

Damien Gobin • Johan Leray

MATHS

DU LYCÉE À LA LICENCE

Toutes les bases pour réussir



**COURS
ET 250
EXERCICES
CORRIGÉS**

DUNOD

Direction et conception graphiques de la couverture : Nicolas Wiel - XXX (graphiste)
Crédits iconographiques pour la couverture:

© Dunod, 2024
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-087344-9

Avant-propos

Ce livre est le fruit des enseignements de mathématiques que nous avons dispensé dans la filière TREMP-Li-N de 2021 à 2023, ainsi qu'en première année de filières scientifiques à Nantes Université. Il se veut donc un support de transition entre le lycée et l'enseignement supérieur. Dans cette optique, nous avons pris le parti de présenter des mathématiques de niveau lycée ou début de première année universitaire, dans un style s'approchant davantage d'un cours de licence 1.

Cet ouvrage s'adresse donc à plusieurs types de lecteurs : l'étudiant ayant obtenu un baccalauréat sans faire la spécialité mathématiques et désireux de suivre des études scientifiques, l'étudiant de Terminale souhaitant préparer son entrée à l'université ou encore l'étudiant de première année universitaire ayant besoin de revoir quelques bases du lycée.

Comment ce livre est-il organisé ? L'enchaînement des chapitres construit le cheminement mathématique : les premiers chapitres présentent des bases indispensables pour la suite et chaque chapitre utilise ensuite les connaissances présentées auparavant pour en développer de nouvelles. Les principales thématiques mathématiques sont donc abordées alternativement, en fonction de la progression.

- Les trois premiers chapitres sont des chapitres calculatoires. Des rappels de calcul basiques sont présentés dans le chapitre 1, et la résolution d'équations et d'inéquations, comme vue au lycée, dans le chapitre 2. Enfin, dans le chapitre 3, nous nous intéressons à la résolution de systèmes linéaires à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, traditionnellement enseignée en première année universitaire.
- Les chapitres 4 à 9 présentent des thématiques importantes du lycée, que sont l'étude des suites, la géométrie plane et spatiale, et l'étude des fonctions réelles à une variable réelle. Une importance toute particulière a été donnée à cette dernière thématique qui constitue indéniablement le point central de l'enseignement des mathématiques de Terminale et de première année universitaire.
- Cet ouvrage s'achève par deux chapitres qui, selon nous, doivent permettre de faciliter votre accession sereine aux études supérieures. L'avant-dernier chapitre traite de l'intégration, avec un développement plus important que celui fait en classe de Terminale, notamment par son utilisation pour la résolution d'équations différentielles. Enfin, le dernier chapitre traite des nombres complexes. Il s'agit d'une thématique

particulièrement importante de part son lien entre le calcul analytique et la géométrie mais aussi par ces nombreuses applications en physique. Finalement, vous trouverez une courte annexe sur la théorie des ensembles dont certaines notions sont utilisées dans ce livre.

Ce que ne contient pas ce livre. Nous avons fait le choix de ne pas aborder certaines thématiques mathématiques qui ont pourtant leur place au lycée. Ainsi, ce livre ne contient aucun chapitre concernant la combinatoire et les probabilités, l'arithmétique ou le calcul matriciel. En effet, l'ensemble de ces thématiques sont traditionnellement revue lors du premier cycle universitaire, sans prérequis. Enfin, il ne sera fait aucune mention d'approche numérique ou d'algorithmie bien qu'il s'agisse d'un champ d'application important des mathématiques.

Comment utiliser ce livre ?

- Vous pouvez lire ce livre dans le désordre : en fonction de votre maîtrise des sujets, les premiers chapitres peuvent vous sembler superflus. Dans ce cas, n'hésitez pas à vous diriger directement vers le chapitre qui vous intéresse.
- Lorsque vous étudiez un chapitre, prenez le temps de le lire attentivement et de faire les exercices proposés au fur et à mesure : ils permettent d'assimiler les notions présentées. Comme en sport ou en musique, les mathématiques demandent de la répétition pour progresser. Tous les corrigés des exercices sont disponibles sur la page de présentation de l'ouvrage sur dunod.com.
- Si vous rencontrez des difficultés, n'hésitez pas à revenir sur les chapitres précédents pour reprendre les bases que vous ne maîtriserez pas.
- Nous avons également pris le parti de faire références à quelques ouvrages qui nous paraissent importants en utilisant une balise du type [Ref] renvoyant à la bibliographie présente à la fin de cet ouvrage.

Il ne nous reste plus à présent qu'à vous souhaiter bonne lecture et surtout amusez-vous !

Remerciements. Les auteurs remercient les éditions Dunod, en particulier Laëtitia Jammet, de la confiance accordée. Ils remercient également leurs collègues ayant contribué par leurs interactions à la création de cet ouvrage : Nathalie Burguin, Alexandre Charron, Laurent Piriou, Valentin Samoyeau. Enfin, ils remercient leurs proches qui les ont soutenu pendant la rédaction de ce livre.

Table des matières

1	Rudiments de calcul	5
1.1	Ensembles de nombres et opérations	6
1.2	Développement et factorisation	11
2	Équations et inéquations	15
2.1	Résolution d'équations	15
2.2	Équations affines	17
2.3	Équations du second degré	18
2.4	D'autres types d'équations	25
2.5	Intervalles et inéquations	26
3	Résolution de systèmes linéaires	35
3.1	Systèmes linéaires à deux inconnues	35
3.2	Systèmes linéaires à trois inconnues	47
4	Vecteurs, droites, plans	57
4.1	Vecteurs du plan et de l'espace	58
4.2	Géométrie du plan affine	65
4.3	Géométrie de l'espace affine	76
4.4	Orthogonalité	93
5	Introduction aux fonctions réelles d'une variable réelle	103
5.1	Définitions et exemples	103
5.2	Composition de fonctions	106
5.3	Représentation graphique d'une fonction	109
5.4	Propriétés et illustrations graphiques	112
6	Suites réelles	123
6.1	Généralités sur les suites	124
6.2	Suites et raisonnement : la récurrence	130
6.3	Convergence de suites	134
6.4	Étude des suites récurrentes	148
6.5	Cas particuliers de suites usuelles	155

7	Longueur, angle et trigonométrie	163
7.1	La distance euclidienne	163
7.2	La notion d'angle	172
7.3	Trigonométrie	181
8	Études de fonctions réelles	189
8.1	Limites	189
8.2	Continuité	209
8.3	Dérivabilité	214
8.4	Schéma d'étude de fonction	226
9	Fonctions de références	235
9.1	La fonction partie entière	235
9.2	La fonction exponentielle	237
9.3	La fonction logarithme	245
9.4	Fonctions puissances et exponentielle de base a	251
10	Intégration	255
10.1	Intégrale d'une fonction continue sur un segment	255
10.2	Primitives	259
10.3	Intégration par parties	265
10.4	Changement de variable	269
10.5	Application à la résolution d'équations différentielles	272
11	Nombres complexes	279
11.1	Forme algébrique	279
11.2	Module, argument et forme trigonométrique	286
11.3	Exponentielle complexe et forme exponentielle	292
11.4	Résolution d'équations polynomiales	297
11.5	Applications des nombres complexes	304
A	Éléments de théorie des ensembles	307
A.1	Généralités et définitions	307
A.2	Opérations sur les ensembles	309
	Index	312

CHAPITRE 1

Rudiments de calcul

L'objectif de ce chapitre est de rappeler les règles de calcul élémentaires entre nombres réels. La maîtrise de ces différentes règles constitue un prérequis indispensable à la poursuite d'études scientifiques et plus généralement à la pratique des mathématiques au quotidien. Nous allons ainsi redéfinir les ensembles de nombres usuels (illustrés sur la figure 1.1) ainsi que les différentes opérations de calcul sur ces ensembles. Il va sans dire que si vous désirez progresser, vous devez absolument vous abstenir d'utiliser une calculatrice.

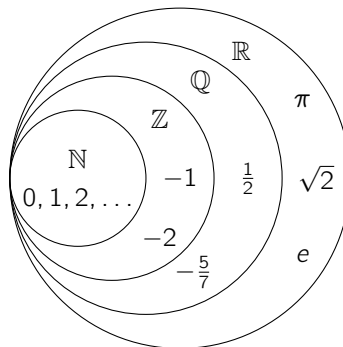


Figure 1.1 – Des ensembles de nombres

Nous aurons besoin dans ce chapitre de plusieurs notions en lien avec la théorie des ensembles. Nous ne donnerons que peu de détails à ce sujet dans ce chapitre mais si vous êtes intéressé nous vous renvoyons à l'annexe A.

1.1. Ensembles de nombres et opérations

1.1.1 Nombres entiers et premières opérations

Commençons par introduire les ensembles de nombres entiers. Pour rappel, $\mathbb{N}$ désigne **l'ensemble des nombres entiers naturels** :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Les deux opérations usuelles sur les nombres entiers naturels sont la somme et le produit qui sont définis, étant donnés deux nombres entiers naturels a et b , de la façon suivante.

- La somme de a et b est définie par $a + b = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_a + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_b$.
- Le produit de a et b est défini par $a \times b = \underbrace{a + a + \dots + a}_b$ et on pourra se convaincre que $a \times b = \underbrace{b + b + \dots + b}_a$.

Remarques.

- Il est d'usage de noter ab le produit $a \times b$ pour simplifier les écritures.
- Dans les calculs utilisant des sommes et des produits il faudra faire particulièrement attention aux règles de priorités de calculs entre les opérations : on commence toujours par calculer les produits avant les sommes. Si vous souhaitez calculer une somme avant un produit, il faut impérativement l'indiquer en utilisant un parenthésage ! Par exemple, on a $(2 + 3) \times 5 = 5 \times 5 = 25$.

Rappelons à présent que $\mathbb{Z}$ désigne **l'ensemble des nombres entiers relatifs** :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Cet ensemble est construit à partir de $\mathbb{N}$ en ajoutant pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$ non nul son symétrique, c'est-à-dire un nombre noté $-n$ tel que $n + (-n) = 0 = -n + n$.

Remarques.

- On parlera régulièrement de nombres entiers sans précisions supplémentaires pour désigner des entiers relatifs.
- La somme et le produit définis précédemment pour les entiers naturels s'étendent de façon naturelle à l'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

1.1.2 Nombres entiers et calcul de puissances

Définition 1.1 – Puissance. Soit n un nombre entier naturel non nul et soit a un nombre entier relatif. On note a^n , et on lit « a puissance n », le nombre

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ termes}}.$$

De plus, pour tout nombre entier relatif a , on pose $a^0 = 1$ (en particulier $0^0 = 1$).

Exemple. Voici la liste des premières puissances de 2 :

- | | | | |
|---------------|----------------|-----------------|---------------------|
| ○ $2^1 = 2$, | ○ $2^4 = 16$, | ○ $2^7 = 128$, | ○ $2^{10} = 1024$, |
| ○ $2^2 = 4$, | ○ $2^5 = 32$, | ○ $2^8 = 256$, | ○ $2^{11} = 2048$, |
| ○ $2^3 = 8$, | ○ $2^6 = 64$, | ○ $2^9 = 512$, | ○ $2^{12} = 4096$. |

Exercice 1.2. Calculer les puissances suivantes :

- | | | | |
|------------|---------------|---------------|---------------|
| 1. 3^3 , | 3. $(-1)^2$, | 5. -2^2 , | 7. $(-1)^4$, |
| 2. 0^3 , | 4. $(-2)^2$, | 6. $(-1)^3$, | 8. $(-1)^5$. |

Proposition 1.3 – Règles de calcul avec les puissances. Soient a, b deux nombres entiers relatifs et m, n deux nombres entiers naturels. Alors,

- | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|---|
| ○ $a^m \times b^m = (ab)^m$, | ○ $a^m \times a^n = a^{m+n}$, | ○ $(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$. |
|-------------------------------|--------------------------------|---|

Exemple. On cherche à calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $(-1)^n$ en fonction de n . Fixons un entier naturel n . On distingue alors deux cas :

- ou bien n est pair, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$, et alors $(-1)^n = (-1)^{2k} = ((-1)^2)^k = 1^k = 1$,
- ou bien n est impair, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$, et alors $(-1)^n = (-1)^{2k+1} = (-1) \times (-1)^{2k} = (-1) \times ((-1)^2)^k = (-1) \times 1^k = -1$.

On a donc montré que pour tout entier naturel n , on a $(-1)^n = 1$ si n est pair et $(-1)^n = -1$ si n est impair.

Exercice 1.4. Écrire sous la forme a^n , a et n des entiers naturels, les nombres suivants :

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|----------------|----------------------------------|
| 1. $3^3 \times 5^3$, | 2. $3^3 \times 3^5$, | 3. $(3^3)^5$, | 4. $2^3 \times 3^3 \times 6^2$. |
|-----------------------|-----------------------|----------------|----------------------------------|

1.1.3 Décomposition des nombres entiers

Définition 1.5 – Nombres premiers. Un entier naturel n est dit **premier** si $n \geq 2$ et si les seules décompositions de n en un produit de deux nombres entiers naturels $n = ab$ sont données par $a = 1$ et $b = n$ ou $a = n$ et $b = 1$.

Remarques.

- On notera que, par définition, 1 n'est pas un nombre premier.
- Si vous avez l'habitude du langage de l'arithmétique vous pouvez reformuler la définition précédente de la façon suivante : un nombre entier naturel n est dit premier s'il possède exactement deux diviseurs à savoir 1 et lui-même. On retrouve donc ici que 1 n'est pas premier.

Exemple. Les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 sont des nombres premiers. Pour faire la liste des nombres premiers inférieurs à un nombre fixé, on peut utiliser le crible d'Ératosthène (pour une présentation de ce crible, on pourra consulter [Wikc]). De plus, pour savoir si un nombre entier positif est un nombre premier on notera qu'il suffit de tester s'il est divisible par un nombre compris entre 2 et $\sqrt{n}$.

Les nombres premiers sont d'un très grand intérêt. Ils sont, par exemple, utilisés de façon cruciale en cryptographie (par exemple pour le protocole RSA, voir [Wikb]). Leur principal usage dans ce chapitre découle du résultat suivant.

Proposition 1.6 – Décomposition en facteurs premiers. *Pour tout entier $n \geq 2$, il existe une unique famille de couples $(p_1, k_1), \dots, (p_r, k_r)$, avec*

- $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers distincts et classés dans l'ordre croissant,
- $k_1, \dots, k_r$ des entiers naturels non nuls,

telle que

$$n = p_1^{k_1} \times p_2^{k_2} \times \dots \times p_r^{k_r}.$$

Exemple. On a la décomposition

$$2160 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^4 \times 3^3 \times 5.$$

Exercice 1.7 – Décomposition d'entiers. Donner la décomposition en produit de nombres premiers des nombres suivants :

1. 1000,

2. 625,

3. 564,

4. 89.

1.1.4 Nombres rationnels et calcul fractionnaire

On désigne par $\mathbb{Q}$ l'**ensemble des nombres rationnels**, c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres qui s'écrivent sous la forme d'un quotient (d'une fraction) d'un entier relatif par un entier relatif non nul. Autrement dit,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Propriété 1.8 – Simplification d'une fraction. Soient a un nombre entier et b un nombre entier non nul. Alors, pour tout nombre c également non nul, on a :

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{1} = a.$$

Exemple. On a $\frac{21}{6} = \frac{7 \times 3}{2 \times 3} = \frac{7}{2}$ ou encore $-\frac{242}{44} = -\frac{11 \times 11 \times 2}{2 \times 2 \times 11} = -\frac{11}{2}$.

La simplification de fraction est importante car elle permet d'écrire les nombres rationnels sous forme **irréductible**, c'est-à-dire avec le dénominateur le plus petit possible.

Définition 1.9 – Fractions irréductibles. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si elle ne peut pas être simplifiée, c'est-à-dire s'il n'existe pas de nombre entier naturel c différent de 1 tel que $a = ca'$ et $b = cb'$ avec $a', b' \in \mathbb{Z}$.

Exemple. Le nombre $\frac{21}{6}$ n'est pas irréductible car $21 = 3 \times 7$ et $6 = 3 \times 2$ (on a ici $c = 3$). En revanche, $\frac{7}{2}$ (qui est en réalité égale à $\frac{21}{6}$) est bien irréductible.

Propriété 1.10 – Position du signe moins. Soient a et b des nombres entiers, $b \neq 0$, on a

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Propriété 1.11 – Addition de deux fractions. Soient a, b, c et d des nombres entiers avec b et d non nuls.

- L'addition et la soustraction de deux fractions de même dénominateur sont données par

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

- L'addition de deux fractions ayant des dénominateurs différents est donnée par

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Exemple. On a $\frac{5}{7} + \frac{4}{3} = \frac{5 \times 3}{7 \times 3} + \frac{4 \times 7}{3 \times 7} = \frac{15}{21} + \frac{28}{21} = \frac{15+28}{21} = \frac{43}{21}$.

Propriété 1.12 – Produit, puissance et quotient de deux fractions. Soient a, b, c et d des nombres réels avec b et d non nuls.

- La multiplication de deux fractions est donnée par

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

En particulier, pour tout entier naturel n , $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

- Supposons également que $c \neq 0$. La division de deux fractions est donnée par

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Exercice 1.13. Écrire sous forme d'une fraction irréductible les nombres rationnels suivants :

1. $\frac{1}{2} + \frac{3}{5},$

4. $\frac{11}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2},$

7. $\frac{(-2)^4 \times (-3)^7}{4^3 \times 9^4},$

2. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3},$

5. $4 \times \left(\frac{2}{4} + \frac{9}{5}\right),$

8. $\frac{\frac{2}{3} + \frac{9}{4}}{\frac{2}{3} - \frac{9}{4}}.$

3. $\frac{2}{3} \times \frac{9}{4},$

6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5},$

Définition 1.14 – Retour aux puissances. Soient a un nombre entier non nul et m et n deux entiers relatifs, alors

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

En particulier, si $m = 0$ et $n = 1$ on a $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Remarque. Ces définitions s'étendent bien entendu au cas où a est un nombre rationnel et plus largement un nombre réel. Dans le cas d'un nombre rationnel, on pourra par exemple utiliser la règle de calcul sur les puissances vue dans la propriété 1.12 pour se ramener à du calcul avec les nombres entiers.

Exercice 1.15. Simplifier les expressions suivantes :

1. $(7^{-24} \times 7^{-26} \times 7^{51})^2,$

4. $(6)^5 \times 3^{-3} \times 2 \times 2^{-4} \times 3^{-1},$

2. $\frac{(-4)^2}{(-4)^4},$

5. $\frac{5^{12} \times 10^{-3} \times 3^8}{10^{-5} \times 3^8 \times 5^{10}},$

3. $(5^{-4} \times 5^5)^3,$

6. $8 \times (35)^5 \times \frac{5^2 \times 7^3}{7^4 \times 5^5} \times (7^2)^2.$

1.1.5 Nombres réels et racine carrée

On désigne par $\mathbb{R}$ l'**ensemble des nombres réels**, c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres que vous avez rencontrés au collège ou au lycée. Cet ensemble est nettement plus grand que $\mathbb{Q}$ (par exemple $\pi \in \mathbb{R}$ mais $\pi \notin \mathbb{Q}$) et sera le plus gros ensemble que nous considérerons dans ce chapitre. Pour plus d'informations sur la construction de l'ensemble des nombres réels, nous vous conseillons de consulter [Tao22, Chapitre 5].

Définition 1.16 – Racine carrée. Soit a un nombre réel **positif**. La racine carrée de a , notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre réel positif qui, lorsqu'on le multiplie par lui-même est égal à a . Autrement dit, $\sqrt{a} \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.

À retenir. L'égalité $\sqrt{(a)^2} = a$ n'est vraie que pour a **positif** ! Par exemple, on a $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ qui est différent de -3 .

Propriété 1.17 – Opérations sur les racines carrées. Soient a et b deux nombres réels positifs.

- La multiplication de racines carrées est donnée par $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
- La division de racines carrées est donnée, si $b \neq 0$, par $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Exemple. On a $\sqrt{120} = \sqrt{4 \times 5 \times 6} = 2\sqrt{5} \times \sqrt{6}$ ou encore $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$.

À retenir. Il faudra prendre garde au fait que $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Par exemple, on a $\sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 \neq 2\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}$.

Exercice 1.18. Écrire le plus simplement possible les expressions suivantes :

1. $(2\sqrt{3})^2$,
2. $4\sqrt{7} - \sqrt{63}$,
3. $\frac{1}{\sqrt{7}} + \sqrt{28}$,
4. $\sqrt{(1-\pi)^2}$.

1.2. Développement et factorisation

1.2.1 Développer une expression

Développer une expression consiste à transformer un produit en une somme de plusieurs termes. Soient a, b, c, d et k des nombres réels. La **distributivité de la multipli-**

cation par rapport à l'addition est donnée par

$$k(a + b) = ka + kb.$$

On a ici **développé** l'expression $k(a + b)$ en $ka + kb$. En prenant $b = -c$, on obtient $k(a - c) = ka - kc$. La **double distributivité** est donnée par

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd.$$

Exemples. Soient a et b deux nombres réels.

$$\circ 4(a + 3) = 4a + 12.$$

$$\circ (a - 7)(2 - b) = 2a + 7b - ab - 14.$$

Il y a des cas particuliers d'utilisation de la double distributivité particulièrement utiles à connaître que l'on énonce dans la proposition suivante.

Proposition 1.19 – Identités remarquables. *Pour tous nombres réels a et b , on a les égalités suivantes :*

$$\circ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$\circ (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Démonstration. Il suffit de développer les expressions de gauche à l'aide de la double distributivité pour démontrer ces égalités. $\square$

Exercice 1.20. Soient a et b deux nombres réels. Développer l'expression $(a - b)^2$.

Exercice 1.21. Étant donnés des nombres réels a , b , x , y , α et ω , développer les expressions suivantes :

1. $(4 - 3\sqrt{2})^2$,

6. $(7a + 5)(5 - 3a)$,

2. $(2\sqrt{5} + 3)(3\sqrt{5} - 4)$,

7. $(11y^2 + 4)^2$,

3. $(1 - \sqrt{2})^2$,

8. $(11y^2 + 4)^3$,

4. $(\sqrt{10} + \sqrt{6})^2 - (\sqrt{10} - \sqrt{6})^2$,

9. $(\alpha - 3\omega)^2$,

5. $4x(7x^2 - 8)$,

10. $(4x - 9 - b)(4x - 9 + b)$.

Exercice 1.22 – D'autres identités remarquables. Soient a et b deux nombres réels. Développer les expressions suivantes :

1. $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$,

2. $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$.

La double distributivité possède de nombreuses applications pratiques. L'une d'entre elles

consiste à utiliser ce que l'on appelle la **quantité conjuguée**.

Méthode – Multiplication par la quantité conjuguée. Pour simplifier une somme ou une différence de racines au dénominateur d'une fraction, comme par exemple, pour a et b sont deux réels positifs distincts,

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}},$$

on peut multiplier par **la quantité conjuguée**. Plus précisément, on écrit

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}.$$

Exercice 1.23 – Multiplication par la quantité conjuguée. Simplifier les expressions suivantes en obtenant des dénominateurs entiers :

1. $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}},$

3. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}},$

5. $\frac{4 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{4 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}},$

2. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}},$

4. $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}},$

6. $\left(\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2} + 1} \right)^2.$

1.2.2 Factoriser une expression

Factoriser une expression consiste à transformer une somme en un produit de plusieurs facteurs. Il s'agit donc de **l'opération inverse du développement**. Par exemple, pour a , b et k des nombres réels, on a $ka + kb = k(a + b)$ et on a ici **factorisé** l'expression $ka + kb$ en $k(a + b)$. Factoriser des expressions aura un grand intérêt dans la simplification de fractions (voir exercices 1.26 et 1.27) et la résolution d'équations et d'inéquations comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

Méthode – Factorisation. Pour factoriser une expression, il peut être très utile de se rappeler des identités remarquables dont on rappelle qu'elles sont données, pour a et b deux nombres réels, par $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ et $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. On les écrit dans le sens inverse de celui donné précédemment pour qu'elles s'appliquent au mieux à notre objectif : factoriser des expressions.

Exercice 1.24. Soit x un nombre réel. Factoriser les expressions suivantes :

1. $4x^2 - 9$,
2. $64x^2 - 8$,
3. $2x(x - 3) - 5(x - 3)^2$,
4. $(4x + 5)^2 - 49$,
5. $(x + 4)^2 - (2x - 5)^2$,
6. $81 - (4x - 5)^2$,
7. $(2x - 3)(7x - 6) - 4x^2 + 12x - 9$,
8. $2x^2 - x + (2x - 1)(x + 1)$,
9. $343 - x^3$,
10. $(x + 1)^3 + 125$.

Exercice 1.25. Soient x , y , g et t des nombres réels. Factoriser les expressions suivantes :

1. $\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g^2t$,
2. $x^2 + 4x + 4$,
3. $4x^2 - 12x + 9$,
4. $x^2 - 2$,
5. $x^3 - 8$,
6. $3x^4 - 12x^3 + 12x^2$.

Exercice 1.26. Soient x , y et z trois nombres réels. Simplifier en factorisant les expressions suivantes (dont on suppose qu'elles sont bien définies) :

1. $\frac{8}{12x + 20}$,
2. $\frac{9x^2}{12xy - 15xz}$,
3. $\frac{5x - 10}{7x - 14}$,
4. $\frac{4x - 12}{15 - 5x}$,
5. $\frac{x^2 - 2x + 1}{2(x - 1)}$,
6. $\frac{3x + 3}{x^2 + 2x + 1}$.

Exercice 1.27. Soient a , b , x et y quatre nombres réels. Mettez les expressions suivantes (dont on suppose qu'elles sont bien définies) sous forme d'une seule fraction :

1. $\frac{2a + b}{10} + \frac{a - 6b}{15}$,
2. $\frac{2}{x} - \frac{3}{2x} + \frac{5}{4}$,
3. $\frac{2}{3a - 1} - \frac{3}{2a + 1}$,
4. $\frac{3}{x + y} - \frac{5}{x^2 - y^2}$.

CHAPITRE 2

Équations et inéquations

2.1. Résolution d'équations

Définition 2.1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation (E) d'inconnue x

$$f(x) = 0 \quad (E)$$

où $f(x)$ est une expression dépendant d'un nombre réel x , consiste à déterminer **tous** les nombres réels a tels que l'égalité $f(a) = 0$ soit vraie. Un tel nombre a est alors appelé **une solution réelle de l'équation (E)** .

Remarque. La résolution d'une équation dépend de l'ensemble dans lequel on cherche les solutions. Ainsi, si l'on écrit « résoudre dans $\mathbb{R}$ » on cherche tous les nombres réels x tels que $f(x) = 0$ alors que si l'on écrit « résoudre dans $\mathbb{Z}$ » on cherche tous les nombres entiers relatifs x tels que $f(x) = 0$.

Exemple. On considère l'équation $2x^2 + x = -x + 4$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ cette équation, c'est donc déterminer toutes les valeurs réelles de x telles que $2x^2 + x = -x + 4$. On peut constater que 1 est solution de cette équation car $2 \times 1^2 + 1 = 3$ et $-1 + 4 = 3$, donc l'égalité est vérifiée pour $x = 1$. On peut faire de même pour -2 . En revanche, on constate que 3 n'est pas solution. En effet, on a $2 \times 3^2 + 3 = 21 \neq 1 = -3 + 4$.

Exercice 2.2. Soit l'expression $A(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$ dépendante d'un nombre réel x . On considère l'équation $A(x) = 0$.

1. Calculer $A(0)$, $A(1)$, $A(\frac{1}{2})$ et $A(-\frac{1}{2})$. Les nombres 0, 1, $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ sont-ils solutions de l'équation ?
2. Avons-nous finalement résolu l'équation $A(x) = 0$?

Résoudre une équation peut se révéler difficile au premier abord. Afin de procéder à cette résolution, il peut être utile de transformer ou de réécrire notre équation en une autre, qui a vocation à être plus simple et qui possède exactement les mêmes solutions : on dira alors que ces équations sont équivalentes.

Définition 2.3. Deux équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ sont dites **équivalentes** si, pour tout nombre réel a tel que $f(a) = 0$ alors $g(a) = 0$ et si, pour tout nombre réel b tel que $g(b) = 0$ alors $f(b) = 0$. Si $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ sont deux équations équivalentes, on dit alors que « $f(x) = 0$ si et seulement si $g(x) = 0$ », ce que l'on note

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0.$$

À retenir. On utilisera le symbole $\Leftrightarrow$ avec une grande précaution et avec parcimonie ! En général, il est préférable de se contenter d'employer des termes en français qui signifient la même chose, comme par exemple, « si et seulement si ». Ainsi, $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$ signifie « a est solution de $f(x) = 0$ si et seulement si a est solution de $g(x) = 0$ ».

Afin de pouvoir passer d'une première équation à une seconde équation équivalente à la première que l'on espère plus simple à résoudre, on dispose notamment des deux règles de réécriture suivantes.

Proposition 2.4 – Manipulation d'égalités.

- Une égalité entre deux nombres reste vraie si l'on ajoute ou si l'on soustrait un même nombre à ses deux membres. Plus précisément, pour tous nombres réels a , b et c , on a

$$a + c = b + c \text{ si et seulement si } a = b.$$

- Une égalité entre deux nombres reste vraie si l'on multiplie ou si l'on divise ses deux membres par un même nombre réel **non nul**. Plus précisément, pour tous nombres réels a , b et c avec $c \neq 0$, on a

$$ac = bc \text{ si et seulement si } a = b.$$

Exemples.

- L'équation $f(x) = g(x)$ avec $f(x)$ et $g(x)$ deux expressions dépendantes d'un nombre réel x , est équivalente à l'équation $f(x) - g(x) = 0$.
- L'équation $2x + 3 = 3$ est équivalente à l'équation $2x = 0$.
- L'équation $2x^2 + x = -x + 4$ est équivalente à l'équation $2x^2 + 2x - 4 = 0$.
- L'équation $7x + 7 = 9$ est équivalente à l'équation $x + 1 = \frac{9}{7}$.

2.2. Équations affines

Définition 2.5 – Équation polynomiale. Une équation (E) est dite **polynomiale** s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ avec $a_N \neq 0$ tels que l'équation (E) soit équivalente à l'équation

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N = 0.$$

Une telle équation est dite polynomiale **de degré** N .

Exemples.

- L'équation $x^3 - 7x^2 = 9$ est polynomiale de degré 3.
- L'équation $x^5 - 4x^2 + \sqrt{x} = 0$ n'est pas polynomiale, car elle contient une racine carrée.
- L'équation $(x^3 + 9)(x - 7) = x^4$ est polynomiale de degré 3 car le terme en x^4 se simplifie.

Remarque. Bien que ces équations soient parmi les plus simples que l'on puisse rencontrer, trouver toutes les solutions d'une telle équation peut se révéler fastidieux, voir difficile. On peut distinguer deux familles d'équations polynomiales.

- Pour les équations polynomiales de degrés 1, 2, 3 et 4, il existe des formules pour les solutions. Nous allons ici nous intéresser aux équations polynomiales de degré 1. Les équations polynomiales de degré 2 feront l'objet de la section suivante. La méthode de *Cardan* (voir [Wikg]) permet de résoudre les équations de degré 3 et la méthode de *Ferrari* (voir [Wiki]) les équations de degré 4.
- En revanche, on peut démontrer qu'il n'existe pas de formule générale pour les solutions d'équations polynomiales de degré 5 ou plus. Le principal contributeur pour la démonstration de ce résultat est le mathématicien français *Évariste Galois* (voir [Wikd]).

Si vous êtes intéressé par cette question, nous vous conseillons de consulter [Per].

Étudions maintenant la résolution des équations polynomiales de degré 1, que l'on appelle aussi **équations affines**. Commençons par traiter un exemple.

Exemple. On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$2x + 3 - 5x = 4x.$$

L'équation $2x + 3 - 5x = 4x$ est équivalente à l'équation $-3x + 3 = 4x$, obtenue par simplification du terme de gauche, qui est elle-même équivalente à $-7x + 3 = 0$, obtenue

en soustrayant $4x$ à chacun des termes. On a donc

$$2x + 3 - 5x = 4x \Leftrightarrow -7x + 3 = 0.$$

En soustrayant 3 à chacun des termes, on obtient l'équation équivalente $-7x = -3$, puis en multipliant les termes de gauche et de droite par $-\frac{1}{7}$, on obtient l'équation équivalente $x = \frac{3}{7}$. On peut résumer cela par la succession d'équivalences suivante :

$$2x + 3 - 5x = 4x \Leftrightarrow -7x + 3 = 0 \Leftrightarrow -7x = -3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}.$$

On a donc montré que $2x + 3 - 5x = 4x$ si et seulement si $x = \frac{3}{7}$. Donc, $\frac{3}{7}$ est l'unique solution de l'équation $2x + 3 - 5x = 4x$.

Cet exemple se généralise aisément. Considérons deux réels $a \neq 0$ et b et déterminons les solutions de l'équation $ax + b = 0$. On peut **isoler** l'inconnue x d'un côté du signe d'égalité via les équivalences suivantes :

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow \frac{1}{a}ax = \frac{1}{a} \times (-b) \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

On a donc démontré le résultat suivant.

Proposition 2.6. Soient a et b deux nombres réels avec a non nul. L'équation polynomiale de degré 1, $ax + b = 0$ admet pour unique solution réelle le nombre $-\frac{b}{a}$.

Exercice 2.7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $3x + 2 = 5$,

4. $-3x + 7 = 9$,

7. $\frac{5}{3}x + 2 = \frac{3}{2}$,

2. $\frac{3}{2}x + 3 = 4$,

5. $4x + 6 = 9x - 2$,

8. $\frac{x}{3} - 1 = \frac{2x-3}{5}$,

3. $-5x - 2 = 8$,

6. $\frac{x}{3} + 1 = 2x - 1$,

9. $\frac{5-2x}{7} = \frac{3x-4}{2}$.

2.3. Équations du second degré

Dans cette section, nous allons présenter une approche algorithmique de résolution des équations polynomiales de degré 2, c'est-à-dire des équations de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

avec $a \neq 0$, b et c trois nombres réels. Il est important de noter qu'il n'y a que peu d'équations dont on sait trouver les solutions exactes. Il est donc important de bien savoir traiter celles que l'on sait toujours résoudre.

2.3.1 Équations du type $x^2 = a$

On commence par présenter la résolution d'un cas particulier d'équation du second degré : les équations de la forme $x^2 = a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.8. Soient a un nombre réel et $f(x)$ une expression dépendante d'un nombre réel x .

- Si $a > 0$, alors l'équation $(f(x))^2 = a$ est équivalente à

$$f(x) = \sqrt{a} \quad \text{ou} \quad f(x) = -\sqrt{a}.$$

- Si $a = 0$, alors l'équation $(f(x))^2 = a$ est équivalente à $f(x) = 0$.
- Si $a < 0$, alors l'équation $(f(x))^2 = a$ n'admet aucune solution **réelle**.

Exemples.

- L'équation $(x - 2)^2 = 3$ est équivalente à $x - 2 = \sqrt{3}$ **ou** $x - 2 = -\sqrt{3}$ ce qui est équivalent à $x = 2 + \sqrt{3}$ **ou** $x = 2 - \sqrt{3}$. Les solutions de l'équation $(x - 2)^2 = 3$ sont donc $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$.
- L'équation $(x - 2)^2 = 0$ est équivalente à l'équation $x - 2 = 0$, donc l'unique solution de l'équation $(x - 2)^2 = 0$ est 2.
- L'équation $(x + 7)^2 + 3 = 1$ est équivalente à l'équation $(x + 7)^2 = -2$ qui n'admet aucune solution réelle.

Exercice 2.9. Résoudre les équations suivantes :

- | | | |
|------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| 1. $2x^2 = x^2 + 16$, | 3. $(2x - 5)^2 = 49$, | 5. $(x^2 - 17)^2 = 64$, |
| 2. $(x + 2)^2 = 9$, | 4. $(x^2 - 10)^2 = 36$, | 6. $(2x + 3)^2 = (x - 4)^2$. |

2.3.2 Forme canonique

Nous allons à présent montrer que toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$, b et c trois nombres réels fixés est équivalente à une équation de la forme $a(x - x_0)^2 + d = 0$ avec x_0 et d deux nombres réels dépendants de a , b et c . Cette nouvelle forme de l'équation est appelée **forme canonique** et se trouve être de la forme des équations de la section 2.3.1 ce qui signifie que l'on sait en déterminer les solutions. Commençons par traiter un exemple de mise sous forme canonique avant de donner une démonstration générale. On considère l'équation $2x^2 + 3x + 1 = 0$. On peut alors voir la partie $2x^2 + 3x$ du terme de gauche de l'égalité comme le morceau encadré de l'identité

remarquable $2(x + \alpha)^2 = \boxed{2(x^2 + 2\alpha x)} + 2\alpha^2$. Pour un réel x , on a en effet

$$2x^2 + 3x + 1 = 2x^2 + 4\frac{3}{4}x + 1 = 2\left(x^2 + 2\frac{3}{4}x\right) + 1$$

où l'on a ici $\alpha = \frac{3}{4}$. On reconnaît bien entre parenthèses le début d'une identité remarquable dont on fait apparaître la fin :

$$2x^2 + 3x + 1 = 2\left(x^2 + 2\frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) + 1.$$

On a ainsi, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x + 1 &= 2\left(x^2 + 2\frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right) + 1 \\ &= 2\left(x^2 + 2\frac{3}{4}x + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{8} + 1 \end{aligned}$$

Finalement, on a pour tout réel x que $2x^2 + 3x + 1 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ ce qui correspond à la mise sous forme canonique de notre trinôme du second degré. En suivant exactement le même procédé pour un trinôme générique (i.e. de la forme $ax^2 + bx + c$, avec a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$), on démontre la proposition suivante.

Proposition 2.10. *Toute équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c trois réels et $a \neq 0$, est équivalente à une équation de la forme $a(x - x_0)^2 + y_0 = 0$ avec x_0 et y_0 , deux nombres réels.*

Démonstration. Soient trois nombres réels a, b et c , avec $a \neq 0$. On considère l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$. Soit x un nombre réel, on a les égalités suivantes :

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\frac{b}{2}x + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x\right) + c$$

car a est un réel non nul. On a alors

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

et donc

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

On pose alors $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$ afin d'obtenir le résultat. $\square$

Définition 2.11 – Forme canonique. La forme $a(x - x_0)^2 + y_0 = 0$ d'une équation polynomiale de degré deux est appelée **forme canonique**. La forme $ax^2 + bx + c = 0$ est appelée **forme développée**.

Remarque. Plutôt que de retenir la formule de la forme canonique, il est plus intéressant de retenir la méthode pour l'obtenir : il faut penser la partie $ax^2 + bx$ du polynôme comme un début d'identité remarquable et faire attention au coefficient a devant le terme x^2 .

Exercice 2.12. Mettre sous forme canonique les expressions dépendantes d'un réel x suivantes :

1. $x^2 + 4x + 5$,

3. $x^2 - 4x + 2$,

5. $3x^2 - 3x + 3$,

2. $x^2 + 5x - 3$,

4. $4x^2 + 5x - 1$,

6. $-2x^2 + 3x + 5$.

Exercice 2.13.

1. Montrer que $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$ est équivalente à $(x^2 - 13)^2 = 144$.

2. Résoudre cette équation.

2.3.3 Discriminant et résolution

Dans cette section, on donne une méthode pour résoudre une équation polynomiale de degré deux, c'est-à-dire une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c , trois nombres réels tels que $a \neq 0$.

Définition 2.14. Les solutions d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$, sont appelées **racines** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

On a vu que tout trinôme $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous forme canonique (voir la démonstration de la proposition 2.10) de la manière suivante :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Dans l'expression de droite, on peut factoriser par a , car a est non nul, pour obtenir

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right).$$

Ainsi, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à l'équation suivante

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0,$$

donc les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont exactement celles de cette dernière équation. À présent, trois cas de figures se présentent à nous.

- Si le nombre réel $b^2 - 4ac$ est strictement positif, alors l'équation

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

est de la forme $f(x)^2 = \alpha$ avec $\alpha > 0$ dont on sait d'après la proposition 2.8 qu'elle est équivalente à $f(x) = \sqrt{\alpha}$ ou $f(x) = -\sqrt{\alpha}$ ce qui donne les valeurs de x solutions de l'équation. Afin d'obtenir une factorisation du trinôme, détaillons l'obtention de ces racines :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2.$$

En utilisant l'identité remarquable $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$, on peut alors factoriser l'expression de droite, ce qui nous fournit l'égalité suivante :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

Finalement, on a donc montré que si $b^2 - 4ac > 0$, alors on a

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right),$$

ainsi, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet bien exactement deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Si le nombre réel $b^2 - 4ac$ est nul, on remarque, en utilisant la forme canonique, que si $b^2 - 4ac = 0$ alors

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Ainsi, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution réelle double $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

- Si le nombre réel $b^2 - 4ac$ est strictement négatif, alors l'équation du second degré est équivalente à une équation de la forme $f(x)^2 = \alpha$ avec $\alpha < 0$ dont on sait d'après la proposition 2.8 qu'elle n'admet pas de solution réelle. Il n'y a donc pas de solution réelle.

On vient de voir comment déterminer les solutions d'une équation $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$ et nous avons constaté que cette résolution dépend de manière cruciale du signe de la quantité $b^2 - 4ac$. On lui donne donc un nom.

Définition 2.15 – Discriminant. Soient a, b et c , des nombres réels avec $a \neq 0$. On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, que l'on note Δ (qui se lit « delta »), le nombre réel

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Théorème 2.16 – Racines réelles et factorisation d'un trinôme. Soient a, b et c trois nombres réels, avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c$ admet exactement deux racines réelles

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et la factorisation $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c$ admet une unique racine réelle (double)

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \quad (= x_1 = x_2)$$

et la factorisation $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

- Si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ n'admet aucune racine réelle et ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$.

Exemples.

- On cherche les racines du trinôme $2x^2 + 3x + 1$. On commence par calculer le discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1$. Le discriminant est strictement positif, donc $ax^2 + bx + c$ admet les deux racines

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{-3 - 1}{4} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{-3 + 1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

De plus, le trinôme admet la factorisation suivante :

$$2x^2 + 3x + 1 = 2(x - (-1)) \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right) \right) = 2(x + 1) \left(x + \frac{1}{2} \right).$$

- On cherche les racines du trinôme $2x^2 - 4x + 2$. On a $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 16 - 16 = 0$. Le discriminant étant nul, le trinôme admet donc la racine double

$$x_0 = -\frac{-4}{2 \times 2} = 1.$$

De plus, le trinôme admet la factorisation $2x^2 - 4x + 2 = 2(x - 1)^2$.

- On cherche les racines du trinôme $x^2 - x + 2$. On commence par calculer le discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7$. Le discriminant est strictement négatif, donc le trinôme n'admet aucune racine réelle et ne peut pas se factoriser sur $\mathbb{R}$.

À retenir – Résolution d'une équation du second degré. On a une procédure à suivre afin de déterminer les racines réelles d'un trinôme $ax^2 + bx + c$:

- on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$,
- en fonction du signe de Δ , on en déduit les racines éventuelles :

$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = -\frac{b}{2a}$	pas de racine réelle

Remarques.

- Si vous avez un trinôme dont le discriminant est nul, alors vous devez être capable de le factoriser en utilisant une identité remarquable.
- Le dernier trinôme de l'exemple précédent n'admet aucune racine **dans** $\mathbb{R}$. Nous verrons plus loin que l'on peut considérer un ensemble de nombres plus grand que l'ensemble des nombres réels (appelé ensemble des **nombres complexes**) dans lequel un tel trinôme admet des racines. On découvrira cela dans le chapitre 11.

Exercice 2.17. Déterminer les solutions réelles des équations suivantes :

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $4x^2 - 20x + 22 = 0$, | 8. $4x^2 + 16x + 14 = 0$, | 15. $3x^2 + 3x - 3 = 0$, |
| 2. $4x^2 - 4x - 15 = 0$, | 9. $9x^2 + 12x + \frac{11}{4} = 0$, | 16. $9x^2 + 6x + \frac{1}{4} = 0$, |
| 3. $-4x^2 + 12x - 9 = 0$, | 10. $-2x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0$, | 17. $x^2 - x - 2 = 0$, |
| 4. $-x^2 + 6x - 14 = 0$, | 11. $-x^2 + 2x - 1 = 0$, | 18. $4x^2 - 4x - 2 = 0$, |
| 5. $2x^2 + 10x + \frac{25}{2} = 0$, | 12. $4x^2 - 16x + 7 = 0$, | 19. $9x^2 - 12x + \frac{13}{4} = 0$, |
| 6. $-2x^2 + 2x + \frac{3}{2} = 0$, | 13. $-2x^2 + 8x - 8 = 0$, | 20. $9x^2 - 15x + 5 = 0$. |
| 7. $9x^2 - 12x + \frac{7}{2} = 0$, | 14. $4x^2 + 12x - 7 = 0$, | |

2.4. D'autres types d'équations

La plupart des équations que vous pourrez rencontrer ne sont pas des équations polynomiales mais seront régulièrement construites à partir de produits ou de quotients d'expressions dépendantes de réels. On présente brièvement une manière de déterminer les solutions d'une telle équation en fonction des termes apparaissant dans le produit ou le quotient.

2.4.1 Équations produits

Proposition 2.18. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux expressions dépendantes d'un nombre réel x . Alors,

$$f(x)g(x) = 0 \text{ si et seulement si } (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)$$

Autrement dit, un réel a est solution de l'équation $f(x)g(x) = 0$ si et seulement si $f(a) = 0$ ou $g(a) = 0$.

Exemple. L'équation $(x - 3)(x - 5) = 0$ est équivalente à $x - 3 = 0$ ou $x - 5 = 0$. L'ensemble des solutions réelles de l'équation $(x - 3)(x - 5) = 0$ est donc $\{3, 5\}$.

Exercice 2.19. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(2x - 3)(4x - 5) = 0$,
2. $(x - 2)(2x + 5)(-2x + 1) = 0$,
3. $(2x + 1)(x - 3) + (x + 6)(2x + 1) = 0$,
4. $(x + 5)(-2x + 1) = (x + 5)(x - 2)$,
5. $x^2 - 9 = 0$,
6. $(2x + 3)^2 = (3x + 2)^2$.

2.4.2 Équations quotient

Proposition 2.20. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux expressions dépendantes d'un nombre réel x . Alors,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ si et seulement si } (f(x) = 0 \text{ et } g(x) \neq 0)$$

Autrement dit, un réel a est solution de l'équation $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ si et seulement si $f(a) = 0$ et $g(a) \neq 0$.

Exemple. L'équation

$$\frac{x - 2}{(x - 3)(x - 5)} = 0$$

est équivalente à $x - 2 = 0$ **et** $(x - 3)(x - 5) \neq 0$, qui est donc équivalent à $x - 2 = 0$ **et** $x - 3 \neq 0$ **et** $x - 5 \neq 0$. L'unique solution de l'équation est donc 2.

À retenir. Il faut absolument faire attention aux valeurs pour lesquelles le dénominateur s'annule. Par exemple, on peut considérer l'équation

$$\frac{x - 2}{x^2 - 7x + 10} = 0 \quad (E)$$

Comme $x^2 - 7x + 10$ se factorise en $(x - 2)(x - 5)$, l'équation (E) est équivalente à

$$\frac{x - 2}{(x - 2)(x - 5)} = 0$$

qui équivaut à

$$\frac{1}{(x - 5)} = 0$$

qui n'a aucune solution. L'équation (E) n'admet donc aucune solution. En particulier, 2 n'est pas une solution de (E).

Exercice 2.21. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\frac{x - 3}{2x + 1} = 0,$

3. $\frac{2}{2x + 5} = \frac{1}{4x - 3},$

2. $\frac{x^2 - 16}{2x + 5} = 0,$

4. $3 + \frac{1}{x - 5} = 0.$

2.5. Intervalles et inéquations

2.5.1 Retour sur $\mathbb{R}$: la notion d'intervalle

On rappelle que $\mathbb{R}$ est l'ensemble de « tous les nombres que vous connaissez ». On représente $\mathbb{R}$ comme une droite orientée où chacun des nombres correspond à un point de la droite comme représentée en figure 2.1.



Figure 2.1 – La droite réelle

L'orientation de la droite (le choix d'un sens de parcours, de la gauche vers la droite, symbolisée par la flèche) nous permet de conserver l'information de l'ordre naturel des

nombre. Ainsi, lorsque l'on considère deux nombres réels a et b avec $a < b$, alors a sera placé à gauche de b .

Définition 2.22 – Intervalles bornés de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants sont appelés des **intervalles de $\mathbb{R}$** :

- l'ensemble $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ est l'**intervalle fermé borné** $[a, b]$,
- l'ensemble $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (b n'est pas un élément de $[a, b[$),
- l'ensemble $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (a n'est pas un élément de $]a, b]$),
- l'ensemble $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ est l'**intervalle ouvert borné** $]a, b[$.

On représente chacun de ces intervalles sur la figure 2.2.

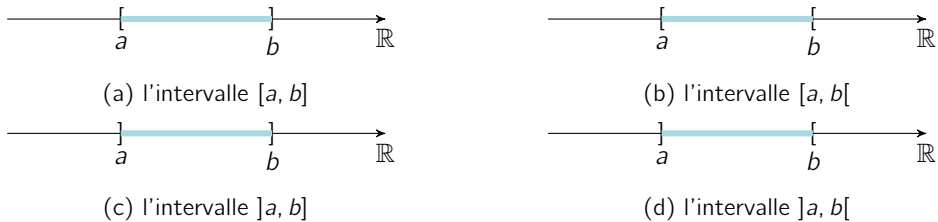


Figure 2.2 – Les intervalles bornés de $\mathbb{R}$

Définition 2.23 – Intervalles non bornés de $\mathbb{R}$. Soit a un nombre réel. Les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants sont appelés les **intervalles non bornés de $\mathbb{R}$** :

- l'ensemble $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$,
- l'ensemble $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$,
- l'ensemble $] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$,
- l'ensemble $] - \infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$.

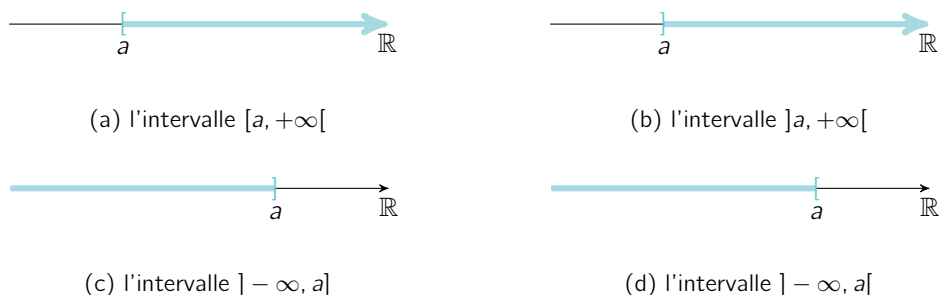
On les représente graphiquement à la figure 2.3.

Certains de ces intervalles sont très souvent utilisés : on introduit donc une notation particulière pour ceux-là.

Définition 2.24. On note

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[, \quad \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[, \quad \mathbb{R}_- =] - \infty, 0] \quad \text{et} \quad \mathbb{R}_-^* =] - \infty, 0[.$$

Nous aurons parfois besoin d'un peu plus que des intervalles et nous allons pour cela

Figure 2.3 – Les intervalles non bornés de $\mathbb{R}$

considérer des opérations sur les ensembles : l'union, notée $\cup$, et l'intersection, notée $\cap$. On ne traite ici que le cas des intervalles, mais ces opérations sont définies plus généralement (voir l'annexe A).

Définition 2.25 – Union et intersection d'intervalles. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

- **L'union** (parfois appelée réunion) de I et J est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ noté $I \cup J$ et défini par $I \cup J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I \text{ ou } x \in J\}$.
- **L'intersection** de I et J est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ désigné par $I \cap J$ et défini par $I \cap J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I \text{ et } x \in J\}$.

On illustre les notions d'union et d'intersection d'intervalles avec quelques représentations graphiques : pour cela, fixons $a < b < c < d$, quatre nombres réels, on a

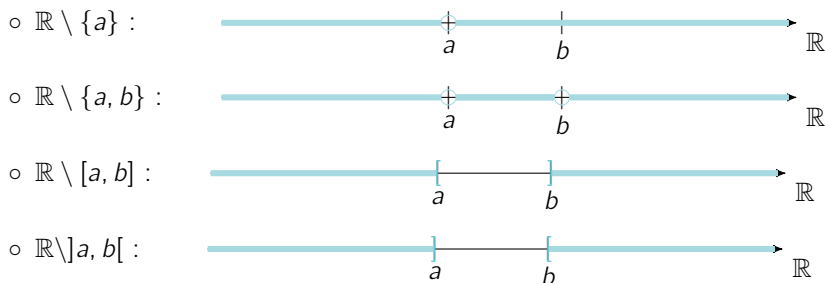
- $[a, b] \cup [c, d]$:
- $[a, c] \cup [b, d]$:
- $[a, c] \cap [b, d]$:
- $[a, d] \cap [b, c]$:

Remarque. S'il n'existe pas $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \in I$ et $x \in J$ alors on note $I \cap J = \emptyset$ et on dit qu'il s'agit de l'**ensemble vide**. L'ensemble vide est l'unique ensemble ne contenant aucun élément.

Définition 2.26 – Complémentaire. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{R} \setminus E$, que l'on lit « $\mathbb{R}$ privé de E » le complémentaire de E dans $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathbb{R} \setminus E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin E\}.$$

Exemples. Soient $a < b$ deux réels.



2.5.2 Inéquations

Définition 2.27. Résoudre une inéquation $f(x) \geq 0$ consiste à déterminer l'ensemble des solutions de cette inéquation, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels a tels que $f(a) \geq 0$. Deux inéquations sont dites **équivalentes** si elles admettent le même ensemble de solutions.

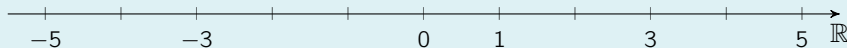
Remarque. Comme pour les équations, si deux inéquations sont équivalentes, on peut utiliser le symbole $\Leftrightarrow$ pour passer de l'une à l'autre.

Proposition 2.28. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux expressions dépendantes de x .

- L'inéquation $f(x) \geq 0$ est équivalente à l'inéquation $f(x) + g(x) \geq g(x)$.
- Soit a un nombre réel **strictement positif**, alors l'inéquation $f(x) \geq 0$ est équivalente à l'inéquation $af(x) \geq 0$. Plus généralement, si $g(x) > 0$, l'inéquation $f(x) \geq 0$ est équivalente à l'inéquation $f(x)g(x) \geq 0$.
- Soit a un nombre réel **strictement négatif**, alors l'inéquation $f(x) \geq 0$ est équivalente à l'inéquation $af(x) \leq 0$ et plus généralement, si $g(x) < 0$, l'inéquation $f(x) \geq 0$ est équivalente à l'inéquation $f(x)g(x) \leq 0$.

À retenir. Multiplier les membres d'une inéquation par un nombre négatif change le signe de l'inéquation. Par exemple, on a $3 \leq 5$ et si l'on multiplie par -1 chaque membre de l'inéquation, on obtient $-3 \geq -5$. On constate aisément cela sur la représentation

graphique suivante :



où -3 et -5 sont respectivement les symétriques de 3 et 5 par rapport à 0 .

Exemple. On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2y - 3 \geq -y + 1$. Soit $y \in \mathbb{R}$, on va raisonner par équivalences successives. On a

$$\begin{aligned} 2y - 3 \geq -y + 1 &\Leftrightarrow 2y - 3 + y \geq -y + 1 + y \\ &\Leftrightarrow 3y - 3 \geq 1 \\ &\Leftrightarrow 3y \geq 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 3y \geq \frac{1}{3} \times 4 \\ &\Leftrightarrow y \geq \frac{4}{3} \end{aligned}$$

donc l'ensemble de solutions de l'inéquation $2y - 3 \geq -y + 1$ est l'ensemble des nombres réels y satisfaisant $y \geq \frac{4}{3}$ ou autrement dit les éléments de l'intervalle $[\frac{4}{3}, +\infty[$.

Remarque. On prendra garde à ne chercher les solutions d'une inéquation que dans l'ensemble des réels pour lesquels les expressions considérées ont un sens. Ainsi, on cherchera les solutions de l'inéquation

$$\frac{1}{x-1} \geq 0$$

dans l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, car le dénominateur de la fraction s'annule en 1 .

Exercice 2.29. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $4x - 2 \geq 3,$

3. $7x + 3 > 2x - 2,$

5. $\frac{1}{x-1} \geq 2,$

2. $3 - 7x < 5,$

4. $-5x - 9 \leq -x + 2,$

6. $\frac{2}{3-x} \geq 5.$

2.5.3 Tableau de signes

Le but de cette section est de présenter une méthode qui permet de déterminer le signe d'une expression dépendante d'un réel x quand celle-ci se présente sous forme d'un produit de plusieurs expressions. Par exemple, on voudrait pouvoir déterminer le signe de l'expression

$$(x-1)(x-2)$$

en fonction de la valeur de x . Pour cela, on utilise le fait que le signe de l'expression est entièrement contrôlé par le signe de chacun des termes qui la composent :

- l'expression $(x - 1)(x - 2)$ est positive si et seulement si les deux sous-expressions $x - 1$ et $x - 2$ dont elle est le produit sont de même signe,
- l'expression est négative si et seulement si les deux sous-expressions sont de signes différents.

Afin de présenter cette disjonction de cas, on peut utiliser **un tableau de signes** qui résumera dans chacune de ses lignes les variations de signes des expressions en jeu. Pour $x \in \mathbb{R}$, notons $f(x) = (x - 1)(x - 2)$.

On commence par étudier le signe de l'expression $x - 1$: l'inéquation $x - 1 \geq 0$ est équivalente à $x \geq 1$, donc la quantité $x - 1$ est positive si et seulement si $x \geq 1$. De même, la quantité $x - 2$ est positive ou nulle si et seulement si $x \geq 2$. On peut déduire de ceci le signe de l'expression $f(x) = (x - 1)(x - 2)$ en fonction de la valeur de x .

- Pour tous les réels $x \leq 1$, on a $x - 1 \leq 0$ et $x - 2 \leq 0$ et le produit de deux quantités négatives étant positif, on peut donc conclure que pour tout réel $x \leq 1$, $(x - 1)(x - 2) \geq 0$.
- Pour tout réel $x \in [1, 2]$, on a $x - 1 \geq 0$ et $x - 2 \leq 0$, donc le produit de ces deux expressions est négatif. On a donc pour tout réel $x \in [1, 2]$, $(x - 1)(x - 2) \leq 0$.
- Enfin, pour tout réel $x \in [2, +\infty[$, on a $x - 1 \geq 0$ et $x - 2 \geq 0$, donc pour tout réel $x \in [2, +\infty[$, $(x - 1)(x - 2) \geq 0$.

On compile tous ces résultats dans le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x - 1$	−	0	+	+
$x - 2$	−	−	0	+
$f(x)$	+	0	−	+

Table 2.1 – Tableau de signes pour l'expression $(x - 1)(x - 2)$

Remarque. On note que connaître le signe de l'expression $f(x) = (x - 1)(x - 2)$ est tout à fait équivalent au fait de résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$ dont l'ensemble des solutions est, d'après le tableau de signes 2.1, $] - \infty, 1] \cup [2, +\infty[$. De ceci on déduit également que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est $]1, 2[$ qui est le complémentaire de l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 2.30. Dresser le tableau de signes de l'expression $g(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

2.5.4 Inéquations du second degré

On va traiter ici en toute généralité le cas des inéquations du second degré.

Propriété 2.31 – Signe d'un trinôme. Soient a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$. Le signe de l'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ en fonction de x dépend du signe du coefficient dominant a et du signe du discriminant.

- Si le discriminant Δ est strictement positif alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 < x_2$ et on a le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
signe de $f(x)$	signe de a		signe opposé de a	signe de a

- Si le discriminant Δ est nul alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et on a le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
signe de $f(x)$	signe de a		signe de a

- Si le discriminant Δ est strictement négatif alors l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune racine réelle et on a le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $f(x)$	signe de a	

Démonstration. On traite les trois cas séparément. Dans toute la preuve, on fixe a, b et c trois nombres réels avec $a \neq 0$.

- Supposons pour commencer que $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. D'après le théorème 2.16, on a donc pour tout réel x ,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

avec $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. On distingue alors deux cas selon le signe de a .

▷ Si $a > 0$ alors on a $x_1 < x_2$ et on a le tableau de signes

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x - x_1$	—	0	+	+
$x - x_2$	—	—	0	+
$f(x)$	+	0	—	+

▷ Si $a < 0$ alors on a $x_2 < x_1$ et on a le tableau de signes

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$
$x - x_1$	—	—	0	+
$x - x_2$	—	0	+	+
$f(x)$	—	0	+	—

- Supposons que $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. D'après le théorème 2.16, on a pour tout réel x , la factorisation

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

Un carré étant toujours positif, le signe de l'expression, qui s'annule en $-\frac{b}{2a}$, ne dépend donc que du signe de a .

- Supposons enfin que $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. D'après la preuve du théorème 2.16, on a alors pour tout réel x ,

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right).$$

Le terme entre parenthèses étant strictement positif, le signe de l'expression est donc constant égal au signe de a .

□

Exercice 2.32. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(3x + 1)(x - 7) < 0$,

4. $(x - 1)^2 - (3x - 6)^2 < 0$,

2. $(2x + 5)(1 - x) \leq 0$,

5. $(3x - 5)^2 < (x + 5)^2$,

3. $5x^2 - 8x \leq 0$,

6. $\frac{x+2}{3-x} < 2$.

Exercice 2.33. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- | | | |
|---|------------------------------|--|
| 1. $-2x^2 + 10x - \frac{25}{2} \geq 0,$ | 3. $4x^2 - 12x + 6 \geq 0,$ | 5. $2x^2 + 10x + \frac{21}{2} \leq 0,$ |
| 2. $9x^2 - 15x + \frac{21}{4} \leq 0,$ | 4. $2x^2 + 16x + 39 \geq 0,$ | 6. $6x^2 + 2x - \frac{4}{3} \geq 0.$ |

Résolution de systèmes linéaires

Dans la section 2.2, nous avons appris à résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations de la forme

$$ax = b$$

avec a et b deux nombres réels. Nous allons à présent généraliser cette résolution à l'aide d'une méthode algorithmique dite du **pivot de Gauss** afin de déterminer l'ensemble des solutions de **systèmes d'équations** comme par exemple

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + 5y = 7 \end{cases}$$

c'est-à-dire trouver tous les couples de nombres réels x et y qui satisfont les deux équations. L'exemple ci-dessous comporte deux équations à deux inconnues et c'est sur cette forme de système que nous nous concentrerons dans un premier temps. Une fois la méthode de résolution bien comprise sur ce type de systèmes, nous pourrons la généraliser à des systèmes avec plus d'équations ou plus d'inconnues.

Remarque. Ce chapitre est purement calculatoire. Pour autant, il est important de noter qu'une interprétation géométrique de tels calculs sera donnée au chapitre 4. Afin de progresser sur ce chapitre, il faut pratiquer : vous pourrez trouver des exercices supplémentaires dans [Bar23].

3.1. Systèmes linéaires à deux inconnues

3.1.1 Une équation linéaire à deux inconnues

Avant de s'attaquer à la résolution de systèmes, on commence par traiter le cas d'une seule équation linéaire à deux inconnues.

Définition 3.1 – L'ensemble $\mathbb{R}^2$. On note $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des couples (x, y) avec x et y des nombres réels, i.e.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ sera l'ensemble dans lequel on recherchera les solutions d'une équation à deux inconnues.

Définition 3.2 – Équation linéaire à deux inconnues. On appelle **équation linéaire à deux inconnues** toute équation de la forme $ax + by = c$ où a, b et c sont trois réels donnés et où x et y sont les deux inconnues de notre équation. Résoudre une telle équation consiste à déterminer l'ensemble des couples $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $au + bv = c$. Deux équations sont dites **équivalentes** si elles admettent le même ensemble de solutions.

Comme pour les équations affines, pour résoudre de telles équations, nous allons travailler par équivalence.

Proposition 3.3. Soient a, b et c trois réels. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, les équations $ax + by = c$ et $\lambda ax + \lambda by = \lambda c$ sont équivalentes.

Démonstration. Soient a, b, c et λ quatre réels, avec $\lambda \neq 0$. Il est clair que l'ensemble des solutions de $\lambda ax + \lambda by = \lambda c$ est égal à l'ensemble des solutions de l'équation $\lambda(ax + by - c) = 0$ qui est égal, comme $\lambda \neq 0$ et par la proposition 2.4, à l'ensemble des solutions de $ax + by = c$. $\square$

Traisons un exemple de résolution d'une telle équation, en considérant l'équation linéaire à deux inconnues suivante :

$$3x + 2y = -4 \tag{E}$$

On constate rapidement que l'on peut « écrire une inconnue en fonction de l'autre ». On a alors deux choix possibles.

- On peut choisir d'isoler x c'est-à-dire d'écrire « x en fonction de y ». On a les équivalences suivantes :

$$\boxed{3}x + 2y = -4 \Leftrightarrow \boxed{3}x = -2y - 4 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}y - \frac{4}{3}.$$

On encadre ici le coefficient 3 car ce coefficient doit être non nul pour pouvoir exprimer x en fonction de y : nous venons de choisir **un pivot** dans notre système (qui n'a ici qu'une équation). On remarque alors que pour tout choix de nombre réel

t , le couple $(-\frac{2}{3}t - \frac{4}{3}, t) \in \mathbb{R}^2$ est une solution de l'équation (E) et réciproquement. L'ensemble des solutions de (E) est donc l'ensemble

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \left(-\frac{2}{3}t - \frac{4}{3}, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le t de la description de notre ensemble est appelé **paramètre** de notre ensemble de solutions : au choix d'un tel t correspond une solution de l'équation.

- On peut également choisir d'isoler y c'est-à-dire d'exprimer « y en fonction de x ». On a les équivalences suivantes :

$$3x + \boxed{2}y = -4 \Leftrightarrow \boxed{2}y = -3x - 4 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x - 2.$$

Ainsi, pour tout choix de nombre réel s , le couple $(s, -\frac{3}{2}s - 2)$ est une solution de (E) et réciproquement. L'ensemble des solutions de (E) est donc l'ensemble

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \left(s, -\frac{3}{2}s - 2 \right), s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bien que les ensembles $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ aient des descriptions différentes, le travail par équivalence que nous avons mené précédemment nous assure qu'ils sont égaux. Essayons de nous convaincre de cette égalité. Commençons par considérer un élément quelconque de $\mathcal{S}_1$, c'est-à-dire fixons $t_0 \in \mathbb{R}$ et considérons l'élément $(-\frac{2}{3}t_0 - \frac{4}{3}, t_0)$ de $\mathcal{S}_1$. Montrons que ce dernier est un élément de $\mathcal{S}_2$, c'est-à-dire qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $(-\frac{2}{3}t_0 - \frac{4}{3}, t_0) = (s, -\frac{3}{2}s - 2)$, ou autrement dit, que le système de deux équations affines d'inconnue s suivant :

$$\begin{cases} s & = & -\frac{2}{3}t_0 - \frac{4}{3} \\ -\frac{3}{2}s - 2 & = & t_0 \end{cases}$$

admet une solution. Or, on a la suite d'équivalence suivante

$$-\frac{3}{2}s - 2 = t_0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}s = t_0 + 2 \Leftrightarrow s = -\frac{2}{3}t_0 - \frac{4}{3}$$

donc le système précédent admet bien pour unique solution $s = -\frac{2}{3}t_0 - \frac{4}{3}$: on a ainsi montré que tout élément $(-\frac{2}{3}t_0 - \frac{4}{3}, t_0)$ de $\mathcal{S}_1$ est un élément de $\mathcal{S}_2$ en prenant le paramètre s égal à $-\frac{2}{3}t_0 - \frac{4}{3}$. De manière similaire, on peut montrer qu'un élément $(s_0, -\frac{3}{2}s_0 - 2)$ de $\mathcal{S}_2$ est égal à l'élément de $\mathcal{S}_1$ de paramètre $t = -\frac{3}{2}s_0 - 2$. Finalement, ces deux ensembles sont bel et bien égaux.

Regardons rapidement deux autres exemples.

- On peut chercher à résoudre l'équation $3x = 7$ dans $\mathbb{R}^2$. Bien qu'il n'y ait qu'une seule inconnue visible dans cette équation, on peut décrire son ensemble de solutions

dans $\mathbb{R}^2$. Cette fois-ci, nous n'avons qu'un choix possible de pivot pour décrire l'ensemble des solutions : on ne peut qu'isoler x . Ainsi, l'équation $3x = 7$ est équivalente à l'équation $x = \frac{7}{3}$ qui admet pour ensemble de solutions

$$\left\{ \left(\frac{7}{3}, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- De la même manière, on peut vouloir résoudre l'équation $-2y = -5$ dans $\mathbb{R}^2$. Cette équation est équivalente à $y = \frac{5}{2}$ qui admet pour ensemble de solutions

$$\left\{ \left(t, \frac{5}{2} \right), t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Proposition 3.4. Soient a, b, c trois réels. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, i.e. $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, l'équation $ax + by = c$ admet un ensemble de solutions paramétré par un réel.

Démonstration. Soient a, b, c trois réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors ou bien $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Commençons par supposer que $a \neq 0$, alors on a les équivalences :

$$\boxed{a}x + by = c \Leftrightarrow \boxed{a}x = -by + c \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}y + \frac{c}{a}$$

et donc l'équation $ax + by = c$ admet pour ensemble de solutions $\left\{ \left(-\frac{b}{a}t + \frac{c}{a}, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}$. Supposons à présent que $b \neq 0$, alors on a les équivalences

$$ax + \boxed{b}y = c \Leftrightarrow \boxed{b}y = -ax + c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

et donc l'équation $ax + by = c$ admet pour ensemble de solutions $\left\{ \left(t, -\frac{a}{b}t + \frac{c}{b} \right), t \in \mathbb{R} \right\}$. On note d'ailleurs que si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ ces deux ensembles sont égaux comme nous l'avons montré à l'exemple précédent. $\square$

3.1.2 Deux équations à deux inconnues

Définition 3.5. On appelle **système de deux équations linéaires à deux inconnues**, un système

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

où a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 sont des nombres réels. **Résoudre** un tel système correspond

à trouver tous les couples de nombres réels $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ qui satisfont

$$a_1 u + b_1 v = c_1 \quad \text{et} \quad a_2 u + b_2 v = c_2.$$

On introduit ici la méthode algorithmique dite du **pivot de Gauss**, pour résoudre de tels systèmes. Comme pour les équations affines (voir la démonstration de la proposition 2.6), on va chercher à simplifier notre problème en se ramenant par équivalence à un système plus simple.

Définition 3.6 – Systèmes équivalents. Deux systèmes (S) et (T) de deux équations à deux inconnues sont dits **équivalents** si l'ensemble des solutions de (S) est égal à l'ensemble des solutions de (T) .

La philosophie de la méthode du pivot de Gauss est alors relativement simple : étant donné un système linéaire (S) on veut le transformer à l'aide d'opérations autorisées (c'est-à-dire conservant l'ensemble des solutions du système) en un système linéaire équivalent (T) facile à résoudre, comme par exemple un système de la forme

$$\begin{cases} \tilde{a}x &= \tilde{b} \\ \tilde{\alpha}y &= \tilde{\beta} \end{cases}$$

qui n'est que la réunion de deux équations affines. Vous devriez sans mal réussir à déterminer la solution de ce système si celle-ci existe. En déterminant les solutions de (T) , on obtiendra donc les solutions de (S) .

Opérations élémentaires sur les lignes

On présente à présent les trois opérations élémentaires sur les systèmes qui nous permettent de passer d'un système à un système équivalent (qui a vocation dans notre méthode à être plus simple à résoudre). Vous trouverez en page 41 le premier exemple d'algorithme du pivot de Gauss, qui n'est qu'un enchaînement de ces trois opérations élémentaires.

Proposition 3.7 – Dilatation. Soient a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 six nombres réels. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda \neq 0$. On a l'équivalence

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda a_1 x + \lambda b_1 y = \lambda c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}.$$

Démonstration. Fixons a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 , six nombres réels. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On

pose (S) et (T) les deux systèmes suivants :

$$(S) \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad (T) \begin{cases} \lambda a_1x + \lambda b_1y = \lambda c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

On a vu dans la proposition 3.3 que $a_1x + b_1y = c_1$ est équivalente à $\lambda a_1x + \lambda b_1y = \lambda c_1$. Ainsi, le couple (x, y) est solution de (S) si et seulement si $a_1x + b_1y = c_1$ et $a_2x + b_2y = c_2$ ce qui équivaut à $\lambda a_1x + \lambda b_1y = \lambda c_1$ et $a_2x + b_2y = c_2$, et donc au fait que (x, y) soit une solution de (T) . Puisqu'on a travaillé par équivalence, on a donc bien montré que (S) et (T) possèdent les mêmes solutions. $\square$

Proposition 3.8 – Permutation. Soient a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 six nombres réels. On a l'équivalence

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2x + b_2y = c_2 \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}.$$

Démonstration. On a $a_1x + b_1y = c_1$ et $a_2x + b_2y = c_2$ si et seulement si $a_2x + b_2y = c_2$ et $a_1x + b_1y = c_1$. $\square$

Proposition 3.9 – Transvection. Soient a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 six nombres réels et soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On a l'équivalence

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ (a_2 + \lambda a_1)x + (b_2 + \lambda b_1)y = c_2 + \lambda c_1 \end{cases}.$$

Démonstration. Fixons a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 six nombres réels avec $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$ et $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On pose (S) et (T) les deux systèmes suivants :

$$(S) \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad (T) \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ (a_2 + \lambda a_1)x + (b_2 + \lambda b_1)y = c_2 + \lambda c_1 \end{cases}.$$

Notons respectivement $\mathcal{S}_S$ et $\mathcal{S}_T$, les ensembles de solutions des systèmes (S) et (T) et montrons par double inclusion leur égalité.

- Commençons par considérer un élément $(u, v) \in \mathcal{S}_S$, qui est donc un couple de réels vérifiant $a_1u + b_1v = c_1$ et $a_2u + b_2v = c_2$. On a donc

$$(a_2 + \lambda a_1)u + (b_2 + \lambda b_1)v - c_2 - \lambda c_1 = (a_2u + b_2v - c_2) + \lambda(a_1u + b_1v - c_1) = 0,$$

donc (u, v) est solution de (T) . On a donc que $\mathcal{S}_S \subset \mathcal{S}_T$.

- Considérons un élément $(u, v) \in \mathcal{S}_T$, qui vérifie donc $a_1u + b_1v - c_1 = 0$ et $(a_2x + b_2y - c_2) + \lambda(ax_1 + by_1 - c_1) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} a_2x + b_2y - c_2 &= a_2x + b_2y - c_2 + \lambda \times 0 \\ &= (a_2x + b_2y - c_2) + \lambda(ax_1 + by_1 - c_1) \\ &= (a_2 + \lambda a_1)x + (b_2 + \lambda b_1)y - (c_2 + \lambda c_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc (u, v) est une solution de (S) . On a donc $\mathcal{S}_T \subset \mathcal{S}_S$.

On a finalement montré que $\mathcal{S}_S = \mathcal{S}_T$ et donc que les systèmes (S) et (T) sont équivalents. $\square$

Un premier exemple de résolution par pivot de Gauss

En utilisant ces trois règles de façon algorithmique, nous pouvons déterminer l'ensemble des solutions de tout système linéaire. Commençons par un exemple de résolution, avec le système

$$(S) \begin{cases} 2x + 3y = -1 & (L_1) \\ 3x + 4y = 1 & (L_2) \end{cases},$$

où l'on a nommé chacune des lignes afin de suivre les différentes opérations que l'on va mener.

1. La première étape de l'algorithme est **la descente**. On commence par choisir un coefficient non nul présent devant une variable du système. Par exemple, on peut choisir le 2 devant la variable x de la première ligne. Afin de spécifier ce choix, on encadre ce coefficient, qui devient **un pivot** pour notre résolution :

$$(S) \begin{cases} \boxed{2}x + 3y = -1 & (L_1) \\ 3x + 4y = 1 & (L_2) \end{cases}.$$

Grâce aux différentes opérations élémentaires de réécriture d'un système, on utilise notre pivot afin de « faire disparaître » la variable associée (ici x) dans l'autre équation (ici L_2). En effet, grâce à une dilatation, on a l'équivalence

$$\begin{cases} \boxed{2}x + 3y = -1 & (L_1) \\ 6x + 8y = 2 & (L_2 \leftarrow 2L_2) \end{cases}.$$

On note que la ligne L_2 est à présent $6x + 8y = 2$ comme l'indique $L_2 \leftarrow 2L_2$. Par transvection, ce système est lui-même équivalent au système

$$\begin{cases} \boxed{2}x + 3y = -1 & (L_1) \\ 6x - 6x + 8y - 9y = 2 - 3(-1) & (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1) \end{cases}$$

ce qui nous donne finalement le système

$$\begin{cases} \boxed{2}x - 3y = -1 & (L_1) \\ -y = 5 & (L_2) \end{cases}.$$

On a donc montré que le système (S) est équivalent au système (T) suivant :

$$(T) \begin{cases} \boxed{2}x - 3y = -1 & (L_1) \\ -y = 5 & (L_2) \end{cases}.$$

On réitère un choix de pivot, que l'on doit prendre dans une ligne du système n'ayant pas encore de pivot, et qui doit être associé à une variable sans pivot dans le système. Dans le cas d'un système de deux équations à deux inconnues, il nous reste au plus un unique choix à faire : ici, le coefficient -1 devant la variable y de la seconde ligne

$$(T) \begin{cases} \boxed{2}x - 3y = -1 & (L_1) \\ \boxed{-1}y = 5 & (L_2) \end{cases}.$$

2. On débute à présent la seconde partie de notre algorithme du pivot de Gauss : **la remontée**. On utilise notre second pivot pour venir « annuler » la variable y dans la première équation de notre système (T) . En utilisant une transvection, on obtient que le système (T) est équivalent au système

$$\begin{cases} \boxed{2}x + (-3y + 3y) = -1 - 15 & (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2) \\ \boxed{-1}y = 5 & (L_2) \end{cases}$$

et donc au système

$$\begin{cases} 2x = -16 & (L_1) \\ -y = 5 & (L_2) \end{cases}.$$

3. On peut finalement conclure : le système (S) est équivalent au système

$$\begin{cases} x = -8 \\ y = -5 \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble $\{(-8, -5)\}$.

Remarque. La présentation faite ici de l'algorithme du pivot de Gauss peut vous paraître lourde pour résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues. Cependant, cet algorithme se généralisant aux systèmes à m équations et p inconnues, avec m et p

des entiers non nuls, il est important de bien le mettre en place sur le cas le plus simple.

En utilisant cet algorithme, on peut étudier de manière générale les systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues.

Proposition 3.10. Soient a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 six nombres réels non tous nuls. Considérons le système suivant

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

- Si $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$, le système admet une unique solution.
- Si $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$, alors
 - ▷ ou bien le système n'admet aucune solution,
 - ▷ ou bien le système est équivalent à $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et admet un ensemble de solutions paramétré par un réel.

Démonstration. On considère a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 six nombres réels. On suppose que $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$ et $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$: les autres cas sont laissés en exercice. On pose (S) le système suivant

$$(S) \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

On traite ici le cas où $a_1 \neq 0$, le cas où $a_1 = 0$ étant laissé en exercice.

Soient x et y deux nombres réels. Comme, $a_1 \neq 0$, on peut le choisir comme pivot pour avoir l'équivalence

$$\begin{aligned} (S) & \begin{cases} \boxed{a_1}x + b_1y = c_1 & (L_1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (L_2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \boxed{a_1}x + b_1y = c_1 & (L_1) \\ (a_1b_2 - b_1a_2)y = a_1c_2 - c_1a_2 & (L_2 \leftarrow a_1L_2 - a_2L_1) \end{cases}. \end{aligned}$$

On distingue à présent plusieurs cas.

- Supposons que $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$: on peut alors choisir ce coefficient comme pivot. Le système (S) est donc équivalent au système

$$\begin{cases} \boxed{a_1}x = c_1 - b_1 \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{(a_1b_2 - b_1a_2)} & (L_1 \leftarrow L_1 - \frac{b_1}{a_1b_2 - b_1a_2} L_2) \\ (a_1b_2 - b_1a_2)y = a_1c_2 - c_1a_2 & (L_2) \end{cases}$$

Comme $(a_1 b_2 - b_1 a_2) \neq 0$ et $a_1 \neq 0$, on a l'équivalence

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1(a_1 c_2 - c_1 a_2)}{a_1(a_1 b_2 - b_1 a_2)} = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} \\ y = \frac{a_1 c_2 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} \end{cases}.$$

On a donc montré que si $a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$, alors l'ensemble des solutions du système (S) est

$$\left\{ \left(\frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}, \frac{a_1 c_2 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} \right) \right\}.$$

- Supposons à présent que $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$: le système (S) est donc équivalent au système

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ 0 = a_1 c_2 - c_1 a_2 \end{cases}.$$

On a alors deux sous-cas.

- ▷ Supposons que $a_1 c_2 - c_1 a_2 \neq 0$. Alors la seconde équation du système est impossible, donc le système (S) n'admet aucune solution.
- ▷ Supposons que $a_1 c_2 - c_1 a_2 = 0$. Alors le système (S) est équivalent à l'équation $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ qui, comme $a_1 \neq 0$, est équivalente à $x = -\frac{b_1}{a_1} y - \frac{c_1}{a_1}$.
Donc l'ensemble des solutions du système (S) est $\left\{ \left(-\frac{b_1}{a_1} t - \frac{c_1}{a_1}, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}$.

□

Exercice 3.11. Démontrer le résultat précédent dans le cas où $a_1 = 0$.

Exemple – Système avec une unique solution. On considère le système

$$(S) \begin{cases} \boxed{2}x + 3y = 4 & (L_1) \\ 4x + 4y = 4 & (L_2) \end{cases}.$$

Alors le système (S) est équivalent à

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \boxed{2}x + 3y = 4 & (L_1) \\ \boxed{-2}y = -4 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \boxed{2}x = -2 & (L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{2}L_2) \\ \boxed{-2}y = -4 & (L_2) \end{cases} \end{aligned}$$

donc l'unique solution du système (S) est le couple $(-1, 2)$.

Exemple – Système sans solution. On considère le système

$$(S) \begin{cases} \boxed{2}x + 3y = 4 & (L_1) \\ 4x + 6y = 4 & (L_2) \end{cases}.$$

Alors,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2}x + 3y = 4 & (L_1) \\ 0 = -4 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \end{cases}.$$

La seconde ligne du système n'est jamais vraie, le système (S) n'admet donc aucune solution.

Exemple – Système avec une infinité de solutions. On considère le système

$$(S) \begin{cases} \boxed{2}x + 3y = 4 & (L_1) \\ 4x + 6y = 8 & (L_2) \end{cases}.$$

Alors,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2}x + 3y = 4 & (L_1) \\ 0 = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \end{cases}.$$

Le système (S) est donc équivalent à l'équation $2x + 3y - 4 = 0$ qui est elle-même équivalente à $3y = 4 - 2x$. Ainsi, le système (S) admet une infinité de solutions paramétrées par un réel. Plus précisément, l'ensemble des solutions de (S) est

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x \right\} = \left\{ \left(t, \frac{4}{3} - \frac{2}{3}t \right), t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 3.12. Déterminer les solutions des systèmes suivants :

$$(A) \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ x - 3y = 2 \end{cases}, \quad (B) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases},$$

$$(C) \begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ -15x + 20y = -5 \end{cases}, \quad (D) \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x - 3y = -5 \end{cases}.$$

Exercice 3.13. Soit a un paramètre réel. On considère le système

$$\begin{cases} ax - (a^2 + 1)y = -1 \\ -x + (a + 3)y = 2 \end{cases}.$$

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le système n'admet aucune solution.

Exercice 3.14. Déterminer l'ensemble des solutions des systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ -3x - y = -7 \end{cases},$$

$$4. \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases},$$

$$2. \begin{cases} 4x - 4y = 6 \\ -x - 5y = -2 \end{cases},$$

$$5. \begin{cases} -4x + y = 8 \\ -y = -2 \end{cases},$$

$$3. \begin{cases} -2x + 2y = 5 \\ -5x - y = -7 \end{cases},$$

$$6. \begin{cases} 5x - 3y = -7 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}.$$

3.1.3 Aparté sur le déterminant

On a vu en proposition 3.10 que l'unicité de la solution d'un système de deux équations à deux inconnues se détermine en calculant une quantité à l'aide des coefficients du système. On donne un nom à cette quantité.

Définition 3.15 – Déterminant d'un système. Soient a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 six nombres réels. Au système

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

on associe la quantité $a_1b_2 - a_2b_1$ que l'on appelle **déterminant du système** et que l'on note

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Remarque. Ainsi, d'après la proposition 3.10, le système (S) admet une unique solution si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

L'annulation du déterminant permet de détecter un coefficient de proportionnalité entre les deux équations du système comme nous le montrons dans la proposition suivante.

Proposition 3.16. Soient a_1, a_2, b_1, b_2 quatre réels. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a_1 = \lambda a_2$ et $b_1 = \lambda b_2$ si et seulement si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

Exercice 3.17. Démontrer ce résultat.

3.2. Systèmes linéaires à trois inconnues

Dans cette section, nous allons généraliser notre algorithme aux systèmes linéaires d'équations à trois inconnues.

3.2.1 Une équation à trois inconnues

Définition 3.18 – L'ensemble $\mathbb{R}^3$. On note $\mathbb{R}^3$, l'ensemble des triplets (x, y, z) avec x, y et z des nombres réels, i.e.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

L'ensemble $\mathbb{R}^3$ sera l'ensemble dans lequel on recherchera les solutions d'une équation à trois inconnues.

Définition 3.19 – Équation linéaire à trois inconnues. On appelle **équation linéaire à trois inconnues** toute équation de la forme

$$ax + by + cz = d$$

où a, b, c et d sont quatre réels donnés et où x, y et z sont les trois inconnues de notre équation. Résoudre une telle équation, c'est déterminer l'ensemble des triplets $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ tels que $au + bv + cw = d$. De plus, comme précédemment, deux équations sont dites **équivalentes** si elles admettent le même ensemble de solutions.

Proposition 3.20. Soient a, b, c et d quatre réels. Si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors l'équation $ax + by + cz = d$ admet un ensemble de solutions paramétré par deux réels.

Démonstration. Soient a, b, c et d quatre réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Si $a \neq 0$, alors on a l'équivalence suivante :

$$\boxed{a} x + by + cz = d \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z + \frac{d}{a}$$

donc l'équation $ax + by + cz = d$ admet pour ensemble de solutions

$$\left\{ \left(-\frac{b}{a}s - \frac{c}{a}t + \frac{d}{a}, s, t \right), s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dans le cas $a = 0$, il faut différencier les sous-cas $b \neq 0$ et $b = 0$ (on a alors $c \neq 0$), sous-cas qui amènent à des descriptions similaires de l'ensemble des solutions. $\square$

Remarque. On rappelle une nouvelle fois que la description de l'ensemble des solutions n'est pas unique. En effet, dans une équation $ax + by + cz = d$ si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors on peut choisir a comme pivot pour isoler x , ou bien b pour isoler y . Ces choix amènent à des descriptions différentes du même ensemble des solutions : si $a, b \neq 0$, l'ensemble des solutions de l'équation admet les descriptions suivantes

$$\left\{ \left(-\frac{b}{a}s - \frac{c}{a}t + \frac{d}{a}, s, t \right), s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(s, -\frac{a}{b}s - \frac{c}{b}t + \frac{d}{b}, t \right), s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Comme exercice, nous vous laissons le soin d'explicitier le paramétrage de l'ensemble des solutions de l'équation lorsque $c \neq 0$ et qu'on le choisit comme pivot.

Exemples.

- On cherche à résoudre l'équation $3x + 2y + 5z = 7$. On a les équivalences

$$\boxed{3}x + 2y + 5z = 7 \Leftrightarrow \boxed{3}x = -2y - 5z + 7 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}y - \frac{5}{3}z + \frac{7}{3}$$

donc l'équation admet pour ensemble de solutions $\left\{ \left(-\frac{2}{3}s - \frac{5}{3}t + \frac{7}{3}, s, t \right), s, t \in \mathbb{R} \right\}$.

- L'équation $2x + 5z = -3$ est équivalente à $x = -\frac{5}{2}z - \frac{3}{2}$ donc admet pour ensemble de solutions $\left\{ \left(-\frac{5}{2}t - \frac{3}{2}, s, t \right), s, t \in \mathbb{R} \right\}$.

Dans la suite, nous allons appliquer notre algorithme du pivot de Gauss aux systèmes à trois inconnues. Il se constitue toujours des trois étapes que sont la descente, la remontée et la conclusion. Pour effectuer ces trois étapes, on utilise toujours nos opérations élémentaires sur les lignes.

Proposition 3.21. *Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système, présentées dans les propositions 3.7, 3.8 et 3.9, s'étendent aux systèmes à trois inconnues et transforment un système en un système équivalent.*

3.2.2 Deux équations à trois inconnues

Lemme 3.22. *Soient $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ six nombres réels. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $a_1 = \lambda a_2, b_1 = \lambda b_2$ et $c_1 = \lambda c_2$ si et seulement si $a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1 c_2 - a_2 c_1 = b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0$.*

Démonstration. Le sens direct se montre par un calcul immédiat. Montrons le sens réciproque, supposons donc que $a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1 c_2 - a_2 c_1 = b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0$. Si les six nombres sont nuls, le résultat est évident. Sinon, il en existe un non nul : supposons que $a_2 \neq 0$. D'après la proposition 3.16, comme $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a_1 = \lambda a_2$ et $b_1 = \lambda b_2$. Par le même argument, comme $a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $a_1 = \mu a_2$ et $c_1 = \mu c_2$. Comme $a_2 \neq 0$ et $\lambda a_2 = a_1 = \mu a_2$, alors $\lambda = \mu$, d'où le résultat. $\square$

Proposition 3.23. Soient $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$ huit réels non tous nuls. Considérons le système

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}.$$

- Le système admet un ensemble de solutions paramétré par un réel si et seulement si l'une des quantités $a_1b_2 - a_2b_1$, $a_1c_2 - a_2c_1$ ou $b_1c_2 - b_2c_1$ est non nulle.
- Sinon, il n'admet aucune solution ou est équivalent à $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$.

Remarque. Dans cette proposition, il est plus important de retenir les méthodes mises en jeu dans la preuve que la proposition exacte : dans les faits, on ne calcule jamais les trois déterminants pour connaître la forme de l'ensemble des solutions du système.

Démonstration. Supposons que l'une des quantités $a_1b_2 - a_2b_1$, $a_1c_2 - a_2c_1$ ou $b_1c_2 - b_2c_1$ est non nulle. On commence par supposer que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ou $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ et on suppose également que $a_1 \neq 0$ (si $a_1 = 0$, on peut prendre a_2 comme pivot et copier les arguments ci-dessous).

1. *Descente.* Par hypothèse $a_1 \neq 0$ ce qui nous permet de le prendre comme pivot. Le système

$$\begin{cases} \boxed{a_1}x + b_1y + c_1z = d_1 & (L_1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & (L_2) \end{cases}$$

est équivalent à

$$\begin{cases} \boxed{a_1}x + b_1y + c_1z = d_1 & (L_1) \\ \boxed{a_1a_2}x + a_1b_2y + a_1c_2z = a_1d_2 & (L_2 \leftarrow a_1L_2) \end{cases}$$

qui est lui-même équivalent avec $(L_2 \leftarrow L_2 - a_2L_1)$ à

$$\begin{cases} \boxed{a_1}x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \boxed{a_1b_2 - a_2b_1}y + (a_1c_2 - a_2c_1)z = a_1d_2 - a_2d_1 \end{cases}$$

dans lequel on peut choisir un second pivot sur la seconde ligne puisque, par hypothèse, on sait que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ou $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$. Supposons que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$: on peut le choisir comme second pivot (dans le cas où $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, on choisit alors $a_1c_2 - a_2c_1$ comme pivot)

2. *Remontée.* Servons nous du second pivot pour « éliminer » la variable y de la première équation. Le précédent système est équivalent au système

$$\begin{cases} \boxed{a_1}x + \left(c_1 - b_1 \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)z = d_1 - b_1 \frac{a_1d_2 - a_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ \boxed{a_1b_2 - a_2b_1}y + (a_1c_2 - a_2c_1)z = a_1d_2 - a_2d_1 \end{cases}$$

3. *Conclusion.* Finalement, on peut isoler x et y et les exprimer en fonction de z qui jouera le rôle du paramètre de notre ensemble de solutions. Le système précédent est équivalent à

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{a_1} \left(\left(b_1 \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} - c_1 \right) z + d_1 - b_1 \frac{a_1 d_2 - a_2 d_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \right) \\ y &= \frac{a_1 d_2 - a_2 d_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} - \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système sera donc paramétré par un unique réel.

Supposons que $b_1 c_2 - b_2 c_1 \neq 0$: on propose une manière différente de raisonner pour démontrer que l'ensemble des solutions est paramétré par un réel. Le système

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 & (L_1) \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 & (L_2) \end{cases}$$

est équivalent au système

$$\begin{cases} b_1 y + c_1 z = -a_1 x + d_1 & (L_1) \\ b_2 y + c_2 z = -a_2 x + d_2 & (L_2) \end{cases}$$

Comme $b_1 c_2 - b_2 c_1 \neq 0$, et d'après la proposition 3.10, le système à 2 inconnues y et z admet une unique solution (qui dépend de x), donc l'ensemble des solutions du système est paramétré par un réel (ici x) car $a_1 \neq 0$.

Supposons à présent que $a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1 c_2 - a_2 c_1 = b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0$, alors d'après le lemme 3.22, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que le système soit

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 & (L_1) \\ \lambda a_1 x + \lambda b_1 y + \lambda c_1 z = d_2 & (L_2) \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 & (L_1) \\ 0 = d_2 - \lambda d_1 & (L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1) \end{cases}$$

Deux cas se présentent à nous : ou bien $d_2 - \lambda d_1 \neq 0$ et dans ce cas le système n'admet aucune solution, ou bien $d_2 - \lambda d_1 = 0$ et dans ce cas le système est équivalent à l'équation

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \quad (L_1)$$

qui admet un ensemble de solutions paramétré par deux réels. □

Exemple. On cherche à déterminer les solutions du système

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 5 & (L_1) \\ 2x + y + 2z = 1 & (L_2) \end{cases}.$$

On met en place notre algorithme du pivot de Gauss pour résoudre le système.

1. *Descente.* On choisit un premier pivot, c'est-à-dire un coefficient non nul devant une variable : le système

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 5 & (L_1) \\ 2x + \boxed{1}y + 2z = 1 & (L_2) \end{cases}$$

est équivalent à

$$\begin{cases} \boxed{-1}x & = 3 & (L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2) \\ 2x + \boxed{1}y + 2z = 3 & (L_2) \end{cases}.$$

Remarquons que nous avons le choix du premier pivot : on doit choisir un coefficient non nul devant une variable. On peut très bien, comme nous l'avons fait ici, choisir le pivot en seconde ligne devant la seconde variable. On prend notre deuxième pivot sur la ligne qui n'en a pas encore. Ici, nous n'avons pas de choix : on prend le coefficient devant la variable x .

2. *Remontée.* On utilise notre second pivot pour éliminer la variable x de la seconde ligne. Le système précédent est équivalent à

$$\begin{cases} \boxed{-1}x & = 3 & (L_1) \\ \boxed{1}y + 2z = 9 & (L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2) \end{cases}.$$

3. On passe alors à la conclusion, en isolant nos variables liées à un pivot. On a ainsi

$$\begin{cases} x & = & -3 \\ y & = & -2z + 9 \end{cases}.$$

donc l'ensemble des solutions du système est $\{(-3, -2t + 9, t), t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3.24. Déterminer l'ensemble des solutions des systèmes suivants :

- | | |
|---|---|
| 1. $\begin{cases} 4x + 5y + 6z = 40 \\ 9x + 11y + 10z = 76 \end{cases}$, | 4. $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 7 \\ 3x + 5y + 10z = 20 \end{cases}$, |
| 2. $\begin{cases} 6x + 6y + 6z = 24 \\ 3x + 7y + 10z = 0 \end{cases}$, | 5. $\begin{cases} 9x + 3y + 9z = 2 \\ 6x + y + 4z = -4 \end{cases}$, |
| 3. $\begin{cases} -5x + 2y + 2z = -9 \\ -5x - 7y - 9z = 9 \end{cases}$, | 6. $\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 3 \\ 4x + \quad + 2z = -4 \end{cases}$. |

3.2.3 Trois équations à trois inconnues

Dans cette sous-section, on cherche à résoudre un système de trois équations linéaires à trois inconnues de la forme

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}.$$

Pour cela, on applique sur des exemples la méthode du pivot de Gauss résumée ci-dessous.

Méthode – Algorithme du pivot de Gauss. L'algorithme de résolution comporte trois étapes.

1. *Descente.* Tant que c'est possible, on choisit un pivot, c'est-à-dire un coefficient non nul devant une variable (qu'on dira liée à ce pivot) sur une ligne qui n'en comporte pas encore, puis on élimine cette variable liée des lignes sans pivot.
2. *Remontée.* Lorsque l'on ne peut plus choisir de pivot, et si le système n'est pas incompatible, on considère nos pivots dans l'ordre inverse de la phase de la descente, pour finir d'éliminer les variables liées dans les autres lignes que celle de leur pivot.
3. *Conclusion.* On conclut sur l'ensemble de solutions, les variables libres (non liées à un pivot) paramétrant notre ensemble de solutions.

Exemple – Système avec une unique solution. On cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} 3x + y + 4z = 0 \\ 6x + y + 8z = 3 \\ 2x + 7y + 3z = 3 \end{cases}.$$

1. *Descente.* On commence par choisir un premier pivot :

$$\begin{cases} 3x + \boxed{1}y + 4z = 0 & (L_1) \\ 6x + y + 8z = 3 & (L_2) \\ 2x + 7y + 3z = 3 & (L_3) \end{cases}.$$

On utilise notre pivot pour éliminer la variable y des lignes L_2 et L_3 pour obtenir le système équivalent

$$\begin{cases} 3x + \boxed{1}y + 4z = 0 & (L_1) \\ \boxed{3}x + 4z = 3 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ -19x - 25z = 3 & (L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1) \end{cases}.$$

On a choisi un second pivot sur une ligne n'ayant pas encore de pivot, puis on élimine la variable liée dans la ligne sans pivot :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3x + \boxed{1}y + 4z & = & 0 \quad (L_1) \\ \boxed{3}x & + & 4z = 3 \quad (L_2) \\ & & \boxed{\frac{1}{3}}z = 22 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{19}{3}L_2) \end{array} \right. .$$

On « choisit » notre dernier pivot : on en a trois comme le nombre de variables, il y aura une unique solution à notre système (il n'y a aucune variable libre).

2. *Remontée.* On utilise notre dernier pivot pour venir éliminer la variable z de L_1 et L_2 : le système précédent est donc équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3x + \boxed{1}y & = & -264 \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 12L_3) \\ \boxed{3}x & = & -261 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 12L_3) \\ & & \boxed{\frac{1}{3}}z = 22 \quad (L_3) \end{array} \right.$$

qui est lui même équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{lcl} & \boxed{1}y & = -3 \quad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2) \\ \boxed{3}x & & = -261 \quad (L_2) \\ & & \boxed{\frac{1}{3}}z = 22 \quad (L_3) \end{array} \right. .$$

3. *Conclusion.* Le système admet pour unique solution le triplet $(-87, -3, 66)$.

Exemple – Système sans solution. On cherche à résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3x + y + 3z & = & -4 \\ 8x + 7y + 8z & = & 4 \\ 8x + 3y + 8z & = & 2 \end{array} \right. .$$

1. *Descente.* On choisit un pivot et on élimine la variable liée dans les autres lignes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boxed{3}x + y + 3z & = & -4 \quad (L_1) \\ 8x + 7y + 8z & = & 4 \quad (L_2) \\ 8x + 3y + 8z & = & 2 \quad (L_3) \end{array} \right.$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} \boxed{3}x + y + 3z = -4 & (L_1) \\ 13y = 44 & (L_2 \leftarrow 3L_2 - 8L_1) \\ \boxed{1}y = 38 & (L_3 \leftarrow 3L_3 - 8L_1) \end{cases}$$

On a choisi un second pivot dans une des deux lignes qui n'en avaient pas encore et on élimine la variable liée dans la ligne sans pivot, d'où le système équivalent :

$$\begin{cases} \boxed{3}x + y + 3z = -4 & (L_1) \\ 0 = 44 - 13 \times 38 & (L_2 \leftarrow L_2 - 13L_3) \\ \boxed{1}y = 38 & (L_3) \end{cases}$$

2. *Conclusion.* Ce système est **incompatible**, car il possède une ligne de la forme $c = 0$ avec $c = -450$. Ce système n'admet donc aucune solution.

Exemple – Système avec un ensemble de solutions paramétré par un réel. On veut déterminer les solutions du système suivant

$$\begin{cases} 7x + y + 3z = 1 \\ 7x - y + z = 0 \\ 7x + 3y + 5z = 2 \end{cases}$$

1. *Descente.* On choisit notre premier pivot dans le système

$$\begin{cases} \boxed{7}x + y + 3z = 1 & (L_1) \\ 7x - y + z = 0 & (L_2) \\ 7x + 3y + 5z = 2 & (L_3) \end{cases}$$

puis on élimine la variable liée au pivot dans les autres lignes

$$\begin{cases} \boxed{7}x + y + 3z = 1 & (L_1) \\ \boxed{-2}y - 2z = -1 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ 2y + 2z = 1 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$$

On choisit notre second pivot dans une nouvelle ligne, puis on élimine la variable liée dans les lignes sans pivot :

$$\begin{cases} \boxed{7}x + y + 3z = 1 & (L_1) \\ \boxed{-2}y - 2z = -1 & (L_2) \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases}$$

Le système initial est donc équivalent au système à deux équations

$$\begin{cases} \boxed{7}x + y + 3z = 1 & (L_1) \\ \boxed{-2}y - 2z = -1 & (L_2) \end{cases}.$$

Donc d'après la proposition 3.23, on sait que le système admet un ensemble de solutions indexé par un nombre réel. La variable z est libre et sera le paramètre de notre ensemble de solutions.

2. *Remontée.* On utilise le dernier pivot du système afin d'éliminer la variable liée dans le reste du système : on obtient alors le système équivalent

$$\begin{cases} \boxed{14}x + 4z = 1 & (L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2) \\ \boxed{-2}y - 2z = -1 & (L_2) \end{cases}.$$

3. *Conclusion.* Le système est donc équivalent à

$$\begin{cases} x = \frac{1}{14} - \frac{2}{7}z \\ y = \frac{1}{2} - z \end{cases}.$$

Le système admet donc l'ensemble de solutions paramétré par un réel suivant :

$$\left\{ \left(\frac{1}{14} - \frac{2}{7}t, \frac{1}{2} - t, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemple – Système avec un ensemble de solutions paramétré par deux réels. On veut déterminer les solutions du système suivant

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ -2x + 2y - 4z = -2 \\ 3x - 3y + 6z = 3 \end{cases}.$$

On choisit un pivot et on élimine la variable liée dans les autres lignes. On obtient le système équivalent

$$\begin{cases} \boxed{1}x - y + 2z = 1 & (L_1) \\ 0 = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ 0 = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{cases}.$$

donc le système est équivalent à l'équation $x - y + 2z = 1$ qui admet pour ensemble de solutions $\{(s - 2t + 1, s, t), s, t \in \mathbb{R}\}$.

On résume les différentes possibilités d'ensembles de solutions pour un système linéaire de trois équations à trois inconnues dans la proposition suivante.

Proposition 3.25. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on considère a_i, b_i, c_i et d_i des réels non tous nuls. Le système

$$(S) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

admet

- ou bien aucune solution,
- ou bien une unique solution,
- ou bien un ensemble de solutions paramétré par un réel,
- ou bien un ensemble de solutions paramétré par deux réels.

Démonstration. La preuve repose sur l'application du pivot de Gauss. □

Exercice 3.26. Déterminer l'ensemble des solutions des systèmes suivants :

- | | |
|--|--|
| <p>1. $\begin{cases} -x & & - 2z = 5 \\ -2x + y + 2z = -15, \\ 2x - y - z = 17 \end{cases}$</p> | <p>6. $\begin{cases} 9x - 3y - 5z = 2 \\ 8x - 7y - 3z = 1, \\ -8x + 4y + 4z = 2 \end{cases}$</p> |
| <p>2. $\begin{cases} -5x & & + 3z = -4 \\ 5x - y - 4z = 1, \\ 5x + y - 2z = -1 \end{cases}$</p> | <p>7. $\begin{cases} -7x + 2y - 3z = 20 \\ -7x - 2y + 4z = 6, \\ 3x + y - 2z = -2 \end{cases}$</p> |
| <p>3. $\begin{cases} 7x + 9y + 7z = -1 \\ -3x - 6y - 3z = -6, \\ -7x - y - 7z = 25 \end{cases}$</p> | <p>8. $\begin{cases} -5x + 7y + 6z = 1 \\ 4x + 4y - 3z = -1, \\ -5x + 4y + 6z = -4 \end{cases}$</p> |
| <p>4. $\begin{cases} 3x + 7y + 3z = -11 \\ 3x + 7y + 4z = -11, \\ -2x - 5y + 7z = 8 \end{cases}$</p> | <p>9. $\begin{cases} -x + 3y + 4z = 3 \\ -2x - 5y & & = -1, \\ x + 8y + 4z = 4 \end{cases}$</p> |
| <p>5. $\begin{cases} -x - 4y + 3z = -10 \\ 3x + 3y - 4z = 8, \\ -x + 7y - 3z = 17 \end{cases}$</p> | <p>10. $\begin{cases} -4x + 3y - z = 4 \\ & 5y - 4z = -4, \\ -5x - 4y + 5z = 4 \end{cases}$</p> |

CHAPITRE 4

Vecteurs, droites, plans

Le but de ce chapitre est d'introduire les vecteurs ainsi que les objets géométriques de base que sont les droites et les plans. La description de ces objets géométriques en termes d'équations, ainsi que l'étude de leur position relative (leur intersection éventuelle) reposent en très grande partie sur l'étude de systèmes linéaires, dont l'étude a été faite au chapitre précédent. Ce chapitre s'achèvera par l'introduction du produit scalaire qui est une nouvelle opération sur les vecteurs permettant notamment de définir la notion d'orthogonalité de vecteurs ainsi les notions de droites orthogonales, perpendiculaires ou encore de plans perpendiculaires.

On commence par introduire les ensembles dans lesquels nous ferons de la géométrie.

Définition 4.1 – Le plan affine. On appelle **plan affine** l'ensemble des couples de réels $P = (x_P, y_P)$ avec $x_P, y_P \in \mathbb{R}$. Un élément de cet ensemble sera appelé **un point** du plan affine.

Définition 4.2 – L'espace affine. On appelle **espace affine** l'ensemble des triplets de réels $P = (x_P, y_P, z_P)$ avec $x_P, y_P, z_P \in \mathbb{R}$. Un élément de cet ensemble sera appelé **un point** de l'espace affine.

Remarque. Les notions de plan affine et d'espace affine sont plus générales que les définitions présentées ici. Nous nous contenterons de ces définitions qui n'en sont en fait que les archétypes.

4.1. Vecteurs du plan et de l'espace

4.1.1 Vecteurs du plan

La notion de vecteur apparaît naturellement lorsque l'on veut décrire, encoder la notion de déplacement rectiligne. On commence par introduire l'ensemble des « vecteurs du plan ». Cette terminologie prendra son sens au cours du chapitre.

Définition 4.3 – Vecteur de $\mathbb{R}^2$. Les éléments de l'ensemble $\mathbb{R}^2$ (voir la définition 3.1) sont appelés **vecteurs** du plan. On les notera avec une flèche de la manière suivante : $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Le vecteur $\vec{0} = (0, 0)$ est appelé **vecteur nul**.

Définition 4.4 – Vecteur de $\mathbb{R}^3$. Les éléments de l'ensemble $\mathbb{R}^3$ (voir la définition 3.18) sont appelés **vecteurs** de l'espace. On les notera $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$. Le vecteur $\vec{0} = (0, 0, 0)$ est appelé **vecteur nul**.

Exemples. Les éléments $\vec{u} = (3, 1)$, $\vec{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -5)$ et $\vec{w} = (0, -\sqrt{7})$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Les éléments $\vec{u} = (3, 1, 5)$, $\vec{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -5, -1)$ et $\vec{w} = (0, -\sqrt{7}, 29)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

À un couple de points du plan affine, respectivement de l'espace affine, on peut associer un vecteur du plan, respectivement de l'espace.

Définition 4.5.

- À un couple de points $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ du plan affine, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^2$ défini par

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A).$$

- À un couple de points $A = (x_A, y_A, z_A)$ et $B = (x_B, y_B, z_B)$ de l'espace affine, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^3$ défini par

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Remarque. Deux couples de points distincts peuvent définir le même vecteur. Par exemple, considérons les points $A = (3, 5)$, $B = (2, 7)$, $C = (1, 1)$ et $D = (0, 3)$, alors on a $\overrightarrow{AB} = (2 - 3, 7 - 5) = (-1, 2) = (0 - 1, 3 - 1) = \overrightarrow{CD}$. Cela est également vrai dans l'espace affine.

On munit les ensembles $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ d'opérations que sont l'addition de vecteurs ainsi que

le produit d'un vecteur par un nombre réel.

Définition 4.6 – Opérations sur les vecteurs. Les ensembles de vecteurs $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis de deux opérations algébriques. **L'addition de deux vecteurs** est définie

- sur $\mathbb{R}^2$, pour tous vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$, par

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

- sur $\mathbb{R}^3$, pour tous vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, par

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).$$

Le produit d'un vecteur par un réel est défini

- sur $\mathbb{R}^2$, pour tout vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et tout réel λ , par

$$\lambda \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2),$$

- sur $\mathbb{R}^3$, pour tout vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et tout réel λ , par

$$\lambda \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3).$$

On peut représenter, comme à la figure 4.1, les vecteurs comme des flèches qui modélisent des déplacements « rectilignes ».



Figure 4.1 – Représentation graphique des opérations sur les vecteurs

Remarques.

- Le vecteur nul $\vec{0} = (0, 0)$ joue un rôle particulier pour l'addition. En effet, pour tout vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, on a $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$. On dira que $\vec{0}$ est l'élément neutre de l'addition. Le vecteur nul de l'espace joue le même rôle.
- Tout vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ possède un inverse pour l'addition. En effet, à $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, on associe le vecteur $-\vec{u} = (-u_1, -u_2)$ qui est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et tel que

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (u_1, u_2) + (-u_1, -u_2) = (0, 0) = \vec{0} = -\vec{u} + \vec{u}.$$

De manière similaire, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ possède un inverse pour l'addition.

- On prendra garde à bien différencier les points $P = (x_P, y_P)$ du plan affine, qui possèdent chacun deux coordonnées réelles, des vecteurs du plan $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. En effet, on peut additionner des vecteurs et les multiplier par des nombres réels, alors que ces opérations n'ont aucun sens pour les points du plan. Cette distinction vaut également pour les points de l'espace affine et les vecteurs de $\mathbb{R}^3$. La notation des vecteurs avec une flèche est là pour vous aider à faire cette distinction.

Les deux opérations sur les vecteurs satisfont certaines propriétés calculatoires qui simplifieront notamment le parenthésage des calculs.

Proposition 4.7 – Structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :

- l'associativité de la somme : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$,
- la distributivité du produit : $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$,
- l'associativité du produit : $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$.

Exercice 4.8. En introduisant des coordonnées pour les vecteurs, démontrer la proposition précédente.

Proposition 4.9 – Relation de Chasles. Soient A, B et C , trois points du plan affine ou de l'espace affine. On a la relation dite de Chasles $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

Exercice 4.10. Démontrer la relation de Chasles dans le cas du plan affine.

Exemple. Soient $A = (3, 1)$, $B = (0, 2)$ et $C = (-1, -1)$, alors $\vec{AB} = (-3, 1)$, $\vec{BC} = (-1, -3)$ et $\vec{AB} + \vec{BC} = (-3, 1) + (-1, -3) = (-4, -2) = \vec{AC}$.

4.1.2 Vecteurs colinéaires

On a motivé l'introduction des vecteurs comme un objet encodant la notion de « déplacement rectiligne ». La notion de **colinéarité** va nous permettre de savoir si deux vecteurs modélisent la même « direction ».

Définition 4.11 – Vecteurs colinéaires. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** s'il existe un réel λ non nul tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Exemples.

- Les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ $\vec{u} = (1, 2)$ et $\vec{v} = (-2, -4)$ sont colinéaires car on a $\vec{v} = (-2, -4) = -2(1, 2) = -2\vec{u}$.
- Les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $\vec{u} = (1, 2, 5)$ et $\vec{v} = (-2, -4, -10)$ sont colinéaires car on a $\vec{v} = (-2, -4, -10) = -2(1, 2, 5) = -2\vec{u}$.

Colinéarité dans $\mathbb{R}^2$

À la manière de la définition 3.15, on introduit une notion de déterminant pour deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, qui nous permet de tester si deux vecteurs sont colinéaires ou non.

Définition 4.12 – Déterminant de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Pour deux vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$, on appelle **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$ donné par $\det(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_2 - v_1 u_2$.

Exercice 4.13. Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$ et $\det(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{w}) + \det(\vec{v}, \vec{w})$.

Proposition 4.14. Deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$, $\vec{u}_1 = (u_1, u_2)$ et $\vec{u}_2 = (v_1, v_2)$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = u_1 v_2 - v_1 u_2 = 0$.

Démonstration. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}_1 = (u_1, u_2)$ et $\vec{u}_2 = (v_1, v_2)$ sont colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{u}_1 = \lambda \vec{u}_2$, c'est-à-dire tel que $u_1 = \lambda v_1$ et $u_2 = \lambda v_2$. Or, d'après la proposition 3.16, un tel λ existe si et seulement si $u_1 v_2 - v_1 u_2 = 0$. $\square$

Exercice 4.15. Déterminer si les vecteurs suivants sont colinéaires ou non :

1. $\vec{u} = (-2, -4)$ et $\vec{v} = (5, 3)$,
2. $\vec{u} = (-2, -4)$ et $\vec{v} = (1, 2)$,
3. $\vec{u} = (-3, 2)$ et $\vec{v} = (-2, 3)$,
4. $\vec{u} = (-2, 1)$ et $\vec{v} = (10, -5)$.

Colinéarité dans $\mathbb{R}^3$

Tester la colinéarité de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ peut se faire de façon similaire en calculant trois déterminants.

Proposition 4.16. Deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sont colinéaires si et seulement si $u_1 v_2 - u_2 v_1 = u_1 v_3 - u_3 v_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2 = 0$.

Démonstration. Cela découle directement du lemme 3.22. $\square$

4.1.3 Vecteurs coplanaires

Dans cette sous-section, on étend la notion de colinéarité et on se demande, si on prend deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, quels sont les vecteurs que l'on peut écrire sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$ avec a et b dans $\mathbb{R}$.

Définition 4.17 – Vecteurs coplanaires. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. On dit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** s'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. On dira alors que $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarque. Commençons par constater que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, pour tout vecteur $\vec{w}$, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, car on a $\vec{v} = \lambda\vec{u} + 0\vec{w}$.

Dans la suite, on va constater que cette notion de vecteurs coplanaires n'est pas intéressante dans le cas de $\mathbb{R}^2$, mais c'est de là que vient la terminologie. En revanche, cette notion sera importante dans le cas des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$

Dans le cas de $\mathbb{R}^2$, trois vecteurs sont toujours coplanaires. On a déjà vu que c'est le cas quand deux de ces vecteurs sont colinéaires. On montre le reste de cette affirmation dans le théorème suivant.

Théorème 4.18 – Bases de $\mathbb{R}^2$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls non colinéaires de $\mathbb{R}^2$. Alors, pour tout vecteur $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique couple (λ, μ) de nombres réels tel que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Démonstration. On considère $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$. Soit $\vec{w} = (w_1, w_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$: on cherche à déterminer s'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ ce qui est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} u_1\lambda + v_1\mu = w_1 \\ u_2\lambda + v_2\mu = w_2 \end{cases}$$

Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, d'après la proposition 4.14, $u_1v_2 - v_1u_2 \neq 0$, donc d'après la proposition 3.10, le système admet une unique solution, d'où le résultat. $\square$

Définition 4.19 – Base de $\mathbb{R}^2$. Un couple de vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$ est appelée une **base de $\mathbb{R}^2$** .

Exemple – Base canonique de $\mathbb{R}^2$. Dans $\mathbb{R}^2$, on a une base « favorite » : c'est le couple de vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ avec $\vec{e}_1 = (1, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1)$. Ces deux vecteurs sont bien non colinéaires et pour tout vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2)$, on a, d'après les opérations sur les vecteurs présentées à la définition 4.6, $(u_1, u_2) = u_1(1, 0) + u_2(0, 1)$. La base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est appelée **la base canonique de $\mathbb{R}^2$** .

Vecteurs coplanaires de $\mathbb{R}^3$

On a déjà vu que pour trois vecteurs, si deux d'entre eux sont colinéaires, alors ils sont coplanaires. Fixons $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non nuls et non colinéaires. Faisons deux hypothèses qui ne nuisent pas à la généralité de notre propos :

- comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, on suppose que $u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0$,
- comme $\vec{u}$ est non nul, on suppose que $u_1 \neq 0$.

On considère $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ et on cherche à déterminer des conditions sur ses coordonnées pour que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires. Ces trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si le système d'inconnues s et t

$$\begin{cases} u_1 s + v_1 t = w_1 & (L_1) \\ u_2 s + v_2 t = w_2 & (L_2) \\ u_3 s + v_3 t = w_3 & (L_3) \end{cases}$$

admet une solution. Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} \boxed{u_1} s + v_1 t = w_1 & (L_1) \\ \boxed{(u_1 v_2 - u_2 v_1)} t = u_1 w_2 - u_2 w_1 & (L_2 \leftarrow u_1 L_2 - u_2 L_1) \\ \boxed{(u_1 v_3 - u_3 v_1)} t = u_1 w_3 - u_3 w_1 & (L_3 \leftarrow u_1 L_3 - u_3 L_1) \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} \boxed{u_1} s + v_1 t = w_1 & (L_1) \\ \boxed{(u_1 v_2 - u_2 v_1)} t = u_1 w_2 - u_2 w_1 & (L_2) \\ 0 = \varphi & (L_3 \leftarrow (u_1 v_2 - u_2 v_1) L_3 - (u_1 v_3 - u_3 v_1) L_1) \end{cases}$$

où $\varphi = u_1(u_1 v_2 - u_2 v_1)w_3 - u_3(u_1 v_2 - u_2 v_1)w_1 - u_1(u_1 v_3 - u_3 v_1)w_2 + u_2(u_1 v_3 - u_3 v_1)w_1$. Ainsi, ce système admet une solution si et seulement si

$$(v_3 u_2 - u_3 v_2)w_1 - (u_1 v_3 - u_3 v_1)w_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)w_3 = 0.$$

On arrive ainsi à la proposition suivante.

Proposition 4.20. Soient $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non nuls et non colinéaires. Un vecteur $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ est coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si

$$(v_3 u_2 - u_3 v_2)w_1 - (u_1 v_3 - u_3 v_1)w_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)w_3 = 0.$$

Démonstration. Découle de ce qui précède : le cas $u_1 = 0$ ou $u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$ se traite en choisissant un pivot différent dans les étapes de simplifications du système. $\square$

Exemple. Soient $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $\vec{v} = (3, 2, 1)$. Le vecteur $\vec{w} = (1, 1, 1)$ est coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ car $(2 \times 1 - 3 \times 2) \times 1 - (1 \times 1 - 3 \times 3) \times 1 + (1 \times 2 - 2 \times 3) \times 1 = 0$.

Exercice 4.21. Déterminer si les triplets de vecteurs suivants sont coplanaires ou non :

1. $\vec{u}_1 = (4, 1, 3)$, $\vec{v}_1 = (2, -1, 5)$ et $\vec{u}_1 = (10, -1, 11)$,
2. $\vec{u}_2 = (3, -1, -5)$, $\vec{v}_2 = (7, 2, -3)$ et $\vec{u}_2 = (1, 1, 1)$,
3. $\vec{u}_3 = (7, 4, 2)$, $\vec{v}_3 = (6, 9, -1)$ et $\vec{u}_3 = (7, 2, 3)$,
4. $\vec{u}_4 = (6, 6, -3)$, $\vec{v}_4 = (5, -4, 2)$ et $\vec{u}_4 = (6, -4, 2)$.

Terminons cette section en montrant que si l'on cherche à généraliser la notion de « coplanarité » pour une famille de quatre vecteurs de l'espace, notion que l'on pourrait nommer « cospatialité », alors on tombe sur le même type de limite que pour la « coplanarité » dans $\mathbb{R}^2$.

Théorème 4.22 – Base de $\mathbb{R}^3$. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non coplanaires. Alors pour tout vecteur $\vec{h} \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique triplet de réels (r, s, t) tel que

$$\vec{h} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}.$$

Démonstration. On admet la preuve de ce résultat : elle ne découle que d'une résolution de système avec le pivot de Gauss, qui admet une unique solution si et seulement si

$$(v_3 u_2 - u_3 v_2)w_1 - (u_1 v_3 - u_3 v_1)w_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)w_3 \neq 0,$$

avec $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. $\square$

Définition 4.23 – Base de $\mathbb{R}^3$. Un triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non coplanaires est appelé une **base de $\mathbb{R}^3$** .

4.2. Géométrie du plan affine

4.2.1 Équations paramétriques

Commençons par définir la notion de droite dans le plan affine : cette définition part de l'idée qu'une droite est la donnée d'un point et d'une direction « rectiligne » modélisée par un vecteur.

Définition 4.24 – Droite du plan affine. Étant donné un point $P = (x_P, y_P)$ du plan affine et un vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on appelle **droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par P** , le sous-ensemble du plan affine suivant

$$P + t\vec{u} = \{(x_P + tu_1, y_P + tu_2), t \in \mathbb{R}\}.$$

Autrement dit, la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par le point P est l'ensemble des points du plan affine $M = (x, y)$ tel qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\begin{cases} x &= u_1 t + x_P \\ y &= u_2 t + y_P \end{cases}.$$

Une telle description est appelée **équation paramétrique de la droite**. On dira que le vecteur $\vec{u}$ dirige la droite.

Remarque. On prendra garde au fait que le vecteur directeur d'une droite est un vecteur non nul.

Proposition 4.25 – Premier postulat d'Euclide. Étant donnés deux points distincts $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$, il existe une **unique** droite notée (AB) qui passe par A et B . Elle est de vecteur directeur $\vec{AB}$ et une équation paramétrique de (AB) est

$$\begin{cases} x &= (x_B - x_A)t + x_A \\ y &= (y_B - y_A)t + y_A \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Pour le paramètre $t = 0$, on a $x = x_A$ et $y = y_A$ donc le point A appartient à la droite (AB) . De même, pour le paramètre $t = 1$, on obtient $x = (x_B - x_A) + x_A = x_B$ et $y = y_B$ donc le point B est un point de la droite (AB) . Montrons que cette droite est unique. Considérons $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u} = (u_1, u_2) \neq (0, 0)$ et passant par le point $P = (x_P, y_P)$, donc d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x &= u_1 s + x_P \\ y &= u_2 s + y_P \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Supposons que A et B soient deux points de $\mathcal{D}$. Montrons qu'alors $\mathcal{D} = (AB)$. Le point A est un point de $\mathcal{D}$ et le point B est un point de $\mathcal{D}$ distinct de A donc il existe deux paramètres réels s_A et s_B avec $s_B \neq s_A$ tels que

$$\begin{cases} x_A = u_1 s_A + x_P \\ y_A = u_2 s_A + y_P \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_B = u_1 s_B + x_P \\ y_B = u_2 s_B + y_P \end{cases}.$$

On peut donc déterminer u_1, u_2, x_P et y_P en fonction des coordonnées de A et B et en fonction des paramètres s_A et s_B . En effet, on a les systèmes

$$\begin{cases} u_1 s_A + x_P = x_A \\ u_1 s_B + x_P = x_B \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u_2 s_A + y_P = y_A \\ u_2 s_B + y_P = y_B \end{cases}.$$

On utilise le pivot de Gauss pour exprimer u_1 et x_P en fonction de x_A, x_B, s_A, s_B :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u_1 s_A + \boxed{1} x_P = x_A & (L_1) \\ u_1 s_B + x_P = x_B & (L_2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} u_1 s_A + \boxed{1} x_P = x_A & (L_1) \\ \boxed{(s_B - s_A)} u_1 = x_B - x_A & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_P = x_A - \frac{s_A}{s_B - s_A} (x_B - x_A) & (L_1 \leftarrow L_1 - \frac{s_A}{s_B - s_A} L_2) \\ u_1 = \frac{1}{s_B - s_A} (x_B - x_A) & (L_2 \leftarrow \frac{1}{s_B - s_A} L_2) \end{cases} \end{aligned}$$

De manière similaire, on a l'équivalence

$$\begin{cases} u_2 s_A + y_P = y_A \\ u_2 s_B + y_P = y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_P = y_A - \frac{s_A}{s_B - s_A} (y_B - y_A) \\ u_2 = \frac{1}{s_B - s_A} (y_B - y_A) \end{cases}.$$

L'équation paramétrique de $\mathcal{D}$ se réécrit donc de la manière suivante :

$$\begin{cases} x = (x_B - x_A) \frac{s - s_A}{s_B - s_A} + x_A \\ y = (y_B - y_A) \frac{s - s_A}{s_B - s_A} + y_A \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Rappelons que la droite (AB) a pour équation paramétrique

$$\begin{cases} x = (x_B - x_A)t + x_A \\ y = (y_B - y_A)t + y_A \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Montrons que $(AB) = \mathcal{D}$ par double inclusion. Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ le point de $\mathcal{D}$ de paramètre $s_0 \in \mathbb{R}$. Alors, on pose $t_0 = \frac{s_0 - s_A}{s_B - s_A}$ et on constate que M_0 est le point de (AB) de paramètre t_0 . Tout point de $\mathcal{D}$ est un point de (AB) donc $\mathcal{D} \subset (AB)$. Réciproquement, considérons $M_1 = (x_1, y_1)$ le point de (AB) de paramètre $t_1 \in \mathbb{R}$.

Alors on pose $s_1 = (s_B - s_A)t_1 + s_A$ et on constate que M_1 est un point de la droite $\mathcal{D}$. Tout point de (AB) est un point de $\mathcal{D}$ donc $(AB) \subset \mathcal{D}$. On a donc montré que $(AB) = \mathcal{D}$, d'où l'unicité de la droite. $\square$

Exemple. Soient $A = (2, 1)$ et $B = (1, 2)$, deux points du plan affine. La droite (AB) admet pour équation paramétrique

$$\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = t + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On illustre ceci par la figure 4.2.

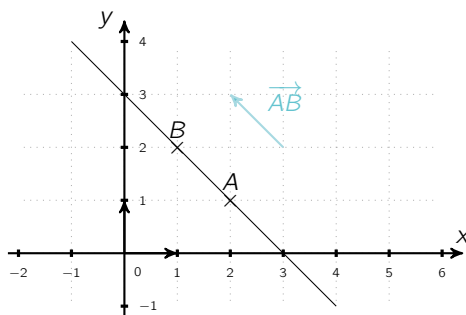


Figure 4.2 – Premier postulat d'Euclide

Exercice 4.26. Donner une équation paramétrique de la droite (AB) pour les couples de points suivants :

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $A = (1, 1)$ et $B = (2, 1)$, | 3. $A = (0, 1)$ et $B = (2, 1)$, |
| 2. $A = (3, 1)$ et $B = (1, 2)$, | 4. $A = (4, 1)$ et $B = (0, 2)$. |

Remarque. On a démontré l'unicité de la droite (AB) mais on a bien constaté que celle-ci admet différentes équations paramétriques. Par exemple, l'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = 3(x_B - x_A)t + x_B \\ y = 3(y_B - y_A)t + y_B \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

est une autre équation de la droite (AB) (on a pris $3t + 1$ au lieu de t , $t \in \mathbb{R}$).

Corollaire 4.27. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par $P = (x_P, y_P)$ et dirigée par le vecteur non nul $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Alors pour tout point $Q \in \mathcal{D}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'équation

paramétrique

$$\begin{cases} x &= \lambda u_1 t + x_Q, \\ y &= \lambda u_2 t + y_Q. \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

est une équation de la droite $\mathcal{D}$.

Démonstration. Pour commencer, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a les égalités

$$\mathcal{D} = \{(u_1 t + x_P, u_2 t + y_P), t \in \mathbb{R}\} = \left\{ \left(\lambda u_1 \frac{t}{\lambda} + x_P, \lambda u_2 \frac{t}{\lambda} + y_P \right), t \in \mathbb{R} \right\}$$

donc, $\mathcal{D} = \{(\lambda u_1 s + x_P, \lambda u_2 s + y_P), s \in \mathbb{R}\}$ d'où, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{cases} x &= \lambda u_1 t + x_P, \\ y &= \lambda u_2 t + y_P. \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

est une équation paramétrique de $\mathcal{D}$. Si $Q \in \mathcal{D}$, alors $\overrightarrow{PQ}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ donc est colinéaire à $\vec{u}$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{PQ} = \lambda \vec{u}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{(\lambda u_1 t + x_P, \lambda u_2 t + y_P), t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\lambda u_1(t-1) + (x_Q - x_P) + x_P, \lambda u_2(t-1) + (y_Q - y_P) + y_P), t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{D} = \{(\lambda u_1 s + x_Q, \lambda u_2 s + y_Q), s \in \mathbb{R}\}$ d'où le résultat. $\square$

On a défini les droites du plan comme les ensembles engendrés par un point et un vecteur directeur, c'est-à-dire comme la donnée d'une équation paramétrique

$$\begin{cases} x &= u_1 t + x_P, \\ y &= u_2 t + y_P \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On peut se poser la question : que se passe-t-il si on considère un ensemble similaire engendré par un point et deux vecteurs. Soient deux vecteurs non nuls $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et $P = (x_P, y_P)$ un point du plan affine. On peut se poser la question suivante : quel sous-ensemble du plan affine décrit l'équation paramétrique ?

$$\begin{cases} x &= u_1 t + v_1 s + x_P, \\ y &= u_2 t + v_2 s + y_P \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

On constate rapidement que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, alors l'équation paramétrique

$$\begin{cases} x &= u_1(t + \lambda s) + x_P, \\ y &= u_2(t + \lambda s) + y_P \end{cases}, s, t \in \mathbb{R},$$

est une équation de la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par P . Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, on a le résultat suivant.

Proposition 4.28. Soient deux vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$, non nuls et non colinéaires, et $P = (x_P, y_P)$ un point du plan affine. Pour tout point $M = (x, y)$ du plan, il existe un unique couple de paramètres réels (s, t) tels que

$$\begin{cases} x = u_1 t + v_1 s + x_P \\ y = u_2 t + v_2 s + y_P \end{cases}$$

Démonstration. Soit $M = (x, y)$ un point du plan fixé. Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, alors d'après la proposition 4.14, on a $u_1 v_2 - v_1 u_2 \neq 0$ donc le déterminant du système d'inconnues t et s

$$\begin{cases} u_1 t + v_1 s = x - x_P \\ u_2 t + v_2 s = y - y_P \end{cases}$$

est non nul. Par le théorème 4.18, avec $\vec{w} = \overrightarrow{PM}$, nous affirons que le système admet une unique solution, d'où le résultat. $\square$

La proposition 4.28 motive alors la définition suivante.

Définition 4.29 – Repère du plan affine. Soient A, B et C trois points du plan non alignés. Le triplet $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est appelé un **repère** du plan affine. Tout point du plan P est la donnée de deux réels s et t tels que $P = A + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$, le couple (s, t) désigne alors les **coordonnées de P dans le repère** $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Exemple. Dans les chapitres suivants, nous considérerons le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan affine, où $O = (0, 0)$, $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ avec $I = (1, 0)$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ avec $J = (0, 1)$.

4.2.2 Équations cartésiennes des droites du plan

La description d'une droite donnée par un point et un vecteur directeur est bien pratique pour la représenter. En revanche, pour savoir si un point M est un point de la droite, cela nécessite du calcul. Par exemple, prenons la droite $\mathcal{D}$ passant par $P = (x_P, y_P)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors le point $M = (x, y)$ du plan affine est un point de $\mathcal{D}$ s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} u_1 t + x_P = x \\ u_2 t + y_P = y \end{cases}$$

Autrement dit le point M appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si le système précédent d'inconnue t admet une solution. Or, le système précédent est équivalent au système

$$\begin{cases} u_1 t = x - x_P \\ u_2 t = y - y_P \end{cases}.$$

et celui-ci admet une solution si et seulement si le vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2)$ est colinéaire au vecteur $\vec{PM} = (x - x_P, y - y_P)$. Or, d'après la proposition 4.14, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{PM}$ sont colinéaires si et seulement si $-u_2(x - x_P) + u_1(y - y_P) = 0$.

Proposition 4.30 – Deux descriptions des droites du plan.

- Considérons la droite passant par $P = (x_P, y_P)$ de vecteur directeur $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Alors les coordonnées d'un point $M = (x, y)$ de cette droite sont solutions de l'équation $-u_2(x - x_P) + u_1(y - y_P) = 0$.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$. L'ensemble des points du plan affine dont les coordonnées satisfont l'équation $ax + by = c$ est une droite de vecteur directeur $(-b, a)$. L'équation $ax + by = c$ est une **équation cartésienne** de la droite.

Démonstration. Le premier point découle de ce qui précède. Pour le second point, on a déjà vu à la proposition 3.4 que toute équation $ax + by = c$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $c \in \mathbb{R}$, admet un ensemble de solutions paramétré par un réel :

- si $a \neq 0$, l'ensemble des solutions de l'équation $ax + by = c$ est $\{(-\frac{b}{a}t + \frac{c}{a}, t), t \in \mathbb{R}\}$, qui est égal à $\{(-bt + \frac{c}{a}, at), t \in \mathbb{R}\}$,
- si $a = 0$, alors $b \neq 0$ et l'ensemble des solutions de $ax + by = c$ est $\{(t, \frac{c}{b}), t \in \mathbb{R}\}$ qui est égal à $\{(-bt, \frac{c}{b}), t \in \mathbb{R}\}$.

Dans tous les cas, on reconnaît ici des droites du plan de vecteur directeur $(-b, a)$. Ainsi, l'ensemble des points M dont les coordonnées sont solutions d'une équation $ax + by = c$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $c \in \mathbb{R}$ est une droite du plan affine. $\square$

Remarque. On remarque rapidement, grâce à la proposition 3.3, que l'équation cartésienne d'une droite n'est pas unique. En effet, si une droite $ax + by = c$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est une équation cartésienne d'une droite, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'équation $\lambda ax + \lambda by = \lambda c$ décrit la même droite. Si $b \neq 0$, l'équation $ax + by = c$ de la droite $\mathcal{D}$ est équivalente à $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$: cette dernière est l'**équation réduite** de $\mathcal{D}$ et la quantité $-\frac{a}{b}$ est le **coefficient directeur** de $\mathcal{D}$.

Exemple. On considère les points $A = (7, 4)$ et $B = (-2, 3)$. La droite (AB) a pour équation cartésienne $-(3 - 4)(x - 7) + (-2 - 7)(y - 4) = 0$ ou, autrement dit,

$$x - 9y = -29.$$

Exercice 4.31. Donner une équation cartésienne de la droite (AB) pour les couples de points suivants :

1. $A = (1, 1)$ et $B = (2, 1)$,

3. $A = (0, 1)$ et $B = (2, 3)$,

2. $A = (3, 1)$ et $B = (1, 2)$,

4. $A = (4, 1)$ et $B = (0, 2)$.

À retenir. On peut finalement faire le bilan suivant :

Définition	Équation cartésienne	Équation paramétrique
$\mathcal{D}$ est la droite passant par $P = (x_P, y_P)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (a, b)$	$-b(x - x_P) + a(y - y_P) = 0$	$\begin{cases} x(t) = x_P + at \\ y(t) = y_P + bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Exemple – Passer d'une équation paramétrique à une équation cartésienne.

On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = 2t + 1 \\ y(t) = 3t - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Déterminons une équation cartésienne de $\mathcal{D}$. La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $(2, 3)$. De plus, elle passe par le point $(1, -2)$. Ainsi, elle admet pour équation cartésienne $-3(x - 1) + 2(y - (-2)) = 0$ qui est équivalente à $-3x + 2y + 7 = 0$.

Exercice 4.32. Donner une équation cartésienne des droites

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x(t) = 3t + 2 \\ y(t) = 2t - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' : \begin{cases} x(t) = -t + 2 \\ y(t) = 3t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Exemple – Passer d'une équation cartésienne à une équation paramétrique.

On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $2x + 3y - 4 = 0$. Déterminons une équation paramétrique de $\mathcal{D}$. La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $(-3, 2)$. De plus, elle passe par le point $(2, 0)$. Ainsi, elle admet pour équation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = -3t + 2 \\ y(t) = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.33. Soit la droite $\mathcal{D}$ du plan définie par l'équation $2x - y + 6 = 0$ et $\mathcal{D}'$ d'équation cartésienne $2x - 3ay + 4 = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$. Déterminer une équation paramétrique des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Exercice 4.34. On considère les points $A = (-1, 1)$, $B = (2, 1)$ et $C = (1, 3)$. Si Q est un point tel que $\overrightarrow{BQ} = 3\overrightarrow{QC}$, donner une équation cartésienne et une équation paramétrique décrivant chacune la droite (AQ) .

4.2.3 Intersection et parallélisme

Considérons à présent deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations cartésiennes respectives

$$\mathcal{D}_1: a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2: a_2x + b_2y = c_2,$$

avec $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$ et $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$. On cherche les points P qui appartiennent aux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, c'est-à-dire les points P dont les coordonnées (x_P, y_P) sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

D'après la proposition 3.10, trois cas s'offrent à nous.

- Si $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$, le système admet une unique solution : les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ s'intersectent donc en un unique point.
- Si $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$, alors
 - ▷ ou bien le système n'admet aucune solution : les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ n'ont aucun point commun,
 - ▷ ou bien le système admet une infinité de solutions : les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont alors les mêmes droites (on dira également qu'elles sont **confondues**).

Définition 4.35. Deux droites **distinctes** sont dites **parallèles** si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

On reformule dans la proposition suivante les différents cas possibles d'intersections de deux droites distinctes.

Proposition 4.36. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites du plan affine respectivement de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$

- s'intersectent en un unique point si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires,
- sont parallèles ou confondues si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Démonstration. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites respectivement de vecteur directeur $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Il existe c_1 et c_2 deux réels, tels que $\mathcal{D}_1$ soit d'équation

cartésienne $-u_2x + u_1y = c_1$ et $\mathcal{D}_2$ soit d'équation cartésienne $-v_2x + v_1y = c_2$. Ainsi, l'intersection $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est l'ensemble des solutions du système linéaire

$$\begin{cases} -u_2x + u_1y = c_1 \\ -v_2x + v_1y = c_2 \end{cases}.$$

D'après la proposition 3.10, ce système admet une unique solution si et seulement si $u_1v_2 - v_1u_2 \neq 0$, ce qui, d'après la proposition 4.14, est équivalent à ce que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires. $\square$

Dans la suite, on présente des méthodes de calculs d'intersections de deux droites en fonction des présentations de ces deux droites.

Exemple – Intersection de deux droites données par des équations cartésiennes.

On considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ respectivement d'équations cartésiennes $2x + 3y = -1$ et $3x + 4y = 1$. Pour déterminer l'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, on doit résoudre le système

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}.$$

On applique pour cela l'algorithme du pivot de Gauss. D'après l'exemple traité page 41, les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ s'intersectent au point $(-8, -5)$.

Exercice 4.37 – Intersection de deux droites données par des équations paramétriques. Considérons les droites

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } \mathcal{D}': \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que l'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est caractérisée par le système

$$\begin{cases} 3t_1 - 2t_2 = -1 \\ t_1 - t_2 = 3 \end{cases}.$$

2. En résolvant le système précédent, montrer que l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est le point de coordonnées $(-20, -6)$.

Exercice 4.38. Déterminer les éventuels points d'intersection des deux droites d'équations paramétriques

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x = 3t + 3 \\ y = -3t - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } \mathcal{D}': \begin{cases} x = -3t \\ y = 2t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.39 – Intersection : équation cartésienne et équation paramétrique.

Considérons les droites

$$\mathcal{D}_1: 2x + 3y + 4 = 0 \text{ et } \mathcal{D}_2: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. En substituant les variables x et y de l'équation cartésienne de $\mathcal{D}_1$ par la paramétrisation de $\mathcal{D}_2$, déterminer que le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est le point de $\mathcal{D}_2$ paramètre $t = -9$.
2. En déduire que le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est de coordonnées $(-17, 10)$.

Exercice 4.40. Déterminer, s'il existe, le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ suivantes :

1. $\mathcal{D}: \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}': 2x + 3y - 4 = 0$,
2. $\mathcal{D}: 3x - 2y + 7 = 0$ et $\mathcal{D}': \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$,
3. $\mathcal{D}: \begin{cases} x = 3t + 3 \\ y = -3t - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}': 2x + 4y - 1 = 0$,
4. $\mathcal{D}: x + y - 2 = 0$ et $\mathcal{D}': \begin{cases} x = -3t \\ y = 2t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.41 – V^e postulat d'Euclide. Soient $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by = c$ et P un point du plan qui n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$, i.e. $P \notin \mathcal{D}$. Alors il existe une unique droite Δ passant par P parallèle à $\mathcal{D}$. Une équation cartésienne de la droite Δ est $a(x - x_P) + b(y - y_P) = 0$.

Démonstration. Soit $ax + by = c$ une équation de $\mathcal{D}$ et soit $P = (x_P, y_P)$ avec $P \notin \mathcal{D}$. On considère Δ , la droite d'équation $a(x - x_P) + b(y - y_P) = 0$. On vérifie facilement que P est un point de Δ . De plus, $\mathcal{D}$ et Δ sont parallèles. En effet, on a $a \times b - a \times b = 0$, donc $\mathcal{D}$ et Δ sont parallèles ou confondues, mais comme P est un point de Δ mais pas un point de $\mathcal{D}$, donc elles ne sont pas confondues. $\square$

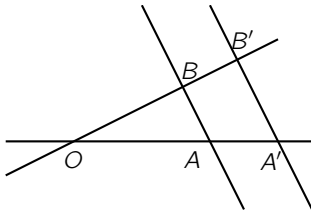
Exemple. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $2x + 3y - 4 = 0$ et P le point de coordonnées $(1, 1)$. On constate facilement que P n'est pas un point de la droite $\mathcal{D}$. La droite $\mathcal{D}'$, d'équation $2(x - 1) + 3(y - 1) = 0$, passe par P car $2(1 - 1) + 3(1 - 1) = 0$ et est parallèle à $\mathcal{D}$ car $2 \times 3 - 2 \times 3 = 0$.

Exercice 4.42. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par le point P pour les données suivantes :

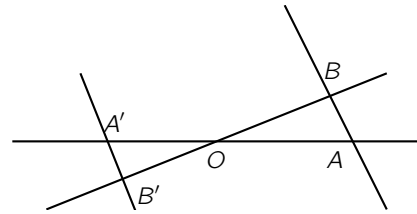
1. $\mathcal{D}: 2x + 3y = 4$ et $P = (2, 1)$,
2. $\mathcal{D}: 3x + 2y = 2$ et $P = (-1, 1)$,
3. $\mathcal{D}: 4x = 4$ et $P = (2, 2)$,
4. $\mathcal{D}: 3y = 4$ et $P = (1, 7)$.

On finit cette section avec un théorème classique de géométrie, dont on donne une formulation vectorielle.

Théorème 4.43 – Théorème de Thalès. Soient O, A, A', B et B' des points du plan affine deux à deux distincts tels que $(OA) = (OA')$, $(OB) = (OB')$ et $(OA) \neq (OB)$. Les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$.



(a) Configuration en triangle



(b) Configuration en papillon

Figure 4.3 – Théorème de Thalès

Démonstration. Soient O, A, A', B et B' des points deux à deux distincts du plan affine tels que $(OA) = (OA')$, $(OB) = (OB')$ et $(OA) \neq (OB)$. Alors, il existe $\mu, \nu \in \mathbb{R}^*$ tels que $\overrightarrow{OA} = \mu \overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{OB} = \nu \overrightarrow{OB'}$. De plus, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires, ce qui implique notamment que les vecteurs $\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ne sont également pas colinéaires. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{OA'} = k \overrightarrow{A'B'}$ alors

$$\overrightarrow{OB} = \nu \overrightarrow{OB'} = \nu(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'}) = \nu(1 + k) \overrightarrow{OA'} = \frac{\nu(1 + k)}{\mu} \overrightarrow{OA}$$

d'où la contradiction. Supposons que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$. La relation de Chasles $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ implique que

$$\nu \overrightarrow{OA'} + \nu \overrightarrow{A'B'} = \nu \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \mu \overrightarrow{OA'} + \lambda \overrightarrow{A'B'}.$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ne sont pas colinéaires, d'après le théorème 4.18, l'écriture du vecteur $\overrightarrow{OB}$ est unique dans la base $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{A'B'})$, donc $\mu = \nu = \lambda$. Réciproquement, si $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$, alors les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles. $\square$

4.3. Géométrie de l'espace affine

4.3.1 Droites et plans de l'espace

De la même manière que dans le plan affine, on définit une droite de l'espace par la donnée d'un point et d'un vecteur.

Définition 4.44 – Droite de l'espace affine. Étant donné un point $P = (x_P, y_P, z_P)$ de l'espace affine et un vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ non nul, on appelle **droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par P** le sous-ensemble de l'espace affine suivant

$$\{(u_1 t + x_P, u_2 t + y_P, u_3 t + z_P), t \in \mathbb{R}\}.$$

Autrement dit, la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par le point P est l'ensemble des points de l'espace affine $M = (x, y, z)$ tel qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x = u_1 t + x_P \\ y = u_2 t + y_P \\ z = u_3 t + z_P \end{cases}.$$

Une telle description est appelée **équation paramétrique de la droite**.

On généralise à l'espace affine le premier postulat d'Euclide : par deux points distincts passe une unique droite.

Proposition 4.45. Soient $A = (x_A, y_A, z_A)$ et $B = (x_B, y_B, z_B)$ deux points distincts de l'espace affine. Il existe une unique droite, notée (AB) , passant par les points A et B . Elle est de vecteur directeur $\vec{AB}$ et une équation paramétrique de (AB) est

$$\begin{cases} x = (x_B - x_A)t + x_A \\ y = (y_B - y_A)t + y_A \\ z = (z_B - z_A)t + z_A \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. La démonstration est similaire à la démonstration du premier postulat d'Euclide dans le plan affine (voir proposition 4.25). $\square$

Contrairement à la géométrie du plan affine, considérer l'ensemble engendré par un point et deux vecteurs non colinéaires ne nous donne qu'un sous-ensemble de l'espace affine : cela motive la définition suivante.

Définition 4.46 – Plan de l'espace affine. Étant donné un point $P = (x_P, y_P, z_P)$ de l'espace affine et deux vecteurs non nuls $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ non colinéaires, on appelle **plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et passant par P** , le sous-ensemble de l'espace affine suivant $\{(x_P + u_1s + v_1t, y_P + u_2s + v_2t, z_P + u_3s + v_3t), s, t \in \mathbb{R}\}$. Autrement dit, le plan passant par le point P et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points de l'espace affine $M = (x, y, z)$ tel qu'il existe $s, t \in \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\begin{cases} x = u_1s + v_1t + x_P \\ y = u_2s + v_2t + y_P \\ z = u_3s + v_3t + z_P \end{cases}.$$

Une telle description est appelée **équation paramétrique du plan**.

On a vu que par deux points distincts de l'espace affine passe une unique droite. On généralise cela au plan : par trois points non alignés passe un unique plan.

Proposition 4.47. Soient $A(x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ et $C = (x_C, y_C, z_C)$ trois points non alignés de l'espace affine. Il existe un **unique** plan, noté (ABC) , passant par les points A , B et C . Il est dirigé par les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ et une équation paramétrique de (ABC) est

$$\begin{cases} x = (x_B - x_A)s + (x_C - x_A)t + x_A \\ y = (y_B - y_A)s + (y_C - y_A)t + y_A \\ z = (z_B - z_A)s + (z_C - z_A)t + z_A \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. La preuve se fait en généralisant les arguments utilisés dans la démonstration du premier postulat d'Euclide 4.25. $\square$

4.3.2 Équations cartésiennes

Comme dans le plan affine, les équations paramétriques ne nous permettent pas simplement de savoir si un point de l'espace appartient à une droite ou à un plan. Nous allons donc introduire les équations cartésiennes.

Équations cartésiennes de plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace affine passant par le point $P = (x_P, y_P, z_P)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, vecteurs non nuls et non colinéaires. Pour la suite, on fait deux hypothèses qui ne nuisent pas à la généralité du propos :

- comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, on suppose que $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$,
- comme $\vec{u}$ est non nul, on suppose que $u_1 \neq 0$.

Un point de l'espace $M = (x, y, z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si le système d'inconnues s et t

$$\begin{cases} u_1 s + v_1 t = x - x_P & (L_1) \\ u_2 s + v_2 t = y - y_P & (L_2) \\ u_3 s + v_3 t = z - z_P & (L_3) \end{cases}$$

admet une solution. Or, ce système admet une solution si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{PM}$ sont coplanaires, ce qui équivaut, d'après la proposition 4.20, à

$$(v_3 u_2 - u_3 v_2)(x - x_P) - (u_1 v_3 - u_3 v_1)(y - y_P) + (u_1 v_2 - u_2 v_1)(z - z_P) = 0.$$

Proposition 4.48 – Deux descriptions des plans de l'espace.

- Considérons un plan $\mathcal{P}$ de l'espace affine passant par le point $P = (x_P, y_P, z_P)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, vecteurs non nuls et non colinéaires. Alors les coordonnées d'un point $M = (x, y, z)$ de ce plan sont solutions de l'équation

$$(u_1 v_2 - u_2 v_1)(z - z_P) - (u_1 v_3 - u_3 v_1)(y - y_P) + (v_3 u_2 - u_3 v_2)(x - x_P) = 0.$$

- Soient a, b, c, d quatre réels avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. L'ensemble des points de l'espace affine dont les coordonnées satisfont l'équation $ax + by + cz = d$ est un plan. On dit que l'équation $ax + by + cz = d$ est une **équation cartésienne du plan**.

Démonstration. Le premier point découle de ce qui précède. Le second point est une conséquence immédiate de la proposition 3.20. $\square$

Exemple – Passage d'une équation paramétrique à une équation cartésienne.

Considérons le plan $\mathcal{P}$ d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = s + 3t + 2 \\ y = 2s + 2t + 1 \\ z = 3s + t + 3 \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

Ce plan passe donc par le point $P = (2, 1, 3)$ et est dirigé par les vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $\vec{v} = (3, 2, 1)$. Plutôt que d'appliquer directement la proposition 4.48, on utilise la méthode du pivot de Gauss pour obtenir une équation cartésienne du plan. Ainsi, on sait qu'un point $M = (x, y, z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si le système

$$\begin{cases} s + 3t + 2 = x & (L_1) \\ 2s + 2t + 1 = y & (L_2) \\ 3s + t + 3 = z & (L_3) \end{cases}$$

admet une solution. Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} \boxed{1}s + 3t + 2 = x & (L_1) \\ \boxed{-4}t - 3 = -2x + y & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ -8t - 3 = -3x + z & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{cases}$$

qui est lui-même équivalent à

$$\begin{cases} \boxed{1}s + 3t + 2 = x & (L_1) \\ \boxed{-4}t - 3 = -2x + y & (L_2) \\ 3 = x - 2y + z & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \end{cases}$$

donc ce système admet une solution si et seulement si $x - 2y + z = 3$. Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est donc $x - 2y + z = 3$.

Exercice 4.49. Donner une équation cartésienne des plans suivants :

1. $\mathcal{P}_1$ passant par $P_1 = (1, 2, 1)$ et dirigé par $\vec{u}_1 = (1, 2, 3)$ et $\vec{v}_1 = (3, 2, 1)$,
2. $\mathcal{P}_2$ passant par $P_2 = (-1, 3, 2)$ et dirigé par $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$ et $\vec{v}_2 = (3, 4, 0)$,
3. $\mathcal{P}_3$ passant par $P_3 = (7, 5, 1)$ et dirigé par $\vec{u}_3 = (0, -1, 1)$ et $\vec{v}_3 = (6, 3, 2)$,
4. $\mathcal{P}_4$ passant par $P_4 = (0, 0, 7)$ et dirigé par $\vec{u}_4 = (1, 5, 0)$ et $\vec{v}_4 = (6, 3, 0)$.

Exemple – Passage d'une équation cartésienne à une équation paramétrique. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x + 2y + 5z = 9$. Pour en déterminer une équation paramétrique, on détermine les coordonnées de trois points non alignés de ce plan : on choisit de manière quasiment arbitraire trois solutions de l'équation cartésienne $A = (0, -3, 3)$, $B = (0, 2, 1)$ et $C = (3, 0, 0)$. On prendra juste garde à ce que les vecteurs $\vec{AB} = (0, 5, -2)$ et $\vec{AC} = (3, 3, -3)$ ne soient pas colinéaires, en choisissant par exemple les trois points de manière à avoir des 0 dans certaines coordonnées des vecteurs. Finalement, par la proposition 4.47. le plan $\mathcal{P}$ admet donc pour équation paramétrique

$$\begin{cases} x = & 3t \\ y = 5s + 3t - 3 \\ z = -2s - 3t + 3 \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.50. Donner une équation paramétrique des plans définis par les équations cartésiennes suivantes :

1. $\mathcal{P}_1 : x + 2y + 3z = 4$,
2. $\mathcal{P}_2 : 3x - y + 2z = 7$,
3. $\mathcal{P}_3 : 7x + 2y + 4z = 0$,
4. $\mathcal{P}_4 : x = 7$.

Équations cartésiennes de droites

On cherche à obtenir une description similaire pour les droites de l'espace. Considérons donc une droite $\mathcal{D}$ passant par un point $P = (x_P, y_P, z_P)$ et dirigée par le vecteur non nul $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Supposons sans perdre en généralité que $u_1 \neq 0$. Un point $M = (x, y, z)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} \boxed{u_1}t + x_P = x & (L_1) \\ u_2t + y_P = y & (L_2) \\ u_3t + z_P = z & (L_3) \end{cases}.$$

Il est équivalent à

$$\begin{cases} \boxed{u_1}t + x_P = x & (L_1) \\ u_1y_P - u_2x_P = u_1y - u_2x & (L_2 \leftarrow u_1L_2 - u_2L_1) \\ u_1z_P - u_3x_P = u_1z - u_3x & (L_3 \leftarrow u_1L_3 - u_3L_1) \end{cases}$$

qui admet une solution si et seulement si

$$\begin{cases} -u_2(x - x_P) + u_1(y - y_P) = 0 \\ -u_3(x - x_P) + u_1(z - z_P) = 0 \end{cases}.$$

Une droite de l'espace est donc caractérisée par un système de deux équations cartésiennes : elle est donc décrite comme l'intersection de deux plans. Nous reviendrons sur ce point à la proposition 4.54.

Proposition 4.51.

- Considérons une droite $\mathcal{D}$ de l'espace affine passant par le point $P = (x_P, y_P, z_P)$ et dirigée par le vecteur non nul $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Alors, $\mathcal{D}$ est décrite comme l'intersection de deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
- Soient $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2$ et d_2 huit réels tels que $(a_1, b_1, c_1) \neq (0, 0, 0)$ et $(a_2, b_2, c_2) \neq (0, 0, 0)$. Si (a_1, b_1, c_1) est non colinéaire à (a_2, b_2, c_2) , l'intersection de deux plans d'équations cartésiennes $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ et $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ est une droite $\mathcal{D}$. Le système

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

est un **système d'équations cartésiennes** de $\mathcal{D}$.

Démonstration. Le premier point découle de ce qui a été fait précédemment, les cas $b_1 \neq 0$ et $c_1 \neq 0$ étant identiques au cas $a_1 \neq 0$. Le second point est une application

directe de la proposition 3.23. □

Exemple – Passage d'une équation paramétrique à un système d'équations cartésiennes. On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par $P = (1, 3, 5)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (1, 2, 3)$. Un point $M = (x, y, z)$ de l'espace affine appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si le système suivant admet au moins une solution

$$\begin{cases} t + 1 = x \\ 2t + 3 = y \\ 3t + 5 = z \end{cases}.$$

On utilise la méthode du pivot de Gauss pour déterminer quand ce système admet des solutions : Le système

$$\begin{cases} \boxed{1}t + 1 = x & (L_1) \\ 2t + 3 = y & (L_2) \\ 3t + 5 = z & (L_3) \end{cases}$$

est équivalent au système

$$\begin{cases} \boxed{1}t + 1 = x & (L_1) \\ 1 = y - 2x & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ 2 = z - 3x & (L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \end{cases}.$$

Ainsi, un point $M = (x, y, z)$ appartient à la droite si et seulement si

$$\begin{cases} -2x + y = 1 \\ -3x + z = 2 \end{cases}.$$

Le système précédent est donc un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}$.

Remarque. Comme pour les équations paramétriques, une droite n'est pas décrite par un unique système d'équations cartésiennes.

Exercice 4.52. Pour les droites suivantes, donner un système d'équations cartésiennes :

1. la droite $\mathcal{D}_1$ passant par $P_1 = (1, 0, -1)$ et dirigée par $\vec{u}_1 = (3, 2, 1)$,
2. la droite $\mathcal{D}_2$ passant par $P_2 = (1, 2, 3)$ et dirigée par $\vec{u}_2 = (-1, 4, 3)$,
3. la droite $\mathcal{D}_3$ passant par $P_3 = (-3, 2, 0)$ et dirigée par $\vec{u}_3 = (-6, 3, 5)$,
4. la droite $\mathcal{D}_4$ passant par $P_4 = (0, 0, 7)$ et dirigée par $\vec{u}_4 = (1, 0, 0)$.

4.3.3 Intersection et parallélisme

Introduisons la notion de parallélisme entre des objets géométriques de l'espace affine.

Définition 4.53 – Parallélisme.

- Deux droites distinctes sont dites **parallèles** si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Une droite dirigée par un vecteur non nul $\vec{u}$ est **parallèle** à un plan $\mathcal{P}$ si $\mathcal{D}$ n'est pas incluse dans $\mathcal{P}$ et qu'il existe deux points A et B de $\mathcal{P}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
- Un plan $\mathcal{P}_1$, dirigé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est **parallèle** au plan $\mathcal{P}_2$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dirigent $\mathcal{P}_2$ et que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont distincts.

Position relative de deux plans

On s'interroge sur l'intersection de deux plans, que l'on a déjà rencontrée lors de la description des droites de l'espace par des équations cartésiennes.

Proposition 4.54 – Position relative de deux plans. *On considère deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de l'espace d'équations cartésiennes respectives $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ et $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$, avec $(a_1, b_1, c_1) \neq (0, 0, 0)$ et $(a_2, b_2, c_2) \neq (0, 0, 0)$.*

- Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants en une droite si et seulement si (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) ne sont pas colinéaires.
- Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles ou confondus si et seulement si (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont colinéaires.

On illustre cela à la figure 4.4.

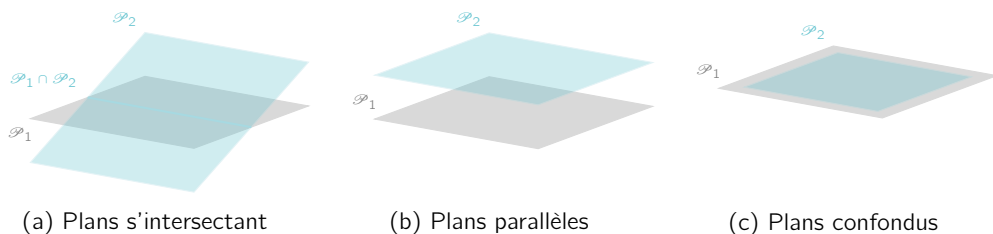


Figure 4.4 – Positions relatives de deux plans

Démonstration. Cela découle directement de la proposition 3.23. □

Exercice 4.55 – Intersection de deux plans. On considère les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ respectivement d'équations cartésiennes $x + 2y + 3z = 4$ et $4x + 3y + 2z = 1$.

1. Constaté que l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est déterminé par le système

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 4x + 3y + 2z = 1 \end{cases}.$$

2. Déterminer les solutions du système précédent pour en déduire que l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est la droite de vecteur directeur $\vec{u} = (1, -2, 1)$ passant par le point $P = (-2, 3, 0)$.

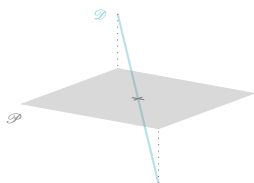
Exercice 4.56. Déterminer l'intersection des plans suivants :

1. $\mathcal{P}_1$ d'équation $3x + 2y + 5z = 5$ et $\mathcal{P}'_1$ d'équation $5x + 3y + 7z = 9$,
2. $\mathcal{P}_2$ d'équation $-x + 2y - z = 1$ et $\mathcal{P}'_2$ d'équation $3x + y - 2z = 4$,
3. $\mathcal{P}_3$ d'équation $4x + 2y + 3z = 1$ et $\mathcal{P}'_3$ d'équation $y - z = 1$,
4. $\mathcal{P}_4$ d'équation $y = 2$ et $\mathcal{P}'_4$ d'équation $x = 5$.

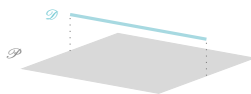
Position relative d'un plan et d'une droite

Proposition 4.57 – Position relative d'une droite et d'un plan. On considère un plan $\mathcal{P}$ dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et une droite $\mathcal{D}$ dirigée par $\vec{w}$.

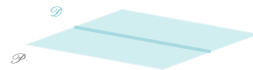
- Le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ s'intersectent en un unique point si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
- Si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, alors
 - ▷ ou bien la droite et le plan sont parallèles,
 - ▷ ou bien la droite est incluse dans le plan.



(a) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sécants



(b) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ parallèles



(c) $\mathcal{D}$ incluse dans $\mathcal{P}$

Figure 4.5 – Positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$

Démonstration. Soient $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ trois

vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. Soient $P = (x_P, y_P, z_P)$ et $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ deux points de l'espace affine. Soient $\mathcal{P}$ le plan passant par P et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\mathcal{D}$ la droite dirigée par $\vec{w}$ et passant par Q . Par définition, un point $M = (x, y, z)$ de l'espace affine est un point de $\mathcal{P}$, s'il existe deux paramètres réels r et s tels que

$$\begin{cases} x = u_1 r + v_1 s + x_P \\ y = u_2 r + v_2 s + y_P \\ z = u_3 r + v_3 s + z_P \end{cases}.$$

De même, M est un point de $\mathcal{D}$ s'il existe un paramètre réel t tel que

$$\begin{cases} x = w_1 t + x_Q \\ y = w_2 t + y_Q \\ z = w_3 t + z_Q \end{cases}.$$

Ainsi, l'ensemble des points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ est paramétré par l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} u_1 r + v_1 s - w_1 t = x_Q - x_P \\ u_2 r + v_2 s - w_2 t = y_Q - y_P \\ u_3 r + v_3 s - w_3 t = z_Q - z_P \end{cases}.$$

Pour étudier ce système, on utilise le pivot de Gauss. On ne donne ici qu'une analyse rapide de ce système. D'après la proposition 3.25, on sait que

- l'ensemble des solutions peut être vide : c'est le cas où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont parallèles,
- il peut y avoir une unique solution : c'est le cas où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ s'intersectent en un point et on est dans ce cas lorsque

$$w_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) - w_2(u_1 v_3 - u_3 v_1) + w_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) \neq 0,$$

- ou bien l'ensemble de solutions est indexé par un réel : c'est le cas où $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

Le système ne peut pas admettre un ensemble de solutions indexé par deux réels car les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. $\square$

On donne à présent des exemples de calculs d'intersection d'un plan et d'une droite, en fonction de différentes descriptions de ces objets géométriques (équation cartésienne, équation paramétrique). Bien sûr, on pourrait également faire le choix de se ramener à notre caractérisation préférée pour ensuite faire le calcul de l'intersection.

Exercice 4.58 – Intersection d'un plan et d'une droite. On considère la droite $\mathcal{D}$ dirigée par le vecteur $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et passant par le point $P = (4, 2, 1)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x + 3y + z = 1$.

1. Montrer la droite $\mathcal{D}$ admet pour équation paramétrique

$$\begin{cases} x = t + 4 \\ y = 2t + 2 \\ z = 3t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2. Déterminer que l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$ est le point $(\frac{30}{11}, -\frac{6}{11}, -\frac{31}{11})$ en substituant les variables x, y et z de l'équation cartésienne du plan par le paramétrage de $\mathcal{D}$.

Exercice 4.59 – Intersection d'un plan et d'une droite. On considère la droite $\mathcal{D}$ dirigée par le vecteur $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et passant par le point $P = (4, 2, 1)$ et le plan $\mathcal{P}$ dirigé par les vecteurs $\vec{v} = (2, 3, 1)$ et $\vec{w} = (3, 1, 2)$ et passant par le point $Q = (0, 0, 7)$.

1. En considérant des équations paramétriques de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$, montrer que l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ est caractérisée par le système

$$\begin{cases} -r + 2s + 3t = 4 \\ -2r + 3s + t = 2 \\ -3r + s + 2t = -6 \end{cases}.$$

2. Montrer que le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ est le point de coordonnées $(-\frac{32}{7}, -\frac{106}{7}, -\frac{173}{7})$.

Exercice 4.60 – Intersection d'un plan et d'une droite. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x + 3y + z = 1$ et la droite $\mathcal{D}$ caractérisée par le système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}.$$

En résolvant un système de trois équations à trois inconnues, montrer que l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ est le point de coordonnées $(-14, 3, 20)$.

Exercice 4.61. Déterminer la position relative des droites et plans suivants :

1. la droite $\mathcal{D}_1$ dirigée par le vecteur $\vec{u}_1 = (1, 2, 3)$ passant par $P_1 = (5, 4, 3)$ et le plan $\mathcal{P}_1$ dirigé par les vecteurs $\vec{v}_1 = (-2, 1, 3)$ et $\vec{w}_1 = (1, 0, 2)$ et passant par le point $Q_1 = (6, 1, 7)$,
2. la droite $\mathcal{D}_2$ dirigée par le vecteur $\vec{u}_2 = (3, 2, 1)$ passant par $P_2 = (1, 2, 3)$ et le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation cartésienne $4x - 2y + 3z = 7$,
3. la droite $\mathcal{D}_3$ caractérisée par le système d'équations cartésiennes $x + 2y + 3z = 4$ et $3x - y + z = 4$, et le plan $\mathcal{P}_3$ d'équation cartésienne $4x - y - z = 2$,
4. la droite $\mathcal{D}_4$ caractérisée par le système d'équations cartésiennes $3x - y + z = 4$ et $2x + 3y - 4z = -4$, et le plan $\mathcal{P}_4$ dirigé par les vecteurs $\vec{v}_4 = (1, 4, 2)$ et $\vec{w}_4 = (-1, -1, 2)$ et passant par le point $Q_4 = (1, 0, 1)$.

Position relative de deux droites

On étudie la position relative de deux droites.

Proposition 4.62 – Position relative de deux droites. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de l'espace respectivement de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors

- ou bien $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et dans ce cas
 - ▷ ou bien les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles,
 - ▷ ou bien les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues,
- ou bien $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et dans ce cas
 - ▷ ou bien les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en un point,
 - ▷ ou bien les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne s'intersectent pas sans être parallèles.

On illustre ces situations à la figure 4.6.

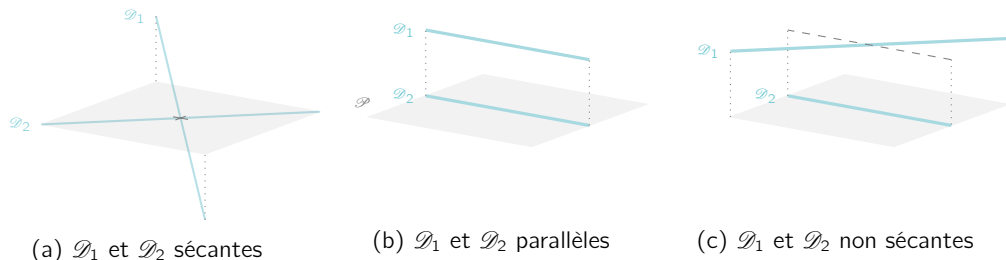


Figure 4.6 – Droites de l'espace

Démonstration.

- Supposons que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont des vecteurs directeurs colinéaires, donc il existe un vecteur non nul $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ qui dirige $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Alors on a deux cas possibles. Ou bien $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne s'intersectent pas, auquel cas elles sont parallèles par définition. Ou bien elles possèdent un point d'intersection $P = (x_P, y_P, z_P)$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont égales car admettent toutes les deux pour équation paramétrique

$$\begin{cases} x = u_1 s + x_P \\ y = u_2 s + y_P \\ z = u_3 s + z_P \end{cases}.$$

- Supposons que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont des vecteurs directeurs $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ non colinéaires, ou bien elles ne s'intersectent pas, soit elles s'intersectent en un unique point.
 - ▷ Si elles s'intersectent en un point P , alors tout point d'intersection est déterminé par une solution du système

$$\begin{cases} u_1 s + v_1 t = 0 \\ u_2 s + v_2 t = 0 \\ u_3 s + v_3 t = 0 \end{cases}.$$

En supposant, sans nuire à la généralité, que $u_1 \neq 0$ et $u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0$, ce système est équivalent au système

$$\begin{cases} u_1 s + v_1 t = 0 \\ (u_1 v_2 - u_2 v_1) t = 0 \end{cases}$$

d'où l'unicité de la solution, et donc l'unicité du point d'intersection.

- ▷ Si elles ne s'intersectent pas, elles ne sont pas non plus parallèles, car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

□

Exemple – Intersection de droites. On considère la droite $\mathcal{D}_1$ dirigée par $\vec{u}_1 = (1, 2, 3)$ et passant par $P_1 = (2, 3, 1)$, et la droite $\mathcal{D}_2$ dirigée par $\vec{u}_2 = (-1, 3, 2)$ et passant par $P_2 = (1, 6, 3)$. On constate pour commencer que ces deux droites ne sont pas dirigées par des vecteurs colinéaires donc les droites ne sont ni parallèles ni confondues. L'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est déterminée par la solution du système

$$\begin{cases} s + 2 = -t + 1 \\ 2s + 3 = 3t + 6 \\ 3s + 1 = 2t + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s + \boxed{1}t = -1 & (L_1) \\ 2s - 3t = 3 & (L_2) \\ 3s - 2t = 2 & (L_3) \end{cases}$$

qui est lui-même équivalent à

$$\begin{cases} s + 1t = -1 & (L_1) \\ 5s = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1) \\ 5s = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1) \end{cases}$$

qui admet donc comme unique solution $(s, t) = (0, -1)$. Le point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est donc le point $P_1 = (2, 3, 1)$.

Exemple – Intersection de droites. On considère la droite $\mathcal{D}_1$ dirigée par $\vec{u}_1 = (1, 2, 3)$ et passant par $P_1 = (2, 3, 1)$, et la droite $\mathcal{D}_2$ caractérisée par le système d'équations cartésiennes $4x + 2y + 3z = 1$ et $5x - y + 2z = 7$. Une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$ est

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 3 \\ z = 3t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

donc l'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est déterminée par les solutions du système

$$\begin{cases} 4(t+2) + 2(2t+3) + 3(3t+1) = 1 \\ 5(t+2) - (2t+3) + 2(3t+1) = 7 \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} 17t = -16 \\ 9t = -2 \end{cases}.$$

Ce système n'admet aucune solution donc les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne s'intersectent pas.

Exercice 4.63. Déterminer l'intersection des droites suivantes :

- la droite $\mathcal{D}_1$ dirigée par le vecteur $\vec{u}_1 = (1, 2, 3)$ passant par $P_1 = (3, 2, 1)$ et $\mathcal{D}'_1$ dirigée par le vecteur $\vec{v}_1 = (1, 2, 0)$ passant par $Q_1 = (2, 0, 4)$,
- la droite $\mathcal{D}_2$ dirigée par le vecteur $\vec{u}_2 = (1, 2, 3)$ passant par $P_2 = (3, 2, 1)$ et $\mathcal{D}'_2$ caractérisée par le système d'équations cartésiennes $4x - 2y + z = 3$ et $5x + y + 2z = -7$,
- la droite $\mathcal{D}_3$ dirigée par le vecteur $\vec{u}_3 = (1, 2, 3)$ passant par $P_3 = (3, 2, 1)$ et $\mathcal{D}'_3$ caractérisée par le système d'équations cartésiennes $7x - 2y - z = 16$ et $x + y - z = 4$,
- la droite $\mathcal{D}_4$ caractérisée par le système d'équations cartésiennes $3x + 2y + z = 2$ et $7x + 4y + 2z = 4$ et $\mathcal{D}'_4$ caractérisée par le système d'équations cartésiennes $3y - 2z = -4$ et $8x + 2y - 3z = -6$.

Proposition 4.64. Deux droites distinctes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sécantes ou parallèles déterminent un unique plan $\mathcal{P}$. De plus :

- si les droites sont parallèles, alors $\mathcal{P}$ est dirigé par le vecteur $\vec{u}$ directeur de $\mathcal{D}_1$ et par n'importe quel vecteur $\vec{PQ}$, avec $P \in \mathcal{D}_1$ et $Q \in \mathcal{D}_2$.
- si les droites sont sécantes et que $\vec{u}$ dirige $\mathcal{D}_1$ et $\vec{v}$ dirige $\mathcal{D}_2$, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dirigent $\mathcal{P}$.

On dira alors que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **coplanaires**.



Figure 4.7 – Droites coplanaires

Démonstration. Considérons $\mathcal{D}$ (respectivement $\mathcal{D}'$) une droite de vecteur directeur $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ (resp. $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$) et passant par le point $P = (x_P, y_P, z_P)$ (resp. $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$) telles que $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}'$.

- Ou bien les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors comme $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont distinctes, elles sont parallèles. Montrons que le plan passant par P et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{PQ}$ contient les deux droites. Ce plan est d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = u_1 s + (x_Q - x_P)t + x_P \\ y = u_2 s + (y_Q - y_P)t + y_P \\ z = u_3 s + (z_Q - z_P)t + z_P \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

Tout point de la droite $\mathcal{D}$ peut être vu comme un point du plan $\mathcal{P}$ de paramètres $s \in \mathbb{R}$ et $t = 0$ et tout point de la droite $\mathcal{D}'$ est un point du plan $\mathcal{P}$ de paramètres $s \in \mathbb{R}$ et $t = 1$, donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont incluses dans le plan $\mathcal{P}$.

- Ou bien les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc elles sont sécantes par hypothèse. On appelle R le point d'intersection. Alors le plan passant par R et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = u_1 s + v_1 t + x_R \\ y = u_2 s + v_2 t + y_R \\ z = u_3 s + v_3 t + z_R \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$$

contient les deux droites, par un argument similaire au précédent.

L'unicité de ce plan découle de la proposition 4.47. □

Parallélisme

Du parallélisme de droites, on peut déduire le parallélisme des plans qui les contiennent.

Proposition 4.65.

○ Parallélisme de plans

- ▷ Si un plan $\mathcal{P}$ contient deux droites sécantes qui sont parallèles à deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}'$ alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles ou confondus.
- ▷ Si deux plans distincts sont parallèles à un troisième plan alors ils sont parallèles entre eux.

○ Parallélisme d'une droite et d'un plan

- ▷ Soit une droite $\mathcal{D}$ parallèle à une droite $\mathcal{D}'$ contenue dans un plan $\mathcal{P}$. Si la droite $\mathcal{D}$ n'intersecte pas le plan $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$, sinon elle est contenue dans $\mathcal{P}$.

○ Parallélisme de droites

- ▷ Si deux droites distinctes sont parallèles à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.
- ▷ Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe également l'autre et les droites d'intersection $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

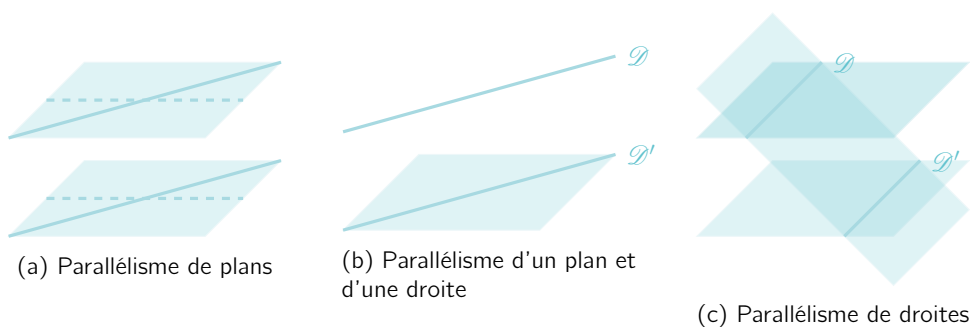


Figure 4.8 – Parallélisme

Démonstration.

- ▷ Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ (respectivement $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_2$) deux droites sécantes qui engendrent un plan $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$). On suppose de plus que $\mathcal{D}_1$ est parallèle à $\mathcal{D}_2$ et que $\mathcal{D}'_1$ est parallèle à $\mathcal{D}'_2$. Alors il existe un vecteur $\vec{v}_1$ qui dirige les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}'_1$ et un

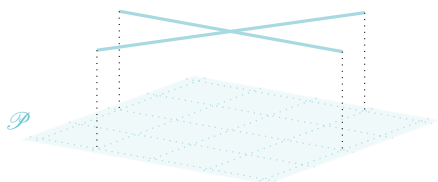
vecteur $\vec{v}_2$ qui dirige les droites $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}'_2$. Les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dirigent alors les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, qui sont donc parallèles ou confondus.

- ▷ Découle directement de la proposition 4.54, car si (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont colinéaires à (α, β, γ) , alors (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont colinéaires.
- ▷ Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles alors elles sont toutes les deux de vecteurs directeurs $\vec{u}$. Le plan $\mathcal{P}$ est alors dirigé par $\vec{u}$ et un vecteur $\vec{v}$ qui n'est pas colinéaire à $\vec{u}$. Comme le vecteur $\vec{u}$ est coplanaire aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors on conclut par la proposition 4.57.
- ▷ Découle de la colinéarité des vecteurs directeurs des droites, car si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires à $\vec{w}$, alors $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$.
- ▷ Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans parallèles et soit $\mathcal{H}$ un plan qui intersecte $\mathcal{P}$ et qui est différent de $\mathcal{P}$. Alors d'après la proposition 4.54, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$ s'intersectent en une droite $\mathcal{D}$. Toujours d'après la proposition 4.54, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{H}$ s'intersectent également en une droite $\mathcal{D}'$, sinon, $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{H}$ seraient parallèles, ce qui est impossible d'après le premier point et ce qui précède. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires car elles appartiennent à $\mathcal{H}$. Elles n'ont nécessairement aucun point d'intersection car un tel point appartiendrait aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, ce qui est impossible. Elles sont donc parallèles.

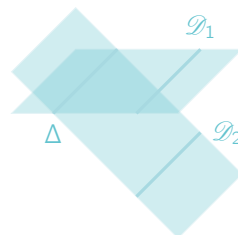
□

Remarque. Dans l'espace, deux droites peuvent être parallèles à un même plan sans être parallèles entre elles ! On représente une telle situation à la figure 4.9a.

Théorème 4.66 – Théorème du toit. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites parallèles avec $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}'$ avec $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans distincts. Si les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants alors leur intersection est une droite Δ parallèle à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.



(a) Droites sécantes parallèles à un plan



(b) Théorème du toit

Figure 4.9 – Plans de l'espace

Démonstration. Supposons par l'absurde que la droite Δ ne soit pas parallèle à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dirigées par un vecteur $\vec{u}$ et la droite Δ est dirigée par un vecteur $\vec{v}$ non colinéaire à $\vec{u}$. Soit P un point de Δ . Alors le plan $\mathcal{P}$ est le plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ passant par P , de même pour $\mathcal{P}'$ donc $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ car $\Delta \subset \mathcal{P}$ et $\Delta \subset \mathcal{P}'$ donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \neq \emptyset$, ce qui est absurde car cela contredit l'hypothèse $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ distincts, d'où le résultat. $\square$

Positions relatives de trois plans

Finissons en étudiant les positions relatives de trois plans de l'espace affine.

Proposition 4.67 – Positions relatives de trois plans. Soient trois plans distincts deux à deux. Alors, soit :

- les plans ne s'intersectent en aucun point,
- les plans s'intersectent en un unique point,
- les plans s'intersectent en une droite.

On illustre cela à la figure 4.10.

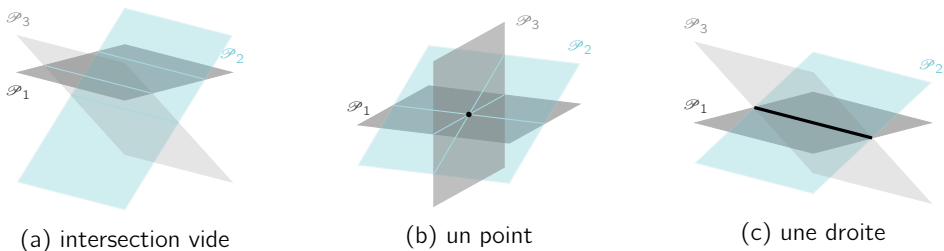


Figure 4.10 – Position relative de trois plans

Démonstration. Soient $\mathcal{P}_i$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, trois plans de l'espace affine, d'équation cartésienne $a_i x + b_i y + c_i z = d_i$. Un point de l'espace est dans l'intersection des trois plans si et seulement si ses coordonnées sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}.$$

Le résultat découle alors directement de la proposition 3.25. $\square$

Exemple. Vous pouvez réinterpréter les calculs effectués dans les exemples de la sous-section 3.2.3 comme la détermination de l'intersection de trois plans.

Exercice 4.68. Déterminer l'intersection des plans suivants :

1. $\mathcal{P}_1$ d'équation $3x + 8y + 6z = 28$, $\mathcal{P}'_1$ d'équation $x - 2y - z = -3$, $\mathcal{P}''_1$ d'équation $9x + 7y + 7z = 39$,
2. $\mathcal{P}_2$ d'équation $5x + 9y + 7z = 3$, $\mathcal{P}'_2$ d'équation $4x + 9y + 4z = 0$, $\mathcal{P}''_2$ d'équation $x + y + 2z = -1$,
3. $\mathcal{P}_3$ d'équation $6x + 7y + 8z = -5$, $\mathcal{P}'_3$ d'équation $-5x - 6y - 6z = 3$, $\mathcal{P}''_3$ d'équation $-x - y - 2z = 2$,
4. $\mathcal{P}_4$ d'équation $2x + 5y - z = 18$, $\mathcal{P}'_4$ d'équation $x - 2y + 4z = 0$, $\mathcal{P}''_4$ d'équation $-3x - 7y + z = -26$.

4.4. Orthogonalité

Dans cette dernière section, on introduit la notion d'orthogonalité entre vecteurs, puis entre objets géométriques. Cette notion nécessite d'introduire une opération pour les vecteurs en plus de l'addition et du produit par un réel : le produit scalaire.

4.4.1 Produit scalaire : orthogonalité des vecteurs

Définition 4.69 – Produit scalaire.

- o Soient $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Le **produit scalaire** (usuel) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, est le nombre réel donné par $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$.
- o Soient $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le **produit scalaire** (usuel) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, est le nombre réel donné par $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Remarque. Le produit scalaire est également parfois noté avec un point médian : pour le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on trouvera aussi bien $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ que $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Proposition 4.70. Le produit scalaire (de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$) satisfait les propriétés suivantes.

- o Il est **symétrique**, c'est-à-dire que pour tous vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$.
- o Il est **linéaire à droite**, c'est-à-dire que pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel λ , on a $\langle \vec{u}, \vec{v} + \lambda \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \lambda \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$.
- o Il est **défini positif**, c'est-à-dire que pour tout vecteur $\vec{v}$, on a $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ et $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ si, et seulement si, le vecteur $\vec{v}$ est le vecteur nul.

Démonstration. Démontrons que le produit scalaire (de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$) est défini positif. Soit $\vec{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = a^2 + b^2 \geq 0$ car c'est une somme de deux carrés. De plus, une somme de deux carrés est nulle si et seulement si ces deux carrés sont chacun nuls, d'où le résultat. $\square$

Exercice 4.71. Démontrer les points **1.** et **2.** de la proposition précédente dans le cas du produit scalaire de $\mathbb{R}^2$ (la preuve dans le cas de $\mathbb{R}^3$ étant similaire).

Corollaire 4.72. Le produit scalaire satisfait la propriété de **linéarité à gauche**, c'est-à-dire que pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et pour tout réel λ , on a

$$\langle \vec{u} + \lambda \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \lambda \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$

Démonstration. Découle directement des points **1.** et **2.** de la proposition 4.70. $\square$

Définition 4.73 – Orthogonalité. Deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul, i.e. $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$.

Exemple. On considère les points $A = (2, 0)$, $B = (4, 1)$, $C = (2, 1)$ et $D = (1, 3)$. On a donc $\vec{AB} = (2, 1)$ et $\vec{CD} = (-1, 2)$, qui sont des vecteurs orthogonaux, car $\langle \vec{AB}, \vec{CD} \rangle = 2 \times (-1) + 1 \times 2 = 0$. On illustre la situation avec la figure 4.11.

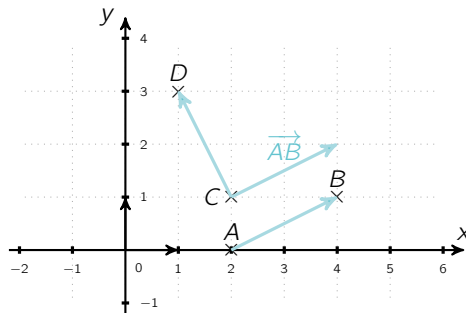


Figure 4.11 – Deux vecteurs orthogonaux

Exemple. On considère les points $A = (1, 1, 1)$, $B = (-2, 2, 1)$, $C = (2, -1, 3)$ et $D = (3, 2, 5)$. On a donc les vecteurs $\vec{AB} = (-3, 1, 0)$ et $\vec{CD} = (1, 3, 2)$, qui sont orthogonaux car $\langle \vec{AB}, \vec{CD} \rangle = -3 \times 1 + 1 \times 3 + 0 \times 2 = 0$.

La proposition suivante décrit les vecteurs orthogonaux à un vecteur du plan donné.

Proposition 4.74 – Orthogonal dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\vec{u} = (u_1, u_2)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Alors tout vecteur orthogonal à $\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $\vec{v} = (-u_2, u_1)$.

Démonstration. Fixons $\vec{u} = (u_1, u_2)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Alors le vecteur de coordonnées $\vec{v} = (-u_2, u_1)$ est orthogonal à $\vec{u}$. Soit $\vec{w} = (w_1, w_2)$ orthogonal à $\vec{u}$, c'est-à-dire tel que $u_1 w_1 + u_2 w_2 = 0$ alors $\det(\vec{w}, \vec{v}) = w_1 u_1 - w_2 (-u_2) = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires. $\square$

Exercice 4.75 – Orthogonal dans $\mathbb{R}^3$. Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$. Montrer que si $u_1 \neq 0$ tout vecteur orthogonal à $\vec{u}$ est coplanaire à $(-u_2, u_1, 0)$ et $(-u_3, 0, u_1)$.

Exercice 4.76. Soient $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ deux vecteurs non nuls non colinéaires de $\mathbb{R}^3$. Montrer que tout vecteur orthogonal simultanément à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est colinéaire au vecteur $(u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1)$.
On appelle **produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** , le vecteur de $\mathbb{R}^3$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, défini par

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1).$$

4.4.2 Géométrie du plan euclidien

Dans cette section, on se concentre sur la géométrie du plan affine, que l'on munit du produit scalaire.

Définition 4.77 – Plan euclidien. Le plan affine, muni du produit scalaire de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire tel que pour quatre points A, B, C et D on peut calculer $\langle \vec{AB}, \vec{CD} \rangle$, est appelé **plan euclidien**.

Remarque – Repère orthonormé. On a défini la notion de repère du plan affine (voir définition 4.29) comme la donnée d'un triplet $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$. On dit qu'un tel repère est **orthonormé** si $\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = 0$ et $\langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle = 1 = \langle \vec{AC}, \vec{AC} \rangle$. Ainsi, le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de l'exemple par 69 est orthonormé.

Dans le plan euclidien, on peut à présent définir la notion de droites orthogonales.

Définition 4.78. Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites **orthogonales** si pour $\vec{v}$ et $\vec{v}'$, respectivement des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, on a $\langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle = 0$.

Définition 4.79. Deux droites orthogonales sont dites **perpendiculaires** si elles s'intersectent.

Dans le plan euclidien, on ne fait pas la différence entre orthogonalité et perpendicularité à cause du résultat suivant.

Propriété 4.80. Dans le plan euclidien, deux droites sont orthogonales si et seulement si elles sont perpendiculaires.

Démonstration. Il suffit de montrer que deux droites orthogonales s'intersectent forcément. Considérons $\vec{u} = (u_1, u_2)$ un vecteur non nul directeur d'une droite $\mathcal{D}$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ qui dirige une droite Δ . D'après la proposition 4.74, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{v} = (-\lambda u_2, \lambda u_1)$. On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \lambda(u_1^2 + u_2^2) \neq 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. D'après la proposition, les droites $\mathcal{D}$ et Δ s'intersectent en un unique point, d'où le résultat. $\square$

Exemple. On considère les droites $\mathcal{D}$ et Δ respectivement d'équations cartésiennes $2x + y = 7$ et $-2x + 4y = 9$. Le vecteur $\vec{u} = (1, -2)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et le vecteur $\vec{v} = (4, 2)$ est un vecteur directeur de Δ . Alors, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1 \times 4 + (-2) \times 2 = 0$ donc les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont perpendiculaires.

Contre-exemple. On considère les droites $\mathcal{D}$: $2x + 3y - 4 = 0$ et $\mathcal{D}'$: $3x + 2y + 5 = 0$. Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est par $\vec{v} = (3, -2)$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ est $\vec{v}' = (2, -3)$. On a $\langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle = 12 \neq 0$ donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas perpendiculaires.

Remarque. Alors que dans le plan les notions de droites orthogonales et droites perpendiculaires coïncident, cela ne sera plus le cas dans l'espace.

Exercice 4.81. On considère deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ du plan euclidien respectivement d'équations $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$, avec $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$. Démontrer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa' = -1$.

Exercice 4.82 – Orthocentre d'un triangle. On considère $[ABC]$ un triangle du plan.

1. Montrer que pour tout point M du plan euclidien, on a

$$\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BC} \rangle + \langle \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{CA} \rangle + \langle \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0.$$

2. En déduire que les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H . Ce point d'intersection est appelé **orthocentre** du triangle $[ABC]$.

Vecteur normal à une droite

Fixons un vecteur $\vec{n} = (a, b)$ non nul et un point $P = (x_P, y_P)$ du plan affine. On se demande quel est l'ensemble des points $M = (x, y)$ du plan tels que le vecteur $\overrightarrow{PM}$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$, i.e. qui satisfont $\langle \vec{n}, \overrightarrow{PM} \rangle = 0$. Or, on a $\langle \vec{n}, \overrightarrow{PM} \rangle = 0$ si et seulement si $a(x - x_P) + b(y - y_P) = 0$, qui est une équation cartésienne de droite.

Définition 4.83 – Vecteur normal à une droite. Soient un vecteur $\vec{n} = (a, b)$ non nul, et un point $P = (x_P, y_P)$ du plan affine. La droite des points $M = (x, y)$ du plan tel que le vecteur $\overrightarrow{PM}$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$, d'équation cartésienne $a(x - x_P) + b(y - y_P) = 0$ est appelée **droite de vecteur normal $\vec{n}$ passant par P** .

Exemple. On considère le point P de coordonnées $(4, 2)$ et le vecteur $\vec{n} = (-1, 2)$. Alors la droite $\mathcal{D}$, de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par P a pour équation cartésienne $-(x - 4) + 2(y - 2) = 0$ qui est équivalente à $-x + 2y = 0$. On illustre cela avec la figure 4.12.

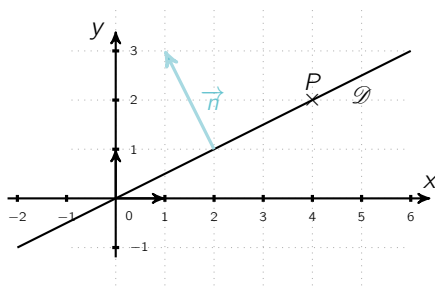


Figure 4.12 – Vecteur normal à une droite

Remarque. Un vecteur normal à une droite n'est pas unique : si $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$, alors tous les vecteurs colinéaires à $\vec{n}$ sont des vecteurs normaux à $\mathcal{D}$.

Proposition 4.84. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, avec a, b et c trois réels et a et b non simultanément nuls.

- Le vecteur $\vec{n} = (a, b)$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$.
- Le vecteur $\vec{v} = (-b, a)$ est un vecteur directeur à la droite $\mathcal{D}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, avec a, b et c trois réels et a et b non simultanément nuls.

- On considère $M = (x, y)$ et $A = (x_A, y_A)$ deux points distincts de la droite $\mathcal{D}$. Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $a(x - x_A) + b(y - y_A) = ax +$

$by - (ax_A + by_A) = c - c = 0$, donc $\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle = 0$: le vecteur $\vec{n}$ est normal à la droite $\mathcal{D}$.

- Montrons que le vecteur $\vec{v} = (-b, a)$ dirige la droite $\mathcal{D}$. Soit $A = (x_A, y_A)$ un point de la droite $\mathcal{D}$ et soit $M = (x_A - b, y_A + a)$. On a

$$a(x_A - b) + b(y_A + a) + c = ax_A + by_A + c = 0$$

donc M est un point de $\mathcal{D}$: le vecteur $\overrightarrow{AM}$ dirige la droite $\mathcal{D}$ d'où le résultat.

□

À retenir. On résume les différentes descriptions d'une droite définie par un point et un vecteur normal.

Définition	Équation cartésienne	Équation paramétrée
$\mathcal{D}$ est la droite passant par $P = (x_P, y_P)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (a, b)$	$a(x - x_P) + b(y - y_P) = 0$	$\begin{cases} x = -bt + x_P \\ y = at + y_P \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Exercice 4.85 – Passer d'une représentation à l'autre. Pour chacune des droites suivantes, donner une équation cartésienne, une équation paramétrée, un vecteur directeur, un vecteur normal et un point de cette droite :

1. $\mathcal{D}_1$ d'équation cartésienne $3x + 4y - 7 = 0$,
2. $\mathcal{D}_2$ de vecteur directeur $\vec{v} = (2, 4)$ et passant par le point $P = (1, 2)$,
3. $\mathcal{D}_3$ de vecteur normal $\vec{n} = (-3, 1)$ et passant par le point $P = (0, 5)$,
4. $\mathcal{D}_4$ d'équation paramétrique $x = 6t + 3, y = 1 - t$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.86. On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par $A = (-3, 2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (1, -2)$. On considère le point $C = (1, 1)$.

1. Vérifier que C n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.
2. Déterminer les coordonnées d'un point B de la droite $\mathcal{D}$ tel que le triangle $[ABC]$ soit rectangle en B . Constaté qu'un tel point est unique.

4.4.3 Géométrie de l'espace euclidien

Avec le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$, on peut définir la notion d'espace euclidien, afin de pouvoir définir la notion d'orthogonalité entre droites et entre une droite et un plan.

Définition 4.87 – Espace euclidien. L'espace affine, muni du produit scalaire de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire tel que pour quatre points A, B, C et D , on peut calculer $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle$, est appelé **espace euclidien**.

Définition 4.88 – Droites orthogonales – droites perpendiculaires. Deux droites de l'espace respectivement de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dites

- **orthogonales** si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$,
- **perpendiculaires** si elles sont orthogonales et s'intersectent.

Remarque. Contrairement à la situation du plan euclidien, ces deux définitions ne coïncident pas. Considérons la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $O = (0, 0, 0)$ de vecteur directeur $\vec{u} = (1, 0, 0)$, et la droite $\mathcal{D}'$ passant par le point $A = (0, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = (0, 1, 0)$. Elles sont orthogonales car $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0$. De plus, elles s'intersectent si et seulement si le système suivant admet une solution

$$\begin{cases} 0 &= t \\ s &= 0 \\ 1 &= 0 \end{cases}.$$

Or, celui-ci est incompatible donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne s'intersectent pas : on représente la situation à la figure 4.13.

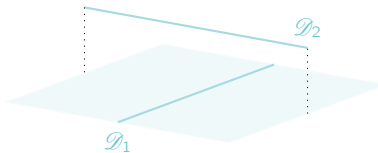


Figure 4.13 – Droites orthogonales non perpendiculaires

Vecteur normal à un plan

On se demande, si l'on fixe un vecteur non nul $\vec{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et un point $P = (x_P, y_P, z_P)$ de l'espace euclidien, quel est l'ensemble des points $M = (x, y, z)$ tels que le vecteur $\overrightarrow{PM}$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$, c'est-à-dire les points M tels que $\langle \vec{n}, \overrightarrow{PM} \rangle = 0$. On peut réécrire cette dernière condition comme $a(x - x_P) + b(y - y_P) + c(z - z_P) = 0$. On reconnaît ici une équation de plan.

Définition 4.89 – Vecteur normal à un plan. Soient $\vec{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul et $P = (x_P, y_P, z_P)$ un point du plan euclidien. Le plan formé des points $M = (x, y, z)$ de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{PM}$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$ est appelé **plan de vecteur normal $\vec{n}$ passant par P** . Ce plan a pour équation cartésienne

$$a(x - x_P) + b(y - y_P) + c(z - z_P) = 0.$$

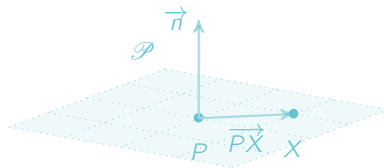


Figure 4.14 – Plan déterminé par un vecteur normal

Proposition 4.90. Soit un plan $\mathcal{P}$ de l'espace euclidien dirigé par deux vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et passant par le point $P = (x_P, y_P, z_P)$. Alors le vecteur

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et

$$(u_2 v_3 - u_3 v_2)(x - x_P) - (u_1 v_3 - u_3 v_1)(y - y_P) + (u_1 v_2 - u_2 v_1)(z - z_P) = 0$$

est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Démonstration. C'est une application directe de l'exercice 4.76. □

Définition 4.91. Une droite $\mathcal{D}$ est **perpendiculaire** à un plan $\mathcal{P}$ si pour tout couple de points $A, B \in \mathcal{P}$, un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$.

Proposition 4.92. Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et soit Δ une droite de l'espace. La droite Δ et le plan $\mathcal{P}$ sont perpendiculaires si et seulement si Δ est orthogonale à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$.

Démonstration. Le sens direct de l'équivalence est clair : si Δ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$, alors si on considère P le point d'intersection de Δ et $\mathcal{P}$ et que l'on considère A et B deux points de $\mathcal{P}$ tels que A, B et P ne sont pas alignés, alors Δ est perpendiculaire aux droites (AP) et (BP) . Considérons à présent deux droites sécantes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dans

$\mathcal{P}$ telles que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ soient perpendiculaires à Δ . Notons $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ des vecteurs directeurs respectifs des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, et notons $\vec{v}$ un vecteur directeur de Δ . Comme $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ s'intersectent, alors $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires et dirigent le plan $\mathcal{P}$. Ainsi, tout vecteur $\vec{AB}$ du plan $\mathcal{P}$ est coplanaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, c'est-à-dire qu'il existe deux réels $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{AB} = s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2$. Soit donc $\vec{AB}$ un vecteur du plan $\mathcal{P}$, on a $\langle \vec{AB}, \vec{v} \rangle = \langle s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2, \vec{v} \rangle = s\langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle + t\langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle = 0$. Donc la droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$. $\square$

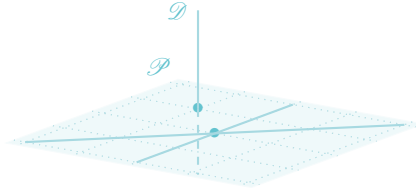
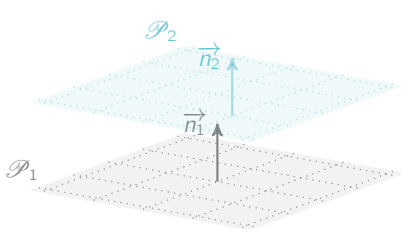


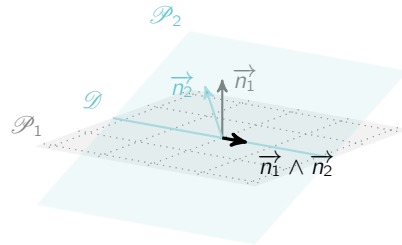
Figure 4.15 – Droite orthogonale à un plan

Proposition 4.93. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans respectivement de vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$.

- Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles ou confondus si et seulement si $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires, comme en figure 4.16a.
- Si les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ s'intersectent, alors la droite d'intersection est dirigée par le vecteur $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$, comme en figure 4.16b.



(a) Deux plans parallèles



(b) Deux plans qui s'intersectent

Figure 4.16 – Des vecteurs normaux

Démonstration.

- Découle directement de la proposition 4.54 et de l'équation caractéristique donnée à la définition 4.89.

- Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ s'intersectent en une droite $\mathcal{D}$. Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{D}$ alors $\overrightarrow{AB}$ dirige $\mathcal{D}$ or, ces deux points sont des points de $\mathcal{P}_1$ donc $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à $\vec{n}_1$, et de même pour $\vec{n}_2$, donc d'après l'exercice 4.76, $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ d'où le résultat.

□

Exemple – Détermination de l'intersection de deux plans. On considère $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $3x + 2y + 4z = 3$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $2x + 3z = 2$. On commence par remarquer que le point $P = (1, 0, 0)$ est un point de l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. L'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est donc la droite passant par $(1, 0, 0)$ et dirigée par le vecteur $(2 \times 3 - 0 \times 4, -(3 \times 3 - 4 \times 2), 3 \times 0 - 2 \times 2) = (6, -1, -4)$.

Introduction aux fonctions réelles d'une variable réelle

Nous allons dans ce chapitre donner une introduction à la notion de fonction et certaines propriétés permettant leur étude que nous nous attacherons à illustrer graphiquement. Ce chapitre ne constitue qu'un avant-goût de l'étude des fonctions réelles et les notions de limite, de continuité ou encore de dérivabilité seront étudiées ultérieurement dans le chapitre 8.

5.1. Définitions et exemples

Définition 5.1. Soient E et F deux ensembles de nombres. Une **fonction** f est un procédé qui à certains éléments x de E associe, pour chacun de ces éléments, un unique élément de F noté $f(x)$ et que l'on lit « f de x ». On note alors $f: E \rightarrow F$.

Exemples.

- **Fonctions constantes.** Soit $a \in \mathbb{R}$, la fonction constante égale à a est définie par

$$\begin{array}{lcl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a \end{array}.$$

- **Fonctions affines.** Soient $m, p \in \mathbb{R}$, on définit la fonction affine

$$\begin{array}{lcl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & mx + p \end{array}.$$

Si $p = 0$, f est dite **linéaire** et si $m = 0$, f est la fonction constante égale à p .

- **Fonction carrée.** La fonction de mise au carré d'un nombre réel est définie par

$$\begin{array}{lcl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

- **Fonctions du second degré.** Étant donné trois réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, on appelle fonction polynomiale du second degré la fonction définie par

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

À retenir. Soient $f: E \rightarrow F$ une fonction et $x \in E$ tel que $f(x)$ existe. Il faut faire attention à ne pas confondre f et $f(x)$. En effet, $f(x)$ désigne **un élément de F** alors que f désigne **une fonction**.

Remarques.

- Il est particulièrement important de noter qu'une fonction n'est pas qu'une expression littérale mais bien la donnée d'un ensemble de départ, d'un ensemble d'arrivée et d'une expression littérale. Par exemple, la fonction g définie par

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

n'est pas la fonction carrée de l'exemple précédent.

- On utilise parfois la notion d'**application** plutôt que celle de fonction et il est important de faire la distinction entre ces deux notions bien qu'elle puisse paraître subtile au premier abord. La différence est la suivante : si $f: E \rightarrow F$ est une fonction, les éléments de E possèdent une ou aucune image par f alors que pour une application $g: E \rightarrow F$, tout élément de E possède exactement une image. Ainsi, si on considère

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} g: \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned},$$

alors f est une fonction mais n'est pas une application (car 0 n'a pas d'image par f) alors que g est bien une application (et bien entendu une fonction).

Définition 5.2 – Image et antécédent. Soient E et F deux ensembles de nombres et $f: E \rightarrow F$ une fonction. Soit x un élément de E auquel f fait correspondre $f(x) \in F$. Alors,

- l'élément x est appelé **un antécédent** de $f(x)$,
- l'élément $f(x)$ est appelé **l'image de x par f** .

On appelle **image de f** , l'ensemble, noté $\text{Im}(f)$, de tous les éléments y de F possédant un antécédent $x \in E$ par f .

Remarque. Par définition, $\text{Im}(f) = \{y \in F \mid \text{il existe } x \in E \text{ tel que } f(x) = y\}$, c'est-à-dire que $\text{Im}(f)$ est l'ensemble de tous les éléments de F « atteints » par f .

Exemples.

- L'image de 2 par la fonction carrée est 4 et l'image de 5 est 25.
- Le nombre 3 est un antécédent de 9 par la fonction carrée car $3^2 = 9$. À noter que -3 est également un antécédent de 9 par la fonction carrée.

Exercice 5.3. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

1. Quelle est l'image de 2 par la fonction f ?
2. Déterminer le ou les antécédents de 10 par f .

Remarques. Soient E et F deux ensembles de nombres et $f: E \rightarrow F$ une fonction.

- Un élément de E ne peut avoir **qu'une seule image** par f . Autrement dit, une fonction ne peut pas faire correspondre plusieurs éléments de F à un même élément de E .
- Un élément de F peut avoir **plusieurs antécédents** par f (par exemple 9 pour la fonction carrée qui possède 3 et -3 comme antécédents). Autrement dit, un élément de F peut être atteint par plusieurs éléments de E par f .

Définition 5.4 – Ensemble de définition d'une fonction. Soient E et F deux ensembles de nombres et $f: E \rightarrow F$ une fonction. On appelle **ensemble de définition de f** , le sous-ensemble de E , souvent noté $\mathcal{D}_f$, qui est constitué de tous les éléments de E auxquels f fait correspondre un élément de F . Autrement dit, il s'agit du sous-ensemble de E formé des éléments pour lesquels on peut calculer $f(x)$.

Exemples.

- Les fonctions constantes, les fonctions affines et plus généralement les fonctions polynomiales (du second degré ou non) admettent $\mathbb{R}$ pour ensemble de définition.
- **Fonction racine carrée.** La fonction f qui, à un nombre réel, associe sa racine carrée

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

a pour ensemble de définition $\mathbb{R}_+$ car la racine carrée n'est définie que pour les nombres positifs.

- **Fonction racine carrée traduite.** Soit $a \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\begin{aligned} g_a: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x - a} \end{aligned}$$

a pour ensemble de définition $[a, +\infty[$, car l'ensemble de solutions de l'inéquation $x - a \geq 0$ est l'intervalle $[a, +\infty[$.

- **Fonction inverse.** La fonction f qui, à un nombre réel, associe son inverse

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

a pour ensemble de définition $\mathbb{R}^*$ car on ne peut pas diviser par zéro.

- **Fraction rationnelle.** La fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x+2}{x-1} \end{aligned}$$

a pour ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

Remarque. Soient E et F deux ensembles de nombres et $f: E \rightarrow F$ une fonction, alors $g: \mathcal{D}_f \rightarrow F$ qui est définie pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ par $g(x) = f(x)$ est une **application**.

Exercice 5.5. Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $f_1: x \mapsto \sqrt{x-7},$

5. $f_5: x \mapsto \sqrt{2-x},$

2. $f_2: x \mapsto \frac{x+3}{2x-5},$

6. $f_6: x \mapsto \sqrt{3-x^2},$

3. $f_3: x \mapsto \sqrt{(x+1)(-2x+9)},$

7. $f_7: x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-1}}{-x^2+9},$

4. $f_4: x \mapsto \frac{x+1}{x-1},$

8. $f_8: x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$

5.2. Composition de fonctions

5.2.1 Définition

Définition 5.6 – Composition de fonctions. Soient I et J deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et soient $f: I \rightarrow J$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. La **composée de f par g** , notée $g \circ f$, est la fonction de I dans $\mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in I$, par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Exemple. On considère les fonctions f et g définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = 2x+3$ et $g(x) = x^2$. Alors, $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ car f est définie sur $\mathbb{R}$, g est définie sur $\mathbb{R}$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_g$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9.$$

De même, $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ car g est définie sur $\mathbb{R}$, f est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_f$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 3$.

À retenir. La composition de fonctions n'est pas commutative, c'est-à-dire que si f et g sont des fonctions, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont en général des fonctions différentes.

Remarque. Étant données $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pour que la composée $g \circ f$ soit bien définie sur le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f , il faut et il suffit que **l'image de f soit incluse dans l'ensemble de définition de g** , i.e. $\text{Im}(f) \subseteq \mathcal{D}_g$.

Exemple. On considère les deux fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} g: \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

On a ici $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+$ et la composée $g \circ f$ de ces deux fonctions n'est pas définie sur $\mathcal{D}_f$ car, pour tout réel $x > 0$, $f(x) < 0$ donc $f(x) \notin \mathcal{D}_g$. En revanche, $g \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}_-$ donc on peut affirmer que $\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R}_-$.

Exercice 5.7.

- Donner le domaine de définition et une expression simple de $g \circ f$ et $f \circ g$, pour
 - $f: x \mapsto \sqrt{x}$ et $g: x \mapsto 2x$,
 - $f: x \mapsto x^2 - x + 1$ et $g: x \mapsto 2x - 1$,
 - $f: x \mapsto \frac{x^2-1}{2x}$ et $g: x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.
- Exprimer la fonction $f: x \mapsto \sqrt{(2x-1)^3}$ à l'aide de compositions de fonctions usuelles (on précisera les ensembles de départ et d'arrivée de chaque fonction).

5.2.2 La fonction valeur absolue

Définition 5.8. La **fonction valeur absolue** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{array}.$$

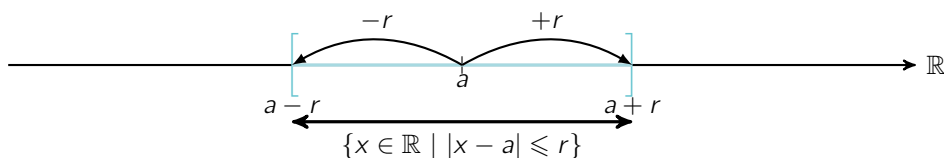
Remarques.

- On note que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \max(x, -x)$.
- La fonction valeur absolue est particulièrement utile grâce à l'interprétation qu'on peut en faire comme étant une « distance ». Plus précisément, si x est un réel, $|x| = \sqrt{x^2}$ désigne la distance entre x et 0 tout comme, si (x, y) est un point du plan euclidien (dans notre cas $y = 0$), $\sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance entre ce point et l'origine $O = (0, 0)$ (voir chapitre 7).

Exemple. Si $a \in \mathbb{R}$ est un réel fixé et si $r > 0$, alors $|x - a| \leq r$ si et seulement si $\max(x - a, -(x - a)) \leq r$ ce qui est équivalent au fait que $-r \leq x - a \leq r$ et donc au fait que $a - r \leq x \leq a + r$. Autrement dit,

$$|x - a| \leq r \text{ si et seulement si } x \in [a - r, a + r]$$

i.e. que $|x - a| \leq r$ si et seulement si la distance entre x et a est au plus de r ce que l'on peut représenter graphiquement de la façon suivante :



À retenir. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$ alors que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(\sqrt{x})^2 = x$.

Exercice 5.9.

1. Montrer que si $\frac{7}{5} < x < \frac{10}{7}$ alors on a aussi $\frac{7}{5} < \frac{1}{x} + \frac{x}{2} < \frac{10}{7}$.
2. Montrer que si $|x - 2| \leq \frac{1}{4}$ alors
 - a) $|1 - \frac{x}{2}| \leq \frac{1}{8}$,
 - b) $|1 - \frac{2}{x}| \leq \frac{1}{7}$,
 - c) $|x^2 - 4| \leq \frac{17}{16}$.
3. Montrer que si $|x - 1| \leq \frac{1}{3}$ alors
 - a) $\frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{x+2} \leq \frac{7}{8}$,
 - b) $\frac{1}{4} \leq \frac{2x-1}{2-x} \leq \frac{5}{2}$.

Exercice 5.10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $|x + 2| + |3x - 1| = 4$,
2. $|x - 2| - 2|x + 1| - 3|x| = 0$,
3. $|2 - x| + 4|x^2 - 1| = 1$,
4. $x + |x| = \frac{2}{x}$.

5.3. Représentation graphique d'une fonction

Définition 5.11 – Graphe d'une fonction. Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$. On appelle **graphe de f** ou **courbe représentative de f** dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de son repère orthonormé usuel, et on note $\mathcal{C}_f$, l'ensemble de points

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \in \mathcal{D}_f\}.$$

Remarques.

- Un point (x, y) du plan $\mathbb{R}^2$ est un point de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $y = f(x)$.
- On note qu'un point d'intersection entre la courbe représentative d'une fonction f et l'axe des abscisses est un point de la forme $(x_0, 0)$, $x_0 \in \mathcal{D}_f$. Ainsi, $x_0 \in \mathcal{D}_f$ est alors un élément de $\mathcal{D}_f$ pour lequel $f(x_0) = 0$ et on dira que x_0 est un **zéro de f** .
- Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et g est la fonction définie pour tout $x \in I$ par $g(x) = -f(x)$. Alors les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de ces fonctions sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des abscisses.

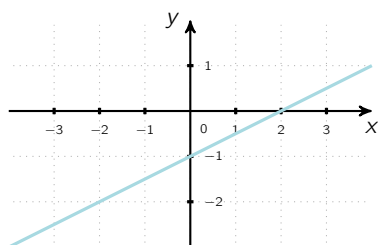
Exemples.

- **Fonctions affines.** La courbe représentative de la fonction

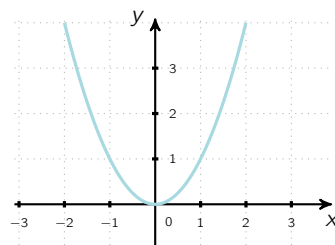
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}x - 1 \end{aligned}$$

est la droite de pente $\frac{1}{2}$ et d'ordonnée à l'origine -1 représentée en figure 5.1a. De plus, on note que le point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses est obtenu pour $x_0 = 2$ qui est bien l'unique solution de $\frac{1}{2}x - 1 = 0$.

- **Fonction carrée.** La courbe représentative de la fonction carrée est en figure 5.1b. Il s'agit d'une **parabole**.



(a) $y = \frac{1}{2}x - 1$



(b) $y = x^2$

Figure 5.1 – Fonctions affine et carrée

- **Fonctions du second degré.** Étant donné trois réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, on considère la fonction polynomiale du second degré définie par

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

La courbe représentative de cette fonction sera une parabole qui est « tournée » vers le haut ou vers le bas selon le signe du coefficient dominant a . De plus, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2 (voir le théorème 2.16), l'équation $f(x) = 0$ possède zéro, une ou deux solutions selon le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Plus précisément, ceci signifie que la parabole croquera zéro (si $\Delta < 0$), une (si $\Delta = 0$) ou deux fois (si $\Delta > 0$) l'axe des abscisses selon les cas, et on sait même déterminer les points d'intersection puisqu'il s'agit des racines de f . Les différents cas sont illustrés à la figure 5.2 pour $a > 0$ et à la figure 5.3 pour $a < 0$:

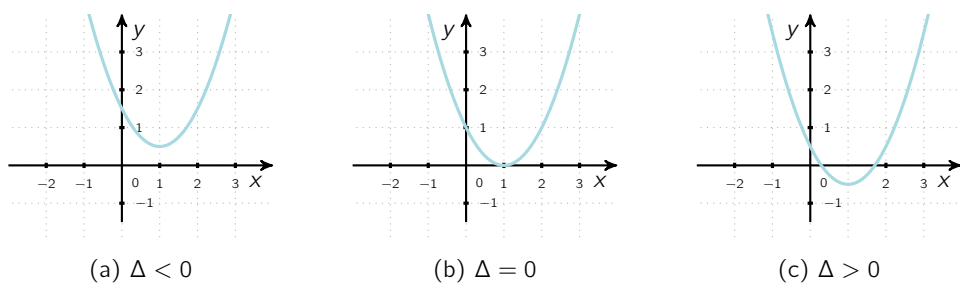


Figure 5.2 – Paraboles de coefficient dominant positif

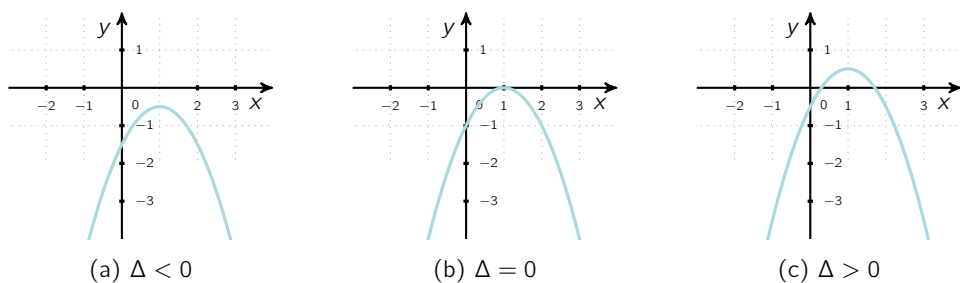


Figure 5.3 – Paraboles de coefficient dominant négatif

- **Fonction racine carrée.** La courbe représentative de la fonction racine carrée est donnée en figure 5.4a. Il s'agit d'une demi-parabole.
- **Fonction inverse.** La courbe représentative de la fonction inverse est donnée en figure 5.4b. Il s'agit d'une **hyperbole**.

- **Fonction valeur absolue.** La courbe représentative de la fonction valeur absolue est donnée en figure 5.4c.

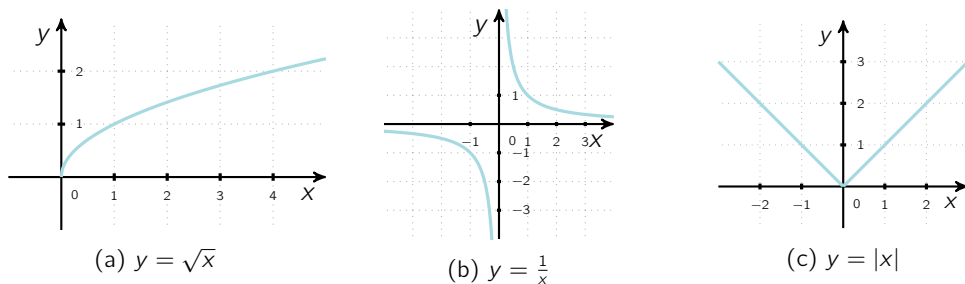
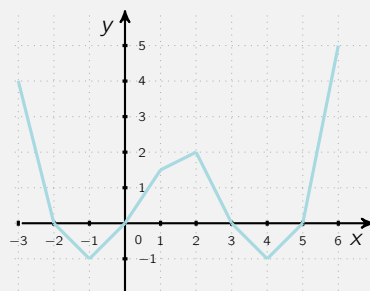


Figure 5.4 – Fonctions racine carrée, inverse et valeur absolue

Exercice 5.12. Soit f la fonction définie, pour $x \in [-3, +\infty[$, par $f(x) = \sqrt{x+3} + 1$. Tracer la courbe représentative de f .

Exercice 5.13. On considère la fonction f définie sur $[-3, 6]$ représentée ci dessous.

1. Combien 1 admet-il d'antécédents par f ?
2. Déterminer l'image de 4 par f .
3. Quelle est la valeur de $f(5)$?
4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -1$.
5. Dresser le tableau de signe de f .
6. Dresser le tableau de variation de f .



Propriété 5.14 – Translation de courbe. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si $a \in \mathbb{R}$, la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x - a)$ est la translation de la courbe représentative de f de vecteur $a\vec{i}$.
- Si $b \in \mathbb{R}$, la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x) + b$ est la translation de la courbe de f de vecteur $b\vec{j}$.

Exemple. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Alors la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto f(x - 3) + 1 = (x - 3)^2 + 1$ est obtenue en translatant celle de f par translation de vecteur $(3, 1)$ comme ceci est illustré par la figure 5.5.

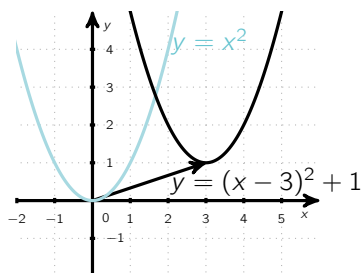


Figure 5.5 – Translation de courbe

5.4. Propriétés et illustrations graphiques

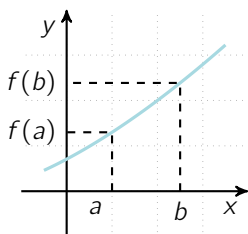
5.4.1 Monotonie

Définition 5.15. Soient f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et D inclus dans $\mathcal{D}_f$.

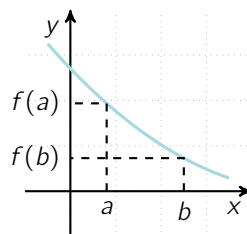
- La fonction f est dite **croissante sur** D si, pour tous réels $a, b \in D$ tels que $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$.
- La fonction f est dite **décroissante sur** D si, pour tous réels $a, b \in D$ tels que $a < b$, on a $f(a) \geq f(b)$.
- La fonction f est dite **monotone** sur D si elle est croissante ou décroissante sur D .

Remarques.

- Graphiquement la monotonie est relativement simple à identifier :



Fonction croissante



Fonction décroissante

Figure 5.6 – Fonctions monotones

- Puisque les inégalités sont larges dans la définition précédente, on constate qu'une fonction constante est à la fois croissante et décroissante.
- Si on utilise des inégalités strictes dans la définition précédente alors on parle de **stricte monotonie** (ou de stricte croissance ou stricte décroissance).

Exemples.

- **Fonctions affines.** Étant donné deux réels $m, p \in \mathbb{R}$, on considère la fonction affine

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto mx + p \end{aligned}$$

Alors f est strictement croissante si $m > 0$, constante si $m = 0$ et strictement décroissante si $m < 0$. En effet, supposons par exemple que $m > 0$ et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Alors, puisque $m > 0$, on a $ma < mb$ et donc

$$f(a) = ma + p < mb + p = f(b)$$

ce qui démontre bien que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- **Fonction valeur absolue.**

- ▷ Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction valeur absolue coïncide avec la fonction identité, c'est-à-dire que pour tout $x \geq 0$, on a $|x| = x$, donc la fonction valeur absolue est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- ▷ Sur $\mathbb{R}_-$, la fonction valeur absolue coïncide avec l'opposée de la fonction identité, c'est-à-dire que pour tout $x \leq 0$, on a $|x| = -x$, donc la fonction valeur absolue est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

- **Fonction carrée.**

- ▷ Sur $\mathbb{R}_+$. Démontrons que la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Soient a et b deux réels positifs tels que $a < b$. Alors, puisque $a \geq 0$, en multipliant l'inégalité $a < b$ par a , on obtient $a^2 \leq ab$ (l'inégalité large étant due au fait que a peut être nul). Or, si on part à nouveau de $a < b$ et qu'on multiplie cette fois par $b > a \geq 0$, on obtient que $ab < b^2$ (b est non nul donc l'inégalité reste stricte ici). Finalement, on a montré que si $0 \leq a < b$, alors $a^2 \leq ab < b^2$ ce qui achève de démontrer que la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- ▷ Sur $\mathbb{R}_-$. De même la fonction carrée est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

- **Fonction racine carrée.** La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Soient $0 \leq x < y$ deux réels positifs. Supposons par l'absurde que $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$ alors, puisque la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $(\sqrt{x})^2 \geq (\sqrt{y})^2$ ce qui équivaut à $x \geq y$ ce qui est absurde. Donc la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- **Fonctions du second degré.** Étant donnés trois réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, on considère la fonction polynomiale du second degré

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Comme énoncé dans le chapitre 2, f s'écrit sous la forme canonique suivante :

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0 \quad \text{avec} \quad x_0 = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Supposons que $a > 0$. Alors, puisque la fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que la fonction du second degré f est décroissante sur $] -\infty, x_0] =] -\infty, -\frac{b}{2a}]$ et croissante sur $[x_0, +\infty[= [-\frac{b}{2a}, +\infty[$.

Proposition 5.16.

◦ Compatibilité avec la somme.

- ▷ La somme de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.
- ▷ La somme de deux fonctions décroissantes est une fonction décroissante.

◦ Compatibilité avec le produit.

- ▷ Le produit de deux fonctions croissantes positives est une fonction croissante (et positive).
- ▷ L'opposée d'une fonction croissante est une fonction décroissante.
- ▷ L'inverse d'une fonction croissante strictement positive est une fonction décroissante (et positive).
- ▷ Le quotient d'une fonction croissante positive par une fonction décroissante strictement positive est une fonction croissante (et positive).

◦ Compatibilité avec la composition.

- ▷ La composée de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.
- ▷ La composée de deux fonctions décroissantes est une fonction croissante.
- ▷ La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est une fonction décroissante.

Exercice 5.17. Démontrer la proposition 5.16.

Exercice 5.18. Montrer que la fonction valeur absolue vérifie les propriétés suivantes.

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|xy| = |x| \times |y|$ et $|x^n| = |x|^n$.
2. **Inégalité triangulaire.** Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x + y| \leq |x| + |y|$.
3. **Seconde inégalité triangulaire.** Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{et} \quad ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$$

5.4.2 Majorants et minorants

Définition 5.19. Soit $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ et D un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$.

- On dit que f est **majorée sur** D , s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $f(x) \leq M$. On dit alors que M est un **majorant de** f . De plus, si M est un majorant de f , on dit alors que f **admet pour maximum M sur D** s'il existe $a \in D$ tel que $f(a) = M$.
- On dit que f est **minorée sur** D , s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $f(x) \geq m$. On dit alors que m est un **minorant de** f . De plus, si m est un minorant de f , on dit alors que f **admet pour minimum m sur D** s'il existe $a \in D$ tel que $f(a) = m$.
- On dit que f est **bornée sur** D , si elle est à la fois majorée et minorée sur D .
- On appelle **extremum de** f un maximum ou un minimum de f .

Exemples.

- **Fonction carrée translatée.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x - 2)^2.$$

- ▷ La fonction f est minorée par 0 sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x - 2)^2 \geq 0$. De plus, 0 est le minimum de f car il est atteint pour $x = 2$ (et seulement en ce point).
- ▷ La fonction f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$ car pour tout réel M on a

$$f(\sqrt{M+1} + 2) = (\sqrt{M+1} + 2 - 2)^2 = \sqrt{M+1}^2 = M + 1 > M$$

ce qui signifie que f dépassera n'importe quelle valeur réelle M .

- **Fonction valeur absolue.** La fonction valeur absolue $x \mapsto |x| = \sqrt{x^2}$ admet 0 pour minimum qu'elle atteint en 0, car la fonction racine carrée est minorée par 0. En revanche, elle n'est pas majorée car pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|x| = x$ qui n'est pas majorée.
- **Fonctions du second degré.** Étant donnés trois réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, on considère la fonction polynomiale du second degré

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Comme énoncé dans le chapitre 2, f s'écrit sous la forme canonique suivante :

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0 \quad \text{avec } x_0 = -\frac{b}{2a} \text{ et } y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Deux situations peuvent alors se produire :

- ▷ Si $a > 0$ alors $a(x - x_0)^2 \geq 0$ et s'annule uniquement lorsque $x = x_0$. Ceci montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0 \geq y_0$ donc y_0 est un minorant de f . De plus, $f(x_0) = y_0$ donc y_0 est le minimum de f sur $\mathbb{R}$. Le point (x_0, y_0) est ainsi le sommet de la parabole (tournée vers le haut ici puisque $a > 0$) représentative de la fonction f .
- ▷ Si $a < 0$ alors $a(x - x_0)^2 \leq 0$ et s'annule uniquement lorsque $x = x_0$ et on en déduit comme dans le cas précédent que y_0 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$ et qu'il est atteint en x_0 . Le point (x_0, y_0) est à nouveau le sommet de la parabole (tournée vers le bas cette fois puisque $a < 0$) représentative de la fonction f .

Remarque. Graphiquement, si m est un minorant de f alors la droite d'équation $y = m$ est en dessous de la courbe représentative de f . De même, si M est un majorant de f alors la droite d'équation $y = M$ est au-dessus de la courbe représentative de f . De plus, si m est un minimum atteint en un point a , i.e. $f(a) = m$ alors $(a, f(a)) = (a, m)$ est un point d'intersection de la droite d'équation $y = m$ et de la courbe représentative de f . Il en est bien sûr de même pour un maximum M . On obtient ainsi graphiquement la situation suivante (ici sur l'intervalle $I = [-3, 3]$) :

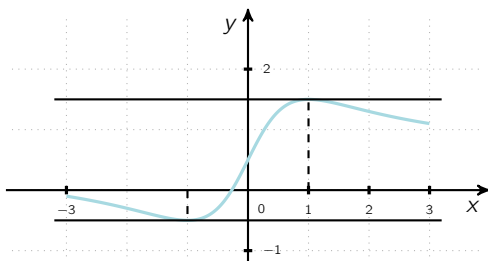


Figure 5.7 – Fonction bornée

Exercice 5.20. Déterminer les extrema (minimum et maximum) des fonctions suivantes en précisant pour quelles valeurs de x ils sont atteints :

1. $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (x + 1)^2 - 2$

2. $g: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto -(x - 2)^2 + 8$

Remarque. Si une fonction est majorée, alors elle possède une infinité de majorant (par exemple si M est un majorant de f alors $M + 1$ l'est également). On peut alors se poser la question suivante : existe-t-il un plus petit majorant pour une fonction f majorée ? La réponse est oui et ce plus petit majorant s'appelle la **borne supérieure de f** . Cette notion dépasse le niveau que nous souhaitons atteindre ici mais si vous êtes intéressé nous vous conseillons de consulter [LM03] pour plus d'informations à ce sujet. Nous n'insisterons

pas d'avantage sur cette notion mais il est important d'avoir en tête qu'**une fonction majorée peut ne pas avoir de maximum**, i.e. peut ne pas atteindre sa borne supérieure (de même, **une fonction minorée peut ne pas atteindre sa borne inférieure** qui est le plus grand de ses minorants et donc ne pas avoir de minimum).

Exemple. On considère la fonction f définie, pour $x \in [1, +\infty[$, par $f(x) = -\frac{3}{x^2}$, dont la courbe représentative est en figure 5.8.

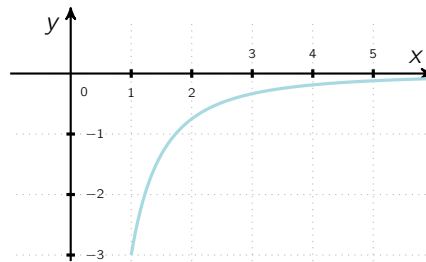


Figure 5.8 – Courbe $y = -\frac{3}{x^2}$

- La fonction f est minorée par -3 car pour tout $x \geq 1$, $x^2 \geq 1$ et $\frac{1}{x^2} \leq 1$. Ainsi, $\frac{3}{x^2} \leq 3$ et finalement, $f(x) = -\frac{3}{x^2} \geq -3$. De plus, puisque $f(1) = -3$, -3 est le minimum de f .
- En revanche, la fonction f est majorée par 0 car pour tout $x \geq 1$, $f(x) = -\frac{3}{x^2} \leq 0$ mais n'admet pas de maximum car 0 n'est pas atteint par f (il n'existe pas de réel x tel que $-\frac{3}{x^2} = 0$).

5.4.3 Parité et symétries

Définition 5.21 – Fonction paire, fonction impaire. Considérons une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ et telle que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$.

- On dit que la fonction f est **paire** si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.
- On dit que la fonction f est **impaire** si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Exemples.

- **Fonctions constantes.** Les fonctions constantes sont paires. En effet, si $a \in \mathbb{R}$, la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = a$ vérifie bien pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$.
- **Fonctions linéaire.** Les fonctions linéaires sont impaires. En effet, si $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = mx$ vérifie bien pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = m(-x) = -mx = -f(x)$.

- **Fonctions affines non linéaires et non constantes.** Soit $(m, p) \in \mathbb{R}^2$ avec $m \neq 0$ et $p \neq 0$. Si f est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ alors f n'est ni paire ni impaire. Étudions le cas particulier de la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$. Alors $f(1) = 5$ et $f(-1) = 1$. Ainsi, $f(-1)$ n'est ni égale à $f(1)$ ni à $-f(1)$. On procède de même pour montrer plus généralement que la fonction $f : x \mapsto mx + p$ n'est ni paire ni impaire si $m \neq 0$ et $p \neq 0$.
- **Fonction valeur absolue.** La fonction valeur absolue est paire : en effet, pour $x \geq 0$, on a $|-x| = -(-x) = x = |x|$, ce qu'il fallait démontrer.
- **Fonction carrée.** Si $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. On a donc montré que pour tout nombre réel x , on a $f(x) = f(-x)$, donc la fonction carrée est paire.
- **Fonction cube.** Si $x \in \mathbb{R}$ un réel alors $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. On a donc montré que pour tout nombre réel x , on a $f(x) = -f(-x)$, donc la fonction cube est impaire.

Exercice 5.22. Étudier l'éventuelle parité ou imparité des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{x^2+2}{x^4+5},$

2. $f_2 : x \mapsto 8x^3 - 3x,$

3. $f_3 : x \mapsto -3x + 2.$

Proposition 5.23.

- La somme et le produit de deux fonctions paires sont des fonctions paires.
- La somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire.
- Le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.
- Le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.

Exercice 5.24. Démontrer la proposition 5.23.

Proposition 5.25.

- Une fonction est paire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Une fonction f est impaire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine, i.e. si $(x, f(x))$ est un point de la courbe représentative de f , alors $(-x, -f(x))$ est également un point de la courbe représentative de f .

Démonstration. On se contente de démontrer le premier point car la preuve du second est similaire.

- *Sens direct.* Si f est paire, alors pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$. Ainsi, si $(x, f(x))$

est un point de la courbe représentative de f , alors $(-x, f(x))$ est également un point de la courbe représentative de f . La courbe représentative de f est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- *Sens réciproque.* Si la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, alors si (x, y) est un point de la courbe représentative $(-x, y)$ est également un point de la courbe représentative de f . Ainsi, si $x \in \mathcal{D}_f$ et si $y = f(x)$, alors $y = f(-x)$ ce qui signifie que $f(-x) = f(x)$ et ceci étant vrai pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, f est paire.

□

Exemple. On constate à la figure 5.9 que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2$ est paire alors que la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{8}x^3$ est impaire.

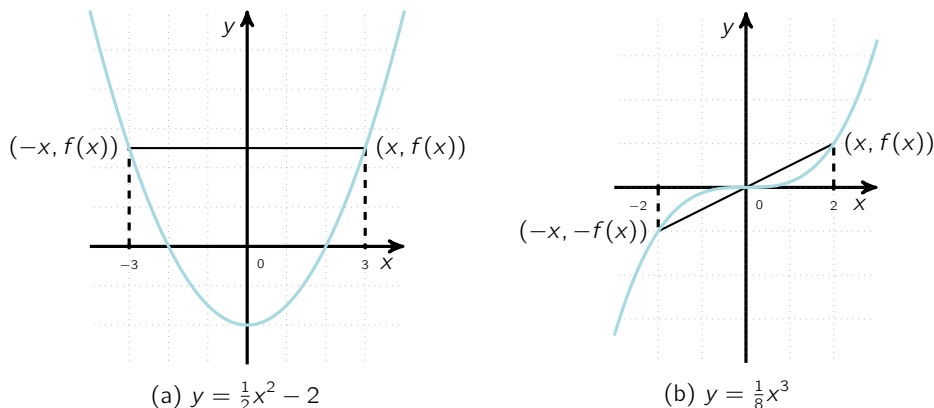


Figure 5.9 – Fonctions paire et impaire

Exercice 5.26.

1. Démontrer que pour tout réel a , la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 + a$ est paire et tracer la courbe représentative de f pour $a = 1$.
2. Démontrer que la fonction inverse définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, par $f(x) = \frac{1}{x}$ est impaire et tracer sa courbe représentative.
3. Démontrer que la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 + x + 1$ n'est ni paire ni impaire et tracer sa courbe représentative.

La courbe représentative d'une fonction f peut posséder d'autres symétries axiales ou centrales et ces propriétés se retrouvent, tout comme la parité et l'imparité, sur l'expression de la fonction étudiée comme le montre les propriétés suivantes.

Propriété 5.27 – Symétrie par rapport à un axe vertical. Soient $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $a + x \in \mathcal{D}_f$ alors $a - x \in \mathcal{D}_f$. Alors, la courbe représentative de f est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = a$ si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $a + x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(a + x) = f(a - x)$.

Exemple. La courbe représentative (voir figure 5.10a) de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 2$ est symétrique par rapport à l'axe $x = 1$. En effet,

$$f(1 + x) = \frac{1}{2}((1 + x) - 1)^2 - 2 = \frac{1}{2}x^2 - 2$$

et

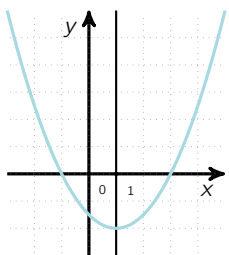
$$f(1 - x) = \frac{1}{2}((1 - x) - 1)^2 - 2 = \frac{1}{2}(-x)^2 - 2 = \frac{1}{2}x^2 - 2.$$

Remarque. Si $a = 0$ on obtient une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées et l'égalité $f(a + x) = f(a - x)$ devient $f(-x) = f(x)$ ce qui signifie que la fonction f est paire. La propriété 5.27 est donc une généralisation de la proposition 5.25 obtenue pour les fonctions paires.

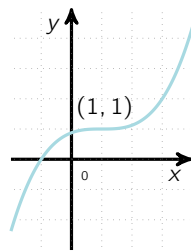
Propriété 5.28 – Symétrie par rapport à un point. Soient $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ et a et b deux réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $a + x \in \mathcal{D}_f$ alors $a - x \in \mathcal{D}_f$. La courbe représentative de f est symétrique par rapport au point (a, b) si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $a + x \in \mathcal{D}_f$, $f(a + x) + f(a - x) = 2b$.

Exemple. La courbe représentative (voir figure 5.10b) de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{8}(x - 1)^3 + 1$ est symétrique par rapport au point $(1, 1)$. En effet,

$$f(1 + x) + f(1 - x) = \frac{1}{8}((1 + x) - 1)^3 + 1 + \frac{1}{8}((1 - x) - 1)^3 + 1 = 2.$$



(a) Symétrie par rapport à un axe vertical



(b) Symétrie par rapport à un point

Figure 5.10 – Courbes symétriques

Remarque. Si $a = b = 0$ on obtient une symétrie centrale par rapport à l'origine et l'égalité $f(a+x) + f(a-x) = 2b$ devient $f(-x) + f(x) = 0$ i.e. $f(-x) = -f(x)$ ce qui signifie que la fonction f est impaire. La propriété 5.28 est donc une généralisation de la proposition 5.25 obtenue pour les fonctions impaires.

Poursuivons cette section par une dernière symétrie axiale par rapport à un axe non verticale : la droite d'équation $y = x$.

Proposition 5.29 – Symétrie par rapport à la première bissectrice. *Les courbes représentatives de deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ si et seulement si elles sont fonctions réciproques l'une de l'autre, i.e. si pour tout $x \in \mathcal{D}_{g \circ f}$, $(g \circ f)(x) = x$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_{f \circ g}$, $(f \circ g)(x) = x$.*

Exemple. On connaît déjà des fonctions réciproques l'une de l'autre : la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction racine carrée (également définie sur $\mathbb{R}_+$) sont réciproques l'une de l'autre puisque pour tout $x \geq 0$, $(\sqrt{x})^2 = x$ et $\sqrt{x^2} = x$. Graphiquement, on obtient la situation présente à la figure 5.11.

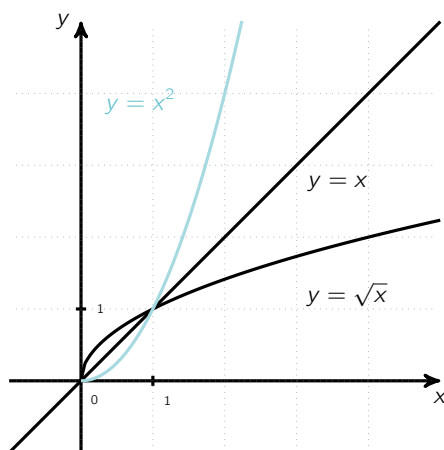


Figure 5.11 – Symétrie par rapport à $y = x$

Achevons cette section par une symétrie d'une autre nature : l'invariance par translation de la courbe représentative.

Définition 5.30 – Périodicité. Soient f une fonction et T un nombre réel strictement positif. On suppose que pour tout $x \in D_f$, $x+T \in D_f$. On dit alors que f est périodique de période T si pour tout $x \in D_f$, $f(x+T) = f(x)$.

Propriété 5.31. Une fonction f est périodique de période $T > 0$ si et seulement si sa courbe représentative est invariante par la translation horizontale de vecteur $T\vec{i}$.

Exemples.

- On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x$ impaire et 2-périodique. Par imparité, on obtient que $f(x) = x$ sur $[-1, 0]$ (la courbe représentative doit être symétrique par rapport à l'origine) et, par 2-périodicité, sa courbe représentative est alors la suivante.

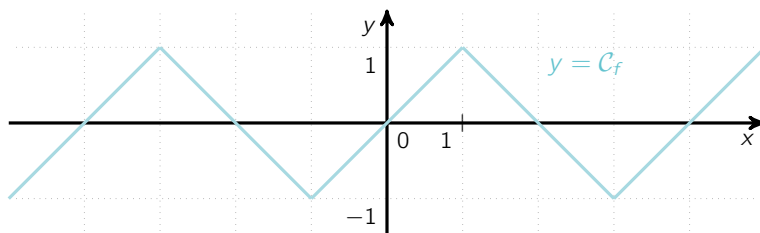


Figure 5.12 – Fonction périodique

- Les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques (on définira proprement ces deux fonctions aux chapitres 7 et 8) comme on peut le constater sur le graphe suivant.

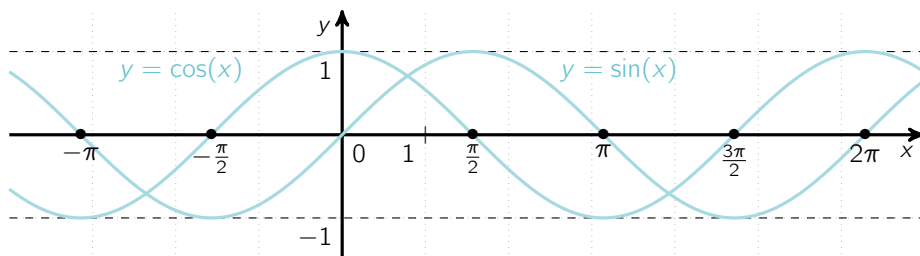


Figure 5.13 – Fonctions cosinus et sinus

CHAPITRE 6

Suites réelles

La notion de suite réelle possède de nombreuses applications en biologie, en économie, en épidémiologie ou encore en dynamique des populations. Notons par exemple p_n le nombre de membres d'une population à l'année n , n étant un entier naturel. Si l'on suit le modèle proposé par *Thomas Malthus* (voir [Wik]), alors l'évolution de p_n au fil des années n , est dictée par l'égalité

$$p_{n+1} = ap_n$$

où a est un facteur réel lié au nombre de naissances. Néanmoins, ce modèle ne tient pas suffisamment compte des contraintes environnementales. En effet, si on suppose que $a > 1$ et si la population initiale p_0 est strictement positive, alors on pourra se convaincre aisément que p_n devient très rapidement très grand. Afin de pallier à ce problème, ce modèle sera révisé par *Pierre-François Verlhust* (voir [Wik]) qui proposera de décrire l'évolution de la population de la façon suivante :

$$p_{n+1} = ap_n(1 - p_n)$$

où le terme en $1 - p_n$ a pour vocation d'encoder un certain nombre de facteurs limitant la croissance de la population tels que le manque de nourriture ou d'espace. Cette suite, appelée **suite logistique**, est particulièrement utile et pourra être étudiée aussi bien en épidémiologie qu'en économie. Le but est alors de comprendre comment se comporte p_n au fur et à mesure des années, c'est-à-dire selon la valeur de n , afin de nous permettre, par exemple, de faire des prévisions de populations (ce qui est utile par exemple si on parle de la population humaine ou de la propagation d'une épidémie). Néanmoins, bien que l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n soit relativement simple, l'étude de la suite $(p_n)_{n \geq 0}$ des populations au fil des années peut s'avérer difficile et donner lieu à des résultats inattendus. L'objectif de ce chapitre n'est pas de lever tous les mystères de cette suite mais plutôt de donner quelques clés pour mieux appréhender les suites en général. Si vous êtes intéressé par ce sujet, vous pouvez consulter [Per08].

6.1. Généralités sur les suites

6.1.1 Définition

Définition 6.1 – Suite explicite. Une **suite réelle** u ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. La quantité $u_n = u(n)$ est appelée **terme général** de la suite. De plus, si la suite n'est définie qu'à partir d'un certain rang $n_0 \geq 0$, on note $(u_n)_{n \geq n_0}$ et u_{n_0} est appelé **terme initial** de cette suite.

Exemple. L'application

$$\begin{aligned} u: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto 3n^2 + 4n - 2 \end{aligned}$$

est une suite réelle. Les premiers termes de cette suite sont $u_0 = -2$, $u_1 = 5$, $u_2 = 18$ et $u_3 = 37$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n^2 + 4n - 2$ et $u_{n+1} = 3(n+1)^2 + 4(n+1) - 2$.

Remarque. Une suite réelle peut être vue comme une liste de nombre réels indexés par l'ensemble des nombres entiers naturels (c'est-à-dire que ces éléments sont numérotés).

À retenir. On fera attention à bien distinguer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et u_n exactement comme nous avons appris à différencier f et $f(x)$.

Il arrive, comme dans le cas de la suite logistique, que nous ne soyons pas en mesure de définir explicitement u_n en fonction de n . Si tel est le cas, il peut être plus simple de définir u_n **par récurrence**, i.e. en exprimant le terme général u_n de la suite en fonction du terme précédent. On formalise cela dans la définition suivante.

Définition 6.2 – Suite récurrente. Une suite u est **définie par récurrence** si

- le terme initial $u_0 \in \mathbb{R}$ est donné,
- la suite u satisfait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction.

Exemples.

- On considère la suite u de premier terme $u_0 = 2$ et qui vérifie, pour tout entier n , la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n + 1$. Les premiers termes de la suite u sont $u_0 = 2$, $u_1 = 3 \times u_0 + 1 = 3 \times 2 + 1 = 7$ et $u_2 = 3 \times u_1 + 1 = 3 \times 7 + 1 = 22$.
- On considère la suite v de premier terme $v_0 = 0$ et qui vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = 7 - v_n$. Les premiers termes de la suite v sont $v_0 = 0$, $v_1 = 7 - v_0 = 7$ et $v_2 = 7 - v_1 = 7 - 7 = 0$. En regardant le comportement de ces

premiers termes, on peut conjecturer (mais nous n'avons rien démontré) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 7 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Remarque. On parlera ici d'une suite récurrente d'**ordre** 1 car le terme u_{n+1} ne s'exprime qu'en fonction du terme u_n . Néanmoins, il est tout à fait possible de définir des suites avec des récurrences faisant appel à plusieurs termes de la suite. L'ordre sera alors ce nombre de termes nécessaires pour l'expression de u_{n+1} .

Exemple – La suite de Fibonacci. La suite de Fibonacci, connue entre autres pour ses liens avec le nombre d'or, est l'une des suites récurrentes les plus célèbres. Il s'agit de la suite récurrentes d'ordre 2 définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Exercice 6.3. Calculer les cinq premiers termes de la suite de Fibonacci.

6.1.2 Représentation graphique d'une suite

À l'instar des fonctions réelles, on peut représenter graphiquement les suites réelles.

Définition 6.4. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. La représentation graphique de la suite u est l'ensemble (discret) des points (n, u_n) pour $n \in \mathbb{N}$.

Exemple – Cas d'une suite explicite. Considérons la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \frac{1}{2}n + 1$. On représente les premiers termes de la suite u de la façon suivante :

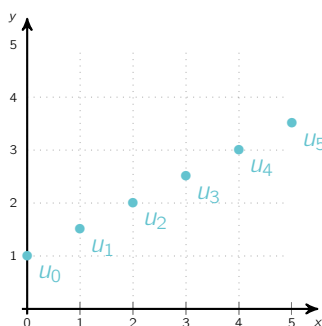


Figure 6.1 – Représentation de la suite $u_n = \frac{1}{2}n + 1$

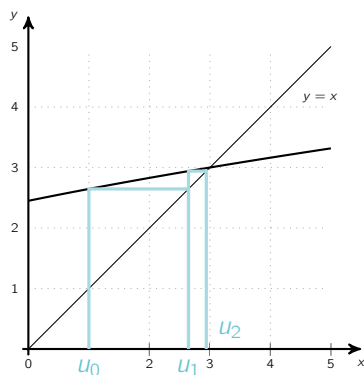
Exemple – Cas d'une suite définie par récurrence. Pour représenter graphiquement les termes d'une suite définie par récurrence, on utilise la droite d'équation $y = x$ et la courbe de la fonction définissant la relation de récurrence, afin de reporter la valeur des termes de la suite sur l'axe des abscisses.

- Considérons la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme initial $u_0 = 1$ et satisfaisant, pour tout entier naturel n

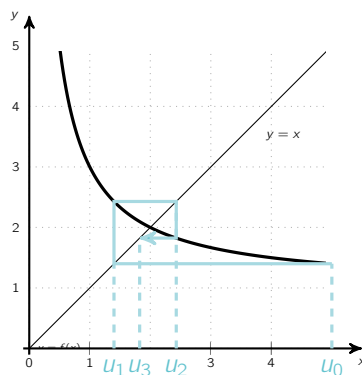
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}.$$

On représente les premiers termes de la suite u dans la figure 6.2a.

- On considère la suite récurrente définie par une valeur initiale $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On représente les premiers termes de la suite u dans la figure 6.2b et on notera la forme de spirale qui apparaît.



(a) $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$



(b) $u_{n+1} = 2 + \frac{2}{u_n}$

Figure 6.2 – Premiers termes de suites récurrentes

Remarque. On note sur cet exemple que la monotonie de la fonction f définissant une suite récurrente semble avoir un impact fort sur le comportement de la suite. Nous formaliserons cela un peu plus loin.

Exercice 6.5.

1. Représenter les six premiers termes de la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{4}n^2 - n + 2$.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 2\sqrt{x}$. Représenter graphiquement :
 - la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$,
 - la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = f(w_n)$.

6.1.3 Opérations sur les suites

Définition 6.6. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- La suite somme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

- La suite produit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \times (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \times (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

- La suite multipliée par un scalaire $\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par

$$\lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

À retenir. Les opérations sur les suites se font terme à terme. En particulier, on peut avoir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \times (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$ sans que ni $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ni $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit nulle.

Exemple. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite qui vaut 1 si n est pair et 0 si n est impair et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite qui vaut 0 si n est pair et 1 si n est impair alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \times (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$.

6.1.4 Suites majorées, minorées et bornées

Définition 6.7.

- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée**, s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. On dit alors que M est un **majorant** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **minorée**, s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. On dit alors que m est un **minorant** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- On dit qu'une suite est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples.

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = \frac{1}{n}$ est majorée par 1 et minorée par 0. Elle est donc bornée.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2$ n'est pas majorée. En effet, si M est un nombre réel, notons $n_0 = \sqrt{\lfloor M \rfloor + 1}$ où $\lfloor M \rfloor$ est le grand entier inférieur ou égal à M (c'est-à-dire la partie entière de M comme nous le verrons dans la définition 9.2). On a alors $u_{n_0} > M$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne possède donc pas de majorant. Elle n'est donc pas majorée. Elle est en revanche minorée par 0.

Exercice 6.8. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont majorées alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \times (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle nécessairement majorée ?

Exercice 6.9. Montrer qu'une suite majorée à partir d'un certain rang est majorée.

6.1.5 Variations d'une suite

Définition 6.10. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite réelle.

- La suite u est dite **croissante** (respectivement **strictement croissante**), si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \geq u_n$ (respectivement $u_{n+1} > u_n$).
- La suite u est dite **décroissante** (respectivement **strictement décroissante**), si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \leq u_n$ (respectivement $u_{n+1} < u_n$).
- La suite u est dite **monotone** (respectivement **strictement monotone**) si elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante).
- La suite u est dite **constante**, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n$.
- La suite u est dite **stationnaire**, si elle est constante à partir d'un certain rang.

Exemples.

- La suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1},$$

est strictement croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

- La suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{1}{n^2}$ est strictement décroissante car pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} = u_n.$$

À retenir. Une suite qui n'est pas croissante n'est pas forcément décroissante. Il existe des suites qui ne sont pas monotones.

Exercice 6.11. Donner une suite qui n'est pas monotone.

La monotonie des suites définies de façon explicite peut être relativement simple à étudier car elle est dictée par la monotonie de la fonction qui définit la suite, i.e. la fonction f

tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Attention, ceci est nettement plus difficile à étudier pour les suites définies par récurrence comme nous aurons l'occasion de le voir plus loin.

Théorème 6.12. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle définie explicitement pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la relation $u_n = f(n)$ avec f une fonction réelle définie sur $[0, +\infty[$.

- Si la fonction f est croissante (respectivement strictement croissante) sur $[0, +\infty[$, alors la suite u est croissante (respectivement strictement croissante).
- Si la fonction f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $[0, +\infty[$, alors la suite u est décroissante (respectivement strictement décroissante).

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n < n+1$. Ainsi, puisque $u_n = f(n)$ et $u_{n+1} = f(n+1)$, la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est exactement celle de f . $\square$

Exemple. Considérons la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général donné, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{1}{2}n + 1$. La fonction réelle définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ est strictement croissante donc la suite u est strictement croissante.

Méthode. Pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut, selon la définition de la suite,

- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$,
- comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 si la suite est de signe constant et ne s'annule pas,
- étudier les variations de f si $u_n = f(n)$.

Exemples.

- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 3$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -3 < 0$ et donc $u_{n+1} < u_n$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n est positif et ne s'annule pas. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 > 1$ et donc $u_{n+1} > 2u_n > u_n$ (car u_n est positive). La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ainsi strictement croissante.
- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^3$. La fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, par $f(x) = x^3$ est croissante donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 6.13. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n)^2 + u_n + 1$.

6.2. Suites et raisonnement : la récurrence

Le raisonnement par récurrence est sûrement l'un des raisonnements les plus célèbres. Il trouve son origine dans la définition axiomatique de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ qui est due au mathématicien et linguiste italien *Giuseppe Peano* (voir [Wike]). L'idée est la suivante : pour monter un escalier, il suffit d'atteindre la première marche et de savoir passer de n'importe quelle marche à la suivante.

Théorème 6.14 – Récurrence simple. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier n . Si

- il existe un entier n_0 tel que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- pour n'importe quel entier $n \geq n_0$ **quelconque fixé**, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie,

alors, pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Remarques.

- On utilise souvent ce mode de raisonnement lorsque la propriété à démontrer dépend de n et on note qu'il est tout à fait possible de réaliser des récurrences finies, c'est-à-dire qui s'arrêtent à un certain rang $N \in \mathbb{N}$.
- Ce type de raisonnement, bien que basé sur une logique plutôt élémentaire, nécessite d'être vigilant lors son utilisation. En particulier, on fera attention à bien choisir le terme initial n_0 et à bien vérifier que la propriété $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

Méthode – Rédaction d'une récurrence simple. On commence la récurrence par l'annonce du raisonnement utilisé ainsi que l'énoncé de la propriété à démontrer.

- *Annonce.* Prouvons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pour tout $n \geq n_0$, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$: « ... ».
- *Initialisation.* On montre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Pour un $n \geq n_0$ **quelconque fixé**, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on montre alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est également vraie.
- *Conclusion.* On a démontré par récurrence que pour tout entier $n \geq n_0$, l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

À retenir. Il est important de respecter la structure de cette rédaction. Il faut faire apparaître dans l'ordre l'annonce, l'initialisation, l'hérédité puis la conclusion, en les nommant.

Exemple. Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$,

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- *Annonce.* Prouvons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $n > 0$, on appelle $\mathcal{P}(n)$, la proposition « $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».
- *Initialisation.* On a $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ donc la proposition $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \geq 1$ un entier quelconque fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que l'égalité suivante, notée (HR), est vraie

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (\text{HR})$$

Démontrons que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que l'égalité

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

est vraie. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad (\text{d'après (HR)}) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

donc la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, on a montré que, pour tout entier $n \geq 1$, on a l'égalité $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 6.15. On considère la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 0$ et définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n > 0$, alors $u_n > 0$.
2. Montrer par récurrence que la suite u est strictement croissante.

Contre-exemple – Le paradoxe de la boîte de crayons de couleurs [Mol]. Afin d'illustrer l'importance de bien rédiger une récurrence, intéressons-nous à une expérience simple et dont le résultat est objectivement absurde. Étant donnée une boîte de crayons de couleurs, nous souhaitons montrer par récurrence sur le nombre de crayons qu'ils sont nécessairement tous de la même couleur.

- *Annonce.* Pour tout entier naturel non nul n , on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ par : « Dans une boîte de crayons contenant n crayons, tous les crayons sont de la même couleur ».

- *Initialisation.* $\mathcal{P}(1)$ est vraie. En effet, si une boîte ne contient qu'un seul crayon de couleurs alors tous les crayons de la boîte sont de la même couleur.
- *Hérédité.* On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie à un rang $n \geq 1$ quelconque et on démontre qu'elle est alors vraie au rang $n + 1$. On se donne alors une boîte de $n + 1$ crayons de couleurs.
 - ▷ On peut former une boîte avec les n premiers crayons et ses n crayons sont alors nécessairement de la même couleur puisque $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
 - ▷ De même, on peut former une boîte avec les n derniers crayons qui sont donc également de la même couleur.

Mais alors, les crayons du milieu étant à la fois dans la première et la seconde boîte, on en déduit que les n premiers et les n derniers crayons sont nécessairement d'une même couleur. On en déduit que les $n + 1$ crayons de notre boîte sont bel et bien de la même couleur.

- *Conclusion.* On a donc montré, par récurrence, que peu importe la taille de la boîte, tous les crayons d'une même boîte sont de la même couleur.

Ce résultat est absurde et il convient de comprendre ce qui ne va pas dans notre raisonnement. Le problème découle de l'initialisation. En effet, il aurait fallu initialiser à $n = 2$ (et ainsi se rendre compte que le résultat était faux).

Théorème 6.16 – Récurrence double. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier n . Si

- il existe un entier n_0 tel que $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0 + 1)$ sont vraies,
- si pour n'importe quel entier $n \geq n_0$ **quelconque fixé**, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ vraies implique $\mathcal{P}(n + 2)$ vraie,

alors, pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Remarque. La récurrence double est une récurrence pour laquelle l'assertion $\mathcal{P}(n)$ ne dépend pas seulement du terme précédent, mais des deux termes précédents $\mathcal{P}(n - 2)$ et $\mathcal{P}(n - 1)$: autrement dit on s'appuie sur les deux marches précédentes pour monter sur la suivante. Cela suppose donc de faire une initialisation sur les deux premiers rangs. Ce type de récurrence est particulièrement utile pour démontrer des propriétés faisant intervenir des suites récurrentes d'ordre 2 pour lesquelles u_{n+2} dépend de u_n et de u_{n+1} . Ce principe peut bien entendu se généraliser à 3, 4 ou plus d'indices successifs.

Exemple. On définit la suite de Fibonacci par $F_1 = 1$, $F_2 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n \geq n$.

- *Annonce.* Pour tout entier naturel non nul n , on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ par : « $F_n \geq n$ ».

- *Initialisation.* On a $F_1 = 1 \geq 1$ et $F_2 = 2 \geq 2$ donc $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.
- *Hérédité.* On suppose que cette propriété est vraie à un rang $n \geq 1$ quelconque et également au rang $n + 1$. Alors, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \geq n + (n + 1) \geq n + 2$ puisque $n \geq 1$. La propriété est donc vraie au rang $n + 2$.
- *Conclusion.* Par le principe de récurrence double, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n \geq n$.

Exercice 6.17. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2n$.

Théorème 6.18 – Récurrence forte. Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier n . Si

- il existe un entier n_0 tel que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- si pour n'importe quel entier $n \geq n_0$ **quelconque fixé**, le fait que les assertions $\mathcal{P}(k)$ soient vraies pour tous les entiers k tels que $n_0 \leq k \leq n$ implique que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_1 = 3$ et pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \frac{2}{n}(u_1 + u_2 + \dots + u_n).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = 3n$.

- *Annonce.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ par : « $u_n = 3n$ ».
- *Initialisation.* Pour $n = 1$, $u_1 = 3 = 3n$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, on suppose que $\mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies. Alors, en factorisant et d'après l'exemple en page 131,

$$u_{n+1} = \frac{2}{n}(u_1 + \dots + u_n) = \frac{2}{n}(3 \times 1 + 3 \times 2 + \dots + 3 \times n) = \frac{6}{n}(1 + \dots + n) = \frac{6}{n} \frac{n(n+1)}{2}.$$

On en déduit que $u_{n+1} = 3(n + 1)$. Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

- *Conclusion.* Par le principe de récurrence forte, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 3n$.

Exercice 6.19. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}(u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

6.3. Convergence de suites

6.3.1 Définition et premiers exemples

Étant donnée une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on souhaite à présent s'intéresser au comportement de u_n lorsque n devient grand. Plusieurs situations peuvent alors se produire.

- La quantité u_n peut s'approcher indéfiniment d'un nombre réel ℓ . On dira alors que u possède une limite finie et que ℓ est cette limite (ou également que u_n tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$).
- La quantité u_n peut devenir infiniment grand lorsque n devient grand. On dira alors que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ (u_n peut bien sûr également tendre vers $-\infty$).
- La quantité u_n peut ne suivre aucun de ces deux comportements.

Exemples.

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{n+1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. En effet, lorsque n tend vers $+\infty$, $n+1$ tend également vers $+\infty$ et donc $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -n$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ ne possède pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$. En effet, $u_n = 1$ si n est pair et $u_n = -1$ si n est impair donc il n'existe pas de valeur dont u_n s'approche indéfiniment puisque l'écart entre deux valeurs successives de la suite est toujours égal à 2. Paradoxalement, bien qu'il soit intuitivement assez simple de visualiser que cette suite ne possède pas de limite, le prouver proprement requiert l'utilisation d'outils un peu plus sophistiqués que nous introduirons plus tard (voir théorème 6.36).

Attachons-nous à présent à donner des définitions rigoureuses de ces différentes notions.

Définition 6.20 – Limite finie. Soit u une suite réelle et soit ℓ un nombre réel. On dit que u est **convergente** et admet pour limite ℓ (ou que u_n tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$) si u_n s'approche indéfiniment de ℓ lorsque n devient grand. Autrement dit, u admet pour limite ℓ , si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang N_ε , tel que, pour tout $n \geq N_\varepsilon$, on a $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$. On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et on dit que la suite u **converge** vers ℓ . Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**. La convergence ou la divergence d'une suite est appelée sa **nature**.

Remarque. Cette définition signifie que si l'on trace un tube autour de ℓ aussi fin qu'on le souhaite (de taille 2ε), il y aura toujours un rang (noté N_ε) à partir duquel (noté : pour tout $n \geq N_\varepsilon$) la suite sera bloquée dans le tube (i.e. $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$). On illustre cette situation à l'aide la figure suivante.

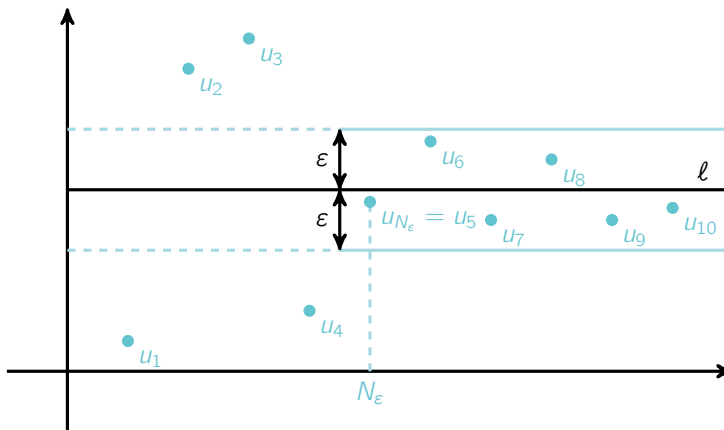


Figure 6.3 – Limite finie d'une suite

À retenir. Il est particulièrement important de noter et de comprendre que, si une suite u converge, alors sa limite ℓ est un réel qui ne dépend pas de n .

Exemple. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{1}{n^2}$ et $w_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ont pour limite 0. En effet, si $\varepsilon > 0$, alors

- pour tout $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, $-\varepsilon \leq u_n \leq \varepsilon$,
- pour tout $n \geq \frac{1}{\varepsilon^2}$, $-\varepsilon \leq w_n \leq \varepsilon$.
- pour tout $n \geq \frac{1}{\varepsilon^2}$, $-\varepsilon \leq v_n \leq \varepsilon$,

On note de plus que si $\varepsilon < 1$ (ce qui correspond à l'intuition qu'il faut avoir car ε a vocation à être petit), alors $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{\varepsilon^2}$ ce qui signifie que la suite v tend plus vite vers 0 que la suite u qui tend elle-même plus vite vers 0 que la suite w .

Donnons un premier théorème qui nous indique que si une suite converge, elle ne peut pas s'approcher de deux valeurs distinctes en même temps et elle ne peut pas devenir infiniment grande.

Théorème 6.21 – Propriétés des suites convergentes.

- **Unicité de la limite.** Si une suite converge sa limite est unique.
- Une suite convergente est bornée.

Démonstration.

- Supposons qu'il existe deux réels $\ell_1 \neq \ell_2$ tels que u converge vers ℓ_1 et ℓ_2 . Il nous suffit alors de prendre un tube autour de ℓ_1 et un tube autour de ℓ_2 qui soient suffisamment petits pour ne pas avoir de partie commune : la suite devant alors être dans ces deux tubes à la fois, on obtiendra une contradiction. Plus précisément, supposons sans perte de généralité que $\ell_2 > \ell_1$ et posons $\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{3}$. Puisque u converge vers ℓ_1 , il existe un rang N_ε tel que

$$\text{pour tout } n \geq N_\varepsilon, \ell_1 - \varepsilon \leq u_n \leq \ell_1 + \varepsilon.$$

De même, puisque u converge vers ℓ_2 , il existe un rang $\tilde{N}_\varepsilon$ tel que

$$\text{pour tout } n \geq \tilde{N}_\varepsilon, \ell_2 - \varepsilon \leq u_n \leq \ell_2 + \varepsilon.$$

Mais alors, pour tout $n \geq \max(N_\varepsilon, \tilde{N}_\varepsilon)$, puisque $\ell_1 < \ell_2$,

$$u_n \leq \ell_1 + \varepsilon = \ell_1 + \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} = \frac{\ell_2 + 2\ell_1}{3} < \frac{2\ell_2 + \ell_1}{3} = \ell_2 - \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} = \ell_2 - \varepsilon \leq u_n$$

ce qui est absurde. On en déduit donc que $\ell_1 = \ell_2$ et donc que la limite est unique.

- Pour montrer que la suite u est bornée on va utiliser le fait que, puisqu'elle converge, elle est coincée dans un tube à partir d'un certain rang (et donc bornée à partir de ce rang) et puisqu'il ne reste alors qu'un nombre fini de termes avant qu'elle ne rentre dans ce tube, elle est en réalité bornée. Plus précisément, notons ℓ la limite de la suite u , alors il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$,

$$\ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1$$

(on a ici pris $\varepsilon = 1$). On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\min(\ell - 1, u_0, \dots, u_{N-1}) \leq u_n \leq \max(\ell + 1, u_0, \dots, u_{N-1})$$

où le min et le max intervenant ici existent car ils sont pris sur un nombre fini de termes. On a donc bien montré que u est bornée.

□

Remarque. On déduit du second point qu'une suite non bornée ne converge pas. Ainsi, comme attendu, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = n$ est divergente (et diverge vers $+\infty$).

À retenir. La réciproque du second point de ce théorème est fautive. Par exemple la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ est bornée mais ne converge pas.

Définition 6.22 – Limite infinie.

- On dit qu'une suite u a pour limite $+\infty$ si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang à partir duquel tous les termes u_n sont plus grands que A . Autrement dit :

pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N_A \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_A$, $u_n \geq A$.

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- On dit qu'une suite u a pour limite $-\infty$ si pour tout $B \in \mathbb{R}$, il existe un rang à partir duquel tous les termes u_n sont plus petits que B . Autrement dit :

pour tout $B \in \mathbb{R}$, il existe $N_B \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_B$, $u_n \leq B$.

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Dans ces deux cas, on dit que la suite u diverge et a pour limite $\pm\infty$ selon la situation.

Exemples.

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \sqrt{n}$ diverge vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = -n^2$ diverge vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = (-1)^n n$ diverge mais ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$. On note en revanche que la suite $(|w_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

À retenir. Une suite qui diverge ne tend pas nécessairement vers $\pm\infty$ comme l'illustre la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$. De plus, il ne suffit pas que u ne soit pas majorée pour qu'elle tende vers $+\infty$ comme l'illustre la suite w de l'exemple précédent. En effet, il faut en plus que u reste au-dessus de A à partir d'un certain rang.

Exercice 6.23. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant.

- Une suite divergente est nécessairement non bornée.
- La somme de deux suites divergentes est nécessairement divergente.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors $(u_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- Si $(u_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs qui converge alors $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

6.3.2 Opérations sur les limites

Nous avons, dans la section précédente, pris le temps de définir la notion de convergence d'une suite et plus précisément la notion de limite (finie ou infinie). L'objet de la section que nous entamons à présent est de donner quelques règles de calculs de limites lorsque la situation est favorable et d'expliquer comment traiter les cas, appelés **formes indéterminées**, plus délicats qui vont nous demander de travailler davantage sur la forme de la suite afin de pouvoir conclure.

Plus précisément, étant données deux suites u et v dont nous connaissons les limites, nous souhaitons déterminer la limite de la somme, du produit et, lorsque cela a du sens, du quotient de u et v . Afin de pouvoir s'y retrouver aisément, nous résumons les différents cas possibles dans le théorème suivant.

Théorème 6.24 – Tableau des limites. Soient u et v deux suites ainsi que ℓ et ℓ' deux réels non nuls. On résume ici l'ensemble des limites des somme, produit et quotient de u par v (on suppose, pour le quotient, que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang) :

u_n	v_n	$u_n + v_n$	$u_n \times v_n$	$\frac{u_n}{v_n}$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell\ell'$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	0	ℓ	0	$\pm\infty$ / pas de limite
0	ℓ'	ℓ'	0	0
0	0	0	0	forme indéterminée
ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	0
0	$+\infty$	$+\infty$	forme indéterminée	0
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	$+\infty$	forme indéterminée	$\pm\infty$ / pas de limite
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	forme indéterminée
$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée	$-\infty$	forme indéterminée

Démonstration. Nous ne démontrons pas ici l'ensemble des entrées de ce tableau, nous nous contenterons de traiter quelques cas qui permettront de se faire une idée sur la stratégie à adopter pour les obtenir.

- *Somme de limites finies.* Soient u et v deux suites réelles qui convergent vers deux limites finies ℓ et ℓ' . Montrons que la suite $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$. Soit $\varepsilon > 0$, puisque u converge vers ℓ , il existe un rang N_ε tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$,

$$\ell - \frac{\varepsilon}{2} \leq u_n \leq \ell + \frac{\varepsilon}{2}.$$

On note que l'on applique ici la définition de la convergence avec $\frac{\varepsilon}{2}$ au lieu de ε . Cela peut paraître surprenant mais la suite de la preuve devrait éclaircir ce point.

De même, puisque v converge vers ℓ' , il existe un rang N'_ε tel que pour tout $n \geq N'_\varepsilon$,

$$\ell' - \frac{\varepsilon}{2} \leq v_n \leq \ell' + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais alors, pour tout $n \geq \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$, en additionnant ces deux égalités on obtient

$$\ell + \ell' - \varepsilon \leq u_n + v_n \leq \ell + \ell' + \varepsilon$$

ce qui signifie bien, puisque $\varepsilon > 0$ a été choisi de façon arbitraire au début de notre preuve, que $u + v$ converge vers $\ell + \ell'$. On note ainsi que, grâce au fait que nous ayons exploité la définition de la convergence de u et de v pour $\frac{\varepsilon}{2}$, nous avons bien obtenu, après la somme, la définition de la convergence de $u + v$ pour ε . Il s'agit d'une astuce de calcul fréquente en analyse.

- *Somme d'une limite finie et d'une limite infinie.* Soient u une suite qui converge vers une limite finie ℓ et v une suite divergente de limite $+\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$. On commence par noter que, puisque u converge vers ℓ , il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq \ell - 1$ (on a pris ici $\varepsilon = 1$). De plus, puisque v tend vers $+\infty$, il existe un rang N' tel que pour tout $n \geq N'$, $v_n \geq A + 1 - \ell$. Mais alors, pour tout $n \geq \max(N, N')$, $u_n + v_n \geq \ell - 1 + A + 1 - \ell = A$ ce qui signifie, puisque A est quelconque, que $u + v$ tend vers $+\infty$.
- *Produit de limites finies.* Soient u et v deux suites réelles qui convergent vers deux limites finies ℓ et ℓ' . Commençons cette preuve par un calcul nous permettant de guider notre stratégie de preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n v_n - \ell \ell' = (u_n - \ell) v_n + \ell v_n - \ell \ell' = (u_n - \ell) v_n + \ell (v_n - \ell').$$

Plutôt que de revenir à la définition avec les ε (ce que nous pouvons bien sûr faire), on va ici essayer d'aller un peu plus vite pour illustrer d'autres mécaniques de raisonnement.

- ▷ La suite de terme général $(u_n - \ell) v_n$ tend vers 0 car :
 - puisque u converge vers ℓ , la quantité $u_n - \ell$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$,
 - puisque v converge, cette suite est bornée (voir théorème 6.21).
- ▷ La suite de terme général $\ell (v_n - \ell')$ tend vers 0 car v_n tend vers ℓ' .

Ainsi, $u_n v_n - \ell \ell'$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$ ce qui signifie bien que uv converge vers $\ell \ell'$.

- *Inverse d'une limite finie non nulle.* Soit v une suite convergeant vers une limite finie $\ell \neq 0$. Montrons que $\frac{1}{v}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$. Comme dans le point précédent, commençons par un calcul nous permettant de comprendre comment conclure. Soit n suffisamment grand pour que $v_n \neq 0$ (on note que l'existence d'un tel rang est garantie par le fait que v converge vers $\ell \neq 0$), $\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell} = \frac{\ell - v_n}{\ell v_n}$. Or,

- ▷ $\ell - v_n$ tend vers 0 puisque v converge vers ℓ ,
 - ▷ puisque v converge vers ℓ , $v_n \ell$ converge vers $\ell^2 \neq 0$ par produit de limite.
- Ainsi, $\frac{1}{v_n} - \frac{1}{\ell}$ tend vers 0 ce qui achève notre preuve.

□

Remarque. Quand vous tombez sur un cas de « forme indéterminée » il faut que vous étudiez davantage votre suite car il n'y a pas de réponse générale que l'on puisse donner : la réponse dépend de la suite. Illustrons ceci sur des exemples simples.

- *Pour la somme de limites infinies.* Si u tend vers $+\infty$ et v tend vers $-\infty$ alors on ne peut pas conclure sans étudier davantage la situation comme le montre les exemples suivants.
 - ▷ Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ et $v_n = -n$ alors $u_n + v_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite $u + v$ converge vers 0.
 - ▷ Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$ et $v_n = -n$ alors $u_n + v_n = n^2 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite $u + v$ tend vers $+\infty$ car

$$u_n + v_n = n^2 - n = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

et n^2 tend vers $+\infty$ et $1 - \frac{1}{n}$ tend vers 1.

- *Pour le produit d'une limite nulle et d'une limite infinie.* Si u tend vers 0 et v tend vers $+\infty$ alors on ne peut pas conclure non plus comme vont le montrer les exemples suivants.
 - ▷ Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = n$ alors $u_n v_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc la suite uv converge vers 1.
 - ▷ Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = n^2$ alors $u_n v_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc la suite uv tend vers $+\infty$.

Méthode – Lever une indétermination.

- Si on a une somme de puissances de n ou un quotient, on factorise par le terme prépondérant (c'est-à-dire la plus grande puissance de n).
- Si on a une différence de racines, on multiplie par la quantité conjuguée (voir la méthode en page 13).

Exemples.

- On veut étudier la nature de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = n^3 - n\sqrt{n} + 1.$$

On factorise par le terme de plus haut degré qui se trouve être n^3 . On obtient que pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$u_n = n^3 \left(1 - \frac{n\sqrt{n}}{n^3} + \frac{1}{n^3} \right) = n^3 \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^3} \right).$$

Or, le terme entre parenthèses tend vers 1 alors que n^3 tend vers $+\infty$. Ainsi, u diverge vers $+\infty$.

- On veut étudier la nature de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2n^2+1}{3n^2+n}$. On factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur qui est n^2 dans les deux cas. On obtient que pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$u_n = \frac{n^2 \left(2 + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(3 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n}}.$$

Or, le numérateur tend vers 2 alors que le dénominateur tend vers 3. Ainsi, u est une suite convergente qui tend vers $\frac{2}{3}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- On veut étudier la nature de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. On multiplie alors par la quantité conjuguée pour lever la forme indéterminée et on obtient

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Or, le numérateur tend vers 1 alors que le dénominateur tend vers $+\infty$. Ainsi, u est une suite convergente qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque. Une fois introduites les fonctions exponentielles et logarithmes, nous pourrions également utiliser les croissances comparées (voir les propositions 9.21 et 9.44).

Exercice 6.25. Étudier la nature et donner la limite éventuelle des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

1. $u_n = \frac{3n^2-2n+1}{n^5+2n^4-1},$
2. $u_n = \frac{3n^2-2n+1}{n\sqrt{n+n-1}},$
3. $u_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1},$
4. $u_n = \sqrt{1+n^2} - \sqrt{1+n},$
5. $u_n = \sqrt{n} - n,$
6. $u_n = \frac{\sqrt{(n+1)(n+3)} + \sqrt{n}}{n}.$

6.3.3 Monotonie et convergence de suites

Dans la section précédente, nous avons donné des méthodes de calculs de limites de suites. Néanmoins, il n'est pas rare que nous devions nous montrer plus modeste car nous ne sommes parfois pas en mesure de déterminer la limite d'une suite. Dans de telle situation nous allons nous contenter d'étudier la convergence, ou non, de la

suite considérée. C'est le but des énoncés présents dans cette section qui donnent des résultats favorables dans le cas particulier des suites monotones.

Théorème 6.26 – Théorème de limite monotone.

- *Cas d'une suite monotone bornée.*
 - ▷ *Une suite croissante majorée est convergente.*
 - ▷ *Une suite décroissante minorée est convergente.*
- *Cas d'une suite monotone non bornée.*
 - ▷ *Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.*
 - ▷ *Une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.*

Démonstration. Nous ne ferons pas ici la preuve de ce résultat car elle est basée sur la notion de borne supérieure que nous n'avons pas introduite dans ce livre. Néanmoins, si vous êtes intéressé vous pouvez par exemple consulter [LM03]. $\square$

Remarque. Il est à noter que, comme annoncé, ce théorème nous fournit, dans le cas d'une suite monotone bornée, l'existence d'une limite mais ne nous en donne pas la valeur. On verra néanmoins dans la section suivante que si une suite est majorée par un réel M et qu'elle converge, alors sa limite est inférieure ou égale à M ce qui pourra nous fournir une estimation de cette limite.

Le lien entre monotonie et convergence ne s'arrête pas au théorème de convergence monotone. Poursuivons ainsi cette section par l'introduction de la notion de suites adjacentes qui nous sera particulièrement utile pour justifier la convergence de la méthode de dichotomie qui nous permettra, entre autres, de démontrer le très important théorème des valeurs intermédiaires 8.32 ou encore le théorème de Bolzano–Weierstrass 6.37.

Définition 6.27. Deux suites u et v sont dites **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence tend vers 0.

Théorème 6.28. *Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.*

Démonstration. Soient u et v deux suites adjacentes avec u croissante et v décroissante. La preuve se déroule en deux temps : on commence par montrer que les suites u et v convergent à l'aide du théorème de limite monotone 6.26 puis on conclura que ces limites sont égales.

- La suite u est croissante par hypothèse. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_0$. En effet, supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > v_0$. Puisque u est croissante,

$u_n \geq u_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$. De plus, v étant décroissante, on a $v_n \leq v_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, si on note $\varepsilon = u_{n_0} - v_0 > 0$, alors pour tout $n \geq n_0$,

$$u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_0 = \varepsilon > 0$$

ce qui contredit le fait que la différence $u_n - v_n$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Ceci achève donc de montrer que u est majorée par v_0 . La suite u étant croissante majorée, elle est donc convergente d'après le théorème de limite monotone 6.26.

- De même, la suite v est décroissante minorée par u_0 donc convergente.
- Si on note ℓ la limite de u et ℓ' la limite de v alors $u_n - v_n$ tend vers $\ell - \ell'$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ et on en déduit que $\ell = \ell'$ par unicité de la limite 6.21 puisque, par hypothèse, la différence de u et v tend vers 0.

□

Exemple. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Montrons que ces deux suites sont adjacentes.

- *Montrons que u est croissante.* Pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$.
- *Montrons que v est décroissante.* Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

- *Montrons que $u_n - v_n \rightarrow 0$.* Pour tout entier $n \geq 1$, on a $v_n - u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Les suites u et v sont donc adjacentes. D'après le théorème précédent elles convergent donc vers une limite commune ℓ telle que, pour tout entier n , $u_n \leq \ell \leq v_n$. On pourrait en réalité montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$ en utilisant d'autres méthodes plus sophistiquées.

Exercice 6.29. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

Montrer que ces suites sont adjacentes.

6.3.4 Convergence et comparaison

Nous avons vu dans la section précédente, dans le cas particulier des suites adjacentes, qu'il est parfois possible d'obtenir un encadrement de la limite d'une suite convergente. L'objectif de cette section est de donner des résultats plus généraux à ce propos.

Théorème 6.30 – Conservation des inégalités par passage à la limite. *Si u et v sont deux suites convergentes telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Démonstration. Notons ℓ la limite de u et ℓ' la limite de v . Supposons par l'absurde de $\ell \neq \ell'$ et plaçons-nous, sans perte de généralité, dans le cas où $\ell > \ell'$. On pose alors $\varepsilon = \frac{\ell - \ell'}{3}$. Alors, par convergence de u et v , il existe N_ε et N'_ε tels que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $u_n \geq \ell - \varepsilon$ et pour tout $n \geq N'_\varepsilon$, $v_n \leq \ell' + \varepsilon$. Mais alors, pour tout $n \geq \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$, puisque $\ell > \ell'$,

$$u_n \geq \ell - \varepsilon = \ell - \frac{\ell - \ell'}{3} = \frac{2\ell + \ell'}{3} > \frac{\ell + 2\ell'}{3} = \ell' + \frac{\ell - \ell'}{3} = \ell' + \varepsilon \geq v_n$$

ce qui contredit le fait que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. □

À retenir. Dans le cas d'une inégalité stricte $u_n < v_n$ on obtient malgré tout une inégalité large pour les limites. Prenons par exemple pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0$ et $v_n = \frac{1}{n}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n < v_n$ mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Remarque. En prenant v une suite constante égale à $a \in \mathbb{R}$ dans le théorème précédent, on en déduit que si u est une suite convergente de limite ℓ :

- si $u_n \leq a$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq a$,
- si $u_n \geq a$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \geq a$.

Théorème 6.31.

- **Plancher montant.** *Si u diverge vers $+\infty$ et v est une suite telle qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$. Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.*
- **Plafond descendant.** *Si u diverge vers $-\infty$ et v est une suite telle qu'à partir d'un certain rang $u_n \geq v_n$. Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.*

Démonstration. On se contente de démontrer le premier point puisque le deuxième en découle (en multipliant par -1 les deux suites). Soit $A \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un rang N_A tel que pour tout $n \geq N_A$, $u_n \geq A$. Mais alors, pour tout $n \geq N_A$ (et pour n suffisamment grand pour que l'inégalité de l'énoncé soit valide), $v_n \geq u_n \geq A$ et ceci étant vrai pour tout réel A , la suite v diverge vers $+\infty$. $\square$

Théorème 6.32 – Théorème d'encadrement ou des gendarmes. Soient u et v deux suites convergentes de même limite ℓ . Si w est une suite telle qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq w_n \leq v_n$. Alors, w est convergente de limite ℓ .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque u et v convergent vers ℓ , il existe N_ε et N'_ε tels que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $u_n \geq \ell - \varepsilon$ et pour tout $n \geq N'_\varepsilon$, $v_n \leq \ell + \varepsilon$. Mais alors, pour tout $n \geq \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$ (et pour n suffisamment grand pour que l'inégalité de l'énoncé soit valide), $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq w_n \leq v_n \leq \ell + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que w est convergente de limite ℓ . $\square$

Remarque. Dans le théorème de passage à la limite dans les inégalités, il faut d'abord démontrer que les suites convergent alors que dans ce théorème d'encadrement la convergence de la suite w est une conséquence : le théorème montre que la suite converge **et** donne sa limite.

Exercice 6.33. Pour chacune des suites suivantes, vérifier qu'elle est bien définie, trouver sa nature et calculer sa limite si elle existe.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

Exercice 6.34.

1. Montrer que si u est une suite bornée et que v est une suite qui converge vers 0 alors la suite produit uv converge vers 0.
2. Le résultat précédent reste-t-il valable si la limite de v n'est pas nulle ?
3. En déduire la valeur de la limite de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $w_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$.

6.3.5 Convergence et suites extraites

Définition 6.35. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Une **sous-suite** ou **suite extraite** de u est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = (-1)^n$. Alors $v_n = u_{2n} = 1$ et $w_n = u_{2n+1} = -1$ définissent deux suites extraites de u avec respectivement $\varphi : n \mapsto 2n$ et $\varphi : n \mapsto 2n+1$.

Remarque. Si $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

- *Annnonce.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $\varphi(n) \geq n$ ».
- *Initialisation.* On a $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geq 0$.
- *Hérédité.* On suppose que pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ car φ est strictement croissante, donc $\varphi(n+1) > n$ et comme $\varphi(n+1)$ est un entier on a nécessairement $\varphi(n+1) \geq n+1$, i.e. $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.
- *Conclusion.* Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

Théorème 6.36 – Convergence et suites extraites.

- Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et de même limite.
- Si une suite u admet deux sous-suites convergeant vers des limites différentes, alors la suite u diverge.

Démonstration.

- Si u converge vers ℓ alors, si $\varepsilon > 0$, il existe N_ε tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$. Or, si $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de u , d'après la remarque précédente, $\varphi(n) \geq n$ et on en déduit donc, que pour tout $n \geq N_\varepsilon$, $\ell - \varepsilon \leq u_{\varphi(n)} \leq \ell + \varepsilon$ ce qui achève de montrer que la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .
- Si u converge alors, d'après le point précédent, ces deux sous-suites convergent nécessairement vers la limite de u ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, u diverge.

□

Exemple. On considère la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$. Considérons alors les sous-suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Alors $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \rightarrow 1$ alors que $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \rightarrow -1$. La suite u est donc divergente.

Un autre intérêt de cette notion est donné par le théorème suivant dû au mathématicien autrichien *Bernard Bolzano* (voir [Wika]) et au mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (voir [Wikh]). En effet, nous avons déjà énoncé que toute suite convergente est bornée et nous avons également vu que la réciproque de cette affirmation est fausse. Le théorème suivant nous fournit cependant un résultat positif concernant la réciproque, quitte à extraire une sous-suite.

Théorème 6.37 – Théorème de Bolzano–Weierstrass. *Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.*

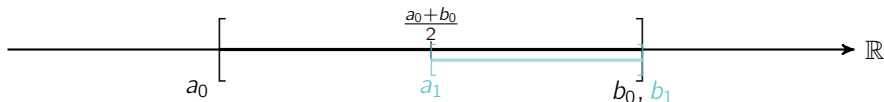
Démonstration. Nous allons démontrer ce théorème en utilisant la méthode de dichotomie. On commence par noter que, puisque la suite u est bornée, l'ensemble des valeurs

de la suite est contenu dans un intervalle de la forme $[a, b]$. L'idée de la méthode de dichotomie réside alors en la construction d'une suite de segments (intervalles fermés et bornés) décroissants (i.e. inclus successivement les uns dans les autres) contenant une infinité de termes de la suite et de longueur tendant vers 0.

Plus précisément, posons $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $\varphi(0) = 0$. On coupe l'intervalle $[a, b]$ en deux (le milieu est $\frac{a+b}{2}$) et on note que l'un au moins des deux intervalles

$$\left[a, \frac{a+b}{2} \right] \quad \text{ou} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$$

contient une infinité de termes de la suite u (on pourra s'en convaincre en raisonnant par l'absurde). On note alors $[a_1, b_1]$ un tel intervalle et $\varphi(1)$ un entier tel que $\varphi(1) > \varphi(0)$ et pour lequel $u_{\varphi(1)} \in [a_1, b_1]$ comme l'illustre la figure suivante :



En itérant ce processus, on obtient une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ de largeur $\frac{b-a}{2^n}$ et une suite strictement croissante d'entiers $\varphi(n)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$.

De plus, par construction :

- la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante car il s'agit des bornes inférieures successives des segments emboîtés et la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour la même raison car ce sont les bornes supérieures de ces mêmes segments,
- $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc adjacentes et convergent ainsi vers une même limite ℓ d'après le théorème 6.28. Puisque, par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n,$$

on en déduit en appliquant le théorème d'encadrement 6.32 que la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de u converge vers ℓ et ceci achève donc de démontrer le résultat voulu. $\square$

Exemples.

- Pour la suite bornée u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ on peut considérer les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont constantes donc convergentes.
- La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sin(n)$ est aussi bornée. Le théorème de Bolzano–Weierstrass affirme qu'on peut donc en extraire une suite convergente. Il est néanmoins plus difficile d'en expliciter une par son terme général.

Exercice 6.38. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite de terme général $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. On considère les deux suites extraites v et w définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que les suites $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

6.4. Étude des suites récurrentes

L'objectif de cette section est de procéder, dans des cas particuliers, à une étude détaillée de suites récurrentes définie par la donnée d'un terme initial u_0 et d'une formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction qui vérifiera certaines propriétés.

6.4.1 Stabilité et définition d'une suite récurrente

Avant d'étudier une suite récurrente, il faut être en mesure de garantir qu'elle est bien définie. Pour cela, nous aurons besoin de la notion d'ensemble stable par une fonction.

Définition 6.39. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit qu'un sous-ensemble A de $\mathcal{D}_f$ est **stable par f** si $f(A) \subset A$, i.e. si pour tout $x \in A$, $f(x) \in A$.

Exemple. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

- L'intervalle $[0, 1]$ est stable par f car pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = x^2 \in [0, 1]$.
- L'intervalle $[0, 2]$ n'est pas stable par f car $2 \in [0, 2]$ et $f(2) = 4 \notin [0, 2]$.

Proposition 6.40. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et A un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$ stable par f . Alors, la suite récurrente définie par $u_0 \in A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

Démonstration. On procède par récurrence. En effet, $u_0 \in A$ donc $u_0 \in \mathcal{D}_f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $u_n \in A$ alors $u_n \in \mathcal{D}_f$ et $u_{n+1} = f(u_n) \in A$ donc $u_{n+1} \in \mathcal{D}_f$. La suite u est donc bien définie. $\square$

Exemple. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Alors, pour tout $u_0 \geq 0$, la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{u_n}$ est bien définie car $\mathbb{R}_+$ est stable par la fonction f (pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$). On note de plus que le comportement dépend fortement du terme initial car :

- si $u_0 = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ et si $u_0 = 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$,
- si $u_0 = \frac{1}{2}$ alors $u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ et ces termes s'approchent de 1,
- si $u_0 = 2$ alors $u_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $u_2 = 2^{\frac{1}{4}}$ et ces termes s'approchent aussi de 1.

6.4.2 Monotonie d'une suite récurrente

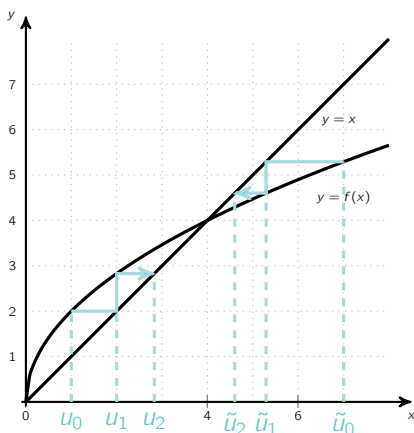
Maintenant que nous sommes en possession d'une notion nous permettant de garantir qu'une suite récurrente est bien définie, on souhaite obtenir des informations qualitatives sur cette suite. On commence pour cela par étudier sa monotonie. Or, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ on note que $u_{n+1} > u_n$ si et seulement si $f(u_n) > u_n$ ce qui nous permet d'en déduire la méthode suivante.

Méthode – Monotonie d'une suite récurrente. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, A un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$ stable par f et u une suite récurrente définie par $u_0 \in A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors,

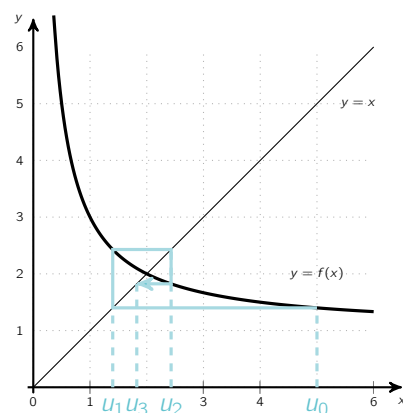
- si la courbe de f sur A est au-dessus de la droite $y = x$, u est croissante,
- si la courbe de f sur A est en dessous de la droite $y = x$, u est décroissante.

Exemples.

- On considère la suite définie par une valeur initiale $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 2\sqrt{x}$. La monotonie de la suite dépend de la valeur de u_0 . On a, par exemple, pris $u_0 = 1$ et $\tilde{u}_0 = 7$ à la figure 6.4a.
- On considère la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{x}$. La figure 6.4b illustre que la suite n'est pas monotone.



(a) $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$



(b) $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$

Figure 6.4 – Monotonie des suites récurrentes.

Proposition 6.41. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, A un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$ stable par f et u une suite récurrente définie par $u_0 \in A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Si f est croissante, alors,
 - ▷ si $u_1 \geq u_0$ alors u est croissante, ▷ si $u_1 \leq u_0$ alors u est décroissante.
- Si f est décroissante, alors la suite u n'est pas monotone.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence. Par exemple, si $u_1 \geq u_0$ et f est croissante, alors en appliquant f on conserve l'inégalité et on en déduit $u_2 \geq u_1$, et ainsi de suite. $\square$

Exemples. Reprenons les suites de l'exemple précédent.

- On considère la suite définie par une valeur initiale $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 2\sqrt{x}$.
 - ▷ Si $u_0 = 1$ alors $u_1 = f(u_0) = 2 \geq 1 = u_0$ donc la suite est croissante.
 - ▷ Si $u_0 = 7$ alors $u_1 = f(u_0) = \sqrt{7} \leq 7 = u_0$ donc la suite est décroissante.
- On considère la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{x}$. La fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{2}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc u n'est pas monotone.

6.4.3 Point fixe et convergence de suites récurrentes

Nous souhaitons à présent nous intéresser à la convergence de suites récurrentes et nous avons pour cela besoin d'introduire la notion de point fixe d'une fonction.

Définition 6.42. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, un point $x_0 \in \mathcal{D}_f$ est un **point fixe** de f si $f(x_0) = x_0$.

Remarques.

- Un point fixe correspond à un point d'intersection entre la courbe de f et la courbe $y = x$.
- Si u est une suite récurrente définie par $u_0 \in \mathcal{D}_f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ alors, si u_0 est un point fixe de f , on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$, c'est-à-dire que u est constante.

Exemple. Cherchons les points fixes de la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On cherche ainsi les réels x tels que $f(x) = x^2$. Or, pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Ainsi, les points fixes de f sur $\mathbb{R}$ sont 0 et 1.

Nous allons à présent donner un résultat permettant de faire le lien entre les points fixes d'une fonction et la limite éventuelle de la suite récurrente associée et nous aurons besoin dans cet énoncé de supposer que la fonction f est continue. Nous n'avons pas encore défini la notion de continuité (voir la définition 8.26) mais, pour le moment, vous pouvez traduire cela par « on peut tracer la courbe de la fonction sans lever notre crayon » (autrement dit, la courbe représentative de f ne fait pas de saut). Cette propriété de continuité nous permet notamment d'intervertir la fonction avec le passage à la limite, c'est-à-dire d'avoir l'égalité $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n)$.

Théorème 6.43. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue**, A un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$ stable par f et u une suite récurrente définie par $u_0 \in A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si u converge vers $\ell \in A$, alors ℓ est un point fixe de f .

Démonstration. Il suffit de noter que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ et d'exploiter la continuité de f pour obtenir $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n) = f(\ell)$. $\square$

Remarque. La réciproque est fautive : une fonction peut avoir un point fixe sans que la suite soit convergente.

Méthode – Montrer qu'une suite est divergente. Pour montrer qu'une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ diverge, on peut montrer que f n'admet pas de point fixe.

Exemple. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ n'a pas de point fixe. Ainsi, toute suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ est divergente.

Essayons d'obtenir davantage d'informations. Pour se faire, on peut distinguer les cas où f est croissante des cas où f est décroissante.

Cas où f est une fonction croissante.

On suppose dans cette sous-section que f est **croissante**. Dans ce cas, on sait déjà que si $u_1 \geq u_0$ alors u est croissante et que si $u_1 \leq u_0$ alors u est décroissante d'après la proposition 6.41. On en déduit le résultat suivant.

Proposition 6.44. Soient $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction **continue** et **croissante** et u une suite récurrente définie par $u_0 \in [a, b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite récurrente u est monotone et converge vers un point fixe $\ell \in [a, b]$ de f .

Démonstration. D'après la proposition 6.41, la suite u est monotone. Puisqu'elle est bornée par a et b , on en déduit d'après le théorème 6.26 que la suite u converge et d'après le théorème 6.43 que la limite est un point fixe de f . $\square$

Exemple. Soit u la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{4}{25}$. On est dans le cas d'une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto x^2 + \frac{4}{25}$ et on veut étudier la convergence de la suite u selon la valeur du terme initial u_0 . Pour cela, on va suivre le plan d'étude qui suit.

1. Justifier que f est continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer les points fixes de f .
3. Tracer la courbe représentative de f et la droite $y = x$.
4. Justifier que les intervalles $[0, \frac{1}{5}]$, $[\frac{1}{5}, \frac{3}{5}]$ et $]\frac{4}{5}, +\infty[$ sont stables par f .
5. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq x$.
6. Étudier la nature et la limite éventuelle de u selon la valeur de u_0 dans les cas suivants :

a) $u_0 \in [0, \frac{1}{5}[$,

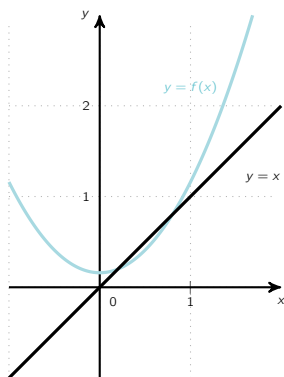
c) $u_0 \in]\frac{4}{5}, +\infty[$,

b) $u_0 \in]\frac{1}{5}, \frac{4}{5}[$,

d) $u_0 = \frac{1}{5}$ ou $u_0 = \frac{4}{5}$.

Passons à présent à l'étude.

1. La fonction f est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus, il s'agit d'une fonction du second degré et le sommet de sa parabole est situé en $(0, \frac{4}{25})$ donc elle est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (voir la section 5.4.1).
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = x$ si et seulement si $x^2 + \frac{4}{25} = x$ et les racines de l'équation du second degré $x^2 - x + \frac{4}{25} = 0$ sont $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{5}$. Les points fixes de f sont donc $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{5}$.
3. On obtient la représentation graphique suivante.



4. On rappelle que f est croissante et que $f(\frac{1}{5}) = \frac{1}{5}$ et $f(\frac{4}{5}) = \frac{4}{5}$. Ainsi,

- si $x \in [0, \frac{1}{5}]$, $f(x) \in [f(0), f(\frac{1}{5})]$ et on en déduit que $f(x) \in [0, \frac{1}{5}]$,
- si $x \in [\frac{1}{5}, \frac{4}{5}]$, $f(x) \in [f(\frac{1}{5}), f(\frac{4}{5})] = [\frac{1}{5}, \frac{4}{5}]$,
- si $x \in]\frac{4}{5}, +\infty[$, $f(x) \in]f(\frac{4}{5}), +\infty[=]\frac{4}{5}, +\infty[$.

5. On note que pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) \geq x \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{4}{25} \geq 0$$

et on obtient donc que $f(x) \geq x$ si seulement si $x \in [0, \frac{1}{5}] \cup [\frac{4}{5}, +\infty[$ d'après le travail de la section 2.5.4 sur le signe des équations du second degré (on ne travaille ici que sur $\mathbb{R}_+$).

6. a) Si $u_0 \in [0, \frac{1}{5}]$ alors $u_1 = f(u_0) \geq u_0$ d'après la question précédente et puisque $[0, \frac{1}{5}]$ est stable par f , on déduit de la propriété 6.44 que la suite u est croissante et converge vers $\frac{1}{5}$ qui est le seul point fixe de f dans cet intervalle.
- b) Si $u_0 \in]\frac{1}{5}, \frac{4}{5}]$ alors $u_1 = f(u_0) \leq u_0$ d'après la question précédente et puisque $[\frac{1}{5}, \frac{4}{5}]$ est stable par f , on déduit de la propriété 6.44 que la suite u est décroissante et converge vers $\frac{1}{5}$ qui est le seul point fixe de f dans cet intervalle qui soit inférieur ou égal à $u_0 < \frac{4}{5}$.
- c) Si $u_0 \in]\frac{4}{5}, +\infty[$ alors $u_1 = f(u_0) \geq u_0$ d'après la question précédente et puisque $]\frac{4}{5}, +\infty[$ est stable par f , on déduit de la propriété 6.44 que la suite u est croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$ car f ne possède pas de point fixe supérieur à $\frac{4}{5}$ (et si u converge alors c'est nécessairement vers un point fixe).
- d) Si $u_0 = \frac{1}{5}$ ou $u_0 = \frac{3}{5}$ alors u est constante égale à u_0 car il s'agit d'un point fixe de f .

Exercice 6.45. Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Montrer que u est croissante.
2. Montrer que u est minorée par 0 et majorée par 2. Que peut-on en déduire sur u ?

Cas où la fonction f est décroissante.

On suppose dans toute cette sous-section que la fonction f est **décroissante**. Dans ce cas on sait déjà que la suite u n'est pas monotone d'après la proposition 6.41. On a néanmoins le résultat suivant.

Propriété 6.46. Soient $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction **continue et décroissante** et u une suite récurrente définie par $u_0 \in [a, b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :

- La sous-suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ vérifiant $f \circ f(\ell) = \ell$.
- La sous-suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ' vérifiant $f \circ f(\ell') = \ell'$.

Démonstration. La preuve se déduit du cas croissant. Comme f est décroissante (et change donc le sens des inégalités), $f \circ f$ est croissante. On applique alors la proposition 6.44 à $f \circ f$ et aux sous-suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. À noter que ces suites sont définies par récurrence : u_0 est donné, puis $u_2 = f \circ f(u_0)$, $u_4 = f \circ f(u_2)$ et ainsi de suite et de même en partant de u_1 , on a $u_3 = f \circ f(u_1)$ et ainsi de suite. $\square$

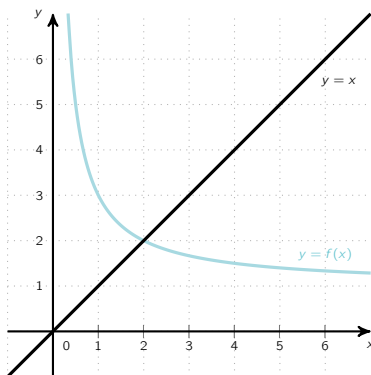
Remarque. On ne sait pas a priori si $\ell = \ell'$. Si $\ell \neq \ell'$ alors on a deux suites extraites de u qui convergent vers des limites différentes donc u diverge. Si $\ell = \ell'$ alors u converge vers ℓ car $u_{2n} \rightarrow \ell$ et $u_{2n+1} \rightarrow \ell$.

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On veut alors étudier la convergence de la suite u et on va pour cela suivre le plan d'étude qui suit.

1. Justifier que f est continue, strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et qu'elle laisse stable l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Tracer le graphe de la fonction f et de la courbe $y = x$.
3. Déterminer les points fixes de $g = f \circ f$ dans $]0, +\infty[$.
4. Résoudre l'inéquation $g(x) = (f \circ f)(x) \geq x$ sur $]0, +\infty[$.
5. On considère les sous-suites v et w de u définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
 - a) Montrer que v est croissante et que w est décroissante.
 - b) En déduire que v et w sont convergentes et déterminer leurs limites respectives.
 - c) En déduire la nature de la suite u et sa limite éventuelle.

Passons à présent à la résolution de notre problème.

1. La fonction f est définie et continue sur $]0, +\infty[$, comme somme de fonctions usuelles qui le sont. De plus f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ (car la fonction inverse l'est) et positive donc $]0, +\infty[$ est stable par f .
2. La situation est la suivante.



3. Pour trouver les points fixes de $g = f \circ f$, on doit résoudre $(f \circ f)(x) = x$. Or, pour $x \in]0, +\infty[$

$$1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} = x \Leftrightarrow \frac{3x+2}{x+2} = x \Leftrightarrow 3x+2 = x(x+2) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

et les solutions de cette équation du second degré sont -1 et 2 . Ainsi, le seul point fixe de g sur $]0, +\infty[$ est 2 .

4. On a, pour $x > 0$,

$$g(x) \geq x \Leftrightarrow \frac{3x+2}{x+2} \geq x \Leftrightarrow 3x+2 \geq x(x+2) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0$$

ce qui équivaut à $x \in]0, 2]$ sur $]0, +\infty[$.

5. a) Notons tout d'abord que, puisque f est décroissante, g est croissante. De plus,
- $v_0 = u_0 = 1 \in]0, 2]$ donc $v_1 = g(v_0) > v_0$ d'après la question précédente. Ainsi, d'après la proposition 6.41, v est croissante.
 - $w_0 = u_1 = f(1) = 3 \notin]0, 2]$ donc $w_1 = g(w_0) < w_0$ d'après la question précédente. Ainsi, d'après la proposition 6.41, w est décroissante.

b) On sait que

- v est croissante majorée par 2 (en effet $v_0 \leq 2$ et si on applique g , qui est croissante, à cette inégalité on obtient par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq 2$ car $g(2) = 2$). Ainsi, v est convergente d'après le théorème 6.26 et elle converge donc vers un point fixe de g , i.e. vers 2 .
- De même w est décroissante minorée et converge vers 2

- c) Les deux sous-suites des termes paires et impaires de u convergeant vers une même limite, u est convergente et converge vers 2 .

Exercice 6.47. On veut étudier la convergence de la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4}{u_n+2}$.

1. Montrer que la suite u est bien définie et étudier la monotonie de $f : x \mapsto \frac{4}{x+2}$.
2. Déterminer les points fixes de $f \circ f$.
3. Déterminer la nature de la suite u en suivant la stratégie précédente.

6.5. Cas particuliers de suites usuelles

On achève ce chapitre par l'étude de trois types de suites particuliers qui sont particulièrement utiles en pratique et qu'il est important de bien maîtriser.

6.5.1 Les suites arithmétiques

Définition 6.48 – Suite arithmétique. On appelle **suite arithmétique**, toute suite réelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + r$$

avec r un nombre réel. On appelle ce nombre r **la raison** de la suite arithmétique u .

Exemple. La suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de terme initial $u_0 = \sqrt{2}$ et qui satisfait la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite arithmétique. Les six premiers termes de cette suite sont les suivants :

$$\begin{aligned} u_0 &= \sqrt{2}, & u_1 &= u_0 + \frac{1}{3} = \sqrt{2} + \frac{1}{3}, & u_2 &= u_1 + \frac{1}{3} = \sqrt{2} + \frac{2}{3}, \\ u_3 &= u_2 + \frac{1}{3} = \sqrt{2} + 1, & u_4 &= u_3 + \frac{1}{3} = \sqrt{2} + \frac{4}{3}, & u_5 &= u_4 + \frac{1}{3} = \sqrt{2} + \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

La représentation graphique de la suite u est la suivante :

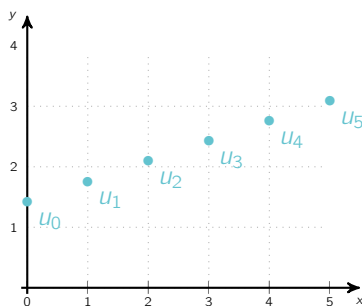


Figure 6.5 – Premiers termes d'une suite arithmétique

Proposition 6.49. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

- Si $r > 0$, alors la suite u est strictement croissante.
- Si $r = 0$, alors la suite u est constante.
- Si $r < 0$, alors la suite u est strictement décroissante.

Démonstration. On considère une suite arithmétique u de premier terme u_0 et de raison r . Pour tout entier n , on a $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$ et la monotonie de u est donc donnée par le signe de r . □

Proposition 6.50 – Expression explicite d’une suite arithmétique. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + nr.$$

Démonstration. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.

- *Annonce.* Démontrons par récurrence que pour tout entier n , $u_n = u_0 + nr$. Pour tout entier naturel n , on appelle $\mathcal{P}(n)$, la proposition « $u_n = u_0 + nr$ ».
- *Initialisation.* Montrons que la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie. On a $u_0 = u_0 + 0 \times r = u_0$, donc la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit n un entier. Supposons que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c’est-à-dire que $u_n = u_0 + nr$. Montrons qu’alors la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r && \text{par définition de la suite } u, \\ &= u_0 + nr + r && \text{par hypothèse de récurrence,} \\ &= u_0 + (n+1)r. \end{aligned}$$

On a donc montré que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* Ainsi, par le principe de récurrence, on a montré que pour tout entier n , la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c’est-à-dire que pour tout entier n , $u_n = u_0 + nr$.

□

Corollaire 6.51. Soit u une suite arithmétique de raison r . Alors pour tous entiers $p < n$, on a $u_n = u_p + (n - p)r$.

Exercice 6.52. Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et on définit ainsi la suite v par $v_n = \frac{1}{u_n}$.

1. Montrer que la suite v est arithmétique et préciser sa raison.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n .
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $0 < u_n \leq \frac{1}{3}$.
4. Montrer que la suite u est décroissante. Que peut-on en déduire sur u ?

Proposition 6.53 – Somme des termes d'une suite arithmétique. Soit u une suite arithmétique. On considère

$$S = u_k + u_{k+1} + \dots + u_p.$$

avec $k \leq p$ deux entiers. Alors,

$$\begin{aligned} S &= (\text{nb de termes de } S) \times \frac{(\text{premier terme de } S) + (\text{dernier terme de } S)}{2} \\ &= (p - k + 1) \frac{u_k + u_p}{2}. \end{aligned}$$

Démonstration. Par récurrence sur p (à k fixé). □

Exemple. Soit la suite arithmétique $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 50$ et de raison $r = 10$. On considère $S = u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8$. Alors

$$S = (8 - 3 + 1) \times \frac{u_3 + u_8}{2} = 6 \times \frac{80 + 130}{2} = 630.$$

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à calculer la somme $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. On considère la suite arithmétique $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 1$. On a donc

$$S = (n - 0 + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

6.5.2 Les suites géométriques

Définition 6.54 – Suite géométrique. On appelle **suite géométrique**, toute suite réelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence $u_{n+1} = q \times u_n$ avec q un nombre réel. On appelle ce nombre q le **raison** de la suite géométrique u .

Exemple. La suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de terme initial $u_0 = \frac{2}{3}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3}{2} u_n,$$

est une suite géométrique. Les six premiers termes de cette suite sont les suivants :

$$\begin{array}{lll} u_0 = \frac{2}{3}, & u_1 = \frac{3}{2} u_0 = 1, & u_2 = \frac{3}{2} u_1 = \frac{3}{2}, \\ u_3 = \frac{3}{2} u_2 = \frac{9}{4}, & u_4 = \frac{3}{2} u_3 = \frac{27}{8}, & u_5 = \frac{3}{2} u_4 = \frac{81}{16}. \end{array}$$

La représentation graphique des premiers termes de la suite u est donnée par la figure 6.6 suivante :

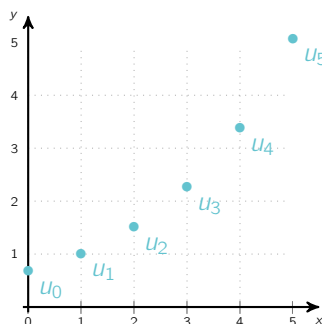


Figure 6.6 – Premiers termes d'une suite géométrique

Proposition 6.55 – Expression explicite d'une suite géométrique. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q . Pour tout entier n , le terme u_n est donné par la formule explicite $u_n = u_0 \times q^n$.

Démonstration. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q . Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = q \times u_n$.

- *Annonce.* Démontrons par récurrence que pour tout entier n , on a $u_n = u_0 \times q^n$. Pour tout entier naturel n , on appelle $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $u_n = u_0 \times q^n$ ».
- *Initialisation.* Montrons que la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie. On a $u_0 = u_0 \times q^0$ car $q^0 = 1$, donc la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit n un entier. Supposons que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_n = u_0 \times q^n$. Montrons qu'alors la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= u_n \times q && \text{par définition de la suite } u, \\
 &= u_0 \times q^n \times q && \text{par hypothèse de récurrence,} \\
 &= u_0 \times q^{n+1}.
 \end{aligned}$$

On a donc montré que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* Ainsi, par le principe de récurrence, on a montré que pour tout entier n , la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que pour tout entier n , on a $u_n = u_0 \times q^n$.

□

Corollaire 6.56. Soit u une suite géométrique de raison q . Alors pour tous les entiers $p < n$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Proposition 6.57 – Somme des termes d'une suite géométrique. Soit u une suite géométrique de raison q . Pour $k \leq p$ deux entiers, on considère

$$S = u_k + u_{k+1} + \dots + u_p.$$

Alors,

$$S = (\text{premier terme de } S) \times \frac{1 - q^{nb \text{ de termes de } S}}{1 - q} = u_k \times \frac{1 - q^{p-k+1}}{1 - q}.$$

Démonstration. Par récurrence sur p (à k fixé). □

Exemple. On considère la suite géométrique $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de premier terme $u_1 = 20$ et de raison $q = 2$. On pose $S = u_3 + u_4 + u_5 + u_6$. Alors

$$S = u_3 \times \frac{1 - q^{6-3+1}}{1 - q} = 80 \times \frac{1 - 2^4}{1 - 2} = 1200.$$

Proposition 6.58 – Limite d'une suite géométrique. Soit u une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

- Si $q > 1$, alors si $u_0 > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et si $u_0 < 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- Si $q = 1$, alors la suite u est constante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si $q \leq -1$ et $u_0 \neq 0$, alors la suite u n'a pas de limite.

Exercice 6.59. Soit u la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. La suite u est-elle arithmétique, géométrique ?
2. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ et on considère la suite v définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$. Montrer que v est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire une expression de u_n en fonction de n .
4. Quelle est la limite de la suite u ?

6.5.3 Les suites arithmético-géométriques

On achève cette section en mélangeant les deux types de suites précédents en une seule pour créer une suite arithmético-géométrique.

Définition 6.60 – Suite arithmético-géométrique. On appelle **suite arithmético-géométrique**, toute suite réelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence suivante $u_{n+1} = au_n + b$ avec a et b deux nombres réels.

Remarque. Soit u la suite arithmético-géométrique satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = au_n + b$$

avec a et b deux nombres réels. Si $a = 1$, alors la suite u est une suite arithmétique de raison b . Si $b = 0$, alors la suite u est une suite géométrique de raison a .

Exercice 6.61. On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

1. Montrer que la suite v définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 6$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
2. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n .
3. Calculer les sommes

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \quad \text{et} \quad S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Proposition 6.62 – Expression explicite d'une suite arithmético-géométrique. Soit u la suite arithmético-géométrique satisfaisant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = au_n + b$$

avec a et b deux nombres réels et $a \neq 1$. Alors, pour tout entier n , on a

$$u_n = a^n(u_0 - r) + r \quad \text{avec} \quad r = \frac{b}{1-a}.$$

Démonstration. Considérons u la suite arithmético-géométrique satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ avec a et b deux nombres réels, avec $a \neq 1$. On note $r = \frac{b}{1-a}$ et on pose $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite réelle définie pour tout entier n par $v_n = u_n - r$.

Soit n , un entier, on a alors

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+1} - r \\
 &= au_n + b - r \\
 &= a(u_n - r) + ar + b - r \\
 &= av_n + (a - 1)r + b \\
 &= av_n + (a - 1)\frac{-b}{a - 1} + b \\
 &= av_n.
 \end{aligned}$$

Donc pour tout entier n , $v_{n+1} = av_n$ et la suite v est une suite géométrique de raison a . En particulier, pour tout entier n , on a $v_n = a^n \times v_0$ ce qui implique que pour tout entier n , on a $u_n - r = a^n(u_0 - r)$ ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Remarques.

- Le nombre r correspond au point fixe de la fonction $f: x \mapsto ax + b$.
- Plus que d'apprendre la formule, il est important de retenir la méthode qui permet d'obtenir la formule explicite d'une suite arithmético-géométrique qui est décrite dans la preuve précédente.

Exercice 6.63. Exprimer u_n en fonction de n pour les suites définies par :

1. $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+1} = 5u_n + 2$.
2. $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - u_n$.
3. $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+1} - 2u_n + 1 = 0$.

Longueur, angle et trigonométrie

Dans le chapitre 4, nous avons introduit le produit scalaire de deux vecteurs, qui nous permet de dire si deux vecteurs sont orthogonaux ou non. En réalité, cette nouvelle opération nous permet de définir la distance euclidienne entre deux points comme nous allons le voir à présent.

7.1. La distance euclidienne

Avant de parler de distance, on définit la notion de norme d'un vecteur. La définition est commune aux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ donc nous parlerons de vecteurs sans spécifier si c'est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

7.1.1 Norme d'un vecteur

Définition 7.1 – Norme d'un vecteur. On appelle **norme** du vecteur $\vec{u}$, que l'on note $\|\vec{u}\|$, le nombre réel positif donné par $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$.

Remarque. La définition précédente a bien un sens car on a vu que pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$.

Exemple. On considère les points $A = (1, 1)$ et $B = (4, 3)$. Alors, $\overrightarrow{AB} = (3, 2)$ et donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

Proposition 7.2. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a l'égalité

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2.$$

Remarque. C'est une généralisation en deux dimensions de l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. En effet, si l'on considère $\vec{u} = (a, 0)$ et $\vec{v} = (b, 0)$, alors on a $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|(a+b, 0)\|^2 = (a+b)^2$ et $\|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Démonstration. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. En utilisant les propriétés (voir proposition 4.70) du produit scalaire, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Exercice 7.3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Démontrer les égalités suivantes :

1. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$,
2. $2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$,
3. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$,
4. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

Proposition 7.4 – Inégalité de Cauchy–Schwarz. Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$, on a l'inégalité suivante : $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$, avec égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Démonstration. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit $P(t) = \langle \vec{u} + t\vec{v}, \vec{u} + t\vec{v} \rangle$. Comme, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t)$ est le produit scalaire du vecteur $\vec{u} + t\vec{v}$ avec lui-même, ce qui implique que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) \geq 0$. En utilisant les propriétés de calcul du produit scalaire, on a, pour $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle t + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle t^2$. Ainsi, P est un polynôme du second degré de variable t . De plus, comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) \geq 0$, on sait que le discriminant Δ de P est négatif ou nul : on a donc

$$\Delta = 4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 - 4\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq 0$$

ce qui équivaut à $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \leq \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ d'où le résultat.

Traisons à présent le cas d'égalité : supposons que $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$, ce qui est équivalent au fait que le discriminant de P est nul. Le polynôme P admet donc une racine réelle t_0 , ce qui nous donne que $P(t_0) = \langle \vec{u} + t_0\vec{v}, \vec{u} + t_0\vec{v} \rangle = 0$ donc, par les propriétés du produit scalaire $\vec{u} + t_0\vec{v} = 0$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires. □

7.1.2 Distance entre deux points

Dans la suite de ce chapitre, nous ne travaillerons que dans le plan euclidien. Cependant, une partie de ce qui sera traité dans ce chapitre peut très bien être étendu à l'espace euclidien. Nous traiterons cela sous forme de remarques tout au long du chapitre.

Définition 7.5. La **distance euclidienne** entre les points P et Q , notée $d(P, Q)$ ou PQ , est définie par $d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$. Si les points P et Q ont respectivement pour coordonnées les couples (x_P, y_P) et (x_Q, y_Q) , alors on a $d(P, Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$.

Exemple. On considère les points $A = (1, 2)$ et $O = (0, 0)$. On a que $d(O, A) = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Proposition 7.6. La distance euclidienne est une application d qui prend en entrée un couple de points (P, Q) du plan, qui renvoie un réel et qui satisfait les propriétés suivantes.

- **Positivité.** Pour tous points P et Q dans le plan euclidien, on a $d(P, Q) \geq 0$, avec égalité si, et seulement si, $P = Q$.
- **Symétrie.** Pour tous points P et Q dans le plan euclidien, on a $d(P, Q) = d(Q, P)$.
- **Inégalité triangulaire.** Pour tous points P, Q et R dans le plan euclidien,

$$d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R),$$

avec égalité si, et seulement si, Q se trouve sur le segment $[PR]$.

Démonstration. Fixons $P = (x_P, y_P)$, $Q = (x_Q, y_Q)$ et $R = (x_R, y_R)$ trois points du plan euclidien. Démontrons la positivité. Comme une racine carrée est toujours positive, on a que $d(P, Q) \geq 0$. Supposons de plus que $d(P, Q) = 0$, on a alors que $d(P, Q)^2 = 0$ qui est une somme de carrés donc $(x_P - x_Q)^2 = 0$ et $(y_P - y_Q)^2 = 0$, ce qui implique que $x_P = x_Q$ et $y_P = y_Q$. On montre facilement que d est symétrique : en effet, on a

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = d(Q, P).$$

Reste à montrer l'inégalité triangulaire : on a

$$d(P, Q)^2 = \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle = \langle \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} \rangle = \|\overrightarrow{PR}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{RQ} \rangle + \|\overrightarrow{RQ}\|^2$$

puis, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir proposition 7.4), on a que

$$d(P, Q)^2 \leq \|\overrightarrow{PR}\|^2 + 2\|\overrightarrow{PR}\|\|\overrightarrow{RQ}\| + \|\overrightarrow{RQ}\|^2$$

et comme pour tout vecteur $\vec{u}$, $\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$, on a $d(P, Q)^2 \leq (\|\overrightarrow{PR}\| + \|\overrightarrow{RQ}\|)^2$

ce qui implique que $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$. Traitons à présent le cas d'égalité. Supposons que $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$. Dans ce cas, d'après ce qui précède, on a que $\langle \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{RQ} \rangle = \|\overrightarrow{PR}\| \|\overrightarrow{RQ}\|$, donc d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy–Schwarz (voir proposition 7.4), on a que les vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{RQ}$ sont colinéaires. Si le vecteur $\overrightarrow{PR}$ est non nul, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{PR} = \lambda \overrightarrow{RQ}$ et donc $\langle \lambda \overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RQ} \rangle = \|\lambda \overrightarrow{RQ}\| \|\overrightarrow{RQ}\|$ ce qui implique que $\lambda = |\lambda|$, donc $\lambda > 0$ et donc que R est un point du segment $[PQ]$. $\square$

Remarque – Le cas de l'espace euclidien. On peut généraliser la notion de distance euclidienne à l'espace euclidien, en utilisant le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, pour deux points $P = (x_P, y_P, z_P)$ et $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ de l'espace euclidien, la distance euclidienne est donnée par $d(P, Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$. Cette distance satisfait également les propriétés présentées en proposition 7.6.

Exercice 7.7 – Identité du parallélogramme. Soit $[ABCD]$ un parallélogramme du plan euclidien. Montrer que $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$.

Exercice 7.8 – Théorèmes de la médiane. On considère un triangle $[ABC]$ du plan euclidien. On note I le milieu du segment $[BC]$.

1. Démontrer que $AB^2 + AC^2 = 2BI^2 + 2AI^2$.
2. Démontrer que $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = AI^2 - \frac{1}{4}BC^2$.

7.1.3 Médiatrice d'un segment

Fixons $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$, deux points distincts du plan euclidien. On se demande quel est l'ensemble des points $M = (x, y)$ du plan euclidien qui sont à égale distance, i.e. **équidistants**, de A et de B . Soit $M = (x, y)$ un point équidistant de A et de B : il satisfait donc $d(A, M) = d(B, M)$ ce qui est équivalent à

$$\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2},$$

qui est elle-même équivalente à $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$. En développant et en factorisant par x et y , on a finalement que l'équation $d(A, M) = d(B, M)$ est équivalente à $2(x_B - x_A)x + 2(y_B - y_A)y + x_A^2 - x_B^2 + y_A^2 - y_B^2 = 0$. Finalement, l'ensemble des points M du plan euclidien satisfaisant $d(A, M) = d(B, M)$ est donc une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne

$$2(x_B - x_A)x + 2(y_B - y_A)y + x_A^2 - x_B^2 + y_A^2 - y_B^2 = 0.$$

Définition 7.9 – Médiatrice. La droite des points M satisfaisant $d(A, M) = d(B, M)$ est la **médiatrice du segment** $[AB]$.

Exercice 7.10. Soient A et B , deux points distincts du plan euclidien.

1. Montrer que la médiatrice du segment $[AB]$ et la droite (AB) sont perpendiculaires.
2. Déterminer le point d'intersection de la droite (AB) et de la médiatrice du segment $[AB]$.

De l'exercice 7.10, on déduit la proposition suivante.

Proposition 7.11. Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points distincts du plan euclidien. La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ passant par le point I , milieu de $[AB]$, de coordonnées

$$I = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

Exemple. On considère les points $A = (-5, 3)$ et $B = (2, 1)$. Alors une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$ est donnée par $14x - 4y + 29 = 0$ et une équation paramétrique est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = 4t - 1 \\ y(t) = 14t + \frac{15}{4} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7.12. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice des segments $[AB]$ avec les points A et B suivants :

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $A = (3, 2)$ et $B = (7, 3)$, | 3. $A = (-2, -1)$ et $B = (6, 4)$, |
| 2. $A = (0, 4)$ et $B = (-2, 1)$, | 4. $A = (5, 3)$ et $B = (8, 4)$. |

Exercice 7.13. On considère un triangle non plat $[ABC]$ du plan euclidien.

1. Montrer que les médiatrices des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ sont concourantes en un point O .
2. En déduire qu'il existe un unique cercle passant par les trois sommets A , B et C . Ce cercle est appelé **cercle circonscrit** du triangle $[ABC]$.
3. En notant H l'orthocentre du triangle $[ABC]$ (voir exercice 4.82), démontrer la relation dite de Sylvester $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

7.1.4 Projection orthogonale et distance d'un point à une droite

Définition 7.14 – Projeté orthogonal. Soit P un point du plan euclidien et soit $\mathcal{D}$ une droite. Le **projeté orthogonal de P sur $\mathcal{D}$** est le point défini comme l'intersection de $\mathcal{D}$ et de la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par P .

Lemme 7.15 – Produit scalaire et projeté orthogonal. Considérons A, B et C trois points du plan euclidien deux à deux distincts, et notons H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . On a l'égalité $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH} \rangle$.

Démonstration. Fixons A, B et C , trois points du plan deux à deux distincts, et notons H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . On a

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC} \rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH} \rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HC} \rangle$$

Or, par définition du projeté orthogonal H de C sur la droite (AB) , les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux, donc le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul. Finalement, on a donc que $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH} \rangle$. $\square$

Proposition 7.16. Considérons A, B et C trois points du plan euclidien deux à deux distincts, et notons H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . On a

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \begin{cases} \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AH}\| & \text{si } H \in [AB) \\ -\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AH}\| & \text{sinon} \end{cases}$$

où $[AB)$ désigne la demi-droite fermée en A et passant par B .

Remarque. Cette proposition nous affirme donc que l'on peut calculer le produit scalaire de deux vecteurs en multipliant deux longueurs (et en faisant attention au signe).

Démonstration. Fixons A, B et C trois points du plan deux à deux distincts et notons H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . Rappelons que par définition les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires.

- Supposons que $H \in [AB)$, ce qui est équivalent à dire que $\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\overrightarrow{AH}}{\|\overrightarrow{AH}\|}$. D'après le lemme 7.15, on a

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle &= \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH} \rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \times \|\overrightarrow{AH}\| \rangle = \frac{\|\overrightarrow{AH}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} \times \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle \\ &= \frac{\|\overrightarrow{AH}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} \times \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AH}\|. \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

- Supposons maintenant que $H \notin [AB]$, ce qui est équivalent à dire que

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = -\frac{\overrightarrow{AH}}{\|\overrightarrow{AH}\|}.$$

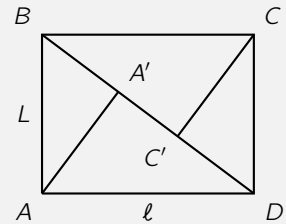
Il suffit alors de reprendre le même calcul en utilisant cette nouvelle égalité à la place de celle du premier cas pour trouver le résultat attendu.

□

Exercice 7.17. On considère $[ABCD]$ un rectangle de côtés de longueurs L et ℓ avec $L > \ell > 0$. On note A' et C' les projetés orthogonaux des points A et C sur la droite (BD) .

1. Calculer le produit scalaire $\langle \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \rangle$.
2. Justifier que $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB} \rangle = A'C' \times DB$.
3. Dédire des questions précédentes que

$$A'C' = \frac{L^2 - \ell^2}{\sqrt{L^2 + \ell^2}}.$$



Définition 7.18. La distance d'un point P à une droite $\mathcal{D}$, que l'on note $d(P, \mathcal{D})$ est le minimum des distances entre $Q \in \mathcal{D}$ et P , c'est-à-dire

$$d(P, \mathcal{D}) = \min\{\|\overrightarrow{PQ}\| \mid Q \text{ est un point de } \mathcal{D}\}.$$

Remarque. La définition de cette distance fait intervenir le minimum d'un ensemble de réels. Or, tout ensemble de réels n'admet pas forcément de minimum : la proposition ci-dessous justifie que dans le cas de cette distance à une droite, c'est toujours le cas.

On a ici une définition de la distance entre un point et une droite qui est en réalité peu pratique à l'usage. Heureusement, on dispose d'une formule explicite.

Proposition 7.19 – Distance d'un point à une droite. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ (avec a et b non simultanément nuls) et soit $P = (x_P, y_P)$ un point du plan. Alors,

$$d(P, \mathcal{D}) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

et cette distance est atteinte en le projeté orthogonal Q_0 de P sur $\mathcal{D}$, c'est-à-dire $d(P, \mathcal{D}) = \|\overrightarrow{PQ_0}\|$. Ceci est illustré à la figure 7.1.

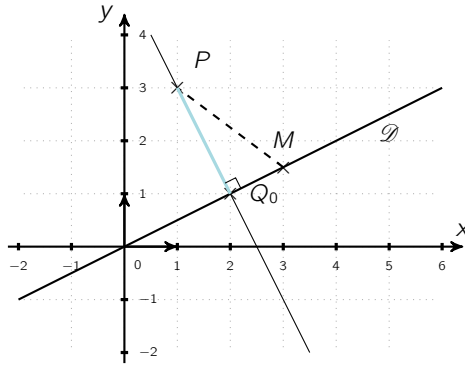


Figure 7.1 – Projeté orthogonal

Démonstration. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$. Soit $P = (x_P, y_P)$ un point du plan. On appelle Q_0 le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et de la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par P . On note également $\vec{n} = (a, b)$ qui est normal à la droite $\mathcal{D}$. Pour tout point $M = (x, y)$ de la droite $\mathcal{D}$, on a $|\langle \overrightarrow{PM} | \vec{n} \rangle| = |a(x_P - x) + b(y_P - y)| = |ax_P + by_P - ax - by| = |ax_P + by_P + c|$ car M est un point de $\mathcal{D}$. On a également, par la proposition 7.16, que

$$|\langle \overrightarrow{PM} | \vec{n} \rangle| = \|\overrightarrow{PQ_0}\| \|\vec{n}\| = \|\overrightarrow{PQ_0}\| \sqrt{a^2 + b^2}.$$

D'après les deux égalités précédentes, on a donc $\|\overrightarrow{PQ_0}\| = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Montrons que cette distance est minimale. Supposons que P n'est pas un point de $\mathcal{D}$ et considérons un point M de la droite $\mathcal{D}$ distinct de Q_0 . Le triangle $[MPQ_0]$ est rectangle en Q_0 et le segment $[PM]$ est son hypoténuse donc $d(P, M) > d(P, Q_0)$. On illustre cela sur la figure 7.1. $\square$

Exemple. On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $2x + 3y + 4 = 0$ et le point $P = (2, 0)$. Alors,

$$d(P, \mathcal{D}) = \frac{|2 \times 2 + 3 \times 0 + 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{13}}.$$

Remarque – À propos de l'espace euclidien. De la même manière que dans la proposition précédente, on définit le projeté orthogonal d'un point de l'espace euclidien sur un plan. Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz = d$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et soit $P = (x_P, y_P, z_P)$ un point de l'espace. Alors

$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

et cette distance est atteinte en le projeté orthogonal Q_0 de P sur $\mathcal{P}$.

7.1.5 L'équation de cercle

Définition 7.20. Soient Ω un point du plan euclidien et r un nombre réel positif. **Le cercle de centre Ω et de rayon r** , que l'on note $\mathcal{C}_{\Omega,r}$, est l'ensemble des points du plan euclidien situés à distance r de Ω , c'est-à-dire $\mathcal{C}_{\Omega,r} = \{M \mid d(M, \Omega) = r\}$.

Proposition 7.21. Soient Ω un point du plan euclidien de coordonnées $\Omega = (a, b)$ et r un nombre réel positif. Alors $\mathcal{C}_{\Omega,r} = \{M = (x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$ et l'équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ est appelée **l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}_{\Omega,r}$** .

Démonstration. Soit $M = (x, y)$ un point à une distance $r > 0$ du point $\Omega = (a, b)$. On a donc $d(M, \Omega) = r$. Comme r est positif, cette égalité est équivalente à $d(M, \Omega) = r$, ce qui se réécrit $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. $\square$

Exemple. L'équation du cercle de centre Ω et de rayon r pour $\Omega = (1, 2)$ et $r = 2$ est donnée par $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$. On illustre cela en figure 7.2.

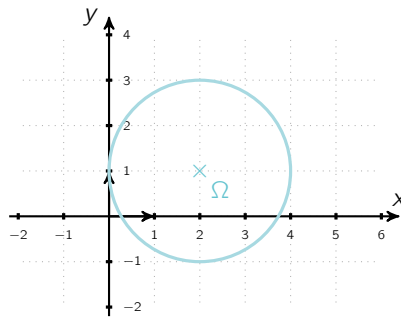


Figure 7.2 – Cercle de centre $(2, 1)$ de rayon 2

Définition 7.22. Soit $\mathcal{C}_{\Omega,r}$ un cercle de centre Ω et de rayon $r > 0$. Un **diamètre** du cercle $\mathcal{C}_{\Omega,r}$ est la donnée de deux points A et B du cercle tels que Ω soit le milieu du segment $[AB]$.

Proposition 7.23. Soient A et B deux points du plan et soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. Un point M appartient au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = 0$.

Démonstration. Soient A et B deux points du plan et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. On note Ω le milieu du segment $[AB]$, qui est aussi le centre du cercle $\mathcal{C}$. Le rayon du

cercle $\mathcal{C}$ est égal à $\frac{1}{2}\|\vec{AB}\|$. Soit M un point du plan. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 \|\vec{AB}\|^2 &= \|\vec{AM}\|^2 + \|\vec{MB}\|^2 + 2\langle \vec{AM}, \vec{MB} \rangle \\
 &= \|\vec{A\Omega} + \vec{\Omega M}\|^2 + \|\vec{M\Omega} + \vec{\Omega B}\|^2 - 2\langle \vec{MA}, \vec{MB} \rangle \\
 &= \|\vec{A\Omega}\|^2 + \|\vec{\Omega M}\|^2 + 2\langle \vec{A\Omega}, \vec{\Omega M} \rangle + \|\vec{M\Omega}\|^2 + \|\vec{\Omega B}\|^2 + 2\langle \vec{M\Omega}, \vec{\Omega B} \rangle - 2\langle \vec{MA}, \vec{MB} \rangle \\
 &= \|\vec{A\Omega}\|^2 + \|\vec{\Omega M}\|^2 + \|\vec{M\Omega}\|^2 + \|\vec{\Omega B}\|^2 + 2\langle \vec{A\Omega}, \vec{\Omega M} \rangle - 2\langle \vec{\Omega B}, \vec{\Omega M} \rangle - 2\langle \vec{MA}, \vec{MB} \rangle \\
 &= \|\vec{A\Omega}\|^2 + \|\vec{M\Omega}\|^2 + \|\vec{M\Omega}\|^2 + \|\vec{\Omega B}\|^2 + 2\langle \vec{A\Omega} - \vec{\Omega B}, \vec{\Omega M} \rangle - 2\langle \vec{MA}, \vec{MB} \rangle
 \end{aligned}$$

On a donc, comme $\vec{A\Omega} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{\Omega B}$, on a finalement que $\|\vec{AB}\|^2 = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\|^2 + 2\|\vec{M\Omega}\|^2 - 2\langle \vec{MA}, \vec{MB} \rangle$ ce qui est équivalent à $\frac{1}{2}\|\vec{AB}\|^2 = 2\|\vec{M\Omega}\|^2 - 2\langle \vec{MA}, \vec{MB} \rangle$. Supposons que M est un point du cercle $\mathcal{C}$, c'est-à-dire que $d(M, \Omega) = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\|$. Cela implique donc que $\|\vec{M\Omega}\|^2 = \frac{1}{4}\|\vec{AB}\|^2$, et donc d'après l'équation précédente, cela implique que $\langle \vec{MA}, \vec{MB} \rangle = 0$.

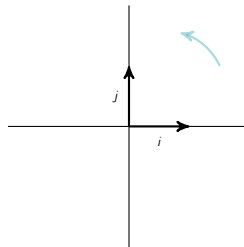
Supposons à présent que $\langle \vec{MA}, \vec{MB} \rangle = 0$. On a alors $\frac{1}{2}\|\vec{AB}\|^2 = 2\|\vec{M\Omega}\|^2$ donc $\frac{1}{2}\|\vec{AB}\| = \|\vec{M\Omega}\|$: le point M est donc un point du cercle de diamètre $[AB]$. $\square$

Exercice 7.24. On considère la droite $\mathcal{D}_c$ d'équation $x + 2y = c$, avec $c \in \mathbb{R}$, et le cercle $\mathcal{C}$ de centre $(2, 1)$ et de rayon 1. Déterminer en fonction de c le nombre de points d'intersection de $\mathcal{D}_c$ et $\mathcal{C}$.

7.2. La notion d'angle

7.2.1 Définition

Dans toute cette section, on se place dans le plan euclidien, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire défini précédemment. On fixe ici une **orientation** sur $\mathbb{R}^2$, qui est représentée par la flèche en bleu du dessin ci-dessous.



Notez qu'on a fait ici un choix arbitraire d'orientation, car on aurait pu prendre la flèche bleue dans l'autre sens. Cette orientation est communément appelée **sens trigonomé-**

trique (contrairement à l'autre choix, qui est le sens horaire, en référence au sens de rotation des aiguilles d'une montre). Donnons ici quelques définitions liées à la notion de vecteur et utiles par la suite.

Définition 7.25. Deux vecteurs colinéaires $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits **de même sens** si le coefficient de colinéarité k (le coefficient tel que $\vec{v} = k \cdot \vec{w}$) est positif.

Définition 7.26 – Vecteur unitaire. Un vecteur $\vec{v}$ est dit **unitaire** s'il est de norme égale à 1, c'est-à-dire si $\|\vec{v}\| = 1$.

Lemme 7.27. Soit $\vec{v}$ un vecteur non-nul. Alors les vecteurs $\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$ et $-\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$ sont les deux seuls vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{v}$.

Exercice 7.28. Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul. Vérifier que le vecteur $\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$ est un vecteur unitaire.

Rappelons que pour tout vecteur $\vec{v}$, il existe un point M du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$.

Définition 7.29. Un **angle orienté** est la donnée d'un couple (ordonné) de deux vecteurs unitaires $(\vec{v}, \vec{w})$.

Soient trois points du plan A, B et C , avec A distincts de B et de C . On note par $\widehat{BAC}$, l'angle orienté formé par le couple de vecteurs unitaires

$$\widehat{BAC} = \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}, \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} \right).$$

Soient $(\vec{v}, \vec{w})$ et $(\vec{v}', \vec{w}')$ deux angles orientés : on note P, Q, P' et Q' les points du plan tels que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OQ}$, $\vec{v}' = \overrightarrow{OP'}$ et $\vec{w}' = \overrightarrow{OQ'}$. Les angles $(\vec{v}, \vec{w})$ et $(\vec{v}', \vec{w}')$ sont dits **égaux** s'il existe une rotation de centre O qui envoie P sur P' et Q sur Q' .

Remarques.

- Il y a ici un flou sur la définition de l'égalité de deux angles car nous n'avons jamais défini la notion de rotation.
- On notera que pour trois points du plan A, B et C , les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAB}$ sont *différents* car on prend en compte l'orientation du plan comme illustré à la figure 7.3a.

Proposition 7.30 – Angles alternes/internes – angles opposés. On considère deux droites parallèles (AB) et $(A'B')$ et une droite Δ qui coupe les segments $[AB]$ et $[A'B']$ de telle sorte que A et A' sont du même côté de Δ . On note C (respectivement C') le point d'intersection de Δ et (AB) (respectivement $(A'B')$). Alors les angles $(\vec{CB}, \vec{C'C})$, $(\vec{CA}, \vec{CC'})$ et $(\vec{C'A'}, \vec{CC'})$ sont égaux. On illustre cela à la figure 7.3b.

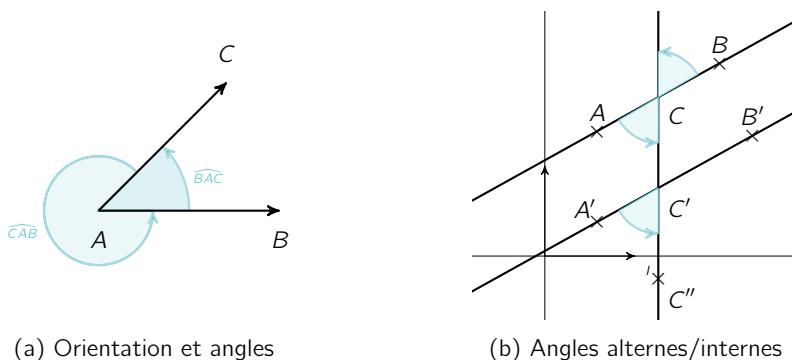


Figure 7.3 – Angles

Démonstration. La rotation centrée en C d'angle π envoie l'angle $(\vec{CB}, \vec{C'C})$ sur l'angle $(\vec{CA}, \vec{CC'})$ d'où l'égalité. La translation de vecteur $\vec{CC'}$ envoie le point A sur A' , le point C sur C' et le point C' sur C'' donc l'angle $(\vec{CA}, \vec{CC'})$ est égal à l'angle $(\vec{C'A'}, \vec{C'C''})$, or $\vec{C'C''} = \vec{CC'}$, d'où l'égalité annoncée. $\square$

7.2.2 Cosinus et sinus d'un angle

Définition 7.31 – Cosinus d'un angle. Soient trois points du plan A, B et C , avec A différent de B et de C . Le **cosinus de l'angle** $\widehat{BAC}$, noté $\cos(\widehat{BAC})$ est le nombre

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle}{\|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\|}.$$

Remarque – Interprétation géométrique du cosinus d'un angle. D'après la proposition 7.16, le cosinus d'un angle correspond à une longueur avec un signe. Pour deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, si on note $\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$ et $\vec{w} = \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|}$, et si on note P , le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB) , alors on a $\vec{AP} = \cos(\widehat{BAC}) \vec{u}$. On illustre cette interprétation géométrique à la figure 7.4.

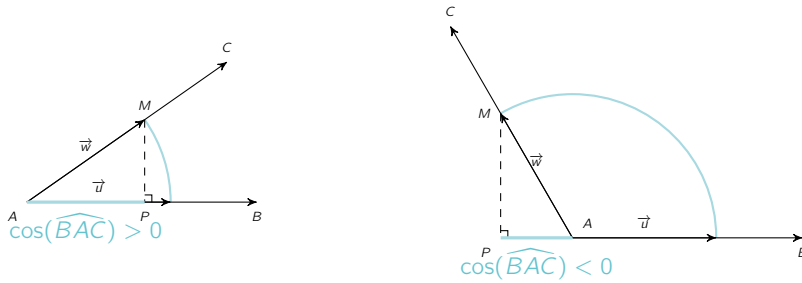


Figure 7.4 – Cosinus d'un angle

On finit ici par donner une généralisation du théorème de Pythagore.

Théorème 7.32 – Théorème d'Al-Kashi. Soient A, B et C , trois points du plan. On a l'égalité suivante $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos(\widehat{BAC})$.

Démonstration. Soient A, B, C trois points du plan. On a $BC^2 = \|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2$ donc $BC^2 = \|\vec{AC}\|^2 - 2\langle \vec{AC}, \vec{AB} \rangle + \|\vec{AB}\|^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos(\widehat{BAC})$. $\square$

Définition 7.33 – Sinus d'un angle. Soient trois points du plan A, B et C , avec A différent de B et de C . Le **sinus de l'angle** $\widehat{BAC}$ noté $\sin(\widehat{BAC})$ est défini par

$$\sin(\widehat{BAC}) = \cos(\widehat{B'AC}) = \frac{\langle \vec{AB'}, \vec{AC} \rangle}{\|\vec{AB'}\| \|\vec{AC}\|}.$$

où le point B' est le point du plan tel que $\vec{AB'} = (y_A - y_B, x_B - x_A)$.

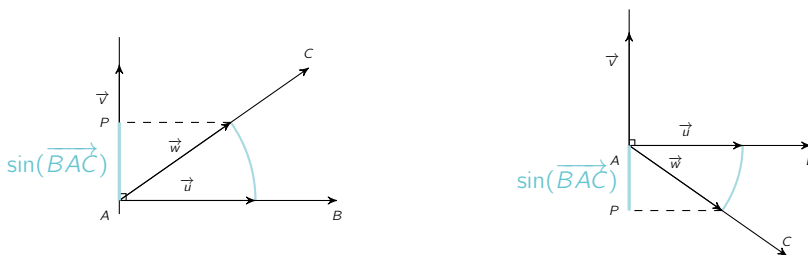


Figure 7.5 – Illustration graphique du sinus d'un angle

Remarque – Interprétation géométrique du sinus d'un angle. Le sinus d'un angle peut donc s'interpréter graphiquement, toujours d'après la proposition 7.16. Pour deux

vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, si l'on note $\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$, $\vec{v} = \frac{\vec{AB'}}{\|\vec{AB'}\|}$ et $\vec{w} = \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|}$, et si on note P , le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB') , alors $\vec{AP} = \sin(\widehat{BAC}) \vec{v}$. On illustre cela à la figure 7.5.

Proposition 7.34 – Sinus et déterminant. Soient trois points du plan A, B et C , avec A différent de B et de C . On a l'égalité

$$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{\det(\vec{AB}, \vec{AC})}{\|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\|}.$$

Démonstration. Directement depuis la définition : il suffit de faire le calcul de $\langle \vec{AB'}, \vec{AC} \rangle$ pour voir apparaître le déterminant, et remarquer que $\vec{AB}$ et $\vec{AB'}$ ont la même norme. $\square$

Exercice 7.35 – Calculs d'aires.

1. On considère un triangle $[ABC]$ du plan euclidien. Déterminer l'aire du triangle en fonction du sinus de l'angle $(\vec{AB}, \vec{AC})$.
2. On considère un parallélogramme $[ABDC]$ du plan euclidien. Dédurre de la question précédente l'aire de $[ABDC]$ en fonction de $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$.

Proposition 7.36 – Identité fondamentale de la trigonométrie. On considère trois points A, B et C distincts deux à deux du plan euclidien.

- On a l'identité

$$\cos(\vec{AB}, \vec{AC})^2 + \sin(\vec{AB}, \vec{AC})^2 = 1.$$

- On a les encadrements

$$-1 \leq \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(\vec{AB}, \vec{AC}) \leq 1.$$

Démonstration.

- On considère le point M tel que $\vec{AM} = \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|}$ et H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) . Le triangle $[AHM]$ est donc rectangle en H . On a donc que $AM^2 = AH^2 + HM^2$, donc $1 = \cos(\vec{AB}, \vec{AC})^2 + \sin(\vec{AB}, \vec{AC})^2$ d'après les interprétations géométriques du cosinus et du sinus.
- On a par définition que $|\cos(\vec{AB}, \vec{AC})| = \frac{|\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle|}{\|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\|}$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir proposition 7.4), on obtient directement que $|\cos(\vec{AB}, \vec{AC})| \leq 1$, d'où le résultat. L'encadrement du sinus découle directement de ce résultat.

$\square$

Exercice 7.37 – Formule de Héron. On considère A, B et C trois points distincts deux à deux du plan euclidien et $[ABC]$ le triangle formé par ces trois points. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ et $p \in \mathbb{R}_+$, le demi-périmètre du triangle $[ABC]$, c'est-à-dire le nombre qui satisfait $2p = a + b + c$.

1. Montrer que $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})^2 = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}$.
2. En déduire que $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{4b^2c^2}$.
3. Montrer que $|\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = 2 \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}$.
4. En déduire la formule de Héron $\text{Aire}([ABC]) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

7.2.3 Longueur d'arc et mesure d'angles

On se place toujours dans le plan euclidien. On note $O = (0, 0)$, $I = (1, 0)$ et $J = (0, 1)$.

Définition 7.38 – Cercle trigonométrique. On appelle **cercle trigonométrique**, le cercle de centre O et de rayon 1.

Définition 7.39 – Longueur d'arc. Soient N et P deux points du cercle trigonométrique. On appelle subdivision de taille $n \in \mathbb{N}^*$ de l'arc $\widehat{NP}$ la donnée de $n + 1$ points distincts $M_0 = N, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n = P$ situés sur l'arc $\widehat{NP}$, ordonnés grâce au sens de parcours trigonométrique. À une telle subdivision, on associe la somme des longueurs des segments $[M_i M_{i+1}] : \ell_{M_0, \dots, M_n} = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_{n-1} M_n$. On appelle **longueur de l'arc** $\widehat{MN}$, la limite lorsque n tend vers $+\infty$ des longueurs $\ell_{M_0, \dots, M_n}$ pour une suite de subdivisions.

Remarque. Nous admettrons ici l'existence d'une telle limite et que celle-ci ne dépend pas de la suite de subdivisions choisie.

Définition 7.40 – Mesure principale d'un angle. On considère un angle donné par le couple ordonné $(\vec{v}, \vec{w})$. On note $M = (x, y)$, le point du cercle trigonométrique tel que $(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{OI}, \vec{OM})$.

La **mesure principale** de l'angle $(\vec{v}, \vec{w})$ est définie de la manière suivante :

- si M appartient au demi-plan supérieur du plan euclidien, c'est-à-dire si $y \geq 0$, alors la mesure principale de l'angle $(\vec{OI}, \vec{OM})$ est la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ contenu dans le demi-plan supérieur ;
- si M appartient au demi-plan inférieur du plan euclidien, c'est-à-dire si $y < 0$, alors

la mesure principale de l'angle $(\vec{OI}, \vec{OM})$ est la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ contenu dans le demi-plan inférieur multipliée par -1 .

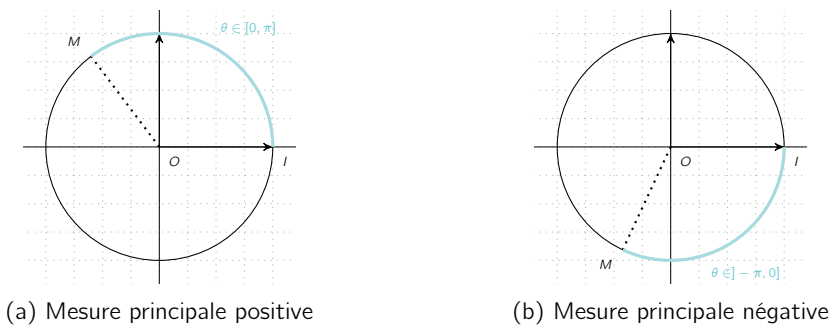


Figure 7.6 – Mesure principale d'un angle

Définition 7.41 – Le nombre π . On note π la longueur du demi-cercle trigonométrique et donc 2π la circonférence du cercle trigonométrique.

Définition 7.42 – Mesure d'angle. On appelle **mesure de l'angle orienté** $(\vec{v}, \vec{w})$, tout réel x tel qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \theta + 2k\pi$, où θ est la mesure principale de l'angle $(\vec{v}, \vec{w})$.

Remarque – Lien avec la mesure en degré. Soient A, B et C trois points du plan deux à deux distincts. On note $\widehat{BAC}$ l'angle du plan formé par les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

- Si la mesure de $\widehat{BAC}$ en radian vaut x , alors sa mesure en degré vaut $x \cdot \frac{180}{\pi}$.
- Si la mesure de $\widehat{BAC}$ en degré vaut y , alors sa mesure en radian vaut $y \cdot \frac{\pi}{180}$.

Par la suite, nous n'utiliserons que la mesure en radian des angles. Cependant, afin que vous puissiez vous familiariser avec cette nouvelle manière de mesurer les angles, vous trouverez un tableau de correspondances en table 7.1.

Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Degré	0	30	45	60	90

Table 7.1 – Correspondance mesure radian/degré

7.2.4 Deux résultats classiques

On se propose dans cette section d'utiliser les mesures d'angles pour revenir sur certains résultats de géométrie euclidienne classiques.

Proposition 7.43 – Somme des angles d'un triangle. Soit $[ABC]$ un triangle. La somme des mesures principales des angles du triangle est égale à $\pm\pi$.

Démonstration. On considère un triangle $[ABC]$ non plat, c'est-à-dire que le point C n'appartient pas à la droite (AB) . On considère $\mathcal{D}$ la parallèle à (AB) passant par C . En utilisant la proposition des angles alternes-internes et des angles opposés (voir proposition 7.30), on en déduit que la somme des angles est égale à $\pm\pi$. On illustre cela à la figure 7.7. $\square$

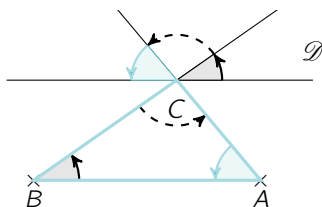


Figure 7.7 – Somme des angles d'un triangle

Proposition 7.44 – Angle au centre. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et soient A, B et C trois points distincts de $\mathcal{C}$. Alors, si θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$, alors 2θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$. On illustre ce résultat à la figure 7.8.

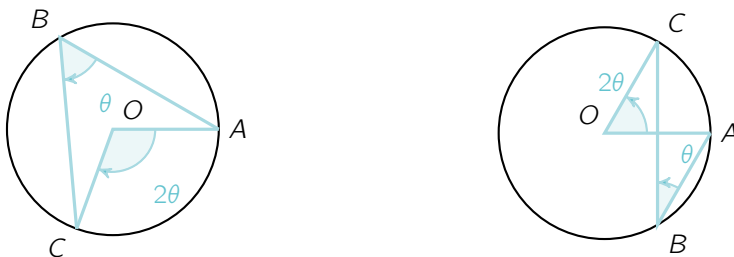


Figure 7.8 – Angle au centre

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et soient A, B et C trois points distincts de $\mathcal{C}$. Si le résultat est vrai pour θ la mesure principale de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$, alors le résultat sera vrai pour toute mesure $\theta + 2k\pi$. On démontre donc le résultat pour la mesure principale.

- On commence par traiter le cas où le segment $[BC]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$. On suppose sans perdre de généralité que la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ est positive. On note ψ la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$.
 - ▷ Comme $[BC]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$, alors la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ est égale à $\pi - \psi$.
 - ▷ Comme le triangle $[OAB]$ est isocèle en O , alors la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ est égale à $\pi - 2\theta$, où θ est la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

En utilisant les deux expressions de la mesure principale de $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$, on obtient que $\psi = 2\theta$, d'où le résultat.

- On démontre à présent le cas général. On considère $[BD]$ le diamètre du cercle $\mathcal{C}$ d'extrémité B . On suppose sans perdre en généralité que la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ est positive. On distingue deux cas.
 - ▷ On considère le cas où A et C sont de part et d'autre de la droite (BD) . Par ce qui précède, la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ est le double de la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})$. De même, la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC})$ est le double de la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})$. On obtient le résultat en sommant les deux égalités énoncées.
 - ▷ On considère le cas où A et C sont dans le même demi-plan défini par la droite (BD) . Par ce qui précède, la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ est le double de la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})$. De même, la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC})$ est le double de la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})$. On obtient le résultat en faisant la différence des deux égalités énoncées.

□

Exercice 7.45. On considère un triangle $[ABC]$, rectangle en B . Démontrer que

$$|\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{AB}{AC} \quad \text{et} \quad |\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{BC}{AC}.$$

7.3. Trigonométrie

Définition 7.46 – Fonctions cosinus et sinus. Soit x une mesure de l'angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$ où M est un point du cercle trigonométrique.

- On appelle **cosinus de x** , noté $\cos(x)$, l'abscisse du point M .
- On appelle **sinus de x** , noté $\sin(x)$, l'ordonnée du point M .

Ainsi, on a construit les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \cos: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \sin: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

qui sont définies sur $\mathbb{R}$.

Remarque. La définition des fonctions cosinus et sinus coïncide avec les représentations géométriques des cosinus et sinus d'angle que nous avons présentées à la section 7.2.2. Par la suite, nous ne ferons pas de différence entre le cosinus d'un angle et le cosinus de ses mesures, de même pour le sinus.

Définition 7.47 – Tangente. On considère la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{OJ}$ passant par I . Pour une mesure d'angle x qui diffère de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on considère le point M de coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$. On note P le point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et (OM) . On définit la **tangente de x** comme le réel noté $\tan(x)$ qui satisfait

$$\vec{IP} = \tan(x) \vec{OJ}.$$

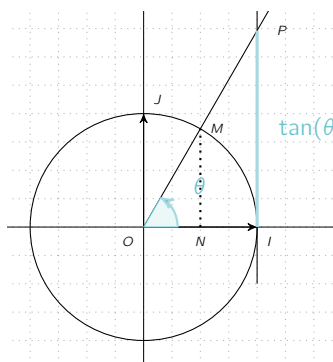


Figure 7.9 – Tangente d'un angle

Propriété 7.48. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, on a

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On considère :

- le point M de coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$;
- le point N , intersection de la droite (OI) et de la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{OJ}$ passant par M , de coordonnées $(\cos(x), 0)$;
- le point P , intersection de la droite (OM) et de la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{OJ}$ passant par I , de coordonnées $(1, \tan(x))$.

On applique le théorème de Thalès (voir théorème 4.43) pour obtenir qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{ON} = \lambda \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{NM} = \lambda \overrightarrow{IP}$. Or, $\lambda = \cos(x)$ et $\overrightarrow{NM} = \sin(x) \overrightarrow{OJ}$. On a donc

$$\overrightarrow{IP} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \overrightarrow{OJ},$$

d'où le résultat. □

Proposition 7.49 – Périodicité. Pour tout nombre réel x , on a

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi) \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sin(x + 2\pi).$$

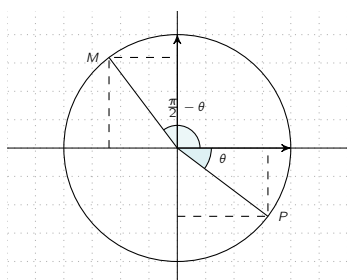
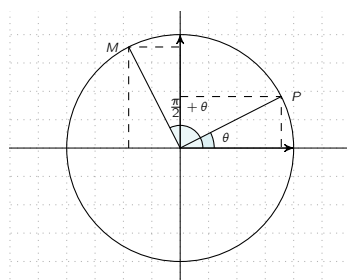
Autrement dit, les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques (voir définition 5.30).

Démonstration. Cela découle directement du fait que la circonférence du cercle trigonométrique est égale à 2π . □

Proposition 7.50. Pour tout nombre réel x , on a les relations suivantes

- | | |
|---|--|
| ◦ $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x),$ | ◦ $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x),$ |
| ◦ $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x),$ | ◦ $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x).$ |

Démonstration. On note M le point du cercle trigonométrique de coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$. L'angle $(-\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM})$ est de mesure $\frac{\pi}{2} + x$. On a donc que $\overrightarrow{OM} = \cos(x + \frac{\pi}{2})(-\overrightarrow{OJ}) + \sin(x + \frac{\pi}{2})\overrightarrow{OI}$. Comme $\overrightarrow{OM}$ s'écrit de manière unique dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ (voir théorème 4.18), on obtient les relations par identification. □

(a) Angles de mesure θ et $\frac{\pi}{2} - \theta$ (b) Angles de mesure θ et $\frac{\pi}{2} + \theta$ Figure 7.10 – Décalage de $\frac{\pi}{2}$ d'une mesure d'angle**Proposition 7.51 – Les valeurs remarquables de cosinus, sinus et tangente.**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

Démonstration. Commençons par noter que l'on ne considère que des angles de mesures principales comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Soit M le point de coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Alors on a $\cos(x) \geq 0$ et $\sin(x) \geq 0$.

- Soit M le point du cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{OI}, \vec{OM})$ soit de mesure principale $\frac{\pi}{2}$. Alors le point M est le point $J = (0, 1)$, donc par définition, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.
- Soit M le point du cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{OI}, \vec{OM})$ soit de mesure principale $\frac{\pi}{3}$. Le triangle $[OIM]$ est isocèle en O avec un angle de $\frac{\pi}{3}$ donc est équilatéral. Ainsi, la hauteur issue de M est également la médiatrice du segment $[OI]$ donc $\cos(x) = \frac{1}{2}$. Comme pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$, on a $\sin(\frac{\pi}{3})^2 = \frac{3}{4}$ et, comme $\sin(x) \geq 0$, on a $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Soit M le point du cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{OI}, \vec{OM})$ soit de mesure principale $\frac{\pi}{4}$. On note N le projeté orthogonale de M sur la droite (OI) : le triangle $[OMN]$ est rectangle en N avec l'angle $(\vec{ON}, \vec{OM})$ de mesure principale $\frac{\pi}{4}$ donc l'angle $(\vec{MO}, \vec{MN})$ est de mesure principale $\frac{\pi}{4}$: le triangle $[OMN]$ est isocèle en N donc $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4})$. Comme $1 = \cos(\frac{\pi}{4})^2 + \sin(\frac{\pi}{4})^2 = 2\cos(\frac{\pi}{4})^2$ et que $\cos(\frac{\pi}{4}) > 0$, on en déduit que $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\frac{\pi}{4})$.

- En remarquant que $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$, on obtient le résultat souhaité en appliquant les relations de la proposition 7.50.

On obtient les valeurs remarquables de la tangente en utilisant que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, on a $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. $\square$

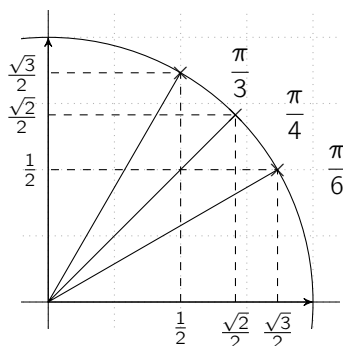


Figure 7.11 – Valeurs remarquables du cosinus et du sinus.

Dans les différentes propositions suivantes, le plus important est de retenir les différentes illustrations afin de retrouver facilement les relations présentées, plutôt que de retenir par cœur celles-ci au risque de se tromper.

Exercice 7.52. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi[$ les équations suivantes :

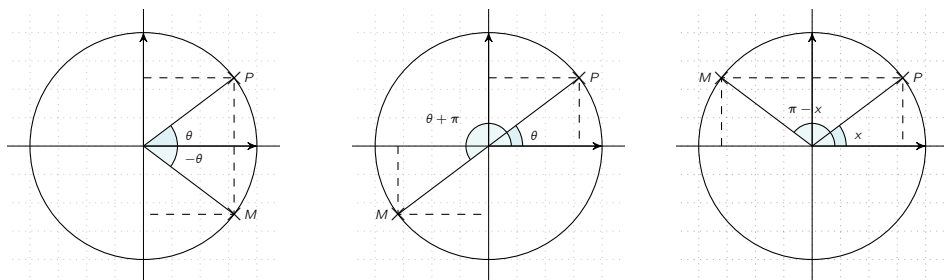
- | | | |
|---------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $\cos(x) = -1$, | 4. $\sin(x) = \frac{1}{2}$, | 7. $\tan(x) = -1$, |
| 2. $\cos(x) = 1$, | 5. $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, | 8. $\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, |
| 3. $\tan(x) = 0$, | 6. $\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, | 9. $\tan(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. |

Proposition 7.53. Pour tout nombre réel x , on a les relations suivantes :

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| ◦ $\cos(-x) = \cos(x)$, | ◦ $\sin(-x) = -\sin(x)$, |
| ◦ $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$, | ◦ $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$, |
| ◦ $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, | ◦ $\sin(\pi - x) = \sin(x)$. |

On trouvera une illustration de ces relations en figure 7.12.

Démonstration. Les points du cercle trigonométrique $P = (\cos(x), \sin(x))$ et $M = (\cos(-x), \sin(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. On obtient donc directement le résultat. Les points du cercle trigonométrique $P = (\cos(x), \sin(x))$ et $M = (\cos(\pi + x), \sin(\pi + x))$ sont symétriques par rapport au point $O = (0, 0)$, d'où



(a) Angles de mesure θ et $-\theta$ (b) Angles de mesure θ et $\theta + \pi$ (c) Angles de mesure θ et $\pi - \theta$

Figure 7.12 – Symétries trigonométriques

le résultat. Enfin, les points du cercle trigonométrique $P = (\cos(x), \sin(x))$ et $M = (\cos(\pi - x), \sin(\pi - x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, d'où le résultat. $\square$

Exercice 7.54. Donner les valeurs explicites des cosinus et sinus suivants :

1. $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right),$

3. $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right),$

5. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right),$

2. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right),$

4. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right),$

6. $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right).$

Proposition 7.55 – Formules d'addition. Pour tous réels x et y , on a

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y),$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y).$$

Pour tous réels x et y tels que $x, y, x + y \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, on a

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}.$$

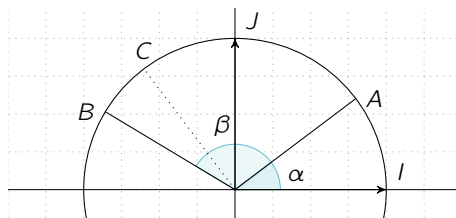


Figure 7.13 – Formules d'addition

Démonstration. Soient $\alpha, \beta \in]-\pi, \pi]$ deux mesures principales d'angles. On considère A et B deux points du cercle trigonométrique tels que l'angle $(\vec{OI}, \vec{OA})$ soit de mesure α et l'angle $(\vec{OA}, \vec{OB})$ soit de mesure β , comme illustré en figure 7.13. En particulier, on a $\vec{OA} = \cos(\alpha)\vec{OI} + \sin(\alpha)\vec{OJ}$. Soit C un troisième point du cercle trigonométrique tel que l'angle $(\vec{OA}, \vec{OC})$ soit de mesure $\frac{\pi}{2}$. Alors on a $\vec{OB} = \cos(\beta)\vec{OA} + \sin(\beta)\vec{OC}$ et

$$\vec{OC} = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\vec{OI} + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\vec{OJ} = -\sin(\alpha)\vec{OI} + \cos(\alpha)\vec{OJ}$$

d'après la proposition 7.50. On a donc

$$\begin{aligned}\vec{OB} &= \cos(\beta) \left(\cos(\alpha)\vec{OI} + \sin(\alpha)\vec{OJ} \right) + \sin(\beta) \left(-\sin(\alpha)\vec{OI} + \cos(\alpha)\vec{OJ} \right) \\ &= (\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta))\vec{OI} + (\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta))\vec{OJ}\end{aligned}$$

Or, par construction, on a également que $\vec{OB} = \cos(\alpha + \beta)\vec{OI} + \sin(\alpha + \beta)\vec{OJ}$. Comme pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u} = a\vec{OI} + b\vec{OJ}$, on a donc

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta).\end{aligned}$$

On étend ensuite ces deux égalités à tous les réels par périodicité des fonctions cosinus et sinus pour en déduire le résultat souhaité.

Soient α et β deux réels tels que $\alpha, \beta, \alpha + \beta \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, on a

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}$$

et en factorisant par $\cos(\alpha)\cos(\beta)$ au numérateur et au dénominateur, on obtient

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{1 - \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}} = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

d'où le résultat. □

Exercice 7.56. En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Corollaire 7.57 – Formules de duplication et de linéarisation. Soit $x \in \mathbb{R}$.

◦ **Formules de duplication.**

$$\triangleright \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x),$$

$$\triangleright \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)},$$

$$\begin{aligned}\triangleright \cos(2x) &= (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 \\ &= 2(\cos(x))^2 - 1 = 1 - 2(\sin(x))^2,\end{aligned}$$

◦ **Formules de linéarisation.**

$$\triangleright \cos(x)^2 = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \quad \triangleright \sin(x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \quad \triangleright \tan(x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}.$$

Démonstration. Les formules de duplication découlent directement des formules d'addition (voir proposition 7.55) en prenant $a = x = b$. Les formules de linéarisation du cosinus et du sinus ne sont qu'une réécriture des formules de duplication $\cos(2x) = 2(\cos(x))^2 - 1$ et $\cos(2x) = 1 - 2(\sin(x))^2$. $\square$

Exercice 7.58. Résoudre dans I les inéquations suivantes :

1. $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$, $I = [-\pi, \pi]$,
2. $\cos(x)^2 \geq \cos(2x)$, $I = [-\pi, \pi]$.
3. $\cos(x)^2 \leq \frac{1}{2}$, $I = [0, 2\pi]$,
4. $\cos\left(\frac{x}{3}\right) \leq \sin\left(\frac{x}{3}\right)$, $I = [0, 2\pi]$.

Proposition 7.59 – Vers la dérivabilité de sinus. Pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$0 \leq \sin(\theta) \leq \theta \leq \tan(\theta) \quad \text{et} \quad \cos(\theta) \leq \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq 1.$$

Démonstration.

Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. On note M le point de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ et T le point de coordonnées $(1, \tan(\theta))$. On « rappelle » que l'aire du disque de centre 0 et de rayon 1 est égale à π , et que l'aire du secteur angulaire $\widehat{OIM}$ est égale à $\frac{\theta}{2}$. Comme le triangle $[OIM]$ est inscrit dans le secteur angulaire $\widehat{OIM}$ qui est lui-même inscrit dans le triangle $[OIT]$ (voir figure 7.14), on a alors les inégalités d'aires

$$0 \leq \text{Aire}([OIM]) \leq \text{Aire}(\widehat{OIM}) \leq \text{Aire}([OIT]).$$

Comme on a $\text{Aire}([OIM]) = \frac{1 \times \sin(\theta)}{2}$ et $\text{Aire}([OIT]) = \frac{1 \times \tan(\theta)}{1}$, on obtient finalement que $0 \leq \sin(\theta) \leq \theta \leq \tan(\theta)$. En divisant ces inégalités par θ qui est positif, on obtient

$$\frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq 1 \leq \frac{\tan(\theta)}{\theta} = \frac{\sin(\theta)}{\theta} \times \frac{1}{\cos(\theta)},$$

donc on a $\frac{\sin(\theta)}{\theta} \leq 1$ et en multipliant la seconde inégalité par $\cos(\theta) \geq 0$, on obtient $\cos(\theta) \leq \frac{\sin(\theta)}{\theta}$, d'où le résultat. $\square$

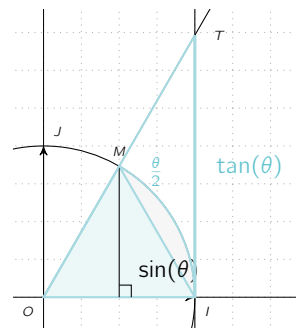


Figure 7.14 – Inégalités d'aires

Exercice 7.60. Soit x un réel. Exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos(x)$ ou de $\sin(x)$:

1. $\cos(3x)$, 2. $\sin(3x)$, 3. $\cos(4x)$, 4. $\sin(4x)$.

Exercice 7.61. Calculer les cosinus et sinus suivants :

1. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, 3. $\cos\left(\frac{\pi}{48}\right)$, 5. $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, 7. $\sin\left(\frac{\pi}{48}\right)$,
2. $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$, 4. $\cos\left(\frac{\pi}{96}\right)$, 6. $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$, 8. $\sin\left(\frac{\pi}{96}\right)$.

Exercice 7.62. Soient a et b deux réels. Exprimer les quantités suivantes en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ ou $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$:

1. $\cos(a)\cos(b)$, 2. $\sin(a)\sin(b)$, 3. $\sin(a)\cos(b)$, 4. $\cos(a)\sin(b)$.

Exercice 7.63. Soient a et b deux réels. Exprimer les quantités suivantes en fonction de $\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$:

1. $\cos(a) + \cos(b)$, 3. $\sin(a) + \sin(b)$,
2. $\cos(a) - \cos(b)$, 4. $\sin(a) - \sin(b)$.

Exercice 7.64 – Sur la tangente.

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $1 + \tan(\theta)^2 = \frac{1}{\cos(\theta)^2}$.
2. Montrer que pour $\theta \in [0, \pi[$, on a $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}$.
3. Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 7.65. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère S , le réel donné par

$$S = \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \sin(3\theta) + \cdots + \sin(n\theta).$$

1. En utilisant le résultat de l'exercice 7.62 2., montrer que

$$2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) S = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right).$$

2. En déduire que pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $S = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) \sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

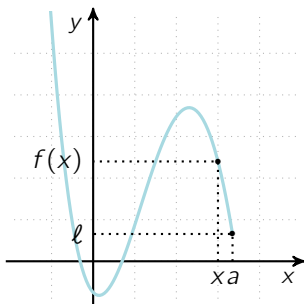
8.1. Limites

La notion de limite d'une fonction f en un point a est introduite afin de répondre à la question suivante :

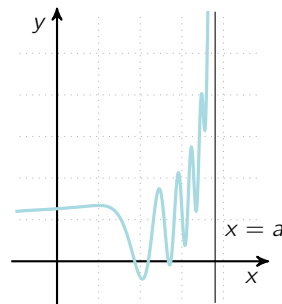
Comment se comporte la valeur $f(x)$ lorsque x se rapproche de a ?

Deux situations sont susceptibles de nous intéresser : le nombre a peut être fini ou infini ce qui donne lieu à des situations différentes que l'on se propose d'illustrer brièvement sur des exemples avant d'en donner des définitions plus rigoureuses.

- **Cas où a est fini.** On distingue plusieurs cas.
 - ▷ Lorsque x se rapproche de a , la valeur $f(x)$ se rapproche d'une valeur finie ℓ , comme illustré en figure 8.1a.
 - ▷ Lorsque x se rapproche de a par la gauche, la valeur $f(x)$ « croît indéfiniment », c'est-à-dire se rapproche de $+\infty$, comme illustré en figure 8.1b.



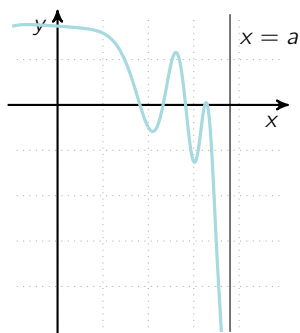
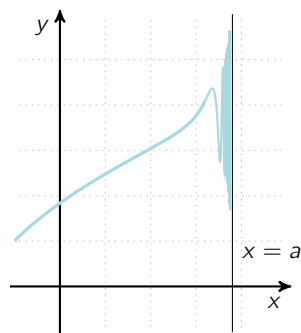
(a) Limite finie égale à ℓ



(b) Limite infinie égale à $+\infty$

Figure 8.1 – Étude de limite en une valeur finie a : deux premiers cas

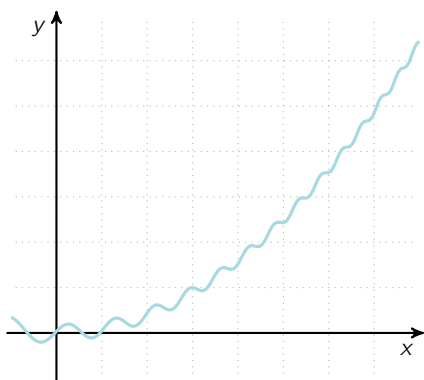
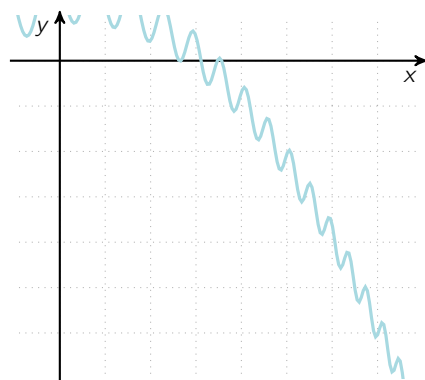
- ▷ Lorsque x se rapproche de a par la gauche, la valeur $f(x)$ décroît indéfiniment, c'est-à-dire se rapproche de $-\infty$, comme illustré en figure 8.2a.
- ▷ La valeur $f(x)$ peut également ne s'approcher d'aucune valeur, comme illustré en figure 8.2b.

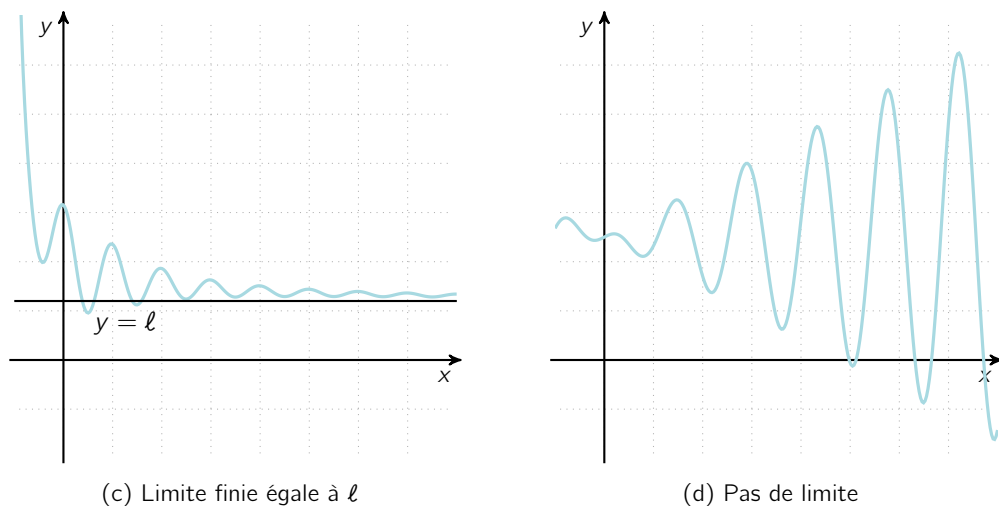
(a) Limite infinie égale à $-\infty$ 

(b) Pas de limite

Figure 8.2 – Étude de limite en une valeur finie a : deux derniers cas

- **Cas où $a = \pm\infty$.** On se place à présent dans le cas où $a = +\infty$, le cas $a = -\infty$ étant symétrique. On a illustré précédemment des cas qui apparaissent lorsque l'on regarde la limite d'une fonction lorsque x se rapproche d'une valeur finie a . On peut se poser les mêmes questions lorsque x devient de plus en plus grand (on dit qu'on regarde la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$), ou alors lorsque x devient de plus en plus petit (on dit qu'on regarde la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$). On note que les mêmes quatre situations peuvent se produire mais que graphiquement cela a des conséquences différentes :

(a) Limite infinie égale à $+\infty$ (b) Limite infinie égale à $-\infty$

Figure 8.4 – Étude de limite en $+\infty$

Maintenant que nous avons donné un panel des situations qui peuvent arriver, nous allons nous attacher à introduire un cadre rigoureux afin de pouvoir par la suite définir les notions de continuité et de dérivabilité et procéder enfin à des études de fonctions.

8.1.1 Limite en un point

On considère dans cette section et dans les suivantes un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ou une union finie d'intervalles et une fonction réelle $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bien définie sur D . Lorsque l'on s'intéresse à la limite de f en un point $a \in \mathbb{R}$, il faut tout d'abord s'assurer que $f(x)$ existe pour x suffisamment proche de a il y a alors deux situations possibles : $a \in D$ ou a est « au bord de D ».

Vous pouvez ici interpréter le « bord de D » comme étant les points finis situés aux éventuelles extrémités finies de D . Ceci nous amène naturellement à introduire la notion d'**adhérence** d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Néanmoins, nous n'allons pas ici en donner une définition précise mais plutôt nous contenter de donner quelques exemples de calculs de l'adhérence, notée $\overline{D}$, de sous-ensembles D de $\mathbb{R}$.

Exemple – Calculs d'adhérences. Voici quatre situations typiques qui suffiront à appréhender la notion d'adhérence telle que nous en aurons besoin :

- si $D = [0, 1[$ alors $\overline{D} = [0, 1]$,
- si $D =]0, +\infty[$ alors $\overline{D} = [0, +\infty[$,
- si $D =]0, 1[$ alors $\overline{D} = [0, 1]$,
- si $D = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ alors $\overline{D} = \mathbb{R}$.

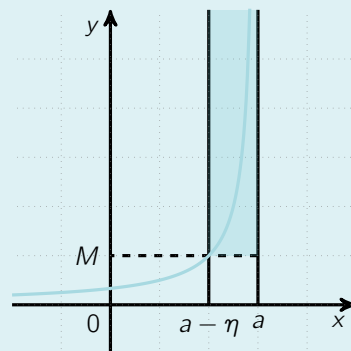
Nous n'en dirons donc pas plus ici à ce sujet mais si vous êtes intéressé nous vous conseillons de consulter [Tao22].

Définition 8.1.

Soient D un intervalle ou une union finie d'intervalles, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. On dit que f **tend** vers $+\infty$ quand x tend vers a si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x \neq a$,

$$\text{si } a - \eta \leq x \leq a + \eta \text{ alors } f(x) \geq M.$$

On dira également que f admet pour **limite** $+\infty$ en a et on notera $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

**Remarques.**

- On définit bien entendu de même le fait que f ait pour limite $-\infty$ en un point a de la façon suivante : pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x \neq a$, si $a - \eta \leq x \leq a + \eta$ alors $f(x) \leq M$. On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.
- Si f admet pour limite $\pm\infty$ en a alors on note que la courbe représentative de f s'approche indéfiniment de la droite verticale d'équation $x = a$. On dit alors que $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f .

Exemples.

- La fonction f définie pour tout $x \in D = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ admet pour limite $+\infty$ en $0 \in \overline{D}$. En effet, pour tout $M > 0$, si $-\frac{1}{\sqrt{M}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{M}}$ (on a donc pris $\eta = \frac{1}{\sqrt{M}}$) et $x \neq 0$ alors $f(x) = \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{M}})^2} = M$ (on note que si $M \leq 0$, il est clair que $f(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0 \geq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$).
- La fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = -\frac{1}{x}$ admet pour limite $-\infty$ en $0 \in \overline{D}$. En effet, pour tout $M > 0$, si $x \neq 0$ et $0 \leq x \leq \frac{1}{M}$ (on a donc pris $\eta = \frac{1}{M}$) alors $f(x) = -\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{\frac{1}{M}} = -M$. On note ici que, puisque f n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$, x ne peut se rapprocher de 0 que par la droite (i.e. $x > 0$) et donc la condition $a - \eta \leq x \leq a + \eta$ est ici équivalente à $0 \leq x \leq a + \eta$. Cette idée nous amènera dans la section 8.1.3 à introduire la notion de limite à gauche et de limite à droite.

Définition 8.2 – Limite finie en un point. Soient D un intervalle ou une union finie d'intervalles, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. On dit que f admet pour **limite** $\ell \in \mathbb{R}$ en a , et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x \neq a$,

$$\text{si } a - \eta \leq x \leq a + \eta \text{ alors } \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon.$$

Remarques.

- Cette définition peut paraître difficile à appréhender mais il faut la rapprocher de la définition intuitive introduite précédemment. On peut la lire comme ceci : peu importe l'écart ε que l'on fixe, il existe un écart η tel que si la distance entre a et x est plus petite que η , alors l'écart entre $f(x)$ et ℓ est plus petite que ε . Autrement dit, on peut rendre $f(x)$ aussi proche de ℓ qu'on le souhaite pour peu qu'on prenne x suffisamment proche de a .
- On utilise ici la définition de limite dite « épointée », c'est-à-dire que l'on a demandé à ce que $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$ (ou précédemment que $f(x) \geq M$) pour les $x \in D$ tel que $a - \eta \leq x \leq a + \eta$ avec $x \neq a$. Si l'on n'avait pas pris la définition de limite épointée (au sens « sans le point a »), nous aurions enlevé la condition $x \neq a$. Cette nuance peut paraître subtile mais elle est motivée par le fait que cela nous permettra, par la suite, de bien distinguer l'existence d'une limite finie en un point et la notion de continuité en ce point.

Exemples. Donnons quelques exemples nous permettant d'illustrer le côté intuitif de la notion de limite finie en un point fini.

- La fonction carrée possède pour limite 0 en 0 (si $\varepsilon > 0$ on prend $\eta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$).
- On considère la fonction $f : x \mapsto x + 7$. On a,

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 4} (x + 7) = 4 + 7 = 11, \quad \triangleright \lim_{x \rightarrow -6} (x + 7) = -6 + 7 = 1.$$

- On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - x + 4$. On a,

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x + 4) = 3^2 - 3 + 4 = 10$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} (x^2 - x + 4) = (\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} + 4 = 7 - \sqrt{3}.$$

- On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{x-3}$. On a,

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{2}{x-3} \right) = \frac{2}{4-3} = 2, \quad \triangleright \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{2}{x-3} \right) = \frac{2}{\frac{1}{2}-3} = -\frac{4}{5}.$$

- On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+3}$. On a,

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt{2x+3}) = \sqrt{-2+3} = 1, \quad \triangleright \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (\sqrt{2x+3}) = \sqrt{1+3} = 2.$$

Théorème 8.3 – Unicité de la limite. *Si elle existe, la limite d'une fonction en un point est unique.*

Démonstration. Cette preuve est analogue à celle du premier point du théorème 6.21 mais afin de vous permettre de vous familiariser avec les notations propres à ce chapitre,

nous la détaillons malgré tout. Supposons par l'absurde que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ admet deux limites $\ell \neq \ell'$ en un point $a \in \overline{D}$ et supposons, sans perte de généralité que $\ell > \ell'$. On note alors $\varepsilon = \frac{\ell - \ell'}{3} > 0$ et par définition de la limite :

- il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x \neq a$, tel que $-\eta \leq x - a \leq \eta$ on a $-\varepsilon \leq f(x) - \ell \leq \varepsilon$,
- il existe $\eta' > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x \neq a$, tel que $-\eta' \leq x - a \leq \eta'$ on a $-\varepsilon \leq f(x) - \ell' \leq \varepsilon$.

Mais alors, pour tout $x \in D$, $x \neq a$, tel que $-\min(\eta, \eta') \leq x - a \leq \min(\eta, \eta')$,

$$\ell - \ell' = \ell - f(x) + f(x) - \ell' = -(f(x) - \ell) + f(x) - \ell' \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3}(\ell - \ell')$$

ce qui est absurde car $\ell - \ell' > 0$. On a donc obtenu une contradiction et on en déduit que la limite, si elle existe, est unique. $\square$

Proposition 8.4 – Caractérisation séquentielle de la limite. Soient D un intervalle ou une union finie d'intervalles, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. La fonction f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de D qui converge vers a , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Démonstration. Commençons par démontrer le sens direct. Supposons donc que la fonction f admet une limite ℓ en a , considérons une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de D convergente vers a et montrons que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f tend vers ℓ en a , il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x \neq a$,

$$\text{si } -\eta \leq x - a \leq \eta \text{ alors } -\varepsilon \leq f(x) - \ell \leq \varepsilon.$$

Or, u converge vers a donc il existe $N_\eta \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N_\eta$, $-\eta \leq u_n - a \leq \eta$, donc pour tout $n \geq N_\eta$, $-\varepsilon \leq f(u_n) - \ell \leq \varepsilon$. On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon = N_\eta \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N_\varepsilon$, $-\varepsilon \leq f(u_n) - \ell \leq \varepsilon$, i.e. $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Démontrons la réciproque et démontrons pour cela la contraposée. Montrons que si f n'admet pas ℓ comme limite en a , alors il existe une suite u qui converge vers a telle que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ . Puisque f n'admet pas ℓ comme limite en a , alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in D$, $x \neq a$, tel que $-\eta \leq x - a \leq \eta$ et $|f(x) - \ell| > \varepsilon$, i.e. $f(x) - \ell > \varepsilon$ ou $f(x) - \ell < -\varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $\eta = \frac{1}{n+1}$, on construit ainsi une suite u tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-\frac{1}{n+1} \leq u_n - a \leq \frac{1}{n+1}$$

et $|f(u_n) - \ell| > \varepsilon$. On a donc construit une suite u qui converge vers a et telle que

$(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers ℓ , ce qui achève notre preuve. $\square$

Méthode. Pour montrer que f n'admet pas de limite en a , il suffit de trouver deux suites u et v qui convergent vers a telles que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite.

Exemple. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, impaire, 2-périodique, avec pour $x \in [0, 1]$, $f(x) = x$ et dont la courbe représentative a été donnée en figure 5.12 page 122. On considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ définie par $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. On note alors que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g\left(\frac{1}{2n}\right) = f(2n) = f(0) = 0$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g\left(\frac{1}{1+2n}\right) = f(1+2n) = f(1) = 1$.

On a donc construit deux suites u et v qui tendent vers 0 et telles que $(g(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite donc g n'admet pas de limite en 0.

8.1.2 Limites à l'infini

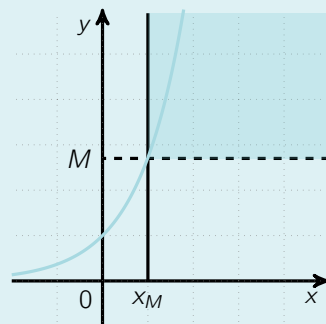
On s'intéresse à présent à la limite d'une fonction f en l'infini. On va donc travailler sur un intervalle I non majoré pour que x puisse tendre vers $+\infty$.

Définition 8.5 – Limite infinie à l'infini.

Soient I un intervalle non majoré et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f **tend** vers $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un $x_M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$,

$$\text{si } x \geq x_M \text{ alors } f(x) \geq M.$$

On dira également que f admet pour **limite** $+\infty$ en $+\infty$ et on notera $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.



Remarques.

- On dira de même qu'une fonction tend vers $+\infty$ en $-\infty$ si, étant donné un intervalle I non minoré, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un $x_M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, si $x \leq x_M$ alors $f(x) \geq M$. On notera alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
- On définit de même le fait pour une fonction de tendre vers $-\infty$ en $+\infty$ (et bien sûr de façon analogue en $-\infty$). Plus précisément, on dira qu'une fonction f définie sur un intervalle non majoré tend vers $-\infty$ en $+\infty$ si, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe

$x_M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, si $x \geq x_M$ alors $f(x) \leq M$. On notera alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

- o Cette définition de limite infinie à l'infini est bien entendu à rapprocher de celle donnée pour les suites lors de la définition 6.22. Le terme de « rang à partir duquel » utilisé pour les suites est alors remplacé ici par « $x \geq x_M$ » mais l'idée est bien similaire.

Exemples.

- o La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ puisque, pour tout $M \in \mathbb{R}$, si $x \geq x_M = \sqrt{M}$, $f(x) = x^2 \geq (x_M)^2 = M$.
- o On a les limites usuelles suivantes :

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty,$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty,$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty,$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty.$$

Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

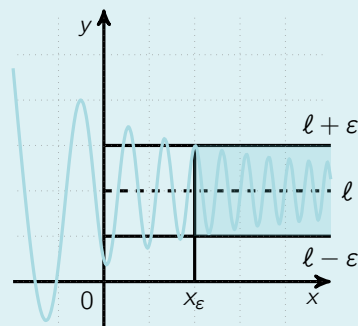
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Définition 8.6 – Limite finie à l'infini.

Soient I un intervalle non majoré et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f **tend** vers ℓ en $+\infty$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$,

$$\text{si } x \geq x_\varepsilon \text{ alors } \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon.$$

On dira également que f admet pour **limite** ℓ en $+\infty$ et on notera $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.



Remarque – Asymptote horizontale. Si f admet pour limite ℓ en $\pm\infty$ alors on note que la courbe représentative de f s'approche indéfiniment de la droite horizontale d'équation $y = \ell$ lorsque x tend vers $\pm\infty$. On dit alors que $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f .

Exemple. La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$ puisque, pour tout $\varepsilon > 0$, si $x \geq x_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$,

$$0 - \varepsilon = -\varepsilon \leq 0 \leq f(x) = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x_\varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon = 0 + \varepsilon.$$

Proposition 8.7 – Unicité de la limite finie. *Si elle existe, la limite finie d'une fonction en $+\infty$ est unique (de même en $-\infty$).*

Démonstration. Cette preuve est analogue à celle du théorème 8.3 mais toujours dans le but de faciliter votre acclimatation aux notations de ce chapitre, nous la détaillons malgré tout. Supposons par l'absurde que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet deux limites $\ell \neq \ell'$ en $+\infty$ et supposons, sans perte de généralité que $\ell > \ell'$. On note alors

$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell'}{3} > 0$$

et par définition de la limite :

- il existe $x_M > 0$ tel que pour tout $x \in I$ tel que $x \geq x_M$ on a $-\varepsilon \leq f(x) - \ell \leq \varepsilon$,
- il existe $x'_M > 0$ tel que pour tout $x \in I$ tel que $x \geq x'_M$ on a $-\varepsilon \leq f(x) - \ell' \leq \varepsilon$.

Mais alors, pour tout $x \in I$ tel que $x \geq \max(x_M, x'_M)$,

$$\ell - \ell' = \ell - f(x) + f(x) - \ell' = -(f(x) - \ell) + f(x) - \ell' \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3}(\ell - \ell')$$

ce qui est absurde car $\ell - \ell' > 0$. On a donc obtenu une contradiction et on en déduit que la limite, si elle existe, est unique. $\square$

Proposition 8.8 – Caractérisation séquentielle de la limite en l'infini. *Soient I un intervalle non majoré et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de I qui diverge vers $+\infty$, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .*

Démonstration. Cette preuve est similaire à celle de la proposition 8.4. $\square$

Exemple. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, impaire, 2-périodique, avec pour $x \in [0, 1]$, $f(x) = x$ et dont la courbe représentative a été donnée en figure 5.12 page 122. On note alors que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2n) = f(0) = 0$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(1 + 2n) = f(1) = 1$.

On a donc construit deux suites u et v qui divergent vers $+\infty$ et telles que $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite donc f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 8.9. Montrer qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, T -périodique, $T > 0$, et non constante ne possède pas de limite en $+\infty$.

8.1.3 Limite à gauche et limite à droite

Dans la section 8.1.1 nous avons défini la notion de limite d'une fonction f en un point fini a et nous nous sommes pour cela intéressés au comportement de $f(x)$ lorsque x s'approche de a . L'objet de cette section est de répondre à cette même question mais en distinguant deux façons de tendre vers a : par la gauche ou par la droite. Ceci donnera lieu à la notion de limite à gauche ou à droite et sera très utile pour étudier la limite en un point d'une fonction définie différemment à droite et à gauche de ce point.

Définition 8.10 – Limite finie à gauche. Soient D un intervalle ou une union finie d'intervalles, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. On dit que f admet une **limite finie à gauche** de a , notée ℓ_g , si f est définie sur un intervalle à gauche de a (i.e. pour tout $\eta > 0$, $[a - \eta, a] \cap D$ contient un intervalle) et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D$,

$$\text{si } a - \eta \leq x < a \text{ alors } \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon.$$

On note alors, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell_g$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell_g$.

Exemple. On considère la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+$ définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

dont la représentation graphique est la suivante :

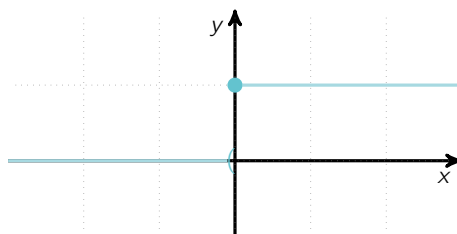


Figure 8.5 – Courbe représentative de la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+$

Alors, f admet une limite à gauche en 0 donnée par $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

Remarques.

- On définit bien entendu de la même façon la limite à droite ℓ_d en un point fini d'une fonction. Par exemple, si on reprend la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+$ introduite dans l'exemple précédent alors f admet une limite à droite de 1 donnée par $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

- On peut décrire comme dans la définition 8.1 le fait pour une fonction d'avoir une limite infinie à droite ou à gauche d'un point. Par exemple, on pourra se convaincre que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Le lien important entre la notion de limite en un point et les notions de limites à gauche et à droite de ce point est résumé dans la proposition suivante qui pourra s'avérer utile en pratique pour obtenir la limite d'une fonction en un point.

Proposition 8.11. Soient D un intervalle ou une union finie d'intervalles, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$ tel que f soit définie sur un intervalle à gauche de a et sur un intervalle à droite de a .

- Si f admet une limite finie en a , alors f admet une limite finie à gauche et à droite en a et ces limites sont égales.
- Réciproquement, si f admet une limite à gauche et à droite en a et si ces limites sont égales, alors il s'agit de la limite de f en a .

Démonstration. Le premier point est clair par définition de la limite. Supposons à présent que la fonction f admet en a une limite à gauche et une limite à droite et que ces limites sont égales à ℓ . Soit $\varepsilon > 0$, alors

- il existe $\eta_g > 0$ tel que si $x \in D$ tel que $a - \eta_g \leq x < a$, $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$,
- il existe $\eta_d > 0$ tel que si $x \in D$ tel que $a < x \leq a + \eta_d$, $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$.

Ainsi, si on pose $\eta = \min(\eta_g, \eta_d)$ alors pour tout $x \in D$, $x \neq a$, si $a - \eta \leq x \leq a + \eta$ alors $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$, ce qui signifie bien que f admet pour limite ℓ en a . $\square$

Exemples.

- On considère la fonction f indicatrice de $\{0\}$ qui vaut 1 en 0 et 0 partout ailleurs, dont le graphe est le suivant :

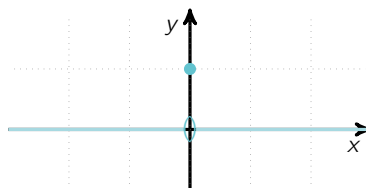


Figure 8.6 – Graphe de la fonction indicatrice de $\{0\}$

Alors f admet des limites à gauche et à droite en 0 données par $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. Elle admet donc une limite en 0 égale à 1.

- La fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+$ introduite dans l'exemple de la page 198 n'a pas de limite en 0 car comme nous l'avons vu précédemment, sa limite à gauche en 0 est 0 alors que sa limite à droite en 0 vaut 1.

Exercice 8.12. Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ si elles existent dans les cas suivants :

$$1. \quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad 2. \quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ x^3 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

8.1.4 Opérations sur les limites

Dans cette section, on considère un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ou une union finie d'intervalles, deux fonctions $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$ ou $a = \pm\infty$ (selon si D est borné ou non). Nous nous sommes attachés dans ce début de chapitre à définir la notion de limite mais revenir à la définition pour calculer la limite des fonctions n'est pas une bonne idée en pratique. Le but de cette section est ainsi de donner des règles de calculs, comme nous l'avons fait pour les suites dans la section 6.3.2, afin de pouvoir calculer efficacement les limites de fonctions.

Proposition 8.13 – Limite d'une somme. On considère f et g deux fonctions et a un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$. On a alors :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	ℓ_1	ℓ_1	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	ℓ_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	<i>F.l.</i>

Démonstration. Nous devrions ici faire les démonstrations des cinq premiers cas. Néanmoins, celles-ci sont très similaires donc nous ne traiterons ici qu'un seul cas. De plus, ayant déjà traité, pour les suites réelles, le cas de la somme de deux limites finies et le cas de la somme d'une limite finie et d'une limite infinie dans la preuve du théorème 6.24, nous allons uniquement traiter le cas où les limites de f et g sont égales à $+\infty$ en un point fini. Soit $a \in \overline{D}$ et f et g deux fonctions telles que f et g tendent vers $+\infty$ en a . Notre but est alors de montrer que $f + g$ tend également vers $+\infty$ en a . Soit $M \in \mathbb{R}$, alors,

- il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x \neq a$, si $-\eta \leq x - a \leq \eta$ alors $f(x) \geq \frac{M}{2}$,
- il existe $\eta' > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x \neq a$, si $-\eta' \leq x - a \leq \eta'$ alors $g(x) \geq \frac{M}{2}$.

Mais alors, pour tout $x \in D$, $x \neq a$ tel que $-\min(\eta, \eta') \leq x - a \leq \min(\eta, \eta')$, on a $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \geq \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$. Ceci achève de démontrer que la limite de $f + g$ en a est égale à $+\infty$. $\square$

Remarque. Dans ce tableau, la mention F.I. signifie « forme indéterminée » ce qui veut dire que pour déterminer la limite de la somme, il est nécessaire de travailler sur notre fonction ou de trouver un autre argument car, a priori, tout peut arriver. Par exemple :

- si $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = -x^2$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$,
- si $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$,
- si $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$,
- si $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = -x^2$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$.

Proposition 8.14 – Limite d'un produit de fonctions. On considère f et g deux fonctions et a un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$. On a alors :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	ℓ_1	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	ℓ_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x)$	$\ell_1 \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Démonstration. Pour les mêmes raisons que dans la preuve de la proposition 8.13, nous ne démontrerons ici qu'un cas. Comme nous avons étudié le cas du produit de deux limites finies dans la preuve du théorème 6.24, nous allons ici traiter le cas où f tend vers $\ell_1 > 0$ et g tend vers $+\infty$ et nous allons montrer que fg tend vers $+\infty$. Soit $M > 0$, alors

- il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x \neq a$, si $-\eta \leq x - a \leq \eta$ alors

$$0 < \frac{\ell_1}{2} = \ell_1 - \frac{\ell_1}{2} \leq f(x) \leq \ell_1 + \frac{\ell_1}{2} = \frac{3}{2}\ell_1$$

où l'on a utilisé la définition de limite finie pour $\varepsilon = \frac{\ell_1}{2}$,

- il existe $\eta' > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x \neq a$, si $-\eta' \leq x - a \leq \eta'$ alors $g(x) \geq \frac{2M}{\ell_1}$.

Mais alors, pour tout $x \in D$, $x \neq a$ tel que $-\min(\eta, \eta') \leq x - a \leq \min(\eta, \eta')$, on a $(fg)(x) = f(x)g(x) \geq \frac{\ell_1}{2} \times \frac{2M}{\ell_1} = M$. Ceci achève de démontrer que la limite de fg en a est égale à $+\infty$. $\square$

Remarque. Dans le cas de la forme indéterminée, tout peut en effet arriver. Par exemple :

- si $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$,
- si $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$,

- si $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

On s'intéresse enfin à la limite en a du quotient de f par g , $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$. Néanmoins, nous devons pour cela nous assurer que ce quotient existe, et nous supposons donc que $g(x)$ ne s'annule pas pour x suffisamment proche de a lorsque $a \in \mathbb{R}$, ou lorsque x est suffisamment grand lorsque $a = +\infty$ (on procède bien sûr de même lorsque $a = -\infty$).

Proposition 8.15 – Limite d'un produit de fonctions. *On considère f et g deux fonctions et a un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$.*

- Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, alors

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	ℓ_1	ℓ_1	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\ell_2 \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell_2 > 0$	$\ell_2 < 0$	$\ell_2 > 0$	$\ell_2 < 0$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	<i>F.I.</i>

- Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, alors

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	<i>F.I.</i>

Démonstration. Encore une fois, nous ne faisons ici la démonstration que d'un seul cas. De plus, ayant déjà traité le cas de l'inverse d'une limite finie dans la preuve du théorème 6.24, nous allons ici traiter le cas où, en un point fini a , f a une limite finie ℓ_1 et g tend vers $+\infty$ et montrer que le quotient $\frac{f}{g}$ tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$.

- Puisque f tend vers ℓ_1 lorsque x tend vers a , il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x \neq a$, si $-\eta \leq x - a \leq \eta$ alors

$$\ell_1 - 1 \leq f(x) \leq \ell_1 + 1$$

où on a utilisé la définition de limite finie pour $\varepsilon = 1$. De plus, ceci nous permet de conclure que pour de telles valeurs de x , $|f(x)| \leq \max(|\ell_1 + 1|, |\ell_1 - 1|)$.

- De plus, puisque g tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a , il existe $\eta' > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x \neq a$, si $-\eta' \leq x - a \leq \eta'$ alors

$$g(x) \geq \frac{\max(|\ell_1 + 1|, |\ell_1 - 1|)}{\varepsilon} > 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in D$, $x \neq a$ tel que $-\min(\eta, \eta') \leq x - a \leq \min(\eta, \eta')$, on a

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \max(|\ell_1 + 1|, |\ell_1 - 1|) \times \frac{\varepsilon}{\max(|\ell_1 + 1|, |\ell_1 - 1|)} = \varepsilon.$$

Ceci achève de démontrer que la limite de $\frac{f}{g}$ en a est égale à $+\infty$. □

Remarque. Dans le cas de la forme indéterminée, tout peut arriver.

- Si $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.
- Si $f(x) = x$ et $g(x) = x$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$.
- Si $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.
- Si $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.
- Si $f(x) = x$ et $g(x) = x$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$.

Méthode – Lever une indétermination. Pour lever une forme indéterminée, on dispose de plusieurs méthodes.

- Lorsqu'on cherche la limite en l'infini d'une fraction rationnelle, on factorise par les termes prépondérants au numérateur et au dénominateur.
- Lorsqu'on cherche la limite en un point fini $a \in \mathbb{R}$ d'un quotient de fonctions polynomiales et que le numérateur et le dénominateur s'annulent en a , on factorise le numérateur et le dénominateur par $x - a$ et on simplifie l'expression.
- Lorsqu'on cherche la limite en l'infini d'une somme ou d'une différence de racines, on utilise la quantité conjuguée.

Exemples.

- On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x + 1}{5x^3 + x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 \left(1 + \frac{5}{3x} + \frac{1}{3x^2}\right)}{5x^3 \left(1 + \frac{1}{5x} - \frac{3}{5x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{5} \times \frac{1 + \frac{5}{3x} + \frac{1}{3x^2}}{1 + \frac{1}{5x} - \frac{3}{5x^3}}$$

ce qui donne $\frac{3}{5}$.

- On a

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x+2} = -\frac{1}{4}.$$

- On a

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-2}.$$

Il faut donc étudier les limites à droite et à gauche. On obtient alors

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x-2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x-2} = -\infty.$$

○ On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \sqrt{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \sqrt{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - (x+1)}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = 0.$$

Théorème 8.16 – Composition des limites. Soient I et J deux intervalles, $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \bar{I}$ ou $a = \pm\infty$. Si

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$
- $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell,$
- pour tout $x \in I$, $f(x) \in J \setminus \{b\},$

alors, $g \circ f$ admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \ell$.

Démonstration. On donne ici la preuve dans le cas où a , b et ℓ sont des nombres réels (finis) mais la preuve est analogue lorsqu'une ou plusieurs de ces quantités sont infinies. Soit $\varepsilon > 0$, puisque $g(y)$ tend vers ℓ lorsque y tend vers b , il existe $\eta_g > 0$ tel que pour tout $y \in J$, $y \neq b$,

$$\text{si } -\eta_g \leq y - b \leq \eta_g \text{ alors } -\varepsilon \leq g(y) - \ell \leq \varepsilon.$$

Or, $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a donc il existe η_f tel que pour tout $x \in I$, $x \neq a$,

$$\text{si } -\eta_f \leq x - a \leq \eta_f \text{ alors } -\eta_g \leq f(x) - b \leq \eta_g.$$

Ainsi, pour tout $x \in I$, $x \neq a$,

$$\text{si } -\eta_f \leq x - a \leq \eta_f \text{ alors } -\varepsilon \leq g(f(x)) - \ell \leq \varepsilon$$

ce qui achève de démontrer que $g(f(x))$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a . □

Remarque. La condition indiquant que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J \setminus \{b\}$ peut paraître technique mais elle est bien nécessaire. En effet, prenons par exemple u la fonction constante égale à 0 sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour tout x non nul. Alors, $u(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$ et $f(y) \rightarrow 0$ lorsque $y \rightarrow 0$ alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(u(x)) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $f(u(x)) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$. On pourrait

également demander à ce que f soit continue (voir la section 8.2) en b , ce qui sera souvent le cas en pratique, pour éviter ce problème.

Exercice 8.17. Calculer les limites suivantes :

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 1} 3x + 2,$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 1} 4x(1 - 5x),$ | 15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 + 2x^2,$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 2} 7x^2 - 6,$ | 9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3},$ | 16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} + \frac{1}{x^2},$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 - \frac{1}{x},$ | 10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^4,$ | 17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x\sqrt{x},$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 2} 3x\sqrt{x},$ | 11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3 + \frac{1}{x},$ | 18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 - 2x^2,$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-5}{6-5x},$ | 12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3,$ | 19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2},$ |
| 6. $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x} + 2,$ | 13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5 + \frac{1}{x},$ | 20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2+2}.$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x}{x^2-2},$ | 14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x},$ | |

Exercice 8.18. Étudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f dans les cas suivants :

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1. $f: x \mapsto \frac{5}{x+3},$ | 5. $f: x \mapsto \frac{3x^4-2x^3+x-12}{x^6+3x^5+x^2+x},$ |
| 2. $f: x \mapsto \frac{5x}{x+3},$ | 6. $f: x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1},$ |
| 3. $f: x \mapsto \frac{5x-2}{x+3},$ | 7. $f: x \mapsto \frac{(x+2)(x^2-9x+1)}{(x^2+4)(2x-1)},$ |
| 4. $f: x \mapsto \frac{x^2-4x}{x-6},$ | 8. $f: x \mapsto \frac{x\sqrt[3]{x}+x}{x^2}.$ |

Exercice 8.19. Calculer les limites suivantes :

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2)(2x - 1),$ | 7. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2+2x+1},$ | 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sqrt{x}},$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{2x+1},$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1},$ | 14. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{-x^2+2x+3},$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{2-x},$ | 9. $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1)(x + 2),$ | 15. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{-x^2+2x+3},$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x+3},$ | 10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{x+3},$ | 16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x^2-1},$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{10x}{x^2-4},$ | 11. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5}{x+3},$ | 17. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+1}{x^2+x-2},$ |
| 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+2}{\sqrt{1-x}},$ | 12. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x^2-4},$ | 18. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x+1}{x^2+x-2}.$ |

8.1.5 Limite et comparaison

Comme dans la section précédente, nous considérons ici un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ou une union finie d'intervalles et $a \in \overline{D}$ ou $a = \pm\infty$ (selon si D

est borné ou non).

Théorème 8.20. Soient f et g deux fonctions définies sur D et $a \in \overline{D}$ ou $a = \pm\infty$. On suppose que pour tout $x \in D$, $f(x) \leq g(x)$. Si f et g admettent des limites en a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Démonstration. On raisonne ici par l'absurde, on suppose que la limite ℓ de f est strictement supérieure à la limite ℓ' de g et on pose $\varepsilon = \frac{\ell - \ell'}{3} > 0$. Ainsi, puisque f tend vers ℓ en a , il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x \neq a$,

$$\text{si } -\eta \leq x - a \leq \eta \text{ alors } -\varepsilon \leq f(x) - \ell \leq \varepsilon$$

et donc en particulier, pour de tels x , $f(x) \geq \ell - \varepsilon = \frac{2\ell + \ell'}{3}$. De même, puisque g tend vers ℓ' en a , il existe $\eta' > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x \neq a$,

$$\text{si } -\eta' \leq x - a \leq \eta' \text{ alors } -\varepsilon \leq g(x) - \ell' \leq \varepsilon$$

et donc en particulier, pour de tels x , $g(x) \leq \varepsilon + \ell' = \frac{\ell + 2\ell'}{3}$. Mais alors, pour $x \in D$, $x \neq a$ tel que $-\min(\eta, \eta') \leq x - a \leq \min(\eta, \eta')$,

$$g(x) \leq \frac{\ell + 2\ell'}{3} < \frac{2\ell + \ell'}{3} \leq f(x)$$

ce qui contredit notre hypothèse de majoration de f par g . On obtient donc une contradiction et on en déduit que $\ell \leq \ell'$. $\square$

À retenir. On dit que « les **inégalités larges** passent à la limite ». En revanche, si au départ on a $f(x) < g(x)$ alors, on a malgré tout des inégalités larges sur les limites (les inégalités strictes ne sont pas préservées). Par exemple, $f(x) = \frac{1}{x} > -\frac{1}{x} = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pourtant ces deux fonctions tendent vers 0 en l'infini.

Théorème 8.21 – Théorème d'encadrement ou des gendarmes. Soient f , g et h trois fonctions définies sur D et $a \in \overline{D}$ ou $a = \pm\infty$. On suppose que pour tout $x \in D$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et que g et h admettent une limite commune, notée ℓ , en a . Alors, f admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Démonstration. Il s'agit ici de reprendre la preuve du théorème 6.32 d'encadrement pour les suites réelles et de la traduire dans le langage des fonctions réelles. $\square$

Exemple. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, impaire, 2-périodique, avec pour $x \in [0, 1]$, $f(x) = x$ et dont la courbe représentative à été donnée en figure 5.12 page 122. Déterminons la limite de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. On commence par noter que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq f(x) \leq 1$ et on en déduit que pour tout $x > 0$,

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Or, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ et $-\frac{1}{x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Ainsi, du théorème d'encadrement 8.21, on déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 8.22. Déterminer, si elle existe, la limite en 0 de la fonction $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

En utilisant le théorème d'encadrement, on peut calculer certaines limites des fonctions trigonométriques introduites dans le chapitre 7.

Proposition 8.23. On a les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0,$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1,$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0.$

Démonstration.

- Rappelons que, d'après la proposition 7.59, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 \leq \sin(x) \leq x$, donc d'après le théorème d'encadrement 8.21, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) = 0$. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, on a de plus

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\sin(x) = 0.$$

Finalement, d'après la proposition 8.11, on peut conclure que $\sin$ admet une limite en 0 et que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$.

- On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ et pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(x) \geq 0$, donc pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2}$. Par le théorème de compositions des limites 8.16, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - \sin(x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - x^2} = 1.$$

- D'après la proposition 7.59, on sait que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$ donc, d'après le théorème d'encadrement 8.21, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. De plus,

puisque pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin(-x) = -\sin(x)$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

D'après la proposition 8.11, on a donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

- Montrons à présent que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$. On sait d'après les formules de linéarisation (voir corollaire 7.57) que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \cos(2\frac{x}{2}) = 1 - 2\sin(\frac{x}{2})^2$ donc

$$\frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} \text{ lorsque } x \rightarrow 0.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\frac{\cos(x) - 1}{x^2} \right) = 0$.

□

Corollaire 8.24. Soient f et g deux fonctions définies sur D et $a \in \overline{D}$ ou $a = \pm\infty$.

- **Plancher montant.** Si, pour tout $x \in D$, $f(x) \leq g(x)$ et si f tend vers $+\infty$ en a , alors g tend vers $+\infty$ en a .
- **Plafond descendant.** Si, pour tout $x \in D$, $f(x) \leq g(x)$ et si g tend vers $-\infty$ en a , alors f tend vers $-\infty$ en a .

Démonstration. Il s'agit ici de traduire la preuve du théorème 6.31, qui donne l'analogie de ce résultat pour les suites réelles, au cadre des fonctions réelles. Écrivons la preuve du premier point, le second étant similaire, et plaçons-nous dans le cas où $a \in \overline{D}$. Soit $M \in \mathbb{R}$, alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x \neq a$, si $-\eta \leq x - a \leq \eta$ alors $f(x) \geq M$. Mais alors, puisque $g \geq f$ sur D , on en déduit que pour tout $x \in D$, $x \neq a$, si $-\eta \leq x - a \leq \eta$ alors $g(x) \geq M$. Ceci achève donc de montrer que g tend vers $+\infty$ en a . □

Théorème 8.25 – Théorème de la limite monotone. Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone définie sur I . Si a et b sont les bornes de I alors f admet des limites (éventuellement infinies) en a et en b .

Démonstration. Nous ne ferons pas ici la preuve de ce théorème car elle repose, au moins partiellement, sur la notion de borne supérieure que nous n'avons pas introduite. Néanmoins, si vous êtes intéressé nous vous conseillons de consulter [LM03, Chapitre 4 et 5].

□

Remarque. Ce théorème nous permet d'affirmer l'existence d'une limite sans pour autant que l'on soit capable de la déterminer exactement comme nous avons eu l'occasion de le voir pour les suites dans la section 6.3.4.

8.2. Continuité

8.2.1 Définition

Intuitivement, une fonction f définie sur un intervalle I est continue sur cet intervalle si l'on peut dessiner sa courbe représentative sans lever le crayon. Autrement dit, f est continue sur I si sa courbe représentative ne possède pas de saut. Précisons cette intuition et donnons tout d'abord la définition mathématique de continuité en commençant par définir la continuité d'une fonction en un point.

Définition 8.26 – Continuité en un point. Soient D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ou une union finie d'intervalles, $a \in D$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **continue** en a si

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

i.e. si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x \neq a$,

$$\text{si } a - \eta \leq x \leq a + \eta \text{ alors } f(a) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(a) + \varepsilon.$$

Remarque – Continuité à gauche et à droite. On définit de même les notions de continuité à gauche et à droite d'un point en utilisant dans la notion de limite à gauche et à droite, i.e. selon si $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ et $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Exemple. La fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+$ définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est continue en tout point de $\mathbb{R}$ sauf en 0 (où elle est continue à droite mais pas à gauche) comme l'illustre la représentation graphique qui suit.

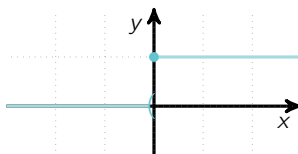


Figure 8.7 – Graphe de la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+$

Remarque – Caractérisation séquentielle. De la caractérisation séquentielle de la limite vue dans la proposition 8.4, on peut déduire immédiatement que f est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de D qui converge vers a , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Définition 8.27 – Continuité sur un intervalle. Soient D un sous-ensemble $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ou une union finie d'intervalles et f une fonction définie sur D . f est dite continue sur D si elle est continue en chaque point de D .

Remarque – Caractère local de la continuité. La notion de continuité en un point est locale au sens où elle ne dépend que du comportement de la fonction au voisinage du point, i.e. des valeurs de $f(x)$ pour les valeurs de x proches du point a considéré. En ce sens, la notion de continuité sur un domaine D peut être vue comme une propriété partout locale (i.e. vraie partout mais vraie en chaque point grâce à une propriété locale de la fonction considérée). La notion de propriété partout locale est à ne pas confondre avec la notion de propriété globale sur f qui peut par exemple concerner le fait que f soit bornée ou paire.

Exercice 8.28. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{x^2+x}{2\sqrt{x^2}}$ pour $x \neq 0$. Déterminer l'ensemble des réels où elle est continue.

On note que dans la définition 8.26, le point a est un point de D (et pas seulement de $\overline{D}$) afin que f soit définie en a . Néanmoins, si f n'est pas définie en a mais qu'elle possède une limite finie en ce point, on peut prolonger f en une nouvelle fonction continue en a : c'est le but de la proposition suivante.

Proposition 8.29 – Prolongement par continuité. Soient D un sous-ensemble $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ou une union finie d'intervalles, $a \in \overline{D}$ tel que $a \notin D$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Si la limite f admet une limite ℓ en a alors on peut prolonger f en une fonction $\tilde{f}$ continue en a et définie par

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration. Par hypothèse la limite de $\tilde{f}$ en a existe et est égale à $\tilde{f}(a)$. □

Exemple. Étant donné qu'on a vu dans la proposition 8.23 que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, la fonction f définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ peut être prolongée par continuité en 0 en la

fonction $\tilde{f}$ définie par

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Exercice 8.30. Pour chacune des fonctions suivantes, étudier sa limite en a et dire si elle admet un prolongement par continuité en ce point.

1. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ en $a = 0$,

3. $f(x) = \frac{x^2+x}{2\sqrt{x^2}}$ en $a = 0$,

2. $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $a = 0$,

4. $f : x \mapsto \frac{x^2-4x+3}{x^2-1}$ en $a = 1$.

8.2.2 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

On considère dans cette section un intervalle I de $\mathbb{R}$. Notre but est ici de donner les énoncés importants satisfaits par les fonctions continues sur un intervalle et qui seront particulièrement utiles en pratique.

Théorème 8.31. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

- Si f et g sont deux fonctions continues sur I et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f + g$, λf et $f g$ sont des fonctions continues sur I . De plus, si g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g}$ est continue sur I .
- Si $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues respectivement sur I et J alors $g \circ f$ est une fonction continue sur I .

Démonstration. Ce résultat résulte immédiatement des opérations sur les limites présentées dans la section 8.1.4. $\square$

Théorème 8.32 – Théorème des valeurs intermédiaires. Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant un segment $[a, b]$. Alors pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\lambda = f(c)$.

Démonstration. On procède ici par dichotomie dans le même esprit que celui utilisé pour démontrer le théorème 6.37. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a, b \in I$ tels que $[a, b] \subset I$. On considère λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, montrons qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$. On cherche à construire deux suites adjacentes a et b .

- On commence par poser $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

- On considère alors $m_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et on note que, puisque λ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors, λ est nécessairement compris entre $f(a)$ et $f(m_0)$ ou entre $f(b)$ et $f(m_0)$. Dans le premier cas, on pose alors $a_1 = a$ et $b_1 = m_0$ et dans le second cas on pose $a_1 = m_0$ et $b_1 = b$ de manière à ce que λ soit compris entre $f(a_1)$ et $f(b_1)$.
- On obtient ainsi deux suites a et b , définies par récurrence, telles que a est croissante, b est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ et λ est compris entre $f(a_n)$ et $f(b_n)$.

Les deux suites a et b sont donc adjacentes et d'après le théorème 6.28 elles convergent donc vers une même limite que l'on note c . Mais alors, par continuité de f , $f(a_n)$ converge vers $f(c)$ et $f(b_n)$ converge également vers $f(c)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, λ est compris entre $f(a_n)$ et $f(b_n)$. Par encadrement, on en déduit donc que $\lambda = f(c)$ en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ ce qui achève notre preuve. $\square$

Remarques.

- On peut reformuler le théorème des valeurs intermédiaires de la façon suivante : l'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.
- Graphiquement, la situation est la suivante.

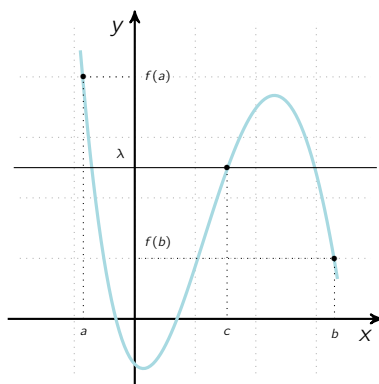


Figure 8.8 – Illustration du théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 8.33 – Point fixe. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe dans $[0, 1]$, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

Corollaire 8.34. Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant un segment $[a, b]$. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 8.32 en notant que 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. $\square$

Remarque. Pour localiser approximativement (numériquement) le point c pour lequel $f(c) = 0$, on peut utiliser la méthode de dichotomie mise en place dans la preuve du théorème 8.32 car elle fournit après n itérations une approximation de c avec une erreur de $\frac{b-a}{2^n}$.

Exercice 8.35. Montrer qu'une fonction polynomiale réelle de degré impair admet au moins une racine réelle.

Corollaire 8.36 – Théorème de la bijection. Soit f une fonction continue et **strictement monotone** sur un intervalle I contenant un segment $[a, b]$. Alors pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un **unique** $c \in [a, b]$ tel que $\lambda = f(c)$.

Démonstration. L'existence de c est assurée par le théorème des valeurs intermédiaires 8.32. De plus, si c_1 et c_2 sont deux points de $[a, b]$ tels que $f(c_1) = f(c_2) = \lambda$, alors $c_1 = c_2$ car si, par exemple, $c_1 < c_2$ alors, puisque f est strictement monotone, $f(c_1) > f(c_2)$ (si f est décroissante) ou $f(c_1) < f(c_2)$ (si f est croissante). $\square$

Exemple. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc pour tout $\lambda \geq 0$, il existe un unique $c \geq 0$ tel $f(c) = \lambda$, i.e. tel que $c^2 = \lambda$. Ce nombre c est ainsi l'unique nombre positif qui au carré est égal à λ , i.e. que $c = \sqrt{\lambda}$. Notons d'ailleurs qu'il existe également un unique nombre $c \leq 0$ tel que $f(c) = \lambda$ puisque f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Remarque. Graphiquement, cela signifie que si f est continue alors pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ la courbe représentative de f intersecte une et une seule fois la droite d'équation $y = \lambda$, comme illustré sur la figure suivante :

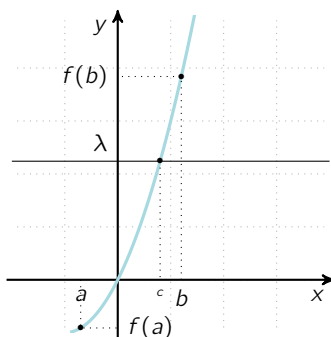


Figure 8.9 – Illustration du théorème de la bijection

Théorème 8.37 – Théorème des bornes atteintes. *Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes : elle possède un maximum et un minimum. Autrement dit, l'image d'un segment par une application continue est un segment.*

Démonstration. Nous admettrons cette preuve qui est basée sur la notion de borne supérieure et le théorème de Bolzano–Weierstrass 6.37. Si vous êtes intéressé, nous vous conseillons de consulter [LM03, Chapitre 5]. $\square$

Remarque. On peut reformuler le théorème des bornes atteintes de la façon suivante : l'image d'un segment $[a, b]$ par une application continue est un segment $[m, M]$ (où m est le minimum de f sur $[a, b]$ et M son maximum).

Exercice 8.38. Montrer qu'une application continue périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

8.3. Dérivabilité

8.3.1 Dérivabilité en un point

On considère dans cette section un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ou une réunion finie d'intervalles, $a \in D$ et f une fonction définie sur D .

Définition 8.39 – Taux d'accroissement. On appelle **taux d'accroissement** de f en a la fonction définie pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in D$, par

$$\tau_{f,a}(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Remarque. Ce taux d'accroissement correspond à la pente de la corde qui relie les deux points de la courbe représentative de f , $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$. Ceci est illustré par la figure 8.10a.

Exemple. On considère la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$. Déterminons le taux de variation de f en a . On a

$$\tau_{f,a}(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = h + 2a.$$

La droite tangente en a à la courbe représentative de la fonction f est alors obtenue comme « la limite » de la famille de droite d'équation $y = \tau_{f,a}(h) \times (x - a) + f(a)$ lorsque h tend vers 0 comme illustré sur la figure 8.10b.

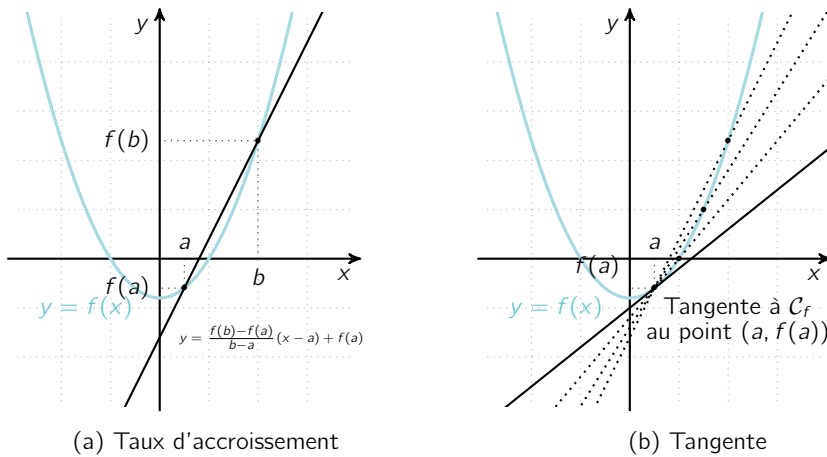


Figure 8.10 – Taux d'accroissement et tangente

Formalisons cette idée à l'aide de la définition du nombre dérivé qui sera, comme nous le verrons dans la section suivante, le coefficient directeur de la tangente et qui est obtenu, quand il existe, par passage à la limite dans le taux d'accroissement lorsque h tend vers 0.

Définition 8.40 – Nombre dérivé. Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ou une réunion finie d'intervalles et soit $a \in D$. On dit que f est dérivable en a si la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{qui est égale à} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe et est finie. On note $f'(a)$ cette limite que l'on appelle **nombre dérivé de f en a** .

Exemple. On considère la fonction carrée $f: x \mapsto x^2$. Soit a un nombre réel. On a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h + 2a = 2a.$$

Ainsi, pour tout nombre réel a , le nombre dérivé de f en a est $f'(a) = 2a$.

Contre-exemple. Étudions la dérivabilité en 0 de $f: x \mapsto |x|$. Pour montrer que cette fonction n'est pas dérivable en 0, il suffit de montrer que les limites du taux d'accroissement à gauche et à droite de 0 existent et sont différentes. En effet,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

donc f admet une limite à droite en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$ donc f admet une limite à gauche en 0. Néanmoins, ces deux limites étant différentes, le taux d'accroissement n'a pas de limite et f n'est donc pas dérivable en 0.

Exercice 8.41. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x$. Déterminer si f est dérivable en 1 et, si oui, donner la valeur de $f'(1)$.

Remarque – Dérivabilité à gauche et à droite. Puisque nous avons une notion de limite à gauche et à droite d'un point, on peut tout à fait définir la notion de dérivabilité à gauche et de dérivabilité à droite d'un point. Il suffit pour cela d'étudier l'existence des limites de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque $h \rightarrow 0^+$ et lorsque $h \rightarrow 0^-$.

Contre-exemple. Étudions la dérivabilité à droite de 0 de la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On a $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ donc le taux d'accroissement admet une limite infinie en 0^+ donc la fonction racine n'est pas dérivable à droite en 0.

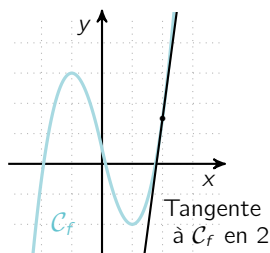
8.3.2 Interprétation graphique

Définition 8.42. Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ou une réunion finie d'intervalles et soit f une fonction définie sur D et dérivable en $a \in D$. La droite d'équation

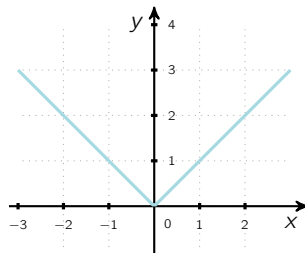
$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

est la **tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $(a, f(a))$** . On donne une illustration en figure 8.11a.

Remarque. On a déjà vu que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. On remarque cette non dérivabilité graphiquement par le fait que sa courbe représentative possède deux pentes différentes au point $(0, 0)$ selon qu'on arrive par la gauche ou par la droite comme l'illustre la figure 8.11b :



(a) Tangente en un point



(b) Fonction valeur absolue

Figure 8.11 – Dérivable / Non dérivable

On a déjà montré que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 à droite de 0 car la limite de son taux d'accroissement est égale à $+\infty$. Le fait que son taux d'accroissement diverge vers $+\infty$ peut également être interprété graphiquement : sa tangente en 0 est verticale (donc de coefficient directeur « égal à $+\infty$ »).

Exercice 8.43. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x + 1$ au point d'abscisse $a = 1$.

8.3.3 Dérivabilité et continuité

Théorème 8.44. Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ou une réunion finie d'intervalles et $a \in D$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a .

Démonstration. Soit f une fonction dérivable en a . Supposons alors par l'absurde que f n'est pas continue en a . Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in D$, $x \neq a$, $\eta \leq x - a \leq \eta$ et $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$. Afin d'utiliser le critère séquentiel, on considère alors pour $n \in \mathbb{N}$, $\eta = \frac{1}{n+1}$ et il existe alors $x_n \in D$ tel que $\frac{1}{n+1} \leq x_n - a \leq \frac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$. Mais alors,

$$\left| \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right| \geq \frac{\varepsilon}{\frac{1}{n+1}} = \varepsilon(n+1) \rightarrow +\infty$$

ce qui contredit la dérivabilité de f en a d'après la caractérisation séquentielle de la limite puisque x_n tend vers a (voir proposition 8.4). $\square$

Remarques.

- La réciproque de ce théorème est fausse. Par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'y est pas dérivable.
- Ce théorème n'est pas utile en pratique pour justifier la continuité. On pourra davantage s'en servir en remarquant qu'il permet d'affirmer que si une fonction n'est pas continue en un point, elle ne peut pas y être dérivable.

Exercice 8.45. Soient a et b deux réels strictement positifs. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 0$ pour tout $x \leq 2$, $g(x) = 1$ pour tout $x > 4$ et $g(x) = a - \frac{b}{x}$ pour tout $x \in]2, 4]$.

1. Déterminer les paramètres a et b pour que g soit continue sur tout $\mathbb{R}$.
2. Pour ces valeurs de a et b , la fonction g est-elle dérivable en 2 ?

Exercice 8.46. Pour $n \in \mathbb{N}$, étudier la continuité et la dérivabilité de $f_n : x \mapsto x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0 selon la valeur de n . *Indication : on traitera les cas $n = 0$, $n = 1$ puis $n > 1$.*

8.3.4 Fonction dérivée

Définition 8.47. Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ou une réunion finie d'intervalles et soit f une fonction définie sur D . On dit que f est **dérivable** sur D si f est dérivable en tout point $a \in D$. Lorsque f est dérivable sur D , on définit la fonction $x \mapsto f'(x)$ définie sur D . Cette fonction s'appelle **la fonction dérivée de f** notée f' .

Remarque. Il arrive en physique que l'on note $\dot{f}$ ou $\frac{df}{dx}$ au lieu de f' . On notera que $\frac{df}{dx}$ présente l'intérêt de préciser la variable par rapport à laquelle on dérive.

Exemple. La fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en tout réel a , avec $f'(a) = 2a$. Ainsi, la fonction dérivée de f est donc $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$.

Exercice 8.48. Étudier la dérivabilité de la fonction racine sur $[0, +\infty[$ et déterminer sa fonction dérivée aux points où elle est dérivable.

Proposition 8.49. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin'(x) = \cos(x) \text{ et } \cos'(x) = -\sin(x).$$

Démonstration. On commence par démontrer la dérivabilité des fonctions $\cos$ et $\sin$ en 0. On a, d'après la proposition 8.23,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = \cos(0)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0 = \sin(0),$$

donc les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont dérivables en 0.

Démontrons à présent la dérivabilité de $\cos$ et $\sin$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, par les formules d'addition, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(x + t) = \sin(x)\cos(t) + \cos(x)\sin(t)$ (voir proposition 7.55) donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(x + t) - \sin(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\sin(x) \frac{\cos(t) - 1}{t} + \cos(x) \frac{\sin(t)}{t} \right) = \cos(x),$$

et $\cos(x+t) = \cos(x)\cos(t) - \sin(x)\sin(t)$, donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(x+t) - \cos(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\cos(x) \frac{\cos(t) - 1}{t} - \sin(x) \frac{\sin(t)}{t} \right) = -\sin(x).$$

On a donc démontré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$. De plus, ces fonctions sont ainsi continues d'après le théorème 8.44. $\square$

Il existe un certain nombre de dérivées usuelles à connaître absolument que l'on se propose de résumer dans le tableau suivant :

Fonction	Domaine de dérivabilité	Dérivée
$f: x \mapsto k$ avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto 0$
$f: x \mapsto ax + b$ avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto a$
$f: x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto nx^{n-1}$
$f: x \mapsto \frac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$	$f': x \mapsto \frac{-n}{x^{n+1}}$
$f: x \mapsto \sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$f': x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f: x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto -\sin(x)$
$f: x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto \cos(x)$

Table 8.1 – Tableau des dérivées usuelles

8.3.5 Opération sur les dérivées

Propriété 8.50. Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ou une réunion finie d'intervalles et soient f et g deux fonctions définies sur D et dérivables en un point $a \in D$.

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.
- La fonction fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$.
- Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Démonstration. Découle essentiellement des résultats de la sous-section 8.1.4. Vous pouvez consulter [LM03, Chapitre 6] pour plus de détails. $\square$

Exemples.

- Toute fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$. Considérons par exemple, la fonction $f: x \mapsto 4x^3 + 2x^2 - x + 1$. Elle est dérivable de dérivée $f'(x) = 12x^2 + 4x - 1$.
- La fonction $g: x \mapsto (x + 1) \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet pour dérivée la fonction $g'(x) = \cos(x) - (x + 1) \sin(x)$.
- La fonction $h: x \mapsto \frac{3x+2}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $h'(x) = \frac{3(x^2+1) - 2x(3x+2)}{(x^2+1)^2}$.

Théorème 8.51 – Dérivée d'une composée. Soient I et J deux intervalles, $f: I \rightarrow J$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a)).$$

Démonstration. On utilisera ici les théorèmes 8.16 et 8.31. Vous pouvez consulter [LM03, Chapitre 6] pour plus de détails. $\square$

Exemples.

- La fonction $f: x \mapsto \sin(2x + 3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2 \cos(2x + 3).$$

- On étudie la fonction $g: x \mapsto \sqrt{3x + 2}$. La fonction g est définie sur $[-\frac{2}{3}, +\infty[$ et est dérivable sur $] -\frac{2}{3}, +\infty[$, avec pour $x \in] -\frac{2}{3}, +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x + 2}}.$$

- La fonction h définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $h(x) = (2x^2 - 3)^4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée, pour $x \in \mathbb{R}$, par $h'(x) = 16x(2x^2 - 3)^3$.

Exercice 8.52. Calculer, après avoir précisé l'ensemble de dérivabilité, les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = -4x + 7$,

2. $f_2(x) = 3x^2 + 5x - 4$,

3. $f_3(x) = 2x^6 - 5x^4 + x^3 - 7x$,

4. $f_4(x) = 2x^{12} - x^9 + 6x + 39$,

5. $f_5(x) = (x^3 + 2)^3$,

6. $f_6(x) = \frac{3x-1}{x-2}$,

7. $f_7(x) = \frac{3x^2-5x+1}{x+4}$,

8. $f_8(x) = 6x^3 - 7\sqrt{x}$,

9. $f_9(x) = \sqrt{1 - 2x}$,

10. $f_{10}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

11. $f_{11}(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,

12. $f_{12}(x) = \frac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$.

Exercice 8.53. Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto (-x^7 + 3x^2)^5,$

7. $f_7 : x \mapsto \cos(\cos(x)),$

2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2+1},$

8. $f_8 : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right),$

3. $f_3 : x \mapsto \frac{x+1}{x-1},$

9. $f_9 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$

4. $f_4 : x \mapsto \frac{3x^2-5x+1}{x+4},$

5. $f_5 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}},$

10. $f_{10} : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 8x + 6}.$

6. $f_6 : x \mapsto \sin(x)^3,$

8.3.6 Extrema locaux

Définition 8.54. Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ou une réunion finie d'intervalles, soit f une fonction définie sur D et soit x_0 un élément de D .

- On dit que la fonction f admet un **maximum local** M en x_0 si on peut trouver un intervalle I inclus dans D tel que $x_0 \in I$ et tel que M soit le maximum de f sur I .
- On dit que la fonction f admet un **minimum local** m en x_0 si on peut trouver un intervalle I inclus dans D tel que $x_0 \in I$ et tel que m soit le minimum de f sur I .
- On dit que f admet un **extremum local** en x_0 si f possède un maximum local ou un minimum local en x_0 .

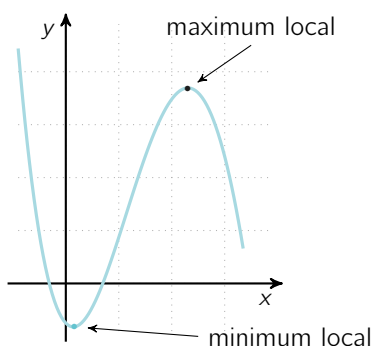


Figure 8.12 – Extrema locaux

Exemple. La fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$ admet un minimum local en $x = 0$ qui vaut 1 car pour tout $x \in \mathbb{R}$ (il suffirait que cela soit vrai sur un intervalle autour de 0) $f(x) \geq 1$.

Théorème 8.55. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I qui n'est pas une borne de I . Si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$. En particulier, la courbe représentative de f admet en x_0 une tangente horizontale.

Démonstration. Soit x_0 un extremum local de f qui n'est pas au bord de I et dont on suppose, sans perte de généralités qu'il s'agit d'un maximum local de f . Notons alors $\eta > 0$ un réel tel que pour tout $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ soit inclus dans I et tel que pour tout $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, $f(x) \leq f(x_0)$. Alors, pour tout $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$, $f(x) - f(x_0) \leq 0$ et donc

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ si } x \in [x_0 - \eta, x_0[\text{ et } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ si } x \in]x_0, x_0 + \eta].$$

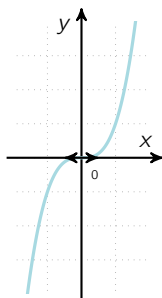
Or, puisque f est dérivable en x_0 les limites à gauche et à droite de x_0 du taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existent et coïncident. Ainsi, d'après les inégalités précédentes,

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

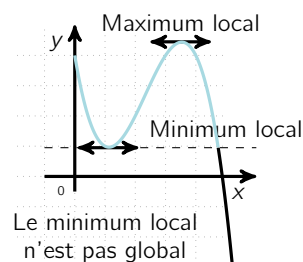
ce qui achève de démontrer que $f'(x_0) = 0$. □

Remarques.

- La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction cube $f: x \mapsto x^3$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , on a $f'(x) = 3x^2$ et donc $f'(0) = 0$. Pourtant, la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc 0 n'est pas un extremum local. On illustre cela par la figure 8.13a.
- L'extremum est local, cela veut dire que ce n'est un extremum qu'à proximité du point. En revanche, si on s'éloigne du point, la courbe peut tout à fait dépasser cette valeur (voir la figure 8.13b).



(a) Fonction cube



(b) Extrema locaux

Figure 8.13 – Tangentes horizontales et extrema locaux

- Le point x_0 ne doit pas être à l'extrémité de I . En effet, si x_0 est une extrémité de I , il peut être un extremum local sans que la dérivée de f en ce point ne s'annule (par exemple sur la figure suivante l'extrémité droite est un minimum local mais la dérivée de la fonction ne s'y annule pas).

Méthode – Extrema locaux. Pour trouver les extrema locaux d'une fonction dérivable, on peut déterminer les points où sa dérivée s'annule et on détermine ensuite si ce sont des extrema locaux.

Définition 8.56. Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui est un intervalle ou une réunion finie d'intervalles, soit f une fonction définie sur D et soit x_0 un élément de D .

- On dit que la fonction f admet un **maximum global M atteint en x_0** si pour tout $x \in D$, $f(x) \leq M = f(x_0)$.
- On dit que la fonction f admet un **minimum global m atteint en x_0** si pour tout $x \in D$, $f(x) \geq m = f(x_0)$.
- On dit que f admet un **extremum global atteint en x_0** si f possède un maximum global ou un minimum global atteint en x_0 .

Exercice 8.57. Étudier les extrema (locaux et globaux) de la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + \lambda x$ en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

8.3.7 Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle

Théorème 8.58 – Théorème de Rolle. Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. On illustre ce résultat à la figure 8.14a.

Démonstration. On procède par disjonction de cas.

- Si f est constante alors $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a, b[$.
- Supposons que f n'est pas constante. Puisque f est continue sur $[a, b]$ un segment, d'après le théorème des bornes atteintes 8.37, elle admet son maximum M et son minimum m sur $[a, b]$. Or, f n'étant pas constante $m \neq M$ et en particulier, $m \neq f(a)$ ou $M \neq f(a)$. Supposons par exemple que $m < f(a)$ et notons c le point de $]a, b[$ tel que $f(c) = m$. Alors m est un minimum local de f atteint en un point qui n'est pas au bord de $[a, b]$ et d'après le théorème 8.55, on en déduit que $f'(c) = 0$.

□

Exercice 8.59. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f' ne s'annule pas. Montrer que f ne peut pas être périodique.

Théorème 8.60 – Théorème des accroissements finis. Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

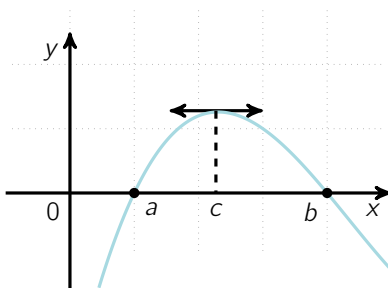
On illustre ce résultat à la figure 8.14b.

Remarque. Il s'agit d'une généralisation du théorème de Rolle puisque si $f(a) = f(b)$ on obtient que $(b - a)f'(c) = 0$ ce qui donne bien $f'(c) = 0$ puisque $a \neq b$.

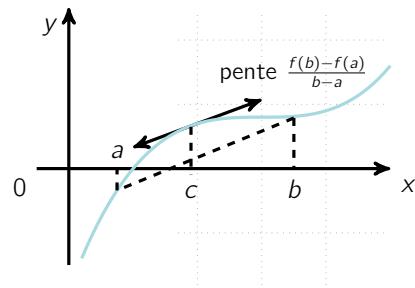
Démonstration. On applique le théorème de Rolle 8.58 à la fonction g définie sur $[a, b]$ par

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

où le second terme représente la corde reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ de la courbe représentative de f . En effet, g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, $g(a) = 0$ et $g(b) = 0$. Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ ce qui achève notre preuve. $\square$



(a) Théorème de Rolle



(b) Théorème des accroissements finis

Figure 8.14 – Deux théorèmes classiques

8.3.8 Dérivée et variations

L'une des principales utilisations de la dérivation dans l'étude de fonctions, outre la recherche d'extrema, réside dans le fait que l'on peut déterminer le sens de variation de f sur cet intervalle à partir du signe de sa dérivée.

Théorème 8.61. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I .
- f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I .
- f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I .

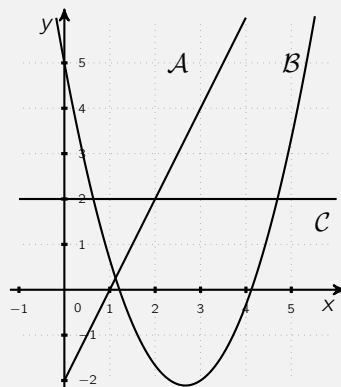
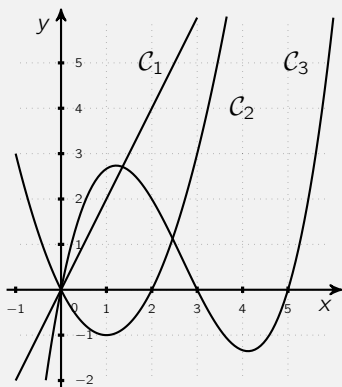
Remarque. Attention, ce théorème est faux si I n'est pas un intervalle. Par exemple, la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$, négative sur $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$.

Démonstration. Puisqu'il suffit de multiplier par -1 pour obtenir le second cas et que le troisième est la conséquence des deux premiers, on se contente de prouver le premier cas.

- Supposons que f est croissante sur I , alors si $x_0 \in I$, pour tout $x \in I$, le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est positif ou nul car le numérateur et le dénominateur sont de même signe. Ainsi, en passant à la limite lorsque $x \rightarrow x_0$, on obtient que $f'(x_0) \geq 0$ et ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$, on en déduit que $f' \geq 0$ sur I .
- Supposons que $f' \geq 0$ sur I . Soit $x < y$ deux éléments de I . Alors, d'après le théorème des accroissements finis 8.60, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ et puisque $f' \geq 0$ et que $y > x$ on en déduit que $f(y) - f(x) \geq 0$ et donc que f est croissante.

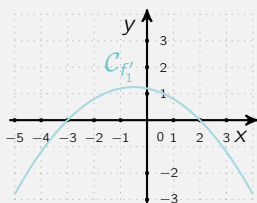
□

Exercice 8.62. Les trois courbes de gauche C_1 , C_2 et C_3 représentent trois fonctions f_1 , f_2 et f_3 , dérivables sur $\mathbb{R}$. Les trois courbes de droite A , B et C représentent les trois fonctions dérivées f'_1 , f'_2 et f'_3 . Associer la courbe représentative de chaque fonction f_1 , f_2 et f_3 à la courbe représentative de sa dérivée.

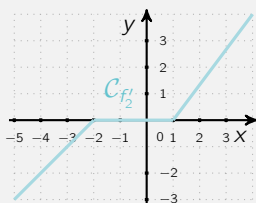


Exercice 8.63. Dans chacun des cas ci-dessous, on considère une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-5, 4]$ et on représente la courbe de sa fonction dérivée. Déterminer les variations de chacune des fonctions f_1 , f_2 et f_3 sur l'intervalle $[-5, 4]$.

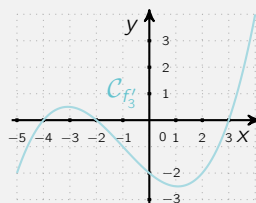
1. Pour f_1 :



2. Pour f_2 :



3. Pour f_3 :



8.4. Schéma d'étude de fonction

Méthode. Afin de réaliser une étude complète d'une fonction et, entre autres, d'en obtenir la courbe représentative, on suit les étapes suivantes.

1. *Domaine de définition.* On détermine $\mathcal{D}_f$.
2. *Domaine d'étude.* On regarde si f possède des symétries.
 - Si f est périodique, on l'étudie sur une période.
 - Si f est paire ou impaire, on l'étudie au plus sur la partie positive de son domaine de définition.
3. *Variations.* On détermine le domaine de dérivation de f , on calcule sa dérivée, on détermine le signe de sa dérivée et on en déduit les variations de f ainsi que ses tangentes horizontales si elle en a.
4. *Limites et asymptotes.* On calcule les limites de f au bord du domaine de définition et on en déduit la présence d'asymptotes ou non.
5. *Tracé du graphe.*

8.4.1 Un premier exemple : une fonction polynomiale

Considérons la fonction

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}(x^3 + 3x^2 - 9x + 1) \end{aligned}$$

1. *Domaine de définition.* f est une fonction polynomiale donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. *Domaine d'étude.* f n'est a priori ni paire/impaire, ni périodique donc on l'étudie sur $\mathbb{R}$.
3. *Variations.* f est une fonction polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x , on a

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 6x - 9).$$

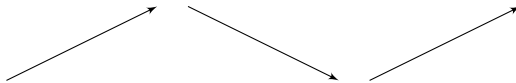
On peut alors étudier le signe de la dérivée : on commence par chercher pour quels réels la dérivée s'annule. Pour tout réel x , on a les équivalences suivantes

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(3x^2 - 6x - 9) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - 2x - 3$ est égal à $\Delta = 16$ donc ce trinôme admet les deux racines réelles suivantes $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$. On peut donc construire le tableau de signe de la dérivée :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

4. On en déduit alors le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

5. *Limites et asymptotes.* On finit de remplir le tableau en calculant les images des abscisses particulières et les limites de la fonction. Ainsi, pour la fonction f , on a donc

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	-2	$+\infty$	

6. *Tracé du graphe.* Grâce à ce tableau de variations ainsi rempli, on peut tracer l'allure

de la courbe représentative de la fonction f , avec ses tangentes horizontales :

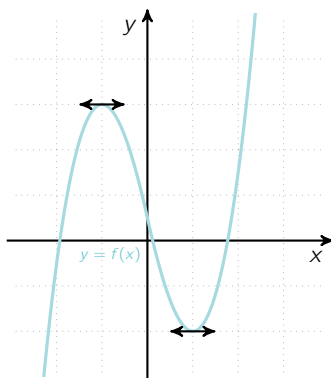


Figure 8.15 – $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x^3 + 3x^2 - 9x + 1)$

Exercice 8.64. On veut étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 - 6x + 5$.

1. Donner son ensemble de définition et en dresser son tableau de variations.
2. Montrer que f admet un minimum global en un point que l'on précisera. Quelle est la tangente à la courbe en ce point ?
3. Tracer la courbe représentative de f .

Exercice 8.65. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 1$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Déterminer trois réels a , b et c tels que $f'(x) = (2x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
3. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de f en son point d'abscisse 2.
5. Démontrer que, pour tout réel x , on a

$$f(x) - (-3x + 5) = \frac{1}{2}(x - 2)^2(x^2 - 2x - 2).$$

6. En déduire la position relative de la courbe de f et de sa tangente en son point d'abscisse 2.
7. Tracer la courbe représentative de la fonction f .

8.4.2 Un second exemple : une fraction rationnelle

Étudions la fonction f donnée par

$$f : x \mapsto \frac{x-3}{x-2}.$$

1. *Domaine de définition.* On commence par noter que $x-2=0$ si et seulement si $x=2$. donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
2. *Domaine d'étude.* La fonction f ne possède pas de propriété de périodicité, ni de parité. On l'étude donc sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
3. *Variations.* La fonction f étant le quotient d'une fonction dérivable par une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f'(x) = \frac{x-2-(x-3)}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$. On en déduit que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
4. *Limites et asymptotes.* On a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{x-2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x-2} = 1.$$

La fonction f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y=1$ en $\pm\infty$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x-2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x-2} = -\infty$$

donc f admet une asymptote verticale d'équation $x=2$.

5. *Tracé du graphe.* On obtient la courbe représentative qui suit.

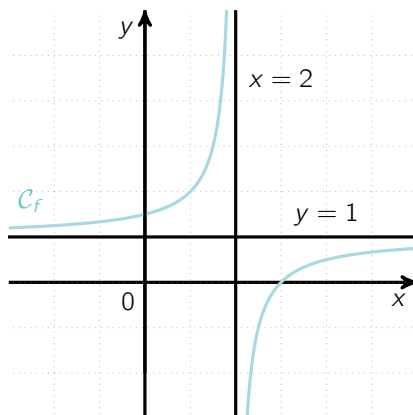


Figure 8.16 – $f : x \mapsto \frac{x-3}{x-2}$

Exercice 8.66. Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{3x-2}{x-1},$

2. $f : x \mapsto \frac{x+1}{x-1}.$

Étudions à présent la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}.$$

1. *Domaine de définition.* On commence par noter que $x^2 + 1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. *Domaine d'étude.* La fonction f ne possède pas de propriété de périodicité ni de parité. On l'étude donc sur $\mathbb{R}$.
3. *Variations.* La fonction f étant le quotient d'une fonction dérivable par une fonction dérivable qui ne s'annule pas, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+1) - 2x(x^2+x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}.$$

On en déduit que $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [-1, 1]$ et donc que f est croissante sur $[-1, 1]$ et décroissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$.

4. *Limites et asymptotes.* On a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = 1.$$

Donc f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $\pm\infty$.

5. *Tracé du graphe.* On obtient la courbe représentative suivante :

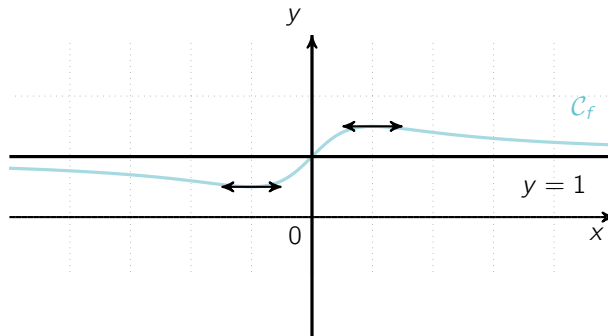


Figure 8.17 – $f : x \mapsto \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$

Exercice 8.67. Procéder à l'étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 5}{x^2 - 2x + 2}.$$

8.4.3 Une étude des fonctions trigonométriques usuelles

Étude des fonctions cos et sin

Étudions la fonction cos.

1. *Domaine de définition.* La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$.
2. *Domaine d'étude.* Par définition, la fonction cos est 2π -périodique. De plus, d'après la proposition 7.53, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$ donc la fonction cos est paire. On restreint donc le domaine d'étude à l'intervalle $[0, \pi]$.
3. *Variations.* Pour tout $x \in [0, \pi]$, on a $\cos'(x) = -\sin(x)$, donc pour tout $x \in [0, \pi]$, $\cos'(x) \leq 0$ et la fonction cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.
4. *Limites et asymptotes.* On a $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$.
5. *Tracer le graphe.* On trace le graphe de cos sur $[0, \pi]$, que l'on étend par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées sur $[-\pi, 0]$ puis que l'on prolonge à tout $\mathbb{R}$ en utilisant la 2π -périodicité. On retrouve la courbe à la figure 8.18.

Étudions la fonction sin : comme, d'après la proposition 7.50, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$, la courbe représentative de sin est la translatée de la courbe représentative de cos par le vecteur $(\frac{\pi}{2}, 0)$. On retrouve la courbe représentative de sin à la figure 8.18.

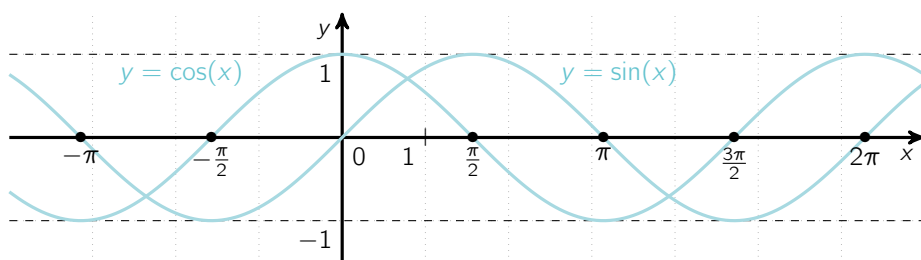


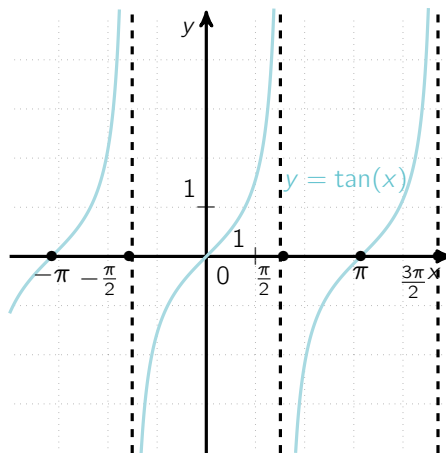
Figure 8.18 – Représentation graphique des fonctions cos et sin

Étude de la fonction tangente

Étudions la fonction tan.

1. *Domaine de définition.* La fonction tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. *Domaine d'étude.* Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, alors $x + \pi \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et, par la proposition 7.53, $\tan(\pi + x) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$ donc la fonction $\tan$ est π -périodique. De plus, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan(-x) = -\tan(x)$ donc la fonction $\tan$ est impaire. On peut donc réduire le domaine d'étude à $[0, \frac{\pi}{2}[$.
3. *Variations.* Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$, donc la fonction $\tan$ est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
4. *Limites et asymptotes.* On a $\tan(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ donc la droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de $\tan$. On a également $\tan(0) = 0$ et $\tan'(0) = 1$ donc la droite $y = x$ est la tangente à la courbe au point $(0, 0)$.
5. *Tracer le graphe.* On trace le graphe de $\tan$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, que l'on étend par symétrie centrale à $] -\frac{\pi}{2}, 0]$ puis que l'on prolonge à tout $\mathbb{R}$ en utilisant la π -périodicité. On retrouve la courbe à la figure 8.19.

Figure 8.19 – Représentation graphique de la fonction $\tan$

8.4.4 Un dernier exemple

Étudions la fonction

$$f : x \mapsto \cos(x)(1 - \cos(x)).$$

1. *Domaine de définition.* On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. *Domaine d'étude.* On remarque que f est 2π -périodique et paire. Il suffit donc d'étudier f sur $[0, \pi]$ (on pourrait exclure π).
3. *Variations.* La fonction f est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout $x \in [0, \pi]$, on a

$$f'(x) = -\sin(x)(1 - \cos(x)) + \cos(x)\sin(x) = \sin(x)(2\cos(x) - 1).$$

Ainsi, sur $[0, \pi]$,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi\right\}.$$

La fonction f possède donc une tangente horizontale en $x = 0$ avec $f(0) = 0$, en $x = \frac{\pi}{3}$ avec $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$ et en $x = \pi$ avec $f(\pi) = -2$. De plus, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{3}[$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur cet intervalle. Pour tout $x \in]\frac{\pi}{3}, \pi[$, on a $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur cet intervalle.

4. *Limites et asymptotes.* On a $f(0) = 0$ et $f(\pi) = -2$.
5. *Tracer le graphe.* On obtient la courbe représentative suivante où l'on trace d'abord la partie bleue que nous venons d'étudier. Le reste de la courbe est obtenu par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (parité) et par translation (2π -périodicité).

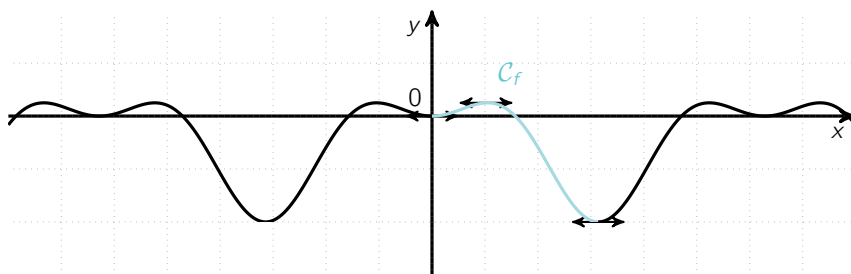


Figure 8.20 – $f : x \mapsto \cos(x)(1 - \cos(x))$

CHAPITRE 9

Fonctions de références

Nous allons, dans ce chapitre, procéder à l'étude de quelques fonctions qui, pour diverses raisons, sont particulièrement importantes. Nous commencerons ainsi par définir la fonction partie entière qui nous permettra, entre autres, d'étudier le lien entre les nombres réels et les nombres rationnels. Dans un second temps, nous introduirons deux fonctions fondamentales en mathématiques et en sciences en général : l'exponentielle et le logarithme népérien. Enfin, nous achèverons ce chapitre par une brève étude des fonctions puissances et exponentielles de base a . Ces fonctions viennent ainsi s'ajouter à celles que nous avons croisées précédemment telles que les fonctions polynômiales (constantes, affines, du second degré ou encore la fonction cube), la fonction racine carrée, la fonction inverse ainsi que la fonction valeur absolue. Il est indispensable pour pouvoir pleinement profiter des chapitres à venir de maîtriser parfaitement toutes ces fonctions i.e. de connaître leurs domaines de définitions, leurs fonctions dérivées, leurs variations, leurs limites et d'être capable de tracer une allure de leurs courbes représentatives.

9.1. La fonction partie entière

L'ensemble des nombres réels possède de nombreuses propriétés plus ou moins élémentaires. Nous allons ici nous servir de l'une d'entre elles afin de définir la fonction partie entière qui nous permet de faire un lien entre l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ et les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$.

Propriété 9.1. *L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est **archimédien**, c'est-à-dire que pour tout réel x , il existe un entier n tel que $n > x$.*

Cette propriété de l'ensemble des réels va nous permettre de définir la fonction partie entière.

Propriété 9.2 – Définition de la partie entière. Pour tout réel x , il existe un unique entier noté $\lfloor x \rfloor$ et appelé **partie entière de x** , tel que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Sa représentation graphique est à la figure 9.1.

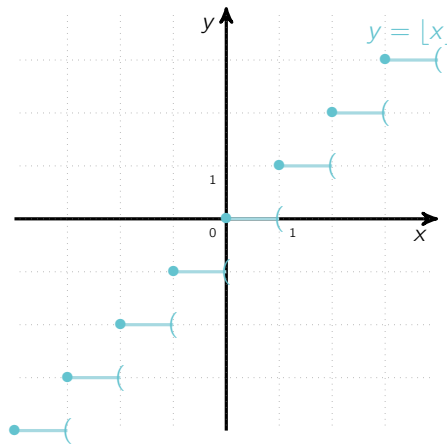


Figure 9.1 – Fonction partie entière

Démonstration. On procède en deux temps : on prouve d'abord l'existence, puis l'unicité.

- *Existence.* Supposons sans perte de généralité que x est un réel positif. D'après la propriété 9.1, il existe un entier $n > 0$ tel que $n > x$. On déduit de ceci que le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ défini par $A = \{k \in \mathbb{N}, k \leq x\}$ est fini et qu'il admet donc un plus grand élément. Notons le K_m et notons que $K_m \in A$ et $K_m + 1 \notin A$ puisque $K_m + 1 > K_m$. On en déduit que $K_m \leq x < K_m + 1$.
- *Unicité.* Soit K_1 et K_2 deux entiers tels que $K_1 \leq x < K_1 + 1$ et $K_2 \leq x < K_2 + 1$. Alors, $K_1 \leq x < K_2 + 1$ donc $K_1 \leq K_2$ et de même $K_2 \leq x < K_1 + 1$ donc $K_2 \leq K_1$. On en déduit donc que $K_1 = K_2$.

□

Exemple. La partie entière de x est le plus grand entier inférieur ou égal à x . Ainsi, $\lfloor 2,982 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -5,761 \rfloor = -6$.

Exercice 9.3. Tracer la courbe représentative de la fonction $y = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ sur l'intervalle $[0, 25]$.

Exercice 9.4. On considère la fonction $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$. En déduire que f est 1-périodique.
2. Tracer la partie de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f pour $-2 \leq x < 3$.

Exercice 9.5. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 9.6 – Densité des décimaux dans $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel a , on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\lfloor 10^n a \rfloor}{10^n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq a - u_n < \frac{1}{10^n}$.
2. En déduire que u converge vers a .
3. En déduire une suite de rationnels (et même de décimaux) qui approche le nombre π . Déterminer ses trois premiers termes. *On note que l'on obtient cette suite en ajoutant une à une les décimales de π .*

Cela prouve de façon constructive que $\mathbb{Q}$ est « dense » dans $\mathbb{R}$ (voir [Tao22]).

9.2. La fonction exponentielle

Nous allons, dans cette section, introduire une nouvelle fonction, la fonction **exponentielle**, particulièrement importante car elle possède d'innombrables applications dans des domaines très variés. Vous avez, par exemple, probablement entendu parler de cette fonction lors de l'épidémie de Covid-19 lors de laquelle elle a été utilisée pour décrire la croissance du nombre de personnes contaminées.

Intéressons-nous à présent à l'origine mathématique de son introduction. Nous avons abordé, dans la section 8.3, la notion de dérivation et de fonction dérivée d'une fonction. On peut alors se poser la question qui suit.

Existe-t-il une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$?

Ce type d'équation où l'inconnue est une fonction et qui fait intervenir sa dérivée est appelé **équation différentielle**. On peut rapidement constater que cette équation, si elle admet une solution g différente de la fonction nulle, en admet alors une infinité. En effet, supposons qu'il existe une fonction g telle que $g' = g$ et qui n'est pas nulle. Alors, pour tout réel non nul a , la fonction $x \mapsto ag(x)$ est également solution de cette équation. Raffinons alors un peu la question : existe-t-il une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1 ?$$

C'est à cette question que nous allons répondre dans la suite de ce chapitre.

9.2.1 Introduction et définition

Lemme 9.7. Une fonction f , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que, pour tout réel x ,

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1,$$

satisfait pour tout réel x , la relation suivante

$$f(x)f(-x) = 1.$$

En particulier, pour tout réel x , $f(x) \neq 0$.

Remarque. On énonce ici un résultat sur une fonction f satisfaisant une certaine propriété, mais pour le moment on **ne sait pas** si une telle fonction existe.

Démonstration. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x , $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$, par

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)f(-x) \end{aligned}$$

Comme h est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) \\ &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \quad \text{par définition de } f \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme la dérivée de h est la fonction nulle, alors h est une fonction constante (on pourra le montrer en utilisant le théorème des accroissements finis 8.60). Or $h(0) = f(0)f(0) = 1$, ainsi, pour tout réel x , $h(x) = f(x)f(-x) = 1$. Supposons par l'absurde qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$. Alors $h(x_0) = f(x_0)f(-x_0) = 0$ ce qui n'est pas possible. Donc, pour tout réel x , $f(x) \neq 0$. $\square$

Théorème 9.8. Il existe une unique fonction f , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = f(x) \text{ et } f(0) = 1.$$

Démonstration. Il y a deux points à démontrer dans ce théorème. D'un côté l'existence d'une telle fonction, et de l'autre l'unicité.

- *Existence d'une solution.* On admet l'existence d'une solution car il faudrait utiliser la notion de série entière qui dépasse le niveau attendu ici. Si vous êtes intéressé par cette question vous pouvez consulter [Rud98, Prologue].

- *Unicité de la solution.* On va démontrer l'unicité de la solution à ce problème. On considère deux fonctions f et g qui sont solutions à notre problème, c'est-à-dire que pour tout réel x , $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$ ainsi que $g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$. En particulier, d'après le lemme 9.7, pour tout réel x , $g(x) \neq 0$. On définit alors sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Comme g ne s'annule jamais et que la fonction h est le quotient de deux fonctions dérivables, la fonction h est dérivable et, pour tout réel x , on a

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{(g(x))^2} = 0$$

donc h' est la fonction nulle. Ainsi, la fonction h est une fonction constante. Or, $f(0) = 1 = g(0)$ donc $h(0) = 1$ et ainsi, pour tout réel x , $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On a donc finalement bien montré que pour tout réel x , $f(x) = g(x)$.

□

Définition 9.9 – Fonction exponentielle. On appelle **fonction exponentielle** et on note $\exp$, l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui, pour tout réel x , satisfait

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1.$$

On note e , le nombre réel dit d'Euler, donné par $e = \exp(1)$.

9.2.2 Propriétés de l'exponentielle

Proposition 9.10. *Pour tous réels x et y et pour tout entier relatif n , on a les relations suivantes :*

- $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y),$
- $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)},$
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)},$
- $\exp(nx) = (\exp(x))^n.$

Démonstration.

- Fixons un réel y . On note que $\exp(y) \neq 0$ et on considère la fonction

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} \end{aligned}$$

qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction exponentielle est dérivable. Pour

tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = \frac{\exp'(x+y)}{\exp(y)} = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = h(x)$$

et de plus, $h(0) = \frac{\exp(0+y)}{\exp(y)} = 1$. Ainsi h est la fonction exponentielle, donc pour tout réel x , $\exp(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$ et, pour tous réels x et y , on a $\exp(x) \exp(y) = \exp(x+y)$.

- Pour tout réel x , on a $\exp(x) \exp(-x) = 1$, d'où le résultat.
- Si x et y sont deux réels, $\exp(x-y) = \exp(x) \exp(-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$ d'après les deux points précédents.
- Soit x un réel. Montrons que, pour tout entier relatif n , on a $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.
On procède par récurrence pour montrer le résultat pour $n \in \mathbb{N}$.
 - ▷ *Annonce.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on nomme $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $\exp(nx) = (\exp(x))^n$ ».
 - ▷ *Initialisation.* Pour $n = 0$, on a $\exp(0) = 1 = \exp(x)^0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 - ▷ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que $\exp(nx) = (\exp(x))^n$. Démontrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a $\exp((n+1)x) = \exp(nx + x)$ et donc

$$\exp((n+1)x) = \exp(nx) \exp(x) = (\exp(x))^n \exp(x) = (\exp(x))^{n+1}.$$

Ainsi, si la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- ▷ *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$. De plus, si $n \in \mathbb{Z}$ est un entier négatif, on utilise le deuxième point pour conclure.

□

Corollaire 9.11. *La fonction exponentielle est strictement positive, i.e. pour tout réel x , on a $\exp(x) > 0$.*

Démonstration. Soit x un réel. On a $\exp(x) = \exp(2 \frac{x}{2}) = (\exp(\frac{x}{2}))^2$ d'après la proposition 9.10. Comme un carré est toujours positif, $\exp(x) \geq 0$ et puisqu'on a pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$, l'inégalité est stricte, d'où le résultat. □

Remarque. On remarque que la fonction exponentielle possède les mêmes règles de calcul que les puissances entières. Ainsi, on adoptera la notation suivante : pour tout réel x , $e^x = \exp(x)$. On peut ainsi réécrire les différentes propriétés que nous avons démontré précédemment. Pour tous réels x et y et pour tout entier n , on a

- | | | | |
|---------------|----------------------|------------------------------|---------------------------------|
| ○ $e^0 = 1$, | ○ $e^x e^{-x} = 1$, | ○ $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, | ○ $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$, |
| ○ $e^1 = e$, | ○ $e^x > 0$, | ○ $e^{x+y} = e^x e^y$, | ○ $e^{nx} = (e^x)^n$. |

Exercice 9.12. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1. $e^{2x} - 5e^x + 4 = (e^x - 1)(e^x - 4)$,
2. $e^{2x} - 1 = (e^x - 1)(e^x + 1)$,
3. $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$,
4. $e^x - e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 1)$,
5. $\frac{e^{(x+1)^2}}{e^{(x-1)^2}} = e^{4x}$,
6. $3e^{-2x} - 2e^{-3x} = \frac{3e^x - 2}{e^{3x}}$.

9.2.3 Étude de la fonction exponentielle

Théorème 9.13. La dérivée de la fonction exponentielle est elle-même. La fonction exponentielle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x , $\exp'(x) = \exp(x) > 0$. $\square$

Corollaire 9.14. Si I est un intervalle et $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I , alors la fonction $\exp \circ u : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$(\exp(u(x)))' = u'(x) \exp(u(x)).$$

Démonstration. Découle de la formule de dérivation d'une fonction composée (voir le théorème 8.51). $\square$

Exercice 9.15. Déterminer la fonction dérivée des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x) = xe^x + 3x - 1$,
2. $f(x) = (x^2 - 3x)e^{-x}$,
3. $f(x) = e^{-x^2}$,
4. $f(x) = x^2 e^{\cos(x)}$,
5. $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$,
6. $f(x) = \frac{e^{2x+1}}{e^{2x} + 1}$.

Corollaire 9.16. Soient x et y deux nombres réels.

- $e^x = e^y$ si et seulement si $x = y$.
- $e^x < e^y$ si et seulement si $x < y$.

Démonstration. Le premier point résulte du théorème 9.13 et du théorème de la bijection 8.36 et le second de la stricte croissance de la fonction exponentielle. $\square$

Exercice 9.17. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{-2x} = 0$,
2. $e^{x+1} = 1$,
3. $e^{-3x} = e^{x+1}$,
4. $e^{x^2} = e^{x+1}$,
5. $e^{x^2} = e^{-x-1}$,
6. $(e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0$.

Exercice 9.18. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{2x} \leq 1$,

3. $e^x \leq e^{-x}$,

5. $(e^x + 1)(e^{-3x} - 1) > 0$,

2. $e^x > e$,

4. $e^{-x^2} \leq e^x$,

6. $(e^x)^2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^2$.

Proposition 9.19 – Une inégalité utile. Pour tout réel x , on a $e^x \geq x + 1$.

Démonstration. On considère la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = e^x - x - 1$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = e^x - 1$. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, alors pour tout réel $x \geq 0$, on a $e^x \geq 1$ et pour tout $x \leq 0$, $e^x \leq 1$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

donc pour tout réel x , $f(x) \geq 0$, d'où le résultat voulu. $\square$

Proposition 9.20. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Démonstration.

- Pour tout réel $x \geq 0$, $e^x \geq x + 1$. Ainsi, d'après le théorème de plancher montant 8.24, puisque $x + 1$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, on en déduit la première limite.
- On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ d'après le premier point.

$\square$

Proposition 9.21 – Croissances comparées. Pour tout entier n , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

Démonstration.

- On commence par démontrer que $\frac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. On considère la fonction h définie, pour tout réel x , par $h(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une somme de fonctions dérivables, et pour tout réel x ,

$h'(x) = e^x - x$. Or, on a pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$ donc $e^x > x$ et donc, pour tout réel x , $h'(x) > 0$. Ainsi, la fonction h est strictement croissante. De plus, $h(0) = 0$ donc pour tout réel $x > 0$, on a $e^x > \frac{x^2}{2}$ ce qui équivaut $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$. Ainsi, puisque $\frac{x}{2} \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, on conclut à l'aide du théorème de plancher montant 8.24 que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

On considère à présent un entier naturel $n > 1$ et on cherche la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \frac{e^x}{x^n}$. D'après le début de la preuve, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$$

ce qui implique

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{x} = +\infty,$$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x} \right)^n = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

- On change x en $-x$ et on utilise le point précédent.

□

À retenir. On pourra retenir que « l'exponentielle l'emporte à l'infini sur toutes les puissances de x ».

Exercice 9.22. Étudier la limite de la fonction f en $\pm\infty$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = e^{-x}$,
2. $g(x) = e^x + e^{-x}$,
3. $h(x) = x(1 + e^{-x})$.

Exercice 9.23. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Montrer que pour tout nombre réel x , $f(x) = \frac{-2}{1+e^{-x}}$.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. Montrer que, dans un repère, la courbe représentative de f est toujours située en dessous de l'axe des abscisses et au-dessus de la droite d'équation $y = -2$.

Proposition 9.24 – Une dernière limite. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Démonstration. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0. Par définition du nombre dérivé, on a

$$\exp'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(0+h) - \exp(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Or, on a $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ et on obtient donc le résultat voulu. $\square$

On résume les variations de la fonction exponentielle dans le tableau qui suit.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		+	1	+
$\exp(x)$	0	1	e	$+\infty$

Figure 9.2 – Tableau de variations de l'exponentielle

On est alors en mesure de tracer la courbe représentative de la fonction exponentielle comme suit.

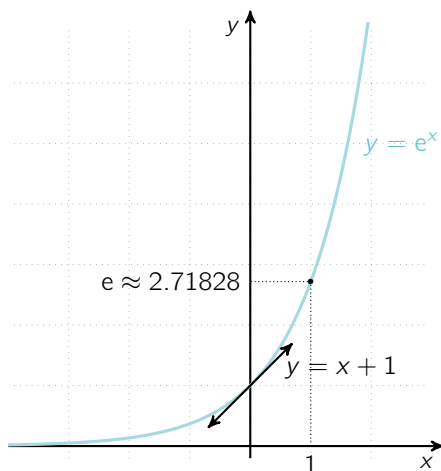


Figure 9.3 – Représentation graphique de l'exponentielle

On a ici fait apparaître la tangente à la courbe de l'exponentielle en 0, qui a pour équation $y = x + 1$ et on retrouve graphiquement l'inégalité $e^x \geq x + 1$.

Exercice 9.25. Tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto e^{|x|}$.

Exercice 9.26. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ dont on précisera une équation.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ dont on précisera une équation.
3. Démontrer que pour tout nombre réel x , $f(-x) = -f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f et pour sa courbe représentative ?
4. Calculer la dérivée de f . Étudier son signe et dresser le tableau de variations de f .

9.3. La fonction logarithme

Nous venons de montrer que la fonction exponentielle est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et elle tend vers 0 en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection 8.36, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, **il existe un unique** réel y tel que

$$\exp(y) = x.$$

On note alors $\ln(x)$ l'unique solution de l'équation $\exp(y) = x$ d'inconnue y et on nomme ce nombre **logarithme népérien** de x .

Définition 9.27 – Fonction logarithme népérien. On note $\ln$ et on nomme **fonction logarithme népérien** la fonction qui à un nombre réel strictement positif x associe le nombre $\ln(x)$:

$$\begin{array}{ccc} \ln :]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}.$$

9.3.1 Propriétés de la fonction logarithme

Proposition 9.28. La fonction logarithme satisfait les relations suivantes.

- Pour tout nombre réel strictement positif x , $\exp(\ln(x)) = x$.
- Pour tout nombre réel y , $\ln(\exp(y)) = y$ et en particulier $\ln(1) = 0$.

Démonstration.

- Il s'agit de la définition de la fonction logarithme népérien.
- Soit y un nombre réel. Le nombre $\ln(\exp(y))$ est, par définition, l'unique solution de l'équation $\exp(x) = \exp(y)$ d'inconnue x . Or, cette équation a pour solution

évidente y (car $\exp(y) = \exp(y)$), donc finalement, on a $\ln(\exp(y)) = y$. De plus, pour $y = 0$ on en déduit que $\ln(\exp(0)) = 0$ et donc $\ln(1) = 0$ puisque $\exp(0) = 1$.

□

Exercice 9.29. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $e^x = 3$,

3. $e^{-4x+7} = 10$,

5. $\ln(x) = 1$,

2. $e^{3x-4} = 2$,

4. $\ln(x) = 3$,

6. $\ln(x) = -3$.

Proposition 9.30. Pour tous réels strictement positifs x et y et pour tout nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a les relations suivantes :

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,
- $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$,
- $\ln(x^n) = n\ln(x)$ et $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$,
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

Démonstration. Soient x et y , deux réels strictement positifs.

- On a $e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)}e^{\ln(y)} = xy$. Or, par définition, le nombre $\ln(xy)$ est l'unique nombre réel qui satisfait l'équation $\exp(t) = xy$ d'inconnue t . On a donc l'égalité $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors, pour tout réel positif x ,

$$\ln(x^n) = \ln(\underbrace{x \cdots x}_{n \text{ termes}}) = \underbrace{\ln(x) + \ln(x) + \cdots + \ln(x)}_{n \text{ termes}} = n\ln(x).$$

De plus, pour tout réel strictement positif x , on a

$$\ln(x) = \ln(\sqrt{x}\sqrt{x}) = \ln(\sqrt{x}) + \ln(\sqrt{x}) = 2\ln(\sqrt{x})$$

$$\text{donc } \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x).$$

- On a vu que $\ln(1) = 0$. Ainsi, on a, pour tout réel $x > 0$,

$$0 = \ln(1) = \ln\left(x \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

d'où le résultat.

- On a $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right)$ donc le résultat découle de la relation précédente.

□

Exercice 9.31. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln(2)$ et/ou $\ln(5)$:

- | | | |
|-------------------------------------|---|--|
| 1. $\ln(100)$, | 3. $\ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, | 5. $\ln\left(\sqrt{\frac{e}{5}}\right)$, |
| 2. $\ln\left(\frac{4}{25}\right)$, | 4. $\ln(10e^2)$, | 6. $\ln\left(\frac{20}{\sqrt{e}}\right)$. |

Exercice 9.32. Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln(a)$ où a est un réel strictement positif :

1. $3 + \ln(2)$, 2. $-\ln(3) - \ln(7)$, 3. $\ln(45) - \ln(9)$, 4. $2 + 2\ln(5)$.

Proposition 9.33 – Résolution d'équations d'inéquation. Pour tous réels x et y strictement positifs,

- $\ln(x) = \ln(y)$ si et seulement si $x = y$, ◦ $\ln(x) < \ln(y)$ si et seulement si $x < y$.

Démonstration. Soient x et y deux réels strictement positifs. D'après le corollaire 9.16, $\ln(x) = \ln(y)$ si et seulement si $e^{\ln(x)} = e^{\ln(y)}$ et, par définition du logarithme népérien, on sait que $e^{\ln(x)} = x$ et $e^{\ln(y)} = y$, donc $\ln(x) = \ln(y)$ si et seulement si $x = y$. On raisonne de même pour le second point. $\square$

Corollaire 9.34. La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration. Par définition de la stricte croissance et grâce au second point de la proposition 9.33 précédente. $\square$

Exercice 9.35. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- | | |
|----------------------|--------------------------------|
| 1. $\ln(x) = 3$, | 4. $\ln(x+1) + \ln(x) = 0$, |
| 2. $\ln(2x-5) = 1$, | 5. $\ln(5x-6) - 2\ln(x) = 0$, |
| 3. $4\ln(1-x) = 8$, | 6. $\ln(e^x + 1) = \ln(2)$. |

Exercice 9.36. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1. $1 - 3\ln(x) < 0$, | 6. $\ln(1+x) \leq 0$, |
| 2. $\ln(x) + \ln(2) \geq \ln(3x-6)$, | 7. $\ln(x-2) > \ln(x)$, |
| 3. $e^x - 2 > 0$, | 8. $2\ln(3-x) \leq 1$, |
| 4. $5 - 3e^{-x} \leq 3$, | 9. $\ln\left(\frac{x^2}{x+5}\right) \geq 0$. |
| 5. $4\ln(x) + 6 \geq 0$, | |

9.3.2 Étude de la fonction $\ln$

Proposition 9.37. La fonction logarithme népérien $\ln$ est définie, continue et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$. De plus, pour tout réel strictement positif x , on a

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration. Par définition de la fonction logarithme, pour tout réel strictement positif x , $e^{\ln(x)} = x$. Ainsi, la dérivée de la fonction de gauche est égale à la dérivée de la fonction de droite. Or, la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{\ln(x)}$ est donnée par $(\ln)'(x)e^{\ln(x)} = x(\ln)'(x)$. Ainsi, puisque la dérivée de $x \mapsto x$ est la fonction constante égale à 1, on obtient le résultat voulu. $\square$

Exercice 9.38. Calculer les dérivées des fonctions suivantes, définies sur $]0, +\infty[$, par :

- | | | |
|------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $x \mapsto x + 2\ln(x)$, | 4. $x \mapsto e^{x \ln(x)}$, | 7. $x \mapsto \frac{x}{\ln(x)}$, |
| 2. $x \mapsto 3 + x\ln(x)$, | 5. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$, | 8. $x \mapsto \ln(x)^2$, |
| 3. $x \mapsto (x-1)\ln(x)$, | 6. $x \mapsto x\ln(x)$, | 9. $x \mapsto \ln(x^2)$. |

Exercice 9.39. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2} - 2x^2$.

Corollaire 9.40. Si I est un intervalle et $u : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction dérivable sur I alors la fonction $\ln \circ u : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Démonstration. Découle de la formule de dérivation d'une composée de fonctions (voir théorème 8.51). $\square$

Exercice 9.41. Donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \ln(3x + 2)$.

Proposition 9.42 – Les limites du logarithme népérien. On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Démonstration.

- Montrons que $\ln(x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Soit M , un nombre réel. Pour $0 < x < e^M$, on a $\ln(x) < \ln(e^M)$ donc $\ln(x) < M$ car la fonction $\ln$ est strictement croissante. On a donc montré que pour tout nombre négatif M , il existe $\eta = e^M$ tel que pour tout réel $0 < x < \eta$, $\ln(x) < M$ ce qui donne bien la limite voulue.
- Montrons que $\ln(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Soit A un nombre réel. Pour $x > e^M$, on a $\ln(x) > \ln(e^M)$ car la fonction $\ln$ est strictement croissante et donc $\ln(x) > M$. Ainsi, pour tout réel M , il existe un réel $x_M = e^M$ tel que pour tout $x > x_M$, $\ln(x) > M$, et donc $\ln$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

□

Exercice 9.43. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 2),$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 3),$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2}{2x+3}\right),$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 - x^3).$

Afin de lever certaines formes indéterminées, comme pour la fonction exponentielle à l'aide de la proposition 9.21, nous pourrions avoir besoin des limites suivantes.

Proposition 9.44 – Croissances comparées. Pour tout entier n , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0.$$

Démonstration. Traitons le cas $n = 1$.

- Pour tout réel strictement positif, on a $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{e^{\ln(x)}}$. Or, $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$ donc $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$ et on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^{\ln(x)}} = 0$.
- Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$. Soit x un réel strictement positif, on pose $y = \frac{1}{x}$. On a alors $x \ln(x) = \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{-\ln(y)}{y}$ et on en déduit, d'après ce qui précède, que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(y)}{y} = 0$.

□

Exercice 9.45. Procéder à l'étude complète de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

Exercice 9.46. On considère la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. Étudier les variations de f et déterminer le signe de f sur $] -1, +\infty[$.
3. En utilisant le signe de f , justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.
4. En déduire que pour tout entier naturel n , non nul $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$.

Proposition 9.47 – Une dernière limite. On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Démonstration. La fonction $\ln$ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, donc en particulier, la fonction $\ln$ est dérivable en 1. Or, $\frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} \rightarrow \ln'(1)$ lorsque $h \rightarrow 0$. On obtient alors le résultat grâce au fait que $\ln(1) = 0$ et $\ln'(1) = 1$. $\square$

On obtient finalement le tableau de variations qui suit.

x	0	1	e	$+\infty$
signe de $\ln'$		+		
$\ln(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

Table 9.1 – Tableau de variations du logarithme népérien

Enfin, on est en mesure d'obtenir la représentation graphique de la fonction logarithme.

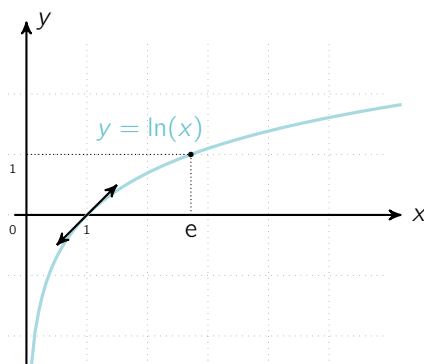


Figure 9.4 – Représentation graphique du logarithme népérien

Remarque. Les représentations graphiques des fonctions exponentielle et logarithme sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$. Ceci est une conséquence de la proposition 5.29 car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$ et pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln(y)} = y$ (on dit que $\exp$ et $\ln$ sont des fonctions réciproques l'une de l'autre).

Exercice 9.48. Tracer la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \ln(x - 1) + 2$.

Exercice 9.49. Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \ln(x) - (x - 1)$.

1. Calculer la dérivée de h et étudier son signe.
2. En déduire que h possède un maximum, que l'on déterminera.
3. Justifier que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $\ln(x) \leq x - 1$.

Exercice 9.50. Procéder à l'étude complète de la fonction

$$f : x \mapsto \ln(|x^3 + 3x^2 + 3x + 2|).$$

9.4. Fonctions puissances et exponentielle de base a

Les fonctions exponentielle et logarithme nous permettent de définir les fonctions puissances pour des puissances non entières et les fonctions exponentielles de base a (le cas de la base $a = e$ est la fonction exponentielle usuelle) qui permettent, étant donné un réel a fixé, de faire varier la puissance. Définissons à présent ces fonctions.

9.4.1 Fonctions puissances

Si la puissance est fixe mais que l'argument varie, on parle de fonctions puissances.

Définition 9.51. Soit $b \in \mathbb{R}$. La fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^b = e^{b \ln(x)}$ s'appelle une **fonction puissance**.

Par composition de fonctions, f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{b}{x} e^{b \ln(x)} = b x^{b-1}.$$

De ceci l'on déduit la monotonie de la fonction puissance $x \mapsto x^b$ selon le signe de b et on obtient alors les courbes suivantes selon les cas.

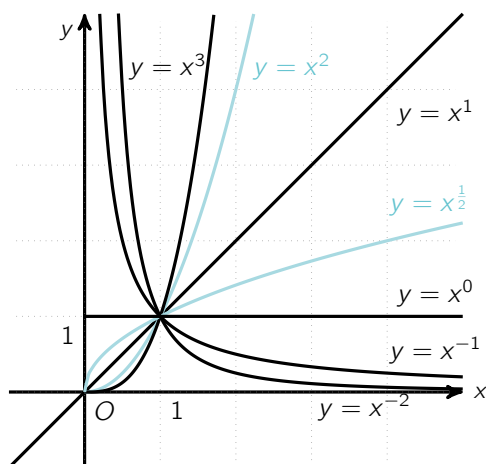


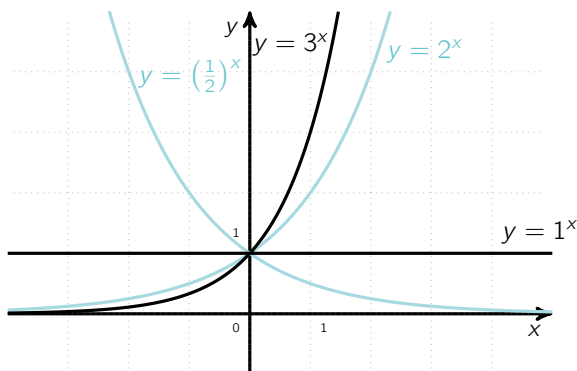
Figure 9.5 – Représentation graphique de fonctions puissances

9.4.2 Exponentielle de base a

Si la puissance varie et que l'argument est fixe, on parle de fonctions exponentielles de base a .

Définition 9.52. Soit a un réel strictement positif. La fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$ s'appelle fonction **exponentielle de base a** .

Par composition, l'application $f: x \mapsto a^x$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'_a(x) = \ln(a)e^{x \ln(a)} = \ln(a)a^x$. De ceci l'on déduit la monotonie de f selon si a est plus grand ou plus petit que 1 et on obtient alors les courbes suivantes selon les cas :

Figure 9.6 – Représentation graphique d'exponentielles de base a

Remarque. L'exponentielle classique vue précédemment correspond à l'exponentielle de base e puisque $\ln(e) = 1$ (on rappelle que $e \approx 2,71$).

Exemple – Application au calcul de limites. Étant donné un réel a , on cherche à déterminer la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x.$$

On commence par remarquer que

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)}.$$

On note que cette expression a du sens même si $a < 0$ à condition de prendre x suffisamment grand pour que $1 + \frac{a}{x} > 0$ ce qui est possible puisqu'on cherche la limite lorsque x tend vers $+\infty$ et que pour tout réel a , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x} = 0$. De plus

$$x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) - \ln(1 + 0)}{\frac{1}{x} - 0} = \frac{\ln(1 + aX) - \ln(1 + 0)}{X - 0}$$

en posant $X = \frac{1}{x}$. Or, X tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On considère alors la fonction

$$f: X \mapsto \ln(1 + aX),$$

dérivable au voisinage de 0, et puisque

$$f'(X) = \frac{a}{1 + aX}$$

on a donc

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{f(X) - f(0)}{X - 0} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + aX) - \ln(1 + 0)}{X - 0} = a.$$

Ainsi par composition avec la fonction exponentielle, qui est continue sur $\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

Exercice 9.53. On considère la fonction $f: x \mapsto x^x = e^{x \ln(x)}$ définie sur $]0, +\infty[$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et donner l'expression de $f'(x)$.
3. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

L'objectif de ce chapitre n'est pas de procéder en détail à la construction de l'intégrale de Riemann mais plutôt d'en donner une intuition, de donner quelques propriétés et surtout de mettre en place les principales méthodes permettant de calculer des intégrales de fonctions usuelles. Si vous ressentez le besoin de vous entraîner davantage dans ce domaine, nous vous conseillons de consulter [Bar23].

10.1. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Le premier objectif de la théorie de l'intégration est, étant donnée une fonction f , de calculer l'aire comprise entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses sur un segment $[a, b]$. Pour cela, l'idée de l'intégrale de Riemann consiste à noter que les aires les plus simples à calculer sont les aires de rectangles. On approche alors l'aire sous la courbe représentative de f par une somme d'aires de rectangles dont la largeur est petite dans un sens à préciser. On note ainsi que plus la largeur des rectangles est petite, plus l'approximation est bonne. Précisons rapidement cette idée à l'aide d'un objet important de la théorie de l'intégration.

Définition 10.1 – Sommes de Riemann. Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la n -ième somme de Riemann de f sur $[a, b]$ par

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}(f(t_0) + f(t_1) + \dots + f(t_{n-1}))$$

avec, pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $t_k = a + \frac{b-a}{n}k$.

Remarques.

- On note que pour $0 \leq k \leq n-1$, $\frac{b-a}{n}f(t_k)$ est l'aire du rectangle de largeur $\frac{b-a}{n}$ et de hauteur $f(t_k)$. Ainsi, $R_n(f)$ est la somme des aires des rectangles obtenus

et, comme l'illustre la figure 10.1, plus la largeur des rectangles diminue, plus la somme de Riemann est une bonne approximation de l'aire sous la courbe.

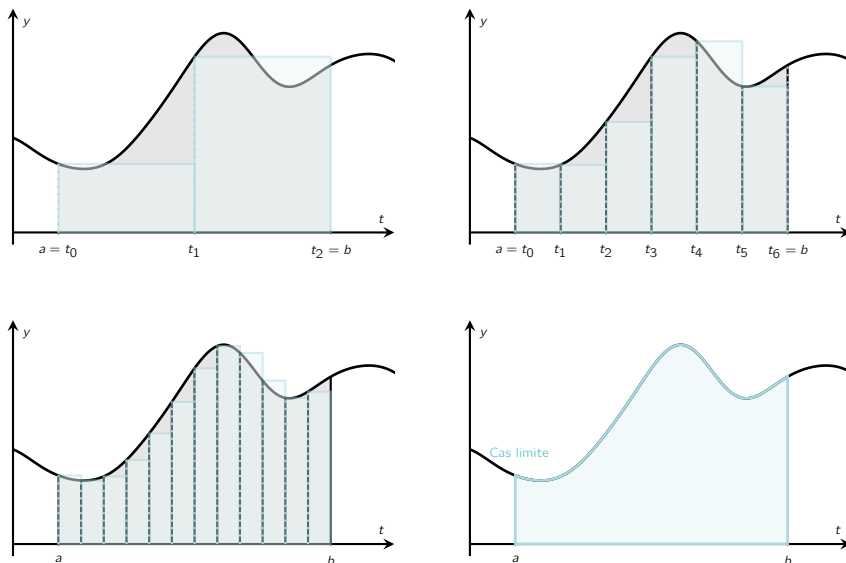


Figure 10.1 – Sommes de Riemann

- On a ici pris comme hauteur des rectangles la valeur de la fonction à gauche de l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ pour $0 \leq k \leq n-1$. On parle ainsi de « méthode des rectangles à gauche ». On pourrait tout à fait utiliser les rectangles à droite, prendre le point du milieu de l'intervalle ou encore approcher l'aire sur la courbe sur $[t_k, t_{k+1}]$ par l'aire d'un trapèze.
- Il s'agit ici de calculer une aire dite « signée » ou encore « algébrique » c'est-à-dire que les parties au-dessus de l'axe des abscisses donnent lieu à des aires positives et celles qui sont en dessous à des aires négatives.
- On note que si f est constante sur $[a, b]$, alors l'aire entre sa courbe représentative et l'axe des abscisses est celle d'un rectangle et la suite des sommes de Riemann est constante égale à l'aire de ce rectangle.

Le théorème qui suit a pour but d'énoncer mathématiquement l'idée selon laquelle la suite des sommes de Riemann, i.e. la suite des sommes des aires des rectangles, est convergente lorsque n tend vers l'infini c'est-à-dire lorsque la largeur des rectangles tend vers 0. Sa limite, comme l'illustre la figure 10.1, représente alors l'aire comprise entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

Théorème 10.2. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, la suite des sommes de Riemann $(R_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. On appelle **intégrale** de f sur $[a, b]$ cette limite que l'on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f) = \int_a^b f(t) dt.$$

Démonstration. On se contente ici de donner l'idée de la preuve dans le cas où f est monotone (croissante). Si vous êtes intéressé par l'étude du cas général nous vous conseillons de consulter [LM03, Chapitre 9] dans lequel une construction détaillée est faite. Supposons donc que f est croissante sur $[a, b]$. Alors, pour tout $0 \leq k \leq n-1$, pour tout $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $f(t_k) \leq f(t)$. On déduit de cette inégalité (un dessin peut vous aider à vous en convaincre) que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(f)$ est majorée par $\mathcal{A}$ l'aire comprise entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(f) \leq R_{n+1}(f)$.

On en déduit que la suite $(R_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée et donc convergente d'après le théorème 6.26. $\square$

De la construction même de l'intégrale de Riemann (que nous n'avons pas explicitée ici mais que vous pourrez trouver dans [LM03, Chapitre 9]), on déduit de nombreuses propriétés importantes de l'intégrale qu'il faut connaître.

Théorème 10.3 – Propriétés de l'intégrale. Soient f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $c \in [a, b]$.

- **Linéarité.** $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$
- **Relation de Chasles.** $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$
- **Manipulations des bornes.** $\int_a^a f(t) dt = 0$ et $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt.$
- **Inégalité triangulaire.** Si $a \leq b$, $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$
- **Positivité.** Si f est une fonction positive sur $[a, b]$ (et si $a \leq b$) alors on a $\int_a^b f(t) dt \geq 0.$
- **Comparaison ou croissance.** Si pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leq g(t)$, alors on a l'inégalité $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$

Démonstration. Nous ne sommes pas en mesure de faire ici la preuve de ce théorème car elle est basée sur la construction même de l'intégrale que nous n'avons pas explicitée. Néanmoins, on peut en donner l'idée principale : on commence par démontrer ces propriétés pour des fonctions constantes par morceaux, dites « étagées », et on les étend ensuite aux fonctions continues. Cette idée est à la base même de la construction de l'intégrale et on trouvera tous les détails nécessaires à ce sujet dans [LM03]. En effet, on commence par définir l'intégrale des fonctions étagées car il s'agit de calculer l'aire de rectangles puis on définit le fait pour une fonction d'être intégrable par le fait que l'on puisse l'encadrer, en un sens à préciser, par des fonctions étagées. $\square$

La question qui nous intéresse maintenant est la suivante :

Comment faire pour calculer des intégrales dans la pratique ?

Utiliser les sommes de Riemann n'est pas une bonne idée car on ne saura presque jamais les calculer explicitement. La réponse à cette question est, au moins partiellement, donnée par le théorème suivant :

Théorème 10.4 – Théorème fondamental de l'analyse. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est dérivable sur $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$.

Démonstration. Montrons que le taux d'accroissement de F possède une limite en tout point $x_0 \in [a, b]$ et que cette limite est égale à $f(x_0)$. Soit $x_0 \in [a, b]$ et soit $h > 0$ (on prend h positif pour éviter des problèmes avec l'ordre des bornes de l'intégrale mais le cas $h < 0$ est identique). On a alors, d'après la relation de Chasles énoncée dans le théorème 10.3, que

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt.$$

Ainsi,

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \frac{1}{h} |F(x_0 + h) - F(x_0) - hf(x_0)|.$$

On en déduit, en utilisant le fait que $f(x_0)$ est constante par rapport à t (et donc que son intégrale sur $[x_0, x_0 + h]$ est donnée par $hf(x_0)$ comme aire d'un rectangle) et l'inégalité triangulaire énoncée dans le théorème 10.3 que

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt.$$

Or, puisque f est continue en x_0 , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [x_0, x_0 + \eta]$, $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Ainsi, si $h \leq \eta$, on en déduit par croissance de l'intégrale (voir théorème 10.3) que

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt = \frac{\varepsilon h}{h} = \varepsilon.$$

Puisque ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien montré, par définition de la limite, que le taux d'accroissement de F en x_0 possède une limite et que cette limite est égale à $f(x_0)$ ce qui achève notre preuve. $\square$

Ce théorème assure l'existence d'une fonction dont la dérivée est égale à f (on parle de **primitive**) si f est une fonction continue sur un segment. Avant de voir en quoi ce théorème nous permet de calculer des intégrales, nous allons nous intéresser plus en détails à la notion de primitive.

10.2. Primitives

10.2.1 Définition et structure

Définition 10.5. Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que F est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Remarque. On note que déterminer une primitive d'une fonction consiste à effectuer l'opération inverse de la dérivation.

Théorème 10.6. Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f admet une primitive F sur I , alors l'ensemble des primitives de f sur I est $\{F + C, \quad C \in \mathbb{R}\}$.

Démonstration. Soit G une primitive de f . Alors, puisque F est également une primitive de f et par linéarité de l'opération de dérivation, on a $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. La preuve de ce théorème consiste donc à montrer que si une fonction dérivable H vérifie $H' = 0$ sur un intervalle alors H est une fonction constante. On utilise pour ceci le théorème des accroissements finis 8.60. Soient $a < b$ deux points de I alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que $H(a) - H(b) = H'(c)(b - a) = 0$. Or, puisque H' est la fonction nulle, on en déduit que $H'(c) = 0$ et donc que $H(a) = H(b)$. Ceci étant vrai pour tout $a < b$ dans I , on en conclut que H est constante sur I . $\square$

Exemples.

- Les primitives de $x \mapsto x^2 + 1$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{x^3}{3} + x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

- Les primitives de $x \mapsto \cos(x)$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \sin(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
- Étudions les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$.
 - ▷ Sur $\mathbb{R}_+^*$, les primitives de f sont de la forme $x \mapsto -\frac{1}{x} + C_+$ avec $C_+ \in \mathbb{R}$.
 - ▷ Sur $\mathbb{R}_-^*$, les primitives de f sont de la forme $x \mapsto -\frac{1}{x} + C_-$ avec $C_- \in \mathbb{R}$.

À retenir. Une primitive n'est pas unique. Pour avoir unicité il faut ajouter une condition comme par exemple la valeur de la primitive en un point. La primitive F introduite dans le théorème 10.4 est ainsi l'**unique** primitive de f qui s'annule au point a .

Exercice 10.7. Préciser dans chaque cas si F est une primitive de f sur son domaine de définition :

- | | |
|--|---|
| 1. $F(x) = x^2$ et $f(x) = \frac{x^3}{3}$, | 4. $F(x) = \tan(x)$ et $f(x) = 1 + \tan(x)^2$, |
| 2. $F(x) = \cos(2x)$ et $f(x) = -\sin(2x)$, | 5. $F(x) = \ln(x)$ et $f(x) = \frac{1}{x}$, |
| 3. $F(x) = e^{2x}$ et $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$, | 6. $F(x) = 2^x$ et $f(x) = \ln(2)2^x$. |

Exercice 10.8. Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur un intervalle inclus dans leur domaine de définition :

- | | | |
|--------------------------------|---|--|
| 1. $x \mapsto x^3 - x + 1$, | 6. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, | 11. $x \mapsto \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$, |
| 2. $x \mapsto (x+1)^2$, | 7. $x \mapsto (1-x)\sqrt{x}$, | 12. $x \mapsto e^{2x}$, |
| 3. $x \mapsto x\sqrt{x}$, | 8. $x \mapsto \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}$, | 13. $x \mapsto \sin(2x)$, |
| 4. $x \mapsto \frac{1}{x^3}$, | 9. $x \mapsto \frac{1}{2x-3}$, | 14. $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)^2}$. |
| 5. $x \mapsto \sqrt{x+1}$, | 10. $x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$, | |

Exercice 10.9. Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle inclus dans leur domaine de définition :

- | | | |
|--|------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $x \mapsto \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}$, | 4. $x \mapsto (e^x + 1)^3 e^x$, | 7. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$, |
| 2. $x \mapsto \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$, | 5. $x \mapsto \tan(x)$, | 8. $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$, |
| 3. $x \mapsto 3x\sqrt{1-2x^2}$, | 6. $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$, | 9. $x \mapsto \frac{1}{x+\sqrt{x}}$. |

10.2.2 Lien avec l'intégrale

Maintenant que nous avons défini la notion de primitive et donné la structure de l'espace des primitives d'une fonction, revenons à notre but initial, à savoir calculer des intégrales, et voyons comment les primitives peuvent nous venir en aide dans ce domaine.

Théorème 10.10 – Lien primitive-intégrale. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et si F est une primitive de f alors

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

De plus, pour faciliter les calculs on notera $[F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Démonstration. D'après le théorème fondamental de l'analyse 10.4, on sait que la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est une primitive de f . D'après le théorème 10.6, on en déduit que si F est une primitive de f alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [a, b]$,

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C.$$

Mais alors, en évaluant en $x = a$, on a $0 = F(a) + C$ donc $C = -F(a)$ et on obtient alors le résultat voulu en évaluant l'égalité précédente en $x = b$. $\square$

Exemple. On a

$$\int_0^2 t^2 - t + 1 dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t \right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 2 \right) - \left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} + 0 \right) = \frac{8}{3}.$$

Exercice 10.11. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^2 t^2 dt,$

3. $\int_1^2 \frac{2}{t} dt,$

5. $\int_0^4 3 dt,$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt,$

4. $\int_0^2 e^t dt,$

6. $\int_0^{2\pi} \sin(t) dt.$

Remarque – Primitive et intégrale. On notera

$$\int^x f(t) dt$$

une primitive quelconque de la fonction f (on ne spécifie plus l'annulation au point a). Cette notation nous permet de ne pas spécifier la borne de départ et allège l'écriture. De plus, en utilisant cette notation nous pourrions utiliser le théorème d'intégration par parties et le théorème de changement de variable ce qui sera très pratique pour rechercher des primitives.

Exemple. On a

$$\int^x \sin(2t) dt = -\frac{1}{2} \cos(2x).$$

10.2.3 Primitives usuelles

Il est particulièrement important de connaître toutes les primitives présentes dans le tableau qui suit.

Fonction	Primitive	Domaine de validité
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}^*$
$e^{ax}, a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{e^{ax}}{a}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x))$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Table 10.1 – Tableau des primitives usuelles

Remarque. On peut justifier tous ces résultats par dérivation.

Il est également très important de savoir reconnaître les dérivées de fonctions composées résumées dans le tableau qui suit ($u : I \rightarrow \mathbb{R}$ est ici une fonction dérivable).

Fonction	Primitive	Domaine de validité
$u' u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^+$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	I
$u' u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^- \setminus \{-1\}$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	Un intervalle où $u \neq 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	Un intervalle où $u \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Un intervalle où $u > 0$
$u' e^u$	e^u	I
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$	I
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$	I

Table 10.2 – Tableau de primitives composées

Exemple. Cherchons une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2+3}$. Si on pose $u : x \mapsto x^2 + 3$,

on note que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x$ donc

$$\frac{x}{x^2 + 3} = \frac{\frac{1}{2}u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2} \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Ainsi, une primitive est donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{2} \ln(|u(x)|) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 3).$$

Exercice 10.12. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3t) dt,$

3. $\int_0^2 e^{5t} dt,$

5. $\int_0^1 \frac{6t}{(1+t^2)^3} dt,$

2. $\int_1^2 \frac{2}{3t} dt,$

4. $\int_0^1 6t(1+t^2)^2 dt,$

6. $\int_0^2 \frac{3t^2}{\sqrt{1+t^3}} dt.$

10.2.4 Un cas particulier à connaître : fonctions rationnelles

Il est à noter que, bien que nous ayons fourni un tableau de primitives usuelles, il n'y a que peu de fonctions que nous savons intégrer. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x^2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui, d'après le théorème fondamental de l'analyse, possède une primitive mais nous ne sommes pas en mesure de l'exprimer explicitement à l'aide de fonctions usuelles. Néanmoins, en plus du tableau de primitives précédent, il y a quelques situations favorables qu'il convient de reconnaître : les fonctions trigonométriques et leurs puissances que nous apprendrons à intégrer une fois que nous aurons introduit les nombres complexes dans le chapitre 11 et les fonctions rationnelles auxquelles nous nous intéressons à présent.

Définition 10.13 – Fonction rationnelle. On appelle **fonction rationnelle** un quotient $\frac{A}{B}$ où A et B sont deux fonctions polynomiales et B n'est pas la fonction polynomiale nulle.

Exemples. Les fonctions suivantes sont des fonctions rationnelles :

◦ $x \mapsto \frac{x^2 + x}{x^3 + 1},$

◦ $x \mapsto \frac{x^2 + x}{(x^3 + 1)^4},$

◦ $x \mapsto \frac{x^6 + x^2 + 1}{x}.$

On peut montrer que l'on sait intégrer n'importe quelle fonction rationnelle à l'aide de la division euclidienne de polynômes et de la méthode de décomposition en éléments simples. Néanmoins, nous n'allons pas ici mettre en place ces deux méthodes et nous allons nous intéresser seulement à un cas particulier. Si vous êtes intéressé par ce sujet nous vous conseillons de consulter [LM03, section 10.5].

Méthode – Intégration de fonctions rationnelles - Cas scindé à racines simples.

Soit f une fonction rationnelle définie par

$$f : x \mapsto \frac{1}{(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)}$$

où $r_1, \dots, r_n$ sont des réels tous distincts. Pour intégrer f , on note qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que

$$f(x) = \frac{1}{(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)} = \frac{\alpha_1}{x - r_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{x - r_n}$$

et que l'on peut déterminer en mettant les deux côtés de l'égalité sur le même dénominateur. On peut alors intégrer chacun des termes obtenus à l'aide de la fonction logarithme.

Exemple. Déterminons les primitives de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$. On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2 + 3t + 2 = (t + 1)(t + 2)$ et on a donc pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$,

$$\frac{1}{(t + 1)(t + 2)} = \frac{\alpha_1}{t + 1} + \frac{\alpha_2}{t + 2} = \frac{\alpha_1(t + 2) + \alpha_2(t + 1)}{(t + 1)(t + 2)} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)t + (2\alpha_1 + \alpha_2)}{(t + 1)(t + 2)}.$$

On en déduit que les numérateurs sont égaux, i.e. $1 = (\alpha_1 + \alpha_2)t + (2\alpha_1 + \alpha_2)$ et donc, par identification des coefficients, on a $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ et $2\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ et l'on obtient que $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = -1$. Ainsi, $\frac{1}{t^2 + 2t - 3} = \frac{1}{t + 1} - \frac{1}{t + 2}$ et donc

$$\int^x \frac{1}{t^2 + 2t - 3} dt = \int^x \frac{1}{t + 1} - \frac{1}{t + 2} dt = \ln(|x + 1|) - \ln(|x + 2|).$$

Les primitives de f sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \ln(|x + 1|) - \ln(|x + 2|) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 10.14.

1. Déterminer les deux réels a_1 et a_2 tels que pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$,

$$\frac{3t - 4}{(t - 1)(t - 2)} = \frac{a_1}{t - 1} + \frac{a_2}{t - 2}.$$

2. En déduire les primitives de $f : x \mapsto \frac{3x - 4}{(x - 1)(x - 2)}$.

10.3. Intégration par parties

Théorème 10.15 – Intégration par parties. Soient u et v deux fonctions dérivables et ayant des dérivées continues sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Démonstration. Cette formule provient de la formule de dérivation d'un produit. En effet, on sait que $(uv)' = u'v + uv'$ donc en intégrant ceci sur $[a, b]$, on obtient, par linéarité de l'intégrale, que

$$\int_a^b (uv)'(t) dt = \int_a^b u'(t)v(t) dt + \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Or, puisque uv est une primitive de $(uv)'$, on a

$$\int_a^b (uv)'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b$$

et on en déduit la formule voulue. □

Remarque. On peut utiliser la formule d'intégration par parties pour déterminer des primitives. En effet, la formule d'intégration par parties sans la borne inférieure

$$\int^x u'(t)v(t) dt = u(x)v(x) - \int^x u(t)v'(t) dt$$

est également valide d'après la formule précédente.

Exemples.

- Déterminons la valeur de l'intégrale $\int_{-1}^1 te^t dt$. On applique la formule d'intégration par parties. On pose $u : t \mapsto e^t$ et $v : t \mapsto t$ qui sont dérivables de dérivées continues. On a alors

$$\begin{cases} u'(t) = e^t \\ v(t) = t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(t) = e^t \\ v'(t) = 1 \end{cases}$$

et par la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\int_{-1}^1 te^t dt = [te^t]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 1e^t dt = 1e^1 - (-1)e^{-1} - [e^t]_{-1}^1 = \frac{2}{e}.$$

- Déterminons les primitives de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$, i.e. étudions $\int^x \ln(t) dt$. On considère $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \ln(t)$ qui sont dérivables de dérivées continues. On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \ln(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}.$$

On en déduit alors que

$$\int^x \ln(t) dt = x \ln(x) - \int^x \frac{t}{t} dt = x \ln(x) - \int^x 1 dt = x \ln(x) - x.$$

Les primitives de $x \mapsto \ln(x)$ sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto x \ln(x) - x + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Méthode – Utilisation de la formule d'intégration par parties. On utilise la formule d'intégration par parties, en général, si la fonction à intégrer est de l'une des formes suivantes.

1. Polynôme $\times$ Exponentielle ou Polynôme $\times$ Fonction trigonométrique. On dérivera le polynôme dans ce cas.
2. Polynôme $\times$ Logarithme. On dérivera le logarithme dans ce cas.
3. Fonction trigonométrique $\times$ Exponentielle. On procédera alors à deux intégrations par parties.

Exemples.

- Déterminons les primitives de la fonction $x \mapsto x^2 \sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$, i.e. étudions

$$\int^x t^2 \sin(2t) dt.$$

On va ici dériver la fonction polynomiale deux fois et intégrer la fonction trigonométrique. On pose pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} u'(t) = \sin(2t) \\ v(t) = t^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(t) = -\frac{1}{2} \cos(2t) \\ v'(t) = 2t \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont dérivables de dérivées continues et d'après la formule d'intégration par parties, on a

$$\int^x t^2 \sin(2t) dt = -\frac{1}{2} \cos(2x) x^2 - \int^x 2t \left(-\frac{1}{2} \cos(2t) \right) dt$$

et donc

$$\int^x t^2 \sin(2t) dt = -\frac{x^2}{2} \cos(2x) + \int^x t \cos(2t) dt.$$

On étudie à présent

$$\int^x t \cos(2t) dt.$$

On pose pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} u'(t) = \cos(2t) \\ v(t) = t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(t) = \frac{1}{2} \sin(2t) \\ v'(t) = 1 \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont dérivables de dérivées continues et d'après la formule d'intégration par parties,

$$\int^x t \cos(2t) dt = \frac{1}{2} \sin(2x)x - \int^x \left(\frac{1}{2} \sin(2t) \right) dt$$

et donc

$$\int^x t \cos(2t) dt = \frac{x}{2} \sin(2x) - \frac{1}{2} \int^x \sin(2t) dt = \frac{x}{2} \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x).$$

Finalement, on a donc

$$\int^x t^2 \sin(2t) dt = -\frac{x^2}{2} \cos(x) + \frac{x}{2} \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x).$$

Les primitives de la fonction $x \mapsto x^2 \sin(2x)$ sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto -\frac{x^2}{2} \cos(2x) + \frac{x}{2} \sin(2x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- o Déterminons les primitives de la fonction $x \mapsto x \ln(x)$. On va ici intégrer la fonction polynomiale et dériver la fonction logarithme. On pose, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{cases} u'(t) = t \\ v(t) = \ln(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(t) = \frac{t^2}{2} \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont dérivables de dérivées continues et

$$\int^x t \ln(t) dt = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int^x \frac{t^2}{2t} dt = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \int^x t dt$$

et donc

$$\int^x t \ln(t) dt = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4}.$$

Les primitives de la fonction $x \mapsto x \ln(x)$ sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- Déterminons les primitives de $x \mapsto \cos(x)e^x$ sur $\mathbb{R}$, i.e. étudions

$$\int^x \cos(t)e^t dt.$$

On va ici dériver deux fois la fonction trigonométrique et intégrer deux fois la fonction exponentielle. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} u'(t) = e^t \\ v(t) = \cos(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(t) = e^t \\ v'(t) = -\sin(t) \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont dérivables de dérivées continues et donc

$$\int^x \cos(t)e^t dt = \cos(x)e^x - \int^x (-\sin(t))e^t dt = \cos(x)e^x + \int^x \sin(t)e^t dt$$

et donc

$$\int^x \cos(t)e^t dt = \cos(x)e^x + \int^x \sin(t)e^t dt.$$

On étudie à présent

$$\int^x \sin(t)e^t dt.$$

On pose, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} u'(t) = e^t \\ v(t) = \sin(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(t) = e^t \\ v'(t) = \cos(t) \end{cases}.$$

Les fonctions u et v sont dérivables de dérivées continues et d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int^x \sin(t)e^t dt = e^x \sin(x) - \int^x \cos(t)e^t dt.$$

On a donc finalement,

$$\int^x \cos(t)e^t dt = \cos(x)e^x + e^x \sin(x) - \int^x \cos(t)e^t dt.$$

Ainsi,

$$2 \int^x \cos(t)e^t dt = \cos(x)e^x + e^x \sin(x)$$

Les primitives de la fonction $x \mapsto \cos(x)e^x$ sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{(\cos(x) + \sin(x))e^x}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 10.16. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 te^t dt,$

2. $\int_1^e t^2 \ln(t) dt,$

3. $\int_0^1 t\sqrt{1+t} dt.$

Exercice 10.17. Déterminer, en utilisant la méthode d'intégration par parties, une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto x^2 \cos(x),$

3. $x \mapsto \ln(x^2),$

2. $x \mapsto \frac{x}{\cos(x)^2},$

4. $x \mapsto e^{2x} \sin(x).$

10.4. Changement de variable

Théorème 10.18 – Changement de variable. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, a et b deux réels tels que $a < b$ et $u : [a, b] \rightarrow I$ une fonction dérivable de dérivée continue. Alors, si on pose $s = u(t)$, on a

$$\int_a^b f(u(t))u'(t) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(s) ds.$$

Démonstration. La formule d'intégration par parties est à la dérivation du produit ce que la formule de changement de variable est à la formule de dérivation de fonctions composées. En effet, notons F une primitive de f sur I , alors pour tout $t \in [a, b]$, $f(u(t))u'(t) = F'(u(t))u'(t) = (F \circ u)'(t)$. Ainsi,

$$\int_a^b f(u(t))u'(t) dt = \int_a^b (F \circ u)'(t) dt = [(F \circ u)(t)]_a^b = F(u(b)) - F(u(a)).$$

De plus, on a également,

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(s) ds = \int_{u(a)}^{u(b)} F'(s) ds = [F(s)]_{u(a)}^{u(b)} = F(u(b)) - F(u(a)).$$

Ce qui prouve bien l'égalité voulue. □

À retenir.

- Ce théorème est plus simple qu'il n'y paraît. On pose $s = u(t)$ et dans l'expression $f(u(t))u'(t)dt$ on remplace $u(t)$ par s et $u'(t)dt$ par ds . De plus, on note que quand t varie entre a et b , s varie entre $u(a)$ et $u(b)$.
- Pour se souvenir qu'il faut remplacer $u'(t)dt$ par ds on peut utiliser le fait que, si l'on utilise les notations issues de la physique, on a, puisque $s = u(t)$, $\frac{ds}{dt} = u'(t)$ et on obtient alors $ds = u'(t)dt$ en multipliant par dt (quantité dont le sens reste à expliciter ici). Ce n'est pas rigoureux mais ça peut servir de moyen mnémotechnique pour se souvenir de la formule.
- On sait que pour composer deux fonctions, il faut faire attention aux intervalles de définition. Ici $u : [a, b] \rightarrow I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ donc $f \circ u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie.

Exemples.

- Déterminons la valeur de l'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(2t + 1) dt$. On sait déjà calculer cette intégrale, en effet :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(2t + 1) dt = \left[\frac{\sin(2t + 1)}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{3} + 1\right) - \sin(-\pi + 1) \right)$$

Vérifions que la formule de changement de variable donne le même résultat. On utilise le changement de variable $s = u(t) = 2t + 1$ où u est dérivable de dérivée continue et $u'(t) = 2$. D'après la formule de changement de variable

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(2t + 1) dt = \int_{-\pi+1}^{\frac{\pi}{3}+1} \frac{1}{2} \cos(s) ds = \frac{1}{2} [\sin(s)]_{-\pi+1}^{\frac{\pi}{3}+1}$$

et donc

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(2t + 1) dt = \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{\pi}{3} + 1\right) - \sin(-\pi + 1) \right).$$

- Calculons l'intégrale $\int_{-1}^1 \sin(e^t)e^t dt$. Pour cela, on considère le changement de variable $s = u(t) = e^t$ où u est dérivable de dérivée continue et $u'(t) = e^t$. D'après la formule de changement de variable

$$\int_{-1}^1 \sin(e^t)e^t dt = \int_{e^{-1}}^e \sin(s) ds = [-\cos(s)]_{e^{-1}}^e = \cos(e^{-1}) - \cos(e).$$

Remarque. On peut utiliser la formule de changement de variable pour déterminer des

primitives. En effet, la formule de changement de variable sans la borne inférieure :

$$\int^x f(u(t))u'(t) dt = \int^{u(x)} f(s) ds$$

est également valide (il faudra penser à remplacer $u(x)$ par son expression).

Exemple. Cherchons à déterminer sur $\mathbb{R}_+^*$ les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. On considère alors le changement de variable $s = u(t) = \sqrt{t}$ (qui est bien dérivable de dérivée continue sur $\mathbb{R}_+^*$) et on a alors $u'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. On obtient par la formule de changement de variable que

$$\int^x \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} dt = \int^x 2 \sin(\sqrt{t}) \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \int^{u(x)} 2 \sin(s) ds = -2 \cos(\sqrt{x}).$$

Ainsi, les primitives de $x \mapsto \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto -2 \cos(\sqrt{x}) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Méthode – Utiliser la formule de changement de variable. On utilise la formule de changement de variable, en général, dans les situations suivantes :

1. si l'on reconnaît la forme $f(u(t))u'(t)$,
2. si on peut transformer l'expression à intégrer sous la forme $f(u(t))u'(t)$,
3. si la situation suggère de « tenter » un changement de variable en espérant que cela fasse apparaître une fonction plus simple à intégrer.

Le plus dur est souvent de savoir quel changement de variable va permettre d'obtenir le résultat.

Exemples.

- Calculons la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt.$$

On utilise le changement de variable $s = u(t) = e^t$ où u est dérivable de dérivée continue et $u'(t) = e^t$. D'après la formule de changement de variable, on a

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt = \int_1^e \frac{1}{1+s} ds = [\ln(|1+s|)]_1^e = \ln(1+e) - \ln(2).$$

- Calculons la valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(t) dt$. On commence par remarquer que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$. On utilise alors le changement de variable

$s = u(t) = \cos(t)$ où u est dérivable de dérivée continue et $u'(t) = -\sin(t)$. D'après la formule de changement de variable, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)} dt = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{s} ds = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{s} ds = [\ln(|s|)]_{\frac{1}{2}}^1$$

et donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(t) dt = \ln(1) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2).$$

Exercice 10.19. Déterminer les primitives des fonctions suivantes en utilisant le changement de variable proposé :

1. $x \mapsto \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ en posant $s = \sqrt{x}$,

3. $x \mapsto \sin(x)^5$ en posant $s = \cos(x)$,

2. $x \mapsto \frac{e^{2x}}{e^x+1}$ en posant $s = e^x$,

4. $x \mapsto e^{2x} \cos(e^x)$ en posant $s = ?$.

Exercice 10.20.

- Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel $t > 0$, $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1}$ puis calculer l'intégrale $\int_1^e \frac{1}{t(t+1)} dt$.
- En faisant le changement de variable $t = u(x) = e^x$ puis une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_0^1 e^{-x} \ln(1 + e^x) dx$.

10.5. Application à la résolution d'équations différentielles

Nous achevons ce chapitre par une application importante de la théorie de l'intégration : la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre.

10.5.1 Introduction

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction et dans laquelle apparaissent des dérivées de cette fonction.

Définition 10.21. Une **équation différentielle linéaire du premier ordre** est une équation de la forme

$$y' = a(x)y + b(x)$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Remarques.

- Résoudre une équation différentielle signifie trouver toutes les fonctions solutions de cette équation différentielle.
- Expliquons les différents termes apparaissant dans la définition précédente.
 - ▷ Le terme **linéaire** vient du fait que les fonctions $y \mapsto y'$ et $y \mapsto a(x)y + b(x)$ sont linéaires. Ainsi, l'équation différentielle $y' = x^2y + e^x$ est linéaire alors que $y' = xy^2 + e^x$ et $\sqrt{y'} = xy + e^x$ ne le sont pas.
 - ▷ Le terme **premier ordre** vient du fait que la plus grande dérivée de y apparaissant dans l'équation est y' , i.e. qu'on a dérivé y une fois. Par exemple $y'' = xy' + 2$ est d'ordre 2 (et linéaire).
- Dans la suite, on supposera que a et b sont des fonctions continues sur I . De plus, on peut étudier une équation différentielle de la forme $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$ mais on demandera alors à ce que pour tout $x \in I$, $\alpha(x) \neq 0$. La division par α permet ainsi de retrouver la forme de la définition précédente.

On va commencer par traiter le cas où a et b sont des constantes. Il s'agit d'un cas plus simple mais la méthode de résolution sera la même dans le cas où a et b sont des fonctions.

10.5.2 Premier ordre à coefficients constants

Théorème 10.22 – Cas homogène. *Soit a un réel. Les solutions de l'équation différentielle homogène*

$$y' = ay$$

sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

- On commence par vérifier que pour tout $C \in \mathbb{R}$, $y : x \mapsto Ce^{ax}$ est bien solution ce qui est clair puisque $y'(x) = aCe^{ax} = ay(x)$.
- On veut à présent montrer que si y est une solution de l'équation $y' = ay$, alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $y' = ay$. Considérons y une solution, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, si on note $f(x) = y(x)e^{-ax}$, $f'(x) = y'(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = ay(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = 0$. La fonction f' étant nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, elle est constante ce qui achève de démontrer notre résultat puisqu'il existe alors $C \in \mathbb{R}$ tel que $y(x)e^{-ax} = C$ et donc $y(x) = Ce^{ax}$.

□

Exemple. Les solutions de l'équation différentielle $2y' - y = 0$ qui se réécrit $y' = \frac{1}{2}y$ sont les fonctions de la forme $y(x) = Ce^{\frac{1}{2}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Remarque. L'équation différentielle $y' = ay$ possède une infinité de solutions car on a une infinité de choix pour la constante $C \in \mathbb{R}$. Si on ajoute une condition initiale du type $y(x_0) = y_0$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ sont des constantes fixées, alors nous verrons plus loin à l'occasion du théorème 10.30 que la solution est unique.

Théorème 10.23 – Cas général. Soient $a \neq 0$ et b deux réels. Les solutions de l'équation différentielle

$$y' = ay + b$$

sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On note que $y_p : x \mapsto -\frac{b}{a}$ est une solution de l'équation $y' = ay + b$ et on en déduit que y est une solution de $y' = ay + b$ si et seulement si $y - y_p$ est solution de l'équation homogène $y' = ay$ dont nous avons donné les solutions dans le théorème 10.22. $\square$

Exercice 10.24. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = y + 1$.

Remarque. On note que l'on a ici ajouté la solution générale de l'équation **homogène** et une **solution particulière** de l'équation complète afin d'obtenir l'intégralité des solutions. Nous allons continuer à utiliser ce principe pour résoudre l'équation complète dans le cas où a et b sont des fonctions.

10.5.3 Équations homogènes $y' = a(x)y$

Théorème 10.25. Soient I un intervalle, $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de a sur I . Les solutions de l'équation différentielle homogène

$$y' = a(x)y \tag{E_h}$$

sont les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ce^{A(x)}$, $C \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Cette preuve est identique à celle du théorème 10.22 en remplaçant ax par $A(x)$. $\square$

Remarque. Si a est une constante, alors une primitive de a est donnée par $A : x \mapsto ax$ et on retrouve le résultat du théorème 10.22.

Exemple. Les solutions de l'équation différentielle $y' = x^2y$ définie sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ce^{\frac{x^3}{3}}$, $C \in \mathbb{R}$.

10.5.4 Équations linéaires du premier ordre $y' = a(x)y + b(x)$

Nous avons étudié les équations différentielles linéaires du premier ordre homogènes dans la section précédente. On s'intéresse à présent au cas général d'équations différentielles linéaires du premier ordre avec second membre $y' = a(x)y + b(x)$ où $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur un intervalle I . Nous allons, pour ce faire, utiliser la même méthode que celle que nous avons mise en place dans le théorème 10.23 : les solutions de l'équation générale s'obtiennent en additionnant les solutions de l'équation homogène correspondante et une solution particulière de cette équation.

Théorème 10.26. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de a . Les solutions de l'équation différentielle

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (E)$$

sont les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto y_p(x) + Ce^{A(x)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

où y_p est une solution particulière de (E) et $y_h : x \mapsto Ce^{A(x)}$, $C \in \mathbb{R}$, est la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E).

Démonstration. La preuve est identique à celle faite du théorème 10.23 en utilisant les solutions de l'équation homogène qui ont été obtenues lors du théorème 10.25. $\square$

Méthode. Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (E)$$

on suit les étapes suivantes :

1. *Équation homogène.* On détermine l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions y_h de l'équation différentielle homogène associée $y' = a(x)y$.
2. *Solution particulière.* On trouve une solution particulière y_p de l'équation (E).
3. *Conclusion.* L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est constitué de l'ensemble des fonctions de la forme $y = y_p + y_h$, $y_h \in \mathcal{S}_h$.

Remarque. Le procédé consistant à additionner une solution générale de l'équation homogène et une solution particulière afin d'obtenir l'intégralité des solutions d'une équation différentielle **linéaire** est parfois appelé **principe de superposition**.

Exemple. On considère l'équation différentielle $y' = x^2y - x^2$ (E).

1. *Équation homogène.* L'équation différentielle homogène associée est $y' = x^2 y$ (E_h) et les solutions de (E_h) sont les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ce^{\frac{x^3}{3}}$, $C \in \mathbb{R}$.
2. *Solution particulière.* On remarque qu'une solution particulière de (E) est donnée par $y_p : x \mapsto 1$.
3. *Conclusion.* D'après le principe de superposition, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est constitué de l'ensemble des fonctions de la forme $y = y_p + y_h : x \mapsto 1 + Ce^{\frac{x^3}{3}}$, $C \in \mathbb{R}$.

Remarque. La résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre se résume donc en deux étapes.

1. La résolution de l'équation homogène associée, ce qui revient à déterminer une primitive de a .
2. La recherche d'une solution particulière. Cette question peut être difficile à première vue mais il y a deux choses à noter.
 - Il y a des cas particuliers plus simples :
 - ▷ si l'équation est à coefficients constants on cherche une solution particulière constante comme l'illustre le théorème 10.23,
 - ▷ si a et b sont des fonctions polynomiales, on peut chercher une solution particulière sous forme d'une fonction polynomiale.
 - Dans les cas où une solution particulière est plus difficile à « deviner » on a une méthode qui va nous permettre de ramener cette recherche à la détermination d'une primitive. Il s'agit de la méthode de **variation de la constante** que nous allons introduire à présent.

Exercice 10.27. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = 2y + 2x^2 - 1$. *Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des réels à déterminer.*

10.5.5 Solution particulière : méthode de variation de la constante

Comme énoncé dans le théorème 10.25, les solutions de l'équation homogène $y' = a(x)y$ sont les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ce^{A(x)}$, $C \in \mathbb{R}$. La méthode de variation de la constante consiste alors à chercher une solution particulière sous la forme

$$y_p : x \mapsto C(x)e^{A(x)}$$

où C est à présent une fonction à déterminer de telle sorte que y_p soit une solution de $y' = a(x)y + b(x)$. Illustrons ceci sur un exemple.

Exemple. On cherche à résoudre l'équation différentielle $y' = 2y + (1+x)e^{2x}$ (E).

1. *Équation homogène.* L'équation différentielle homogène associée est $y' = 2y$ et ses solutions sont les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.
2. *Solution particulière.* On cherche une solution particulière y_p en utilisant la méthode de variation de la constante. On considère donc $y_p(x) = C(x)e^{2x}$. Alors, $y'_p = 2y_p + (1+x)e^{2x}$ si et seulement si $C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} = 2C(x)e^{2x} + (1+x)e^{2x}$, ce qui équivaut à $C'(x) = 1+x$. On pose alors $C(x) = x + \frac{x^2}{2}$ et on obtient ainsi la solution particulière $y_p : x \mapsto \left(x + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x}$.
3. *Conclusion.* D'après le principe de superposition, les solutions sont les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto y_p(x) + y_h(x) = \left(x + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x} + Ce^{2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Remarque. Justifions brièvement pourquoi cette méthode va toujours nous permettre de trouver une solution particulière en traitant le cas général. Comme indiqué, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p : x \mapsto C(x)e^{A(x)}$ où C est à présent une fonction à déterminer de telle sorte que y_p soit une solution de $y' = a(x)y + b(x)$. Puisque $A' = a$, on a

$$y'_p(x) = a(x)C(x)e^{A(x)} + C'(x)e^{A(x)} = a(x)y_p(x) + C'(x)e^{A(x)}.$$

Ainsi, $y'_p(x) - a(x)y_p(x) = C'(x)e^{A(x)} = b(x)$ ce qui équivaut à $C'(x) = b(x)e^{-A(x)}$ et C est donc une primitive de la fonction $x \mapsto b(x)e^{-A(x)}$. Notons

$$C(x) = \int^x b(t)e^{-A(t)} dt.$$

La fonction y_p définie par

$$y_p : x \mapsto \left(\int^x b(t)e^{-A(t)} dt\right)e^{A(x)}$$

est alors une solution de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$.

Exercice 10.28. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 3y + e^{3x}$,

2. $(1+x^2)y' - 2xy = (x^2+1)^2 \cos(x)$.

Exercice 10.29. Résoudre, sur l'intervalle associé, les équations différentielles suivantes :

1. $y' + \tan(x)y = \sin(2x)$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

2. $\cos(x)y' + (\sin(x) - \cos(x))y = \sin(x)e^x$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

10.5.6 Condition initiale : théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 10.30 – Théorème de Cauchy-Lipschitz ordre un. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : I \rightarrow \mathbb{R}$, $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I . Alors, pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = a(x)y + b(x)$ possède une unique solution y satisfaisant $y(x_0) = y_0$.

Démonstration. D'après l'étude faite dans la remarque de la section précédente, cette solution est

$$y : x \mapsto \left(\int_{x_0}^x b(t)e^{-A(t)} dt \right) e^{A(x)} + y_0 e^{A(x)}$$

où A est la primitive de a s'annulant en x_0 . □

Méthode. Pour déterminer la solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = a(x)y + b(x)$ (E) satisfaisant $y(x_0) = y_0$, on suit les étapes suivantes :

- *Étapes 1, 2 et 3.* On détermine les solutions de l'équation (E) en suivant les étapes de l'étude précédente et on en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y = y_p + y_h$, où y_p est une solution particulière de (E) et $y_h : x \mapsto Ce^{A(x)}$ est une solution générale de l'équation homogène associée à (E).
- *Étape 4 : condition initiale.* On impose que $y(x_0) = y_p(x_0) + y_h(x_0) = y_p(x_0) + Ce^{A(x_0)} = y_0$ et on en déduit la valeur de C .

Exemple. On cherche la solution de $y' = 2y + (1+x)e^{2x}$ (E) telle que $y(0) = 2$.

- *Étapes 1, 2 et 3.* On a déjà montré dans la section précédente que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y(x) = \left(x + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x} + Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.
- *Étape 4 : condition initiale.* On cherche la solution telle que $y(0) = 2$. On a alors $y(0) = C = 2$ si et seulement si $C = 2$. Ainsi, l'unique solution de (E) telle que $y(0) = 2$ est $y : x \mapsto \left(x + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x} + 2e^{2x}$.

Exercice 10.31. Déterminer dans chaque cas l'unique solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale associée :

1. $y' = -y + \cos(x)$ et $y(0) = 1$,
2. $(1+x^2)y' + 2xy = 1+3x^2$ et $y(0) = 3$.

Exercice 10.32. Résoudre l'équation différentielle $2y' + 5y = 0$ et déterminer l'unique fonction solution dont la courbe représentative possède une tangente au point d'abscisse 0 ayant pour coefficient directeur $-\frac{1}{2}$.

Nombres complexes

L'étude des nombres complexes est l'occasion d'entremêler la géométrie et le calcul littéral. En effet, l'ensemble des nombres complexes pourra être identifié, d'une façon qu'il conviendra par la suite d'explicitier, au plan euclidien. Ainsi, un nombre complexe pourra être vu comme un point du plan euclidien et les opérations algébriques sur les nombres complexes (addition, multiplication par un nombre réel ou multiplication de deux nombres complexes) pourront, en ce sens, être interprétées comme des transformations géométriques du plan euclidien (translation, homothétie, rotation ou composée de ces différentes opérations). D'un autre côté, en plus de l'aspect géométrique, les nombres complexes offrent un cadre plus large que celui des nombres réels pour la résolution d'équations. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle ils ont été introduits au XVI^e siècle tout comme la plupart des ensembles de nombres auparavant. En effet, il n'existe pas de nombre réel x tel que

$$x^2 = -1.$$

Les nombres complexes servent ainsi à donner des solutions (i et $-i$) à cette équation et plus généralement aux équations du second degré dont le discriminant s'avère être négatif.

11.1. Forme algébrique

11.1.1 Description de la forme algébrique

Comme nous avons déjà pu l'évoquer, l'ensemble des complexes peut être identifié au plan euclidien, précisons à présent en quel sens. On introduit un « nouveau nombre » noté i et on identifie alors un point (x, y) du plan euclidien à la quantité $x + iy$. Ainsi, comme l'énonce la définition suivante, l'ensemble des nombres complexes est alors l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme $x + iy$ avec x et y des nombres réels.

Définition 11.1 – Nombre complexe. On note $\mathbb{C}$ et on appelle **ensemble des nombres complexes** l'ensemble défini par

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Si $z = x + iy$ est un élément de $\mathbb{C}$ alors,

- $x + iy$ est appelée sa forme **cartésienne** ou **algébrique**,
- x est appelée sa **partie réelle** et on note $x = \operatorname{Re}(z)$,
- y est appelée sa **partie imaginaire** et on note $y = \operatorname{Im}(z)$.

Enfin, deux nombres complexes sont **égaux** s'ils ont mêmes parties réelle et imaginaire.

Remarques.

- Si $\operatorname{Im}(z) = 0$ alors $z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$ donc z est un nombre réel.
- Si $\operatorname{Re}(z) = 0$ alors $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$. On dit alors que z est **imaginaire pur** et on notera $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres complexes imaginaires purs.

Précisons davantage la vision géométrique qu'il convient de garder en tête lorsque l'on manipule les nombres complexes à l'aide de la définition suivante.

Définition 11.2 – Affixe d'un point ou d'un vecteur.

- On appelle **affixe** d'un point $A = (x_A, y_A)$ du plan euclidien le nombre complexe $z_A = x_A + iy_A$.
- On appelle **affixe** d'un vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2)$ de $\mathbb{R}^2$ le nombre complexe $z_{\vec{u}} = u_1 + iu_2$.

Comme nous avons pu l'illustrer dans la section 2.5.1, il est d'usage de représenter les nombres réels sur une droite. Ainsi, nous représentons un nombre complexe $z_A = x_A + iy_A$ dans le plan par le point $A = (x_A, y_A)$ ayant pour abscisse la partie réelle x_A de z_A et pour ordonnée la partie imaginaire y_A de z_A . On illustre cela à la figure 11.1.

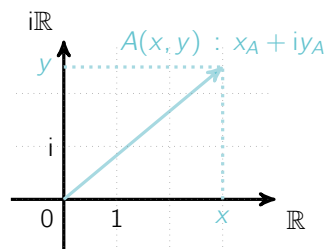


Figure 11.1 – Représentation graphique d'un nombre complexe

On pourrait alors se demander à quoi cela nous sert d'introduire un nouvel ensemble s'il s'identifie parfaitement au plan euclidien ou à l'ensemble des vecteurs du plan. La réponse va, en partie, être fournie par la définition suivante : comme nous l'avons vu au chapitre 4, on peut additionner deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ mais on ne peut pas les multiplier. C'est en cela que l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ va différer de ce que nous avons déjà vu car nous allons le munir de deux opérations : l'addition et le produit.

Définition 11.3 – Opérations sur les complexes. On définit deux opérations sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

- L'**addition** est définie, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$, par

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y').$$

- Le **produit** est défini, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $z' = x' + iy' \in \mathbb{C}$, par

$$(x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Propriété 11.4. Le nombre i satisfait l'identité $i^2 = -1$.

Démonstration. On utilise la définition du produit avec $x = x' = 0$ et $y = y' = 1$. $\square$

Remarque. Pour effectuer le produit de deux nombres complexes, on utilise la double distributivité. Par exemple, $(1 + i)(2 + 2i) = 2 + 2i + 2i + 2i^2 = 2 + 4i - 2 = 4i$.

Exercice 11.5. Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer sa partie réelle et sa partie imaginaire :

1. $3 + 5i$,

5. $-4i$,

9. $(2 - 2i)(4 + i\sqrt{2})$,

2. $2 - 3i$,

6. $2i^2 + 3$,

10. $(1 + i)^3$,

3. $\sqrt{2}$,

7. $(1 - 6i)^2$,

11. $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(1 - 7i)$,

4. $(1 + i)(2i)$,

8. $3 + i - (1 - 2i)$,

12. $(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})$.

Exercice 11.6. Écrire le plus simplement possible les nombres complexes suivants :

1. $\frac{1}{i}$,

2. i^3 ,

3. i^4 ,

4. i^5 ,

5. i^{2024} .

Exercice 11.7. En utilisant la forme algébrique de z , résoudre les équations suivantes :

1. $z^4 + 4 = 0$,

2. $z^3 - 1 = 0$,

3. $z^3 + 2i = 0$.

Étant donné que nous venons de définir deux opérations sur l'ensemble des nombres complexes, il est important de vérifier la compatibilité de ces opérations avec les opérations usuelles que nous avons définies auparavant. Il est par exemple aisé de remarquer que si $y = y' = 0$ alors la somme et le produit définis sur $\mathbb{C}$ sont bien la somme et le produit définis sur l'ensemble des nombres réels. Montrons à présent que la somme de nombres complexes est compatible avec la somme de vecteurs du plan définie dans le chapitre 4.

Proposition 11.8 – Nombres complexes et vecteurs.

- Soient A, B deux points du plan euclidien d'affixes respectives z_A et z_B . L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donnée par $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $z_{\vec{u} + \vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$ et $z_{\lambda \vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}$.

Démonstration.

- Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan euclidien. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet alors pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$. Au point A , on associe l'affixe $z_A = x_A + iy_A$ et au point B , on associe l'affixe $z_B = x_B + iy_B$. Ainsi, on constate que le nombre complexe $z_B - z_A$ coïncide avec l'affixe $z_{\overrightarrow{AB}}$ associée au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Soient $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ deux vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les affixes respectivement associées aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont $z_{\vec{u}} = u_1 + iu_2$ et $z_{\vec{v}} = v_1 + iv_2$ et on a alors $z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}} = u_1 + iu_2 + v_1 + iv_2 = (u_1 + v_1) + i(u_2 + v_2) = z_{\vec{u} + \vec{v}}$. De même, on constate que $\lambda z_{\vec{u}} = \lambda(u_1 + iu_2) = (\lambda u_1) + i(\lambda u_2) = z_{\lambda \vec{u}}$.

□

Remarque – Interprétation géométrique. Comme l'illustre la figure suivante, la somme de nombres complexes peut être interprétée comme une translation alors que la multiplication d'un nombre complexe par un nombre réel relève de l'homothétie, comme illustré en figure 11.2.

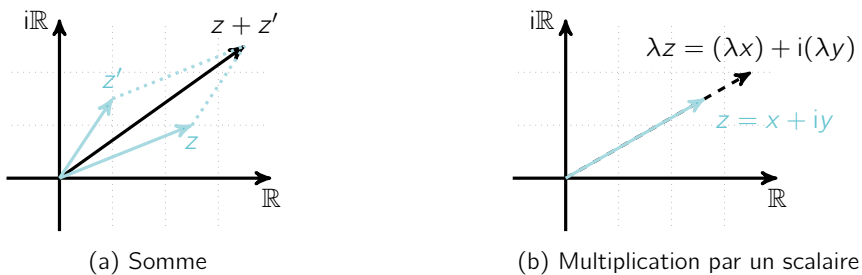


Figure 11.2 – Interprétation géométrique des opérations algébriques

La multiplication entre deux nombres complexes est en revanche difficile à interpréter en coordonnées cartésiennes mais ce n'est que partie remise : nous y verrons plus clair une fois introduite la forme exponentielle (voir proposition 11.44).

Exercice 11.9. On considère les nombres complexes $z_A = 2 + 3i$, $z_B = -4 + i$, $z_C = -1 - 3i$ et $z_D = 3 - 2i$.

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de ces quatre nombres.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, placer les points A, B, C, D d'affixe z_A, z_B, z_C et z_D .
3. Placer les points d'affixe $z_A + z_B$, $z_B - z_A$ et $\frac{z_A + z_B}{2}$.

11.1.2 Conjugué et inverse d'un nombre complexe

On peut définir sur l'ensemble des nombres complexes une nouvelle opération particulièrement utile : la conjugaison.

Définition 11.10 – Conjugué. Pour un nombre complexe $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit le **conjugué** de z par

$$\bar{z} = x - iy.$$

Remarque. La conjugaison correspond géométriquement à une symétrie axiale ayant pour axe l'axe des abscisses, comme on le constate sur la figure 11.3.

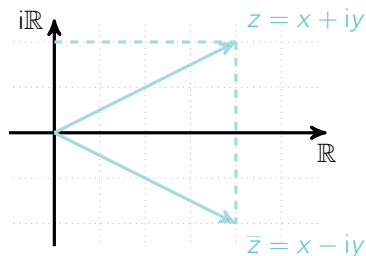


Figure 11.3 – Conjugué d'un nombre complexe

Exemples.

- Si $z = 4 + 3i$ alors $\bar{z} = 4 - 3i$.
- Déterminons le ou les nombres complexes z vérifiant $z + 2\bar{z} = 3 + 6i$. On commence par écrire $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$z + 2\bar{z} = (x + iy) + 2(x - iy) = 3x - iy$$

et donc, en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient $3x - iy = 3 + 6i$ si et seulement si $3x = 3$ et $-y = 6$. Ainsi, la seule solution de l'équation $z + 2\bar{z} = 3 + 6i$ est donnée par $z = 1 - 6i$.

Exercice 11.11. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (on donnera les solutions sous forme algébrique) :

1. $\bar{z} = 3 + 2i$,

2. $z = 2\bar{z}$,

3. $2z - 4 = 5i + 4\bar{z}$.

Remarques.

- On note que si $z \in \mathbb{C}$ alors $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ ce que l'on peut représenter graphiquement comme en figure 11.4.

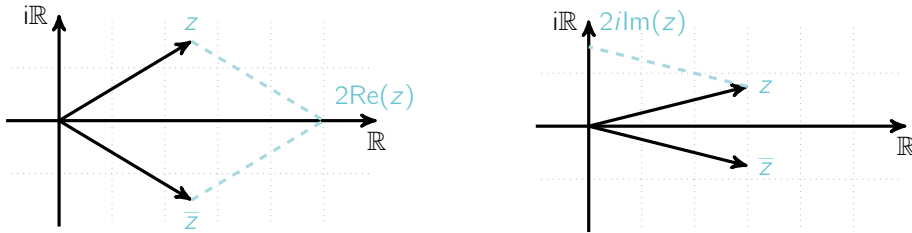


Figure 11.4 – Interprétation géométrique

- On note qu'un nombre complexe est réel si, et seulement si, il est égal à son conjugué. De même, un nombre complexe est imaginaire pur si, et seulement si, il est égal à l'opposé de son conjugué, i.e. $\bar{z} = -z$.

Proposition 11.12. Soient z et z' deux nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\overline{\bar{z}} = z$.
- $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$.
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$.

Exercice 11.13. Démontrer la proposition précédente.

Proposition 11.14. Pour tout complexe $z = x + iy$, on a $z\bar{z} = x^2 + y^2$. En particulier, pour tout complexe $z\bar{z}$ est réel.

Démonstration. Pour $z = x + iy$, on a $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ d'où le résultat. $\square$

Cette dernière propriété nous permet de montrer que tout nombre complexe z non nul admet un inverse pour la multiplication définie sur $\mathbb{C}$. En effet, soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul, on constate que

$$\left(\frac{1}{x^2 + y^2} (x - iy) \right) (x + iy) = \frac{1}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2) = 1$$

L'inverse de $x + iy$ est donc $\frac{1}{x^2 + y^2} (x - iy) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$.

Définition 11.15 – Inverse d'un nombre complexe. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, on définit l'inverse de z , que l'on note $\frac{1}{z}$, par

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z\bar{z}} \bar{z}.$$

Proposition 11.16 – Opérations avec les inverses. Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. On a

$$\circ \frac{1}{z} \times \frac{1}{z'} = \frac{1}{zz'}, \quad \circ \overline{\left(\frac{1}{z} \right)} = \frac{1}{\bar{z}}, \quad \circ \frac{1}{z} + \frac{1}{z'} = \frac{z + z'}{zz'}.$$

Exercice 11.17. Démontrer la proposition précédente.

Remarque. Le quotient $\frac{z}{z'}$ de deux nombres complexes (avec $z' \neq 0$) est défini comme étant le produit de z par l'inverse $\frac{1}{z'}$ de z' .

Méthode – Mettre un quotient sous forme algébrique. Étant donnés deux nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, $z' \neq 0$, on peut utiliser la quantité conjuguée pour mettre $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique. Plus précisément, on écrit

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\bar{z'}}{z'z'}$$

et $z'\bar{z'} = \operatorname{Re}(z')^2 + \operatorname{Im}(z')^2 \in \mathbb{R}$ donc $\frac{z\bar{z'}}{z'z'}$ est sous forme algébrique.

Exemple. On a

$$\frac{1+i}{2-3i} = \frac{(1+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i+2i-6}{2^2+3^2} = \frac{-4+5i}{13} = -\frac{4}{13} + \frac{5}{13}i.$$

Exercice 11.18. Calculer les inverses (sous forme algébrique) des nombres complexes suivants :

1. $3 + 2i$,

3. 4 ,

5. $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$,

2. $2 + 3i$,

4. $-3i$,

6. $\sqrt{3} + i$.

Exercice 11.19. Soient $z = 1 + 2i$ et $w = 2 - 3i$. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $\overline{z + w}$,

2. $\overline{z - w}$,

3. $\overline{zw}$,

4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$.

Exercice 11.20. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (on donnera les solutions sous forme algébrique) :

1. $2z = 1 + i + 3z$,

2. $2iz = 1 - z$,

3. $\frac{z+1}{z-1} = 2i$.

Exercice 11.21.

- Déterminer et représenter l'ensemble des nombres complexes $z = x + iy$ tels que $z^2 + z + 1$ soit un réel.
- Déterminer et représenter l'ensemble des nombres complexes $z = x + iy \neq 1$ tels que $\frac{z+2i}{z-1}$ soit un imaginaire pur.

11.2. Module, argument et forme trigonométrique

11.2.1 Module d'un nombre complexe

Définition 11.22 – Module. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On définit le **module** de z par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Remarques.

- On note que, par définition, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$.
- Par définition, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = |\bar{z}|$,

$$|\operatorname{Re}(z)| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

et de même $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.

- Les définitions du module et de la valeur absolue coïncident sur $\mathbb{R}$ ce qui explique que l'on utilise la même notation.
- Si M est un point du plan euclidien d'affixe z_M alors, d'après la définition de la distance, le module $|z_M|$ de z_M correspond à la distance euclidienne entre le point M et le point O d'affixe $0 = 0 + 0i$. Plus généralement, $|z - z'|$ désigne la distance entre les points d'affixes z et z' .

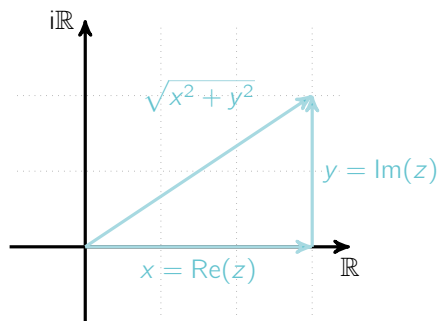


Figure 11.5 – Module d'un nombre complexe

Exercice 11.23. Calculer les modules des nombres complexes suivants :

- | | | | |
|-----------|---------------|------------|-----------------------------|
| 1. -3 , | 3. $3 + 2i$, | 5. 4 , | 7. $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$, |
| 2. $2i$, | 4. $2 + 3i$, | 6. $-3i$, | 8. $\sqrt{3} + i$. |

Exercice 11.24. Pour quels nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ a-t-on $|1 + iz| = |1 - iz|$?

À retenir. On peut comparer les modules de deux nombres complexes car le module est un nombre réel mais il est important de bien noter qu'il n'y a pas d'inégalités sur $\mathbb{C}$.

Attachons-nous à présent à donner quelques propriétés du module.

Proposition 11.25 – Propriétés du module. Soient z et z' deux nombres complexes. Le module est

- défini positif : $|z| \in \mathbb{R}_+$ et $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$,
- séparant : $|z - z'| = 0$ si et seulement si $z = z'$,
- multiplicatif : $|zz'| = |z||z'|$.

Démonstration. Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. On pose M et M' les points du plan euclidien respectivement de coordonnées (x, y) et (x', y') . On rappelle que $O = (0, 0)$. On a $|z| = d(O, M)$ et $|z' - z| = d(M, M')$ où d est la distance euclidienne qui satisfait les deux premiers points comme énoncé à la proposition 7.6. De plus, on a

$$|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = z\overline{z}z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2.$$

□

Théorème 11.26 – Inégalité triangulaire. Soient z et z' deux nombres complexes, alors

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \lambda z'$ ou $z' = \lambda z$.

Démonstration. On a déjà démontré le même type d'inégalité à l'occasion de la propriété 7.6. Nous nous contentons donc de vous conseiller la lecture de [Exo, Algèbre, chapitre 3] pour obtenir une preuve détaillée dans le cadre des nombres complexes. □

Corollaire 11.27 – Seconde inégalité triangulaire. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}$,

$$||z| - |z'||| \leq |z - z'|.$$

Démonstration. On note que $z = (z - z') + z'$. Ainsi, d'après la première inégalité triangulaire du théorème 11.26 on a :

$$|z| \leq |z - z'| + |z'|,$$

d'où $|z| - |z'| \leq |z - z'|$. De même, $|z'| \leq |z' - z| + |z|$ et donc $|z'| - |z| \leq |z' - z| = |z - z'|$. Autrement dit, on a

$$-(|z| - |z'|) \leq |z - z'| \quad \text{et} \quad |z| - |z'| \leq |z - z'|.$$

On a donc bien $||z| - |z'||| \leq |z - z'|$. □

Remarque – Lieux géométriques. De par son interprétation comme distance, le module est un outil très pratique pour décrire certains lieux de points. Plus précisément, il y a deux situations qu'il faut savoir identifier.

- *Le cercle.* Si Ω est un point du plan d'affixe z_Ω alors pour tout réel $r > 0$ l'ensemble des points M d'affixes z tels que $|z - z_\Omega| = r$ est le cercle de centre Ω et de rayon r car ce sont les points à distance r du point Ω .

- *La médiatrice.* Si A et B sont deux points distincts du plan d'afixes respectives z_A et z_B , alors l'ensemble des points M d'afixe z tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$ car il s'agit des points à même distance de A et de B .

Exercice 11.28. Dans le plan complexe, représenter l'ensemble des points M d'afixe z satisfaisant les conditions suivantes :

- | | | |
|-------------------|-----------------------|----------------------------------|
| 1. $ z = 2$, | 3. $1 \leq z < 4$, | 5. $ z - i < 2$, |
| 2. $ z \leq 3$, | 4. $ z - 2 = 1$, | 6. $1 \leq z + 1 + i \leq 2$. |

Exercice 11.29.

- Déterminer l'ensemble des points M d'afixe $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z - 2 + 3i| = 1$.
- Déterminer l'ensemble des points M d'afixe $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z - 1 + i| = |z - 2 + 2i|$.
- Déterminer l'ensemble des points M d'afixe $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre le point d'afixe $1 - 2i$ et passant par le point d'afixe i .
- Soient $A = (2, 1)$ et $B = (1, 3)$. Déterminer l'équation de la médiatrice du segment $[AB]$ à l'aide des nombres complexes. Vérifier qu'il s'agit de la droite de vecteur directeur $(2, 1)$ passant par $(\frac{3}{2}, 2)$.

11.2.2 Argument d'un nombre complexe et forme trigonométrique

Dans cette section, nous nous appuierons très fortement sur les définitions et propositions du chapitre 7. On rappelle que le cercle trigonométrique est le cercle du plan euclidien centré en $O = (0, 0)$ et de rayon 1 (voir définition 7.38).

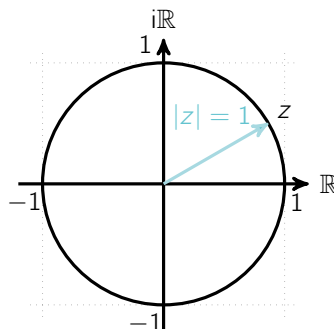


Figure 11.6 – Le cercle trigonométrique

Remarque. Dans le plan euclidien, le cercle trigonométrique est décrit par l'ensemble des points $\mathcal{C}(O, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ alors que dans le plan complexe, il est décrit par l'ensemble noté $\mathbb{U}$ et défini par $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Définition 11.30 – Argument d'un nombre complexe – Argument principal.

- À un nombre complexe $z \neq 0$, on associe le point du plan M d'affixe z (de tel sorte que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est d'affixe z). On note A le point d'affixe $1 + 0i$. **Un argument de z est alors une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$** (voir définition 7.42). On notera $\arg(z)$ **un** argument de z (on note que $\arg(z)$ **n'est pas unique**).
- On appelle **argument principal** de z , l'unique argument θ de z tel que $\theta \in]-\pi, \pi]$, c'est-à-dire la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$. On le note $\text{Arg}(z)$.

Remarque. La situation est illustrée par la figure suivante :

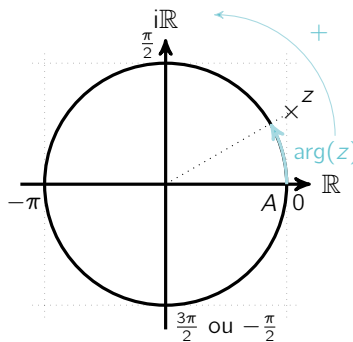


Figure 11.7 – Argument d'un nombre complexe

Exemple. Le complexe i a pour arguments $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ ou plus généralement $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Son argument principal est $\frac{\pi}{2} \in]-\pi, \pi]$.

Remarque. La notion d'argument, de par le fait qu'il n'est en général pas unique, n'est pas toujours pratique à manipuler. Le rôle de l'argument principal est en quelque sorte de créer de l'unicité et de choisir un argument privilégié afin de simplifier les choses. Cette convention n'a pas été choisie aléatoirement. En effet :

- l'intervalle est ouvert en $\theta = -\pi$ pour préserver l'unicité, car on atteint déjà le point $(-1, 0)$ avec l'argument $+\pi$,
- choisir l'argument principal revient à prendre le plus court chemin le long du cercle pour atteindre l'affixe du point : soit en partant dans le sens positif si le point est dans le demi-plan supérieur (la droite réelle comprise), soit en partant dans le sens négatif s'il est dans le demi-plan inférieur.

Proposition 11.31. Soient z et z' deux nombres complexes.

- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\arg(z) = \arg(z') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ si et seulement si z et z' sont non nuls et positivement liés, i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $z = \lambda z'$.
- $\arg(z) = \arg(z') + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ si et seulement si z et z' sont non nuls et liés, i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $z = \lambda z'$.

Démonstration.

- Le premier point provient du fait que si on note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $-z$ alors les angles orientés $(\vec{OA}, \vec{OM})$ et $(\vec{OA}, \vec{OM}')$ diffèrent d'un angle plat puisque M' est le symétrique de M par rapport à l'origine.
- La propriété sur le conjugué découle du fait que si M est le point d'affixe z et M' le point d'affixe $\bar{z}$ alors les angles orientés $(\vec{OA}, \vec{OM})$ et $(\vec{OA}, \vec{OM}')$ sont opposés puisque M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
- Les deux derniers points découlent de la définition d'angle (voir définition 7.29) et de mesure d'angle (voir définition 7.42).

□

Théorème 11.32 – Forme trigonométrique. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors, z s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z))).$$

Cette écriture s'appelle la **forme trigonométrique** de z . On note que $\arg(z)$ est défini à un multiple de 2π près mais peut être défini de façon unique si l'on demande à ce que $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$ (on a alors $\arg(z) = \text{Arg}(z)$).

Démonstration. L'idée de la preuve peut ainsi être résumée par la figure suivante :

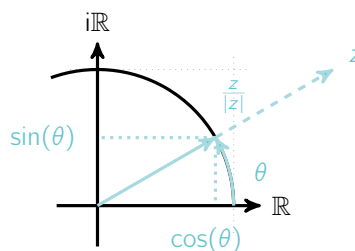


Figure 11.8 – Forme trigonométrique

Soit z un nombre complexe non nul, alors $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. On pose $\theta = \text{Arg}(z) = \text{Arg}\left(\frac{z}{|z|}\right)$. Le point d'affixe $\frac{z}{|z|}$ étant un point du cercle trigonométrique il a des coordonnées de la forme $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ dans le plan euclidien. Ainsi, on obtient que $\frac{z}{|z|} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ et donc $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$. $\square$

Remarque. Les fonctions $\cos$ et $\sin$ étant 2π -périodiques, le fait que la notion d'argument d'un nombre complexe soit définie à un multiple de 2π près ne pose pas de soucis dans l'écriture de la forme trigonométrique.

Corollaire 11.33 – Identification. *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont le même module et le même argument principal.*

Démonstration. Découle du théorème précédent et du fait que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire. $\square$

Méthode – Mettre un nombre sous forme trigonométrique. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Pour mettre z sous forme trigonométrique, on suit les étapes suivantes :

1. on calcule son module $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,
2. on cherche $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Exemple. Donnons la forme trigonométrique du nombre complexe $z = 3 + \sqrt{3}i$. Commençons donc par calculer le module de z : $|z| = \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3}$. Ainsi, on cherche $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\theta) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$. D'après les valeurs remarquables que l'on connaît (voir proposition 7.51) on obtient $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{6} \in]-\pi, \pi]$. La forme trigonométrique de z est donc donnée par $z = 2\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$.

Exercice 11.34. Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

- | | | |
|----------------------|------------|------------------------------|
| 1. $\sqrt{3} - i$, | 3. $-4i$, | 5. $3\sqrt{2} + i\sqrt{6}$, |
| 2. $3 - i\sqrt{3}$, | 4. -5 , | 6. $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$. |

11.3. Exponentielle complexe et forme exponentielle

11.3.1 Exponentielle complexe

Afin de motiver l'introduction de cette nouvelle notation, commençons par un exercice vous permettant d'obtenir une identité qui devrait vous rappeler ce que nous avons

vu dans la section 9.2.

Exercice 11.35. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, est définie par $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Démontrer, en utilisant les formules d'addition 7.55, que pour tous réels θ_1 et θ_2 , on a $f(\theta_1)f(\theta_2) = f(\theta_1 + \theta_2)$.

Définition 11.36 – Exponentielle complexe. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Le point d'affixe $e^{i\theta}$ est le point du cercle trigonométrique d'angle θ (et donc de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$).

Exemples. On a

$$\begin{array}{lll} \circ e^{i0} = e^0 = 1, & \circ e^{i\pi} = -1, & \circ e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ \circ e^{i\frac{\pi}{2}} = i, & \circ e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i, & \circ e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i. \end{array}$$

Proposition 11.37. Si θ et θ' sont deux nombres réels, l'exponentielle complexe satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll} \circ \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}, e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}, & \circ \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}, e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n, \\ \circ e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}, & \circ |e^{i\theta}| = 1, \\ \circ \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}, & \circ \mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}. \end{array}$$

Démonstration. Soient θ et θ' deux nombres réels :

- pour $k \in \mathbb{Z}$, on a $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$ par 2π -périodicité des fonctions trigonométriques,
- l'identité $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$ a été démontrée à l'exercice 11.35,
- on a $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ donc $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$ et $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^0 = 1$.
- par une récurrence, on obtient que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$,
- on a $e^{i\theta}\overline{e^{i\theta}} = e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^0 = 1$ donc $|e^{i\theta}| = 1$,
- l'égalité $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ découle de la définition des fonctions cos et sin.

□

À retenir. Si θ et θ' sont deux nombres réels, alors $\theta = \theta'$ implique que $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ mais la réciproque est fausse car un argument est déterminé à 2π près. On a par exemple $e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{5\pi}{2}}$.

Remarques.

- L'identité $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$, déjà obtenue dans l'exercice 11.35, justifie l'utilisation de la notation exponentielle dans ce contexte puisqu'il s'agit d'une propriété bien connue de la fonction exponentielle réelle (voir la proposition 9.10).
- On peut étendre la définition de l'exponentielle complexe à l'ensemble des nombres complexes en posant, si $z = x + iy$, $e^z = e^{x+iy} = e^xe^{iy}$. Ainsi, si $z \in \mathbb{R}$, on retrouve l'exponentielle réelle et, si $z \in i\mathbb{R}$, on retrouve l'exponentielle complexe définie précédemment. Cette exponentielle complexe possède les mêmes propriétés que celles énoncées précédemment pour l'exponentielle complexe et on notera en particulier que, si $z = x + iy$, $|e^z| = |e^xe^{iy}| = |e^x||e^{iy}| = e^x = e^{\operatorname{Re}(z)}$.

11.3.2 Forme exponentielle

Théorème 11.38 – Forme exponentielle. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors, z s'écrit de manière unique sous la forme

$$z = |z|e^{i\arg(z)}.$$

Cette écriture s'appelle la **forme exponentielle** de z . On note que $\arg(z)$ est défini à un multiple de 2π près mais peut être défini de façon unique si l'on demande à ce que $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$ (on a alors $\theta = \operatorname{Arg}(z)$).

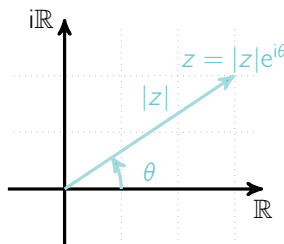


Figure 11.9 – Forme complexe d'un nombre complexe

Démonstration. Soit z un nombre complexe non nul. On a vu à la proposition 11.37 que pour tout nombre complexe z de module 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$, d'où le résultat. $\square$

À retenir. Attention, dans la forme exponentielle le réel devant l'exponentielle complexe doit être positif. Par exemple $-2e^{i\frac{\pi}{5}}$ n'est pas une forme exponentielle. La forme exponentielle de ce nombre complexe est obtenue en notant que $-1 = e^{i\pi}$ et donc $-2e^{i\frac{\pi}{5}} = 2e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{5}} = 2e^{i\frac{6\pi}{5}}$.

Remarque. En rappelant que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, on note que la forme exponentielle n'est rien d'autre qu'une réécriture plus concise de la forme trigonométrique. Ainsi, obtenir la forme trigonométrique d'un nombre complexe nous fournit immédiatement sa forme exponentielle. L'intérêt de la forme exponentielle réside dans le fait que les propriétés de l'exponentielle nous permettent alors de traiter plus facilement les puissances ou les produits de nombres complexes comme nous le verrons plus loin.

Exemple. Donnons la forme exponentielle de $1 + i$. On commence par noter que le module de $1 + i$ est $\sqrt{2}$. On cherche à présent θ tel que $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On obtient donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ et alors la forme exponentielle de $1 + i$ est donnée par $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 11.39. Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique et exponentielle et donner leur argument principal :

- | | | |
|-----------|---------------------|------------------------------|
| 1. 1, | 4. $3i$, | 7. $\sqrt{3} - i$, |
| 2. i , | 5. $1 + i$ | 8. $\frac{1}{\sqrt{3}-i}$, |
| 3. -1 , | 6. $\sqrt{3} - i$, | 9. $(\sqrt{3} - i)^{2024}$. |

Exercice 11.40. Soient $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

- Écrire z_3 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
- En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 11.41. Calculer $e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})}$ sous forme algébrique et en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Nous disposons à présent de trois présentations possibles d'un nombre complexe : la forme algébrique, la forme trigonométrique et la forme exponentielle. La forme trigonométrique sera peu utile d'un point de vue calculatoire mais aura davantage vocation à faire le lien entre la forme algébrique et la forme exponentielle (ou par exemple à nous permettre d'obtenir de nouvelles valeurs des fonctions trigonométriques comme illustré dans l'exercice précédent). Reste donc à déterminer quand utiliser la forme algébrique et quand utiliser la forme exponentielle.

Méthode – Forme algébrique ou forme exponentielle.

- Lorsqu'il y a des **sommes**, on préférera souvent utiliser la forme algébrique.
- Lorsqu'il y a des **produits** ou des **puissances**, on préférera souvent utiliser la forme exponentielle.

Exemple. Donnons la forme algébrique de $(1+i)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. On commence par rappeler que la forme exponentielle de $1+i$ est donnée par $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Alors, $(1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$ et sa forme algébrique est donc $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i2^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

Exercice 11.42.

1. Écrire le nombre complexe $i - \sqrt{3}$ sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle.
2. Trouver la forme exponentielle puis la forme algébrique du nombre complexe $\frac{2}{(1+i)^{10}}$.
3. En déduire la forme algébrique de $\frac{(1+i)^{2000}}{(i-\sqrt{3})^{1000}}$.

Exercice 11.43. On considère le nombre complexe $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Déterminer le module et l'argument principal de z .
2. Déterminer alors le module et un argument de z^{2012} . En déduire la forme algébrique de z^{2012} .

Achevons cette section par une application géométrique de l'utilisation de la forme exponentielle. En effet, cette nouvelle représentation des nombres complexes nous permet de mieux comprendre à quelle transformation géométrique correspond le produit de deux nombres complexes (ce qui était difficile à comprendre sur la forme algébrique).

Proposition 11.44 – Interprétation géométrique du produit entre nombres complexes. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ un nombre complexe de forme exponentielle $z = |z|e^{i\theta}$ et soit $z' \in \mathbb{C}$ et $\vec{u}$ le vecteur de $\mathbb{R}^2$ d'affixe z' . Alors, le vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ d'affixe zz' est obtenue en appliquant à $\vec{u}$ une rotation (centrée à l'origine) d'angle θ et une homothétie de rapport $|z|$.

Démonstration. Si $z' = |z'|e^{i\theta'}$, alors $zz' = |z||z'|e^{i\theta}e^{i\theta'} = |z||z'|e^{i(\theta+\theta')}$. On a donc bien multiplié la longueur du vecteur par $|z|$ et on a ajouté θ à son argument. $\square$

La proposition précédente, et en particulier sa preuve, nous amène naturellement à énoncer les propriétés suivantes qui s'avèrent très utiles pour déterminer des lieux de points décrits par une équation faisant intervenir un argument.

Proposition 11.45. Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Alors,

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Ces deux propriétés proviennent du fait que si $z = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ et $z' = |z'|e^{i\theta'} \in \mathbb{C}^*$ alors (en utilisant la proposition 11.37) :

- $zz' = |z||z'|e^{i\theta}e^{i\theta'} = |z||z'|e^{i(\theta+\theta')}$ est la forme exponentielle de zz' donc $\theta + \theta'$ est un de ses arguments,
- $\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = \frac{|z|}{|z'|} e^{i(\theta-\theta')}$ est la forme exponentielle de $\frac{z}{z'}$ donc $\theta - \theta'$ est un de ses arguments.

Un argument étant définie à un multiple de 2π près, ceci achève notre preuve. □

Remarque. L'argument $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ correspond à une mesure de l'angle orienté compris entre les vecteurs d'affixes z et z' . Plus précisément, si $\overrightarrow{OM}$ est un vecteur d'affixe z et si $\overrightarrow{OM'}$ est un vecteur d'affixe z' alors $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$.

Exercice 11.46.

1. Calculer le module et un argument de $z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $w = 1 - i$.
2. En déduire le module et un argument de $\frac{z}{w}$.

Exercice 11.47. On considère le nombre complexe $Z = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$. Déterminer un argument de Z^{57} . En déduire que Z^{57} est un nombre réel négatif.

Exercice 11.48.

1. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe $z \in \mathbb{C}$ est tel qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg(iz) = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
2. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe $z \in \mathbb{C}$ est tel qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

11.4. Résolution d'équations polynomiales

11.4.1 Second degré à coefficients réels

L'introduction de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, plus gros que l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, nous permet de compléter l'énoncé du théorème 2.16. En effet, dans cet énoncé nous avons montré qu'une équation du second degré à coefficients réels possède deux solutions réelles distinctes si son discriminant est strictement positif et une racine réelle double si son discriminant est nul. Nous avons en revanche conclut

que, si son discriminant est strictement négatif, cette équation ne possède pas de racine réelle.

Théorème 11.49 – Racines réelles et factorisation d'un trinôme. Soient a, b et c des nombres réels avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, alors le trinôme admet exactement deux racines réelles $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors le trinôme admet une unique racine réelle (double) $z_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors le trinôme admet deux racines complexes conjuguées distinctes : $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Démonstration. Nous n'allons pas ici refaire la preuve car la démarche est identique à celle ayant permis d'obtenir le théorème 2.16. Notons simplement que l'on a

$$az^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) = \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \right).$$

□

Remarque. Les trois cas du théorème 11.49 ne sont en fait qu'un seul et même cas : $\sqrt{\Delta}$ et $-\sqrt{\Delta}$ sont les deux réels qui au carré valent Δ si $\Delta > 0$, le seul nombre qui au carré vaut 0 est 0 (cas $\Delta = 0$) et enfin $i\sqrt{|\Delta|}$ et $-i\sqrt{|\Delta|}$ sont les deux nombres complexes qui au carré valent Δ si $\Delta < 0$.

Exercice 11.50. Déterminer les racines des trinômes suivants :

- | | | |
|----------------------|------------------------|----------------------|
| 1. $z^2 + 2z + 8$, | 3. $2z^2 - 16z + 34$, | 5. $z^2 - 6z + 14$, |
| 2. $z^2 - 8z + 19$, | 4. $-2z^2 - 8z - 12$, | 6. $z^2 - 6z + 15$. |

11.4.2 Second degré à coefficients complexes

On se propose ici de généraliser la méthode de résolution des équations du second degré à coefficients réels au cas où les coefficients sont complexes. Comme nous l'avons fait lors de la résolution des équations du second degré à coefficients réels dans la section 2.3, nous allons commencer par résoudre les équations de la forme $z^2 = a$, $a \in \mathbb{C}$.

Définition 11.51 – Racines carrées complexes. Soit $a \in \mathbb{C}$, les **racines carrées complexes** de a sont les nombres complexes qui mis au carré sont égaux à a , i.e. les solutions de l'équation $z^2 = a$.

Remarque. Étant donné un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$, $z^2 = a$ si et seulement si $z^2 - a = 0$ ce qui constitue une équation du second degré. Comme attendu nous allons trouver deux solutions à cette équation qui seront distinctes si $a \neq 0$. De plus, contrairement au cas des nombres réels, il n'y a pas de racine carrée « privilégiée » dans $\mathbb{C}$ (pour rappel, si $a \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{a}$ est l'unique nombre **positif** qui au carré vaut a) et la notation $\sqrt{\cdot}$ n'a donc pas de sens dans le cas complexe.

Exemples.

- Si $a \in \mathbb{R}_+$, les racines carrées complexes de a sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. Par exemple, les racines carrées complexes de 4 sont 2 et -2.
- Si $a \in \mathbb{R}_-$, les racines carrées complexes de a sont $i\sqrt{|a|}$ et $-i\sqrt{|a|}$. Par exemple, les racines carrées complexes de -4 sont 2i et -2i.

Théorème 11.52 – Description des racines carrées complexes. Soit $a = |a|e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$. Alors, a possède exactement deux racines carrées complexes opposées données par

$$z_1 = \sqrt{|a|}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = -z_1 = -\sqrt{|a|}e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{|a|}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}.$$

Démonstration. Il suffit de noter que $z^2 - a = (z - z_1)(z - z_2)$. □

Exemple. Si $a = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors les racines carrées de a sont $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $-\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$. Leurs formes exponentielles (on ne peut pas avoir de - devant notre forme exponentielle) sont ainsi $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

Remarque. Voici une figure illustrant la situation :

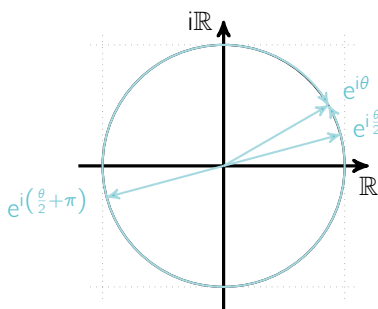


Figure 11.10 – Racines carrées complexes

Comme nous avons eu l'occasion de le voir dans la proposition 11.44, la mise au carré d'un nombre complexe a pour effet de mettre son module au carré et de multiplier l'argument par deux. Ainsi, il est naturel que pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe, nous prenions la racine carrée (réelle) de son module et que nous

divisions l'argument par deux. De plus, le fait qu'il y ait deux racines carrées complexes peut être interprété géométriquement par le fait que pour atteindre le point d'affixe $e^{i\theta}$ du cercle trigonométrique, on peut parcourir le cercle dans le sens trigonométrique ou dans le sens opposé ce qui donne deux façons de diviser l'argument par deux.

- Si on tourne dans le sens trigonométrique, on obtient $\frac{\theta}{2}$.
- Si on tourne dans l'autre opposé, nous avons fait un tour supplémentaire et on obtient donc l'argument $\theta + 2\pi$. On obtient donc $\frac{\theta}{2} + \pi$. On note que le supplément d'argument π revient à prendre l'opposé car $e^{i\pi} = -1$.

Si on considère des complexes de module 1, cela donne la figure 11.10.

Nous avons vu comment déterminer les racines carrées complexes d'un nombre complexe mis sous forme exponentielle mais cela nous demande d'être capables de mettre ce nombre complexe sous cette forme et donc de savoir en déterminer un argument, ce qui n'est pas forcément facile. Nous allons donc donner une méthode permettant de déterminer les racines carrées d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique.

Méthode – Racine carrée d'un nombre sous forme algébrique. Soit $a = u + iv \in \mathbb{C}$. Alors $z = x + iy$ vérifie $z^2 = a$ si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2} & \text{car } |z^2| = |a| \\ x^2 - y^2 = u & \text{car } \operatorname{Re}(z^2) = u \\ 2xy = v & \text{car } \operatorname{Im}(z^2) = v \end{cases}$$

On détermine alors x^2 et y^2 grâce aux deux premières lignes puis les signes de x et y à l'aide de la dernière égalité.

Exemple. Déterminons les racines carrées de $5 + 12i$. On pose $z = x + iy$. Alors,

$$z^2 = 5 + 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{25 + 144} = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases}.$$

En additionnant les deux premières conditions on obtient $x^2 = 9$. On en déduit en injectant cette valeur dans la première condition que $y^2 = 4$. Ainsi, $x = \pm 3$ et $y = \pm 2$. Or, d'après la troisième condition, $xy > 0$, ce qui signifie que x et y sont de même signe. Ainsi, les racines carrées de $5 + 12i$ sont données par $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = -3 - 2i$.

Exercice 11.53. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. i ,

2. $5 - 12i$,

3. $3 + 4i$.

Exercice 11.54. Déterminer les racines carrées de $1+i$ en utilisant la forme exponentielle et la forme algébrique. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Théorème 11.55 – Résolution des équations de degré deux à coefficients complexes. Soient a, b et c des nombres complexes avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ ainsi que $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Alors l'équation (complexe) de degré 2

$$az^2 + bz + c = 0$$

admet deux solutions (éventuellement confondues si $\Delta = 0$) :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

Démonstration. On raisonne exactement comme pour démontrer les théorèmes 2.16 et 11.49. $\square$

Remarque. On note que Δ possède deux racines complexes opposées donc en choisissant δ nous aurons le choix entre ces deux racines. Néanmoins, cela n'a pas d'importance car faire un choix ou l'autre ne fera qu'échanger z_1 et z_2 et les solutions obtenues seront bien identiques.

Exemple. Résolvons l'équation $z^2 + (3 + 2i)z + 5 + 5i = 0$. On a

$$\Delta = (3 + 2i)^2 - 4 \times 1 \times (5 + 5i) = 9 + 12i - 4 - 20 - 20i = -15 - 8i.$$

On cherche alors $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = -15 - 8i$. On a donc $x^2 + y^2 = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$ et $x^2 - y^2 = -15$ donc $x^2 = 1$ et $y^2 = 16$. Ainsi, $x = \pm 1$ et $y = \pm 4$. De plus, $2xy = -8$ donc x et y ne sont pas de même signe et les deux racines carrées de Δ sont $\delta_1 = -1 + 4i$ et $\delta_2 = 1 - 4i$. Alors, en choisissant δ_1 comme racine du discriminant, les solutions de l'équation du second degré de départ sont :

$$z_1 = \frac{-(3 + 2i) - (-1 + 4i)}{2} = \frac{-3 - 2i + 1 - 4i}{2} = \frac{-2 - 6i}{2} = -1 - 3i$$

et

$$z_2 = \frac{-(3 + 2i) + (-1 + 4i)}{2} = \frac{-3 - 2i - 1 + 4i}{2} = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i.$$

Exercice 11.56.

1. Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $3 - 4i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 5iz - 7 + i = 0$.

Exercice 11.57. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + z + 1 = 0$,
2. $iz^2 - 2z - i = 0$,
3. $z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0$,
4. $z^2 - 3(1 - i)z - 5i = 0$.

11.4.3 Racines n -ièmes de l'unité

Au début de la section précédente, nous avons travaillé à la résolution des équations de la forme $z^2 = a$ où $a \in \mathbb{C}$ est donné. Notre but dans cette section est de généraliser ce travail aux équations de la forme $z^n = a$ où $a \in \mathbb{C}$ est toujours donné et n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Définition 11.58 – Racine n -ième. Soit $a \in \mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **racine n -ième** de a , tout nombre complexe z tel que $z^n = a$.

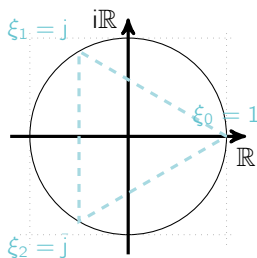
Exemples.

- Si $a = 1$, un nombre complexe tel que $z^n = 1$ est appelé **racine n -ième de l'unité**.
- Pour $n = 2$, les racines n -ièmes sont les racines carrées complexes.

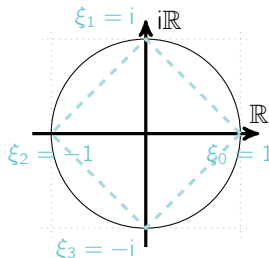
Théorème 11.59 – Racines n -ièmes de l'unité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il y a n racines n -ièmes de l'unité qui sont les nombres complexes

$$\xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

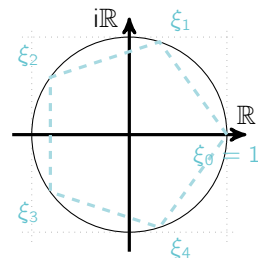
Remarque. Les racines n -ièmes de l'unité correspondent aux sommets de polygones réguliers à n côtés.



(a) Racines 3-ièmes



(b) Racines 4-ièmes



(c) Racines 5-ièmes

Démonstration. Il est aisé de montrer que pour tout k compris entre 0 et $n-1$, $\xi_k^n = 1$. Montrons à présent que ce sont les seules racines n -ièmes de l'unité, i.e. si $z \in \mathbb{C}$ vérifie

$z^n = 1$ alors il existe k compris entre 0 et $n-1$ tel que $z = \xi_k$. Notons $z = |z|e^{i\theta}$ ($z \neq 0$ car $z^n = 1$) et on a donc $z^n = |z|^n e^{in\theta}$.

- Puisque $z^n = 1$ on a $|z|^n = 1$ et donc $|z| = 1$.
- De plus, on a alors $n\theta = 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et donc $\theta = \frac{2k\pi}{n}$. Notons de plus que l'on peut passer de $k \in \mathbb{Z}$ à $0 \leq k \leq n-1$ car si $\theta' = \frac{2(k+n)\pi}{n}$, $e^{i\theta'} = e^{i\frac{2(k+n)\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} e^{2i\pi} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\theta}$.

□

Exercice 11.60. On note j le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Écrire j sous forme exponentielle.
2. Montrer que $j^2 = \bar{j}$, $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.
3. On considère les points A , B et C d'affixes respectives 1, j et j^2 . Démontrer que le triangle $[ABC]$ est équilatéral.

Propriété 11.61 – Racines n -ièmes d'un nombre complexe. Soit $a = |a|e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, a admet exactement n racines n -ièmes distinctes données par

$$\sqrt[n]{|a|} e^{\frac{(\theta+2k\pi)i}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Démonstration. On se ramène au cas des racines n -ièmes de l'unité en notant que $z^n = a$ si et seulement si $\frac{z^n}{|a|e^{i\theta}} = 1$, ce qui équivaut à $(\frac{z}{\sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\theta}{n}}})^n = 1$. Ainsi, $z^n = a$ si, et seulement si, il existe k compris entre 0 et $n-1$ tel que

$$\frac{z}{\sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\theta}{n}}} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

d'où le résultat voulu.

□

Exercice 11.62. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \frac{1}{4}(-1 + i)$ et montrer qu'une seule de ses solutions a une puissance quatrième réelle.

Exercice 11.63. Résoudre les équations suivantes :

1. $z^5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}$,
2. $(z-1)^5 = (z+1)^5$.

Déterminer les racines n -ièmes d'un nombre complexe a consiste à résoudre l'équation de degré n , $z^n = a$. Nous avons vu précédemment qu'une telle équation possède n

solutions distinctes. Achéons ce chapitre par un énoncé, appelé théorème fondamental de l'algèbre, qui généralise ce résultat.

Théorème 11.64 – Théorème de d'Alembert-Gauss. *Pour tout entier naturel $n \geq 1$ et tous nombres complexes $c_0, c_1, \dots, c_n$ avec $c_n \neq 0$, l'équation*

$$c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0 = 0$$

admet au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

Il est important de retenir que ce résultat montre que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos : il n'existe pas d'équations à coefficients complexes de degré au moins 1 qui ne possède pas de solution dans $\mathbb{C}$. Ainsi, le processus consistant à introduire de nouveaux espaces plus gros que les précédents afin de pouvoir résoudre des équations polynomiales à coefficients dans les ensembles existants prend fin ici.

11.5. Applications des nombres complexes

11.5.1 En trigonométrie

L'usage de l'exponentielle complexe permet de considérablement simplifier l'utilisation des formules trigonométriques comme nous allons le voir dans cette section.

Proposition 11.65 – Formules d'Euler. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration. On utilise la forme trigonométrique de z et le fait que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$. □

Méthode – Linéarisation. Pour transformer une expression du type $\cos(\theta)^n \sin(\theta)^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, en une somme de $\cos(p\theta)$ et $\sin(q\theta)$, $p, q \in \mathbb{N}$:

1. on utilise les **formules d'Euler** :

$$\cos(\theta)^n \sin(\theta)^m = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^n \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^m,$$

2. on développe les puissances,

3. on rassemble les termes de même exposant pour retrouver des cosinus et des sinus à l'aide à nouveau des formules d'Euler.

Remarque. La linéarisation est en particulier pratique pour le calcul de certaines intégrales comme nous pourrons le voir dans la section 11.5.2.

Exemple. Linéarisons $\sin(\theta)^3$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a,

$$\sin(\theta)^3 = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \frac{e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i} = -\frac{1}{4} \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} + \frac{3}{4} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Ainsi, $\sin(\theta)^3 = -\frac{1}{4} \sin(3\theta) + \frac{3}{4} \sin(\theta)$.

Exercice 11.66. Linéariser les expressions :

1. $\sin(\theta)^4$,

2. $\cos(\theta)^5$.

Propriété 11.67 – Formule de De Moivre. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Démonstration. On rappelle que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ puis on passe en écriture algébrique. $\square$

Méthode – Délinéarisation. Pour transformer une expression du type $\cos(p\theta)$ ou $\sin(q\theta)$, $p, q \in \mathbb{N}$, en produit et puissances de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$:

1. on utilise les formules de De Moivre

$$\cos(p\theta) = \operatorname{Re}((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^p) \quad \text{et} \quad \sin(n\theta) = \operatorname{Im}((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n),$$

2. on développe les expressions.

Exemple. Délinéarisons $\sin(3\theta)$. On a, $\sin(3\theta) = \operatorname{Im}((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^3)$. Or,

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^3 = \cos(\theta)^3 + 3i \cos(\theta)^2 \sin(\theta) - 3 \cos(\theta) \sin(\theta)^2 - i \sin(\theta)^3.$$

Ainsi, $\sin(3\theta) = 3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta) - \sin(\theta)^3$.

Exercice 11.68. Exprimer en fonction de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et leurs puissances :

1. $\cos(4\theta)$,

2. $\sin(5\theta)$.

Achevons cette section par une méthode très efficace pour déterminer la forme exponentielle d'une somme d'exponentielles complexes.

Méthode – Factorisation par l'angle moitié. Soient θ et θ' deux nombres réels. Alors,

$$e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} \left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}.$$

Exemple. Supposons que θ n'est pas un multiple de 2π , simplifions l'expression $\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$. On factorise par l'angle moitié au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \right)}{e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right)} = i \frac{\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{2i}}{\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}}{2}} = -i \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Exercice 11.69. Montrer que $e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\frac{x+y}{2}}$ et en déduire le module et un argument de $1 + e^{i\theta}$.

11.5.2 En intégration

Méthode – Intégration de puissances de cosinus et sinus. Pour intégrer une fonction définie à partir de puissances de sinus et de cosinus on peut utiliser les formules d'Euler pour linéariser l'expression puis l'intégrer.

Exemple. Calculons $\int_0^x \cos(t)^2 \sin(t)^2 dt$. Pour ce faire, linéarisons $\cos(t)^2 \sin(t)^2$ à l'aide des formules d'Euler :

$$\begin{aligned} \cos(t)^2 \sin(t)^2 &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{24} ((e^{it} + e^{-it})(e^{it} - e^{-it}))^2 = -\frac{1}{8} \frac{e^{4it} + e^{-4it}}{2} + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

et donc $\cos(t)^2 \sin(t)^2 = -\frac{1}{8} \cos(4t) + \frac{1}{8}$.

$$\int_0^x \cos(t)^2 \sin(t)^2 dt = \int_0^x -\frac{1}{8} \cos(4t) + \frac{1}{8} dt = -\frac{1}{32} \sin(4x) + \frac{1}{8} x.$$

Exercice 11.70.

1. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^3 dt$.

2. Déterminer $\int_0^x \cos(t)^3 \sin(t) dt$.

Éléments de théorie des ensembles

L'objectif de cette annexe n'est absolument pas d'être exhaustif. Nous souhaitons seulement ici vous donner quelques éléments de compréhension d'objets de base de la théorie des ensembles dont nous avons eu besoin tout au long de ce livre et qui méritent une attention particulière à défaut, en première lecture, d'être pleinement maîtrisés. Des éléments plus précis à ce sujet sont par exemple présentés dans [Exo] ou encore dans [Tao22].

A.1. Généralités et définitions

La théorie des ensembles est une théorie vaste et complexe dont nous ne verrons ici qu'un aperçu nous permettant d'en manipuler les objets au cours de ce livre. La définition même de ce qu'est un ensemble n'étant pas aisée, nous nous contenterons ici de voir un ensemble comme étant une collection d'objets.

Définition A.1 – Ensemble et élément.

- Un **ensemble** est une collection d'objets distincts.
- Un objet faisant partie de cette collection est appelé **élément** de cet ensemble. On dit alors que cet élément x **appartient** à cet ensemble E et on note $x \in E$. Si tel n'est pas le cas, on note $x \notin E$.
- Un **singleton** est un ensemble à un seul élément. On le note alors $\{x\}$.
- L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé **ensemble vide**, noté $\emptyset$.

Exemple. $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels. 1 est un élément de cet ensemble, i.e. $1 \in \mathbb{N}$, alors que $-2 \notin \mathbb{N}$.

Il existe deux façons usuelles de définir un ensemble.

- **Définition en extension.** On définit l'ensemble en listant ses éléments. Par exemple,

$$A = \{1, 2, 3\} ; B = \{\text{France}, \text{Italie}\} \text{ ou } C = \{\{1\}, \{1, 3\}\}.$$

- **Définition en compréhension (ou intension).** On définit l'ensemble par une propriété qui caractérise ses éléments. Autrement dit, un élément appartient à l'ensemble si, et seulement si, il vérifie la propriété en question. Par exemple,

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est pair}\} \text{ ou } B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \leq 0\}.$$

Exemples. Selon les cas, il peut être plus pratique d'utiliser l'une ou l'autre des définitions.

- On considère l'ensemble A formé par les éléments -1 et 1 . Alors, $A = \{-1, 1\}$ est sa définition en extension alors que $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$ est une définition en compréhension.
- $\{x \in \mathbb{N} \mid \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x = 2^n\}$ est l'ensemble constitué de $1, 2, 2^2, \dots$ et il est ainsi défini en compréhension. On peut aussi le définir en extension par $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Remarque. Pour connaître un ensemble, il suffit de savoir dire quels en sont les éléments. Ainsi, la liste des éléments définissant un ensemble est non-ordonnée et « les répétitions n'ont pas d'importance », i.e. tous les éléments sont distincts. Par exemple :

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{2, 1, 2, 2, 3, 1\}.$$

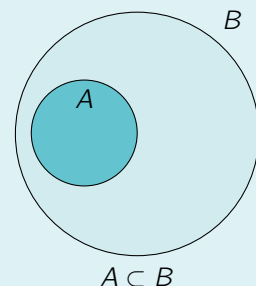
Définition A.2 – Inclusion.

Soient A et B deux ensembles. On dit que A **est inclus dans** B , que A est un **sous-ensemble** de B ou que A est une **partie** de B , et on note $A \subset B$, si tous les éléments de A appartiennent à B . Autrement dit,

$$A \subset B \Leftrightarrow (\text{pour tout } x \in A, \quad x \in B).$$

On dit que A et B sont **égaux** s'ils ont exactement les mêmes éléments. Autrement dit,

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A).$$



Exemples.

- On considère $A = [2, 3]$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 10 < 0\}$. Montrons que $A \subset B$. Commençons par étudier le trinôme $x^2 - 3x - 10$ qui définit l'ensemble B . Son

discriminant vaut 49 donc il admet pour racines -2 et 5 . De plus, on sait que ce trinôme est du signe du coefficient de x^2 (positif ici) sauf entre les racines. Ainsi $x^2 - 3x - 10 < 0$ si et seulement si $x \in]-2, 5[$. Maintenant que l'on connaît bien l'ensemble B , montrons que $A \subset B$. Soit $x \in A$, alors $2 \leq x \leq 3$. Ainsi, on a clairement $-2 \leq x \leq 5$ et donc $x \in B$. On a donc montré que $A \subset B$.

- On considère $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 1\}$ et $B = \{(t + 1, 4t + 3) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Montrons par double inclusion que $A = B$. Commençons par montrer que $B \subset A$. En effet, soit $(x, y) \in B$, alors il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t + 1$ et $y = 4t + 3$. Ainsi, $4x - y = 4t + 4 - 4t - 3 = 1$ donc $(x, y) \in A$. Réciproquement, prenons $(x, y) \in A$ et prouvons que $(x, y) \in B$. S'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t + 1$ et $y = 4t + 3$, alors nécessairement on doit avoir $t = x - 1$. Posons donc $t = x - 1$. Alors,

$$y = 4x - 1 = 4(t + 1) - 1 = 4t + 3.$$

On a alors bien $(x, y) = (t + 1, 4t + 3) \in B$. Ceci achève de montrer que $A \subset B$ et on a donc bien montré par double inclusion que $A = B$.

À retenir. Il faut faire attention à ne pas confondre le signe $\in$ et le signe $\subset$. Dans le premier cas on étudie l'appartenance d'un élément à un ensemble alors que dans le deuxième on compare deux ensembles entre eux. Par exemple, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ et $\{-3\} \subset \mathbb{Z}$.

A.2. Opérations sur les ensembles

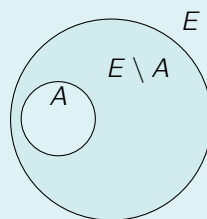
Définition A.3 – Complémentaire.

Soient E un ensemble et A une partie de E . On appelle **complémentaire** de A dans E et on note

$$E \setminus A \quad \text{ou} \quad \complement_E A \quad \text{ou} \quad A^c \quad \text{ou} \quad \overline{A},$$

l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A . Autrement dit,

$$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$



$E \setminus A$: zone colorée

Exemples. Il s'agit d'une notion que l'on a l'habitude d'utiliser :

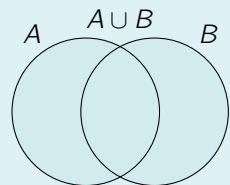
- on a $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_-^*$,
- l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des rationnels (on appelle un tel nombre un nombre irrationnel).

Définition A.4 – Union.

On appelle **union** de deux ensembles A et B et on note $A \cup B$, l'ensemble formé des éléments de A et des éléments de B :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

L'ensemble $A \cup B$ se lit « A union B ».



$A \cup B$: zone colorée

À retenir. Le **ou** utilisé ici est un ou inclusif : un élément qui appartient à la fois à A et à B appartient à $A \cup B$.

Exemples.

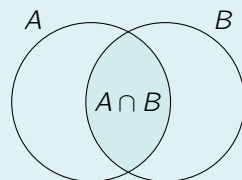
- Si $A = \{1, 2, 6\}$ et $B = \{2, 5, 6, 12\}$. Alors $A \cup B = \{1, 2, 5, 6, 12\}$.
- $\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}$.

Définition A.5 – Intersection.

On appelle **intersection** de deux ensembles A et B et on note $A \cap B$, l'ensemble formé des éléments appartenant **à la fois** à A et à B :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

L'ensemble $A \cap B$ se lit « A inter B » et si $A \cap B$ est l'ensemble vide, i.e. s'il n'y a pas d'éléments à la fois dans A et dans B , on dit que A et B sont **disjoints**.



$A \cap B$: zone colorée

Exemples.

- Si $A = \{1, 2, 6\}$ et $B = \{2, 5, 6, 12\}$. Alors $A \cap B = \{2, 6\}$.
- $\mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+ = \{0\}$ et $\mathbb{R}_-^* \cap \mathbb{R}_+^* = \emptyset$.

À retenir. La définition de l'union fait intervenir le connecteur « ou » et celle de l'intersection le connecteur « et ».

Remarque. Soient A et B deux ensembles, il y a quelques relations que nous pouvons facilement énoncer : $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$ et $A \cap B \subset A \cup B$.

Exemple. Soient A et B deux parties d'un ensemble E telles que $A \cup B = A \cap B$. Montrons que $A = B$. On procède par double inclusion. Soit $x \in A$, alors puisque

$A \subset A \cup B$, on a $x \in A \cup B$. Or, par hypothèse, $A \cup B = A \cap B$ donc $x \in A \cap B$. Puisque, $A \cap B \subset B$ on en déduit que $x \in B$. Donc $A \subset B$. On prouve par un raisonnement similaire que $B \subset A$. Par double inclusion on a donc montré que $A = B$.

Théorème A.6 – Formules de De Morgan. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E , alors $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Démonstration.

- On note que $x \in \overline{A \cup B}$ si et seulement si $x \notin A \cup B$, i.e. si et seulement si $x \notin A$ et $x \notin B$. C'est bien ce que l'on voulait démontrer.
- De plus, $x \in \overline{A \cap B}$ si et seulement si $x \notin A \cap B$, i.e. si et seulement si $x \notin A$ ou $x \notin B$. C'est à nouveau bien ce qu'il fallait démontrer.

□

À retenir. Le passage au complémentaire échange l'union et l'intersection.

Définition A.7 – Produit cartésien. Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E et F et on note $E \times F$ l'ensemble de tous les **couples**, i.e. la donnée de deux éléments dans un ordre déterminé, dont le premier élément est un élément de E et le second un élément de F . On note alors,

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Lorsque les ensembles E et F sont les mêmes, au lieu de noter $E \times E$, on notera E^2 .

Exemples.

- L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
- On représente graphiquement le produit cartésien $\llbracket 1, 4 \rrbracket \times \llbracket 1, 3 \rrbracket$ à la figure A.1.

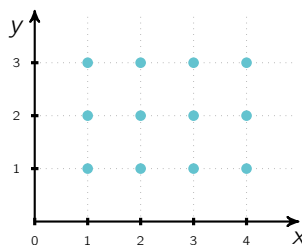


Figure A.1 – Produit cartésien

Contre-exemple. Montrons que $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ne peut pas s'écrire comme un produit cartésien. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $E, F \subset \mathbb{R}$ tels que $D = E \times F$. Alors le point $(1, 0) \in D$ et donc $1 \in E$. De même, $(0, 1) \in D$ et donc $1 \in F$. On en déduit que $(1, 1) \in E \times F = D$ ce qui n'est pas le cas. D n'est donc pas le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Index

- Affixe
 - d'un point, 280
 - d'un vecteur, 280
- Angle
 - cosinus, 174
 - orienté, 173
 - sinus, 175
- Antécédent, 104
- Appartenance, 307
- Application, 104
- Base
 - de $\mathbb{R}^2$, 62
 - de $\mathbb{R}^3$, 64
- Cercle circonscrit, 167
- Coefficient directeur, 70
- Complémentaire, 309
- Composition, 106
- Continuité, 209
- Discriminant, 23
- Distance euclidienne, 165
- Droite
 - coefficient directeur, 70
 - coplanaire, 89
 - de l'espace, 76
 - du plan affine, 65
 - équation cartésienne, 70
 - équation paramétrique, 65, 76
 - orthogonales, 95
 - parallèles, 72
 - perpendiculaire, 96
 - vecteur normal, 97
 - équation réduite, 70
- Dérivabilité, 215
- Déterminant
 - système 2×2 , 46
 - vecteur, 61
- Ensemble, 307
 - de définition, 105
 - stable par une fonction, 148
 - vide, 307
- Équation
 - affine, 17
 - polynomiale, 17
 - produit, 25
 - quotient, 25
- Équation différentielle
 - homogène, 274
 - linéaire du premier ordre, 272
 - méthode de variation de la constante, 276
- Équivalence, 16
- Espace
 - affine, 57
 - euclidien, 99
- Exponentielle, 239
 - complexe, 293
 - de base a , 252
- Extremum, 115
- Fonction
 - asymptote verticale, 192, 196
 - bornée, 115
 - caractérisation séquentielle de la limite, 194

- caractérisation séquentielle de la limite en l'infini, 197
- continue, 209
- courbe représentative, 109
- croissante, 112
- décroissante, 112
- dérivable, 218
- extremum local, 221, 223
- impaire, 117
- limite finie en un point, 192
- limite infinie en un point, 192
- limite à gauche, 198
- limite à l'infini, 195, 196
- maximum local, 221, 223
- minimum local, 221, 223
- monotone, 112
- paire, 117
- puissance, 251
- périodique, 121
- rationnelle, 263
- zéro de, 109
- Forme canonique, 21
- Formule.s
 - angle moitié, 306
 - changement de variable, 269
 - De Moivre, 305
 - Euler, 304
 - intégration par parties, 265
- Identités remarquables, 12
- Image, 104
- Inclusion, 308
- Intersection, 310
- Intervalle
 - borné, 27
 - intersection, 28
 - non borné, 27
 - union, 28
- Intégration
 - primitive, 259
 - sommes de Riemann, 255
 - théorème fondamental de l'analyse, 258
- Inégalité triangulaire, 288
- Logarithme népérien, 245
- Majorant, 115
- Maximum, 115
- Minimum, 115
- Minorant, 115
- Médiatrice, 167
- Nombre complexe, 280
 - argument, 290
 - argument principal, 290
 - conjugué, 283
 - forme algébrique, 280
 - forme cartésienne, 280
 - forme exponentielle, 294
 - forme trigonométrique, 291
 - imaginaire pur, 280
 - module, 286
 - partie imaginaire, 280
 - partie réelle, 280
 - racine n -ième, 302
 - racine de l'unité, 302
 - racines carrées, 298
- Nombre dérivé, 215
- Nombre premier, 8
- Norme, 163
- Partie entière, 236
- Pivot de Gauss, 52
- Plan
 - affine, 57
 - de l'espace, 77
 - équation cartésienne, 78
 - équation paramétrique, 77
 - euclidien, 95
 - parallèle à un plan, 82
 - parallèle à une droite, 82
- Produit cartésien, 311

- Produit scalaire, 93
Produit vectoriel, 95
Projeté orthogonal, 168
- Quantité conjuguée, 13
- Racine carrée, 11
Relation de Chasles, 60
Repère orthonormé, 95
Récurrence
 double, 132
 forte, 133
 simple, 130
- Sous-ensemble, 308
Suite
 arithmético-géométrique, 161
 arithmétique, 156
 bornée, 127
 constante, 128
 convergente, 134
 croissante, 128
 divergente, 134
 décroissante, 128
 définition explicite, 124
 définition par récurrence, 124
 géométrique, 158
 limite finie, 134
 majorée, 127
 minorée, 127
 monotone, 128
 représentation graphique, 125
 stationnaire, 128
- Système, 38
 dilatation, 39
 déterminant, 46
 équivalence, 39
 permutation, 40
 pivot, 36
 transvection, 40
- Tableau de signes, 30
- Taux d'accroissement, 214
Théorème
 des croissances comparées, 242
 de la bijection, 213
 de la limite monotone, 208
 de Rolle, 223
 des accroissements finis, 224
 des bornes atteintes, 214
 des croissances comparées, 249
 des gendarmes, 145
 des valeurs intermédiaires, 211
- Union, 310
- Valeur absolue, 107
Variable
 libre, 52
 liée, 52
- Vecteur
 colinéaires, 60
 coplanaire, 62
 de $\mathbb{R}^2$, 58
 de $\mathbb{R}^3$, 58
 déterminant, 61
 orthogonaux, 94
 unitaire, 173
- Notations
 A^c , 309
 $E \setminus A$, 309
 $E \times F$, 311
 $\text{Arg}(z)$, 290
 $\mathbb{C}$, 280
 Δ , 23
 $\Leftrightarrow$, 16
 $\mathbb{N}$, 6
 $\mathbb{Q}$, 9
 $\mathbb{R}^2$, 36
 $\mathbb{R}^3$, 47
 $\mathbb{R}_+$, 27
 $\mathbb{R}_+^*$, 27
 $\mathbb{R}_-$, 27

- $\mathbb{R}_*$, 27
- $\mathbb{Z}$, 6
- $\arg(z)$, 290
- $[F(t)]_a^b$, 261
- $\mathcal{D}_f$, 105
- $\cap$, 310
- $\mathbb{C}_E A$, 309
- $\cup$, 310
- e^x , 240
- $e^{i\theta}$, 293
- $\exp$, 239
- $i\mathbb{R}$, 280
- $\operatorname{Im}(z)$, 280
- $\in$, 307
- $\int^x f(t) dt$, 261
- $\int_a^b f(t) dt$, 257
- $[\cdot]$, 236
- $\ln$, 245
- $\notin$, 307
- $\bar{A}$, 309
- $\bar{z}$, 283
- $\overrightarrow{AB}$, 58
- $\operatorname{Re}(z)$, 280
- $\subset$, 308
- $\emptyset$, 307
- $\widehat{BAC}$, 173
- a^x , 252
- $g \circ f$, 106

Bibliographie

- [Bar23] C. Bardavid : *Cahier de calcul en maths*. Dunod, 2023.
- [Exo] Exo7 : *Cours et exercices de mathématiques*. <http://exo7.emath.fr/un.html>.
- [LM03] F. Liret et D. Martinais : *Analyse première année*. Dunod, Paris, 2003.
- [Mol] M. Molin : Ancien programme BCPST. <https://molin-mathematiques.fr/cours-exo/Ancien-programme-BCPST>.
- [Per] D. Perrin : Que cherche un mathématicien ? Quelques exemples, de l'antiquité aux problèmes du millenium.
- [Per08] D. Perrin : La suite logistique et le chaos. *Rapport technique, Dép. Math. d'Orsay, Univ. de Paris-Sud, France*, 22, 2008.
- [Rud98] W. Rudin : *Analyse réelle et complexe : cours et exercices*. Dunod, 1998.
- [Tao22] T. Tao : *Le cours d'analyse de Terence Tao*. Dunod, 2022.
- [Wika] Wikipedia : Bernard Bolzano. https://fr.wikipedia.org/wiki/Bernard_Bolzano.
- [Wikb] Wikipedia : Chiffrement RSA. https://fr.wikipedia.org/wiki/Chiffrement_RSA.
- [Wikc] Wikipedia : Crible d'Ératosthène. https://fr.wikipedia.org/wiki/Crible_d%27%C3%89ratosth%C3%A8ne.
- [Wikd] Wikipedia : Evariste Galois. https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89variste_Galois.
- [Wike] Wikipedia : Giuseppe Peano. https://fr.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano.
- [Wikf] Wikipedia : Inconnue. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Inconnue_\(math%C3%A9matiques\)#cite_note-30](https://fr.wikipedia.org/wiki/Inconnue_(math%C3%A9matiques)#cite_note-30).
- [Wikg] Wikipedia : Jérôme Cardan. https://fr.wikipedia.org/wiki/J%C3%A9r%C3%B4me_Cardan.
- [Wikh] Wikipedia : Karl Weierstrass. https://fr.wikipedia.org/wiki/Karl_Weierstrass.
- [Wiki] Wikipedia : Ludovico Ferrari. https://fr.wikipedia.org/wiki/Ludovico_Ferrari.
- [Wikj] Wikipedia : Pierre-François Verlhust. https://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre_Fran%C3%A7ois_Verlhust.
- [Wikk] Wikipedia : Thomas Malthus. https://fr.wikipedia.org/wiki/Thomas_Malthus.