnée par :

$$B = \frac{1}{|G_1(0)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_1(\nu)|^2 d\nu.$$

6.2 1. Le filtre est stable si, et seulement si, $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h_i| < \infty$. Cette condition équivaut à $|a| < 1$.

2. La fonction de transfert est : $H_1(z) = \sum_0^{\infty} a^i = 1/(1-a)$.

3. On a $U(z) = \sum_0^{N-1} b^i = (1-b^N)/(1-b)$ et $X(z) = H_1(z)U(z)$.

4. Le filtre est causal pour $(\rho_1, \rho_2) = (|b|, \infty)$.

5. On a $Y(z) = H_2(z)H_1(z)U(z)$. D'où $H(z) = H_2(z)H_1(z)$ avec $|b| < |z| < \infty$.

6. Le filtre causal $\mathcal{H}$ est stable si, et seulement si, $|b| < 1$.

7. La réponse impulsionnelle de $\mathcal{H}$ s'obtient en développant en série de Laurent $H(z)$ dans le domaine $|b| < |z| < \infty$.

8. La DSP $\Gamma_y(\nu)$ du signal y_k en fonction de celle de u_k est donnée par la formule des interférences. Soit : $\Gamma_y(\nu) = |H(e^{j2\pi\nu})|^2 \Gamma_u(\nu)$.

6.3 1. On a $x_k = \cos[(k+1)\pi/2]$.

2. On a $y_1 = -1, y_2 = y_3 = 1, y_4 = y_5 = -1, \dots$

3. La réponse impulsionnelle est la sortie associée à l'impulsion égale au symbole de Kronecker. D'où $h_0 = 1, h_1 = -1$ et tous les autres h_k sont nuls.

4. On a $z_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n x_{k-n} = x_k - x_{k-1}$. Donc $z_k = y_k$.

5. Fonction de transfert : $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n} = 1 - z^{-1}$.

6. Signal à la sortie de F2 : $s_k = y_k - y_{k-1} = x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}$. Réponse impulsionnelle : $g_0 = 1, g_1 = -2, g_2 = 1$ et tous les autres g_k sont nuls.

7. Fonction de transfert de F2 : $G(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$.

6.4 1. La réponse impulsionnelle h_n s'obtient en développant $H(z)$ en série dans le domaine $|z| > |a|$. On obtient :

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \sum_0^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{-\infty}^{\infty} h_k z^{-k}.$$

D'où par identification, $h_k = 0$ pour $k < 0$ et $h_k = a^k$ pour $k \geq 0$. Ce filtre est donc causal.

Le filtre inverse a pour fonction de transfert $H_i(z) = 1 - az^{-1}$ et sa réponse impulsionnelle est définie par : $h_0 = 1$, $h_1 = -a$ et $h_k = 0$ ailleurs. Ce filtre est causal.

$$H_i(z) = \frac{z^3}{1 - az^{-1}} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i z^{-i+3} = \sum_{k=-3}^{\infty} a^{k+3} z^{-k}.$$

D'où $h_k = a^{k+3}$ pour $k \geq -3$ et $h_i = 0$ ailleurs. Le filtre est donc non causal mais peut par un simple changement de l'origine des temps devenir causal. Par contre le développement en série de Laurent de $H_2(z)$ sur son domaine conduit à une réponse impulsionnelle h_i pour laquelle il n'existe pas de translation i_0 telle que $h_i = 0$ pour $i < i_0$. Le filtre ainsi défini ne peut pas être causal.

6.5 1. Comme le filtre est causal, il est stable si, et seulement si, les pôles $-a$ et a de $H(z)$ sont de module < 1 . D'où la condition $|a| < 1$.

2. La réponse impulsionnelle h_k du filtre causal et stable est donnée par les termes du développement suivant de $H(z)$:

$$H(z) = -\frac{a^2 z^{-2}}{1 - a^2 z^{-2}} = -a^2 z^{-2} \sum_{0}^{\infty} a^{2k} z^{-2k} = -\sum_{1}^{\infty} a^{2i} z^{-2i}.$$

On obtient : $h_{2k} = -a^{2k}$ et $h_{2k+1} = 0$ pour $k > 0$ et $h_k = 0$ pour $k \leq 0$.

3. La réponse en fréquence est $G(\nu) = H(e^{j2\pi\nu})$.

4. Si $X(z)$ et $Y(z)$ désignent les transformées en Z de x_n et y_n , on a :

$$(1 - a^2 z^{-2})Y(z) = -a^2 z^{-2}X(z)$$

et ceci se traduit par la relation de récurrence suivante entre x_n et y_n .

$$y_n = a^2[y_{n-2} - x_{n-2}].$$

5. Choisissons $A_2 = 0$. On obtient :

$$y_n = \sum_{-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} = A_1 \sum_{-\infty}^{\infty} h_k e^{j2\pi f_1(n-k)} = x_n H(e^{j2\pi f_1}).$$

Une sortie nulle signifie que x_n est une fonction propre du filtre et que le gain du filtre vérifie $G(f_1) = H(e^{j2\pi f_1}) = 0$. Ceci n'est pas possible car $H(z)$ n'admet pas de zéro. Si $A_1 A_2 \neq 0$, une sortie nulle signifie que chaque composante de x_n est une fonction propre du filtre et que l'on a $G(f_1) = G(f_2) = 0$. Cela n'est pas possible d'après l'expression de $H(z)$.

6. On a

$$|Y(\nu)| = |G(\nu)||X(\nu)| = A_1 |G(f_1)|\delta(\nu - f_1) + A_2 |G(f_2)|\delta(\nu - f_2).$$

6.6 1. $\Gamma_x(\nu) = \Gamma_s(\nu) + \Gamma_b(\nu)$ en raison de l'indépendance.

2. Pour la même raison $\Gamma_{xs}(\nu) = \Gamma_s(\nu)$.

3. D'après la formule des interférences on a $\Gamma_{ys}(\nu) = G(\nu)\Gamma_s(\nu)$.

4. En développant les calculs, on obtient :

$$\gamma_e(t) = \gamma_s(\tau) - \gamma_{ys}(\tau) - \gamma_{sy}(\tau) + \gamma_y(\tau).$$

D'où

$$\Gamma_e(\nu) = \Gamma_s(\nu) - \Gamma_s(\nu)[G(\nu) + G^*(\nu)] + [\Gamma_s(\nu) + \Gamma_b(\nu)][G(\nu)]^2.$$

5. Comme $\Gamma_e(\nu) \geq 0, \forall \nu$, minimiser l'erreur, c'est-à-dire l'intégrale de la DSP $\Gamma_e(\nu)$, revient à minimiser cette densité spectrale.

6. Posons $G(\nu) = M(\nu)\exp[j\phi(\nu)]$. Il vient alors

$$\Gamma_e(\nu) = [\Gamma_s + \Gamma_b]M^2 - 2M\cos\phi\Gamma_s + \Gamma_s.$$

Comme $\Gamma_s(\nu) \geq 0$, il faut prendre $\cos\phi$ maximum, d'où $\phi = 0$ et $G(\nu)$ est réel. On a alors $G(\nu) = \Gamma_s(\nu)[\Gamma_s(\nu) + \Gamma_b(\nu)]^{-1}$ et

$$\sigma^2 = \int \frac{\Gamma_s(\nu)\Gamma_b(\nu)}{\Gamma_s(\nu) + \Gamma_b(\nu)} d\nu.$$

7. On a $\sigma^2 = 0$ si $\Gamma_s(\nu)\Gamma_b(\nu) = 0$, ce qui signifie que les bandes de fréquence du signal et du bruit sont disjointes. On trouve $G(\nu) = 1$ si $\Gamma_s(\nu) > 0$ et $G(\nu) = 0$ si $\Gamma_s(\nu) = 0$. Dans ce cas $y(t) = s(t)$, et le bruit est entièrement éliminé.

6.7 1. Calculons tout d'abord la fonction de corrélation de x_i . On a

$$\gamma_{x_i}(\tau) = E[\sin(\frac{2\pi t}{iT_e} + \varphi)\sin(\frac{2\pi(t-\tau)}{iT_e} + \varphi)] = \frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi\tau}{iT_e}).$$

D'où

$$\Gamma_{x_i}(\nu) = \frac{1}{4}[\delta(\nu - \frac{1}{iT_e}) + \delta(\nu + \frac{1}{iT_e})].$$

2. Comme les signaux sont centrés et tous indépendants, on obtient

$$\gamma_x(\tau) = \gamma_{A_1}(\tau)\gamma_{x_1}(\tau) + \gamma_{A_2}(\tau)\gamma_{x_2}(\tau) + \sigma^2\delta(\tau)$$

et donc

$$\Gamma_x(\nu) = \Gamma_{A_1}(\nu) * \Gamma_{x_1}(\nu) + \Gamma_{A_2}(\nu) * \Gamma_{x_2}(\nu) + \sigma^2$$

Finalement

$$\Gamma_x(\nu) = \frac{1}{4} \sum_1^2 [\Gamma_{A_i}(\nu - \frac{1}{iT_e}) + \Gamma_{A_i}(\nu + \frac{1}{iT_e})] + \sigma^2.$$

3. On sait que la réponse impulsionnelle est la sortie associée à une impulsion de Dirac. D'où

$$h_i(t) = \alpha_i \delta(t) + \beta_i \delta(t - T_e).$$

4. Dans le cas particulier $\alpha_1 = -\beta_1 = 1$, on obtient

$$G_1(\nu) = 1 - e^{j2\pi T_e \nu}, \quad |G_1(\nu)|^2 = 4 \sin(\pi \nu T_e)^2.$$

5. Si la DSP de chaque $A_i(t)$ est un Dirac, on a

$$\begin{aligned} \Gamma_x(\nu) &= \delta(\nu) * \Gamma_{x_1}(\nu) + \delta(\nu) * \Gamma_{x_2}(\nu) + \sigma^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[\delta\left(\nu - \frac{1}{T_e}\right) + \delta\left(\nu + \frac{1}{T_e}\right) \right] + \frac{1}{4} \left[\delta\left(\nu - \frac{1}{2T_e}\right) + \delta\left(\nu + \frac{1}{2T_e}\right) \right] + \sigma^2 \end{aligned}$$

Comme, le signal filtré y_1 est la convolution de $x(t)$ par la réponse impulsionnelle h_1 , la formule des interférences donne :

$$\Gamma_{y_1}(\nu) = |G_1(\nu)|^2 \Gamma_x(\nu) = 4 \sin(\pi \nu T_e)^2 \Gamma_x(\nu).$$

On obtient

$$\begin{aligned} \Gamma_{y_1}(\nu) &= \sin(\pi)^2 \delta\left(\nu - \frac{1}{T_e}\right) + \sin(\pi)^2 \delta\left(\nu + \frac{1}{T_e}\right) \\ &\quad + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \delta\left(\nu - \frac{1}{2T_e}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \delta\left(\nu + \frac{1}{2T_e}\right) + \sigma^2 \sin(\pi \nu T_e)^2 \\ &= \delta\left(\nu - \frac{1}{2T_e}\right) + \delta\left(\nu + \frac{1}{2T_e}\right) + \sigma^2 \sin(\pi \nu T_e)^2. \end{aligned}$$

6. Le signal $x_1(t)$ est annulé à la sortie du filtre G_1 . Le récepteur F_1 ne reçoit donc que le signal $x_2(t)$ et le bruit.

7. On peut faire le même traitement en choisissant un G_2 qui s'annule en $\frac{1}{2T_e}$ et $-\frac{1}{2T_e}$. Il suffit de choisir pour cela $\alpha_2 = \beta_2 = 1$. Le récepteur ainsi déterminé ne reçoit que $x_1(t)$ et le bruit. On peut vérifier que les filtres G_1 et G_2 ainsi construits sont en quadrature puisque

$$|G_1(\nu)|^2 + |G_2(\nu)|^2 = 4.$$

8. Si $\Gamma_{x_i}(\nu) = 0$ pour $\nu \leq 4/T_e$, il faut échantillonner à une fréquence $> 2/T_e$.

9. Éliminer le bruit à l'aide d'un filtre passe bande.

Bibliographie

- [1] BELLANGER M. – *Traitement Numérique du Signal*, Dunod, Paris, 2002.
- [2] BLANC-LAPIERRE A. and FORTET R. – *Théorie des fonctions aléatoires*, Masson, Paris, 1953.
- [3] BOASHASH B. and RISTICH B. – Polynomial Wigner-Ville distributions and Time-Varying polyspectra, in B. Boashash and E. J. Powers and A. M. Zoubir, editors, *Higher Order Statistical Signal Processing*, Longman Cheshire, Melbourne, Australia, 1993.
- [4] BOCHNER S. – *Lectures on Fourier Integrals*, Univ. Press, Translated from the original by M. Tenenbaum and H. Pollard, Princeton, 1959.
- [5] BONNET G. – Sur certaines propriétés statistiques de fonctions aléatoires issues de transformations non-linéaires, *C. R. Acad. Sc.*, 258 : 4917-4920, 1964.
- [6] CRAMER H. and LEADBETTER M. R. – *Stationary and Related Stochastic Processes*, J. Wiley, New York, 1967.
- [7] DOOB J. L. – *Stochastic Processes*, J. Wiley, New York, 1953.
- [8] BENIDIR M. et BARRET M. – *Stabilité des filtres et des systèmes linéaires*, Dunod, Paris, 1999.
- [9] GARDNER W.A. – *Statistical Spectral Analysis : A Non Probabilistic Theory*, Printice Hall, New-York, 1987.
- [10] HAYKIN S. – Springer-Verlag, editor, *Nonlinear Methods for Spectral Analysis*, 1983.
- [11] LOEVE M., *Probability Theory II, fourth edition*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [12] NYQUIST H. – Certain Topics of Telegraph Transmission Theory, *Trans.Am. Inst. Elect. Eng.*, 47 : 617-644, 1928.
- [13] PAPOULIS A. – *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd, 1965.
- [14] PAPOULIS A. – *Signal Analysis*, Mc Graw-Hall, N.Y, 1984.
- [15] PICINBONO B. – *Théorie des Signaux et Système*, Dunod, Paris, 1989.
- [16] PICINBONO B. – *Signaux aléatoires Tome 1*, Dunod, Paris, 1994.
- [17] PROAKIS J.G. – *Digital Communications, 2nd ed.*, Mc Graw-Hall, N.Y, 1989.
- [18] RICE, *Mathematical Analysis of Random Noise*.
- [19] RUDIN W. – *Analyse réelle et complexe*, Dunod, Paris, 1998.
- [20] SAPORTA G. – *Probabilités Analyse des Données et Statistiques*, Editions Technip, Paris, 1990.

Index

A

σ -algèbre, 99, 101
anneau de convergence, 56

B

bande de convergence, 53
bande équivalente de bruit, 197
Bienaymé-Tchebyshev, 113
blanchiment d'un signal, 196
bruit
 additionnel, 205
 blanc à temps discret, 168
 blanc complexe, 185
 blanc gaussien, 185
 blanc théorique, 184
 blanc uniformément réparti, 185
 de grenaille, 205
 thermique, 205
Butterworth, 73

C

causalité, 232
chaîne de Markov, 189
codage, 74
coefficients de Fourier, 10
commandabilité, 241
condition
 de Nyquist, 79
 de Shannon-Nyquist, 70
convergence
 en loi, 145
 en moyenne quadratique, 144
 presque sûre, 144
convolution, 7
corrélation, 47

cosinus surélevé, 80
covariance, 130, 171, 172
cumulant d'ordre, 116
cumulants, 114
cyclostationnarité, 198

D

décroissance rapide, 17
densité
 de probabilité, 109
 de probabilité conjointe, 124
 spectrale, 47
 spectrale de puissance, 48, 178, 195
détection synchrone, 71
diagramme des phases, 71
Dirac (distribution), 19, 32
distribution
 de Dirac, 7
 spectrale, 190
 tempérée, 18
durée moyenne, 70

E

écart type, 105, 111, 113
échelon unité, 20
effectif partiel, 105
effectifs marginaux, 122
égalité de Parseval, 11, 13, 14
ensemble fondamental, 98
enveloppe complexe, 77
équation
 de Yule-Walker, 208
 normale, 208
espace
 probabilisable, 97
 probabilisé, 99, 101

produit, 102

espérance

- conditionnelle, 133
- mathématique, 111, 126
- totale, 133

estimateur

- (précision d'un), 198
- convergent, 198
- sans biais, 198

estimation linéaire, 210

événement(s)

- aléatoire, 98
- certain, 98
- complémentaires, 102
- élémentaire, 99
- impossible, 98
- incompatibles, 102
- indépendants, 104

excursion maximale de fréquence, 81

expérience aléatoire, 97

F

factorisation

- d'un spectre, 196
- spectrale, 196

filtrage, 50, 51

filtre(s), 5

- adapté, 51
- antirepliement, 73
- dérivateur, 51
- de Butterworth, 250
- de Chebyshev, 250
- dynamique, 8
- elliptiques, 250
- linéaire, 7
- RII, 247
- RIF, 247

fonction

- aléatoire, 168
- caractéristique, 114, 132, 137
- d'autocorrélation, 171, 172
- d'intercorrélation, 172
- de corrélation, 171, 172
- de répartition, 107, 123, 136

- de transfert, 8, 32, 231
- définie non négative, 116
- déterministe, 168
- génératrice, 116
- propre, 32

formule

- d'échantillonnage, 70, 71, 84
- de Bayes, 103
- de Nyquist, 205
- des interférences, 50, 193, 195
- sommateur de Poisson, 24, 79, 84

fraction continue, 234

fréquence(s)

- conditionnelle, 122
- marginale, 122
- partielles, 122

G

gain complexe, 8

H

Hamming, 16

Hanning, 16

heaviside, 20

I

inégalité

- de Bessel, 10
- de Schwarz, 32, 130

intercorrélation, 47, 48

interférences entre symboles, 79

interspectre symbolique, 61

L

largeur de bande, 51, 70

lemme de Cauchy, 57

loi

- binomiale, 117
- conditionnelle, 125
- conjointe, 123
- de Benoulli, 117
- de Cauchy, 112
- de Poisson, 119

de probabilité, 106
 exponentielle, 120
 marginale, 125
 multinomiale, 118
 normale, 120
 temporelle, 168
 uniforme, 117

M

matrice

compagnon, 244
 de covariance, 138
 de transfert, 241
 de transition, 239
 définie non négative, 138

maximum

a posteriori, 213
 de vraisemblance, 212

modulation, 75, 82

d'amplitude, 76, 77
 de fréquence, 76
 de phase, 76

moment(s), 114

centré, 115
 factoriels, 117
 statistiques, 171

moyenne, 105

multiplexage(s), 75
 en quadrature, 71

O

observabilité, 242

P

Paley-Wiener (proposition), 71

pas de quantification, 74

Peigne de Dirac, 22

périodogramme, 179

moyenné, 179

phase minimale, 232

polynôme

de Chebyshev, 251
 de Hurwitz, 233

porteuse, 75

prédiction, 210

probabilité(s), 100, 101

conditionnelle, 103

uniforme, 99

conditionnelles, 122

processus de Poisson, 181

produit scalaire, 13

promenade aléatoire, 178

pseudo-spectre, 201

Q

quantification, 74

R

rapport signal à bruit, 52

recouvrement spectral, 73

réponse impulsionnelle, 7

représentation

fréquentielle, 9

symbolique, 9, 54, 57

résolution, 29

S

seconde fonction caractéristique, 116

signal

à bande limitée, 70

à moyenne mobile, 208

aléatoire, 167

aléatoire à temps continu, 168

aléatoire à temps discret, 167

analytique, 20

autorégressif, 207

codé, 74

continu, 186

différentiable, 186

échantillonné, 69

en quadrature, 21

ergodique, 186

gaussien, 180

harmonisable, 190

markovien, 188

modulant, 75

modulé, 75, 76

numérique, 74
 périodique, 22
 spectre, 47
 d'un signal périodique, 11
 de puissance, 178
 de raies, 11, 47
 symbolique, 62
 stabilité, 232
 stationnarité
 au sens large, 175
 stricte, 174
 statistiques à 2 dimensions, 121
 structure canonique, 246
 support compact, 17
 système
 analogique, 4
 causal, 4
 complet, 102
 instantané et système à mémoire, 5
 invariant, 5
 orthonormal, 10

T

T.F et convolution cycliques, 30
 table de Routh, 235
 théorème d'échantillonnage, 70

transformée
 de Fourier, 12
 de Fourier Discrète, 26
 de Fourier Rapide, 28, 29
 de Hilbert, 21
 de Laplace, 53
 en Z, 53, 57
 transmittance 231, 232
 tribu, 99, 101
 de Bernoulli, 101
 fine, 101
 grossière, 101

V

valeurs principales, 20
 variable
 aléatoire, 105
 aléatoire continue, 108
 aléatoire discrète, 108
 certaine, 106
 variance, 105, 111, 113
 conditionnelle, 133
 totale, 133
 vecteur
 aléatoire, 136
 gaussien, 140
 vraisemblance, 212

045984 - (I) - (1,3) - OSB 80° - LAS - SGS

- Achevé d'imprimer sur les presses de la
 SNEL S.A.
 rue Saint-Vincent 12 - B-4020 Liège
 tél. 32(0)4 344 65 60 - fax 32(0)4 343 77 50
 août 2002 - 25864

Dépôt légal : août 2002

imprimé en Belgique