

**INTERROS**

**des lycées**

**2<sup>de</sup>**

**Mathématiques**

En direct des lycées !

**EXCLUSIF**

de vraies interros  
données  
par vos profs

- le **minutage** de chaque interro
- tous les **corrigés** complets et détaillés
- des **rappels de cours** clairs et concis

**A B C**

**Nathan**



**INTERROS**  
des lycées

# 2<sup>de</sup>

## Mathématiques

**Erik de Brauwère**

**Collection dirigée par Éric Maurette**

PRÉPAMATH

**Nathan**

# Avant-Propos

Cet ouvrage est conforme au programme de Mathématiques en vigueur en classe de Seconde à la rentrée 2005.

La présente édition, revue et corrigée, bénéficie d'une nouvelle maquette permettant une lecture encore plus aisée et efficace.

Dans chaque chapitre, on trouvera :

- Un rappel de cours, qui s'appuie sur la résolution pratique d'un exercice type, et qui donne de manière concise tout ce que l'on doit retenir du chapitre étudié.
- Des exercices, qui correspondent à tous les types d'exercices que l'on pourra rencontrer en classe de Seconde, et qui ont tous été réellement posés en lycée. Certains sont des applications immédiates du cours, d'autres nécessitent une réflexion plus approfondie et constituent un bon entraînement pour la classe de Première.
- Enfin, les solutions des énoncés. Certaines sont parfois beaucoup plus détaillées que ce qui est normalement demandé à un élève de Seconde pour un devoir en classe. Ceci est intentionnel, dans le but d'aider l'élève à garder les idées claires sur les notions fondamentales utilisées.

Rappelons notre recommandation traditionnelle : cet ouvrage n'est pas un manuel de classe. L'auteur souhaite que la lecture de ce livre ne se substitue pas au travail en classe, mais qu'elle soit l'occasion d'un dialogue avec le professeur de mathématiques.

Certains paragraphes sont balisés par des pictogrammes :



indique les notions les plus importantes à retenir ;



indique les pièges à éviter ;



indique des conseils de méthodologie ;



indique des parties propres aux techniques de l'information et de la communication. Compte-tenu de la grande «volatilité» de ces informations, il est seulement possible de garantir qu'à la date de rédaction de cet ouvrage, les pages indiquées existaient et contenaient des informations en rapport avec celui-ci.

Je remercie par avance tout lecteur qui me fera part de ses remarques ou suggestions (cf. coordonnées en page finale) et vous souhaite une bonne et profitable lecture.

*L'auteur*

## Remerciements

L'auteur et l'équipe de Prepamath Éditions tiennent à remercier Michel Bovani et Nassim Mokrane pour l'aide précieuse qu'ils ont apportée à cet ouvrage.



*Illustrations* : Patrick DOAN

*Coordination éditoriale* : François DÉLIAC



*Votre avis sur cet ouvrage nous intéresse :*

**[edition.prepamath.com](http://edition.prepamath.com)**

I.S.B.N. 978-209-184485-5

© PRÉPAMATH Éditions, 2006

© Éditions NATHAN, 2007 - 25, av Pierre de Coubertin - 75013 Paris - pour la présente réimpression.

Le premier principe est que l'homme est un être libre. L'autre est l'égalité. Le troisième est la fraternité. Ces trois principes sont les fondements de la République.

Dans l'ordre de la République, il y a trois choses :

• Une loi de la République, qui est la loi de tous.

• Une justice de la République, qui est la justice de tous.

• Une liberté de la République, qui est la liberté de tous.

La République est une forme de gouvernement qui a pour but de garantir la liberté, l'égalité et la fraternité de tous les citoyens.

C'est pourquoi la République est une forme de gouvernement qui a pour but de garantir la liberté, l'égalité et la fraternité de tous les citoyens.

La République est une forme de gouvernement qui a pour but de garantir la liberté, l'égalité et la fraternité de tous les citoyens.

La République est une forme de gouvernement qui a pour but de garantir la liberté, l'égalité et la fraternité de tous les citoyens.

La République est une forme de gouvernement qui a pour but de garantir la liberté, l'égalité et la fraternité de tous les citoyens.

La République est une forme de gouvernement qui a pour but de garantir la liberté, l'égalité et la fraternité de tous les citoyens.

La République est une forme de gouvernement qui a pour but de garantir la liberté, l'égalité et la fraternité de tous les citoyens.

La République est une forme de gouvernement qui a pour but de garantir la liberté, l'égalité et la fraternité de tous les citoyens.

La République est une forme de gouvernement qui a pour but de garantir la liberté, l'égalité et la fraternité de tous les citoyens.

La République est une forme de gouvernement qui a pour but de garantir la liberté, l'égalité et la fraternité de tous les citoyens.

La République est une forme de gouvernement qui a pour but de garantir la liberté, l'égalité et la fraternité de tous les citoyens.

La République est une forme de gouvernement qui a pour but de garantir la liberté, l'égalité et la fraternité de tous les citoyens.

La République est une forme de gouvernement qui a pour but de garantir la liberté, l'égalité et la fraternité de tous les citoyens.

La République est une forme de gouvernement qui a pour but de garantir la liberté, l'égalité et la fraternité de tous les citoyens.

La République est une forme de gouvernement qui a pour but de garantir la liberté, l'égalité et la fraternité de tous les citoyens.

# Sommaire

|         |                                                |            |
|---------|------------------------------------------------|------------|
| Chap. 1 | <b>Nombres</b> .....                           | <b>1</b>   |
|         | Énoncés .....                                  | 15         |
|         | Corrigés .....                                 | 23         |
| Chap. 2 | <b>Ordre</b> .....                             | <b>45</b>  |
|         | Énoncés .....                                  | 51         |
|         | Corrigés .....                                 | 57         |
| Chap. 3 | <b>Fonctions</b> .....                         | <b>73</b>  |
|         | Énoncés .....                                  | 95         |
|         | Corrigés .....                                 | 111        |
| Chap. 4 | <b>Équations et inéquations</b> .....          | <b>143</b> |
|         | Énoncés .....                                  | 153        |
|         | Corrigés .....                                 | 163        |
| Chap. 5 | <b>Géométrie dans l'espace</b> .....           | <b>193</b> |
|         | Énoncés .....                                  | 199        |
|         | Corrigés .....                                 | 205        |
| Chap. 6 | <b>Géométrie dans le plan</b> .....            | <b>217</b> |
|         | Énoncés .....                                  | 229        |
|         | Corrigés .....                                 | 243        |
| Chap. 7 | <b>Coordonnées et systèmes linéaires</b> ..... | <b>281</b> |
|         | Énoncés .....                                  | 297        |
|         | Corrigés .....                                 | 305        |
| Chap. 8 | <b>Statistiques</b> .....                      | <b>333</b> |
|         | Énoncés .....                                  | 339        |
|         | Corrigés .....                                 | 345        |



# Quelques méthodes de travail

Tous les conseils qui suivent sont ceux utilisés par un grand nombre de majors (sortis premiers) de Polytechnique ou de l'ÉNA, par des professionnels de l'organisation et sont également recommandés par de nombreux professeurs.

Pour en savoir plus sur le sujet, nous vous conseillons le livre *Comment travailler plus efficacement*, de E. Matrullo et E. Maurette, aux Éditions Prépamath.

## Faire des «feed-back»

Le «feed-back» est le conseil le plus important et le plus utilisé par ceux qui réussissent brillamment leurs études. Il consiste à contrôler systématiquement, *sans s'aider de notes*, ce que l'on vient d'apprendre (exercices et cours). Ce contrôle peut se faire *mentalement, oralement* ou *par écrit*.

- Dans les transports, essayez de vous rappeler mentalement, et sans vous aider de vos notes, le cours et les exercices vus le matin en classe (*feed-back mental*).
- Après avoir relu votre cours le soir, essayez de retrouver par écrit les principaux paragraphes et démonstrations sans regarder votre leçon (*feed-back écrit*).
- Après avoir résolu un problème, prenez 5 minutes pour contrôler par écrit que vous vous rappelez clairement l'énoncé ainsi que la démarche de résolution (*feed-back écrit*).
- Expliquez à des amis la leçon que vous venez d'apprendre ou l'exercice que vous venez de résoudre : c'est un excellent *feed-back oral*.

Choisissez le type de «feed-back» qui vous convient le mieux et faites-en le plus régulièrement possible (après chaque cours et chaque série d'exercices). Pour être efficace, un «feed-back» doit se faire sans l'aide de vos notes. Ainsi, faire des fiches de résumés de cours à partir de vos cahiers ouverts ne constitue nullement un «feed-back».

## Miser sur la qualité

De nombreux témoignages démontrent que pour obtenir de bons résultats, il est préférable de faire un nombre limité d'exercices, mais plus approfondis, que d'en survoler une grande quantité de piètre qualité. Une tendance très répandue consiste à abattre une grande quantité d'exercices, à la chaîne, mais superficiellement, en espérant que le jour du contrôle, l'on aura déjà vu ce type de problème et que l'on saura s'en souvenir. Cette méthode est absolument inefficace car la seule manière de se souvenir d'un exercice de mathématiques ou de physique, c'est de l'avoir parfaitement compris et assimilé. Ainsi :

- À la fin d'un problème, prenez 5 à 10 minutes pour essayer de trouver un moyen de le généraliser ou de le compliquer (c'est ce que font souvent les professeurs pour concevoir leurs contrôles écrits) ; trouvez ce que cela pourrait changer dans la solution.
- Prenez également l'habitude, après chaque exercice, de faire un «feed-back» en faisant *ressortir la démarche générale et en tissant des liens avec le cours*. Bref, il ne faut pas vous contenter de résoudre l'exercice, mais il vous faut lui apporter de la *valeur ajoutée* et vous interroger sur son contenu.

- *Idem* pour le cours. Ne vous contentez pas de le parcourir de manière passive. Il vous faut avoir la rigueur d'effacer toutes les zones d'ombre. Pour chaque théorème, il faut vous demander quels types d'exercices son utilisation permettra de résoudre.

## Méthode des «couches successives»

Cette méthode, très utile pour les étudiants préparant des examens ou des révisions, peut également être utilisée dès le lycée.

On observe que pour apprendre un gros volume de cours, rien n'est plus inefficace que de l'attaquer de front, de manière linéaire. La bonne manière consiste à d'abord *survoler l'ensemble*, en ne retenant que la structure, c'est-à-dire les grands titres, ainsi que les noms des paragraphes (*première couche*, étape devant durer 5 minutes). Dans l'étape suivante (*deuxième couche*, d'une durée de 10 minutes), on reprend son cours du début en retenant cette fois également les *théorèmes et résultats importants*. Après cette deuxième couche, on a déjà une idée claire de la structure de l'ensemble du cours. On peut alors aborder la dernière étape (*troisième couche*) : on reprend son cours au début pour, cette fois-ci, l'*étudier en profondeur* en apprenant le détail des démonstrations.

Il est à noter que cette méthode peut être également appliquée avec succès à des matières littéraires, ainsi qu'aux révisions du bac de français. Par exemple :

- Pour la *préparation d'un contrôle*, on commencera par passer en revue rapidement l'ensemble du cours et des exercices du chapitre précédemment étudiés, avant de les réviser en détail. Ainsi aura-t-on développé une compréhension synthétique et claire.
- De même, avant d'aborder un *problème volumineux* (tel qu'un contrôle écrit), il est préférable de survoler l'ensemble du problème avant de l'attaquer.

## Rapidité

Pour acquérir de la rapidité, 3 voies sont possibles :

- Prenez l'habitude, en travaillant chez vous, de vous *concentrer sur une seule chose à la fois*, c'est-à-dire ne pas attaquer un problème ou une dissertation, en rêvassant à ce que vous pourriez trouver à manger dans le réfrigérateur ou en écoutant de la musique.
- Prenez l'habitude de travailler chez vous dans les *mêmes conditions qu'en devoirs surveillés*. Le minutage de chacun des exercices de ce livre est fait en ce sens. Cependant, cela ne devrait pas, une fois la résolution faite, vous empêcher d'y réfléchir plus calmement afin de vérifier la bonne assimilation du problème. Si les seuls moments où vous vous pressez sont les contrôles écrits, vous ne deviendrez jamais rapide.
- Essayez de contenir tout votre travail à la maison dans une *plage horaire serrée*. Engagez-vous, par exemple, à travailler chez vous tous les jours entre 18 h et 20 h et efforcez-vous de ne jamais déborder (quelle que soit votre charge de travail). En effet, si l'on ne se donne pas de limite de temps pour accomplir un travail, l'on a naturellement tendance à le laisser traîner en longueur et à rêvasser. L'étroitesse de la plage horaire vous obligera à ne pas vous endormir et à devenir efficace.



## Nombres

*Le pouvoir des nombres fut d'autant plus respecté parmi nous qu'on n'y comprenait rien.*  
(Voltaire)

### 1.1 Les différents types de nombres

#### 1.1.1 Exercice type n° 1

1. Parmi les nombres suivants :  
 $-11$  ;  $2,4$  ;  $\sqrt{7}$  ;  $\sqrt{36}$  ;  $-\frac{2}{3}$  ;  $\frac{21}{3}$  ; quels sont ceux qui sont rationnels, irrationnels, entiers naturels ou relatifs ?
2. Compléter par  $\in$  ou  $\notin$  :  
 $\sqrt{2} \dots \mathbb{R}$  ;  $\sqrt{64} \dots \mathbb{Z}$  ;  $\frac{3}{7} \dots \mathbb{N}$  ;  $\pi \dots \mathbb{Q}$ .

• Lycée Edgar Quinet, Bourg-en-Bresse •

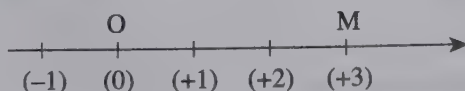
#### 1.1.2 Les nombres réels

Sur une droite  $D$  donnée, choisissons une unité de longueur et un point particulier, que l'on appelle  $O$  (appelé point-origine).

Pour tout point  $M$  sur cette droite, on peut déterminer la distance  $OM$ . Pour indiquer la position du point  $M$ , il suffit de donner la distance  $OM$  et le sens de parcours de  $O$  à  $M$ .

On choisit sur la droite une orientation. Si on va de  $O$  à  $M$  en suivant l'orientation de la droite, on dira que l'abscisse du point  $M$  est  $+OM$  (l'abscisse de  $M$  est donc positive) ; si on va de  $O$  à  $M$  en suivant le sens contraire de l'orientation de la droite, on dira que l'abscisse de  $M$  est  $-OM$  (l'abscisse de  $M$  est alors négative).

**Exemple :** La droite suivante est orientée de gauche à droite. Le point  $M$  est d'abscisse  $+3$ . En effet, pour aller de  $O$  (point origine) à  $M$ , on parcourt une distance de 3 unités de longueur de gauche à droite :



Les abscisses des points de la droite sont appelées des *nombre réels* (du latin *res*, la chose : ils servent à repérer des « choses » concrètes sur la droite).

### 1.1.3 Ensembles et éléments

Prenons l'exemple du groupe « Placebo ». Au sens mathématique, c'est un *ensemble* de trois chanteurs. Le groupe n'est pas lui-même un chanteur. Les trois chanteurs sont les *éléments* du groupe.

Prenons un autre exemple : dans le corps humain, la colonne vertébrale est l'*ensemble* des vertèbres. Mais la colonne vertébrale n'est pas une vertèbre ; les vertèbres sont ses éléments.

Remarquez que l'ensemble a souvent un nom (« Placebo », « la colonne vertébrale », la 2<sup>de</sup> B) ; mais on peut tout aussi bien, pour le désigner, se contenter d'énumérer ses éléments : « Le groupe de B. Molko, S. Olsdal et S. Hewitt ».

*Exemple* : Blanchette, Noiraude, Câline, Joyeuse, sont les quatre vaches du père Bernard. On désigne la même chose par :

- « Le troupeau de Bernard » ;
- « L'ensemble des vaches de Bernard » ;
- « L'ensemble {Blanchette, Noiraude, Câline, Joyeuse} ».



On notera qu'en français, il n'y a pas de différence de sens entre les phrases, entendues après un contrôle de mathématiques :

- « Tous les élèves ont la moyenne. »
- « Chaque élève a la moyenne. »
- « L'ensemble des élèves a la moyenne. »

En mathématiques, la dernière phrase n'a pas de sens. L'ensemble des élèves n'est pas un élève : c'est un groupe de personnes, un objet abstrait. Il n'a donc pas pu faire le contrôle !

En mathématiques, l'ensemble des nombres réels (c'est-à-dire, l'ensemble dont les éléments sont tous les nombres réels) est noté  $\mathbb{R}$  ; celui des nombres réels positifs s'appelle  $\mathbb{R}_+$ , celui des nombres réels négatifs  $\mathbb{R}_-$ .

On utilise la notation \* (étoile) pour indiquer que 0 n'est pas élément de l'ensemble :  $\mathbb{R}^*$  est l'ensemble des nombres réels différents de zéros (on dit « non nuls ») ;  $\mathbb{R}_+^*$  est l'ensemble des nombres réels positifs non nuls (c'est-à-dire, strictement positifs) ;  $\mathbb{R}_-^*$  a pour éléments les réels strictement négatifs.

### 1.1.4 Entiers naturels

Les entiers *naturels* sont les abscisses des points  $M$  qu'on peut construire à partir de  $O$  en reportant la longueur  $OI$ , zéro, une ou plusieurs fois vers la droite. Il s'agit des nombres 0, 1, 2, etc. L'ensemble de ces nombres est noté  $\mathbb{N}$  ( $\mathbb{N}$  comme *Naturel*).

La notation  $\mathbb{N}^*$  désigne l'ensemble des entiers naturels *non nuls*. On dira indifféremment :

- $n$  est un entier naturel ;
- $n$  est un élément de  $\mathbb{N}$  ;
- $n \in \mathbb{N}$  (lire : «  $n$  appartient à  $\mathbb{N}$  »).

**Propriété :** La somme et le produit de deux entiers naturels est un entier naturel. En revanche, l'opposé d'un entier naturel non nul n'est pas élément de  $\mathbb{N}$  (exemple :  $-5 \notin \mathbb{N}$ ).

### 1.1.5 Entiers relatifs

Les entiers *relatifs* (ou *entiers* tout court) sont les abscisses des points  $M$  que l'on peut construire à partir de  $O$  en reportant la longueur  $OI$  autant de fois que l'on veut, d'un côté ou l'autre du point  $O$ . Il s'agit donc des nombres  $0, 1, -1, 2, -2$ , etc.

L'ensemble des entiers relatifs est noté  $\mathbb{Z}$  (de l'allemand *Zahl*, le nombre). Comme pour  $\mathbb{R}$ , on utilise la notation  $\mathbb{Z}_+$  pour l'ensemble des entiers positifs,  $\mathbb{Z}^*$  pour l'ensemble des entiers non nuls, etc.

Il résulte de la définition que les entiers naturels sont les entiers relatifs positifs.  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}_+$  sont deux noms pour le même ensemble.

**Propriété :** La somme, la différence, le produit de deux entiers relatifs est un entier relatif. Attention, le quotient de deux entiers relatifs n'est pas toujours un entier :

$$\frac{6}{2} = 3 \in \mathbb{Z} \text{ mais } \frac{7}{2} \notin \mathbb{Z}$$

### 1.1.6 Les nombres rationnels

Un nombre *rationnel* est un nombre qui peut s'exprimer comme le quotient (ou *rapport*, en latin : *ratio*) de deux entiers, comme  $\frac{1}{2}, \frac{-7}{15}$ , etc. L'ensemble des nombres rationnels est noté  $\mathbb{Q}$  (comme *Quotient*). Bien entendu, on utilise les notations  $\mathbb{Q}^*, \mathbb{Q}_+, \mathbb{Q}_-, \mathbb{Q}_+^*,$  et  $\mathbb{Q}_-^*$ .

**Remarque :** Les nombres entiers sont aussi des nombres rationnels. En effet, tout entier  $n$  peut s'écrire sous la forme :

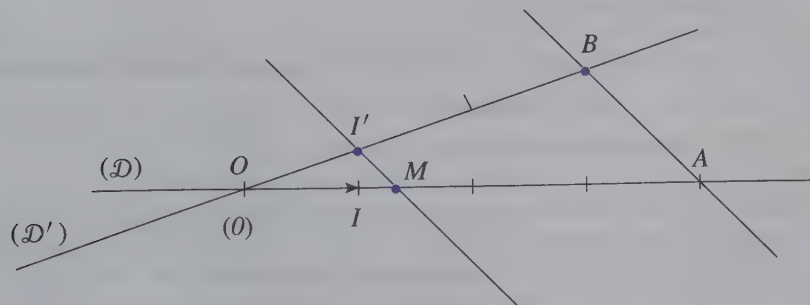
$$n = \frac{n}{1}$$

**Propriété :** La somme, la différence, le produit et le quotient de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

### 1.1.7 Comment construire un point d'abscisse rationnelle sur une droite ?

On peut utiliser le théorème de Thalès : sur la figure, on a représenté un point d'abscisse

$$\frac{4}{3}$$



On utilise une demi-droite auxiliaire, d'origine  $O$ , que l'on gradue (pas nécessairement avec la même unité que  $\mathcal{D}$ ). On appelle  $A$  le point d'abscisse 4 sur  $\mathcal{D}$ , et  $B$  celui d'abscisse 3 sur  $\mathcal{D}'$ . Notons maintenant  $I'$  le point d'abscisse 1 sur  $\mathcal{D}'$ . Par  $I'$ , on mène la parallèle à  $(AB)$ ; elle coupe  $\mathcal{D}$  en  $M$ . D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{OM}{OA} = \frac{OI'}{OB} = \frac{1}{3}$$

et  $OA = 4$ , donc  $OM = \frac{4}{3}$ .  $M$  a bien pour abscisse  $\frac{4}{3}$ .

### 1.1.8 Nombres décimaux

On appelle nombre décimal un nombre réel qui peut s'écrire sous la forme

$$x = \frac{n}{10^k}$$

où  $n$  et  $k$  sont deux entiers (en général, on impose pour des raisons pratiques :  $k \in \mathbb{N}$ ).

*Exemple :* Les trois nombres suivants sont décimaux :

$$\begin{aligned} 7,28 &= \frac{728}{100} = \frac{728}{10^2} \\ \frac{-1}{2} &= \frac{-5}{10} = \frac{-5}{10^1} \\ 3 &= \frac{3}{1} = \frac{3}{10^0}. \end{aligned}$$

*Exemple :*  $\frac{1}{3}$  n'est pas un nombre décimal. Attention ! Si on divise 1 par 3 à la calculatrice, on obtient : 0,333 333 333 3. Ceci n'est pas une écriture décimale *exacte* de  $\frac{1}{3}$ , mais une seule approximation de  $\frac{1}{3}$  par un nombre décimal (voir plus bas).

On note  $\mathbb{D}$  l'ensemble des nombres décimaux.

Les nombres entiers sont des décimaux (car  $n = \frac{n}{10^0}$ ).

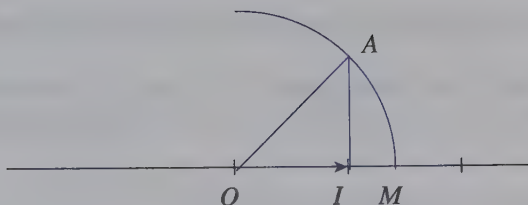
Les nombres décimaux sont des rationnels, car ce sont les quotients d'un entier ( $n$ ) par un entier ( $10^k$ ).

En revanche, tous les rationnels ne sont pas décimaux :  $\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{2}{7}$ , ne sont pas décimaux.

### 1.1.9 Nombres irrationnels

Tous les nombres réels ne sont pas rationnels (loin de là !) Parmi les *irrationnels* (nombres réels qui ne sont pas rationnels), on trouve :  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\pi$ ,  $\pi^2$ ,  $\sqrt{5} - 3$ ,  $-\frac{1}{\pi}$ , etc. L'ensemble des nombres irrationnels est  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  (qui se lit : «  $\mathbb{R}$  privé de  $\mathbb{Q}$  » ou «  $\mathbb{R}$  moins  $\mathbb{Q}$  »).

Certains de ces nombres (malheureusement, pas tous !) peuvent se construire à la règle et au compas. Sur la figure, on a placé le point  $M$  d'abscisse  $\sqrt{2}$  (c'est la longueur de l'hypoténuse du triangle  $OIA$ , rectangle et isocèle en  $I$ ;  $OI = IA = 1$  et  $OA^2 = OI^2 + IA^2 = 2$  d'après le théorème de Pythagore).



### 1.1.9.1 Opération avec les irrationnels

Attention, la somme ou le produit de deux irrationnels n'est pas toujours irrationnelle. Par exemple :

$$(\pi + 1) + (-\pi) = 1 \text{ est entier.}$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \text{ est entier.}$$

### 1.1.9.2 Quelques règles...

- La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est toujours irrationnelle (par exemple,  $\pi + 1$ ,  $\sqrt{2} - 3$ , etc.).
- Le produit d'un rationnel différent de zéro et d'un irrationnel est toujours irrationnel ( $2\sqrt{5}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ , etc.).
- L'inverse d'un irrationnel est irrationnel ( $\frac{1}{\pi}$ ,  $\frac{1}{3 + \sqrt{5}}$ , etc.).
- L'opposé d'un irrationnel est irrationnel ( $-\sqrt{7}$ ,  $-\pi$ , etc.).
- La racine carrée d'un entier est soit entière ( $\sqrt{4} = 2$ ,  $\sqrt{49} = 7$ , etc.) soit irrationnelle ( $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ , etc.).

### 1.1.10 Un nombre et plusieurs formes

Un nombre réel peut être *représenté* de plusieurs façons. Par exemple :

$$\frac{51}{5} = \frac{5,1}{0,5} = 10,2 = 1,02.10^1$$

ou encore :

$$\frac{4}{3} = 1,3\overline{3} \dots$$

Il faut bien comprendre que, quelle que soit la représentation adoptée, il s'agit toujours du *même* nombre. En particulier :

- $\frac{51}{5}$  est un nombre décimal ;
- $\sqrt{9}$  est un nombre entier naturel ;
- 45 est un nombre rationnel ;
- 1,3 est un nombre rationnel ;
- 34,0 est un nombre entier.

Ces qualités (décimal, entier, etc.) sont celles du nombre lui-même et pas de sa représentation.

Ceci dit, selon le nombre rencontré, on préférera un type de représentation, qui permet de voir plus facilement dans quelle ensemble il se trouve. Par exemple, on écrira 3 plutôt que  $\sqrt{9}$ ...

### 1.1.1.1 Solution de l'exercice type n° 1

1. Avant de dire des bêtises, n'oubliez pas de simplifier  $\sqrt{36} = 6$  et  $\frac{21}{3} = 7$ . On peut maintenant classer ces nombres :

- Comme 7 n'est pas le carré d'un entier,  $\sqrt{7}$  est irrationnel.
- $-\frac{2}{3}$  est rationnel mais n'est pas décimal.
- 2,4 est décimal mais n'est pas entier.
- -11 est un entier relatif mais n'est pas un entier naturel (plus simplement, c'est un entier strictement négatif).
- $\sqrt{36}$  et  $\frac{21}{3}$  sont des entiers naturels, même si leur écriture n'est pas entière.

2.  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ;  $\sqrt{64} \in \mathbb{Z}$ ;  $\frac{3}{7} \notin \mathbb{N}$ ;  $\pi \notin \mathbb{Q}$ .

## 1.2 Savoir manier les fractions et les radicaux

### 1.2.1 Exercice type n° 2

Calculer et écrire sans radicaux au dénominateur :

$$A = \frac{7}{\sqrt{2} + 1} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

• Lycée Ampère, Lyon •

### 1.2.2 Règles de calculs avec les fractions

On rappelle ici les différentes techniques vues au collège :

**Somme et différence** On réduit au même dénominateur. Si les dénominateurs sont premiers entre eux, le dénominateur commun est le produit :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

Si les dénominateurs ne sont pas premiers entre eux, on peut trouver un dénominateur commun plus petit que le produit :

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{12}$$

**Produit** Le numérateur du produit est le produit des numérateurs, le dénominateur du produit est le produit des dénominateurs :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Notez qu'il peut être judicieux de décomposer les différents facteurs et simplifier *avant* de multiplier :

$$\frac{32}{35} \times \frac{25}{8} = \frac{4 \times 8}{5 \times 7} \times \frac{5 \times 5}{8} = \frac{4 \times 8 \times 5 \times 5}{5 \times 7 \times 8} = \frac{4 \times 5}{7} = \frac{20}{7}$$

est préférable (si on calcule à la main) à :

$$\frac{32}{35} \times \frac{25}{8} = \frac{800}{280} = \dots = \frac{20}{7}$$

Bien sûr, si vous faites le même calcul à la machine, vous pouvez préférer la deuxième méthode, moins économique mais plus directe.

**Quotient** Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse. Par exemple :

$$\frac{\frac{3}{16}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{16} \times \frac{4}{5} = \frac{3 \times 4}{4 \times 4 \times 5} = \frac{3}{20}$$

**Remarque :** Le mot *fraction* désigne seulement une *écriture* du type :  $\frac{a}{b}$ . Le nombre

ainsi représenté n'est pas nécessairement rationnel. Ainsi,  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  est un nombre irrationnel, écrit sous la forme d'une fraction.

Rassurez-vous : les règles de calculs que nous venons d'énoncer s'appliquent à toutes les fractions, qu'elles représentent ou non un nombre rationnel.

### 1.2.3 Règles de calcul avec les radicaux

Vous avez appris en troisième que, si  $a$  et  $b$  sont deux réels positifs :

1.  $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
2.  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$  (sauf si  $a$  ou  $b$  est nul).
3.  $(\sqrt{a})^2 = a$ . Attention, si  $x < 0$ ,  $\sqrt{x^2} = -x$  ! (Essayez avec  $x = -2$ ).

Précisons le vocabulaire : le mot *radical* désigne une façon d'écrire certains nombres.

2 est une *racine carrée*, (celle de 4), mais ce n'est un radical que si on l'écrit :  $\sqrt{4}$ .

Dans l'écriture des fractions, on évite de laisser des radicaux au dénominateur.

**Cas n° 1** Le dénominateur est un radical. On simplifie en le multipliant par lui-même. Par exemple :

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{3(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

**Cas n° 2** Le dénominateur est une somme contenant des radicaux. On utilise alors la quantité conjuguée. La quantité conjuguée de  $a+b$  est l'expression  $a-b$ . On fait apparaître un produit remarquable, qui permet de se débarrasser des radicaux. Par exemple :

$$\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{2 \times (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 \times (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} \\
 &= \frac{2 \times (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} \\
 &= \sqrt{5} + \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

### 1.2.4 Solution de l'exercice type n° 2

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{7}{\sqrt{2} + 1} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \\
 &= \frac{7 \times (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} + \frac{2\sqrt{3} \times (\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \\
 &= \frac{7 \times (\sqrt{2} - 1)}{2 - 1} + \frac{2\sqrt{3} \times (\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} \\
 &= 7\sqrt{2} - 7 + \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2} \\
 &= 7\sqrt{2} - 7 + 3 + \sqrt{3} \\
 &= 7\sqrt{2} - 4 + \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

## 1.3 Représentation d'un nombre dans une calculatrice

### 1.3.1 Exercice type n° 3

Écrire en notation scientifique, avec 3 chiffres significatifs (en arrondissant éventuellement au plus près) :

1. 37 853 424

2. 0,000 003 458

3.  $3,57 \times 10^5 + 2,22 \times 10^3$

• Lycée Vaugelas, Chambéry •

### 1.3.2 Écriture décimale d'un nombre

De même qu'un mot s'écrit à l'aide de lettres, un nombre entier s'écrit à l'aide de chiffres : 0, 1, ..., 9. Les nombres entiers sont habituellement écrits dans le système *décimal*, (dit aussi à base 10), c'est-à-dire que, dans l'écriture 61, 1 est le chiffre des unités et 6 celui des dizaines. Autrement dit, 61 désigne conventionnellement  $6 \times 10 + 1 \times 1$ . Ceci nous paraît souvent tellement évident que nous n'y prêtons presque plus attention.

De même, l'écriture 1,35 signifie : 1 unité, 3 dixièmes, 5 centièmes, soit :

$$1,35 = 1 + 3 \times 0,1 + 5 \times 0,01$$

En utilisant les puissances de 10 :  $1 = 10^0$ ,  $10 = 10^1$ ,  $100 = 10^2$ , etc. et  $0,1 = 10^{-1}$ ,  $0,01 = 10^{-2}$ , etc., on peut écrire, par exemple :

$$374,25 = 3 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

374,25 est une écriture décimale ;  $\frac{37\,425}{100}$  est une écriture fractionnaire du même nombre.

### 1.3.3 Approximation décimale

Certains nombres n'ont pas d'écriture décimale :  $\frac{1}{3}$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ , etc. Pourtant, lorsqu'on demande  $\sqrt{2}$  à la calculatrice, elle affiche bien : 1,414 213 562. C'est un nombre décimal, le plus proche possible de  $\sqrt{2}$  compte tenu des possibilités d'affichage et de mémoire de la machine. Il s'agit d'une *approximation décimale* de  $\sqrt{2}$ .

En effet, les calculatrices (ou les ordinateurs) sont incapables de faire des calculs sur des nombres non décimaux (même si les plus sophistiquées font très bien semblant !) Pire, comme elles ne peuvent stocker qu'un nombre fini (en général une douzaine) de chiffres, elle doivent utiliser une valeur approchée pour les nombres décimaux trop longs. Nous allons voir comment s'effectue cette approximation.

### 1.3.4 Les chiffres significatifs

Dans la vie courante, les mesures sont données par un nombre décimal, suivi d'une unité : 3,40 €, 1, 25 m, etc.

Si l'on change l'unité, on change le nombre décimal. Par exemple, la même longueur peut être décrite par :

1,25 m, 125 cm, 0,001 25 km, 1 250 mm. Dans tous ces nombres, on remarque la présence des chiffres 1, 2, 5 : ce sont eux qui dépendent vraiment de la longueur mesurée. On dit que ce sont des chiffres significatifs. Les chiffres 0, eux, n'apparaissent qu'à cause du choix de l'unité. Ils ne sont pas significatifs (attention, ils ne sont pas non plus inutiles :  $1\,250\text{ mm} \neq 125\text{ mm}$  !)

Dans 108,23, le 0 est significatif (il ne dépend pas d'une éventuelle unité).



Cas particulier des approximations :

Si l'on écrit :  $x \approx 2,40$ , le 0 est significatif. Il veut dire que l'approximation est bien au centième près (on s'attend à :  $2,39 < x < 2,41$ ).

Si on écrit seulement :  $x \approx 2,4$ , on sous-entend que l'approximation n'est faite qu'au dixième près (donc seulement :  $2,3 < x < 2,5$ ).

### 1.3.5 La notation scientifique

Un nombre *décimal* non nul s'écrit en *notation scientifique* à l'aide d'un nombre décimal (appelé *mantisse*) comportant exactement un chiffre non nul avant la virgule, multiplié par une certaine puissance de 10. L'écriture se présente donc sous la forme :

$$\pm X \times 10^N, \text{ où } N \in \mathbb{Z} \text{ et } 1 \leq X < 10$$

L'exposant,  $N$ , donne l'*ordre de grandeur* du nombre.

Par exemple : 12 345 678 s'écrit, en notation scientifique :  $1,234\,567\,8 \times 10^7$ .

### 1.3.6 Approximation décimale dans une écriture scientifique

Dans de nombreux cas (en physique, notamment), on est amené à manipuler des approximations décimales de nombres réels. En général, il est inutile de donner trop de décimales dans ces approximations, car la précision est de toutes manières limitée par celle des appareils de mesure et les erreurs de manipulation. On donne donc les résultats en notation scientifique, avec (habituellement) seulement deux chiffres après la virgule (en arrondissant le dernier chiffre au plus près), c'est-à-dire que l'on donne 3 chiffres significatifs.

*Exemple* : La machine fournit le résultat : 1 453 267. On donne sur la copie :  $1,45 \times 10^6$ .

Il faut bien comprendre que le 3<sup>e</sup> chiffre après la virgule représente une quantité entre cent et dix mille fois plus petite que celle que l'on mesure, comme le montrent ces deux exemples extrêmes :

$x = 1,009 = 1 + 0,009$ . L'écart entre  $x$  et 1,00 est 0,009 ce qui est environ cent fois plus petit que  $x$  ;

$x = 9,991 = 9,99 + 0,001$ . La valeur  $x$  étant très proche de 10, l'écart de 0,001 entre  $x$  et 9,99 est environ dix mille fois plus petit que  $x$ .

Sauf mention contraire de l'énoncé, il ne faut donc pas donner plus de deux décimales dans l'écriture scientifique.

### 1.3.7 Représentation d'un nombre dans la calculatrice

Nous utilisons ici une calculatrice permettant d'afficher 10 chiffres et utilisant 11 chiffres pour ses calculs. Pour stocker en mémoire un nombre décimal, la machine utilise la notation scientifique. Ainsi, le nombre :

$$35,234\,543\,42$$

est stocké en mémoire sous la forme :

$$3,523454342 \times 10^{+1}$$

La position de la virgule étant obligatoirement entre le premier et le deuxième chiffre, il suffit à la machine de stocker :

- les chiffres de la mantisse : 3 523 454 342 ; c'est ici qu'interviennent les limitations d'affichage et de stockage des nombres par la machine (les limitations de la machine portent donc sur le nombre de *chiffres significatifs*).
- l'exposant de la puissance de 10 : +01.

La calculatrice dispose, pour stocker l'exposant, d'un mécanisme permettant d'écrire 200 nombres entiers de  $-99$  à  $+99$ .

*Remarque* : Les limitations que nous avons décrites apparaissent quel que soit le type de machine que vous utilisez. En revanche, selon le type de machine, le nombre de chiffres affichables et le nombre de chiffres en mémoire changent. Avec une calculatrice affichant 10 chiffres significatifs et travaillant en mémoire avec 13, il faut adapter nos remarques en ajoutant quelques zéros supplémentaires...



T. I. C. E.

Certains logiciels dits de « calcul formel » permettent :

- de représenter en mémoire les nombres décimaux avec autant de chiffres que nécessaires (limités en fait par la capacité de mémoire de la machine : cependant, 100 MO permettent d'écrire un nombre de plusieurs centaines de millions de chiffres...)
- de représenter les autres nombres de façon formelle (on écrit en mémoire non pas 0,33333333... mais bien  $\frac{1}{3}$ , par exemple).

Ces logiciels ne sont pas, bien sûr, soumis aux limitations que nous avons décrites. Ils peuvent être installés sur des ordinateurs ou certaines machines « haut de gamme ». Par ailleurs, la plupart des machines de modèle courant, disposent de certaines fonctionnalités de ce type (calcul sur les fractions, par exemple).

### 1.3.8 Solution de l'exercice type n° 3

1.  $37\,853\,424 = 3,785\,342\,4 \times 10^7 \approx 3,79 \times 10^7$ .
2.  $0,000\,003\,458 = 3,458 \times 10^{-6} \approx 3,46 \times 10^{-6}$ .
3.  $3,57 \times 10^5 + 2,22 \times 10^3 = 357 \times 10^3 + 2,22 \times 10^3 = 359,22 \times 10^3 \approx 3,59 \times 10^5$ .

## 1.4 Décomposition des entiers

### 1.4.1 Exercice type n° 4

Décomposer  $28 \times 45$  et  $50 \times 27$  en facteurs premiers en en déduire leur pgcd.

*Lycée de Montgeron*

### 1.4.2 Rappels : nombres entiers premiers entre eux

En troisième, vous avez vu que deux nombres sont premiers entre eux si et seulement si leur plus grand diviseur commun (c'est-à-dire, le plus grand entier qui les divise tous les deux) est 1.

*Exemple* : 8 et 15 sont premiers entre eux, car 8 a pour diviseurs : 1, 2, 4, 8.  
15 a pour diviseurs : 1, 3, 5, 15.

Le seul (et donc le plus grand !) diviseur commun est 1, ce que l'on note :

$$\text{pgcd}(8, 15) = 1$$

(pgcd signifie « plus grand commun diviseur »).

Comme il est parfois fastidieux de donner la liste de tous les diviseurs de deux nombres pour les comparer ensuite, vous avez étudié l'algorithme d'Euclide. On commence par diviser un des nombres par l'autre. Puis, à chaque étape, on divise le diviseur de l'étape précédente par le reste.

Dans le cas de 15 et 8 :

On divise 15 par 8, le quotient est 1, il reste 7 ;

on divise 8 par 7, le quotient est 1, il reste 1 ;

on divise 7 par 1, le quotient est 7, il reste 0.

Le dernier reste non nul était 1, donc  $\text{pgcd}(15, 8) = 1$ .

### 1.4.3 Nombres premiers

Tout nombre entier non nul est divisible par 1 et par lui-même. Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet donc au moins 2 diviseurs (1 et lui-même).

Un nombre *premier* est un nombre entier strictement positif qui admet exactement 2 diviseurs positifs distincts. On vérifie que 1 n'est pas premier (un seul diviseur !) 2 est premier, 3 est premier, 4 n'est pas premier (divisible par 1, 2 et 4), 5 est premier, etc.

Il vous est (amicalement) conseillé d'apprendre par cœur les 10 plus petits nombres premiers :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$$

### 1.4.4 Comment décomposer un entier en facteurs premiers ?

Tout entier non nul admet une unique décomposition en produit de facteurs premiers. Pour la déterminer, on tente de diviser l'entier par le plus petit nombre premier possible. On calcule le quotient, puis on recommence l'opération avec ce quotient, et ainsi de suite, jusqu'à obtenir le quotient 1. On a ainsi la décomposition en facteurs premiers.

*Exemple* : Décomposons 90 en facteurs premiers : 90 est multiple de 2, et  $90 = 2 \times 45$ . 45 n'est pas multiple de 2, mais de 3, et  $45 = 3 \times 15$ .

Enfin,  $15 = 3 \times 5$ .

On présente (et on effectue) les calculs dans un petit tableau :

|    |  |   |
|----|--|---|
| 90 |  | 2 |
| 45 |  | 3 |
| 15 |  | 3 |
| 5  |  | 5 |
| 1  |  |   |

On a donc :

$$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$$

Que se passe-t-il si on rencontre un nombre qui n'a pas de diviseur évident ? Considérons par exemple 113. On constate :

113 ne se termine pas par un chiffre pair, donc il n'est pas divisible par 2.

$1 + 1 + 3 = 5$  n'est pas divisible par 3, donc 3 n'est pas diviseur de 113.

113 ne se termine pas par 0 ou 5 donc il n'est pas divisible par 5.

$7 \times 16 = 112$  donc 113 n'est pas divisible par 7.

Doit-on continuer ainsi avec 11, 13, 17, 19, 23, etc. ? En fait, ce n'est pas la peine.

Nous venons de voir que 113 n'a pas de diviseur *premier* inférieur strictement à 11. Mais en fait, on peut en déduire que 113 n'a pas de diviseur *tout court* strictement inférieur à 11 (sauf 1, bien sûr !). Si par exemple, 6 divisait 113, alors on aurait trouvé 2 et 3 comme diviseurs premiers.

Si on peut écrire  $113 = p \times q$ , (avec  $p$  et  $q$  des entiers naturels différents de 1), nous avons donc  $p \geq 11$  et  $q \geq 11$ . Mais alors  $p \times q \geq 11^2 = 121$ . L'écriture  $113 = p \times q$  est donc impossible.

On conclut que 113 est premier.



#### À retenir (Critère pratique)

Soit  $n$  un entier. Si  $n$  n'est divisible par aucun des nombres premiers 2, 3, ...,  $q$  et que  $q^2 > n$  alors  $n$  est premier.

*Exemple :* Montrons que 127 est premier : il n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. On a  $7 \times 18 = 126$ , donc 127 n'est pas non plus multiple de 7. 11 ne divise pas 127 car  $11^2 = 121$  et  $11 \times 12 = 132$ . Le nombre premier suivant est 13. Or,  $113 < 13^2$  car  $13^2 = 169$ , donc 127 est premier.

*Remarque :* Dans le calcul de la décomposition, on ne reprend pas, à chaque ligne, la liste des nombres premiers au début. Par exemple, si l'on étudie 1 139, on montre que cet entier n'est divisible ni par 2, ni par 3, 5, 7, 11, ou 13, mais que  $1\ 139 = 17 \times 67$ . Il ne faut pas se demander si 67 est divisible par 2, 3, etc. ! On sait tout de suite que 67 n'a pas de diviseur premier inférieur à 17 (sinon, 1 139 en aurait eu aussi...). Maintenant, comme il est assez évident que  $67 < 17^2$  (sans même calculer  $17^2$ , n'est-ce-pas ?), on affirme directement que 67 est un nombre premier (critère pratique).

### 1.4.5 Comment trouver le PGCD de deux nombres à l'aide de leur décompositions ?

Lorsqu'on connaît la décomposition de deux entiers en facteurs premiers, on forme leur pgcd en multipliant les facteurs premiers apparaissant dans les deux décompositions, affectés du plus petit exposant.

*Exemple :* On se donne :  $16\ 632 = 2^3 \times 3^3 \times 7 \times 11$  et  $1\ 620 = 2^2 \times 3^4 \times 5$ . Leur pgcd vaut :  $2^2 \times 3^3 = 108$ .

### 1.4.6 Solution de l'exercice type n° 4

On décompose  $28 = 4 \times 7 = 2^2 \times 7$  et  $45 = 9 \times 5 = 3^2 \times 5$ . D'où :  $28 \times 45 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ .

On décompose  $50 = 2 \times 25 = 2 \times 5^2$  et  $27 = 3^3$ . D'où :  $50 \times 27 = 2 \times 3^3 \times 5^2$ .

On en déduit leur pgcd :  $2 \times 3^2 \times 5 = 90$ .



# Énoncés | chapitre 1

## 1 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Jacques Prévert, Taverny 10 min.

Pour chaque nombre, donner le plus petit ensemble, parmi  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  auxquels ils appartiennent :

$$5 \times 10^{-4} \quad \frac{3,6 \times \sqrt{4}}{3} \quad \frac{64}{3} \quad \sqrt{\frac{25}{16}} \quad \sqrt{\frac{49}{9}}$$

## 2 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Montchapet, Dijon 10 min.

Parmi les nombres suivants :

$$4,567, 10^{-3}, -10^3, 6545, 4 \times 10^{-3}, \sqrt{\pi}, -\frac{3}{100}, \frac{1}{3}, -\frac{22}{9}, \sqrt{3}, \\ \sqrt{144}, 0, \frac{2}{\pi}, -\frac{23}{6}, \sqrt{\sqrt{81}}$$

1. Quels sont ceux qui sont décimaux ?
2. Quels sont ceux qui sont rationnels mais non décimaux ?
3. Quels sont ceux qui ne sont pas rationnels ?

## 3 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Victor Louis, Talence 15 min.

On considère les nombres suivants :

$$a = 3,507$$

$$b = 5998$$

$$c = \sqrt{121}$$

$$d = 3,14$$

$$e = \frac{21}{6}$$

$$f = \pi$$

$$g = 4 \times 10^{-3}$$

$$h = \frac{1}{3}$$

$$i = 5^{-2}$$

$$j = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{8}{5} \times \frac{17}{12}$$

$$k = -\frac{22}{7}$$

$$l = \sqrt{2}$$

$$m = (3^2)^3 \times \frac{1}{9} \times 5^{-4}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{9-5\sqrt{3}}{10}$$

1. Quels sont les nombres décimaux ?
2. Quels sont les nombres rationnels non décimaux ?

3. Quels sont les nombres non rationnels ?

## 4 ★ 15 min. Lycée Gérard-de-Nerval, Soissons

Compléter par  $\in$ ,  $\notin$ ,  $\subset$ ,  $\not\subset$ .

1.  $\frac{-15}{3} \dots \mathbb{Z}$

2.  $\sqrt{9} \dots \mathbb{N}$

3.  $\mathbb{Z} \dots \mathbb{Q}$

4.  $\pi \dots \mathbb{Q}$

5.  $\mathbb{N} \dots \mathbb{Q}^*$

6.  $10^{-3} \dots \mathbb{R}_+$

## 5 ★ 5 min. Lycée Henri IV, Paris

Écrire sous la forme  $2^n \times 3^p \times 5^q$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{Z}$  :

1.  $A = \frac{5^3 \times 8^3 \times 9^2}{15^2 \times 12^4}$

2.  $B = \frac{12^3 \times 15^{-3}}{5^{-2} \times 2^3}$

## 6 ★ 5 min. Lycée Hoche, Versailles

Simplifier l'écriture de  $A = \frac{(0,2)^3 \times 10^4}{2^3 \times 81} : \frac{-8^3 \times 15}{(-12)^5}$ .

## 7 ★ 10 min. Lycée Louis-le-Grand, Paris

Calculer :

1.  $A = \frac{-1^5(2^3)(-7)^4}{21^2(-6)^3}$

2.  $B = \frac{3 - \frac{1}{4}}{2 + \frac{1}{4}} \times \frac{\frac{4}{15} - \frac{1}{10}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} : \frac{1 + \frac{2}{5}}{2 - \frac{1}{5}}$

## 8 ★ 5 min. Lycée Henri IV, Paris

Simplifier afin que le résultat contienne au plus un radical  $\sqrt{b}$ , où  $b \in \mathbb{N}$ , et  $b$  est le plus petit possible.

1.  $C = \sqrt{27} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{12}$

$$2. D = \sqrt{\frac{6,3}{2,8}} \times \sqrt{\frac{18}{0,72}}$$

## 9 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Charlemagne, Paris

10 min.

Écrire  $A$  et  $B$  sous la forme  $a + \sqrt{b}$ , où  $a$  et  $b$  sont rationnels.

$$1. A = \frac{3}{\sqrt{5} + 2}$$

$$2. B = \frac{2\sqrt{5} + 3}{\sqrt{5} - 1}$$

## 10 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Jean Zay, Orléans

5 min.

Calculer la valeur de l'expression  $A$  pour  $x = \frac{-1}{3}$  et  $y = \frac{5}{2}$  :

$$A = 18x^3y - 4xy^2 - y^3$$

## 11 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Louis-le-Grand, Paris

5 min.

Calculer

$$A = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} + 8\sqrt{2}$$

## 12 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Gérard de Nerval, Soissons

5 min.

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

$$1. A = 0,0024 \times 10^7 \times 96 \times 10^{-3}$$

$$2. B = \frac{72 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^5}{15 \times 10^2 \times 4 \times 10^{-1}}$$

## 13 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Théodore de Banville, Moulins

5 min.

On pose  $x = 9 \times 10^7$  et  $y = 3,6 \times 10^8$ . Calculer les nombres :  $xy$ ,  $x + y$ ,  $x - y$ ,  $\frac{x}{y}$ .

On donnera les résultats en notation scientifique.

## 14 ★ \_\_\_\_\_ Lycée du Parc, Lyon

10 min.

Donner l'écriture décimale puis l'écriture scientifique des réels suivants :

$$E = \sqrt{0,25 \cdot 10^6} \quad F = \frac{0,000\,273}{0,03} \quad G = \frac{3}{25} \cdot 10^{-4}$$

# 15★ Lycée Stanislas, Paris

20 min.

Décomposer en produits de facteurs premiers les nombres suivants :

$$75, \quad 132, \quad 63 \times 42, \quad 36 \times 81, \quad 824, \quad 16 \times 17 \times 18$$

# 16★ Lycée Saint Joseph, Avignon

15 min.

Donner la liste des diviseurs de 54, 80, et 250.

# 17★ Lycée René Cassin, Bayonne

25 min.

Parmi ces nombres, lesquels sont premiers ? Donnez s'il y a lieu leur plus petit diviseur premier :

79, 87, 97, 91, 61, 75.

# 18★ Lycée Emmanuel Mounier, Grenoble

5 min.

On a planté des arbres également espacés sur le pourtour d'un terrain triangulaire dont les côtés mesurent 144 m, 180 m et 240 m. Sachant qu'il y a un arbre à chaque sommet et que la distance entre deux arbres consécutifs est un nombre entier de mètres, compris entre 5 et 10, calculez cette distance et le nombre d'arbres plantés.

# 19★ Lycée Raspail, Paris

5 min.

On veut faire carreler une pièce rectangulaire de 4,20 m sur 2,24 m. Sachant que les carreaux employés sont des carrés dont la longueur est un nombre entier de centimètres, compris entre 10 et 25, calculer cette longueur.

# 20★★ Lycée Madame de Staël, Montluçon

10 min.

Compléter le tableau suivant par VRAI ou FAUX. Justifier la réponse FAUX.

| $P$                   | $Q$                                | Si $P$ alors $Q$ | Si $Q$ alors $P$ | $P$ équivaut à $Q$ |
|-----------------------|------------------------------------|------------------|------------------|--------------------|
| $x$ est multiple de 5 | le chiffre des unités de $x$ est 5 |                  |                  |                    |
| $x = 2$               | $x^2 = 4$                          |                  |                  |                    |
| $\frac{1}{x} > 0$     | $x > 0$                            |                  |                  |                    |

## 21 ★★ ————— Lycée Romain Rolland, Ivry-sur-Seine

10 min.

Calculer et simplifier :

$$1. \frac{\frac{2}{7} + \frac{5}{21}}{\frac{5}{9} - \frac{1}{3}}$$

$$2. \frac{(2^{23})^{15}}{2^{1000}}$$

$$3. \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{5} + 1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$4. \frac{(0,06)^4 \times (1,6)^{-3}}{30 \times (0,0002)^{-10}}$$

## 22 ★★ ————— Lycée André Malraux, Biarritz

10 min.

1. Écrire  $(3 - \sqrt{11})^2$  sous la forme  $a + b\sqrt{11}$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres entiers relatifs.

2. Quel est le signe de  $3 - \sqrt{11}$  ?

3. En déduire une autre écriture de  $\sqrt{20 - 6\sqrt{11}}$ .

## 23 ★★ ————— Lycée Blaise Pascal, Orsay

20 min.

$$1. \text{ Calculer } A = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{6}}$$

$$2. \text{ Simplifier } B = \frac{(5^2 \times 10^{-5})^3}{(5 \times 10^{-3})^5} \times \left(\frac{10^2}{5}\right)^2$$

3. Écrire plus simplement :

$$(a) \ C = 2^{23} \times (0,5)^{24}$$

$$(b) \ D = \left(\frac{2}{3}\right)^{108} \times (1,5)^{107}$$

4. Écriture scientifique de :

$$a = 0,000073654$$

$$b = 9325000$$

$$c = 0,023 \times 10^{-5}$$

$$d = 19,402 \times 10^2$$

## 24 ★★ Lycée Condorcet, Paris

25 min.

$a$  et  $b$  étant deux réels strictement positifs, on définit  $A$ ,  $G$ ,  $H$ , par :  $A = \frac{a+b}{2}$ ,  $G = \sqrt{ab}$ ,  $\frac{2}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

1. Calculer  $A$ ,  $G$ ,  $H$ , sachant que  $a = \sqrt{7}$  et  $b = 4\sqrt{7}$ . Comparer  $A$ ,  $G$ , et  $H$  (justifier).
2. Mêmes questions avec  $a = 2^4$  et  $b = 2^2 \times 3^{-2}$ .

## 25 ★★ Lycée Hoche, Versailles

15 min.

1. Simplifier :

$$I = \sqrt{50} - 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{18}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$J = 7\sqrt{\frac{3}{7}} \times \sqrt{\frac{30}{49}}$$

$$K = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$L = \left( \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \right)^2$$

2. Calculer  $(2 - \sqrt{13})^2$  et en déduire une écriture plus simple de  $Y = \sqrt{17 - 4\sqrt{13}}$

## 26 ★★ Lycée Hoche, Versailles

5 min.

Écrire sous la forme d'un produit de puissances de  $a$ ,  $b$  et  $c$  ( $\neq 0$ ) :

$$B = \left( \frac{a^3}{c} \right)^2 : \frac{[(a^7)^5 b^{-2} (c^{-3})^{-2}]^{-1}}{[ab^2(c^{-2})^{-3}]^2}$$

## 27 ★★ Lycée Louis-le-Grand

15 min.

Écrire sous la forme d'une fraction :

$$A = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

En déduire :

$$B = \frac{1}{10 \times 11 \times 12 \times 13} + \frac{1}{11 \times 12 \times 13 \times 14} + \cdots + \frac{1}{19 \times 20 \times 21 \times 22}$$

## 28 ★★ ————— Lycée René Cassin, Gonesse

10 min.

Trouver l'entier naturel  $a$  tel que la différence entre son quotient par  $\frac{2}{3}$  et son produit par  $\frac{2}{7}$  soit égale à 221.

## 29 ★★ ————— Lycée Descartes, Tours

15 min.

1. Trouver deux réels sachant que leur quotient est égal à  $\frac{23}{5}$  et leur somme égale à  $\frac{35}{3}$ .

2. Même question, sachant que le quotient est cette fois de  $\frac{17}{8}$  et la somme égale à  $\frac{23}{28}$ .

Dans les deux cas, donnez les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

## 30 ★★ ————— Lycée Vial, Nantes

10 min.

Quel est le plus petit nombre possible par lequel on peut diviser 756 pour obtenir un carré parfait ?

## 31 ★★ ————— Lycée Robespierre, Arras

10 min.

Sans calculer les nombres  $p$  et  $q$ , justifier que  $q$  est un diviseur de  $p$  et déterminer le quotient exact de  $p$  par  $q$ .

On donne  $p = 2^3 \times 5^4 \times 7^2 \times 13^3$  et  $q = 2^2 \times 5^4 \times 7$

## 32 ★★ ————— Lycée Alain, Alençon

5 min.

Décomposer en produits de facteurs premiers les nombres suivants :

1. 108, 144, 80, 90, 2 520, 8 000.

2. 84, 250, 864

## 33 ★★ ————— Lycée Raspail, Paris

15 min.

Décomposer en produits de facteurs premiers les nombres :

1.  $36 \times 42$ ,  $72 \times 77$ ,  $108 \times 75$

2.  $84 \times 25 \times 121$ ,  $36 \times 27 \times 45$

3.  $65 \times 49 \times 24$

### 34 ★★ ————— Lycée Jeanne d'Arc, Clermont-Ferrand

5 min.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Expliquer pourquoi

1. 2 divise  $n(n+1)$ .
2.  $n$  et  $n+1$  sont premiers entre eux.
3. Les deux entiers  $n$  ou  $n+1$  sont-ils nécessairement premiers ? (Donner un exemple).

### 35 ★★ ————— Lycée Saint Paul, Lille

10 min.

Sachant que, si  $x = 3$ , alors  $x^2 + x + 1 = 13$ , déterminer les valeurs  $n$  telles que 13 divise  $n^2 + n + 1$  (on posera  $n = 3 + p$ ).

### 36 ★★ ————— Lycée Jean Monnet, Bruxelles

5 min.

Des autobus partent de la gare dans quatre directions différentes. Les départs ont lieu respectivement toutes les 5, 8, 12 et 18 minutes. Le premier départ a lieu simultanément à 5 heures du matin. À quelles heures ont lieu les autres départs simultanés de la journée ? (il n'y a plus de départ après minuit).

### 37 ★★ ————— Lycée Louis-le-Grand, Paris

15 min.

Déterminer un nombre de trois chiffres sachant que :

1. la somme des chiffres est 18 ;
2. il augmente de 18 quand on permute les deux derniers chiffres ;
3. il diminue de 360 quand on permute les deux premiers chiffres.

### 38 ★★★ ————— Lycée Camille Jullian, Bordeaux

25 min.

Décomposer en produits de facteurs premiers les nombres :  $108^2$ ,  $72^3$ ,  $24^2 \times 33^2 \times 11^5$

### 39 ★★★ ————— Lycée Champollion, Grenoble

10 min.

Trouver un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que :

$$n(n+1)(2n+1) = 2\,310$$

## 1 \_\_\_\_\_ Lycée Jacques Prévert, Taverny

- $5 \times 10^{-4} = 0,0005$  est un nombre décimal ;
- $\frac{3,6 \times \sqrt{4}}{3} = 1,2 \times 2 = 2,4$  est un nombre décimal ;
- $\frac{64}{3}$  est rationnel (mais non décimal) ;
- $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4} = 1,25$  est décimal ;
- $\sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3}$  est rationnel, non décimal.

## 2 \_\_\_\_\_ Lycée Montchapet, Dijon

- Rappel : Un nombre est *décimal* s'il s'écrit sous la forme :

$$\frac{n}{10^k}$$

où  $n$  et  $k$  sont des entiers. En particulier, les nombres entiers sont des décimaux, puisqu'ils s'écrivent :

$$n = \frac{n}{10^0}$$

Parmi ceux proposés, sont décimaux :  $4,567$  car  $4,567 = \frac{4567}{1000}$  ;  $10^{-3}$  car  $10^{-3} = \frac{1}{1000}$  ;  $-10^3 = -1000$  est entier ;  $6545$  est entier ;  $4 \times 10^{-3}$  car  $4 \times 10^{-3} = \frac{4}{1000}$  ;  $-\frac{3}{100}$  ;  $\sqrt{144} = 12$  est entier ;  $0$  est entier ;  $\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3$  est entier.

- Sont rationnels mais non décimaux :  $\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{22}{9}$ ,  $-\frac{21}{6}$
- Sont irrationnels :  $\sqrt{\pi}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\frac{2}{\pi}$ .

## 3 \_\_\_\_\_ Lycée Victor Louis, Talence

$a$  est décimal ;

$b$  est entier, donc décimal ;

$c = \sqrt{121} = 11$  est entier, donc décimal ;

$d = 3,14$  est décimal ;

$e = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5$  est décimal ;

$f = \pi$  est irrationnel ;

$g = \frac{4}{1000} = 0,004$  est décimal ;

$h = \frac{1}{3}$  est rationnel mais non décimal ;

$i = 5^{-2} = \frac{1}{25} = 0,04$  est décimal ;

$j = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{8}{5} \times \frac{17}{12}$   
 $= \frac{5}{15} - \frac{9}{15} + \frac{34}{15} = \frac{30}{15} = 2$  est entier ;

$k = \frac{-22}{7}$  est rationnel, non décimal ;

$l = \sqrt{2}$  est irrationnel ;

$m = (3^2)^3 \times \frac{1}{9} \times 5^{-4} = \frac{9^2}{5^4} = 0,1296$  est décimal ;

$n = \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{9-5\sqrt{3}}{10}$   
 $= \frac{10 + (9-5\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{10(\sqrt{3}+1)}$  (en réduisant au même dénominateur)  
 $= \frac{10 + 9\sqrt{3} + 9 - 15 - 5\sqrt{3}}{10(\sqrt{3}+1)}$   
 $= \frac{4 + 4\sqrt{3}}{10(\sqrt{3}+1)}$   
 $= \frac{4(1+\sqrt{3})}{10(\sqrt{3}+1)}$   
 $= \frac{2}{5} = 0,4$  donc  $n$  est décimal.

## 4 ————— Lycée Gérard-de-Nerval, Soissons

- $\frac{-15}{3} \in \mathbb{Z}$  ( $\frac{-15}{3} = -5$ ).
- $\sqrt{9} \in \mathbb{N}$  (car  $\sqrt{9} = 3$ ).
- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  (tous les entiers sont en particulier rationnels, car ils peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction d'entiers ; par exemple,  $5 = \frac{5}{1}$ ).

4.  $\pi \notin \mathbb{Q}$ , car  $\pi$  n'est pas rationnel. C'est pour cela que le développement décimal de  $\pi$ , non seulement est infini, mais de plus ne se « répète » jamais. « Pire », on ne peut même pas écrire  $\pi$  comme la racine d'un nombre rationnel (on dit que  $\pi$  est « transcendant »).
5.  $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Q}^*$  (car  $0 \in \mathbb{N}$  mais  $0 \notin \mathbb{Q}^*$ ).
6.  $10^{-3} \in \mathbb{R}^+$ , car  $10^{-3}$  est positif.

## 5 ————— Lycée Henri IV, Paris

$$\begin{aligned} 1. \quad A &= \frac{5^3 \times 8^3 \times 9^2}{15^2 \times 12^4} \\ &= \frac{5^3 \times 2^9 \times 3^4}{3^2 \times 5^2 \times 3^4 \times 2^8} \\ &= \frac{5 \times 2}{3^2} \end{aligned}$$

$$A = 5 \times 3^{-2} \times 2$$

$$\begin{aligned} 2. \quad B &= \frac{12^3 \times 15^{-3}}{5^{-2} \times 2^3} \\ &= \frac{12^3 \times 5^2}{15^3 \times 2^3} \\ &= \frac{2^6 \times 3^3 \times 5^2}{5^3 \times 3^3 \times 2^3} \\ B &= \frac{2^3}{5} \\ &= 2^3 \times 5^{-1} \end{aligned}$$

## 6 ————— Lycée Hoche, Versailles

On applique les règles de calculs avec les fractions :

$$\begin{aligned} A &= \frac{(0,2)^3 \times 10^4}{2^3 \times 81} : \frac{-8^3 \times 15}{(-12)^5} \\ &= \left(\frac{2}{10}\right)^3 \times \frac{5^4 \times 2^4}{2^3 \times 3^4} \times \frac{-12^5}{-8^3 \times 15} \\ &= \frac{2^3 \times 5^4 \times 2^4 \times 3^5 \times 2^{10}}{2^3 \times 5^3 \times 2^3 \times 3^4 \times 2^9 \times 3 \times 5} \\ &= 2^2 \text{ (après simplifications)} \\ &= 4 \end{aligned}$$

## 7 ————— Lycée Louis-le-Grand, Paris

1. On obtient :

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^3 \times 7^4}{3^2 \times 7^2 \times 2^3 \times 3^3} \\ &= \frac{7^2}{3^5} \end{aligned}$$

Il n'est normalement pas nécessaire d'aller plus loin. (A tout hasard,  $A = \frac{49}{243}$ ).

2. Il faut réduire petit à petit au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{3 - \frac{1}{4}}{2 + \frac{1}{4}} \times \frac{\frac{4}{15} - \frac{1}{10}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} : \frac{1 + \frac{2}{5}}{2 - \frac{1}{5}} \\
 &= \frac{\frac{12}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{8}{4} + \frac{1}{4}} \times \frac{\frac{8}{30} - \frac{3}{30}}{\frac{4}{6} - \frac{1}{6}} : \frac{\frac{5}{5} + \frac{2}{5}}{\frac{10}{5} - \frac{1}{5}} \\
 &= \frac{\frac{11}{4}}{\frac{9}{4}} \times \frac{\frac{5}{30}}{\frac{3}{6}} : \frac{\frac{7}{5}}{\frac{9}{5}} \\
 &= \frac{11}{9} \times \frac{1}{\frac{6}{3}} : \frac{7}{9} = \frac{11}{9} \times \frac{1}{3} \times \frac{9}{7} \\
 &= \frac{11 \times 9}{9 \times 3 \times 7} = \frac{11}{21}
 \end{aligned}$$

## 8 Lycée Henri IV, Paris

1.  $C = \sqrt{27} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{12}$

$$= 3\sqrt{3} - 2.5\sqrt{3} + 3.2\sqrt{3}$$

$$= (3 - 10 + 6)\sqrt{3}$$

$$= -\sqrt{3}$$

2.  $D = \sqrt{\frac{6,3}{2,8}} \times \sqrt{\frac{18}{0,72}}$

$$= \sqrt{\frac{63}{28}} \times \sqrt{\frac{18 \times 100}{72}}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4}} \times \sqrt{\frac{100}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4}} \times \sqrt{25}$$

$$= \frac{3}{2} \times 5$$

$$= \frac{15}{2}$$

## 9 Lycée Charlemagne, Paris

1. On utilise la quantité conjuguée  $\sqrt{5} - 2$  pour simplifier le dénominateur :

$$A = \frac{3}{\sqrt{5} + 2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3(\sqrt{5} - 2)}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} \\
 &= \frac{3(\sqrt{5} - 2)}{5 - 4} = 3\sqrt{5} - 6 = \sqrt{45} - 6
 \end{aligned}$$

2. De même que ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{2\sqrt{5} + 3}{\sqrt{5} - 1} \\
 &= \frac{(2\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} \\
 &= \frac{10 + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 3}{5 - 1} \\
 &= \frac{13 + 5\sqrt{5}}{4} = \frac{13}{4} + \sqrt{\frac{125}{16}}
 \end{aligned}$$

## 10 ————— Lycée Jean Zay, Orléans

$$\begin{aligned}
 A &= 18 \left( \frac{-1}{3} \right)^3 \frac{5}{2} - 4 \frac{-1}{3} \left( \frac{5}{2} \right)^2 - \left( \frac{5}{2} \right)^3 \\
 &= 18 \times \frac{-1}{3^3} \times \frac{5}{2} + 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{5^2}{2^2} - \frac{5^3}{2^3} \\
 &= \frac{-3^2 \times 2 \times 5}{3^3 \times 2} + 4 \frac{5^2}{3 \times 2^2} - \frac{5^3}{2^3} \\
 &= -\frac{5}{3} + \frac{25}{3} - \frac{125}{8} \\
 &= \frac{20}{3} - \frac{125}{8} \\
 &= \frac{20 \times 8 - 125 \times 3}{24} \\
 &= \frac{160 - 375}{24} \\
 &= -\frac{215}{24}
 \end{aligned}$$

## 11 ————— Lycée Louis-le-Grand, Paris

Il faut commencer par se « débarrasser » du radical au dénominateur.

$$A = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} + 8\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + 8\sqrt{2} \\
 &= \frac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1} + 8\sqrt{2} \\
 &= 3-2\sqrt{2}+8\sqrt{2} \\
 &= 3+6\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

N'essayez pas d'aller plus loin, et *surtout* ne donnez pas de résultat approximatif calculé à la machine !

## 12 ————— Lycée Gérard de Nerval, Soissons

1.

$$\begin{aligned}
 A &= 0,0024 \times 10^7 \times 96 \times 10^{-3} \\
 &= 0,2304 \times 10^4 \\
 &= 2,304 \times 10^3
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{72 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^5}{15 \times 10^2 \times 4 \times 10^{-1}} \\
 &= 2,4 \times 10^1
 \end{aligned}$$

*Remarque* : Que faire si la division « ne tombe pas juste » ? Par exemple, on vous demande d'écrire :

$$C = \frac{8 \times 10^3}{6 \times 10^{-6}}$$

sous forme scientifique. On peut avoir envie de proposer la forme exacte :

$$C = \frac{4}{3} \times 10^9$$

Mais ceci n'est pas une « écriture scientifique ». En fait, l'écriture scientifique est utilisée surtout pour pouvoir comparer des mesures (donc des approximations), et voir immédiatement leur ordre de grandeur. Il est donc assez artificiel de mélanger cette notion avec des calculs « exacts ». Il faut donc donner une approximation, avec 3 chiffres significatifs (sauf mention contraire de l'énoncé) :

$$C \simeq 1,33 \times 10^9$$

## 13 ————— Lycée Théodore de Banville, Moulins

$$\begin{aligned}
 xy &= 32,4 \times 10^{15} = 3,24 \times 10^{16} \\
 x + y &= 9 \times 10^7 + 3,6 \times 10^8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0,9 \times 10^8 + 3,6 \times 10^8 \\
 &= 4,5 \times 10^8 \\
 x - y &= 9 \times 10^7 - 3,6 \times 10^8 \\
 &= 0,9 \times 10^8 - 3,6 \times 10^8 \\
 &= -2,7 \times 10^8 \\
 \frac{x}{y} &= \frac{3,6}{9} \times \frac{10^7}{10^8} \\
 &= 0,4 \times 10^{-1} \\
 &= 4 \times 10^{-2}
 \end{aligned}$$

## 14 \_\_\_\_\_ Lycée du Parc, Lyon

1.  $E = \sqrt{0,25 \cdot 10^6} = 0,5 \cdot 10^3 = 500$  (décimal)  $= 5 \cdot 10^2$  (scientifique)
2.  $F = \frac{0,000273}{0,03} = 0,0091$  (décimal)  $= 9,1 \cdot 10^{-3}$  (scientifique)
3.  $G = \frac{3}{25} \cdot 10^{-4} = \frac{12}{100} \cdot 10^{-4} = 12 \cdot 10^{-6} = 0,000012$  (décimal)  
 $= 1,2 \cdot 10^{-5}$  (scientifique)

## 15 \_\_\_\_\_ Lycée Stanislas, Paris

1. Décomposons 75 en produit de facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l}
 75 & 3 \\
 25 & 5 \\
 5 & 5 \\
 1 & 
 \end{array}$$

On a donc :

$$75 = 3 \times 5 \times 5 = 3 \times 5^2$$

2. De même pour 132 :

$$\begin{array}{r|l}
 132 & 2 \\
 66 & 2 \\
 33 & 3 \\
 11 & 11 \\
 1 & 
 \end{array}$$

On a donc :

$$132 = 2^2 \times 3 \times 11$$

3. On décompose de même :

$$\begin{array}{r|l}
 63 & 3 \\
 21 & 3 \\
 7 & 7 \\
 1 & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 42 & 2 \\
 21 & 3 \\
 7 & 7 \\
 1 & 
 \end{array}$$

donc :

$$63 \times 42 = 3^2 \times 7 \times 2 \times 3 \times 7 = 2 \times 3^3 \times 7^2$$

4. On a :  $36 = 6^2 = 2^2 \times 3^2$  et  $81 = 9^2 = 3^4$ , d'où :

$$36 \times 81 = 2^2 \times 3^6$$

5. On décompose :

|     |     |
|-----|-----|
| 824 | 2   |
| 412 | 2   |
| 206 | 2   |
| 103 | 103 |
| 1   |     |

103 n'est pas divisible par 3 car  $1 + 0 + 3 = 4$  ; ni par 5 ; ni par 7 (car  $7 \times 7 = 49$ , donc  $7 \times 14 = 2 \times 49 = 98$ , et  $7 \times 15 = 105$ ) ; ni par 11. Comme  $11^2 = 121$ , il est inutile de chercher d'autre diviseur : 103 est premier.

Conclusion :  $824 = 2^3 \times 103$ .

6.  $16 = 2^4$  ; 17 est premier ;  $18 = 2 \times 3^2$  ; d'où :  $16 \times 17 \times 18 = 2^5 \times 3^2 \times 17$ .

## 16 ————— Lycée Saint Joseph, Avignon

On décompose 54 comme produit de nombres premiers :

$$54 = 2 \times 27 = 2 \times 3^3$$

On retrouve les diviseurs de 54 à partir de cette décomposition :

1, 2, 3,  $3 \times 2 = 6$ ,  $3^2 = 9$ ,  $2 \times 3 \times 3 = 18$ ,  $3^3 = 27$ , 54. Pour constituer la liste, on a pris 1 (bien sûr !), les diviseurs premiers de 54, puis les produits de 2 diviseurs premiers, de 3 diviseurs premiers, etc.

De même,

$$80 = 2 \times 40 = 2 \times 2 \times 20 = 2 \times 2 \times 2 \times 10 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^4 \times 5$$

On procède comme ci-dessus ; les diviseurs de 80 sont : 1, 2, 5, 4, 10, 8, 20, 16, 40, 80.

On décompose 250 :  $250 = 2 \times 125 = 2 \times 5^3$ .

Les diviseurs de 250 sont donc : 1, 2, 5, 10, 25, 50, 125, 250.

## 17 ————— Lycée René Cassin, Bayonne

79 est impair.  $7 + 9 = 16$  n'est pas divisible par 3, donc 79 n'est pas divisible par 3. L'écriture 79 ne se termine ni par 0, ni par 5, donc 5 ne divise pas 79. Enfin, 7 ne divise pas 79. Ce n'est pas la peine d'aller plus loin, car nous venons de voir que les éventuels diviseurs premiers de 79 sont supérieurs ou égaux à 11. S'il y en avait deux, on aurait  $79 \geq 11 \times 11 = 121$  ! Donc 79 est premier.

$8 + 7 = 15 = 3 \times 5$ , donc 87 est multiple de 3.

97 n'est multiple ni de 2, ni de 3, ni de 5, ni de 7 ( $7 \times 14 = 98$ ) ; pour les mêmes raisons que 79, on peut affirmer que 97 est premier.

91 n'est multiple ni de 2, ni de 3, ni de 5, mais  $91 = 7 \times 13$ , donc 91 n'est pas premier et 7 est son plus petit diviseur premier.

61 n'est multiple ni de 2, ni de 3, ni de 5, ni de 7 ( $7 \times 9 = 63$ ) ; donc 61 est premier.

75 est évidemment multiple de 5. N'allez pas trop vite tout de même, c'est 3 qui est son plus petit diviseur premier ( $75 = 3 \times 5^2$ ).

## 18 ————— Lycée Emmanuel Mounier, Grenoble

Appelons  $d$  la distance entre deux arbres consécutifs.  $d$  est un diviseur commun de 144, 180 et 240. On décompose ces trois entiers en facteurs premiers :

$$144 = 2^4 \times 3^2$$

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5$$

Le plus grand diviseur commun à ces trois nombres est donc  $2^2 \times 3 = 12$ .  $d$  est donc un diviseur de 12. Les diviseurs de 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Comme  $5 \leq d \leq 10$ , on a :  $d = 6$ .

Le périmètre du triangle étant de  $144 + 240 + 180 = 564$ , on doit donc disposer  $\frac{564}{6} = 94$  arbres.

19 ----- Lycée Raspail, Paris

Notons  $n$  le côté du carreau (en cm). 420 et 224 doivent être tous deux multiples de  $n$ . On décompose :

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$\begin{array}{r|l} 224 & 2 \\ 112 & 2 \\ 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$224 = 2^5 \times 7$$

On en déduit  $\text{PGCD}(420, 224) = 2^2 \times 7 = 28$ .  
 $n$ , diviseur commun à 420 et 224, divise 28.  
Les diviseurs de  $28 = 2 \times 2 \times 7$  sont :  
1, 2, 4, 7, 14 et 28.  
La seule valeur comprise entre 10 et 25 étant 14, on a :

$$n = 14$$

(les carreaux mesurent 14 cm de côté).

CORRIGÉS

## 20 ———— Lycée Madame de Staël, Montluçon

| $P$                   | $Q$                                | Si $P$ alors $Q$          | Si $Q$ alors $P$               | $P$ équivaut à $Q$ |
|-----------------------|------------------------------------|---------------------------|--------------------------------|--------------------|
| $x$ est multiple de 5 | le chiffre des unités de $x$ est 5 | FAUX (par ex : $x = 10$ ) | VRAI                           | FAUX               |
| $x = 2$               | $x^2 = 4$                          | VRAI                      | FAUX (on peut avoir $x = -2$ ) | FAUX               |
| $\frac{1}{x} > 0$     | $x > 0$                            | VRAI                      | VRAI                           | VRAI               |

*Remarque :* Pour dire : «  $P$  équivaut à  $Q$  » (en abrégé :  $P \Leftrightarrow Q$ ), il faut pouvoir dire à la fois « si  $P$  alors  $Q$  » et « si  $Q$  alors  $P$  ».

## 21 ———— Lycée Romain Rolland, Ivry-sur-Seine

1.

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{7} + \frac{5}{21} &= \frac{6}{21} + \frac{5}{21} \\
 \frac{5}{9} - \frac{1}{3} &= \frac{5}{9} - \frac{3}{9} \\
 &= \frac{11}{21} \\
 &= \frac{11}{9} \\
 &= \frac{9 \times 11}{21 \times 2} = \frac{3 \times 3 \times 11}{3 \times 7 \times 2} \\
 &= \frac{33}{14}
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \frac{(2^{23})^{15}}{2^{1000}} &= 2^{23 \times 15 - 1000} \\
 &= 2^{-655}
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{5} + 1 - \frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{10} + \frac{10}{10} - \frac{5}{10}\right) \\
 &= \frac{2}{3} \times \frac{9}{10} \\
 &= \frac{2 \times 3 \times 3}{3 \times 2 \times 5} = \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

4. On peut commencer par écrire :

$$0,06 = \frac{6}{100} = \frac{3}{50} = \frac{3}{2 \times 5^2}$$

d'où :

$$(0,06)^4 = \frac{3^4}{2^4 \times 5^8}$$

De plus :

$$1,6 = \frac{16}{10} = \frac{8}{5} = \frac{2^3}{5}$$

d'où :

$$(1,6)^{-3} = \frac{2^{-9}}{5^{-3}} = \frac{5^3}{2^9}$$

De même :

$$0,0002 = \frac{2}{10000} = \frac{2}{10^4} = \frac{2}{2^4 \times 5^4} = \frac{1}{2^3 \times 5^4}$$

et donc :

$$(0,0002)^{-10} = \left( \frac{1}{2^3 \times 5^4} \right)^{-10} = 2^{30} \times 5^{40}$$

On peut donc calculer :

$$\begin{aligned} \frac{(0,06)^4 \times (1,6)^{-3}}{30 \times (0,0002)^{-10}} &= \frac{3^4}{2^4 \times 5^8} \times \frac{5^3}{2^9} \times \frac{1}{30} \times \frac{1}{2^{30} \times 5^{40}} \\ &= \frac{3^4 \times 5^3}{2^4 \times 5^8 \times 2^9 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2^{30} \times 5^{40}} \\ &= \frac{3^3}{2^{44} \times 5^{46}} \text{ (en simplifiant)} \end{aligned}$$

On peut encore simplifier en remarquant :

$$\begin{aligned} \frac{3^3}{2^{44} \times 5^{46}} &= \frac{2^2 \times 3^3}{2^{46} \times 5^{46}} \\ &= \frac{4 \times 27}{10^{46}} \\ &= 108 \times 10^{-46} = 1,08 \times 10^{-44} \end{aligned}$$

## 22 ————— Lycée André Malraux, Biarritz

1. Il s'agit d'un produit remarquable :

$$(3 - \sqrt{11})^2 = 9 - 6\sqrt{11} + 11 = 20 - 6\sqrt{11}$$

2.  $3^2 = 9$  et  $(\sqrt{11})^2 = 11$ , donc  $3 < \sqrt{11}$  ; on en déduit :  $3 - \sqrt{11} < 0$ .

3. Comme  $(3 - \sqrt{11})^2 = 20 - 6\sqrt{11}$ , on sait que  $\sqrt{20 - 6\sqrt{11}} = (3 - \sqrt{11})$  ou  $\sqrt{20 - 6\sqrt{11}} = -(3 - \sqrt{11})$ .

Comme  $3 - \sqrt{11} < 0$ , la racine carrée de  $(20 - 6\sqrt{11})$  (qui doit être positive) est donc :  $-(3 - \sqrt{11}) = \sqrt{11} - 3$ .

## 23 ————— Lycée Blaise Pascal, Orsay

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{6}} \\ &= \frac{\frac{15}{30} - \frac{10}{30} + \frac{12}{30} + \frac{5}{30}}{\frac{15}{30} + \frac{10}{30} - \frac{12}{30} - \frac{5}{30}} \\ &= \frac{\frac{22}{30}}{\frac{-12}{30}} \\ &= -\frac{22}{12} \\ &= -\frac{11}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{(5^2 \times 10^{-5})^3}{(5 \times 10^{-3})^5} \times \left(\frac{10^2}{5}\right)^2 \\ &= \frac{5^6 \times 10^{-15}}{5^5 \times 10^{-15}} \times \frac{10^4}{5^2} \\ &= 5 \times \frac{(5 \times 2)^4}{5^2} \\ &= \frac{5 \times 5^4 \times 2^4}{5^2} \\ &= 5^3 \cdot 2^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 2^{23} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{24} = \frac{2^{23}}{2^{24}} = \frac{1}{2} \\ D &= \left(\frac{2}{3}\right)^{108} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{107} = \left(\frac{2}{3}\right)^{108} : \left(\frac{2}{3}\right)^{107} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$a = 0,000\,073\,654 = 7,365\,4 \cdot 10^{-5}$$

$$b = 9\,325\,000 = 9,325 \cdot 10^6$$

$$c = 0,023 \times 10^{-5} = 2,3 \cdot 10^{-2} \times 10^{-5} = 2,3 \cdot 10^{-7}$$

$$d = 19,402 \times 10^2 = 1,940\,2 \cdot 10^3$$

## 24 ————— Lycée Condorcet, Paris

1.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{7} + 4\sqrt{7}}{2} = \frac{5\sqrt{7}}{2} \\ G &= \sqrt{\sqrt{7} \times 4\sqrt{7}} = \sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7} \\ \frac{2}{H} &= \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{4\sqrt{7}} = \frac{4}{4\sqrt{7}} + \frac{1}{4\sqrt{7}} = \frac{5}{4\sqrt{7}} \end{aligned}$$

donc  $\frac{H}{2} = \frac{4\sqrt{7}}{5}$  et :

$$H = \frac{8\sqrt{7}}{5}$$

On peut comparer facilement en les mettant au même dénominateur  $H = \frac{16\sqrt{7}}{10}$ ,

$A = \frac{25\sqrt{7}}{10}$  et  $G = \frac{20\sqrt{7}}{10}$ . On obtient :

$$H < G < A$$

*Remarque* : en fait, comme nous allons encore le voir au b), cet ordre ne dépend pas des réels  $a$  et  $b$  que l'on a choisis (démonstration plutôt difficile).  $A$  s'appelle la moyenne arithmétique de  $a$  et  $b$  ;  $G$  est la moyenne géométrique des deux nombres ;  $H$  est leur moyenne harmonique.

2.

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^4 + 2^2 \times 3^{-2}}{2} & G &= \sqrt{2^4 \times 2^2 \times 3^{-2}} & \frac{2}{H} &= \frac{1}{2^4} + \frac{3^2}{2^2} \\ &= 2^3 + 2 \times 3^{-2} & &= \sqrt{2^6 \times 3^{-2}} & &= \frac{1}{2^4} + \frac{3^2 \cdot 2^2}{2^4} \\ &= 8 + \frac{2}{9} & &= 2^3 \times 3^{-1} & &= \frac{1 + 9 \cdot 4}{2^4} \\ &= \frac{74}{9} & &= \frac{8}{3} & &= \frac{37}{16} \end{aligned}$$

On obtient :

$$H = \frac{32}{37}$$

On voit sans peine que  $A$  est supérieur à  $G = \frac{24}{9}$ .

Réduisons  $G$  et  $H$  au même dénominateur :  $G = \frac{296}{37 \times 3}$  et  $H = \frac{96}{37 \times 3}$ , il vient  $G > H$ . De nouveau,

$$A > G > H$$

## 25 ————— Lycée Hoche, Versailles

1.

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{50} - 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{18}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{25 \times 2} - 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{9 \times 2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= (5 - 3 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2})\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{9}{4}\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} J &= 7\sqrt{\frac{3}{7}} \times \sqrt{\frac{30}{49}} \\ &= 7\sqrt{\frac{3}{7}} \times \frac{\sqrt{3 \times 10}}{7} \\ &= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{10}}{\sqrt{7}} \\ &= \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{70}}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6} \times (\sqrt{3}+\sqrt{2}) + 3 \times (\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \times (\sqrt{3}-\sqrt{2})} \\ &= \frac{\sqrt{6 \times 3} + \sqrt{6 \times 2} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{3-2} \\ &= \sqrt{2 \times 3 \times 3} + \sqrt{3 \times 2 \times 2} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \left( \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^2 + 2 \times (\sqrt{3-2\sqrt{2}}) \times (\sqrt{3+2\sqrt{2}}) + (\sqrt{3+2\sqrt{2}})^2 \\ &= 3-2\sqrt{2} + 2 \times \sqrt{(3-2\sqrt{2}) \cdot (3+2\sqrt{2})} + 3+2\sqrt{2} \\ &= 3-2\sqrt{2} + 2 \times \sqrt{9-8} + 3+2\sqrt{2} \\ L &= 3-2\sqrt{2} + 2 + 3 + 2\sqrt{2} \\ &= 8 \end{aligned}$$

2. On veut calculer  $Y = \sqrt{17-4\sqrt{13}}$

$$(2 - \sqrt{13})^2 = 4 - 4\sqrt{13} + 13 = 17 - 4\sqrt{13}$$

Il serait tentant de répondre que la racine de  $17-4\sqrt{13}$  est  $2-\sqrt{13}$ . Mais attention !  $13$  est supérieur à  $4$ , donc  $\sqrt{13}$  est supérieur à  $2$ .  $2-\sqrt{13}$  est donc négatif ! Il faut répondre :  $Y = \sqrt{13} - 2$ .

## 26 Lycée Hoche, Versailles

On simplifie les puissances, puis les fractions :

$$\begin{aligned}
 B &= \left(\frac{a^3}{c}\right)^2 : \frac{[(a^7)^5 b^{-2} (c^{-3})^{-2}]^{-1}}{[ab^2(c^{-2})^{-3}]^2} \\
 &= \frac{a^6}{c^2} : \frac{(a^{35} b^{-2} c^6)^{-1}}{(ab^2 c^6)^2} \\
 &= \frac{a^6}{c^2} : \frac{a^{-35} b^2 c^{-6}}{a^2 b^4 c^{12}} \\
 &= \frac{a^6}{c^2} \times \frac{a^2 b^4 c^{12}}{a^{-35} b^2 c^{-6}} \\
 &= a^{43} b^2 c^{16}
 \end{aligned}$$

## 27 Lycée Louis-le-Grand, Paris

1. Il faut réduire les deux fractions au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
 &= \frac{n+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{n}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\
 &= \frac{n+3-n}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\
 &= \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}
 \end{aligned}$$

2. Du résultat précédent, il vient :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right)$$

Si on applique cette formule à  $n = 10$ , on obtient :

$$\frac{1}{10 \times 11 \times 12 \times 13} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{10 \times 11 \times 12} - \frac{1}{11 \times 12 \times 13} \right)$$

En l'appliquant à  $n = 11$  :

$$\frac{1}{11 \times 12 \times 13 \times 14} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{11 \times 12 \times 13} - \frac{1}{12 \times 13 \times 14} \right)$$

Si on additionne ces deux formules membre à membre, on voit que les termes

$$\frac{1}{11 \times 12 \times 13}$$

vont s'annuler. Appliquons de nouveau la formule à  $n = 12$  :

$$\frac{1}{12 \times 13 \times 14 \times 15} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{12 \times 13 \times 14} - \frac{1}{13 \times 14 \times 15} \right)$$

Nous constatons que si nous ajoutons cette formule aux deux autres, le terme

$$\frac{1}{12 \times 13 \times 14}$$

disparaît.

Finalement, si nous répétons l'opération jusqu'à  $n = 19$  et que nous simplifions, il ne restera que le tout premier terme

$$\frac{1}{10 \times 11 \times 12}$$

ainsi que le tout dernier, qui est le

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

avec  $n = 19$ . Il vient (attention aux signes et au facteur  $\frac{1}{3}$  !) :

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{10 \times 11 \times 12} - \frac{1}{20 \times 21 \times 22} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{5 \times 2 \times 11 \times 4 \times 3} - \frac{1}{5 \times 4 \times 3 \times 7 \times 2 \times 11} \right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{7-1}{20 \times 21 \times 22} \\ &= \frac{1}{3} \frac{6}{20 \times 21 \times 22} \\ &= \frac{2}{20 \times 21 \times 22} \\ &= \frac{1}{10 \times 21 \times 22} \\ &= \frac{1}{4620} \end{aligned}$$

## 28 ————— Lycée René Cassin, Gonesse

Il s'agit d'une simple équation du premier degré à une inconnue. Vous savez depuis la quatrième (si, si !) que le quotient de  $a$  par  $\frac{2}{3}$  est égal à son produit par  $\frac{3}{2}$ . Écrivons l'équation proposée :

$$\frac{3}{2}a - \frac{2}{7}a = 221$$

Réduisons au même dénominateur :

$$\frac{3}{2}a - \frac{2}{7}a = \frac{21}{14}a - \frac{4}{14}a = \frac{17}{14}a$$

Il n'y a plus qu'à remarquer que  $221 = 17 \times 13$ , et on obtient :

$$a = \frac{221 \times 14}{17} = 13 \times 14 = 182$$

## 29 Lycée Descartes, Tours

1. On cherche deux réels  $x$  et  $y$  qui vérifient :  $\frac{y}{x} = \frac{23}{5}$  et  $y + x = \frac{35}{3}$  (et donc  $x \neq 0$ ).  
En effectuant les produits en croix, on obtient le système :

$$\begin{cases} y = \frac{23}{5}x \\ 3(y + x) = 35 \end{cases}$$

On va procéder par substitution :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{23}{5}x \\ 3\left(\frac{23}{5} + 1\right)x = 35 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{23}{5}x \\ 3 \times \frac{28}{5}x = 35 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \times 35}{3 \times 28} = \frac{5 \times 7 \times 5}{3 \times 4 \times 7} = \frac{25}{12} \\ y = \frac{23}{5}x = \frac{23 \times 25}{5 \times 12} = \frac{115}{12} \end{cases} \end{aligned}$$

Les deux réels cherchés sont  $\frac{25}{12}$  et  $\frac{115}{12}$ .

2. On procède de même. Les conditions étant :  $\frac{y}{x} = \frac{17}{8}$ ,  $x + y = \frac{23}{8}$ , et  $x \neq 0$ , on résout le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{17}{8}x \\ \left(1 + \frac{17}{8}\right)x = \frac{23}{8} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{17}{8}x \\ \frac{25}{8}x = \frac{23}{8} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{25} \\ y = \frac{17 \times 23}{8 \times 25} = \frac{391}{200} \end{cases} \end{aligned}$$

Les deux réels cherchés sont  $\frac{23}{25}$  et  $\frac{391}{200}$ .

### 30 Lycée Vial, Nantes

Un carré parfait est le carré d'un entier. Décomposons 756 en produit de facteurs premiers :

$$\begin{array}{r|l} 756 & 2 \\ 378 & 2 \\ 189 & 3 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

On en déduit que :

$$756 = 2^2 \times 3^2 \times 3 \times 7 = 6^2 \times 21$$

Il faut donc diviser 756 par 21 pour obtenir  $6^2$ .

### 31 Lycée Robespierre, Arras

Dans la décomposition en facteurs premiers, les exposants dans la décomposition de  $q$  en facteurs premiers sont tous inférieurs ou égaux à ceux de la décomposition de  $p$ , donc  $q$  est diviseur de  $p$ . On a en effet :

$$\frac{p}{q} = \frac{2^3 \times 5^4 \times 7^2 \times 13^3}{2^2 \times 5^4 \times 7} = 2 \times 7 \times 13^3$$

On peut faire le calcul complet. Mais pensez-vous vraiment que ce soit le but de l'exercice ?

### 32 Lycée Alain, Alençon

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$108 = 2^2 \times 3^3$$

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$144 = 2^4 \times 3^2$$

$$\begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$80 = 2^4 \times 5$$

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2\,520 & 2 \\ 1\,260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & \end{array}$$

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5$$

$$2\,520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

$$8\,000 = 2^6 \times 5^3$$

Comme  $8\,000 = 80 \times 100$ , on a utilisé la décomposition de  $80 = 2^4 \times 5$  ci-dessus, et décomposé  $100 = 2^2 \times 5^2$ .

$$\begin{array}{c|c} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} 864 & 2 \\ 432 & 2 \\ 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

$$140 = 2^2 \times 5 \times 7$$

$$864 = 2^5 \times 3^3$$

### 33 Lycée Raspail, Paris

1.  $36 = 4 \times 9 = 2^2 \times 3^2$  et  $42 = 6 \times 7 = 2 \times 3 \times 7$ , donc

$$36 \times 42 = 2^3 \times 3^3 \times 7$$

$72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$  et  $77 = 7 \times 11$ , d'où :

$$72 \times 77 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11$$

$108 = 4 \times 27 = 2^2 \times 3^3$  et  $75 = 3 \times 25 = 3 \times 5^2$ , donc :

$$108 \times 75 = 2^2 \times 3^4 \times 5^2$$

2.  $84 = 4 \times 21 = 2^2 \times 3 \times 7$ ;  $25 = 5^2$  et  $121 = 11^2$ , donc :

$$84 \times 25 \times 121 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11^2$$

$36 = 2^2 \times 3^2$ ;  $27 = 3^3$ ;  $45 = 5 \times 9 = 5 \times 3^2$ , donc :

$$36 \times 27 \times 45 = 2^2 \times 3^7 \times 5$$

3.  $65 = 5 \times 13$ ;  $49 = 7^2$ ;  $24 = 8 \times 3 = 2^3 \times 3$ , d'où :

$$65 \times 49 \times 24 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2 \times 13$$

## 34 ————— Lycée Jeanne d'Arc, Clermont-Ferrand

1. Si  $n$  est un multiple de 2, le résultat est évident. Sinon,  $n$  est impair, donc  $n + 1$  est pair, et 2 divise bien  $n(n + 1)$ .
2. Soit  $d \in \mathbb{N}^*$  un diviseur de  $n$  et de  $n + 1$ . Alors  $d$  divise  $(n + 1) - n = 1$ . Donc  $d = 1$ . Les deux entiers  $n$  et  $n + 1$  sont donc premiers entre eux.
3. En revanche, il est fréquent que ni  $n$ , ni  $n + 1$  ne soient premiers. Prendre, par exemple : 8 et 9 ; 9 et 10 ; 14 et 15, etc. (Notez bien la différence entre « premiers entre eux » et « premiers », tout court).

## 35 ————— Lycée Saint Paul, Lille

On pose  $n = 3 + p$ . On a alors :

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &= (3 + p)^2 + (3 + p) + 1 \\ &= 3^2 + 6p + p^2 + p + 3 + 1 = 13 + 7p + p^2 = 13 + p(7 + p) \end{aligned}$$

donc  $n^2 + n + 1$  est multiple de 13 si et seulement si  $p(7 + p)$  est multiple de 13. Comme 13 est premier, on a donc : soit  $p$  est divisible par 13 ; soit  $7 + p$  est divisible par 13. Comme  $n = 3 + p$ , on obtient :

- Soit  $n$  est de la forme  $3 + 13q$  ;
- soit  $n$  est de la forme  $13q - 4$ .

( $q$  est un entier quelconque).

## 36 ————— Lycée Jean Monnet, Bruxelles

Notons  $n$  le nombre de minutes séparant deux départs simultanés.  $n$  est multiple de 5,  $8 = 2^3$ ,  $12 = 2^2 \times 3$  et  $18 = 2 \times 3^2$ . La décomposition de  $n$  en facteurs premiers va donc comporter nécessairement  $2^3$ ,  $3^2$  et 5. Donc  $n$  est multiple de  $2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$ . Il s'écoule donc un multiple de 360 minutes, soit 6 heures entre les départs simultanés. Ils ont donc lieu à 5 h, 11 h, 17 h et 23 h.

## 37 ————— Lycée Louis-le-Grand, Paris

Si un nombre s'écrit avec trois chiffres  $x$ ,  $y$  et  $z$ , cela signifie que ce nombre vaut  $100x + 10y + z$ . Une fois cette remarque bien comprise, il n'y a plus qu'à interpréter l'énoncé.

1. La somme des chiffres est  $x + y + z$ .
2. Permuter les deux derniers chiffres revient à écrire le réel  $100x + 10z + y$ .
3. Permuter les deux premiers chiffres revient à écrire le réel  $100y + 10x + z$ .

On obtient le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 18 \\ 100x + 10z + y = 100x + 10y + z + 18 \\ 100y + 10x + z = 100x + 10y + z - 360 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ 9z - 9y = 18 \\ 90y - 90x = -360 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ z - y = 2 \\ y - x = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 4 + y + y + 2 = 18 \\ z = y + 2 \\ x = y + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 12 \\ z = y + 2 \\ x = y + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = 6 \\ x = 8 \end{cases}$$

Le nombre est donc 846.

### 38 ————— Lycée Camille Jullian, Bordeaux

On décompose :  $108 = 4 \times 27 = 2^2 \times 3^3$ ; d'où :

$$108^2 = 2^4 \times 3^6$$

De même,  $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ , et :

$$72^3 = 2^9 \times 3^6$$

$24 = 8 \times 3 = 2^3 \times 3$  et  $33 = 3 \times 11$ , donc :

$$24^2 \times 33^2 \times 11^5 = 2^6 \times 3^2 \times 3^2 \times 11^2 \times 11^5 = 2^6 \times 3^4 \times 11^7$$

### 39 ————— Lycée Champollion, Grenoble

On décompose 2 310 en produit de facteurs premiers :

On doit trouver  $n$ , avec  $2\,310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = n(n+1)(2n+1)$ .

|       |    |                                                                                                   |
|-------|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2 310 | 2  | $2n + 1$ est impair, donc $n(n + 1)$ est divisible par 2. Essayons                                |
| 1 155 | 3  | $n(n + 1) = 2 \times 3$ , donc $n = 2$ . On doit avoir $5 \times 7 = 2 \times 2 + 1$ , ce         |
| 385   | 5  | qui est faux, cette valeur ne convient donc pas.                                                  |
| 77    | 7  | Supposons que $n$ ou $n + 1$ s'écrive $2 \times 3$ . On a le choix :                              |
| 11    | 11 | $n(n + 1) = 5 \times (2 \times 3)$ , donc $n = 5$ . Mais alors $2n + 1 = 11 \neq 7 \times 11$ .   |
| 1     |    | ou bien $n(n + 1) = (2 \times 3) \times 7$ , donc $n = 6$ , mais $2n + 1 = 13 \neq 5 \times 11$ . |

Enfin, supposons que  $n$  ou  $n + 1$  s'écrive  $2 \times 5$ . Comme 3 n'apparaît qu'une fois dans la décomposition de 2 310, on ne peut pas former 9, donc  $n(n + 1) = (2 \times 5) \times 11$ . Dans ce cas,  $n = 10$  et  $2n + 1 = 21 = 3 \times 7$ , ce qui convient parfaitement. Il vient :

$$2\,310 = 10 \times 11 \times 21$$



# Ordre

## 2.1 Savoir manipuler les intervalles

### 2.1.1 Exercice type n° 1

Exprimer par un intervalle :

1.  $x > 2$
2.  $x \leq -3$
3.  $-1 < x \leq 5$
4.  $x > 2$  et  $x < 6$
5.  $x < 2$  ou  $x \geq 4$
6.  $|x + 2| \leq 5$

• Lycée Alain, Le Vésinet •

### 2.1.2 Comment écrire un intervalle ?

#### Définition (Intervalles)

L'intervalle  $[a; b]$  est l'ensemble des réels compris entre  $a$  et  $b$ .  $[a; b]$  contient  $a$  et  $b$ , alors que  $]a; b[$  ne contient ni  $a$ , ni  $b$ .

#### Définition (Bornes)

Un intervalle a toujours *deux* bornes :  $[1, 3]$  contient tous les réels compris entre 1 et 3.  $] - \infty, 2]$  contient tous les réels compris entre  $-\infty$  et 2, ou plus simplement tous les réels inférieurs ou égaux à 2 ( $-\infty$  est une borne conventionnelle). Dans l'écriture, on sépare les deux bornes par une virgule ou par un point-virgule s'il risque d'y avoir une ambiguïté. Par exemple, on écrira  $[1, 2; 3]$  plutôt que  $[1, 2, 3]$  car on pourrait confondre avec  $[1; 2, 3]$ .

#### Définition (Crochets)

Le sens des crochets indique si la borne est contenue ou non dans l'intervalle. Si le crochet est tourné vers l'intérieur, on « prend » la borne. Par exemple,  $] - 7, - 3]$  contient  $-3$  mais ne contient pas  $-7$ . Comme les bornes  $-\infty$  et  $+\infty$  sont de pures conventions, elles sont toujours exclues de l'intervalle.

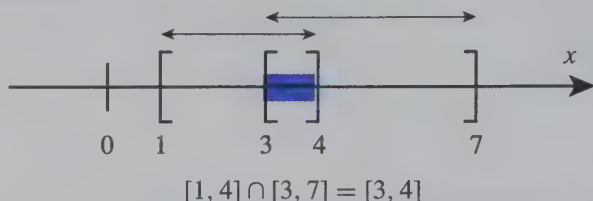
#### Définition (Réunion)

L'ensemble  $[1, 3] \cup [5, 6]$  contient les éléments de  $[1, 3]$  et ceux de  $[5, 6]$ . Autrement

dit, il contient tous les réels qui sont dans  $[1, 3]$  ou dans  $[5, 6]$ . Remarque : cet ensemble n'est pas lui-même un intervalle.

**Définition (Intersection)**

$[1, 4] \cap [3, 7]$  contient les réels qui sont dans les deux intervalles à la fois, c'est-à-dire les réels qui sont dans  $[1, 4]$  et dans  $[3, 7]$ . Concrètement, il s'agit des points compris entre 3 et 4, comme le confirme le schéma suivant, on l'on a grisé la partie commune aux deux intervalles :



### 2.1.3 Qu'est-ce qu'une valeur absolue ?

On pense souvent que la valeur absolue c'est « le nombre, sans son signe ». En effet,  $|5| = 5$  et  $|-17| = 17$ . Mais attention aux limitations de ce point de vue. La valeur absolue a un signe : elle est toujours positive (ou nulle). Et puis, si  $x \leq 0$ , on peut écrire  $|x| = -x$  (car dans ce cas  $-x$  est positif). Méfiance donc, il ne suffit pas toujours de retirer les signes moins. On écrira par exemple :

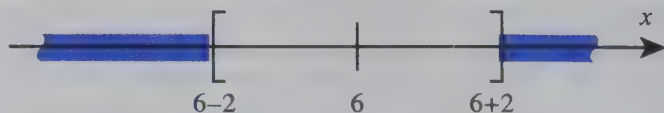
$$|-x - 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$$

### 2.1.4 Quel rapport y a-t-il entre valeur absolue et distance ?

$|a - b|$  est la « distance » entre les réels  $a$  et  $b$ . Par exemple, sur une droite graduée,  $|7 + 3| = 10$  donne la distance entre les points d'abscisse 7 et -3. La valeur absolue est parfois appelée « distance à zéro », car  $|x| = |x - 0|$ .

Ceci permet, par exemple, de résoudre facilement des inéquations du type :  $|x - 6| \leq 2$ . L'inégalité signifie que la distance entre  $x$  et 6 est inférieure à 2. Donc, si  $x$  est plus grand que 6, il ne pourra dépasser  $6 + 2 = 8$ . Si  $x$  est plus petit que 6, il ne pourra être inférieur à  $6 - 2 = 4$ . L'ensemble des solutions est donc :

$$S = [4, 8]$$



### 2.1.5 Solution de l'exercice type n° 1

1.  $]2, +\infty[$
2.  $] - \infty, -3]$
3.  $] - 1, 5]$
4.  $]2, 6[$
5.  $] - \infty, 2[ \cup [4, +\infty[$
6. Il faut écrire  $x + 2 = x - (-2)$ . On obtient l'intervalle :  $[-2 - 5, -2 + 5] = [-7, 3]$ .

## 2.2 Intervalles et encadrements

### 2.2.1 Exercice type n° 2

1. Encadrer  $x$  sachant que 1,25 est une valeur approchée de  $x$  par excès à  $10^{-2}$  près.
2. Sachant que  $-1,41$  est une valeur approchée de  $y$  à  $10^{-2}$  près, donner un encadrement de  $x - 2y$ .

• Lycée Léonard de Vinci, Saint-Witz •

### 2.2.2 Vocabulaire des encadrements

$a$  est une approximation de  $x$ ...

|                             |                                 |
|-----------------------------|---------------------------------|
| à $10^{-n}$ près            | $a - 10^{-n} < x < a + 10^{-n}$ |
| à $10^{-n}$ près par défaut | $a - 10^{-n} < x \leq a$        |
| à $10^{-n}$ près par excès  | $a \leq x < a + 10^{-n}$        |

La phrase « 3,5 est une approximation (ou une valeur approchée) de  $x$  au dixième (donc à 0,1) près » signifie que la distance entre  $x$  et 3,5 est inférieure à 0,1, et donc que  $x$  est compris entre 3,4 et 3,6. Si c'est une approximation *par défaut*, cela veut dire qu'elle est *plus petite* que  $x$ , et donc que  $x$  est compris entre 3,5 et 3,6. Si c'est une approximation *par excès*, cela signifie qu'elle est *plus grande* que  $x$ , et donc que  $x$  est compris entre 3,4 et 3,5.

*Remarque :* Si  $x = 1,236$ , alors  $a = 1,24$  est une approximation de  $x$  avec deux décimales exactes. Cela peut paraître surprenant, car le chiffre des centièmes, pour  $x$ , est 3 et non 4. Cette formulation signifie que  $x$  est plus proche de 1,24 que de 1,23 ou 1,25, et elle traduit l'encadrement :

$$1,235 < x < 1,245$$

ou encore :

$$|x - 1,24| < 0,005$$

C'est le type d'approximation qu'utilisent les calculatrices.

Il y a une ambiguïté si, par exemple  $x = 1,235$ . Doit-on choisir 1,23 ou 1,24 ? Tout dépend de la convention choisie. La plupart des calculatrices choisissent 1,24 (par excès). C'est également cette convention qui a été choisie pour arrondir en euros les prix en francs.

On retiendra :

$a$  est une approximation de  $x$  avec  $n$  décimales exactes si  $|x - a| \leq \frac{10^{-n}}{2}$ .

### 2.2.3 Opérations permises sur les inégalités

On est amené, pour comparer ou encadrer des nombres, à effectuer des opérations sur les inégalités, par exemple pour passer de  $2x < 6$  à  $x < 3$ . Certaines opérations ne posent aucun problème. Pour d'autres, il faut changer le sens de l'inégalité. D'autres enfin ne s'appliquent que si les nombres concernés vérifient une condition de signe. Concrètement, on peut :

**Ajouter un même réel à une inégalité** ou ajouter deux inégalités de même sens membre à membre. Si l'une des inégalités était large, l'inégalité obtenue est large. Par exemple, si  $x + 7 \geq 5$ , on peut ajouter  $-7$  aux deux membres et obtenir :  $x \geq -2$ .

**Multiplier les deux membres par un réel** S'il est positif, on garde le sens, s'il est négatif on change le sens de l'inégalité. Par exemple, si  $7x \leq -3$ , on peut diviser par 7 les deux membres :

$$x \leq -\frac{3}{7}$$

Le sens ne change pas car 7 est positif.

**Élever les deux membres de l'inégalité au carré** ou au contraire passer à la racine sans changer le sens de l'inégalité, à condition que les deux membres soient positifs. Si  $x > 5$ , on peut écrire  $x^2 > 25$ . Attention, si l'on considère l'encadrement  $-2 < x < 5$ , on ne peut pas procéder simplement et écrire  $4 < x^2 < 25$ , car  $x$  pourrait par exemple être égal à 0 ou 1. Le meilleur encadrement possible est :  $0 \leq x < 25$ .

**Inverser les deux membres** en changeant le sens de l'inégalité, mais seulement à condition que les deux membres aient le même signe ! (et qu'ils soient non nuls). Par exemple,  $-5 < -3$  donc  $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{3}$ .



L'équivalent de l'inégalité  $x \geq 5$  n'est pas  $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$ , mais  $0 < \frac{1}{x} \leq 5$  (car on sait que l'inverse d'un nombre positif est positif).

### 2.2.4 Comparer deux nombres dont on connaît des approximations

Soient  $x$  et  $y$  deux réels. On connaît  $a$ , approximation de  $x$  à  $p$  près, et  $b$ , approximation de  $y$  à  $p'$  près. On peut alors écrire :

$$a - p \leq x \leq a + p \text{ et } b - p' \leq y \leq b + p'$$

On ne peut donc comparer  $x$  et  $y$  que si  $a + p \leq b - p'$  ou si  $b + p' \leq a - p$ .

**Exemple :** On se donne  $x \simeq 1,318$ ,  $y \simeq 1,332$  et  $z \simeq 1,340$ . Ces valeurs sont approchées à 0,010 près. On peut donc écrire :

$$1,308 \leq x \leq 1,328$$

$$1,322 \leq y \leq 1,342$$

$$1,330 \leq z \leq 1,350$$

On ne peut donc rien affirmer au sujet de  $x$  et  $y$ , ou de  $y$  et  $z$ . En revanche, on peut dire que  $x \leq z$ .

### 2.2.5 Utiliser les carrés et les produits croisés

On sait que, pour deux fractions  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$ , on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

(Propriété dite des produits « en croix » ou « croisés »).

Lorsque  $a, b, c$  et  $d$  sont positifs, on peut utiliser ces produits croisés avec une inégalité :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} < \frac{c}{d} &\Leftrightarrow ad < bc \\ \frac{a}{b} > \frac{c}{d} &\Leftrightarrow ad > bc \\ \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} &\Leftrightarrow ad \leq bc \\ \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} &\Leftrightarrow ad \geq bc \end{aligned}$$

Exemple : Montrons que  $\frac{23}{5} > \frac{7}{2}$ . Il suffit de constater que  $23 \times 2 = 46 > 5 \times 7 = 35$ .

2.2.6 Utiliser le signe de la différence

Pour comparer deux nombres  $x$  et  $y$ , on peut étudier le signe de leur différence  $x - y$  :

$$\begin{cases} \text{Si } x - y > 0, \text{ alors } x > y \\ \text{Si } x - y < 0, \text{ alors } x < y \end{cases}$$

Exemple : On veut résoudre l'inéquation :  $\frac{1}{x} < 2$ . Il serait maladroît d'utiliser les produits croisés, car on ne connaît pas le signe de  $x$ . Vous pouvez vérifier qu'on obtiendrait :  $\frac{1}{2} < x$  ce qui est faux car, par exemple,  $-1$  est solution de  $\frac{1}{x} < 2$  mais ne vérifie pas  $\frac{1}{2} < x$ . Il faut au contraire :

- 1. Écrire la différence :  $\frac{1}{x} - 2$ ;
- 2. Réduire au même dénominateur :  $\frac{1 - 2x}{x}$  ;
- 3. Utiliser un tableau de signe :

|                    |           |     |               |           |
|--------------------|-----------|-----|---------------|-----------|
| $x$                | $-\infty$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| $x$                | $-$       |     | $0$           | $+$       |
| $1 - 2x$           | $+$       |     | $+$           | $0$ $-$   |
| $\frac{1 - 2x}{x}$ | $-$       |     | $+$           | $0$ $-$   |

Il suffit de lire dans le tableau où sont situés les réels tels que  $\frac{1 - 2x}{x} < 0$  :

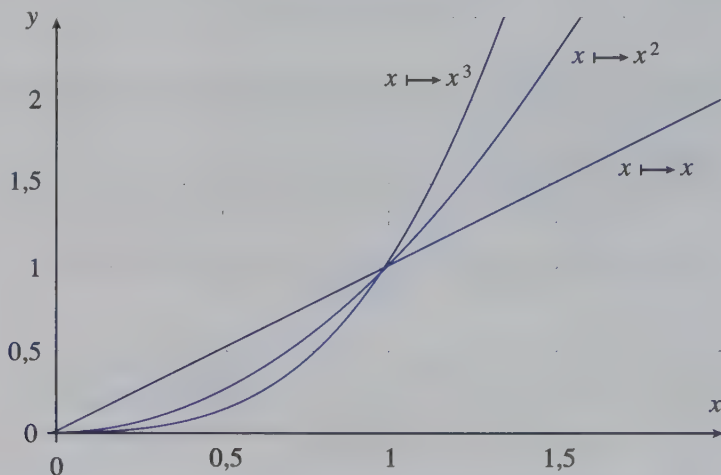
$$S = ]-\infty, 0[ \cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$$

2.2.7 Comparer  $a, a^2$  et  $a^3$  ( $a$  étant positif)

Soit  $a$  un nombre réel positif. En écrivant  $a^2 - a = a(a - 1)$  et  $a^3 - a^2 = a^2(a - 1)$ , on voit que l'ordre des trois nombres  $a, a^2, a^3$  dépend de la position de  $a$  par rapport à 1. On a rangé les différents cas dans un tableau :

| $a$         | 0               | $0 < a < 1$             | 1               | $1 < a$             |
|-------------|-----------------|-------------------------|-----------------|---------------------|
| $a(a-1)$    | 0               | -                       | 0               | +                   |
| $a^2(a-1)$  | 0               | -                       | 0               | +                   |
| Comparaison | $a = a^2 = a^3$ | $1 > a > a^2 > a^3 > 0$ | $a = a^2 = a^3$ | $1 < a < a^2 < a^3$ |

Ces encadrements se retrouvent en comparant les représentations graphiques des fonctions :  $x \mapsto x$ ,  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto x^3$  :



### 2.2.8 Solution de l'exercice type n° 2

1.  $1,24 \leq x < 1,25$

2. On ne doit pas soustraire des encadrements ! Écrivez simplement :

$$-1,42 < y < -1,40 \quad \text{donc} \quad 2,84 > -2y > 2,80$$

On remet cet encadrement dans le même sens que celui de  $x$  :

$$2,80 < -2y < 2,84$$

et on a :

$$4,04 < x - 2y < 4,09$$

# Énoncés chapitre 2

## 1 ★ ————— Lycée Marcellin-Berthelot, Châtellerault

10 min.

Donner une approximation des nombres suivants :

$$\sqrt{\frac{6}{7}} - \sqrt{\frac{5}{6}}, \quad \frac{2\sqrt{5}}{5 - \pi}, \quad \frac{3}{\pi + 1} - \frac{2}{\pi}, \quad \frac{\sqrt{\pi - 3}}{\pi}$$

1. au dixième près ;
2. avec 3 décimales exactes ;
3. avec deux chiffres significatifs.

## 2 ★ ————— Lycée Maurice Genevoix, Montrouge

15 min.

1. Sachant que 3,145 est une approximation du réel  $x$  à  $10^{-3}$  près, donner un encadrement de  $x$ .
2. Sachant que  $-2,135$  est une approximation par défaut du réel  $y$  à  $10^{-3}$  près, donner un encadrement de  $y$ .
3. En déduire un encadrement de  $x + y$ .

## 3 ★ ————— Lycée Germain, Coutances

10 min.

1. Représenter l'ensemble des réels  $x$  tels que  $|x - 3| < 4$ .
2. Représenter l'ensemble des réels  $x$  tels que  $\left|x + \frac{1}{2}\right| < \frac{5}{3}$ , puis déterminer l'ensemble des entiers relatifs qui vérifient la même inégalité.

## 4 ★ ————— Lycée Auguste Renoir, Asnières-sur-Seine

10 min.

Compléter le tableau ci-dessous :

| appartenance à un ensemble | traduction avec des inégalités |
|----------------------------|--------------------------------|
| $x \in [-1; 3]$            |                                |
|                            | $x < 5$                        |
| $x \in ]-\infty; -1]$      |                                |
|                            | $x \leq 3$ et $x > -2$         |

## 5 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Robespierre, Arras

15 min.

Si on ajoute 7 à un nombre entier naturel  $N$ , le carré du nombre obtenu dépasse le carré de  $N$  de 357. Calculer  $N$ .

## 6 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Stanislas, Paris

15 min.

Comparer la somme d'un nombre strictement positif et de son inverse avec 2.

## 7 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Saint Pierre, Brunoy

5 min.

Ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant :

$$\frac{13}{15}, \quad \frac{11}{15}, \quad \frac{11}{9}, \quad \frac{11}{7}$$

## 8 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Fragonard, l'Isle Adam

5 min.

Comparer  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3$  et  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ . Justifier.

## 9 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Sainte Geneviève, Asnières-sur-Seine

20 min.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $|x - 3| = 4$
2.  $|-2x + 5| = 2$
3.  $|x - 5| \geq \frac{1}{3}$
4.  $|1 - 2x| < 5$

## 10 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Racine, Paris

15 min.

Interpréter suivant le cas en termes de valeur absolue, distance, intervalle, et encadrement.

1.  $|x - 1| \leq 1$
2.  $d(x; 4) \leq 2$
3.  $x \in [6; 10]$
4.  $-2 \leq x \leq 2$

## 11 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Victor Hugo, Poitiers

25 min.

Résoudre les inéquations et donner l'ensemble des solutions.

1.  $|x| \leq 3$
2.  $x^2 > 9$
3.  $4 < x^2 < 9$
4.  $|x| > 2$
5.  $2 \leq |x| < 5$
6.  $5 \leq 3x - 1 \leq 14$

## 12★ ————— Lycée Hélène Boucher, Paris

10 min.

Résoudre les équations :

1.  $|x - 2| = 1$
2.  $|x + 2| - 2 = 0$

## 13★ ————— Lycée François Ier, Le Havre

10 min.

Résoudre algébriquement les équations et inéquations suivantes :

1.  $|x - 3| \leq |-x + 2|$
2.  $|x + 1| = |2x - 3|$

## 14★ ————— Lycée Lacordaire, Marseille

15 min.

1. Traduire à l'aide d'une valeur absolue et donner l'encadrement correspondant :  
« 2,75 est une approximation de  $x$  à la précision 0,05 ».
2. Traduire les valeurs absolues suivantes en termes de valeur approchée et de précision :

$$|x - 3| \leq 3 \cdot 10^{-1}$$

$$\left| x + \frac{1}{4} \right| \leq 0,1$$

## 15★ ————— Lycée Hoche, Versailles

15 min.

1. Exprimer en terme de distance :  $|x + 3| < 0,1$
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :
  - (a)  $|2x + 1| < 3$
  - (b)  $1 < |x + 2|$

## 16★ ————— Lycée Champollion, Grenoble

15 min.

Résoudre les équations suivantes :

1.  $|1 - x| \leq 3$
2.  $|2x - 3| = 1$
3.  $|7 - x| > 3$

**17** ★  
5 min.

Lycée Pierre Bourdon, Guéret

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$  définie dans  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \sqrt{|x| - 1}$$

**18** ★  
5 min.

Lycée Alain, Le Vésinet

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation (en utilisant les distances) :

$$|x| + |x + 1| < 2$$

**19** ★★  
15 min.

Lycée Joffre, Montpellier

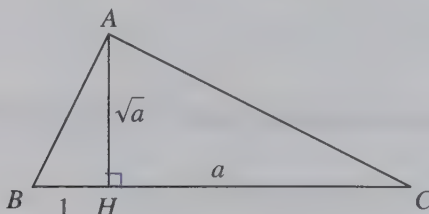
Soit  $A = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ .

1. Calculer  $A^2$ .
2. En déduire la valeur exacte de  $A$ .
3. Donner une valeur décimale approchée de  $A$  à  $10^{-3}$  près par défaut.

**20** ★★  
15 min.

Lycée Bernard Palissy, Agen

On donne le réel  $a > 0$  et on considère le triangle ci-dessous :



1. Exprimer  $AB^2$ ,  $AC^2$  et  $BC^2$  en fonction de  $a$ . En déduire que  $A$  appartient au cercle de diamètre  $[BC]$ .
2. Montrer que  $AC^2 - AB^2 = (a - 1)(a + 1)$  et en déduire la comparaison de  $AC$  et  $AB$  dans les cas suivants :
  - (a)  $0 < a < 1$
  - (b)  $a > 1$

## 21 ★★ ————— Lycée Gérard-de-Nerval, Soissons

20 min.

Montrer que si  $a$  et  $b$  sont strictement positifs, alors :

1.  $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
2.  $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Vérifier ces résultats pour  $a = b = 2$ .

## 22 ★★ ————— Lycée Henri IV, Paris

20 min.

1. On sait que 2,15 est une approximation de  $x$  à  $10^{-2}$  près et que 0,51 est une approximation par excès de  $y$  à  $10^{-3}$  près. Déterminer les encadrements de  $x$  et  $y$  correspondants, en déduire un encadrement de  $3x - 5y$ .
2. Traduire à l'aide de la notation « valeur absolue » :  $7,5 \leq x \leq 12,9$ .
3. Déterminer l'ensemble des réels  $x$  vérifiant  $|x - 3| \leq 5 \cdot 10^{-1}$  et  $|5 - 2x| < 4 \cdot 10^{-2}$

## 23 ★★ ————— Lycée Bascan, Rambouillet

20 min.

Les réels  $a$  et  $b$  étant strictement positifs, montrer que :

$$\frac{8}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \leq \frac{2}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

## 24 ★★ ————— Lycée Jean Condorcet, Bordeaux

15 min.

On suppose que  $-1 \leq x \leq 2$  et  $4 \leq y \leq 5$ . Encadrer  $2x - 3y$ ,  $xy$  et  $\frac{x}{y}$ .

## 25 ★★ ————— Lycée Richelieu, Rueil-Malmaison

10 min.

On sait que  $2,65 < d < 2,75$  et  $1,2 < e < 1,4$ .

Calculer un encadrement de  $5 \times d + 2 \times e$  et un encadrement de  $\frac{1}{d} + \frac{1}{e}$ .

## 26 ★★ ————— Lycée Descartes, Tours

10 min.

Résoudre géométriquement l'équation suivante :

$$|x + 3| + |x - 5| = 18$$

## 27 ★★ ————— Lycée Van Gogh, Ermont

30 min.

Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , le plus simplement possible, les équations et inéquations suivantes :

1.  $|2x - 1| = |3 - 4x|$
2.  $|x - 1| \leq \frac{1}{2}$
3.  $|2x - 4| < \frac{5}{2}$
4.  $\frac{9}{x+2} \geq x + 2$
5.  $|1 - 2x| + 2 \geq -2|1 + 3x|$

## 28 ★★★ — Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

10 min.

1. Pour  $x \in [1, 2]$  et  $y \in [3, 4]$ , donner un encadrement de  $x - y$ .
2. Pour  $x \in [-0, 3; 0, 3]$ , donner un encadrement de :  $-2x, x + 0,2, (x + 0, 2)^2$ .

## 29 ★★★ — Lycée Jacques Prévert, Boulogne-Billancourt

20 min.

$(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormal.

1.  $M$  le point de coordonnées  $(x, y)$ . Précisez le signe de  $x$  et le signe de  $y$  lorsque  $M$  se trouve dans chacun des quadrants du plan. (Un quadrant est l'un des quarts de plan délimité par les axes. Le premier quadrant est le quart « nord-est »).
2.  $E$  est l'ensemble des points  $M(x, y)$  tels que  $|x| + |y| = 1$ .  
A quelle droite appartient un point  $M$  de  $E$  qui est dans le premier quadrant ?  
Mêmes questions pour les autres quadrants. Représentez graphiquement l'ensemble  $E$ .
3. Sur un autre dessin, représentez graphiquement l'ensemble des points  $M(x, y)$  tels que  $|x - 3| \leq 1$  et  $|y - \frac{1}{2}| \leq \frac{3}{2}$

## 1 ————— Lycée Marcellin-Berthelot, Châtellerault

1. La calculatrice donne :

$$x = \sqrt{\frac{6}{7}} - \sqrt{\frac{5}{6}} \approx 0,0129491706$$

On peut approcher ce nombre :

- (a) au dixième près : 0,0 (noter qu'on donne le chiffre des dixièmes pour indiquer qu'il s'agit d'une valeur approchée)
- (b) avec 3 décimales exactes : 0,013. Noter ici qu'on dit que la dernière décimale est « exacte », ce qui signifie que :

$$|x - 0,013| < 0,0005$$

- (c) avec 2 chiffres significatifs : 0,013. Se rappeler que les 0 qui interviennent au début du nombre ne sont pas *significatifs* puisqu'ils pourraient disparaître en cas de changement d'unité (par exemple, 0,013m = 13cm)

2. La calculatrice donne :

$$x = \frac{2\sqrt{5}}{5 - \pi} \approx 2,406434716$$

D'où les approximations :

- (a) au dixième près : 2,4 ;
- (b) avec 3 décimales exactes : 2,406 ;
- (c) avec 2 chiffres significatifs : 2,4.

3. La calculatrice donne :

$$x = \frac{3}{\pi + 1} - \frac{2}{\pi} \approx 0,08773924865$$

D'où les approximations :

- (a) au dixième près : 0,1 ;
- (b) avec 3 décimales exactes : 0,088 ;
- (c) avec 2 chiffres significatifs : 0,088.

4. La calculatrice donne :

$$x = \frac{\sqrt{\pi - 3}}{\pi} \approx 0,1197761882$$

D'où :

- (a) au dixième près : 0,1 ;  
 (b) avec 3 décimales exactes : 0,120 ;  
 (c) avec 2 chiffres significatifs : 0,12.

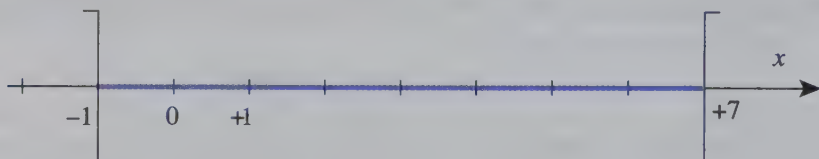
## 2 ————— Lycée Maurice Genevoix, Montrouge

1.  $3,144 \leq x \leq 3,146$ .
2. « Par défaut » signifie que -2,135 est inférieur à y, on sait en outre que c'est une valeur approchée au millièmè près, donc :  $-2,135 \leq y \leq -2,134$ .
3. En sommant les deux encadrements, on obtient :

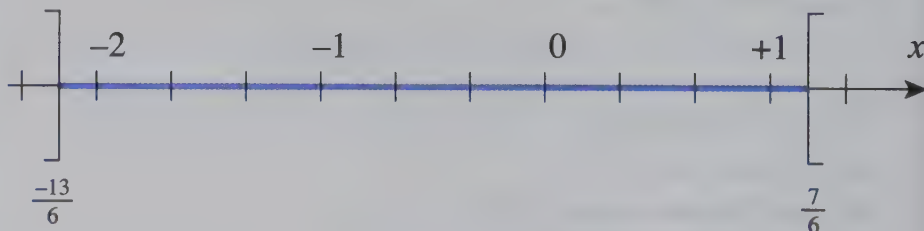
$$1,009 \leq x + y \leq 1,012$$

## 3 ————— Lycée Germain, Coutances

1. Il s'agit de l'intervalle  $]3 - 4, 3 + 4[ = ]-1, 7[$  :



2. Il s'agit de l'intervalle  $\left] -\frac{1}{2} - \frac{5}{3}, -\frac{1}{2} + \frac{5}{3} \right[ = \left] -\frac{13}{6}, \frac{7}{6} \right[$ .



Les entiers naturels de cet intervalle sont -2, -1, 0 et 1.

## 4 ————— Lycée Auguste Renoir, Asnières-sur-Seine

| appartenance à un ensemble | traduction avec des inégalités |
|----------------------------|--------------------------------|
| $x \in [-1, 3]$            | $-1 \leq x \leq 3$             |
| $x \in ]-\infty, 5[$       | $x < 5$                        |
| $x \in ]-\infty, -1]$      | $x \leq -1$                    |
| $x \in ]-2, 3]$            | $x \leq 3 \text{ et } x > -2$  |

## 5 ————— Lycée Robespierre, Arras

Le plus difficile est ici de poser l'équation. En lisant attentivement l'énoncé, on obtient :

$$(N + 7)^2 = N^2 + 357$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow N^2 + 14N + 49 &= N^2 + 357 \\
 \Leftrightarrow 14N &= 357 - 49 \\
 \Leftrightarrow 14N &= 308 \\
 \Leftrightarrow N &= 22
 \end{aligned}$$

## 6 ————— Lycée Stanislas, Paris

Soit  $x > 0$ . Examinons le signe de  $x + \frac{1}{x} - 2$ . Pour se débarrasser du dénominateur, multiplions cette expression par  $x$  (c'est légitime, puisque  $x > 0$ ), ce qui ne change pas son signe. On obtient  $x^2 + 1 - 2x$ . Ce n'est autre (produit remarquable !) que  $(x - 1)^2$ , qui est toujours positif, et nul si  $x = 1$ . L'expression de départ est donc toujours positive, ce qui montre que la somme d'un nombre strictement positif et de son inverse est toujours supérieure à deux, avec égalité si  $x = 1$ .

## 7 ————— Lycée St Pierre, Brunoy

$13 > 11$  donc  $\frac{13}{15} > \frac{11}{15}$ ;  $7 < 9 < 15$  donc :

$$\frac{11}{15} < \frac{11}{9} < \frac{11}{7}$$

Le problème est donc placer  $\frac{13}{15}$  par rapport à ces trois valeurs. Ce n'est pas difficile, car  $13 < 15$ , donc  $\frac{13}{15} < 1$ , alors que  $\frac{11}{9} > 1$ . Finalement :

$$\frac{11}{15} < \frac{13}{15} < \frac{11}{9} < \frac{11}{7}$$



Si vous utilisez une machine, n'oubliez pas d'encadrer les fractions par des valeurs approchées, ou d'expliquer la précision de vos approximations, sinon votre démonstration sera sans valeur. On peut dire, par exemple :  
Au centième près, on a les valeurs approchées :

$$\frac{13}{15} \simeq 0,86$$

$$\frac{11}{15} \simeq 0,73$$

$$\frac{11}{9} \simeq 1,22$$

$$\frac{11}{7} \simeq 1,57$$

Comme l'écart entre deux de ces valeurs est toujours supérieur à 1 centième, ces approximations suffisent.

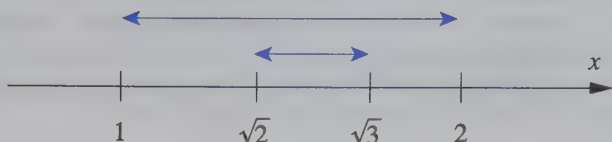
On peut utiliser des encadrements, avec des approximations moins poussées :

$$\frac{11}{15} < 0,8 < \frac{13}{15} < 0,9 < \frac{11}{9} < 1,5 < \frac{11}{7}$$

8

Lycée Fragonard, l'Isle Adam

$1 < \sqrt{3} < 2$  et  $1 < \sqrt{2} < 2$  donc  $|\sqrt{3} - \sqrt{2}| < 1$ . C'est une propriété naturelle des intervalles : la distance entre deux nombres pris dans un intervalle  $]a, b[$  est toujours plus petite que la longueur de l'intervalle ( $|b - a|$ ), comme on peut le constater sur le dessin :



Comme  $\sqrt{3} > \sqrt{2}$ , on a donc :

$$0 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 1$$

D'après une propriété du cours,

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3 < (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$$

9

Lycée Sainte Geneviève, Asnières-sur-Seine

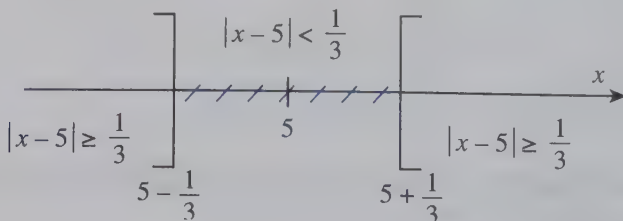
1.  $|x - 3| = 4$  signifie que l'écart entre  $x$  et 3 vaut 4. Donc  $x = 3 + 4$  ou  $x = 3 - 4$ .  
D'où les solutions :

$$S = \{-1; 7\}$$

2.  $|-2x + 7| = 2$  signifie que l'écart entre  $2x$  et 7 est 2. Donc  $2x = 7 + 2$  ou  $2x = 7 - 2$ . La première équation donne  $x = \frac{9}{2}$ , la seconde  $x = \frac{5}{2}$ , d'où

$$S = \left\{ \frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right\}$$

3.  $|x - 5| \geq \frac{1}{3}$ , signifie que l'écart entre  $x$  et 5 est supérieur ou égal à  $\frac{1}{3}$ . D'où :  
 $x \geq 5 + \frac{1}{3}$  ou  $x \leq 5 - \frac{1}{3}$ . On peut l'illustrer par une figure :



Il vient :

$$S = ]-\infty, \frac{14}{3}] \cup [\frac{16}{3}, +\infty[$$

4.  $|1 - 2x| < 5$  donc l'écart entre  $2x$  et 1 est strictement inférieur à 5. On en déduit l'encadrement :

$$1 - 5 < 2x < 1 + 5$$

soit  $-4 < 2x < 6$ , et enfin  $-2 < x < 3$ . On a donc :

$$S = ]-2, 3[$$

## 10 ————— Lycée Racine, Paris

Nous allons remplir un petit tableau :

| valeur absolue   | distance         | intervalle      | encadrement        |
|------------------|------------------|-----------------|--------------------|
| $ x - 1  \leq 1$ | $d(x, 1) \leq 1$ | $x \in [0; 2]$  | $0 \leq x \leq 2$  |
| $ x - 4  \leq 2$ | $d(x, 4) \leq 2$ | $x \in [2; 6]$  | $2 \leq x \leq 6$  |
| $ x - 8  \leq 2$ | $d(x, 8) \leq 2$ | $x \in [6; 10]$ | $6 \leq x \leq 10$ |
| $ x  \leq 2$     | $d(x, 0) \leq 2$ | $x \in [-2; 2]$ | $-2 \leq x \leq 2$ |

## 11 ————— Lycée Victor Hugo, Poitiers

- $|x| \leq 3$  signifie  $-3 \leq x \leq 3$ , donc  $S = [-3; 3]$
- $x^2 > 9$  pour  $x > 3$  ou  $x < -3$  (n'oubliez pas les valeurs négatives !) L'ensemble des solutions est donc :  $S = ]-\infty; -3[ \cup ]3; +\infty[$
- Il est tentant de répondre :  $2 < x < 3$ , mais n'oubliez pas que  $x$  peut aussi être négatif, et on aura alors :  $-3 < x < -2$ . L'ensemble des solutions est donc :

$$S = ]-3; -2[ \cup ]2; 3[$$

- $|x| > 2$  non seulement quand  $x > 2$ , mais aussi si  $x < -2$  ! D'où l'ensemble des solutions :

$$S = ]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[$$

- $2 \leq |x| < 5$  quand  $2 \leq x < 5$ , mais aussi quand  $-5 < x \leq -2$ . L'ensemble des solutions est donc :

$$S = ]-5; -2] \cup [2; 5[$$

- Partons de l'encadrement :

$$5 \leq 3x - 1 \leq 14$$

Il vient :

$$6 \leq 3x \leq 15$$

Et, en divisant par 3 :

$$2 \leq x \leq 5$$

L'ensemble des solutions est donc :  $S = [2; 5]$

## 12 ————— Lycée Hélène Boucher, Paris

1. Examinons l'égalité :

$$|x - 2| = 1$$

Elle est possible dans les cas suivants :

$$\begin{array}{ccc} x - 2 = 1 & & x - 2 = -1 \\ x = 3 & \text{ou} & x = 1 \end{array}$$

L'ensemble des solutions est donc :  $S = \{1; 3\}$

2. Ré-écrivons :

$$|x + 2| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x + 2| = 2$$

On obtient deux cas :

$$\begin{array}{ccc} x + 2 = 2 & & x + 2 = -2 \\ x = 0 & \text{ou} & x = -4 \end{array}$$

D'où :  $S = \{-4; 0\}$ .

## 13 ————— Lycée François I<sup>er</sup>, Le Havre

1. Il s'agit de résoudre l'inéquation :

$$|x - 3| - |-x + 2| \leq 0$$

Remplissons un tableau :

| $x$                  | $-\infty$ | 2 | 3         | $+\infty$ |         |
|----------------------|-----------|---|-----------|-----------|---------|
| $ x - 3 $            | $-x + 3$  | 1 | $-x + 3$  | 0         | $x - 3$ |
| $ -x + 2 $           | $-x + 2$  | 0 | $x - 2$   | 1         | $x - 2$ |
| $ x - 3  -  -x + 2 $ | 1         | 1 | $-2x + 5$ | -1        | -1      |

Dans l'intervalle  $]-\infty, 2]$ ,  $|x - 3| - |-x + 2|$  n'est pas négatif. Entre 2 et 3, on résout l'inéquation :  $-2x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow -2x \leq -5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$ . Il faudra donc mettre dans l'ensemble des solutions tout l'intervalle  $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$ . Dans  $[3, +\infty[$ ,  $|x - 3| - |-x + 2|$  vaut toujours -1 et répond donc au problème. En résumé, on a l'ensemble de solutions :

$$S = \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$$

2. De même, résolvons l'équation :

$$|x + 1| - |2x - 3| = 0$$

On dresse le tableau suivant :

| $x$                  | $-\infty$ | $-1$ | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$      |
|----------------------|-----------|------|---------------|----------------|
| $ x + 1 $            | $-x - 1$  | $0$  | $x + 1$       | $x + 1$        |
| $ 2x - 3 $           | $-2x + 3$ | $5$  | $-2x + 3$     | $0$            |
| $ x + 1  -  2x - 3 $ | $x - 4$   | $-5$ | $3x - 2$      | $-\frac{5}{2}$ |

Dans  $]-\infty, -1]$ , l'équation devient :  $x - 4 = 0$ , donc  $x = 4$ . Il ne faut pas retenir cette solution car 4 est supérieur à  $-1$ . Entre  $-1$  et  $\frac{3}{2}$ , on obtient :  $3x - 2 = 0$ , ce qui donne  $x = \frac{2}{3}$ . Enfin, dans  $[\frac{3}{2}, +\infty[$ , il vient :  $-x + 4 = 0$ , d'où  $x = 4$ . Cette fois, il faut retenir la solution 4 car elle a été trouvée dans le bon intervalle. En conclusion, l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ \frac{2}{3}, 4 \right\}$$

## 14 Lycée Lacordaire, Marseille

1. La phrase de l'énoncé signifie que l'écart entre la (vraie) valeur de  $x$  et sa valeur approchée ne dépasse pas 0,05, ce qui s'écrit :

$$|x - 2,75| \leq 0,05$$

Ce qui permet d'écrire :  $2,7 \leq x \leq 2,8$ .

2. De la même façon,  $|x - 3| \leq 3 \cdot 10^{-1}$  signifie que 3 est une valeur approchée de  $x$  à  $3 \cdot 10^{-1}$  près, et  $|x + \frac{1}{4}| \leq 0,1$  veut dire que  $-\frac{1}{4}$  est une valeur approchée de  $x$  à 0,1 (c'est-à-dire au dixième) près.

## 15 Lycée Hoche, Versailles

1.  $|x + 3| < 0,1$  signifie que, sur une droite graduée, la distance entre le point d'abscisse  $x$  et le point d'abscisse  $-3$  est strictement inférieure à 0,1.

2. (a) En divisant par 2, on obtient :  $|x + \frac{1}{2}| < \frac{3}{2}$ , ce qui signifie que la distance entre  $x$  et  $-\frac{1}{2}$  est inférieure strictement à  $\frac{3}{2}$ . D'où l'ensemble de solutions :

$$S = \left] -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right[ = ]-2, 1[$$

- (b) La distance entre  $x$  et  $-2$  est strictement plus grande que 1, donc soit  $x > -2 + 1$ , soit  $x < -2 - 1$ . On obtient l'ensemble de solutions suivant :

$$S = ]-\infty, -3[ \cup ]-1, +\infty[$$

## 16 ————— Lycée Champollion, Grenoble

1. La distance entre  $x$  et 1 est inférieure à 3, donc :

$$S = [1 - 3, 1 + 3] = [-2, 4]$$

2. Divisons par 2. On obtient :  $|x - \frac{3}{2}| = \frac{1}{2}$ . D'où :

$$S = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right\} = \{1; 2\}$$

3. La distance entre  $x$  et 7 doit être strictement plus grande que 3, donc :

$$S = ]-\infty, 7 - 3[ \cup ]7 + 3, +\infty[ = ]-\infty, 4[ \cup ]10, +\infty[$$

## 17 ————— Lycée Pierre Bourdon, Guéret

$f(x)$  est défini quand  $|x| - 1 \geq 0$ , donc quand  $|x| \geq 1$ . Il vient :

$$D_f = ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

## 18 ————— Lycée Alain, Le Vésinet

On place sur une droite graduée les points  $A$  et  $B$ , d'abscisses respectives 0 et  $-1$  (voir dessin). Si on note  $M$  le point d'abscisse  $x$ , l'inéquation proposée se transforme en :

$$AM + BM < 2$$

Comme  $AB = 1$ , si  $M$  est sur le segment  $[AB]$ , on aura nécessairement :  $AM + BM = 1$ , ce qui convient. On retrouvera donc en solutions l'intervalle  $[-1; 0]$ . Supposons maintenant  $M$  en dehors du segment  $[AB]$ . S'il est à gauche de  $B$ , on peut écrire  $AM = AB + BM$ , donc :

$$AB + BM + BM < 2 \Leftrightarrow 2BM < 2 - 1 \Leftrightarrow BM < \frac{1}{2}$$

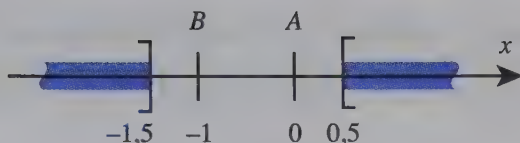
Ce qui signifie qu'on ne doit pas trop s'éloigner de  $B$ . Précisément, on aura  $x > -1 - \frac{1}{2}$ , donc  $x > -\frac{3}{2}$ . Les éléments de  $] -\frac{3}{2}, -1]$  sont donc solutions.

Si  $M$  est à droite de  $A$ , on écrit  $BM = BA + AM$ , donc  $2AM + BA < 2$ , ce qui devient :  $2AM < 1$ , et  $AM < \frac{1}{2}$ . Au niveau des abscisses, on traduit ceci par :  $x < \frac{1}{2}$ ,

donc les éléments de  $\left[ 0, \frac{1}{2} \right]$  sont solutions. Conclusion :

$$S = \left] -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right[$$

Graphiquement :



## 19 Lycée Joffre, Montpellier

1. On développe le produit remarquable :

$$\begin{aligned}
 A &= (\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^2 \\
 &= 5 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + 5 + 2\sqrt{6} \\
 &= 10 - 2\sqrt{25 - 4 \times 6} \text{ (on a reconnu } (a - b)(a + b)) \\
 &= 10 - 2\sqrt{1} = 10 - 2 = 8
 \end{aligned}$$

2. Attention, il y a un gros piège. Comme  $2\sqrt{6} \geq 0$ , on a :

$$5 - 2\sqrt{6} \leq 5 + 2\sqrt{6}$$

et donc :

$$\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \leq \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$$

c'est-à-dire que  $A$  est négatif ! La bonne réponse est donc :

$$A = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$$

3. La calculatrice donne :  $-2,828427\dots$ . Une approximation par défaut doit être inférieure à ce nombre, la bonne réponse est :

$$A \simeq -2,829$$

(attention, le nombre est négatif, donc  $-2,829 < A < -2,828$ ).

## 20 Lycée Bernard Palissy, Agen

1. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle  $ABH$ , rectangle en  $H$  :

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 = 1 + a$$

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle  $AHC$ , rectangle en  $H$  :

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = a + a^2$$

Comme  $B$ ,  $H$  et  $C$  sont alignés et dans cet ordre, on a  $BC = BH + HC$  donc :

$$BC^2 = (1 + a)^2 = a^2 + 2a + 1$$

On a :

$$AB^2 + AC^2 = 1 + a + a + a^2 = 1 + 2a + a^2 = BC^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ . D'après une propriété vue au collège, le cercle circonscrit à un triangle rectangle a l'hypoténuse pour diamètre, c'est-à-dire que  $[BC]$  est le diamètre du cercle qui passe par  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

2. D'après les calculs ci-dessus :

$$AC^2 - AB^2 = a + a^2 - (a + 1) = a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$$

- (a) Si  $0 < a < 1$ , alors  $a - 1 < 0$  et comme  $a + 1 > 0$ , il vient :

$$AC^2 - AB^2 < 0$$

donc  $AC^2 < AB^2$  et  $AC < AB$  en passant aux racines carrées.

- (b) Si  $1 < a$ , alors  $a - 1 > 0$ , et on obtient  $AC > AB$  de la même manière.

## 21 ————— Lycée Gérard de Nerval, Soissons

1. Nous allons réduire les deux parties de l'inégalité au même dénominateur.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \frac{b+a}{ab} = \frac{(a+b)^2}{ab(a+b)}$$

D'autre part,

$$\frac{1}{a+b} = \frac{ab}{ab(a+b)}$$

Puisque  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 > ab$ , et que  $ab(a+b) > 0$ , on obtient le résultat :

$$\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Avec  $a = b = 2$ , on obtient même :  $\frac{1}{4} < 1$ .

2. Élevons les deux membres de l'inégalité au carré.

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$$

$$(\sqrt{a+b})^2 = a + b$$

Les deux nombres  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  et  $\sqrt{a+b}$  étant positifs, ils sont dans le même ordre que leurs carrés. Il devient alors clair que  $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ . Ceci est d'ailleurs confirmé en prenant  $a = b = 2$ , on obtient :  $2 < 2\sqrt{2}$ .

## 22 ————— Lycée Henri IV, Paris

1.  $2, 14 \leq x \leq 2, 16$  et  $0, 509 \leq y \leq 0, 51$ . On en déduit :

$$6, 42 \leq 3x \leq 6, 48 \text{ et } 2, 545 \leq 5y \leq 2, 55$$

En notant bien :  $-2, 55 \leq -5y \leq -2, 545$ , on obtient :

$$3, 87 \leq 3x - 5y \leq 3, 935$$

2.  $x$  se trouve dans l'intervalle  $[7, 5; 12, 9]$ . Calculons le centre de l'intervalle :  $\frac{7,5 + 12,9}{2} = 10,2$ , ainsi que son rayon :  $\frac{12,9 - 7,5}{2} = 2,7$ . On peut donc écrire :

$$|x - 10,2| \leq 2,7$$

3. Si  $|x - 3| \leq 5 \cdot 10^{-1}$ , on a donc  $x \in [3 - 0,5; 3 + 0,5]$  c'est-à-dire  $x \in [2,5; 3,5]$ .

Si  $|5 - 2x| < 4 \cdot 10^{-2}$ , on peut écrire, en divisant par 2,  $|\frac{5}{2} - x| < 2 \cdot 10^{-2}$ . Finalement,  $x \in ]2,5 - 0,02; 2,5 + 0,02[$ , c'est-à-dire  $x \in ]2,48; 2,52[$ .

L'ensemble des réels  $x$  vérifiant les 2 inégalités est donc :

$$S = [2,5; 2,52[$$

## 23 Lycée Bascan, Rambouillet

Nous allons procéder par équivalences pour montrer que

$$\frac{8}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \leq \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

En échangeant  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$  et 2 et en multipliant par  $\sqrt{ab}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} 4\sqrt{ab} &\leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &\Leftrightarrow 4\sqrt{ab} &\leq a + 2\sqrt{ab} + b \\ &&\Leftrightarrow 0 &\leq a - 2\sqrt{ab} + b \\ &&\Leftrightarrow 0 &\leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \end{aligned}$$

Ce qui est toujours vrai car un carré est toujours positif. Procédons de même pour la deuxième inégalité :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{ab}} &\leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{ab}} &\leq \frac{b+a}{ab} \\ &&\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{ab}} \cdot ab &\leq b+a \\ &&\Leftrightarrow 2\sqrt{ab} &\leq b+a \\ &&\Leftrightarrow 0 &\leq a - 2\sqrt{ab} + b \\ &&\Leftrightarrow 0 &\leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \end{aligned}$$

Ce qui est toujours vrai.

## 24 Lycée Jean Condorcet, Bordeaux

On encadre facilement  $-2 \leq 2x \leq 4$  et  $-12 \geq -3y \geq -15$ , ce qui s'écrit aussi  $-15 \leq -3y \leq -12$ . En sommant ces deux encadrements membre à membre, on obtient :

$$-17 \leq 2x - 3y \leq -8$$

Il faut procéder avec délicatesse pour encadrer  $xy$ . Comme on sait que  $y$  est positif, on peut multiplier l'encadrement de  $x$  par  $y$ , ce qui donne :

$$-y \leq xy \leq 2y$$

Or,  $y \leq 5$  donne  $-5 \leq -y$  et  $2y \leq 10$ . On en conclut :

$$-5 \leq xy \leq 10$$

Procédons de même pour  $\frac{x}{y}$ . L'encadrement de  $x$  nous donne :

$$-\frac{1}{y} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{2}{y}$$

$4 \leq y$ , donc  $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{4}$  et  $\frac{2}{y} \leq \frac{1}{2}$ . On en déduit aussi que  $-\frac{1}{4} \leq -\frac{1}{y}$ . Il vient :

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{1}{2}$$

## 25 ————— Lycée Richelieu, Rueil-Malmaison

1. On part de :

$$2,65 < d < 2,75$$

$5 > 0$ , donc la multiplication par 5 ne change pas le sens de l'encadrement :

$$13,25 < 5d < 13,75$$

De même, on multiplie par 2 les membres de l'encadrement :

$$1,2 < e < 1,4$$

ce qui donne :

$$2,4 < 2e < 2,8$$

Les encadrements ont même sens, on peut sommer terme à terme :

$$15,65 < 5d + 2e < 16,55$$

2. Les termes des encadrements de  $d$  et  $e$  sont strictement positifs, donc on peut inverser, à condition de changer de sens :

$$\frac{1}{2,75} < \frac{1}{d} < \frac{1}{2,65}$$

et

$$\frac{1}{1,4} < \frac{1}{e} < \frac{1}{1,2}$$

Ces deux encadrements ayant même sens, on peut sommer terme à terme :

$$\frac{1}{2,75} + \frac{1}{1,4} < \frac{1}{d} + \frac{1}{e} < \frac{1}{2,65} + \frac{1}{1,2}$$

## 26 Lycée Descartes, Tours

Sur une droite graduée, plaçons les points  $A$  et  $B$  d'abscisses respectives  $-3$  et  $5$ , et donnons-nous un point  $M$  d'abscisse  $x$ . L'équation revient à écrire :

$$AM + BM = 18$$

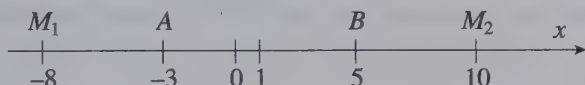
Puisque  $AB = 8$ , il est clair que  $M$  ne peut être situé entre  $A$  et  $B$ . Supposons  $M$  à gauche de  $A$  (voir dessin). On peut écrire  $BM = BA + AM$ , d'où l'équation :

$$AM + BA + AM = 18, \text{ qui devient } 2AM = 18 - 8 \text{ et enfin } AM = 5$$

Nous avons dit que  $M$  était à la gauche de  $A$ , son abscisse est donc :  $x = -3 - 5 = -8$ . Si maintenant nous supposons que  $M$  est à droite de  $B$ , on peut écrire :  $AM = AB + BM$ , d'où :

$$AB + BM + BM = 18 \Leftrightarrow 8 + 2BM = 18 \Leftrightarrow 2BM = 10 \Leftrightarrow BM = 5$$

Finalement, on obtient comme abscisse :  $x = 5 + 5 = 10$ . Voici une représentation graphique des points obtenus :



## 27 Lycée Van Gogh, Ermont

- Si les valeurs absolues de deux nombres sont égales, cela signifie soit que les deux nombres eux-mêmes sont égaux, soit qu'ils sont opposés. Donc on a soit  $2x - 1 = 3 - 4x$ , donc  $6x = 4$  et  $x = \frac{2}{3}$ , ou bien  $2x - 1 = 4x - 3$ , donc  $2 = 2x$  et  $x = 1$ .  
Conclusion :

$$S = \left\{ \frac{2}{3}, 1 \right\}$$

- La distance entre  $x$  et  $1$  ne dépasse pas  $\frac{1}{2}$ , donc  $x$  est compris entre  $1 - \frac{1}{2}$  et  $1 + \frac{1}{2}$ .  
On a :

$$S = \left[ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$$

- Divisons par 2. On obtient :  $|x - 2| < \frac{5}{4}$ , d'où :

$$S = \left] 2 - \frac{5}{4}, 2 + \frac{5}{4} \right[ = \left] \frac{3}{4}, \frac{13}{4} \right[$$

- N'oublions pas d'éliminer  $-2$  du domaine de l'équation (cette valeur annulerait le dénominateur de la fraction). Si vous avez multiplié par  $x + 2$  et que vous êtes tombé sur l'inéquation  $9 \geq (x + 2)^2$ , C'EST TRÈS MAL !!! Vous êtes devant une inéquation, et il faudrait quand même vous préoccuper du signe de  $x + 2$  avant de multiplier.

Si  $x + 2 > 0$  (donc si  $x > -2$ ), on peut sans problème écrire  $9 \geq (x + 2)^2$ , et même passer aux racines carrées :  $3 \geq x + 2$ . Il vient :  $x \leq 1$ . Les éléments de  $] -2; 1]$  sont solutions.

Si  $x + 2 < 0$  (donc si  $x < -2$ ), il faut changer le sens en multipliant :  $9 \leq (x + 2)^2$ . Attention au passage aux racines carrées.  $x + 2$  est négatif, donc la racine carrée de  $(x + 2)^2$  n'est pas  $x + 2$  mais  $-x - 2$ . Finalement, on écrit :  $3 \leq -x - 2$ , donc  $x \leq -5$ . Les solutions correspondant à ce cas sont à la fois inférieures ou égales à  $-5$ , et strictement inférieures à  $-2$ , donc dans  $] -\infty, -5]$ .

En rassemblant les deux cas, on a :

$$S = ]-\infty, -5] \cup ]-2, 1]$$

5. Les observateurs sont déjà passés à l'exercice suivant. Regardez le signe de  $|1 - 2x| + 2$ . Il s'agit d'une somme de réels positifs, elle est donc toujours positive. Regardez maintenant  $-2|1 + 3x|$ . C'est le produit d'un négatif par un positif, il est donc toujours négatif. Un réel négatif est toujours inférieur à un réel positif, donc n'importe quel  $x$  convient. D'où :  $S = \mathbb{R}$ .

## 28 ————— Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

1. On peut encadrer  $x$  et  $y$  par :

$$1 \leq x \leq 2 \text{ et } 3 \leq y \leq 4$$

Encadrons  $-y$  :

$$-4 \leq -y \leq -3$$

En sommant les encadrements de  $x$  et de  $-y$ , on obtient :

$$-3 \leq x - y \leq -1$$

2. Il faut partir de l'encadrement de  $x$  :  $-0,3 \leq x \leq 0,3$ . En multipliant par  $-2$ , on obtient :

$$0,6 \geq -2x \geq -0,6$$

En ajoutant  $0,2$ , on a :

$$-0,1 \leq x + 0,2 \leq 0,5$$

Attention au passage au carré. On commence d'abord par encadrer la valeur absolue de  $x + 0,2$  :  $|x + 0,2| \leq 0,5$ . Alors seulement on peut passer au carré :

$$0 \leq (x + 0,2)^2 \leq 0,25$$

## 29 ————— Lycée Jacques Prévert, Boulogne-Billancourt

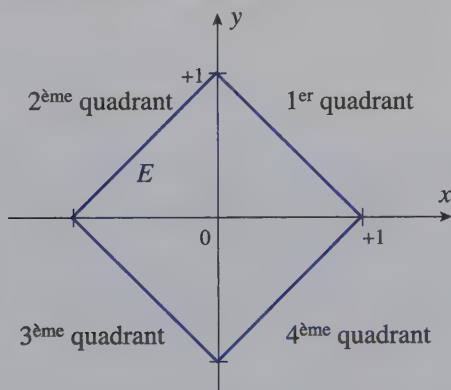
1. La droite des abscisses et la droite des ordonnées découpent le plan en quatre parties appelées « quadrants ». Ces quadrants sont numérotés 1, 2, 3, et 4, en partant du quadrant « en-haut » et « à droite », en tournant dans le sens trigonométrique (c'est-à-dire le sens contraire des aiguilles d'une montre).

Les coordonnées des points du premier quadrant sont donc positives. Dans le second quadrant, on a  $x \leq 0$  et  $y \geq 0$ ; dans le troisième, les deux coordonnées sont négatives; enfin, dans le quatrième quadrant, on a  $x \geq 0$  et  $y \leq 0$ .

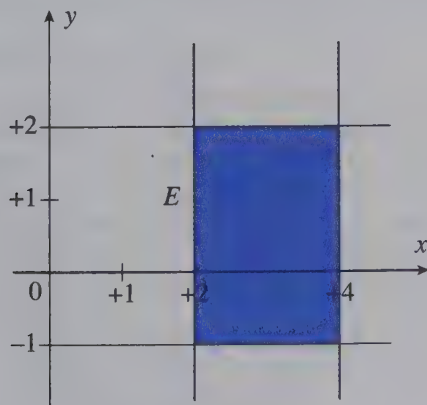
2. Il faut faire attention aux signes de  $x$  et de  $y$  dans chacun des quadrants. L'équation de  $E$  devient :

- (a) Dans le premier quadrant,  $x$  et  $y$  sont positifs, donc  $|x| = x$  et  $|y| = y$ , d'où :  $x + y = 1$ .
- (b) Dans le second quadrant,  $x$  est négatif,  $y$  positif, donc  $|x| = -x$  et  $|y| = y$ , d'où :  $-x + y = 1$ .
- (c) De même, dans le troisième quadrant,  $-x - y = 1$ .
- (d) Dans le dernier quadrant,  $x - y = 1$ .

On peut représenter graphiquement l'ensemble  $E$  en ne tenant compte, pour chacune de ces droites, que de « leur » quadrant respectif.



3. Il s'agit de représenter les points dont l'abscisse est comprise entre  $3 - 1 = 2$  et  $3 + 1 = 4$ , et dont l'ordonnée est comprise entre  $\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$  et  $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$ . On obtient la partie du plan délimitée par les droites d'équations  $x = 2$ ,  $x = 4$ ,  $y = -1$  et  $y = 2$  :





## Fonctions

*A-t-il le corps propre à ses fonctions, sain et allègre ?  
(Montaigne)*

### 3.1 Étudier une fonction

#### 3.1.1 Exercice type n° 1

Soit :

$$f : x \mapsto \frac{1+x^2}{x}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ?
2. Quelle est l'image de  $-3$  ? Quel sont les antécédents de  $2$  ?
3. Étudier la parité de  $f$ .
4. Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $]0, 1[$  et strictement croissante sur  $]1, +\infty[$ . En déduire le tableau des variations de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
5. Représenter le graphe de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 2 cm).
6. Déterminer graphiquement les solutions de  $f(x) = 4$ .

• Lycée Jean Monnet, Franconville •

#### 3.1.2 Qu'est-ce qu'une fonction ?

*Exemple :* Au distributeur du lycée, la canette de soda coûte 0,40 €. Si on achète 3 canettes, il faut dépenser 1,20 €. Si on note  $n$  le nombre de canettes achetées et  $D$  la dépense totale, on constate : (1) La dépense  $D$  dépend du nombre de canettes  $n$ . (2) Cette dépendance est *fonctionnelle*. Si quelqu'un achète le même nombre de canettes que moi, il dépensera la même somme. Dans le langage courant, on dit que la dépense  $D$  est fonction du nombre de canettes  $n$ . En mathématiques, on dira qu'il existe une certaine fonction, notée en général  $f$  (mais ce n'est pas obligatoire), qui à un nombre de canettes  $n$  associe la dépense  $D$ .

On écrira  $D = f(n)$ , ce qui se lit : «  $D$  égale  $f$  de  $n$  » ou bien «  $D$  est l'image de  $n$  par la fonction  $f$  ».

On écrit également  $f : n \mapsto D$  («  $n$  donne  $D$  »).

Après avoir dit : «  $D = f(n)$  », on peut donner des renseignements complémentaires :

L'ensemble de définition :  $n$  représente un nombre de canette donc  $n$  est un entier naturel.  $\mathbb{N}$  est l'ensemble de définition de  $f$ .

Les variations :  $D$  est une fonction croissante de  $n$  (plus on achète de canettes, plus ça coûte cher !). En mathématiques, on dit :  $f$  est croissante.

La relation entre  $D$  et  $n$  s'écrit :  $D = p \times n$ , où  $p$  est une constante (ici  $p = 0,40$  est le prix d'une canette). On dit que  $f$  est une fonction linéaire (voir cours de troisième).

Vous aurez l'occasion, pendant le cours de statistiques notamment, de rencontrer des relations entre des grandeurs, mais qu'on ne peut pas décrire par une fonction.

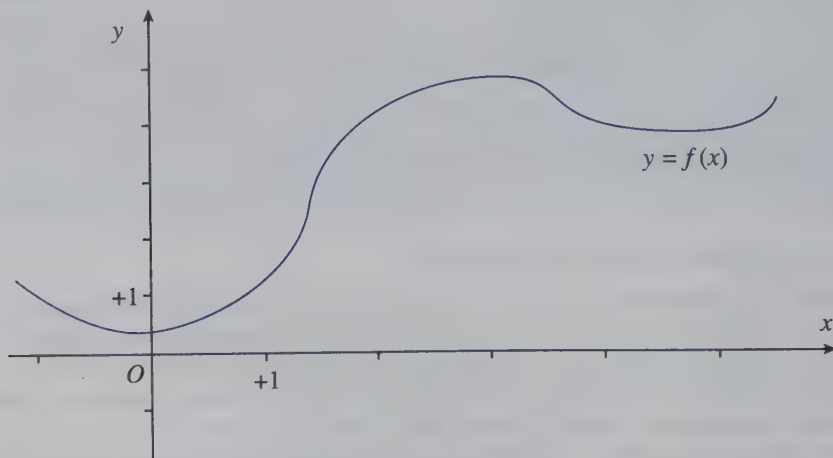
**Exemple :** On joue à pile ou face. On note  $n$  le nombre de fois où l'on a jeté la pièce en l'air, et  $p$  le nombre de fois où l'on a obtenu pile. On constate : (1) Le nombre de piles  $p$  dépend du nombre de jets  $n$  : par exemple, on sait que  $p \leq n$  ; on sait également qu'il suffit de faire un nombre suffisamment grands de jets pour obtenir autant de piles que l'on souhaite. (2) En revanche, cette dépendance n'est pas de type *fonctionnelle*.  $p$  n'est pas une *fonction* de  $n$ . Avec 3 tirages de la même pièce, on peut obtenir 0, 1, 2, 3 fois « pile ».  $p$  n'est donc pas une fonction de  $n$ . La relation entre  $p$  et  $n$  étant soumise au hasard, on dit que  $p$  dépend *aléatoirement* de  $n$ .

Les fonctions peuvent être caractérisées de 3 manières :

**Par un tableau de valeurs** Cette méthode est parfaitement adaptée si le nombre de valeurs possibles est fini. Par exemple, la fonction donnant la température à Paris en fonction des mois de l'année :

| jan | fév | mars | avr | mai | juin | juil | août | sept | oct | nov | déc |
|-----|-----|------|-----|-----|------|------|------|------|-----|-----|-----|
| 15  | 16  | 18   | 21  | 24  | 27   | 29   | 30   | 28   | 25  | 21  | 18  |

**Par une courbe** On indique les éléments «  $x$  » en abscisses, et leurs images  $f(x)$  en ordonnée :



Le mot « courbe » est à prendre dans un sens très large. Vous savez déjà que pour les fonctions linéaires et les fonctions affines, cette courbe est... une droite !

**Par une formule** Elle explique comment calculer  $f(x)$  à partir de  $x$ . Par exemple :

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{x}$$

Les trois points de vue sont utiles, et il faut savoir passer de l'un à l'autre :

- A l'aide de la formule, on remplit un tableau de valeurs.
- On lit dans le tableau de valeurs les coordonnées d'un certain nombre de points de la courbe, que l'on peut éventuellement relier.
- Sur la courbe, on peut lire les valeurs de la fonction. Dans certains cas (droite, par exemple), on peut retrouver une formule...

### 3.1.3 Image et antécédent

Si  $x$  est un réel, le réel  $f(x)$  est son *image*. Le réel  $x$  est un antécédent de  $f(x)$ . Par exemple, si l'on considère la fonction  $x \mapsto x^2$ , 4 est l'image de 2 car  $2^2 = 4$ , et  $-3$  est un antécédent de 9 (car  $(-3)^2 = 9$ ).

Remarquez bien le vocabulaire utilisé : « son » image, « un » antécédent. En effet,  $f(x)$  peut avoir plusieurs antécédents ( $x$ , mais peut-être aussi d'autres réels). Cependant, l'image de  $x$  est unique, s'il en a une.

### 3.1.4 Ensemble de définition

En général, tous les  $x$  n'ont pas une image. Dans les formules, les problèmes viennent généralement des fractions et des racines carrées.

L'ensemble de définition (ou *domaine* de définition) est l'ensemble des éléments qui ont une image.

Par exemple, la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x-2}$  est définie partout sauf en 2. En effet, si  $x = 2$ , le dénominateur de la fraction est égal à 0, ce qui n'est pas possible. Le domaine de la fonction est donc  $\mathbb{R} - \{2\}$ , qui contient tous les nombres (réels), sauf le réel 2.

La fonction  $x \mapsto \sqrt{x+2}$  est définie seulement si  $x+2 \geq 0$ , donc si  $x \geq -2$ . Le domaine de cette fonction est  $[-2, +\infty[$ .

Dans certains cas, le domaine est imposé par l'énoncé. On peut ainsi considérer, par exemple, la fonction définie *seulement* sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

### 3.1.5 Variations

Le calcul de l'image de plusieurs points de l'ensemble de définition correspond à une vision *statique*, immobile, des fonctions. C'est un point de vue fatalement limité, puisqu'on ne pourra jamais calculer les images de *tous* les points de l'ensemble de définition (celui-ci étant en général infini). On est ainsi amené à une vision plus *dynamique* des fonctions, où l'on étudiera le comportement de  $f(x)$  lorsqu'on augmente  $x$ .

On dira qu'une fonction est *croissante* (respectivement *décroissante*) sur un intervalle donné si, en prenant deux éléments quelconques de cet intervalle,  $x$  et  $x'$ , avec  $x' > x$ , on a  $f(x') \geq f(x)$  (respectivement  $f(x') \leq f(x)$ ). Si la fonction prend toujours la même valeur, on dit qu'elle est *constante*. Une fonction répondant à l'une de ces trois définitions est dite *monotone*.

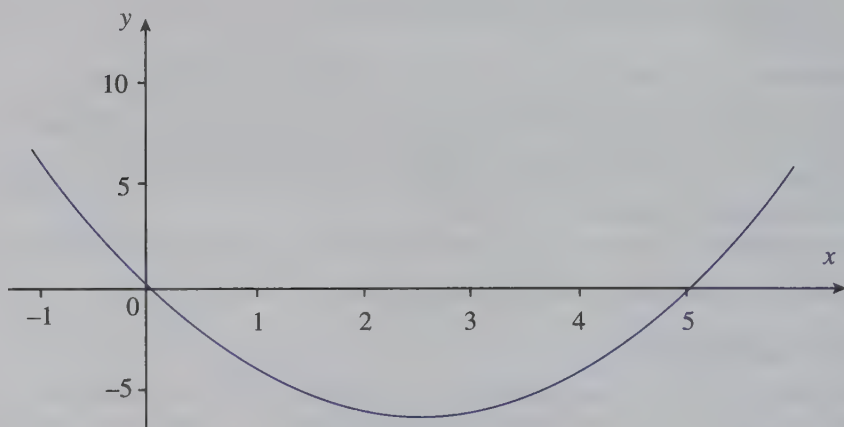
La fonction est *strictement croissante* (respectivement *strictement décroissante*) si on peut écrire des inégalités strictes. On parlera alors de fonction *strictement monotone*.

 Il ne s'agit pas de prendre deux points au hasard dans l'intervalle et de les comparer. Par exemple, pour  $f : x \mapsto x^2 - 5x$ , il ne s'agit pas de calculer  $f(2)$  et  $f(4)$ , puis de voir lequel des deux est le plus grand. Il faut déterminer le signe

de l'expression  $f(x') - f(x)$  en supposant que  $x' > x$ . Par exemple, si l'on examine  $x \mapsto x^2 - 5x$  entre 0 et  $\frac{5}{2}$  :

$$\begin{aligned} f(x') - f(x) &= (x'^2 - 5x') - (x^2 - 5x) \\ &= x'^2 - 5x' - x^2 + 5x \\ &= x'^2 - x^2 - 5x' + 5x \\ &= (x' - x)(x' + x) - 5(x' - x) \\ &= (x' - x)(x' + x - 5) \end{aligned}$$

Comme  $0 \leq x < x' \leq \frac{5}{2}$ , on voit que  $x' - x > 0$  et  $x' + x - 5 < 0$ . On en déduit que  $f(x') - f(x) < 0$ , et que  $f$  est décroissante sur l'intervalle considéré. On a prouvé une inégalité *stricte* entre  $f(x')$  et  $f(x)$ , on peut même ajouter que  $f$  est *strictement* décroissante sur  $\left[0, \frac{5}{2}\right]$ .



Le *maximum* est la valeur la plus haute atteinte par la fonction. Le *minimum* est la plus basse.

La fonction  $f : x \mapsto x^2 - 5x$  atteint en  $\frac{5}{2}$  son minimum, qui vaut  $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4}$ .

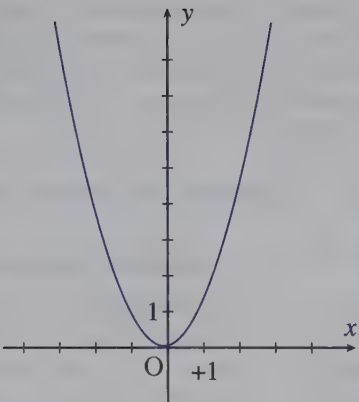
Remarquez qu'une fonction n'a pas nécessairement de maximum ou de minimum (par exemple : la fonction  $x \mapsto x$ , définie sur  $\mathbb{R}$ .)

### 3.1.6 Représentation graphique

Quand on prend un réel  $x$  dans l'ensemble de définition, on peut calculer  $f(x)$  et placer dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  le point de coordonnées  $(x, f(x))$ . Si l'on fait cette opération pour *tout* l'ensemble de définition, on obtient une courbe, appelée la *représentation graphique* de la fonction.

Bien sûr, on ne peut pas tracer tous les points. On se contente de calculer les coordonnées de quelques points bien choisis, que l'on relie ensuite à *main levée*. *Bien choisis* signifie qu'on ne prend pas ces points au hasard. Le choix est guidé par le tableau de variations. On placera le maximum et le minimum, ainsi que quelques points autour. On range ces valeurs dans un tableau. Par exemple, pour  $x \mapsto x^2$ , on obtient le tableau :

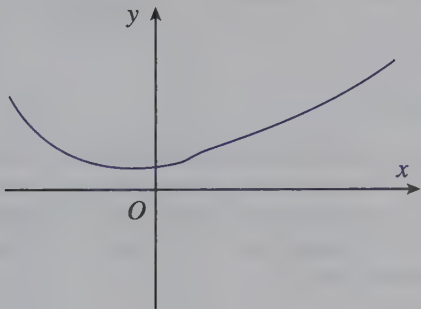
|        |    |    |    |   |   |   |   |
|--------|----|----|----|---|---|---|---|
| $x$    | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | 9  | 4  | 1  | 0 | 1 | 4 | 9 |



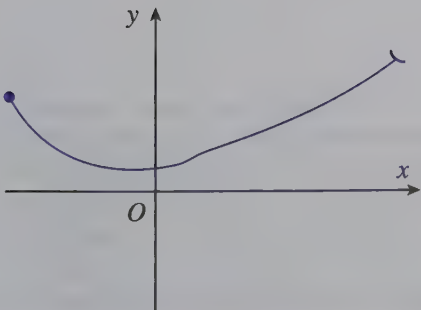
Ce tableau permet de tracer la courbe ci-contre.

3.1.6.1 Les conventions de la représentation

Ne perdez pas de vue, lorsqu'on vous demande la représentation graphique d'une fonction, qu'il s'agit d'un dessin *conventionnel*. On croit bien faire en calculant des dizaines de valeurs. Souvent, c'est bien inutile, et c'est un effort dérisoire. Un ordinateur peut calculer des milliers de points en quelques secondes. Ça n'aurait pas grand sens de mobiliser un humain pour faire beaucoup moins bien en plus longtemps ! Ce que l'ordinateur ne sait pas faire, c'est analyser la courbe, se rendre compte des points intéressants, des problèmes de définition, etc. Il vous faut notamment savoir faire la différence entre ces deux dessins :



et



Sur le second dessin, la courbe est terminée, soit par un gros point, soit par un petit crochet. Cela signifie que la courbe est limitée par ces points : l'ensemble de définition est de la forme  $[a, b]$ . Rien de tel sur le premier dessin, ce qui signifie que seule la feuille de papier a limité la courbe. Elle se poursuit « à l'infini ». L'ensemble de définition est  $\mathbb{R}$  tout entier.

### 3.1.7 Utilisation de votre calculatrice programmable



#### T.I.C.E.

Demandez à votre professeur de mathématiques quel modèle de calculatrice vous convient le mieux. Les calculatrices de type courant permettent de calculer automatiquement des valeurs de  $f(x)$ , en entrant la formule de  $f(x)$  et les différentes valeurs. Certaines machines vous proposent même directement, si vous entrez la formule de la fonction, un tableau de valeurs et une représentation graphique. Méfiance cependant ! La calculatrice ne vous proposera peut-être pas des valeurs dans un intervalle intéressant. De plus, même les écrans les plus perfectionnés ont un nombre fini de points, ce qui entraîne des erreurs de représentation graphique. On ne peut donc faire l'économie d'une petite étude théorique, avant de choisir le domaine d'étude et l'échelle de la représentation graphique.

### 3.1.8 Parité

La courbe représentative de certaines fonctions présentent des particularités, notamment des symétries, que l'on peut remarquer avant même d'avoir effectué le tracé. La notion de parité ne figure pas explicitement au programme de seconde, mais il est fort utile de la connaître.

#### 3.1.8.1 Fonctions paires

Ce sont les fonctions dont la représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ( $Oy$ ). Pour montrer qu'une fonction  $f$  est paire, il faut d'abord vérifier si son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire que s'il contient un réel  $x$ , alors il contient aussi  $-x$ . Ensuite, il faut vérifier que pour tout réel  $x$  de l'ensemble de définition,  $f(-x) = f(x)$ .

*Exemple :* Montrons que la fonction

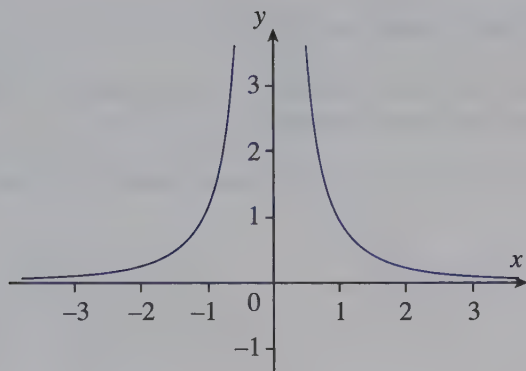
$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

est paire.

En effet, elle est définie sur  $\mathbb{R}^*$ . Quand un réel est non nul, son opposé est aussi non nul, donc l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0. Calculons  $f(-x)$ . Il suffit pour cela de remplacer  $x$  par  $(-x)$  dans la formule ci-dessus :

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x)$$

La fonction  $f$  est bien paire, comme on peut le voir sur sa représentation graphique :



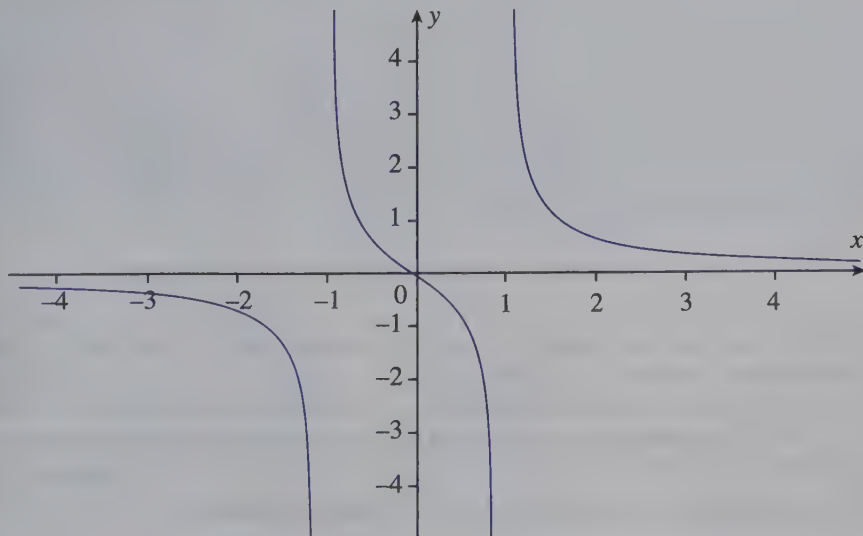
### 3.1.8.2 Fonctions impaires

Ce sont les fonctions dont la représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère,  $O$ . Pour montrer qu'une fonction  $f$  est impaire, il faut d'abord vérifier si son domaine est symétrique par rapport à 0. Ensuite, il faut vérifier que pour tout réel  $x$  du domaine,  $f(-x) = -f(x)$ .

*Exemple :* Montrons que la fonction  $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1}$  est impaire. Son ensemble de définition est  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ . Cet ensemble est symétrique par rapport à 0, puisqu'il contient tous les réels sauf 1 et son opposé. Calculons maintenant  $f(-x)$  :

$$f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x}{x^2 - 1} = -f(x)$$

$f$  est bien impaire. On le constate sur la figure :



*Remarque :* La plupart des fonctions ne sont ni paires, ni impaires. Dans ce cas, il suffit de trouver un réel tel que l'image de ce réel et l'image de son opposé ne soient ni égales, ni opposées. Par exemple, pour  $f$  définie par  $f(x) = 2x + 3$ , prenez  $f(1) = 5$  et  $f(-1) = 1$ . On voit tout de suite que  $f$  n'est ni paire, ni impaire.

### 3.1.9 Solution de l'exercice type n° 1

1. Le dénominateur de la fraction ne doit pas s'annuler, donc  $x$  ne doit pas être égal à zéro. L'ensemble de définition est donc  $\mathbb{R}^*$ .
2.  $f(-3) = \frac{1+9}{-3} = -\frac{10}{3}$ . Pour trouver les antécédents de 2, il faut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}\frac{1+x^2}{x} &= 2 \Leftrightarrow 1+x^2 = 2x \\ &\Leftrightarrow 1-2x+x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-x)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1\end{aligned}$$

3. Le domaine de  $f$  est symétrique par rapport à 0. Pour  $x \in \mathbb{R}^*$ , calculons :

$$f(-x) = \frac{1+(-x)^2}{-x} = -\frac{1+x^2}{x} = -f(x)$$

*Conclusion* : la fonction  $f$  est impaire.

4. Prenons deux réels  $a$  et  $b$ , positifs et supposons que  $a < b$ . Calculons :

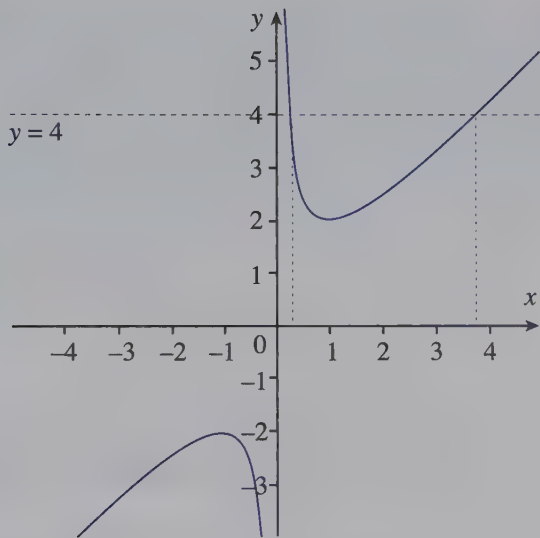
$$\begin{aligned}f(b) - f(a) &= \frac{1+b^2}{b} - \frac{1+a^2}{a} \\ &= \frac{a(1+b^2)}{ba} - \frac{b(1+a^2)}{ab} \\ &= \frac{a+ab^2-b-ba^2}{ab} \\ &= \frac{a-b-ba(a-b)}{ab} \\ &= (a-b) \frac{1-ba}{ab}\end{aligned}$$

Si  $a$  et  $b$  sont tous deux dans  $]0, 1[$ ,  $ba$  est plus petit que 1 et donc  $f(b) - f(a)$  est strictement négatif. On en déduit que  $f(b) < f(a)$ , et que  $f$  est strictement décroissante sur  $]0, 1[$ . D'un autre côté, si  $a$  et  $b$  sont tous deux supérieurs à 1, on a  $a-b < 0$  et  $1 < ba$  et donc  $f(b) - f(a) > 0$ . On en déduit que  $f$  est strictement croissante sur  $]1, +\infty[$ .

On peut résumer ces constatations dans un tableau de variations :

|        |             |            |            |
|--------|-------------|------------|------------|
| $x$    | 0           | 1          | $+\infty$  |
| $f(x)$ | $\parallel$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

5. Représentation graphique :



6. Il suffit de tracer sur le graphique la droite d'équation :  $y = 4$ . On obtient, en lisant sur le graphique, deux solutions : 0,25 et 3,75.

### 3.2 Fonctions linéaires et affines

#### 3.2.1 Exercice type n° 2

1. Donner les variations des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f_1(x) = 2x + 3 \\ f_2(x) = 2x - 3 \\ f_3(x) = -2x + 3 \end{cases}$$

2. Tracez leur courbe représentative.

• Lycée Pascal Paoli, Corte •

#### 3.2.2 Comment varient les fonctions affines ?

Une fonction  $f$  est affine si les variations de  $f(x)$  et de  $x$  sont proportionnelles.  
On pourra écrire :

$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)$$

où  $a$  est le coefficient de proportionnalité, appelé *coefficient directeur*.  
En particulier,  $f(x) - f(0) = a(x - 0)$ , donc  $f(x) = ax + f(0)$ .  
On en conclut qu'une fonction affine s'écrit :

$$f(x) = ax + b$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels fixés. On a :  $b = f(0)$ . La « courbe » représentative de  $f$  est une droite. L'équation de cette droite est :  $y = ax + b$ . La direction de cette droite est indiquée par le réel  $a$ , appelé *coefficient directeur*.

- Si  $a > 0$ , la droite « monte », et la fonction est strictement croissante.
- Si  $a = 0$ , la droite est horizontale, la fonction est constante.
- Si  $a < 0$ , la droite « descend », et la fonction est strictement décroissante.

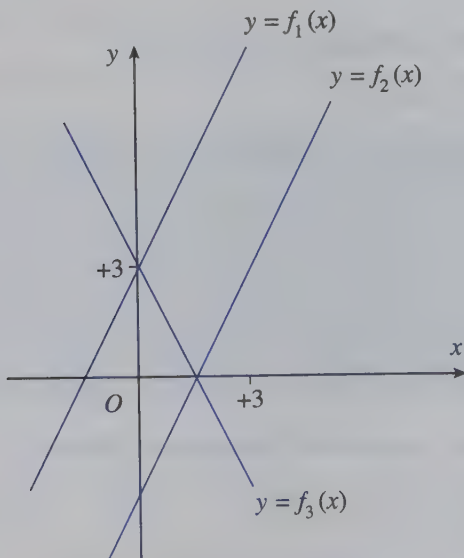


### À retenir

Une fonction est linéaire si elle est de la forme  $x \mapsto ax$  (où  $a$  est une constante). C'est un cas particulier de fonction affine. Sa courbe représentative est une droite qui passe par l'origine.

### 3.2.3 Solution de l'exercice type n° 2

1. Le coefficient directeur de  $f_1$  est  $+2$  donc  $f_1$  est croissante.  
Celui de  $f_2$  est également  $+2$  donc  $f_2$  est croissante. Les coefficients directeurs étant les mêmes, les droites sont parallèles.  
Le coefficient directeur de  $f_3$  est  $-2$ , donc  $f_3$  est décroissante.
- 2.



## 3.3 Les autres fonctions usuelles

### 3.3.1 Exercice type n° 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Développez l'expression :  $(x + 3)^2 - 6$ .
2. En déduire que la courbe d'équation  $y = x^2 + 6x + 3$  est une parabole, dont on déterminera le sommet  $S$ .

3. Écrire l'expression  $\frac{2}{x+3} - 6$  sous la forme d'une fraction.
4. En déduire que la courbe d'équation  $y = -\frac{6x+16}{x+3}$  est une hyperbole, dont on déterminera l'équation dans le repère  $(S, \vec{i}, \vec{j})$ .

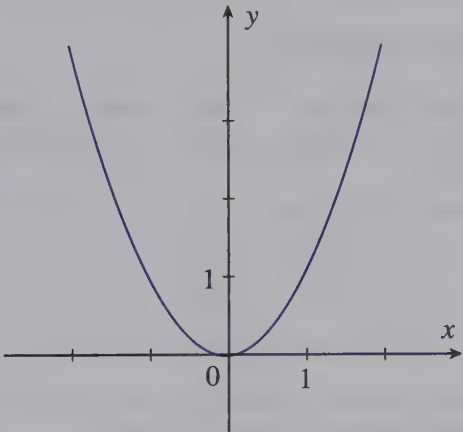
• Lycée Carnot, Dijon •

3.3.2 La fonction « carré »

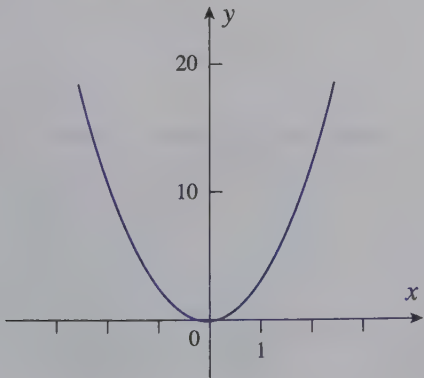
$x \mapsto x^2$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , paire. Voici son tableau de variations :

|       |           |                                   |           |
|-------|-----------|-----------------------------------|-----------|
| $x$   | $-\infty$ | $0$                               | $+\infty$ |
| $x^2$ |           | $\searrow \quad 0 \quad \nearrow$ |           |

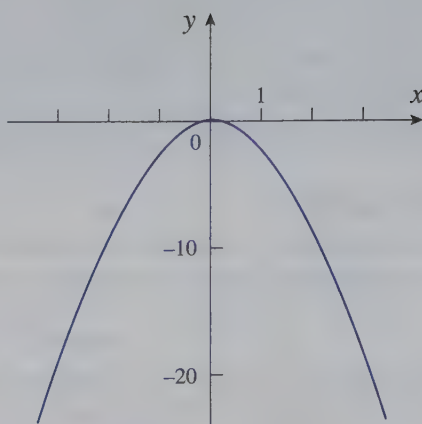
Sa courbe représentative s'appelle une *parabole*. Au minimum de la fonction, 0, correspond sur la courbe le *sommet*, placé à l'origine du repère.



Toutes les courbes dont l'équation s'écrit, dans un repère particulier, sous la forme  $y = ax^2$ , sont des paraboles, dont le sommet est l'origine du repère. Le signe de  $a$  donne l'orientation (branches vers le haut ou vers le bas) de la parabole. Plus la valeur absolue de  $a$  est élevée, plus les branches sont resserrées. Voici par exemple la courbe représentative de  $x \mapsto 3x^2$  :



et celle de la fonction  $x \mapsto -2x^2$  :



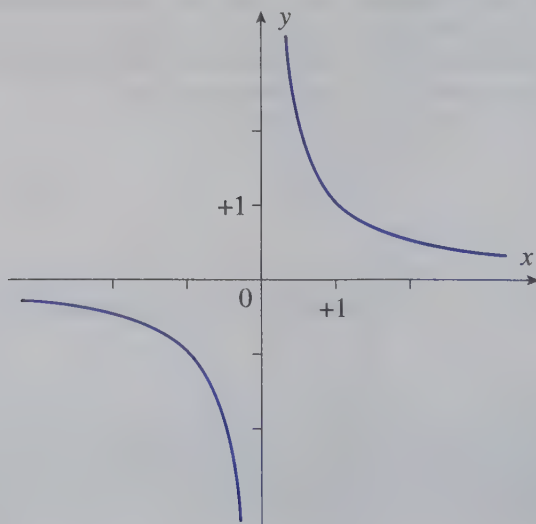
### 3.3.3 La fonction « inverse »

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ . Elle est impaire, et décroissante sur chaque intervalle  $] -\infty, 0[$  et  $] 0, +\infty[$ . Attention ! Elle n'est pas décroissante *sur*  $\mathbb{R}^*$  car, par exemple,  $f(-1) < f(+1)$ .

Son tableau de variations est le suivant :

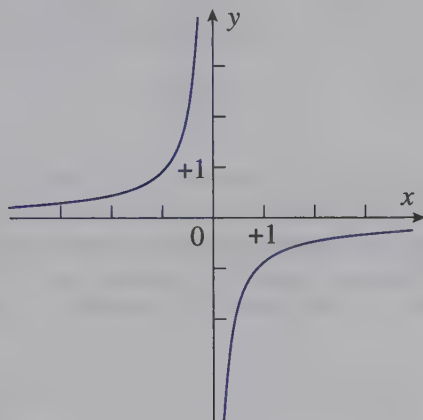
| $x$           | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---------------|-----------|-----|-----------|
| $\frac{1}{x}$ |           |     |           |
|               |           | ↘   | ↘         |

La courbe représentative est une *hyperbole*. Elle est formée de deux branches disjointes, dont l'origine du repère est le centre de symétrie.

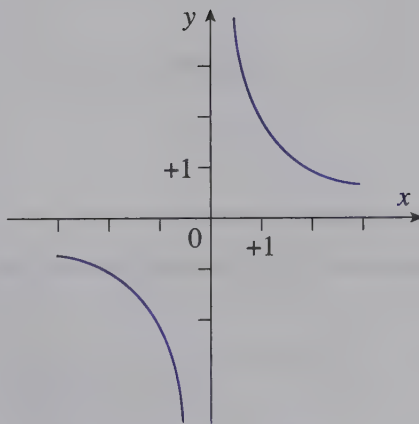


Toutes les courbes dont l'équation s'écrit, dans un repère particulier, sous la forme  $y = \frac{a}{x}$  s'appellent des hyperboles, et l'origine du repère est leur *centre*. Si  $a$  est négatif, la fonction  $x \mapsto \frac{a}{x}$  est croissante sur chacun des intervalles  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ . Plus la valeur absolue de  $a$  est grande, plus les branches de l'hyperbole sont évasées.

Voici par exemple l'hyperbole d'équation  $y = -\frac{1}{x}$  :



et celle d'équation  $y = \frac{2}{x}$  :

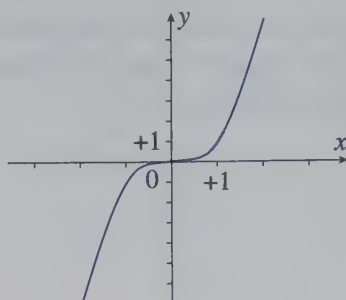


**Remarque :** Les fonctions affines et linéaires, la fonction carré et la fonction inverse sont les fonctions de référence dont vous devez bien connaître les variations et les représentations graphiques. Nous vous présentons ci-dessous trois autres types de fonctions que vous pouvez être amené(e) à rencontrer dans les problèmes.

### 3.3.4 La fonction « cube »

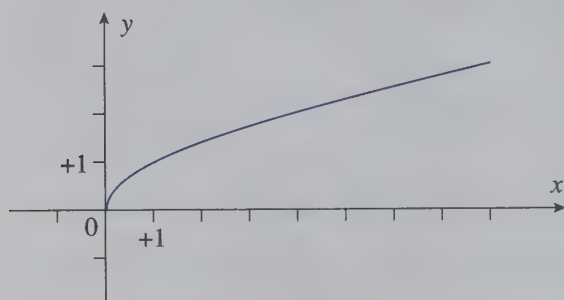
La fonction  $x \mapsto x^3$  est une fonction impaire qui est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que pour tout couple de réels  $(a, b)$ , si  $a < b$  alors  $a^3 < b^3$ . On a donc

le droit de « passer aux cubes » dans une inégalité, même si les membres ne sont pas positifs. Voici la courbe représentative de cette fonction :



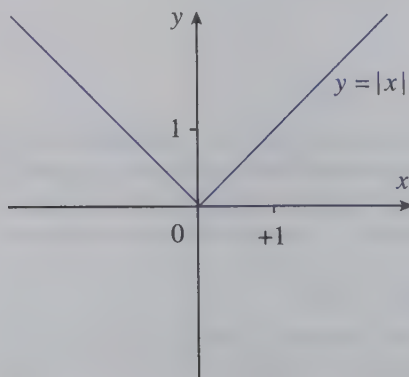
### 3.3.5 La fonction « racine »

La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est une fonction définie seulement sur  $\mathbb{R}_+$ . Elle y est strictement croissante. C'est-à-dire que, pour  $a$  et  $b$  positifs, si  $a < b$ , alors  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ . La représentation graphique se présente comme une branche de parabole « couchée » (cf. ci-dessous).



### 3.3.6 La fonction « valeur absolue »

La fonction  $x \mapsto |x|$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . Elle est confondue avec  $x \mapsto -x$  sur  $\mathbb{R}_-$  et  $x \mapsto +x$  sur  $\mathbb{R}_+$ . On obtient le graphique suivant :



### 3.3.7 Solution de l'exercice type n° 3

1. On développe :

$$(x+3)^2 - 6 = x^2 + 6x + 9 - 6 = x^2 + 6x + 3$$

2. L'équation  $y = x^2 + 6x + 3$  s'écrit donc aussi :

$$y = (x+3)^2 - 6 \quad \text{soit :} \quad y+6 = (x+3)^2$$

On procède alors à un changement de repère, en posant :

$$\begin{cases} X = x + 3 \\ Y = y + 6 \end{cases}$$

$X$  et  $Y$  sont les coordonnées dans le nouveau repère. Dans ce repère, l'équation de la courbe est  $Y = X^2$ , il s'agit donc d'une parabole. Le sommet  $S$  est l'origine du (nouveau) repère. Dans le nouveau repère,  $S$  a pour coordonnées  $(0; 0)$ . On résout facilement le système :

$$\begin{cases} 0 = x + 3 \\ 0 = y + 6 \end{cases}$$

Les coordonnées de  $S$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  sont donc  $(-3; -6)$ .

3. Il n'y a qu'à réduire au même dénominateur.

$$\frac{2}{x+3} - 6 = \frac{2}{x+3} - \frac{6x+18}{x+3} = \frac{-6x-16}{x+3}$$

4. L'équation  $y = -\frac{6x+16}{x+3}$  s'écrit donc aussi :

$$y = \frac{2}{x+3} - 6$$

c'est-à-dire :

$$y+6 = \frac{2}{x+3}$$

Dans le repère  $(S, \vec{i}, \vec{j})$  défini ci-dessus, l'équation de la courbe est donc :  $Y = \frac{2}{X}$ .

Conclusion : c'est bien une hyperbole.

## 3.4 Les fonctions trigonométriques

### 3.4.1 Exercice type n° 4

1. On pose  $x = \frac{\pi}{6}$ . Calculer  $\cos(2x)$ ,  $2\cos x$  et  $\cos^2 x - \sin^2 x$ . Que constate-t-on ?

2. Démontrer que, pour tout  $x$  réel,  $\cos^2 x - (1 + \sin x)(1 - \sin x) = 0$ .

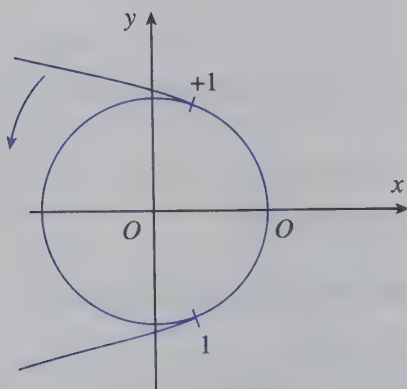
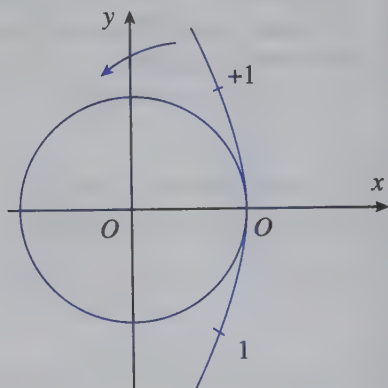
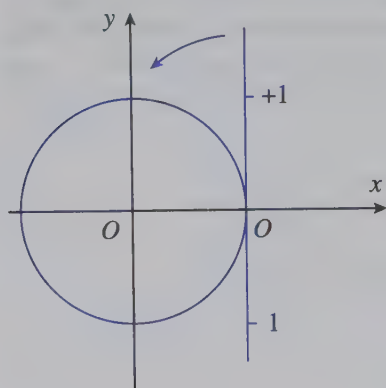
• Lycée Charlemagne, Paris •

### 3.4.2 Enrouler $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique

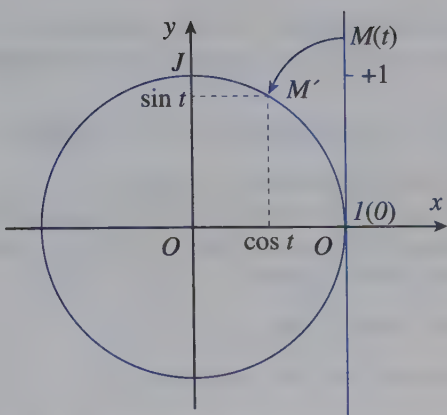
Le plan étant rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , le cercle trigonométrique est le cercle de rayon 1 et de centre  $O$ . On note  $I(1, 0)$  et on considère la tangente en  $I$  au cercle trigonométrique.

On va graduer cette droite : l'origine sur la droite est  $I$ , l'unité est la même que dans le reste du plan, et la droite est orientée « vers le haut ». Plus mathématiquement, on peut dire que la droite est munie du repère  $(I, \vec{j})$ . Chaque point de la droite correspond à un réel unique, on identifie la droite et  $\mathbb{R}$ .

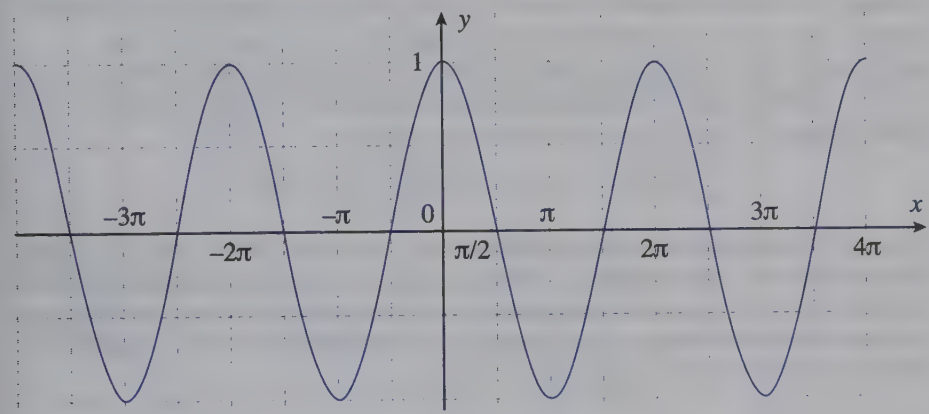
Maintenant, on peut imaginer que l'on courbe cette droite pour la coller au cercle trigonométrique (voir figures).



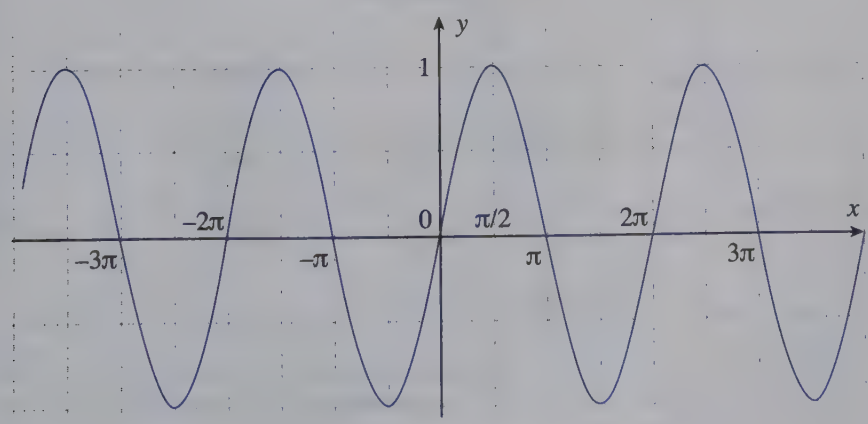
Un point  $M$  de la droite, qui avait des coordonnées  $(1, t)$ , se retrouve en un point  $M'$ . Par définition, les coordonnées de  $M'$  sont  $(\cos t, \sin t)$ .



On définit ainsi deux fonctions,  $\cos$  (« cosinus ») et  $\sin$  (« sinus »), dont voici les représentations graphiques :



La fonction cos



La fonction sin

*Remarque :* Les dessins utilisent ici un repère orthogonal, mais non orthonormal. En effet, les fonctions cosinus et sinus représentent des abscisses et des ordonnées sur le

cercle trigonométriques, elles prennent donc leurs valeurs entre  $-1$  et  $1$ . Dans un repère orthonormal, la courbe paraît écrasée, et on ne voit pas bien ses caractéristiques.

### 3.4.3 Propriétés des fonctions cosinus et sinus

La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire.

Lorsque l'on enroule  $\mathbb{R}$  sur le cercle trigonométrique, les points d'abscisses  $x$  et  $-x$  se retrouvent « l'un au-dessus de l'autre », (comme les points d'abscisses  $-1$  et  $+1$  sur nos dessins), c'est-à-dire que leurs images auront :

- la même abscisse, donc  $\cos x = \cos(-x)$  ;
- et des ordonnées opposées, donc  $\sin(-x) = -\sin x$

On voit donc que cos est une fonction paire, et sin est une fonction impaire.

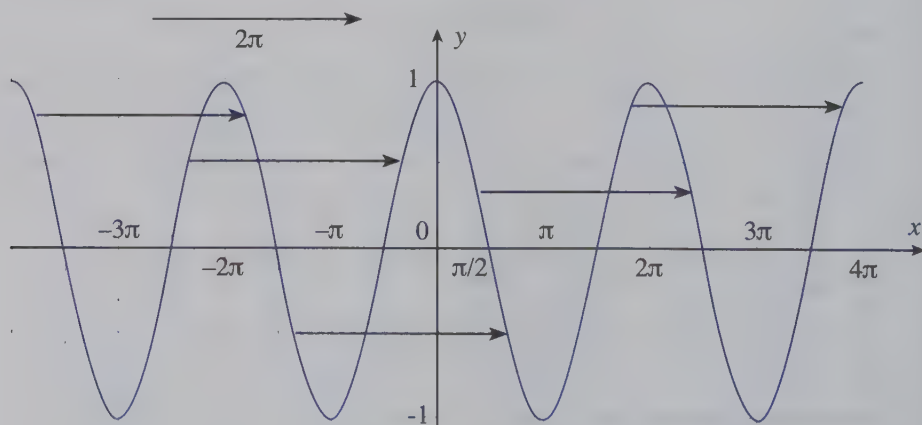
Les fonctions cos et sin sont périodiques.

La longueur (ou circonférence) du cercle trigonométrique est donné par la formule bien connue :  $2\pi R$ . Ici  $R = 1$ , cette longueur est donc  $2\pi$ .

Ainsi, lorsqu'on enroule  $\mathbb{R}$  sur le cercle trigonométrique, deux points d'abscisses  $x$  et  $x + 2\pi$  se retrouveront au même endroit sur le cercle, donc auront le même sinus et le même cosinus. On peut donc écrire, pour toute valeur de  $t$  :

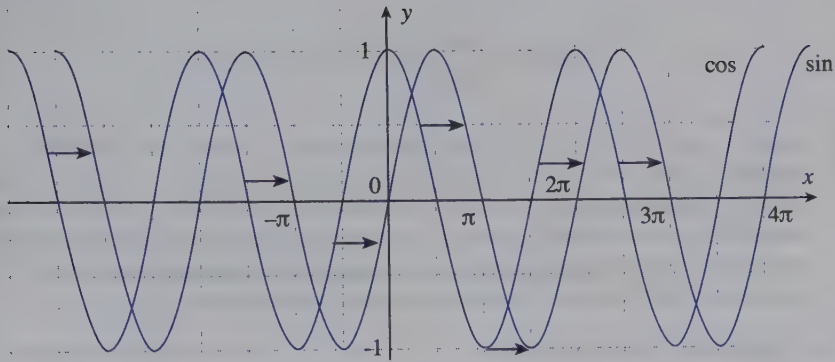
$$\cos(t + 2\pi) = \cos t \text{ et } \sin(t + 2\pi) = \sin t$$

On décrit cette propriété en disant que cos et sin sont des fonctions périodiques, dont la période est  $2\pi$ . On reconnaît une fonction périodique à ce que sa courbe répète à l'infini un motif. Plus mathématiquement, la courbe est (globalement) invariante par certaines translations. Par exemple, cos et sin sont périodiques car leurs courbes sont invariantes par la translation de vecteur  $2\pi \cdot \vec{i}$  :



Il existe une relation entre cos et sin.

La courbe de sin est l'image de celle de cos par la translation de vecteur  $\frac{\pi}{2} \vec{i}$  :



cos → sin

Cela se traduit pour tout réel  $t$  par :  $\sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos(t)$ .

**3.4.4 Quel rapport entre le cosinus et le sinus d'un réel et celui d'un angle en degrés ?**

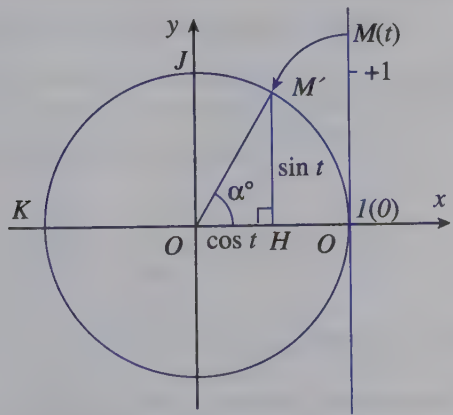
En troisième, vous avez appris à déterminer, dans un triangle rectangle, les cosinus et sinus d'un de ses angles :

$$\text{cosinus} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\text{sinus} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

Prenons un réel  $t$ , positif, pas trop grand (voir figure), et le point  $M(t)$  sur la tangente en  $I$  au cercle trigonométrique. Quand on enroule cette tangente sur le cercle,  $M$  a pour image  $M'(\cos t, \sin t)$ .

Maintenant, notons  $H$  le point de coordonnées  $(\cos t, 0)$ , comme sur la figure :



Considérons le triangle  $HOM'$ . Il est rectangle en  $H$ . L'hypoténuse est  $[OM']$  et  $OM' = 1$  (rayon du cercle trigonométrique).

Notons  $\widehat{HOM'} = \alpha^\circ$ . Le côté adjacent est  $HO = \cos t$ , le côté opposé est  $HM' = \sin t$ . Il vient :

$$\cos \alpha^\circ = \frac{HO}{OM'} = \frac{\cos t}{1} = \cos t$$

et :

$$\sin \alpha^\circ = \frac{HM'}{OM'} = \frac{\sin t}{1} = \sin t$$

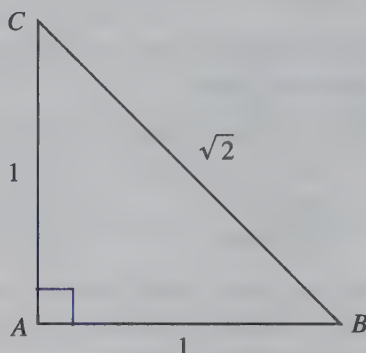


$\alpha$  est un angle en degrés et  $t$  est une longueur. Si vous faites un calcul à la machine, et que vous voulez calculer par exemple :  $\cos 35^\circ$ , assurez-vous que vous êtes dans le mode *degrés*. Vous obtiendrez environ 0,819. Si c'est le cosinus du réel 35 que vous voulez, mettez-vous dans le mode *radian* ; vous obtiendrez environ -0,904. Vous voyez que les résultats n'ont vraiment rien à voir. C'est une source très fréquente d'erreurs, pourtant faciles à éviter !

### 3.4.4.1 Quelques valeurs exactes

**Angle de  $45^\circ$**  On considère un triangle  $ABC$  rectangle en  $A$  et isocèle tel que :

$$AB = AC = 1$$



Alors  $\hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$ . D'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 2$$

donc  $BC = \sqrt{2}$ . Il vient :

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et

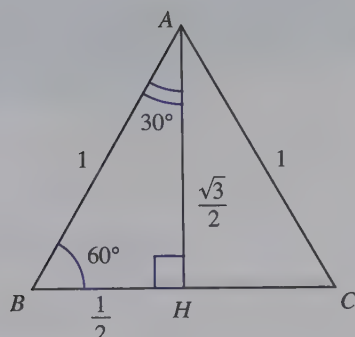
$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On en déduit que  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Angles de  $30^\circ$  et  $60^\circ$**  On considère un triangle  $ABC$  équilatéral de côté 1 et  $H$  le milieu de  $[BC]$ . Vous savez que, comme  $ABC$  est équilatéral,  $(AH)$  est également la hauteur issue de  $A$ , la médiatrice de  $[BC]$ , et la bissectrice de  $\widehat{BAC}$ . En particulier :

$$\widehat{HAB} = \frac{1}{2} \widehat{CAB} = \frac{60}{2} = 30^\circ$$

$$\widehat{ABH} = \widehat{ABC} = 60^\circ$$



En appliquant le théorème de Pythagore au triangle  $ABH$ , rectangle en  $H$ , il vient :

$$BA^2 = BH^2 + AH^2 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{4} + BH^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} = BH^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = AH$$

Dans ce même triangle  $ABH$ , on a :

$$\cos 60^\circ = \cos \hat{B} = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}$$

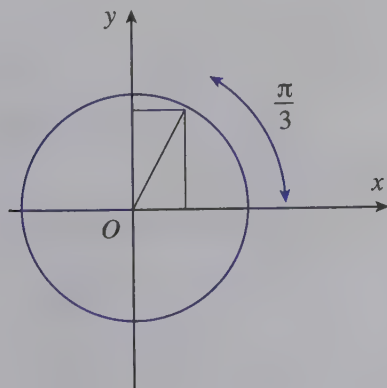
$$\sin 60^\circ = \sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \cos \hat{A} = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \sin \hat{A} = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}$$

### 3.4.4.2 Valeurs particulières des fonctions cos et sin

Si on reprend la figure reliant le cosinus et le sinus d'un angle et celui d'un réel, on voit qu'à un réel  $t$  correspond un angle  $\alpha$  exprimé en degrés. on voit que  $\alpha = 60^\circ$  correspond à un sixième de cercle, et donc au réel  $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$  :



Vous devez (bien) connaître les valeurs de  $\cos$ ,  $\sin$  suivantes :

| $x$      | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      |
|----------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\cos x$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        |
| $\sin x$ | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

### 3.4.5 Solution de l'exercice type n° 4

1.  $x = \frac{\pi}{6}$  donc  $2x = \frac{\pi}{3}$ . On utilise les valeurs :

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

et on calcule :

$$\cos 2x = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$2 \cos x = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 \frac{\pi}{6} - \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

On constate :

$$\cos(2x) \neq 2 \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(Cette dernière formule est en fait valable pour tout réel  $x$ ).

2. Par définition, les points  $M$  de coordonnées  $(\cos x, \sin x)$  appartiennent au cercle trigonométrique, donc  $OM = 1$ . Comme on connaît l'abscisse et l'ordonnée de  $M$ , on applique la formule :

$$\begin{aligned} 1 = OM^2 &= (x_M - 0)^2 + (y_M - 0)^2 \\ &= \cos^2 x + \sin^2 x \end{aligned}$$

Or, en développant la formule proposée, on a :

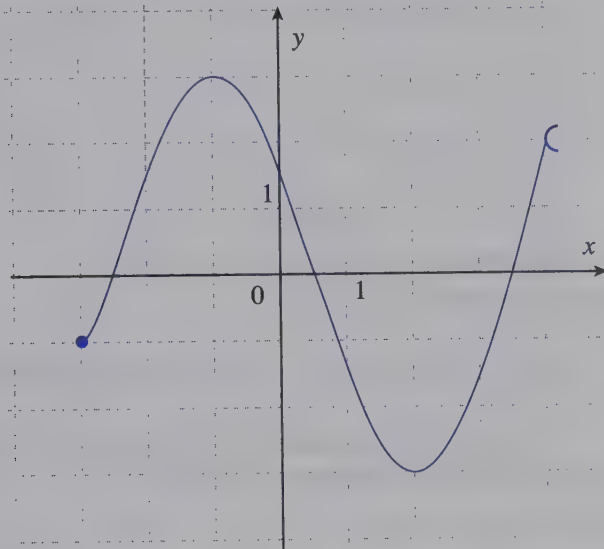
$$\begin{aligned} \cos^2 x - (1 + \sin x)(1 - \sin x) &= \cos^2 x - (1 - \sin^2 x) \\ &= \cos^2 x + \sin^2 x - 1 = 0 \end{aligned}$$

d'après notre remarque. D'où l'égalité :

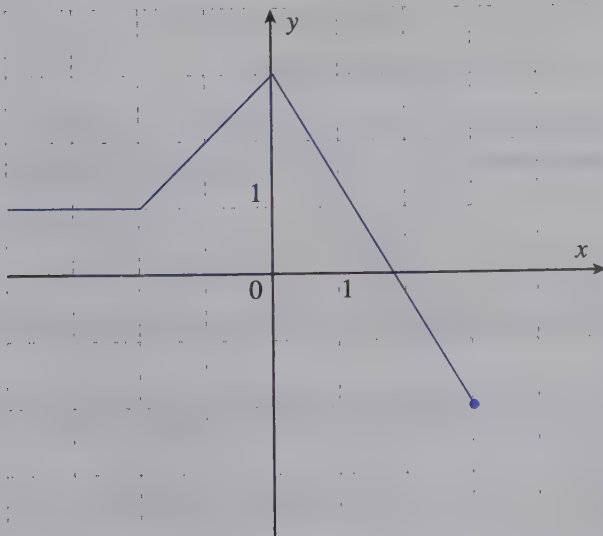
$$\cos^2 x - (1 + \sin x)(1 - \sin x) = 0$$

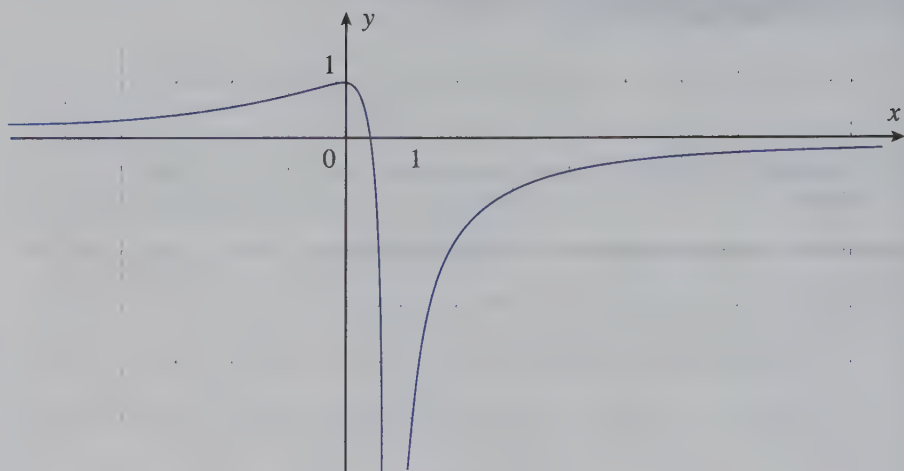
**1** ★ 10 min. Lycée Molière, Paris

Examiner les courbes des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  ci-dessous :



La fonction  $f$



La fonction  $g$ La fonction  $h$ 

1. Donner pour chaque fonction son ensemble de définition.
2. Donner le tableau de variations des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$

## 2 ★ ————— Lycée Albert Chatelet, Douai

10 min.

Dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , en prenant comme unité le cm, dessiner la courbe représentative d'une fonction répondant aux indications suivantes :

- $f$  est définie sur  $[-3; 4[$  ;
- $f(-3) = 1$  ;
- $f$  admet un maximum qui est 3, atteint en  $-1$  ;
- $f$  est croissante sur  $[-3; -1]$  et décroissante sur  $[-1; 4[$  ;
- les réels  $-2$  et  $1$  ont la même image qui est  $2,5$  ;
- $f(3) = 0$ .

## 3 ★ ————— Lycée Fustel de Coulanges, Massy

10 min.

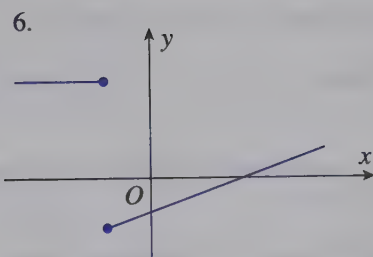
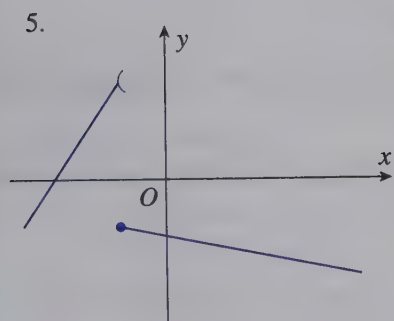
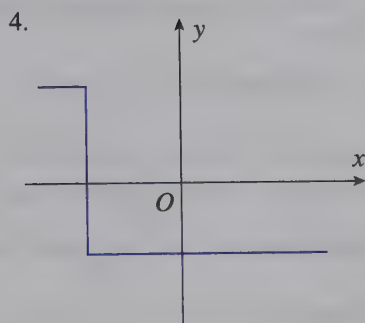
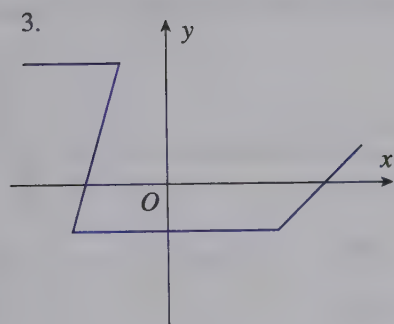
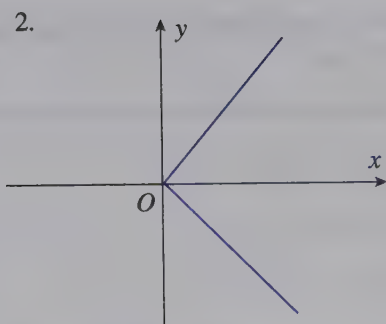
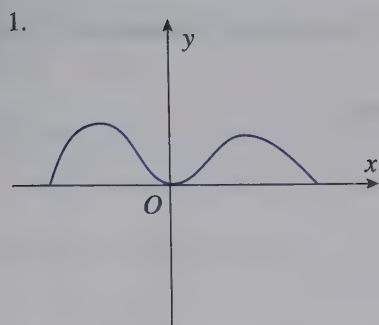
Soit  $f$  la fonction définie, pour tout réel  $x$ , par :  $f(x) = x^2 - 4$ .

1. Calculer l'image par la fonction  $f$  des réels  $0, 1, -2$ .
2. Déterminer, lorsque c'est possible, le ou les antécédent(s) par  $f$  des réels  $5, -7, -4$ .

## 4 ★ ————— Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

15 min.

Les courbes suivantes sont-elles les représentations graphiques de fonctions ? (justifier les réponses).



**5** ★ ————— Lycée Édouard Herriot, Lyon  
10 min.

Trouver une fonction affine  $f$  telle que  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$  et  $f(1) = \frac{1}{4}$ .

**6** ★ ————— Lycée Watteau, Valenciennes  
15 min.

Donner l'ensemble de définition de la fonction et étudier sa parité :

1.  $f(x) = \frac{1}{x^2} + 3$ .

2.  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ .

## 7 ★ ————— Lycée Le Corbusier, Poissy

15 min.

Les fonctions suivantes sont-elles paires ou impaires ?

1.  $f_1(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$ .

2.  $f_2(x) = 4x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

3.  $f_3(x) = (x+3)^2 - (x-3)^2$ .

## 8 ★ ————— Lycée Paul Painlevé, Oyonnax

15 min.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2x^2 - x + 1$$

1. Soient  $x$  et  $x'$  deux réels. Factoriser  $f(x') - f(x)$ .

2. Montrer que, si  $x' > x \geq \frac{1}{4}$ , alors  $f(x') > f(x)$ .

3. Montrer que, si  $x' < x \leq \frac{1}{4}$ , alors  $f(x') > f(x)$ .

4. En déduire le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

5. Calculer  $f(-1)$ ,  $f(0)$ ,  $f\left(\frac{1}{4}\right)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ , et tracer la courbe représentative de  $f$ .

## 9 ★ ————— Lycée Henri IV, Paris

20 min.

Étudier la parité des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = 3x$

2.  $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

3.  $h(x) = \frac{x^3 + 1}{x^5(x^2 + 1)}$

4.  $i(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x - 3}$

## 10 ★ ————— Lycée Alain, Alençon

10 min.

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{|x| + 7}$ .

2.  $g(x) = |x - 1| + 2|\sqrt{x} - 3|$ .

# 11 ★

---

10 min. Lycée Jeanne d'Arc, Arras

En utilisant le cercle trigonométrique :

1. Précisez l'ensemble des réels  $x$  de l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$  tels que  $\cos x = \frac{1}{2}$ .
2. Précisez l'ensemble des réels  $x$  de l'intervalle  $[-\pi; \pi]$  tels que  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

# 12 ★

---

15 min. Lycée Jean Puy, Roanne

Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-3}}$$

1. Domaine de définition.
2. Images, si elles existent, de  $-1$  et  $2$ .
3. Antécédents éventuels de  $-3$  et  $1$ .

# 13 ★

---

15 min. Lycée du Parc, Lyon

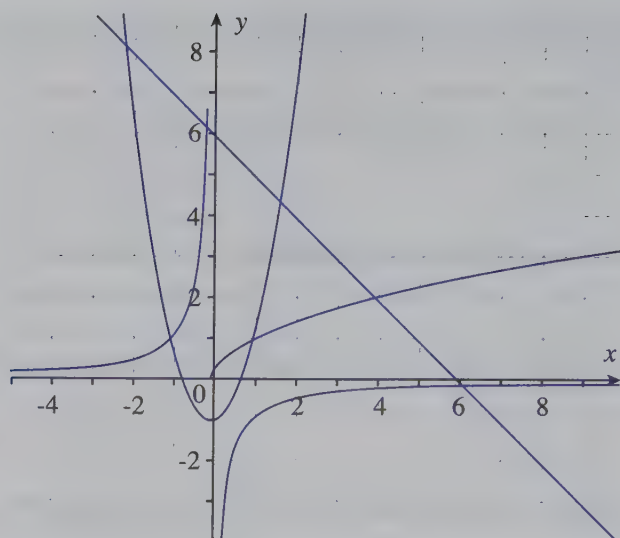
On trace dans un repère orthonormal les représentations des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto -x + 6$$

$$g : x \mapsto 2x^2 - 1$$

$$h : x \mapsto -\frac{1}{x}$$

$$k : x \mapsto \sqrt{x}$$



1. Préciser sur le graphique les représentations de  $f$ ,  $g$ ,  $h$  et  $k$ .
2. Pour chacune d'entre elles, donner le tableau de variations.

## 14★★ ———— Lycée Saint Louis, Saint Nazaire

20 min.

Soient  $f$ ,  $g$  et  $h$  les fonctions données par :

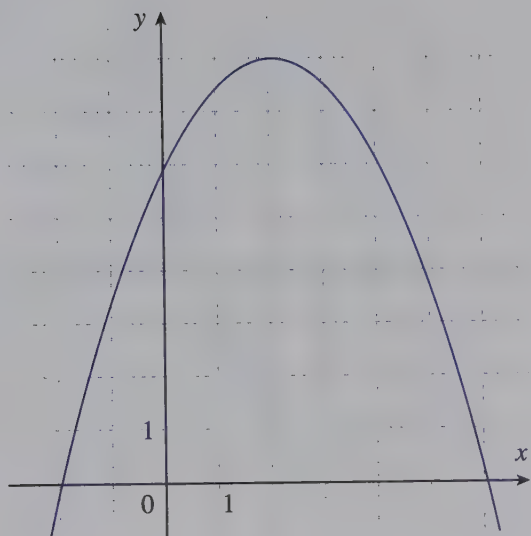
$$f(x) = \frac{6}{9x^2 - 16} \quad g(x) = \sqrt{\frac{2x+3}{8-x}} \quad h(x) = x|x|$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune de ces trois fonctions.
2. Étudier la parité de la fonction  $h$ .
3. Calculer l'image de  $-1$  par  $f$ , l'image de  $3$  par  $g$  puis celle de  $\frac{-2}{3}$  par  $h$ .
4. Déterminer les antécédents éventuels de  $\frac{1}{8}$  par  $f$  et ceux de  $\frac{1}{3}$  par  $g$ .
5. Quels sont les réels invariants par  $h$  (c'est-à-dire, tels que  $h(x) = x$  ?)

## 15★★ ———— Lycée Vaugelas, Chambéry

20 min.

La figure suivante représente la courbe de la fonction  $f$ .



1. Quelle est la nature de la courbe ?
2. Dresser le tableau de variations de  $f$ .
3. En fait,  $f$  est l'une des trois fonctions suivantes :

(a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

(b)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$

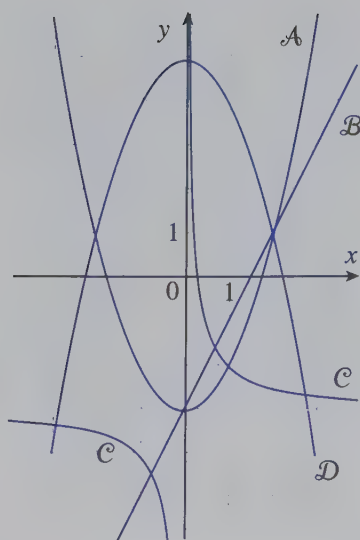
(c)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

Laquelle ? (Donner une justification simple).

**16** ★★  
15 min.

Lycée Victor Louis, Talence

Voici les représentations des fonctions définies par :  $f(x) = x^2 - 3$  ;  $g(x) = 5 - x^2$  ;  
 $h(x) = \frac{1}{x} - 3$  et  $k(x) = 2x - 3$ .



1. Associer par des croix les fonctions et les tracés :

|               | $f$ | $g$ | $h$ | $k$ |
|---------------|-----|-----|-----|-----|
| $\mathcal{A}$ |     |     |     |     |
| $\mathcal{B}$ |     |     |     |     |
| $\mathcal{C}$ |     |     |     |     |
| $\mathcal{D}$ |     |     |     |     |

2. Donner les tableaux de variations des fonctions  $g$  et  $h$ .
3. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

(a)  $x^2 - 3 = 5 - x^2$  ;

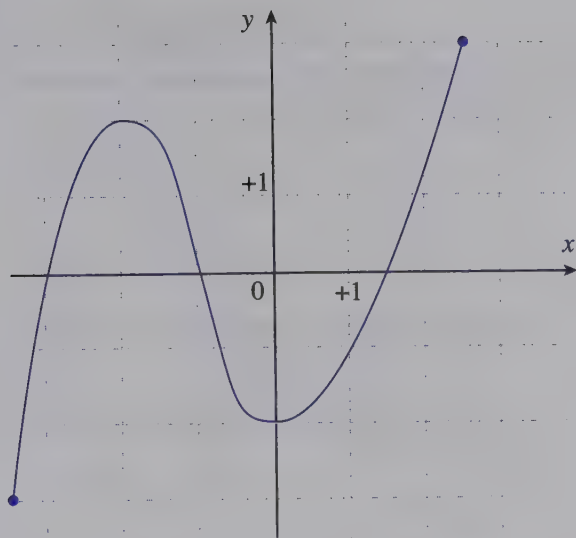
(b)  $\frac{1}{x} - 3 = x^2 - 3$  ;

(c)  $5 - x^2 > 1$  ;

(d)  $x^2 - 3 \leq 2x - 3$

**17** ★★ ——— Lycée Albert de Mun, Nogent-sur-Marne  
30 min.

Soit (C) la représentation graphique d'une fonction  $f$  définie sur  $[-3, 5 ; 2, 5]$ .



1. Compléter :

- (a) le nombre 1 a pour image par  $f$  le nombre : ...
- (b) l'image par  $f$  du nombre 0 est le nombre : ...
- (c) un antécédent par  $f$  de 2 est le nombre : ...
- (d)  $f(0) = \dots$

2. (a) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

- (b) Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels de l'intervalle  $[-2, 0]$  tels que  $a < b$ . Comparer  $f(a)$  et  $f(b)$  et justifiez votre réponse.

**18** ★★  
15 min.

Lycée Montaigne, Bordeaux

La courbe (C) (voir à la fin de l'énoncé) est la courbe représentative dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

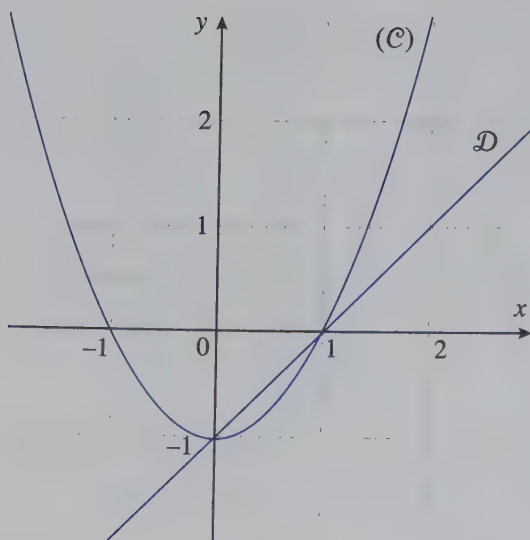
$$f(x) = x^2 - 1$$

1. Indiquer de deux façons différentes le signe de  $f(x)$  selon les valeurs de  $x$  :

- (a) graphiquement;
- (b) par le calcul.

2. Quelle est la fonction affine représentée par la droite  $\mathcal{D}$  ?

3. Résoudre graphiquement, puis par le calcul, l'inéquation  $f(x) \leq g(x)$ .



# 19

★★  
20 min.

Lycée P. et I. Joliot-Curie, Nanterre

Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions affines ? Si oui, donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite qui les représente ainsi que leur sens de variation :

1.  $f_1 : x \mapsto \frac{3 + 11x}{6}$ .

2.  $f_2 : x \mapsto -5$ .

3.  $f_3 : x \mapsto 7 - x$ .

4.  $f_4 : x \mapsto \frac{5x + 4}{x - 8}$ .

5.  $f_5 : x \mapsto \frac{2}{3}x$ .

6.  $f_6 : x \mapsto (x - 4)(x + 2) - x^2 + 10$ .

# 20

★★  
20 min.

Lycée Thiers, Marseille

Étude du sens de variation de  $f$  définie par :

$$\begin{aligned} f : ]0, +\infty[ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

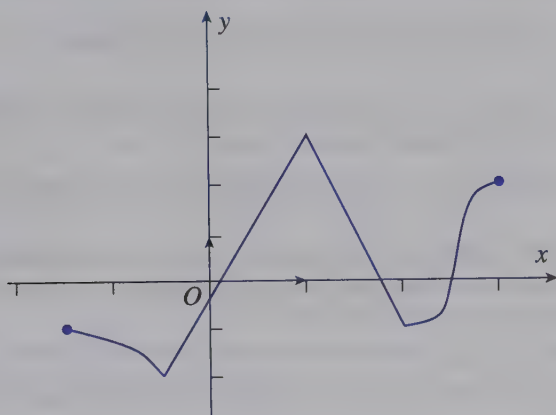
Soit  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $0 < x_1 < x_2$ .

1. Montrer que  $f(x_1) - f(x_2)$  est du signe de  $(1 - x_1 x_2)$ .
2. En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $]0; 1]$  et sur  $[1, +\infty[$ .
3. Tracer le tableau de variation de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

4. En déduire l'existence d'un extremum.

**21** ★★  
35 min.

Lycée Alphonse Daudet, Nîmes



La courbe  $\mathcal{C}$  ci-dessus est représentative d'une fonction  $f$  dans le repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Préciser  $D_f$ .

2. Donner les images par  $f$  des réels :  $-1$  ;  $-\frac{1}{2}$  ;  $1$  ;  $2$  ;  $2,5$  et  $3$ .

3. Quel est le nombre de solutions de :

- l'équation  $E_1 : f(x) = 0$  ?
- l'équation  $E_2 : f(x) = 2$  ?

On les représentera sur la figure.

4.  $f$  est-elle bornée sur  $D_f$  ?

5.  $f$  est-elle paire ou impaire ?

6. Sachant que la courbe de  $f$  sur  $[-0,5; 2]$  est l'union de deux segments, exprimer  $f(x)$  pour tout  $x$  de  $[-0,5; 2]$ .

7. Résoudre alors l'équation  $E_1$ , puis l'équation  $E_2$ .

**22** ★★  
25 min.

Lycée Saint-Michel, Paris

Soit  $f$  une fonction définie par la formule :

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

1. Donner l'ensemble de définition de  $f$ .

2. Montrer que  $f$  est paire et justifiez le choix de  $[0; +\infty[$  comme intervalle d'étude.

3. Montrer que  $f$  est décroissante sur  $[0; 1[$  et sur  $]1; +\infty[$ . En déduire le tableau de variations de  $f$ .

4. Calculer au moins quatre valeurs intéressantes de  $f$  et tracer le graphe de  $f$ .

**23** ★★  
20 min.

Lycée Michelet, Vanves

Dessiner, dans un repère orthonormé, la parabole  $\mathcal{P}$  d'équation  $y = x^2$  et placer le point  $A(2; 4)$ .

1. Pour tout  $m \in \mathbb{R}$ , on note  $\mathcal{D}_m$  la droite passant par  $A$  et de coefficient directeur  $m$ . Vérifier que  $\mathcal{D}_m$  admet pour équation  $y = m(x - 2) + 4$ .
2. Tracer les droites  $\mathcal{D}_0$ ,  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_{-1}$  et déterminer graphiquement les intersections de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{D}_1$ .
3. Déterminer par le calcul les intersections de  $\mathcal{D}_m$  et  $\mathcal{P}$ , et déterminer le réel  $m_0$  tel que cette intersection soit réduite à  $A$ . Tracer la droite  $\mathcal{D}_{m_0}$ . Que remarquez-vous et comment pouvez-vous appeler cette droite ?

**24** ★★  
20 min.

Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, Étampes

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2 - 4x + 3$

1. Vérifier que  $f(x_1) - f(x_2) = (x_2 - x_1)(4 - (x_1 + x_2))$ .
2. Démontrer les deux propriétés suivantes :
  - si  $x_1 < x_2 \leq 2$  alors  $x_1 + x_2 < 4$ ;
  - si  $2 \leq x_1 < x_2$  alors  $x_1 + x_2 > 4$ .
3. En déduire que  $f$  est strictement décroissante sur  $] -\infty; 2]$  et que  $f$  est strictement croissante sur  $[2; +\infty[$ . Dresser le tableau de variations de  $f$ .
4. Vérifier que  $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$
5. Résoudre l'équation  $x^2 - 4x + 3 = 0$
6. Utiliser les questions 3 et 5 pour résoudre l'inéquation  $x^2 \geq 4x - 3$ .
7. Retrouver le résultat de la question 6 en utilisant la question 4.

**25** ★★  
20 min.

Lycée Fénelon, Paris

Utiliser les fonctions de référence pour établir le sens de variation des fonctions suivantes (on n'oubliera pas de rédiger une conclusion) :

1.  $f(x) = (x - 1)^2 - 9$
2.  $g(x) = \sqrt{x^2 - 16}$
3.  $h(x) = (-2x + 8)^2$
4.  $i(x) = -(x^2 + 2x + 4)$
5.  $j(x) = \frac{-2}{-x + 2}$

## 26 ★★ ——— Lycée Jules Ferry, Conflans-Ste-Honorine

15 min.

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $D$  centré en  $O$ . Pour tout  $x$  de  $D$  on pose :

$$p(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

1. Calculer  $p(x)$  et  $i(x)$  lorsque  $f$  est définie par :

(a)  $D = \mathbb{R}$  et  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ .

(b)  $D = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$  et  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ .

2. Dans chaque cas, étudier la parité de  $p$  et  $i$  et vérifier que pour tout  $x$  de  $D$  :  
 $f(x) = p(x) + i(x)$ .

## 27 ★★ ——— Lycée Talma, Brunoy

10 min.

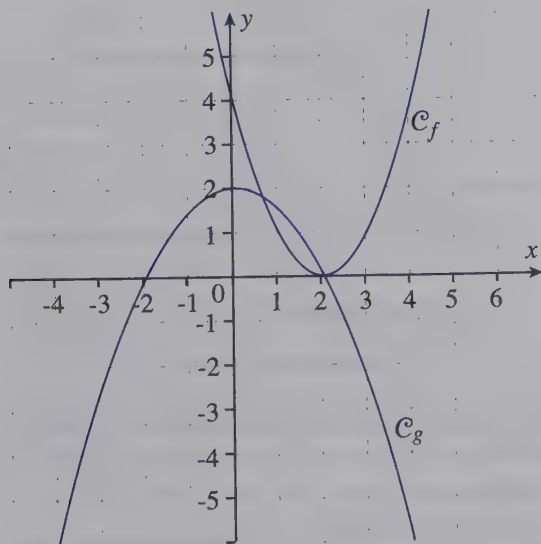
Étudier le sens de variation des fonctions suivantes, sur les intervalles  $I$  donnés :

1.  $f(x) = \frac{-x+3}{x-5}$ ,  $I = ]-\infty; 5[$ .

2.  $g(x) = (x-8)^2$ ,  $I = [8; +\infty[$ .

## 28 ★★ ——— Lycée Hélène Boucher, Paris

15 min.



La figure montre  $C_f$  et  $C_g$ , les représentations graphiques respectives des fonctions  $f$  et  $g$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Lire sur le graphique :

1. l'image par  $f$  de 0 ; de 2 ;

2. l'image par  $g$  de 2 ;
3. la (ou les) solution(s) de l'équation  $g(x) = 2$  ;
4. la (ou les) solution(s) de l'équation  $f(x) = g(x)$ .



Vous devez laisser apparentes les constructions faites pour répondre aux questions posées.

**29** ★★  
5 min.

**Lycée Stanislas, Paris**

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction définie pour  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2}{x + 5}}$$

2. Peut-on dire que pour tout élément de cet ensemble de définition,

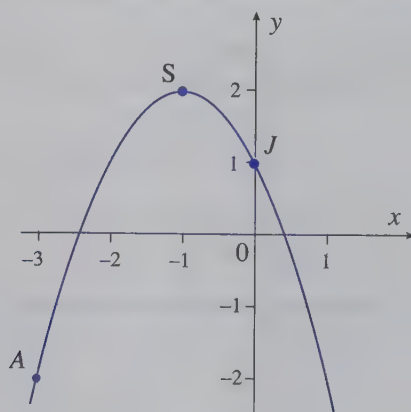
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{x + 5}} ?$$

Justifier.

**30** ★★★  
20 min.

**Lycée Hoche, Versailles**

On considère la fonction  $f$  représentée par la courbe ci-dessous.



1. Dans cette partie, on ne cherche pas à déterminer  $f(x)$ . On appelle  $f_1, f_2, f_3, f_4$  les fonctions définies par :  
 $f_1(x) = -f(x), f_2(x) = -f(-x), f_3(x) = f(|x|), f_4(x) = |f(x)|$ .  
 (a) Représenter dans le même repère  $f_1$  et  $f_2$ .  
 (b) Représenter dans le même repère  $f_3$  et  $f_4$ .
2. On admet que la courbe représentant  $f$  est une parabole ( $\mathcal{P}$ ), c'est-à-dire que  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c$  étant trois constantes. Déterminer  $a, b, c$  en utilisant le fait que la courbe  $\mathcal{C}_f$  passe par les points  $S, A$ , et  $J$ .

### 31 ★★★ ————— Lycée Jean Zay, Orléans

10 min.

1. Étudier la fonction définie pour  $x \in \mathbb{R}$  par :  $f(x) = -2x^2 + 8x$  (on montrera que la courbe obtenue a un sommet d'abscisse 2).
2. Représenter la fonction pour  $x \in [-1, 5]$  dans un repère orthonormal.

### 32 ★★★ ————— Lycée Marcelin Berthelot, Châtelleraut

15 min.

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, et étudier leur parité.

$$1. f_1(x) = \frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$2. f_2(x) = \frac{x^2 - 5}{|x| - 2}$$

$$3. f_3(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2}{x + 1}}$$

### 33 ★★★ ————— Lycée Saint-Louis-de-Gonzague, Paris

45 min.

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies pour tout  $x$  réel par :

$$f(x) = (2x + 1)^2 - (-x + 3)^2$$

$$g(x) = x^2 - 16 - (2x + 8)(-2x + 1)$$

1. Développer et réduire  $f(x)$ .
2. Factoriser  $f(x)$  et  $g(x)$ .
3. Déterminer les antécédents de  $-8$  par  $f$ .
4. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $f(x) + g(x) = 0$
5. On considère la fonction  $h : x \mapsto g(x) - f(x)$  définie sur  $[-4, 2]$ .
  - (a) Montrer que  $h(x) = 2[(x + 1)^2 - 9]$ .
  - (b) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

| $x$    | -4 | -3 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 1 | 2 |
|--------|----|----|----|------|----|------|---|---|---|
| $h(x)$ |    |    |    |      |    |      |   |   |   |

- (c) Tracer la courbe représentative  $\mathcal{C}_h$  de  $h$  sur  $[-4, 2]$  dans  $(O, I, J)$  avec  $OI = 1$  cm,  $OJ = 0,5$  cm.



## 1 ————— Lycée Molière, Paris

1. (a) L'ensemble de définition est  $[-3, 4[$ . Le gros point à l'abscisse  $-3$  et le crochet à l'abscisse  $+4$  signalent que  $-3$  est inclus alors que  $+4$  est exclu de l'ensemble.
- (b) L'ensemble de définition est  $] - \infty, 3]$ . Attention, la figure s'arrête à l'abscisse  $-4$ , mais simplement parce qu'on ne peut pas représenter une figure infinie. Si l'ensemble de définition était  $[-4, 3]$  ou  $] -4, 3]$ , il y aurait un gros point ou un crochet au point d'abscisse  $-4$ .
- (c) L'ensemble de définition est  $\mathbb{R} - \{1\}$ . Cet ensemble s'écrit également :

$$]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

2. (a)

|        |      |      |      |      |
|--------|------|------|------|------|
| $x$    | $-3$ | $-1$ | $+2$ | $+4$ |
| $f(x)$ | $-1$ | $+3$ | $-3$ | $2$  |

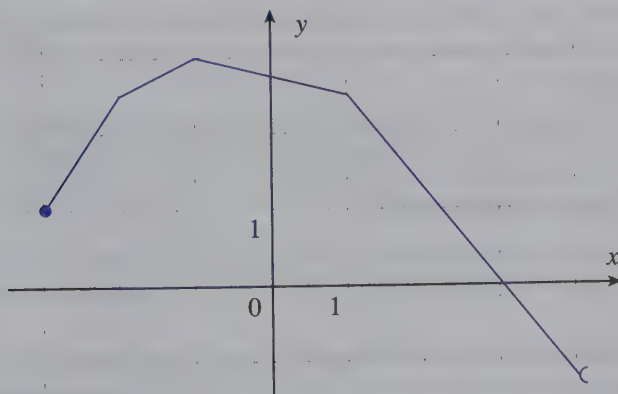
(b)

|        |               |      |     |      |
|--------|---------------|------|-----|------|
| $x$    | $-\infty$     | $-2$ | $0$ | $+3$ |
| $g(x)$ | $\rightarrow$ | $+1$ | $3$ | $-2$ |

(c)

|        |            |     |             |            |
|--------|------------|-----|-------------|------------|
| $x$    | $-\infty$  | $0$ | $+1$        | $+\infty$  |
| $h(x)$ | $\nearrow$ | $1$ | $\parallel$ | $\nearrow$ |

## 2 ————— Lycée Albert Chatelet, Douai



Il y a plusieurs réponses possibles, mais votre dessin doit ressembler à la figure ci-dessus ; n'oubliez pas notamment :

- Le gros point en  $(-3, 1)$  qui signale que l'ensemble de définition s'arrête en  $-3$  et contient  $-3$  ;

- le crochet à l'abscisse 4 qui signale que 4 est une extrémité (exclue) de l'ensemble de définition.

### 3 ————— Lycée Fustel de Coulanges, Massy

1. Il faut remplacer  $x$  par sa valeur dans l'expression de  $f$ .  
 $f(0) = 0^2 - 4 = -4$ ;       $f(1) = 1^2 - 4 = 1 - 4 = -3$ ;  
 $f(-2) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$
2. Nous devons, connaissant la valeur de  $f(x)$ , retrouver celle(s) de  $x$  :

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 + 5 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x \in \{-3, 3\}$$

Les antécédents de 5 par  $f$  sont donc  $-3$  et  $3$ .

$$f(x) = -7 \Leftrightarrow x^2 - 4 = -7 \Leftrightarrow x^2 = -3$$

Cette dernière égalité est impossible, puisqu'un carré est toujours positif,  $-7$  n'a donc pas d'antécédent par  $f$ .

$$f(x) = -4 \Leftrightarrow x^2 - 4 = -4 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

L'antécédent de  $-4$  par  $f$  est donc  $0$  (et c'est le seul !)

### 4 ————— Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Pour répondre à la question, il suffit de vérifier que, pour tout  $x$ , il y aura au maximum un point sur la courbe qui aura comme abscisse  $x$  ; ou, de façon plus pratique, la courbe représente une fonction si elle ne passe pas par deux points qui ont la même abscisse. Examinons chaque courbe :

1. Aucun problème. Il n'y a pas deux points sur la courbe qui aient la même abscisse.
2. Cette courbe ne peut représenter une fonction. En effet, à toute abscisse strictement positive correspond *deux* points sur la courbe, l'un d'ordonnée positive, l'autre d'ordonnée négative.
3. Ici non plus, il ne peut s'agir d'une fonction. à cause, notamment, du « virage » de la courbe dans le deuxième quadrant (c'est le nom de la partie du plan où les abscisses sont négatives et les ordonnées positives), on peut trouver plusieurs points de la courbe avec la même abscisse.
4. Aucune courbe de fonction ne peut contenir de segment vertical. En effet, tous les points de ce segment (il sont une infinité !) ont la même abscisse. La réponse est encore : non.
5. Cette courbe représente bien une fonction. Remarquez qu'au niveau du « décrochage » de la courbe (on appelle cela une *discontinuité*), les symboles dessinés indiquent que pour cette abscisse, seul le point du segment de droite est sur la courbe.
6. Nous avons une situation quasiment identique au cas 5. Néanmoins, au niveau de la discontinuité, les symboles • indiquent qu'à cette abscisse correspondent *deux* points, l'un sur le segment de gauche, l'autre sur le segment de droite. Il ne s'agit donc pas d'une fonction.

## 5 ————— Lycée Édouard Herriot, Lyon

Une fonction affine est définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = ax + b$ , où  $a$  et  $b$  sont deux réels fixés.

Dans un premier temps, supposons que  $f$  existe, donc que  $a \cdot \frac{1}{2} + b = 1$  et que  $a \cdot 1 + b = \frac{1}{4}$ .

Pour trouver  $a$  et  $b$ , nous devons donc résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + b = 1 \\ a + b = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a}{2} = \frac{3}{4} \\ a + b = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = \frac{7}{4} \end{cases}$$

La fonction affine  $f$  est donc définie par :

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$$

Vous pouvez vérifier que cette fonction répond à la question.

## 6 ————— Lycée Watteau, Valenciennes

1. Le seul problème dans la définition de  $f$  vient du  $x^2$  au dénominateur. En effet, celui-ci s'annule en 0. L'ensemble de définition de  $f$  est donc :

$$]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[ \quad (\text{ce qui s'écrit aussi } \mathbb{R}^*).$$

Cet ensemble est symétrique par rapport à zéro. Calculons :

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} + 3 = \frac{1}{x^2} + 3 = f(x)$$

Donc  $f$  est paire.

2. Ici, deux problèmes conjoints se posent. Non seulement le dénominateur doit être non nul, mais la présence de la racine impose en outre que  $4 - x^2$  soit positif. Ces deux conditions sont résumées par l'inéquation :  $4 - x^2 > 0$ , équivalente (factorisez !) à :  $(2 - x)(2 + x) > 0$ . Si besoin est, faites un tableau de signes. Vous vous apercevez alors que l'ensemble des solutions de l'inéquation est :  $]-2, 2[$ . Cet intervalle est l'ensemble de définition de  $g$ .

Il est évidemment symétrique par rapport à zéro. Soit  $x \in ]-2, 2[$ . Calculons :

$$g(-x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - (-x)^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = -g(x)$$

Donc  $g$  est impaire.

## 7 ————— Lycée Le Corbusier, Poissy

Il suffit, pour chaque fonction, de vérifier la symétrie de son domaine de définition, et d'exprimer  $f(-x)$  en fonction de  $f(x)$ .

1.  $f_1$  n'est pas définie si  $x^2 - 9 = 0$ , donc son ensemble de définition est  $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$ . Cet ensemble est clairement symétrique par rapport à 0. Néanmoins, la fonction n'est ni paire, ni impaire. On peut s'en rendre compte en remarquant que  $f_1(-1) = 0$ , alors que  $f_1(1)$  n'est visiblement pas nul.
2.  $f_2$  n'est pas définie si  $x = 0$ , son ensemble de définition est donc  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , qui est symétrique par rapport à 0 !

$$f_2(-x) = 4(-x)^2 + \frac{1}{(-x)^2} = 4x^2 + \frac{1}{x^2} = f_2(x)$$

La fonction  $f_2$  est donc paire.

3. L'ensemble de définition ne pose pas de problème ( $\mathbb{R}$ ).

$$f_3(-x) = (-x + 3)^2 - (-x - 3)^2 = (x - 3)^2 - (x + 3)^2 = -f(x)$$

La fonction  $f_3$  est impaire.

## 8 ————— Lycée Paul Painlevé, Oyonnax

1. On factorise :

$$\begin{aligned} f(x') - f(x) &= (2x'^2 - x' + 1) - (2x^2 - x + 1) \\ &= 2(x'^2 - x^2) - (x' - x) \\ &= 2(x' - x)(x' + x) - (x' - x) \\ &= (x' - x)(2(x' + x) - 1) \\ &= 2(x' - x)(x' + x - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

2. On suppose :

$$x' > x \geq \frac{1}{4}$$

Comme  $x' > x$ , on a  $x' + x > 2x$  ; or  $2x \geq \frac{1}{2}$  donc  $x' + x - \frac{1}{2} > 0$ .

On a également :  $x' - x > 0$ .

On en conclut que  $2(x' - x)(x' + x - \frac{1}{2}) > 0$ , donc  $f(x') > f(x)$ .

Ceci montre que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$  puisque, sur cet intervalle, si  $x < x'$  alors  $f(x) < f(x')$ .

3. On suppose cette fois :  $x' < x \leq \frac{1}{4}$ . On a alors  $x' + x < 2x$  et  $2x \leq \frac{1}{2}$ , donc  $x' + x - \frac{1}{2} < 0$ .

On a ici  $x' - x < 0$ . D'où  $f(x') > f(x)$ .

Ne pas conclure trop vite.  $x$  et  $x'$  sont deux éléments de  $] -\infty; \frac{1}{4}]$ . Nous venons de prouver que, sur cet intervalle, si  $x' < x$ , alors  $f(x') > f(x)$  ; la fonction  $f$  est donc strictement décroissante sur  $] -\infty; \frac{1}{4}]$ .

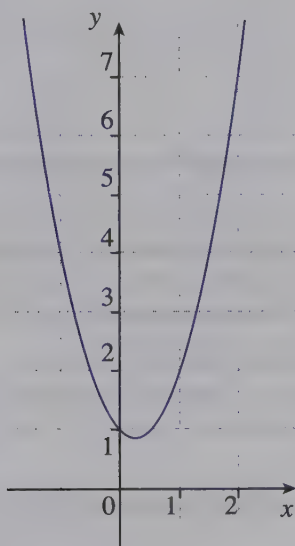
4. On donne le tableau de variation :

|        |                                           |               |           |
|--------|-------------------------------------------|---------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$                                 | $\frac{1}{4}$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $\swarrow$<br>$\frac{7}{8}$<br>$\nearrow$ |               |           |

5. On calcule les valeurs demandées :

|        |    |   |                       |   |   |
|--------|----|---|-----------------------|---|---|
| $x$    | -1 | 0 | $\frac{1}{4}$         | 1 | 2 |
| $f(x)$ | 4  | 1 | $\frac{7}{8} = 0,875$ | 2 | 7 |

D'où la courbe suivante :



## 9 Lycée Henri IV, Paris

La méthode habituelle est de vérifier d'abord que l'ensemble de définition de la fonction à étudier est symétrique par rapport à 0, puis de calculer l'image de  $-x$ , que l'on exprime ensuite en fonction de  $x$ .

1.  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , et  $f(-x) = 3 \times (-x) = -3x = -f(x)$ , donc  $f$  est impaire.
2.  $g$  est définie, à cause du radical, seulement quand  $x^2 - 1 \geq 0$ , c'est-à-dire (faire un tableau de signes !) quand  $x \in ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ . Cet ensemble est clairement symétrique par rapport à 0.

Comment le démontrer, si vous faites face à un correcteur tatillon ? Prenez un élément de l'ensemble, que vous appelez  $x$ . Nécessairement, soit  $x \geq 1$ , soit  $x \leq -1$ . Dans le premier cas son « symétrique par rapport à 0 », c'est-à-dire  $-x$  est inférieur

ou égal à  $-1$ . De même, si  $x \leq -1$ , alors  $-x \geq 1$ . Dans les deux cas,  $-x$  reste dans l'ensemble de définition de  $g$ , ce qui montre que cet ensemble est symétrique par rapport à 0.

Passons maintenant à la partie « calcul » :

$$g(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} = g(x)$$

$g$  est donc paire.

3. On pourrait appliquer la méthode que nous venons déjà d'utiliser. On s'aperçoit alors que  $h(-x)$  et  $h(x)$  ne se ressemblent pas vraiment. Dans ces cas-là, le mieux est de calculer  $h$  en deux points « symétriques ». Par exemple,  $h(-1) = 0$ , et  $h(+1) = 1$ .  $h(-1)$  et  $h(+1)$  ne sont ni égaux, ni opposés, donc  $h$  n'est ni paire, ni impaire.

*Remarque* : dans ces conditions, il est inutile de s'intéresser davantage à l'ensemble de définition ( $\mathbb{R}^*$ ).

4. Même méthode.  $i(1) = \frac{1+1+1}{1-3} = -\frac{3}{2}$  et  $i(-1) = \frac{1+1+1}{-1-3} = -\frac{3}{4}$ , donc  $i$  n'est ni paire, ni impaire.

## 10 — Lycée Alain, Alençon

1. Deux problèmes pourraient se présenter. Le dénominateur pourrait être nul, et l'expression sous la racine pourrait être négative. Or, aucun de ces deux cas ne se présente. En effet,  $|x|+7$  est toujours supérieur ou égal à 7, à cause de la valeur absolue. De plus,  $x^2 - 2x + 1$  n'est autre que le carré  $(x-1)^2$ , et n'est donc jamais négatif. L'ensemble de définition de  $f$  est donc  $\mathbb{R}$ .
2. Nous devons simplement faire attention à la racine, définie seulement pour  $x \geq 0$ . L'ensemble de définition de  $g$  est :  $\mathbb{R}_+$ .

## 11 — Lycée Jeanne d'Arc, Arras

Notons, dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , le point  $I(1, 0)$ .

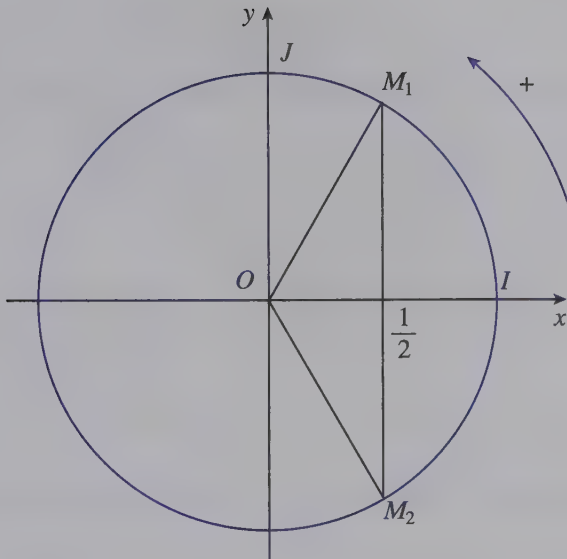


Lorsqu'on enroule la droite des réels (représentée par la tangente en  $I$ ) sur le cercle trigonométrique, un point  $P$  d'abscisse  $x$  est transformée en un point  $P'$ . On va de  $I$  à  $P'$  en parcourant sur le cercle la longueur  $|x|$ , dans le sens direct si  $x \geq 0$ , ou dans le sens rétrograde si  $x \leq 0$ .

Réciproquement : si on connaît la valeur de  $\cos x$  et on veut déterminer  $x$  (sans machine !). On place un point  $P'$  sur le cercle, d'abscisse  $\cos x$ . On détermine la longueur  $\widehat{IP'}$ . On aura  $x = +\widehat{IP'}$  ou  $x = -\widehat{IP'}$  selon le sens de parcours pour aller de  $I$  à  $P'$ .

1. On sait que  $\frac{1}{2}$  est la valeur de  $\cos 60^\circ$ .

Traçons un cercle trigonométrique :



On constate que deux points du cercle ont  $\frac{1}{2}$  comme abscisse. Appelons-les  $M_1$  et  $M_2$ .

On sait que  $OI = OM_1 = 1$  et le milieu de  $[OI]$  est le pied de la hauteur issue de  $M_1$ , donc  $OIM_1$  est isocèle en  $M_1$  et  $OM_1 = IM_1$ . Le triangle  $IOM_1$  est équilatéral d'où  $\widehat{IOM_1} = 60^\circ$  soit  $\frac{2}{3}$  de l'angle droit.

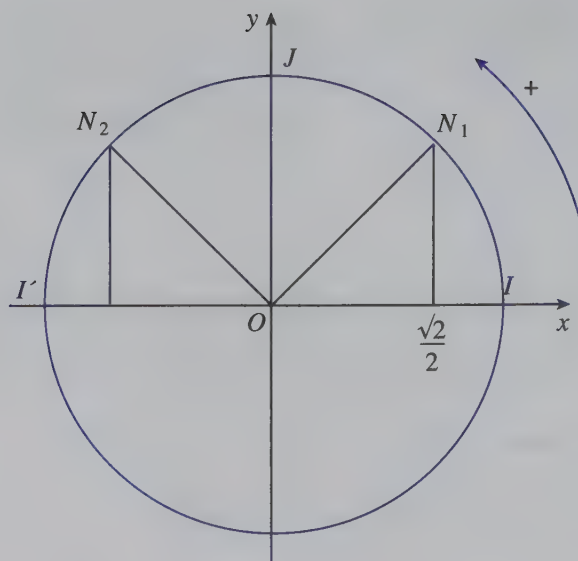
La longueur  $\widehat{IM_1}$  est donc les deux-tiers du quart de cercle. Le cercle tout entier a pour périmètre  $2\pi$ , d'où :

$$\widehat{IM_1} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

Par symétrie,  $\widehat{IM_2} = \frac{\pi}{3}$  également, seul le sens de parcours change, d'où les deux solutions (qui sont bien dans l'intervalle demandé) :

$$S = \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$$

2. Il y a deux points sur le cercle trigonométrique qui ont  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  pour ordonnée. On les appelle  $N_1$  et  $N_2$ . Ces deux points sont symétriques par rapport à  $(Oy)$  (puisque'ils ont même ordonnée).



D'après le cours,  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ$ . L'angle  $\widehat{ION_1}$  est donc un demi-angle droit, donc la longueur de l'arc  $\widehat{IN_1}$  est un demi-quart de cercle. Le cercle tout entier a pour longueur  $2\pi$ , On a donc :

$$\widehat{IN_1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{4}$$

Notons  $I'$  le symétrique de  $I$  par rapport à  $O$ . Par symétrie,  $I'N_2 = \frac{\pi}{4}$  et donc :

$$\widehat{IN_2} = \widehat{II'} - \widehat{N_2I'} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Les deux valeurs cherchées sont donc  $\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{3\pi}{4}$ .

## 12 ————— Lycée Jean Puy, Roanne

1.  $f(x)$  est définie à condition que  $\frac{x}{x-3}$  soit défini et positif. Utilisons un tableau de signes :

| $x$             | $-\infty$ | 0 | 3 | $+\infty$ |
|-----------------|-----------|---|---|-----------|
| $x$             |           | - | 0 | +         |
| $x-3$           |           | - |   | -         |
| $\frac{x}{x-3}$ |           | + | 0 | -         |

L'ensemble de définition est :

$$D_f = ]-\infty; 0] \cup ]3; +\infty[$$

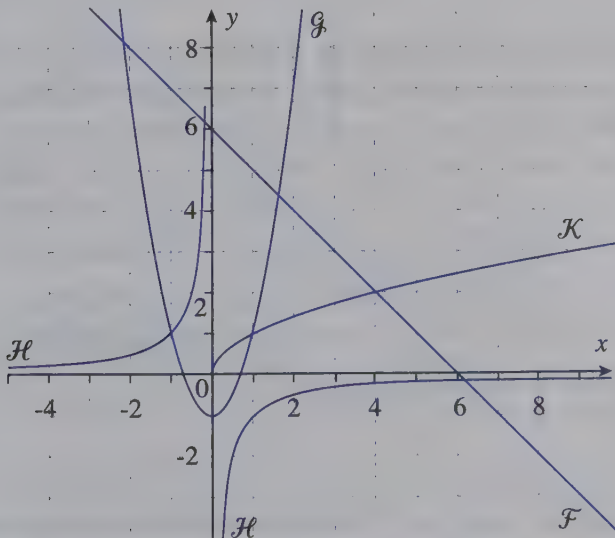
2.  $f(-1) = \sqrt{\frac{-1}{-4}} = \frac{1}{2}$  mais  $f(2)$  n'est pas défini.
3.  $-3$  n'a pas d'antécédent car  $f(x)$  est toujours positif (c'est un radical...). Calculons les antécédents de 1 :

$$\begin{aligned}
 1 = f(x) &\Leftrightarrow 1 = \sqrt{\frac{x}{x-3}} \\
 &\Leftrightarrow 1 = \frac{x}{x-3} \\
 &\Leftrightarrow x-3 = x \\
 &\Leftrightarrow -3 = 0
 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est toujours fausse. 1 n'a donc pas d'antécédent.

## 13 ————— Lycée du Parc, Lyon

1. La fonction  $f$  est une fonction affine, sa représentation graphique est une droite.  
 La fonction  $g$  est du second degré, sa représentation est une parabole.  
 $h$  est l'opposée de la fonction inverse, elle est représentée par une hyperbole (deux branches).  
 $k$  est représentée par une demi-parabole « couchée ». On peut donc attribuer à chaque courbe sa fonction :



2. (a) La fonction  $f$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ . Si on y tient, on peut donner le tableau de variation :

|        |           |            |
|--------|-----------|------------|
| $x$    | $-\infty$ | $+\infty$  |
| $f(x)$ |           | $\searrow$ |

(b)  $g$  décroît jusqu'à  $x = 0$ , puis croît :

|        |           |                                  |           |
|--------|-----------|----------------------------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $0$                              | $+\infty$ |
| $g(x)$ |           | $\searrow$<br>$-1$<br>$\nearrow$ |           |

(c)  $h$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$ . Elle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

|        |           |                          |           |
|--------|-----------|--------------------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $0$                      | $+\infty$ |
| $h(x)$ |           | $\nearrow$    $\nearrow$ |           |

(d)  $k$  est définie et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$  :

|        |     |            |
|--------|-----|------------|
| $x$    | $0$ | $+\infty$  |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ |

## 14 ————— Lycée Saint Louis, Saint Nazaire

1. (a)  $f(x)$  existe si  $9x^2 - 16 = 0$ . On résout :

$$9x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (3x - 4)(3x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ ou } x = -\frac{4}{3}$$

On conclut que l'ensemble de définition de  $f$  est :

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{-4}{3}, \frac{4}{3} \right\}$$

(b)  $g(x)$  existe si  $x \neq 8$  (à cause du dénominateur) et  $\frac{2x+3}{8-x} \geq 0$  (à cause du radical). On peut utiliser un tableau de signes pour déterminer le signe de la fraction :

|                    |           |                |     |           |
|--------------------|-----------|----------------|-----|-----------|
| $x$                | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | $8$ | $+\infty$ |
| $2x+3$             |           | $-$            | $0$ | $+$       |
| $8-x$              |           | $+$            | $+$ | $0$       |
| $\frac{2x+3}{8-x}$ |           | $-$            | $+$ | $-$       |

L'ensemble de définition de  $g$  est donc :

$$\left[ -\frac{3}{2}; 8 \right[$$

(c)  $h(x)$  existe pour tout  $x$  réel, l'ensemble de définition de  $h$  est donc  $\mathbb{R}$ .

2. On commence par remarquer que,  $h$  étant défini sur  $\mathbb{R}$ , son ensemble de définition est bien symétrique par rapport à la valeur 0.

Prenons  $x > 0$  et calculons :

$$\begin{aligned} h(-x) &= (-x) \cdot |-x| \\ &= -x \cdot x = -x \cdot |x| = -h(x) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que  $h$  est une fonction impaire. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.

3. On calcule :

$$\begin{aligned} f(-1) &= \frac{6}{9-16} = \frac{-6}{7} \\ g(3) &= \sqrt{\frac{6+3}{8-3}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \\ h\left(\frac{-2}{3}\right) &= \frac{-2}{3} \times \frac{2}{3} = -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

4. Pour calculer les antécédents de  $\frac{1}{8}$  par  $f$ , on résout :

$$\begin{aligned} \frac{6}{9x^2-16} &= \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow 48 &= 9x^2 - 16 \\ \Leftrightarrow 64 &= 9x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{64}{9} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \text{ ou } x = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

Les antécédents de  $\frac{1}{8}$  sont donc  $\frac{8}{3}$  et  $-\frac{8}{3}$ .

Pour calculer les antécédents de  $\frac{1}{3}$  par  $g$ , on résout :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2x+3}{8-x}} &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{2x+3}{8-x} &= \frac{1}{9} \\ \Leftrightarrow 9(2x+3) &= 8-x \\ \Leftrightarrow 18x+27 &= 8-x \\ \Leftrightarrow 19x &= -19 \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

$-1$  est donc l'unique antécédent de  $\frac{1}{3}$ .

5. Pour déterminer les réels invariants par  $h$ , on résout :

$$\begin{aligned} x \cdot |x| &= x \\ \Leftrightarrow x(|x| - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } |x| &= 1 \end{aligned}$$

On conclut :  $0$ ,  $-1$  et  $+1$  sont les trois réels invariants par  $h$ .

## 15 ————— Lycée Vaugelas, Chambéry

1. La courbe est une parabole.

2. On déduit de la courbe les variations de  $f$  :

|        |           |   |           |
|--------|-----------|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | 8 | $-\infty$ |

3. Le sommet de la parabole correspond à un minimum de la fonction. Ceci n'est possible que si le coefficient de  $x^2$  est négatif. La seule solution est donc :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$$

## 16 ————— Lycée Victor Louis, Talence

1.  $f$  et  $g$  sont des fonctions du second degré, leurs courbes sont des paraboles (donc  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{D}$ ).

Le coefficient de  $x^2$  dans  $g(x)$  est  $-1$ , donc le sommet de la parabole correspond au maximum de la fonction (autrement dit, la parabole associée à  $g$  doit avoir ses branches « vers le bas »).

Le coefficient de  $x^2$  dans  $f(x)$  est  $+1$ , donc le sommet de la parabole associée à  $f$  correspond au minimum de la fonction (branches « vers le haut »).

Dans ces conditions, on voit que  $\mathcal{A}$  est la courbe de  $f$ , et  $\mathcal{D}$  celle de  $g$ .  $\mathcal{B}$  est une droite, donc représente une application affine (ici  $k$ ).  $\mathcal{C}$  est une hyperbole qui représente  $h$  (la courbe de  $h$  est l'image de la courbe de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  par la translation de vecteur  $-3\vec{j}$ ).

On complète le tableau :

|               | $f$ | $g$ | $h$ | $k$ |
|---------------|-----|-----|-----|-----|
| $\mathcal{A}$ | x   |     |     |     |
| $\mathcal{B}$ |     |     |     | x   |
| $\mathcal{C}$ |     |     | x   |     |
| $\mathcal{D}$ |     | x   |     |     |

2. On lit sur la courbe les variations des fonctions  $g$  :

|        |           |   |           |
|--------|-----------|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $g(x)$ | $-\infty$ | 5 | $-\infty$ |

et  $h$  :

|        |           |           |           |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 0         | $+\infty$ |
| $h(x)$ | -3        | $+\infty$ | -3        |

3. (a) Les courbes de  $f$  et  $g$  se coupent en deux points dont on peut lire les abscisses sur la figure :  $+2$  et  $-2$ . D'où :

$$S = \{-2; 2\}$$

(b) On lit également l'abscisse de l'intersection des courbes de  $h$  et  $f : +1$ . D'où :

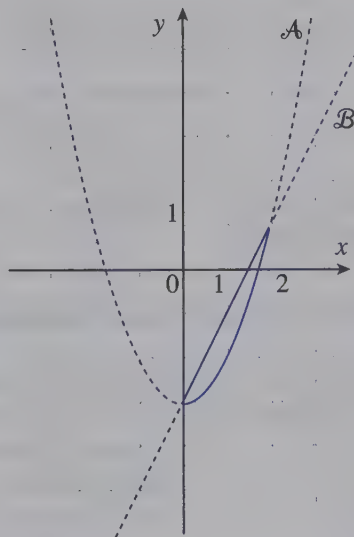
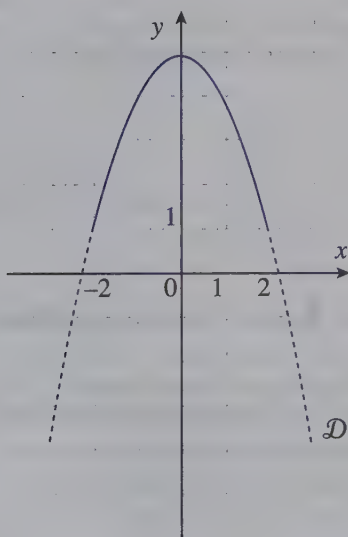
$$S = \{+1\}$$

(c) Il suffit de considérer les points de la parabole  $\mathcal{D}$  qui ont une ordonnée supérieure à 1. Ces points sont ceux dont l'abscisse est comprise entre  $-2$  et  $+2$  (voir figure à la fin du corrigé). Il s'agit donc d'un intervalle, dont on exclut les extrémités car on demande une inégalité stricte :

$$S = ] - 2; +2[$$

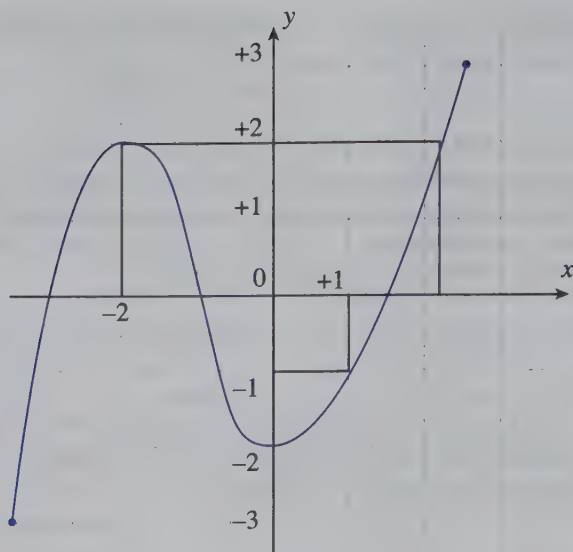
(d) Considérons les points de la parabole  $\mathcal{A}$  qui sont au-dessous de la droite  $\mathcal{B}$ . Il s'agit des points de  $\mathcal{A}$  dont l'abscisse est comprise entre 0 et 2. L'inégalité est large, il faut donc inclure les extrémités, d'où :

$$S = [0, 2]$$



## 17 ——— Lycée Albert de Mun, Nogent-sur-Marne

1. (a) 1 a pour image  $-1$  par  $f$ .
- (b) 0 a pour image  $-2$  par  $f$ .
- (c)  $-2$  est un antécédent de 2 (il y a un autre antécédent entre 2 et 2,5).
- (d)  $f(0) = -2$



2.

|        |      |    |    |     |
|--------|------|----|----|-----|
| $x$    | -3,5 | -2 | 0  | 2,5 |
| $f(x)$ | -3   | 2  | -2 | 3   |

3. Sur l'intervalle  $[-2, 0]$ , la fonction est strictement décroissante. Si  $a < b$ , on a donc  $f(a) > f(b)$ .

## 18 ———— Lycée Montaigne, Bordeaux

1. (a) On lit sur le graphique les abscisses des points qui sont au-dessus ( $f(x) \geq 0$ ) ou au-dessous ( $f(x) \leq 0$ ) de l'axe des abscisses. On résume dans un tableau :

|        |           |      |      |           |     |     |
|--------|-----------|------|------|-----------|-----|-----|
| $x$    | $-\infty$ | $-1$ | $+1$ | $+\infty$ |     |     |
| $f(x)$ |           | $+$  | $0$  | $-$       | $0$ | $+$ |

(b) Dans ce type d'inéquation, deux méthodes sont possibles.

- On peut factoriser  $f(x) = (x - 1)(x + 1)$  puis utiliser un tableau de signes :

| $x$    | $-\infty$ | $-1$ | $+1$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|------|------|-----------|
| $x-1$  | $-$       | $0$  | $+$  | $+$       |
| $x+1$  | $-$       | $0$  | $+$  | $+$       |
| $f(x)$ | $+$       | $0$  | $-$  | $+$       |

- On peut aussi remarquer que le signe de  $f(x)$  dépend de la position de  $x^2$  par rapport à 1, ce qui permet d'utiliser les variations de la fonction

$x \mapsto x^2 :$ 

| $x$   | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $+1$ | $+\infty$ |
|-------|-----------|------|-----|------|-----------|
| $x^2$ |           | 1    | 0   | 1    |           |

On lit dans le tableau :  $x^2 \leq 1$  pour  $x \in [-1, 1]$  et  $x^2 \geq 1$  pour  $x \in ]-\infty, -1]$  ou  $x \in [1, +\infty[$ . On retrouve ainsi les résultats précédents.

2. La fonction  $g$  est sous la forme  $x \mapsto ax + b$ . On lit sur le graphique :  $g(0) = -1$  et  $g(1) = 0$ , d'où les équations :

$$\begin{cases} g(0) = b = -1 \\ g(1) = a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$g$  est donc la fonction affine définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = x - 1$$

3. Graphiquement, on constate que la parabole ( $\mathcal{C}$ ) est au-dessous de la droite  $\mathcal{D}$  pour les points dont les abscisses sont comprises entre 0 et 1. L'inégalité est large, il faut donc inclure les valeurs 0 et 1, d'où :

$$S = [0, 1]$$

4. Par le calcul :

$$\begin{aligned} f(x) \leq g(x) &\Leftrightarrow x^2 - 1 \leq x - 1 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) \leq (x - 1) \\ &\Leftrightarrow (x - 1)[(x + 1) - 1] \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x(x - 1) \leq 0 \end{aligned}$$

On utilise un tableau de signes :

| $x$        | $-\infty$ | $0$ | $+1$ | $+\infty$ |
|------------|-----------|-----|------|-----------|
| $x$        |           | -   | 0    | +         |
| $(x - 1)$  |           | -   | 0    | +         |
| $x(x - 1)$ |           | +   | 0    | +         |

On constate que  $x(x - 1) \leq 0$  pour  $x \in [0, 1]$ , ce qui confirme le résultat lu sur le graphique.

## 19 ———— Lycée P. et I. Joliot-Curie, Nanterre

1.  $f_1$  est bien sûr une fonction affine, puisqu'on peut écrire :

$$f_1(x) = \frac{11}{6}x + \frac{3}{6}$$

L'ordonnée à l'origine de la droite qui représente  $f_1$  est  $\frac{3}{6}$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{2}$ . Son coefficient directeur est  $\frac{11}{6}$ . Il est positif (strictement), donc  $f_1$  est croissante (strictement).

2.  $f_2$  est une fonction constante (donc en particulier affine), représentée par une droite parallèle à l'axe des abscisses, d'ordonnée à l'origine  $-5$ . Le coefficient directeur de cette droite « horizontale » est bien entendu 0.
3.  $f_3$  est clairement une fonction affine. L'ordonnée à l'origine de sa droite représentative est 7, son coefficient directeur est  $-1$ . Il est négatif et non nul, donc la fonction est strictement décroissante.
4.  $f_4$  n'est pas une fonction affine. J'espère que cela vous a sauté aux yeux ( $f(x)$  ne peut être mis sous la forme  $ax + b$ ). La méthode la plus rapide pour prouver que  $f_4$  n'est pas une fonction affine est de remarquer que  $f$  n'est pas définie en 8, alors que les fonctions affines sont définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier.
5.  $f_5$  est une fonction affine. Elle est même linéaire : l'ordonnée à l'origine de sa droite représentative est 0. Le coefficient directeur de cette droite est  $\frac{2}{3}$  ; il est positif et non nul, donc  $f_5$  est strictement croissante.
6. Si on jette un coup d'œil (trop !) rapide sur  $f_6$ , celle-ci ne paraît pas affine, vue la présence de termes en  $x^2$ . Néanmoins, si l'on développe la formule, on obtient :

$$f_6(x) = x^2 + 2x - 4x - 8 - x^2 + 10 = -2x + 2$$

$f_6$  est donc bien une fonction affine. L'ordonnée à l'origine de sa droite représentative est 2, son coefficient directeur est  $-2$ .  $f_6$  est donc strictement décroissante.

## 20 ————— Lycée Thiers, Marseille

1. Obéissons poliment aux injonctions de l'énoncé, et munissons-nous de  $x_1$  et  $x_2$ , tels que  $0 < x_1 < x_2$ . On calcule :

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1 + \frac{1}{x_1} - x_2 - \frac{1}{x_2} \\ &= \frac{1}{x_1} - x_2 + x_1 - \frac{1}{x_2} \\ &= \frac{1}{x_1} - \frac{x_2 x_1}{x_1} + \frac{x_1 x_2}{x_2} - \frac{1}{x_2} \\ &= \frac{1}{x_1} (1 - x_2 x_1) + \frac{1}{x_2} (x_1 x_2 - 1) \\ &= (1 - x_2 x_1) \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) \end{aligned}$$

Ceci est du signe de  $(1 - x_2 x_1)$ , puisque,  $x_1$  étant inférieur à  $x_2$ ,  $\frac{1}{x_1}$  est supérieur à  $\frac{1}{x_2}$ , donc :  $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$  est positif.

2. Si l'on se donne deux points  $x_1$  et  $x_2$  inférieurs à 1, et tels que  $0 < x_1 < x_2$ , alors  $(1 - x_2x_1)$  est positif (si ce point ne vous paraît pas évident, cherchez-en une preuve *maintenant*, une correction est donnée à la fin de ce paragraphe). Donc  $f(x_1) - f(x_2)$  est positif, et  $f$  est *décroissante* sur  $]0, 1]$  ( $x_1$  est le plus petit et son image est la plus grande).

En revanche, si les deux points  $x_1$  et  $x_2$  sont supérieurs à 1, alors  $(1 - x_2x_1)$  est négatif. Donc  $f(x_1) - f(x_2)$  est négatif, et  $f$  est *croissante* sur  $[1, +\infty[$  ( $x_1$  est le plus petit et son image est aussi la plus petite).

Au sujet de  $1 - x_2x_1 > 0$  : vous savez que  $0 < x_1 < 1$  et  $0 < x_2 < 1$ , il suffit de multiplier membre à membre ces encadrements (ce que l'on a le droit de faire car ils concernent des nombres tous positifs), et il vient :  $0 < x_1x_2 < 1$ , d'où :  $1 - x_1x_2 > 0$ .

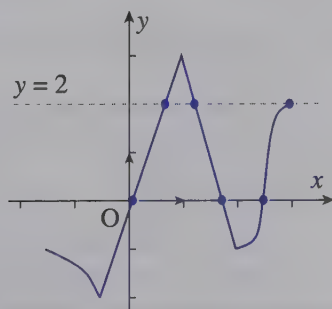
3. À l'aide de la question précédente, on dresse le tableau de variations de  $f$  :

| $x$    | 0 | 1 | $+\infty$ |
|--------|---|---|-----------|
| $f(x)$ |   | 2 |           |

4. D'après le tableau de variations,  $f$  admet pour minimum 2 en  $x = 1$ .

## 21 ————— Lycée Alphonse Daudet, Nîmes

- $f$  est définie sur  $[-1,5; 3]$ .
- On lit sur le graphique :  $f(-1) = -1,2$ ,  $f(-0,5) = -2$ ,  $f(1) = 3$ ,  $f(2) = -1$ ,  $f(2,5) = 0$  et  $f(3) = 2$ . Remarquez que l'imprécision du dessin ne vous permet que de donner une approximation de  $f(-1)$ . Vous avez donc (aussi) raison si vous avez écrit  $f(-1) = -1,3$ . Évitez les réponses trop précises du type  $f(-1) = -1,25$  (êtes-vous sûr(e) que ce n'est pas 1,26 ou 1,24 ?)
- On a indiqué les « points-solutions » sur la figure ci-dessous. Dans les deux cas, il y a trois solutions.



- $f$  est bornée sur son ensemble de définition, par  $-2$  et  $3$ .
- $f$  n'est évidemment ni paire, ni impaire, puisque sa courbe n'est symétrique ni par rapport à  $O$ , ni par rapport à  $(Oy)$ .
- D'après l'énoncé, la courbe de  $f$  est un segment de droite sur  $[-0,5; 1]$ . Sur cet intervalle, la fonction s'écrit donc :

$$f(x) = ax + b$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes réelles. On peut donc écrire :

$$f(-0,5) = -0,5a + b \text{ et } f(1) = a + b$$

En tenant compte de la question 2), il n'y a plus qu'à résoudre le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2 = -0,5a + b \\ 3 = a + b \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = a + b \\ 5 = 1,5a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - a \\ a = \frac{10}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{3} \\ a = \frac{10}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne sur l'intervalle  $[-0,5; 1]$  :

$$f(x) = \frac{10}{3}x - \frac{1}{3}$$

On utilise la même méthode sur  $[1, 2]$ .  $f(1) = a + b$  et  $f(2) = 2a + b$ , on résout le système :

$$\begin{cases} 3 = a + b \\ -1 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - a \\ -4 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a = -4 \end{cases}$$

$f$ , sur l'intervalle  $[1, 2]$ , a pour formule :

$$f(x) = -4x + 7$$

7. Il y a trois solutions à  $E_1$ . La première se trouve dans l'intervalle  $[-0, 5; 1]$ , il suffit de résoudre :

$$\frac{10}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}$$

Il y a une deuxième solution dans  $[1, 2]$  :

$$-4x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$$

La troisième solution est parfaitement lisible, puisque  $f(2, 5) = 0$ . Les solutions de  $E_1$  sont donc :

$$\left\{ \frac{1}{10}; \frac{7}{4}; \frac{5}{2} \right\}$$

Ici encore, la première solution de  $E_2$  se trouve dans  $[-0, 5; 1]$ . On résout :

$$\frac{10}{3}x - \frac{1}{3} = 2 \Leftrightarrow \frac{10}{3}x = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x = \frac{7}{10}$$

Il y a une autre solution, dans l'intervalle  $[1, 2]$  :

$$-4x + 7 = 2 \Leftrightarrow -4x = -5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Enfin, nous savons déjà que  $f(3) = 2$ . Les solutions de l'équation sont :

$$\left\{ \frac{7}{10}; \frac{5}{4}; 3 \right\}$$

## 22 ————— Lycée Saint-Michel, Paris

1. L'expression qui définit  $f$  ne peut être calculée que si son dénominateur est non nul.  $x^2 - 1 = 0$  quand  $(x - 1) \cdot (x + 1) = 0$ , donc si  $x = -1$  ou  $x = 1$ . L'ensemble de définition est donc  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
2. Soit  $x$  dans l'ensemble de définition. Celui-ci étant symétrique par rapport à 0,  $f(x)$  et  $f(-x)$  existent et :

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} = f(x)$$

La fonction est donc paire. De ce fait, on peut restreindre l'étude aux éléments positifs de l'ensemble de définition ; on complètera la courbe par une symétrie par rapport à l'axe  $(Oy)$ .

3. Prenons dans  $D_f$  deux éléments positifs  $x$  et  $x'$ , tels que  $x' > x$ . On a alors :

$$\begin{aligned} f(x') - f(x) &= \frac{x'^2}{x'^2 - 1} - \frac{x^2}{x^2 - 1} \\ &= \frac{x'^2(x^2 - 1) - x^2(x'^2 - 1)}{(x'^2 - 1)(x^2 - 1)} \\ &= \frac{x'^2 x^2 - x'^2 - x^2 x'^2 + x^2}{(x'^2 - 1)(x^2 - 1)} \\ &= \frac{x^2 - x'^2}{(x'^2 - 1)(x^2 - 1)} \\ &= \frac{(x - x')(x + x')}{(x'^2 - 1)(x^2 - 1)} \end{aligned}$$

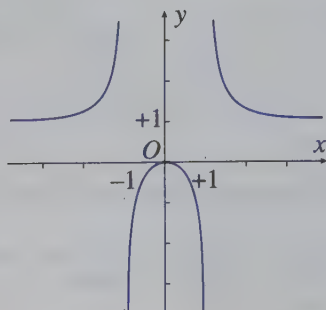
Le numérateur de cette dernière expression est toujours négatif. Si  $x$  et  $x'$  sont dans  $[0, 1[$ , le dénominateur est positif, comme produit de nombres négatifs. Si  $x$  et  $x'$  sont dans  $]1, +\infty[$ , le dénominateur est positif, comme produit de nombres positifs. Dans les deux cas,  $f(x') - f(x)$  est négatif, donc  $f$  est décroissante sur  $[0, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$ .

On en déduit le tableau de variations de  $f$  :

| $x$    | 0 | 1 | $+\infty$ |
|--------|---|---|-----------|
| $f(x)$ | 0 |   |           |
|        | ↘ |   | ↘         |

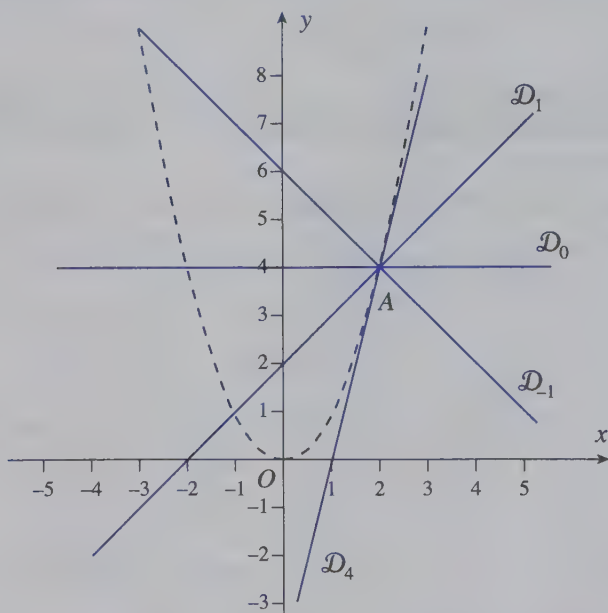
4. On peut par exemple calculer  $f(0) = 0$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}$ ,  $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{5}$ ,  $f(2) = \frac{4}{3}$ .

On peut tracer la courbe de  $f$  :



23

Lycée Michelet, Vanves



1. La droite d'équation  $y = m(x - 2) + 4$  est de coefficient directeur  $m$ , et elle passe visiblement par  $A$ , puisque  $m(2 - 2) + 4 = 4$ . Il s'agit donc bien de  $\mathcal{D}_m$ .
2.  $\mathcal{D}_0$ ,  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_{-1}$  ont pour équations respectives  $y = 4$ ,  $y = x + 2$  et  $y = -x + 6$ . En lisant l'ordonnée à l'origine, on peut donc représenter ces trois droites, sachant qu'elles passent toutes par  $A$  et, respectivement, par les points de coordonnées  $(0; 4)$ ,  $(0; 2)$  et  $(0; 6)$ .  
On peut lire les coordonnées des deux points d'intersection de  $\mathcal{P}$  et de  $\mathcal{D}_1$  sur la figure. L'un est bien sûr  $A$ , et l'autre a pour coordonnées  $(-1, 1)$ .
3. Un point d'intersection de coordonnées  $(x, y)$  vérifie à la fois l'équation de la droite

et celle de la parabole, donc :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = m(x-2) + 4 \end{cases}$$

On est donc amené à résoudre l'équation :

$$x^2 = m(x-2) + 4$$

On obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= m(x-2) + 4 - x^2 = m(x-2) - (x^2 - 4) \\ &= m(x-2) - (x-2)(x+2) \\ &= (x-2)(m-x-2) \end{aligned}$$

On a enfin deux solutions (donc deux points d'intersection) :

- $x = 2$  (donc  $y = 4$ , on retrouve le point  $A$ ) ;
- $x = m - 2$ , donc  $y = (m - 2)^2$ .

Il y a en général deux points d'intersection, sauf... quand ces deux points sont confondus, c'est-à-dire si  $m - 2 = 2$ , donc  $m = 4$ . La droite  $\mathcal{D}_4$  n'a que le seul point d'intersection  $A$  avec la parabole. Traçons-la. Il s'agit de la tangente en  $A$  à la parabole.

## 24 ————— Lycée Geoffroy-Saint-Hilaire, Étampes

1. On factorise :

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= (x_1^2 - 4x_1 + 3) - (x_2^2 - 4x_2 + 3) \\ &= x_1^2 - 4x_1 + 3 - x_2^2 + 4x_2 - 3 \\ &= x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 4(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1)(4 - (x_1 + x_2)) \end{aligned}$$

2. Si  $x_1 < x_2$ , on peut écrire  $x_1 + x_2 < 2x_2$ . Avec l'hypothèse :  $x_2 \leq 2$ , on obtient  $x_1 + x_2 < 4$ .

Toujours avec  $x_1 < x_2$ , on écrit  $x_1 + x_2 > 2x_1$ . Avec  $x_1 \geq 2$ , on peut écrire  $x_1 + x_2 > 4$ .

3. Donnons-nous  $x_1$  et  $x_2$  dans  $] -\infty; 2]$ , tels que  $x_1 < x_2$ . D'après les questions précédentes, on sait que  $4 - (x_1 + x_2) > 0$  et, par ailleurs,  $x_2 - x_1 > 0$ , donc  $f(x_1) - f(x_2) > 0$ . On en déduit que  $f(x_1) > f(x_2)$ , donc  $f$  est strictement décroissante sur  $] -\infty; 2]$ .

De la même façon, on montre que dans  $[2; +\infty[$ ,  $f$  est strictement croissante. Voici le tableau de variations de  $f$  :

|        |           |                        |           |
|--------|-----------|------------------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $2$                    | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           | $\searrow -1 \nearrow$ |           |

4. Il suffit de développer  $(x - 1)(x - 3)$ .
5. D'après la factorisation précédente, l'égalité est vérifiée pour  $x = 1$  et  $x = 3$ , donc  $S = \{1; 3\}$ .
6. L'inéquation proposée revient à l'inéquation :  $f(x) \geq 0$ .  $f(x)$  s'annule en 1 et 3. De  $-\infty$  à 1,  $f$  décroît, donc  $f(x)$  est positif. Il devient négatif à partir de 1. Arrivée en  $x = 2$ , la fonction croît de nouveau, passe par la valeur 0 en  $x = 3$ , puis devient positive. Ces considérations apparaissent plus clairement dans le tableau de variation :

| $x$    | $-\infty$ | 1 | 2  | 3 | $+\infty$ |
|--------|-----------|---|----|---|-----------|
| $f(x)$ |           | 0 | -1 | 0 |           |

L'ensemble des solutions est donc :

$$S = ]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$$

7. L'énoncé vous demande en fait de procéder directement à la résolution de l'inéquation, par un tableau de signes :

| $x$     | $-\infty$ | 1 | 3 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|---|-----------|
| $x - 1$ | -         | 0 | + | +         |
| $x - 3$ | -         | - | 0 | +         |
| $f(x)$  | +         | 0 | - | +         |

On retrouve le résultat de la question précédente.

## 25 ————— Lycée Fénelon, Paris

1. L'expression de  $f(x)$  est la somme d'une constante,  $-9$ , (qui à ce titre n'intervient pas dans le sens de variation), et de  $(x - 1)^2$ . Cette partie ressemble à la fonction de référence  $x \mapsto x^2$ , dont vous devez savoir qu'elle est décroissante jusqu'à 0, puis croissante. C'est à dire que  $x \mapsto (x - 1)^2$  est strictement décroissante quand  $x - 1$  va de  $-\infty$  jusqu'à zéro, et strictement croissante ensuite. On peut traduire cette dernière phrase en disant que  $x \mapsto (x - 1)^2$  est strictement décroissante quand  $x$  va de  $-\infty$  jusqu'à 1, et strictement croissante ensuite. Puisqu'on a déjà dit que la constante n'intervenait pas, on peut conclure :

$f$  est strictement décroissante sur  $] - \infty; 1]$  et strictement croissante sur  $[1; +\infty[$ .

2. Commençons par remarquer que, puisque la fonction de référence  $x \mapsto \sqrt{x}$  est définie seulement sur  $\mathbb{R}_+$ , il faudra étudier les variations de la fonction là où  $x^2 - 16$  est positif. Pour savoir quand  $x^2 - 16 \geq 0$ , c'est-à-dire  $x^2 \geq 16$ , regardez sur votre parabole de référence les  $x$  pour lesquels  $x^2 \geq 16$ . On obtient  $]-\infty; -4] \cup [4; +\infty[$ . De plus, la fonction « racine » est strictement croissante, donc  $g$  aura les mêmes sens de variations que  $x \mapsto x^2 - 16$ .  $-16$  n'est qu'une constante, donc  $x \mapsto x^2 - 16$  a les mêmes variations que  $x \mapsto x^2$ . En tenant compte des restrictions subies par l'ensemble de définition, on conclut :

$g$  est strictement décroissante sur  $] - \infty; -4]$  et strictement croissante sur  $[4; +\infty[$  car  $x \mapsto \sqrt{x}$  est strictement croissante.

3. La fonction de référence  $x \mapsto x^2$  est strictement décroissante sur  $] -\infty; 0]$  et strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ . La fonction  $x \mapsto -2x + 8$  est, elle, strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ , et s'annule quand  $x = 4$ . On en déduit que, lorsque  $x$  varie de  $-\infty$  à 4,  $-2x + 8$  décroît en restant positif, donc son carré *décroît*.  $h$  est donc strictement décroissante sur  $] -\infty, 4]$ . Inversement, quand  $x$  augmente à partir de 4,  $-2x + 8$  décroît, mais tout en étant négatif ! Donc son carré *croît*.

Conclusion :  $h$  est strictement décroissante sur  $] -\infty, 4]$  et strictement croissante sur  $[4, +\infty[$ .

Attention au raisonnement faux qui aurait consisté à dire, par exemple : « Quand  $x$  est dans  $] -\infty, 4]$ ,  $-2x + 8$  est positif. Or la fonction de référence  $x \mapsto x^2$  est croissante pour  $x$  positif. Donc  $h$  est croissante. » Le problème de ce raisonnement est que  $-2x + 8$  n'augmente pas mais diminue. On se ballade bien sur la branche « de droite » de la parabole, mais nous voyageons de droite à gauche, de  $+\infty$  à 0.

La deuxième conclusion est donc de se méfier des sens de variations appris par cœur. « Le carré d'un nombre positif croît » n'a pas de sens. Ce qu'il faut dire, c'est : « le carré d'une variable positive croît *si cette variable croît* »

4. Pour étudier la fonction  $i$ , il est bon de changer l'expression  $x^2 + 2x + 4$ . Celle-ci commence comme le produit remarquable  $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ . On peut donc écrire :

$$x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1 + 3 = (x + 1)^2 + 3$$

Donc  $i(x) = -(x + 1)^2 - 3$ .

On procède alors comme d'habitude. Quand  $x$  croît de  $-\infty$  à  $-1$ ,  $x + 1$  croît alors de jusqu'à 0, donc  $(x + 1)^2$  *décroît* jusqu'à 0 (attention,  $x + 1$  est négatif !). Enfin,  $-(x + 1)^2$  croît jusqu'à 0 (le signe  $-$  change le sens de variation. On raisonne de même pour  $x \in [-1; +\infty[$ , on conclut alors :

$i$  est (strictement) croissante sur  $] -\infty; -1]$  et strictement décroissante sur  $[-1; +\infty[$ .

5. La première chose à faire dans ce genre de situations est de remarquer que  $j$  n'est défini que sur  $\mathbb{R} - \{2\}$ , à cause du dénominateur.

Une petite astuce consiste à se débarrasser d'emblée du signe  $-$ , qui est bien gênant ! En effet, puisque  $-x + 2 = -(x - 2)$ , on peut écrire :

$$j(x) = \frac{2}{x - 2}$$

Du point de vue du sens de variation, le facteur 2 ne change rien à celles de  $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ . La fonction de référence est  $x \mapsto \frac{1}{x}$ . Elle est décroissante sur  $] -\infty; 0]$  et sur  $]0; +\infty[$ . Donc  $x \mapsto \frac{1}{(x - 2)}$  est décroissante sur  $] -\infty; 2[$  et sur  $]2; +\infty[$ .

Conclusion :  $j$  est strictement décroissante sur  $] -\infty; 2[$  et strictement décroissante sur  $]2; +\infty[$ .

## 26 ———— Lycée Jules Ferry, Conflans-Sainte-Honorine

1. (a) Calculons :

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \\ &= \frac{1}{2}[x^3 + 3x^2 - 5x + 1 + (-x)^3 + 3(-x)^2 - 5(-x) + 1] \\ &= 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} i(x) &= \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \\ &= \frac{1}{2}[x^3 + 3x^2 - 5x + 1 - (-x)^3 - 3(-x)^2 + 5(-x) - 1] \\ &= x^3 - 5x \end{aligned}$$

(b) Même chose :

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{x+1}{x-1} + \frac{-x+1}{-x-1} \right] & i(x) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{x+1}{x-1} - \frac{-x+1}{-x-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} \right] & &= \frac{1}{2} \left[ \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{x^2 - 1} & &= \frac{1}{2} \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{x^2 - 1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} & &= \frac{1}{2} \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2x^2 + 2}{x^2 - 1} & &= \frac{1}{2} \frac{4x}{x^2 - 1} \\ &= \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} & &= \frac{2x}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

2. Il est clair que l'ensemble de définition de  $p$  et de  $i$  est le même que celui de  $f$ . Dans les deux cas proposés, l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0. Reste à vérifier si dans les deux cas,  $p(-x) = p(x)$ ,  $i(-x) = -i(x)$ , et  $f(x) = p(x) + i(x)$ . On peut le faire cas par cas, mais on peut aussi le démontrer en utilisant les formules générales de  $p$  et  $i$ .

$$p(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(-(-x))] = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = p(x)$$

$p$  est donc bien une fonction paire.

$$\begin{aligned} i(-x) &= \frac{1}{2}[f(-x) - f(-(-x))] = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] \\ &= -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -i(x) \end{aligned}$$

$i$  est bien impaire.

$$p(x) + i(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = \frac{1}{2}[2f(x)] = f(x)$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Les formules données par l'énoncé permettent de décomposer toute fonction  $f$  en une partie paire,  $p$ , et une partie impaire,  $i$ , à condition que l'ensemble de définition de  $f$  soit symétrique par rapport à 0. On peut même démontrer que c'est la *seule* décomposition de ce type (démonstration difficile).

## 27 — Lycée Talma, Brunoy

1. Prenons dans  $I$  deux réels  $x$  et  $x'$  tels que  $x' > x$  et comparons  $f(x')$  et  $f(x)$ . Pour rendre la comparaison plus commode, exprimons  $f(x') - f(x)$  :

$$\begin{aligned} f(x') - f(x) &= \frac{-x' + 3}{x' - 5} - \frac{-x + 3}{x - 5} \\ &= \frac{(-x' + 3)(x - 5) - (-x + 3)(x' - 5)}{(x' - 5)(x - 5)} \\ &= \frac{-x'x + 3x + 5x' - 15 - (-xx' + 5x + 3x' - 15)}{(x' - 5)(x - 5)} \\ &= \frac{-x'x + 3x + 5x' - 15 + xx' - 5x - 3x' + 15}{(x' - 5)(x - 5)} \\ &= \frac{-2x + 2x'}{(x' - 5)(x - 5)} \\ &= (x' - x) \frac{2}{(x' - 5)(x - 5)} \end{aligned}$$

Comme  $x' - x > 0$ ,  $x' - 5 < 0$  et  $x - 5 < 0$ , on obtient :

$$f(x') - f(x) > 0, \text{ donc } f(x') > f(x)$$

On en déduit que  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

2. Prenons encore dans  $I$  deux réels,  $x' > x$ . Cette fois, plutôt que calculer  $f(x') - f(x)$ , écrivons directement :

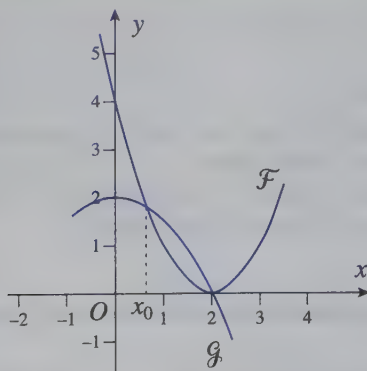
$$\begin{aligned} x' &> x \\ x' - 8 &> x - 8 \end{aligned}$$

et, ces deux réels étant positifs (car  $x \geq 8$ ), on peut élever les deux membres au carré :

$$(x' - 8)^2 > (x - 8)^2$$

ce qui donne :  $f(x') > f(x)$ . On en déduit que  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

## 28 Lycée Hélène Boucher, Paris



1. On lit sans difficulté :  $f(0) = 4$  et  $f(2) = 0$ .
2.  $g(2) = 0$ .
3. Il n'y a qu'une solution à l'équation  $g(x) = 2$  :  $S = \{0\}$ .
4. Il y a deux solutions, 2 et un réel  $x_0$  compris entre 0,5 et 1. Vous devez donner une approximation raisonnable de cette deuxième solution, par exemple 0,6 ou 0,7 (la valeur exacte est  $\frac{2}{3}$ , mais vous serez sanctionné(e) si vous la donnez aussi précisément, car on vous demande de « lire », pas de « deviner » la réponse).

## 29 Lycée Stanislas, Paris

1. Pour déterminer l'ensemble de définition de  $f$ , il faut savoir pour quels  $x$  la fraction  $\frac{x^2 - 2}{x + 5}$  existe et est positive. Après avoir remarqué que :

$$\frac{x^2 - 2}{x + 5} = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x + 5}$$

on dresse un tableau de signes :

| $x$            | $-\infty$ | $-5$ | $-\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |   |
|----------------|-----------|------|-------------|------------|-----------|---|
| $x - \sqrt{2}$ | —         | —    | —           | 0          | +         |   |
| $x + \sqrt{2}$ | —         | —    | 0           | +          | +         |   |
| $x + 5$        | —         | 0    | +           | +          | +         |   |
| fraction       | —         | +    | 0           | —          | 0         | + |

On obtient :

$$D_f = ]-5; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$$

2. Votre premier mouvement doit être de répondre non : en général, on n'a pas le droit de séparer les racines de cette façon, sauf si le numérateur et le dénominateur sont positifs.

Mais regardons de plus près l'expression. Sur  $D_f$ , on a toujours  $x > -5$ , donc  $x + 5 > 0$ . Puisque le dénominateur de

$$\frac{x^2 - 2}{x + 5}$$

est positif sur  $D_f$  et que la fraction toute entière est positive, le numérateur est donc positif. On a donc bien le droit d'écrire :

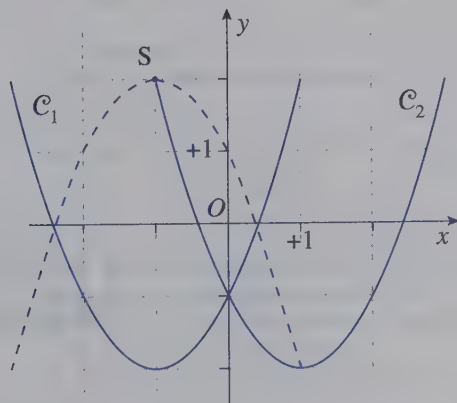
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{x + 5}}$$

sur tout  $D_f$ .

### 30 Lycée Hoche, Versailles

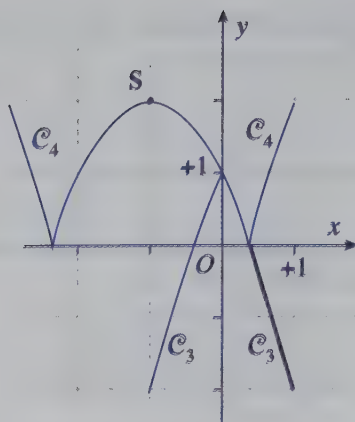
1. (a)  $f_1(x) = -f(x)$  signifie que la courbe représentative de  $f_1$  est symétrique de celle de  $f$  par rapport à  $(Ox)$ .

$f_2(x) = -f(-x) = f_1(-x)$ , donc la courbe représentative de  $f_2$  est symétrique de celle de  $f_1$  par rapport à  $(Oy)$ .



- (b)  $f_3(x) = f(|x|)$ . Si  $x \geq 0$ ,  $|x| = x$ , donc  $f_3(x) = f(x)$ . Si  $x \leq 0$ ,  $|x| = -x$ , donc  $f_3(x) = f(-x)$ . Pour tracer la courbe de  $f_3$ , on trace donc la branche de la courbe de  $f$  qui correspond aux abscisses positives, puis on utilise la symétrie orthogonale d'axe  $(Oy)$ .

Pour dessiner la courbe de  $f_4$ , on applique la symétrie orthogonale d'axe  $(Ox)$  à tous les points de la courbe de  $f$  qui ont une ordonnée négative.



2. Lisons les coordonnées des trois points :  $A(-3, -2)$ ,  $S(-1, 2)$ ,  $J(0, 1)$ . Ce sont des éléments de  $\mathcal{C}_f$ . On en déduit :

$$\begin{cases} f(-3) = 9a - 3b + c = -2 \\ f(-1) = a - b + c = 2 \\ f(0) = c = 1 \end{cases}$$

La dernière équation nous donnant directement  $c = 1$ , il n'y a plus qu'à résoudre :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 9a - 3b = -3 \\ a - b = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b = -1 \\ a - b = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -2 \\ b = a - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement :

$$f(x) = -x^2 - 2x + 1$$

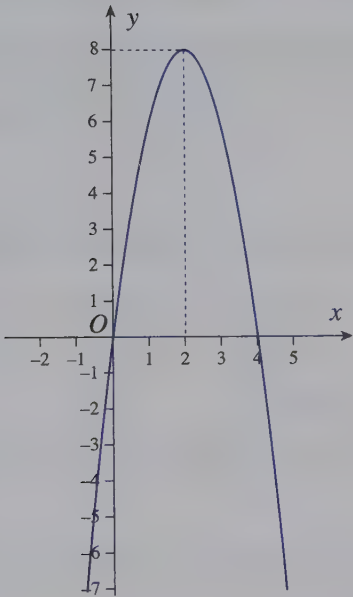
### 31 ————— Lycée Jean Zay, Orléans

1. Pour faire apparaître le sommet de la courbe, on commence la factorisation de l'expression :

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 + 8x \\ &= -2(x^2 - 4x) \\ &= -2(x^2 - 4x + 4 - 4) \\ &= -2(x - 2)^2 + 8 \end{aligned}$$

Mise sous cette forme, l'expression fait apparaître que les ordonnées des points de la courbe sont toujours inférieures à 8, et atteignent 8 quand  $x = 2$ . La courbe est une parabole de sommet  $S(2, 8)$ .

2. Courbe représentative :



32 ————— Lycée Marcellin Berthelot, Châtellerault

1.  $f_1(x)$  est définie quand son dénominateur est non nul, et que l'expression dans le radical est positive. On peut résumer ces deux conditions par :

$$x^2 - 1 > 0, \text{ et en factorisant } (x - 1)(x + 1) > 0$$

On peut dresser un petit tableau de signes :

| $x$       | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|-----------|-----------|------|-----|-----------|
| $x - 1$   |           | $-$  | $-$ | $+$       |
| $x + 1$   |           | $-$  | $+$ | $+$       |
| $x^2 - 1$ |           | $+$  | $-$ | $+$       |

On en déduit l'ensemble de définition de  $f_1$  :

$$D_1 = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$$

$D_1$  est symétrique par rapport à 0. Calculons  $f_1(-x)$  :

$$f_1(-x) = \frac{(-x)^3 - x}{\sqrt{(-x)^2 - 1}} = \frac{-x^3 - x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -\frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -f_1(x)$$

La fonction est donc impaire.

2.  $f_2(x)$  est définie dès que son dénominateur est non nul. On a :

$$|x| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2$$

CORRIGÉS

L'ensemble de définition de  $f_2$  est :

$$D_2 = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

Cet ensemble est symétrique par rapport à zéro, calculons  $f_2(-x)$  :

$$f_2(-x) = \frac{(-x)^2 - 5}{|-x| - 2} = \frac{x^2 - 5}{|x| - 2} = f_2(x)$$

$f_2$  est donc paire.

3.  $f_3$  est définie quand la fraction  $\frac{x^2 - 2}{x + 1}$  est définie (donc  $x + 1 \neq 0$ ), et positive.

Factorisons :

$$\frac{x^2 - 2}{x + 1} = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x + 1}$$

Dressons un tableau de signes :

| $x$            | $-\infty$ | $-\sqrt{2}$ | $-1$ | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
|----------------|-----------|-------------|------|------------|-----------|
| $x - \sqrt{2}$ | -         |             | -    |            | +         |
| $x + \sqrt{2}$ | -         | 0           | +    |            | +         |
| $x + 1$        | -         |             | -    | 0          | +         |
| fraction       | -         | 0           | +    |            | -         |
|                |           |             |      |            | 0         |
|                |           |             |      |            | +         |

D'après le tableau, l'ensemble de définition de  $f_3$  est :

$$D_3 = [-\sqrt{2}; -1[ \cup [\sqrt{2}; +\infty[$$

Cet ensemble de définition n'est pas symétrique par rapport à 0, donc  $f_3$  n'est ni paire, ni impaire.

### 33 ———— Lycée Saint-Louis-de-Gonzague, Paris

1.  $f(x) = 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 6x - 9 = 3x^2 + 10x - 8$

2. Factorisons  $f$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= [(2x + 1) + (-x + 3)][(2x + 1) - (-x + 3)] \\ &= (2x + 1 - x + 3)(2x + 1 + x - 3) \\ &= (x + 4)(3x - 2) \end{aligned}$$

Factorisons  $g$  :

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - 4)(x + 4) - 2(x + 4)(-2x + 1) \\ &= (x + 4)[(x - 4) - 2(-2x + 1)] \\ &= (x + 4)(x - 4 + 4x - 2) \\ &= (x + 4)(5x - 6) \end{aligned}$$

3. Il faut résoudre l'équation :

$$-8 = 3x^2 + 10x - 8 \Leftrightarrow 0 = 3x^2 + 10x \Leftrightarrow x(3x + 10) = 0$$

Les antécédents de  $-8$  par  $f$  sont donc :  $0$  et  $-\frac{10}{3}$ .

4. Utilisons les expressions factorisées de  $f$  et  $g$  :

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) = 0 &\Leftrightarrow (x+4)(3x-2) + (x+4)(5x-6) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+4)(3x-2+5x-6) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+4)(8x-8) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+4)(x-1) = 0 \end{aligned}$$

D'où l'ensemble de solutions :  $S = \{-4; 1\}$

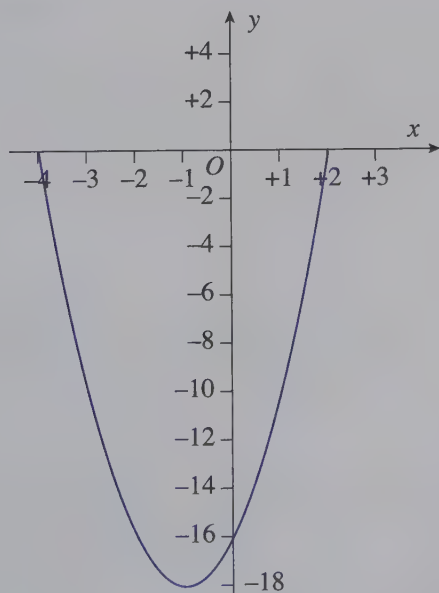
5. (a) Utilisons encore les expressions factorisées de  $f$  et  $g$  :

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= (x+4)(5x-6) - (x+4)(3x-2) \\ &= (x+4)(5x-6-3x+2) \\ &= (x+4)(2x-4) \\ &= 2(x+4)(x-2) \\ &= 2(x+1+3)(x+1-3) \\ &= 2[(x+1)^2 - 9] \end{aligned}$$

(b)

|        |    |     |     |       |     |       |     |     |   |
|--------|----|-----|-----|-------|-----|-------|-----|-----|---|
| $x$    | -4 | -3  | -2  | -1,5  | -1  | -0,5  | 0   | 1   | 2 |
| $h(x)$ | 0  | -10 | -16 | -17,5 | -18 | -17,5 | -16 | -10 | 0 |

(c) Courbe représentative de  $h$  :





# Équations et inéquations

*Descartes avait trouvé l'art de mettre les courbes en équation.  
(Turgot)*

## 4.1 Savoir factoriser et développer

### 4.1.1 Exercice type n° 1

Factoriser  $A = 18x^2 - 24x + 8 - (x + 1)(6x - 4) - 3x + 2$ .

*Exercice de la série de problèmes de mathématiques de la classe de 4<sup>e</sup> • Lycée Alain Fournier, Bourges •*

### 4.1.2 Développement

Développer, c'est effectuer dans une expression toutes les multiplications possibles, en tenant compte des ordres de priorité des opérations, puis « enlever » toutes les parenthèses (attention aux signes !) Par exemple, si on veut développer :

$$B = (x - 2)^2 - (x - 3)(2x + 5)$$

on écrira :

$$B = x^2 - 4x + 4 - (2x^2 + 5x - 6x - 15) = x^2 - 4x + 4 - 2x^2 - 5x + 6x + 15$$

Réduire, c'est, après avoir développé une expression, effectuer toutes les additions possibles. Pour l'expression développée de  $B$  ci-dessus, on écrira :

$$B = -x^2 - 3x + 19$$

En général, les énoncés portent la mention « développer et réduire », donc l'ordre dans lequel vous effectuez toutes les opérations n'a pas d'importance, *dans la mesure où il respecte les règles de priorité*. Par exemple, on pourra écrire :

$$\begin{aligned} B &= x^2 - 4x + 4 - (2x^2 + 5x - 6x - 15) \\ &= x^2 - 4x + 4 - (2x^2 - x - 15) \\ &= x^2 - 4x + 4 - 2x^2 + x + 15 \\ &= -x^2 - 3x + 19 \end{aligned}$$

### 4.1.3 Factorisation

C'est l'opération inverse du développement : on transforme une *somme* en *produit*. A la différence du développement, où il suffit d'appliquer des règles de calcul, la factorisation nécessite un petit travail de réflexion. Dans un premier temps, il faut regarder s'il existe un *facteur commun*. Par exemple, dans l'expression  $(x + 2)(x - 5) - 4(x + 2)$ ,  $(x + 2)$  est multiplié par  $(x - 5)$  et par  $-4$  (attention au signe !) Que faire alors ? On écrit le facteur commun d'abord, puis on ouvre une grande parenthèse, ou même un crochet, où l'on enfourne les éléments qui étaient multipliés par le facteur commun. Concrètement, cela donne :

$$(x + 2)(x - 5) - 4(x + 2) = (x + 2)[(x - 5) - 4]$$

Il n'y a plus ensuite qu'à simplifier l'intérieur du crochet, en faisant *très* attention aux problèmes de signes qui peuvent se poser quand on retire les éventuelles parenthèses. Finalement, on obtient une expression factorisée :  $(x + 2)(x - 9)$

Malheureusement, nous ne sommes plus en classe de troisième, et les choses ne sont souvent pas aussi simples !

Il arrive que le facteur commun soit caché, parce qu'il est multiplié par une constante. Dans ce cas, un peu d'habitude et d'attention vous permettront sans peine de le déloger. Par exemple, voyez-vous le facteur commun  $(x + 2)$  qui se cache dans l'expression :  $(x + 2)(x - 5) - 4x - 8$  ? Eh oui, il s'agit de la même factorisation que ci-dessus ! Le plus souvent, cependant, le facteur commun se cache bien mieux, derrière une identité remarquable (que vous avez peut-être l'habitude d'appeler *produit* remarquable, ou *égalité* remarquable). Rappelons rapidement ces égalités :

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Remarquez que dans ces égalités, le membre de gauche est une somme, et le membre de droite un produit (ne perdez pas de vue qu'un carré est un produit). Ce sont donc, écrites sous cette forme, des factorisations. Essayons de factoriser, par exemple :

$$B = x^2 - 16 + (x - 3)(x - 4)$$

Il n'y a pas de facteur commun évident. En revanche, la première partie de l'expression fait intervenir l'identité remarquable

$$x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$$

On peut donc terminer la factorisation :

$$\begin{aligned} B &= (x + 4)(x - 4) + (x - 3)(x - 4) = (x - 4)[(x + 4) + (x - 3)] \\ &= (x - 4)(x + 4 + x - 3) = (x - 4)(2x + 1) \end{aligned}$$

Maintenant, un dernier conseil si les méthodes décrites dans ce paragraphe n'ont pas abouti : *essayez encore une fois !* Et si vraiment ça ne marche pas, alors *développez* l'expression, dans l'espoir de faire apparaître quelque chose d'intéressant. Mais sachez que cette méthode (développer pour factoriser) ne s'applique, au niveau de la seconde, qu'à des cas *très* rares, dont voici un exemple :

$$C = 2x^2 - 6x + 29 + 2(x + 2)(x - 5)$$

Comme vous pouvez le constater, il n'y a pas de facteur commun évident, et  $2x^2 - 6x + 29$  n'est pas le développement d'un produit remarquable. On va donc allègrement développer :

$$\begin{aligned} C &= 2x^2 - 6x + 29 + 2(x^2 - 5x + 2x - 10) \\ &= 2x^2 - 6x + 29 + 2x^2 - 10x + 4x - 20 \\ &= 4x^2 - 12x + 9 \end{aligned}$$

Ouf !  $4x^2 - 12x + 9$  ne pose (presque) pas de problème, puisqu'il s'agit du développement (remarquable) de  $(2x - 3)^2$ .

#### 4.1.4 Solution de l'exercice type n° 1

Aucun facteur commun ne saute aux yeux. La première partie de l'expression fait penser au produit remarquable 2, mais  $18x^2$  et 8 ne sont pas des carrés parfaits. Faut-il se résoudre à tout développer, en attendant un miracle ? Si nos avertissements du paragraphe précédent ne vous ont pas convaincu(e), sachez que le développement de A donne :  $12x^2 - 29x + 14$ , ce qui n'est pas facilement factorisable. Une fois pour toute, rappelez-vous que, lorsqu'il faut factoriser, commencer par développer est une solution extrême, à utiliser avec circonspection.

Il vaut mieux examiner de plus près chacun des éléments de A. Souvent, ces éléments ne sont pas disposés au hasard, et l'ordre dans lequel ils sont écrits peut vous aider. Pourquoi a-t-on écrit séparément  $18x^2 - 24x + 8$  et  $-3x + 2$ , et non pas directement  $18x^2 - 27x + 10$  ? Tout simplement, pour vous faire voir plus facilement le facteur 2 qui se cache dans  $18x^2 - 24x + 8$  ! Regardez bien :  $18x^2 - 24x + 8 = 2(9x^2 - 12x + 4)$  Ceci est déjà plus sympathique, puisque  $(9x^2 - 12x + 4)$  est le développement du produit remarquable  $(3x - 2)^2$ . Or,  $(3x - 2)$  apparaît plusieurs fois dans A, puisque  $6x - 4 = 2(3x - 2)$  et  $-3x + 2 = -(3x - 2)$ . Nous tenons notre facteur commun !

Toutes ces réflexions, vous devez les mener sur votre brouillon. Cependant, une fois que vous avez trouvé un facteur commun, *ne rédigez pas la solution au brouillon*, vous perdriez votre temps ! Écrivez directement :

$$\begin{aligned} A &= 18x^2 - 24x + 8 - (x + 1)(6x - 4) - 3x + 2 \\ &= 2(9x^2 - 12x + 4) - (x + 1)2(3x - 2) - (3x - 2) \\ &= 2(3x - 2)^2 - (x + 1)2(3x - 2) - (3x - 2) \\ &= (3x - 2)[2(3x - 2) - (x + 1)2 - 1] \\ &= (3x - 2)(6x - 4 - 2x - 2 - 1) \\ &= (3x - 2)(4x - 7) \end{aligned}$$

## 4.2 Savoir résoudre algébriquement une équation

### 4.2.1 Exercice type n° 2

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :

$$2x^2 + 4x + 2 = (x + 1)(x + 3)$$

### 4.2.2 Les valeurs interdites

Cette année, et c'est une nouveauté par rapport à la troisième, vous ne devrez pas seulement trouver les *solutions* de l'équation, mais vous devrez aussi déterminer les « valeurs interdites ». Avant de se poser la question : « Est-ce que  $2x^2 + 4x + 2$  et  $(x + 1)(x + 3)$  sont égaux ? », il convient de se demander : « Est-ce que  $2x^2 + 4x + 2$  et  $(x + 1)(x + 3)$  existent ? » Dans l'exercice type, on réalise à partir de  $x$  des sommes et des produits, il n'y a donc pas de problème. Aucune valeur n'est interdite.

### 4.2.3 Équations du premier degré

Vous avez appris en quatrième à résoudre ce type d'équations. Par exemple, pour

$$5x + 2 = 7x + 4$$

on passe le 4 du côté gauche et  $5x$  du côté droit, pour obtenir  $-2 = 2x$ , donc  $-1 = x$ . L'ensemble des solutions ne contient que le réel  $-1$ . On note :

$$S = \{-1\}$$

### 4.2.4 Équations de degré deux ou plus

Il s'agit d'équations mettant en jeu des termes en  $x^2$ ,  $x^3$  ou plus. La technique est *toujours* la même. On fait passer tous les termes du même côté et on factorise l'expression obtenue. Ainsi, pour résoudre par exemple :

$$(x + 2)(2x - 3) = (2x - 3)(5x + 3)$$

on écrit :

$$(x + 2)(2x - 3) - (2x - 3)(5x + 3) = 0$$

soit, en factorisant :

$$(2x - 3)(-4x - 1) = 0$$

On utilise le fait qu'un produit est nul seulement quand l'un (au moins) des facteurs est nul, donc on a soit :  $2x - 3 = 0$  (donc  $x = \frac{3}{2}$ ), soit :  $-4x - 1 = 0$  (donc  $x = -\frac{1}{4}$ ). L'ensemble des solutions s'écrit donc :

$$S = \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{3}{2} \right\}$$

### 4.2.5 Équations avec des fractions

Nous examinons ici les équations où  $x$  apparaît dans les dénominateurs. Il y aura, en général, des valeurs interdites : celles qui annulent les dénominateurs. Par exemple, pour  $\frac{2x + 3}{x + 5} = 1$ , le domaine est

$$D = \mathbb{R} - \{-5\}$$

Beaucoup des ces équations se résolvent simplement à l'aide d'un « produit en croix » :

$$\frac{2x + 3}{x + 5} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3 = x + 5 \Leftrightarrow x = 2$$

d'où :

$$S = \{2\}$$

Pour d'autres, il faut d'abord réduire les fractions au même dénominateur. Par exemple, résolvons :

$$\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x}$$

2, -2 et 0 sont donc interdits. Le dénominateur commun est extrêmement simple. Il s'agit en fait du produit des trois dénominateurs :

$$(x-2)(x+2)x$$

Réduisons les trois fractions :

$$\frac{2}{x-2} = \frac{2x(x+2)}{(x-2)x(x+2)}$$

On obtient finalement :

$$\frac{2x(x+2)}{(x-2)(x+2)x} - \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)x} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)x}$$

A cet endroit, on peut carrément supprimer les dénominateurs. Ceci correspond à multiplier les deux membres par  $(x-2)(x+2)x$ , réel qui n'est pas nul puisqu'on a pris la précaution d'enlever *a priori* les valeurs 2, -2 et 0. D'où :

$$2x(x+2) - x(x-2) = (x-2)(x+2)$$

Passons tout dans le membre de gauche :

$$2x(x+2) - x(x-2) - (x-2)(x+2) = 0$$

Il n'y a pas de facteur commun (non, non !) et pas de produit remarquable à *factoriser*, nous allons donc développer (une fois n'est pas coutume) :

$$2x^2 + 4x - x^2 + 2x - x^2 + 4 = 0$$

soit :

$$6x + 4 = 0, \text{ donc } x = \frac{-2}{3}$$

Conclusion :  $S = \left\{ \frac{-2}{3} \right\}$

### 4.2.6 Solution de l'exercice type n° 2

On passe tout dans le même membre et on factorise :

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 4x + 2 &= (x + 1)(x + 3) \\
 2x^2 + 4x + 2 - (x + 1)(x + 3) &= 0 \\
 2(x^2 + 2x + 1) - (x + 1)(x + 3) &= 0 \\
 2(x + 1)^2 - (x + 1)(x + 3) &= 0 \\
 (x + 1)[2(x + 1) - (x + 3)] &= 0 \\
 (x + 1)(2x + 2 - x - 3) &= 0 \\
 (x + 1)(x - 1) &= 0
 \end{aligned}$$

Donc :  $S = \{-1, +1\}$

## 4.3 Savoir résoudre algébriquement une inéquation

### 4.3.1 Exercice type n° 3

Résoudre l'inéquation :

$$\frac{(x - 4)(3x + 6)}{x + 5} < 0$$

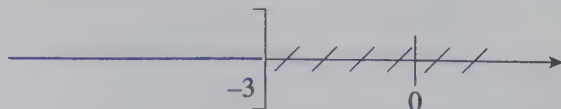
• Lycée Camille Guérin, Poitiers •

### 4.3.2 Premier degré

Pour les inéquations simples du type :  $2x - 3 \geq 5x + 6$ , on procède comme pour résoudre une équation, à ceci près que lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres par un nombre *négatif*, l'inéquation change de sens. On écrit par exemple (après avoir remarqué que le domaine de l'inéquation est simplement  $\mathbb{R}$ ) :

$$\begin{aligned}
 2x - 3 &\geq 5x + 6 \\
 2x - 5x &\geq 6 + 3 \\
 -3x &\geq 9 \\
 x &\leq -3
 \end{aligned}$$

En troisième, on vous demandait une représentation graphique des solutions (ici, on a hachuré la partie qui ne convient pas) :



On vous demande désormais d'indiquer directement l'ensemble des solutions :

$$S = ]-\infty, -3]$$

### 4.3.3 Second degré ou plus

Même méthode que pour les équations : on passe tout dans le même membre et on factorise. Par exemple, pour résoudre :

$$(x - 5)(7x + 3) \leq (x - 5)(2x - 4)$$

on donne le domaine,  $\mathbb{R}$  (c'est-à-dire que l'on recherche *toutes* les solutions réelles, pas seulement, par exemple, positives ou entières), et on écrit :

$$\begin{aligned}(x - 5)(7x + 3) - (x - 5)(2x - 4) &\leq 0 \\(x - 5)[(7x + 3) - (2x - 4)] &\leq 0 \\(x - 5)(7x + 3 - 2x + 4) &\leq 0 \\(x - 5)(5x + 7) &\leq 0\end{aligned}$$

Attention ! Résistez à la tentation de « simplifier » par  $(x - 5)$ , pour écrire directement :  $7x + 3 \leq 2x - 4$ . En effet, vous ne savez rien sur  $x$ , et  $x - 5$  est peut-être négatif, peut-être nul. Ceci signifie que vous devez peut-être changer le sens de l'inéquation en simplifiant par  $x - 5$ . Plutôt que de se lancer dans de grandes discussions du style : « Quand  $x > 5...$  », « Quand  $x < 5...$  », il vaut donc mieux passer tout dans le même membre et factoriser.

On est donc ramené à étudier le signe d'un produit. Vous savez que le signe d'un produit dépend du signe des facteurs. Le signe de  $x - 5$  dépend de la position de  $x$  par rapport à 5, celui de  $5x + 7$  dépend de la position de  $x$  par rapport à  $-\frac{7}{5}$ .

La méthode la plus simple pour faire apparaître le signe de  $(x - 5)(5x + 7)$  est de construire un tableau de signes.

Dans la première ligne, on place *dans l'ordre croissant* les valeurs de  $x$  qui annulent les facteurs. Dans la première colonne, on place les facteurs. On remplit le tableau en plaçant, en face de chaque facteur, son signe. Par exemple, dans la colonne correspondant à  $x \leq -\frac{7}{5}$  et la ligne du facteur  $5x + 7$ , on écrit un signe  $-$  signifiant que  $5x + 7$  est négatif si  $x \leq -\frac{7}{5}$ . On obtient le tableau :

| $x$               | $-\infty$ | $-\frac{7}{5}$ | 5   | $+\infty$ |
|-------------------|-----------|----------------|-----|-----------|
| $x - 5$           | $-$       | $ $            | $-$ | $0$ $+$   |
| $5x + 7$          | $-$       | $0$ $+$        | $ $ | $+$       |
| $(x - 5)(5x + 7)$ | $+$       | $0$            | $-$ | $0$ $+$   |

Il n'est pas toujours facile, surtout au début, de remplir correctement le tableau. C'est en réalité très simple. Pour le premier facteur (ici  $x - 5$ ), il suffit de se souvenir que  $x - 5 \geq 0$  quand  $x \geq 5$ . Pour le signe du produit, vous appliquez la règle des signes vue en quatrième.

Voilà. Nous avons notre tableau de signes. Ne perdons pas de vue ce que nous voulions faire, c'est-à-dire repérer quand le produit  $(x - 5)(5x + 7)$  est négatif ou nul ! Observons le tableau. Dans la ligne de  $(x - 5)(5x + 7)$ , regardons à quelle colonne correspond le

signe moins et les zéros. On obtient directement la réponse :

$$S = \left[ -\frac{7}{5}; 5 \right]$$

#### 4.3.4 Inéquations avec des fractions

Il s'agit de résoudre une inéquation comme :

$$\frac{2x+3}{x+5} \geq 1$$

Tout de suite, le domaine, ou ensemble de définition. A cause du dénominateur, la valeur  $-5$  est interdite, donc l'équation est définie sur  $D = \mathbb{R} - \{-5\}$ .

Cette fois, pas question de faire des produits en croix, puisqu'on ne connaît pas le signe de  $x+5$ . Il faut donc tout réduire au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{x+5} &\geq \frac{x+5}{x+5} \\ \frac{(2x+3) - (x+5)}{x+5} &\geq 0 \\ \frac{x-2}{x+5} &\geq 0 \end{aligned}$$

Vous savez que les signes d'un produit ou d'un quotient obéissent à la même règle, il faut donc établir un tableau de signes :

| $x$               | $-\infty$ | $-5$ | $2$   | $+\infty$ |
|-------------------|-----------|------|-------|-----------|
| $x-2$             | -         |      | - 0 + |           |
| $x+5$             | -         | 0    | +     | +         |
| $\frac{x-2}{x+5}$ | +         |      | - 0 + |           |

Remarquez que la fraction  $\frac{x-2}{x+5}$  n'est pas définie pour  $x = -5$ , donc on n'écrit pas à l'endroit correspondant un zéro, mais une double barre, qui indique que la fraction n'existe pas pour cette valeur de  $x$ . Pour cet exemple, l'ensemble des solutions est :

$$S = ]-\infty; -5[ \cup [2; +\infty[$$

#### 4.3.5 Solution de l'exercice type n° 3

Les facteurs s'annulent en 4,  $-5$ , et  $-2$ . Le domaine de définition est :

$$D = \mathbb{R} - \{-5\}$$

On obtient le tableau de signes suivant :

| $x$                       | $-\infty$ | $-5$  | $-2$  | $4$ | $+\infty$ |
|---------------------------|-----------|-------|-------|-----|-----------|
| $x-4$                     | -         |       | - 0 + |     |           |
| $3x+6$                    | -         | - 0 + |       | +   | +         |
| $x+5$                     | -         | 0     | +     |     | +         |
| $\frac{(x-4)(3x+6)}{x+5}$ | -         |       | + 0 - | 0 + |           |

Conclusion :

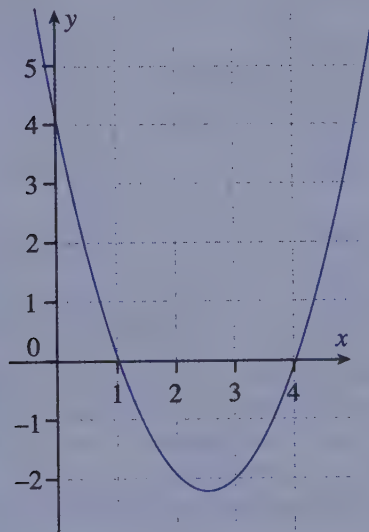
$$S = ]-\infty; -5[ \cup ]-2; 4[$$

## 4.4 Comment résoudre graphiquement une équation ou une inéquation ?

### 4.4.1 Exercice type n° 4

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^2 - 5x + 4$$



1. Résoudre graphiquement l'inéquation :  $f(x) \geq 0$ .
2. Placer sur la même figure la droite d'équation  $y = -3x + 4$
3. En déduire graphiquement les solutions de l'équation  $f(x) = -3x + 4$ .
4. Résoudre graphiquement l'inéquation :  $f(x) < -3x + 4$ .

• Lycée Jean XXIII, Reims •

### 4.4.2 Solution de l'exercice type n° 4

1. On constate sur la figure que la courbe représentative de  $f$  coupe la droite des abscisses pour  $x = 1$  et  $x = 4$ . Entre ces deux points, la courbe est en-dessous de l'axe des abscisses. Les ordonnées des points de la courbe sont donc négatives. En revanche, à droite de 4 (donc pour  $x \in [4; +\infty[$ ) comme à gauche de 1 (donc pour  $x \in ]-\infty; 1]$ ), la courbe de  $f$  est au-dessus de l'axe des abscisses, et on a alors :  $f(x) \geq 0$ . On conclut :

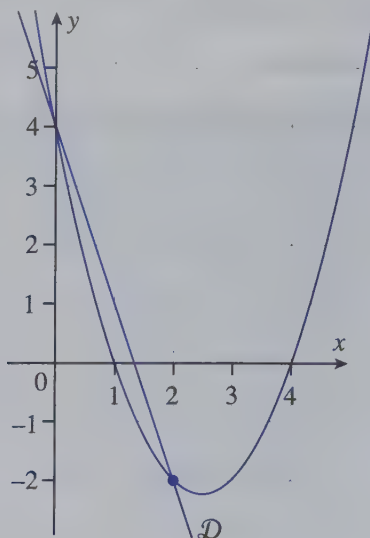
$$S = ]-\infty; 1] \cup [4; +\infty[$$

2. La droite d'équation  $y = -3x + 4$  est également la courbe représentative de la

fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = -3x + 4$$

On calcule facilement deux points, par exemple  $g(0) = 4$ ,  $g(1) = 1$  (ou encore  $g(2) = -2$ ) ce qui permet de tracer la droite sur la figure :



3. On doit chercher pour quels  $x$  on a  $f(x) = g(x)$ . Ces valeurs correspondent aux points communs (ou *points d'intersection*) des courbes représentatives de  $f$  et  $g$ . On lit sur le graphique deux points communs, de coordonnées  $(0, 4)$  et  $(2, -2)$ . Ce sont les valeurs de  $x$  qui nous intéressent :

- le point  $(0, 4)$  est sur les deux courbes, donc  $f(0) = g(0) = 4$  ;
- de même, le point  $(2, -2)$  étant sur les deux courbes :  $f(2) = g(2)$ .

Les solutions de l'équation sont donc 0 et 2 :

$$S = \{0; 2\}$$

4. Pour une même abscisse  $x$ , dire que  $f(x) < g(x)$  signifie que le point de coordonnées  $(x, f(x))$ , qui se trouve sur la courbe de  $f$ , est en-dessous du point de coordonnées  $(x, g(x))$  qui se trouve sur celle de  $g$ .

On cherche sur la figure les abscisses pour lesquelles la courbe de  $f$  est au-dessous de la droite. On voit que c'est le cas pour  $x \in ]0, 2[$  (il faut exclure les points 0 et 2 car l'inégalité demandée est stricte).

On conclut :

$$S = ]0; 2[$$

1 ★

15 min.

Lycée Hoche, Versailles

- Développer  $(3x + \sqrt{2})^3$
- Calculer astucieusement  $X = 875683^2 - (875684 \times 875682)$
- Factoriser le mieux possible :

$$E = (2x - 3)^2 + (3 - 2x)(x - 1) - 6 + 4x$$

$$F = (a + 2)^2 - 4(5a - 3)^2$$

$$G = a^4 - 1$$

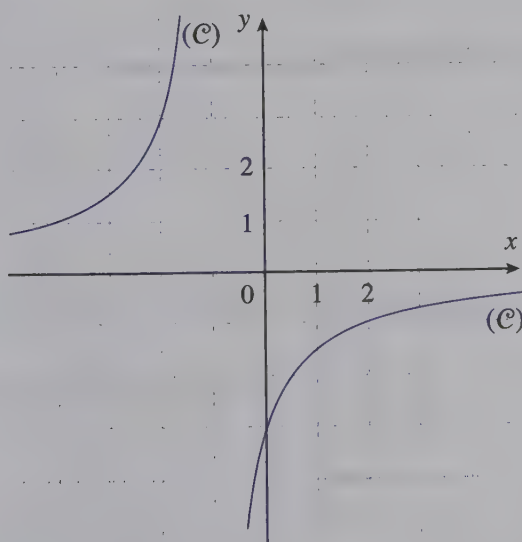
2 ★

20 min.

Lycée Colbert, Paris

La courbe (C) est la représentation graphique de la fonction  $f$ , définie pour tout  $x \neq -1$  par :

$$f(x) = \frac{-3}{x+1}$$



- Déterminer par le calcul l'ensemble des solutions de :

$$\frac{-3}{x+1} \geq 3$$

Indiquer comment le graphique permet de retrouver ces résultats.

2. En utilisant le graphique, donner l'ensemble des réels  $x$  vérifiant :

$$-1 < \frac{-3}{x+1} < 1$$

3. Sur le même dessin, représenter la droite d'équation  $y = 1 - x$ . En déduire graphiquement l'ensemble des solutions de  $\frac{-3}{x+1} \geq 1 - x$ . Retrouver ce résultat par le calcul.

**3** ★  
15 min.

**Lycée Montesquieu, Le Mans**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $(x+6)(x-3) - 2x + 6 \geq 0$

2.  $\frac{x+3}{1-x} \geq 2$

3.  $25x^2 + 4 \geq 0$

4.  $25x^2 - 4 \geq 0$

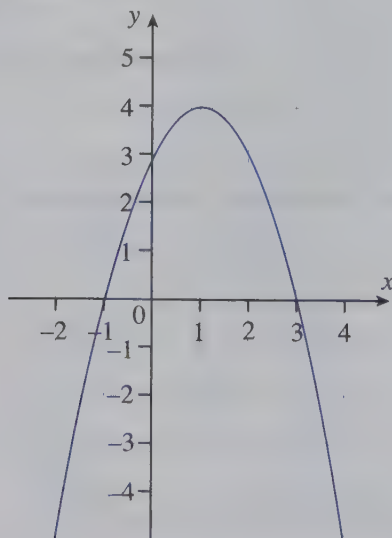
**4** ★  
15 min.

**Lycée Auguste Renoir, Cagnes-sur-Mer**

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

On donne la courbe représentative de  $f$  :



1. Vérifier que  $f(x) = 4 - (x-1)^2$  puis factoriser  $f(x)$ .

2. En déduire la résolution de l'inéquation  $f(x) > 0$ .

3. Résoudre graphiquement  $f(x) > 0$  et vérifier le résultat précédent.

## 5 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Descartes, Antony

15 min.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $x^3 - x^2 \geq 4x - 4$

2.  $\frac{x+2}{x^2-1} < 0$

3.  $x^2 \geq 16x$

## 6 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Carnot, Dijon

10 min.

Résoudre l'inéquation :

$$(2x+5)^2 \leq (3x+2)^2$$

## 7 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Saint-Jean, Limoges

15 min.

Résoudre les inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $(2x+1)^2 - x^2 \geq 0$

2.  $(3x+2)^2 - 2(3x+2)(x+1) + (x+1)^2 \leq 0$

## 8 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Charlemagne, Paris

10 min.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1.  $x^2 + 1 \geq 0$

2.  $|2x - 5| \leq 3$

## 9 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Camille Claudel, Troyes

30 min.

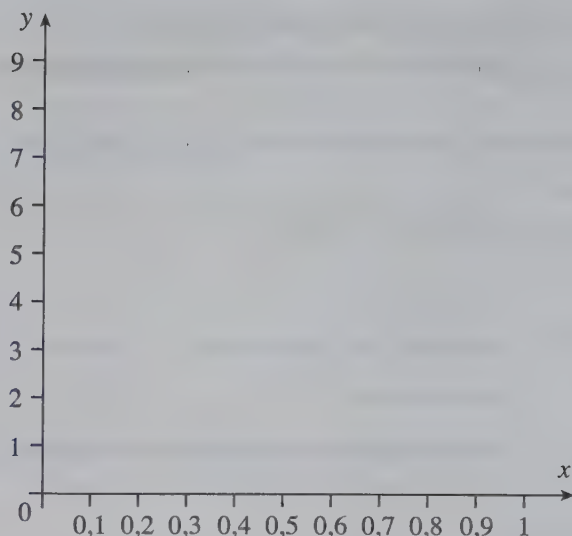
1. (a) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, 1]$  par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Compléter le tableau de valeurs (donner les résultats à 0,01 près) :

| $x$    | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|
| $f(x)$ |     |     |     |     |     |     |     |     |     |   |

(b) Tracer  $\mathcal{C}_f$ , la courbe représentative de  $f$ , sur le graphique ci-dessous.



(c) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par :

$$g(x) = -\frac{8}{\sqrt{2}}x + 4 + \sqrt{2}$$

Comment s'appelle cette fonction ? Quel est son sens de variation ?

(d) Compléter le tableau de valeurs :

|        |   |      |     |
|--------|---|------|-----|
| $x$    | 0 | 0,25 | 0,5 |
| $g(x)$ |   |      |     |

et tracer la courbe représentative de  $g$  dans le même repère que  $\mathcal{C}_f$ .

(e) Résoudre graphiquement l'inéquation  $g(x) > f(x)$  sur  $]0, 1]$ .

2. (a) Montrer que  $g(x) > f(x)$  équivaut sur  $]0, 1]$  à l'inéquation :

$$\frac{8x^2 - 2x(2\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}}{x\sqrt{2}} < 0$$

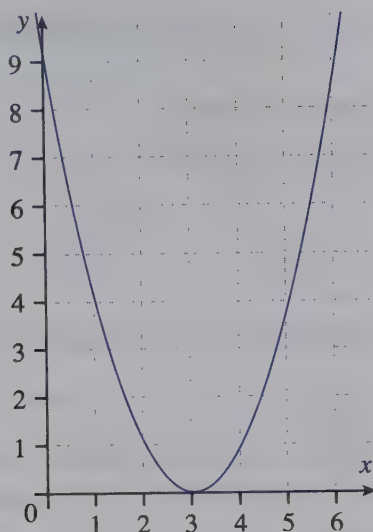
(b) Développer l'expression  $P(x) = -8(x - \frac{1}{4})(\frac{\sqrt{2}}{2} - x)$ .

(c) En déduire les valeurs exactes des solutions de  $g(x) > f(x)$ .

**10** ★ 20 min.

**Lycée Paul Lapie, Courbevoie**

Soit  $f$  la fonction qui à tout nombre réel  $x$  fait correspondre  $f(x)$  tel que  $f(x) = (x - 3)^2$ . On donne sa courbe représentative :



1. Lire sur le graphique les solutions des équations :

(a)  $(x - 3)^2 = 4$

(b)  $(x - 3)^2 = 2$

(c)  $(x - 3)^2 = -1$

2. Résoudre les mêmes équations en détaillant les calculs, nommer  $S$  l'ensemble des solutions.

**11**

★★

20 min.

Lycée Jacques Monod, Clamart

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $(x + 1)(3 - 2x) < 0$  puis  $(x + 1)(2 - x) > x^2 - 1$

2.  $\frac{2x - 7}{1 - 5x} < 3$

**12**

★★

15 min.

Lycée Foch, Rodez

Soit l'expression  $f(x) = 15x^2 + 11x - 12$ .

1. Vérifier que  $f(x) = (3x + 4)(5x - 3)$ .

2. En choisissant la plus appropriée des deux formes de  $f(x)$ , résoudre chacune des équations suivantes où  $x$  est l'inconnue réelle :

(a)  $f(x) = 0$

(b)  $f(x) = 15x^2$

(c)  $f(x) = -12$

(d)  $f(x) = 5x - 3$

(e)  $f(x) = 14x^2 + 11x + 4$

# 13

25 min.

## Lycée Chateaubriand, Rennes

Factoriser chacune des expressions suivantes :

1.  $f(x) = 3(x-2)(x^2+1) - (6x^2-5)(x-2)$
2.  $f(x) = 16a^4 - 9$
3.  $f(x) = x^2 - 2x + 1 - 7(x-1) + (x+2)(1-x)$
4.  $f(x) = (6x-3)^2 - (2x-1)$

# 14

20 min.

## Lycée Victor Duruy, Paris

Deux chauffeurs de taxi pratiquent des tarifs différents :

- Tarif A : 5 € de prise en charge et 0,40 € par kilomètre parcouru.
- Tarif B : pas de frais de prise en charge mais 0,60 € du kilomètre.

1. (a) Un client veut parcourir 8 km. Quel taxi doit-il prendre pour payer le moins cher ?  
(b) Même question pour un client désirant parcourir 30 km.
2. Exprimer  $A(x)$ , prix payé au taxi A et  $B(x)$ , prix payé au taxi B, en fonction du nombre  $x$  de kilomètres parcourus.
3. (a) Dans un repère orthonormal, représenter graphiquement les fonctions  $x \mapsto A(x)$  et  $x \mapsto B(x)$  pour  $0 \leq x \leq 40$ . On note  $\mathcal{D}_A$  et  $\mathcal{D}_B$  leurs représentations respectives.  
(b) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection, et interpréter par une phrase.
4. En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes :  
(a) Pour quelles longueurs de trajets vaut-il mieux prendre le taxi A ?  
(b) Un client a 12 € en poche. Quel taxi doit-il prendre pour aller le plus loin possible ? Quelle distance pourra-t-il ainsi parcourir ?

# 15

15 min.

## Lycée Blaise Pascal, Orsay

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $\frac{5x+3}{4} - \frac{x-9}{3} = \frac{x}{2} + 5$
2.  $(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2 = 0$
3.  $\frac{x-4}{x-5} + \frac{x-6}{x-4} = 2 - \frac{2}{x-4}$

# 16

15 min.

## Lycée Stanislas, Paris

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ .

1.  $x^2 + 5x + 9 < (x - 1)x + 12$

2.  $2 < \frac{x-3}{x-5} < 3$

**17**★★ ————— Lycée Évariste Galois, Sartrouville  
20 min.

Résoudre les inéquations suivantes :

1.  $\frac{3x+1}{4} > \frac{5x+1}{6}$

2.  $(x-4)^2 \leq -1$

3.  $2(x-1) - 3(x+1) > 4(x-2)$

4.  $x(-2x-3)^4 \geq 0$

5.  $\frac{x-1}{4} - 5 \leq \frac{2x-3}{2} + \frac{3}{4}$

**18**★★ ————— Lycée La Fontaine, Paris  
15 min.Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , puis dans  $\mathbb{N}$  les équations :

1.  $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \leq 0$

2.  $(x-2)(x+4) \leq 0$

**19**★★ ————— Lycée Murat, Issoire  
20 min.On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (x + \sqrt{3})^2 - 5$$

1. Développer  $f(x)$ .2. Factoriser  $f(x)$ .3. Donner les valeurs exactes de  $f(\sqrt{2})$ ,  $f(0)$ ,  $f(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ ,  $f(-\sqrt{3})$ .4. Résoudre algébriquement l'équation  $f(x) = 0$ .5. Résoudre algébriquement l'inéquation  $f(x) \geq 0$ .6. Résoudre algébriquement l'inéquation  $f(x) \leq -5$ .7. Résoudre algébriquement l'inéquation  $f(x) \leq -6$ .**20**★★ ————— Lycée Lambert, Mulhouse  
30 min.

Résoudre algébriquement :

1.  $7(2x+4) - 5(4x-3) = \frac{2}{5} - \frac{3x-5}{2}$

2.  $(3x - 2)(2x - 5) + 2(x - 5)(7 - 3x) = 0$

3.  $(5x + 3)(4x - 2) = 2(x - 9)$

4.  $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 = 9(4x - 1)^2$

5.  $(2 - x)(5x + 3) + (x - 2)(3 - x) - (2 - x) = 0$

**21** ★★  
30 min.**Lycée Jean-Baptiste Say, Paris**

Résoudre les inéquations :

1.  $(3x + 1)(2 - 4x) \leq 0$  dans  $\mathbb{R}$ .

2.  $\left(\frac{1}{2}x - 7\right)^2 < (3x + 1)^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

3.  $\frac{-2(x - 1)}{(7 - x)} \geq 0$  dans  $\mathbb{R} - \{7\}$ .

4.  $\frac{x^2}{1 - 2x} < -1$  dans  $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ .

5.  $\frac{x}{x(5 - x)^2} \leq \frac{3x^2}{x(5 - x)^2}$  dans  $\mathbb{R} - \{0; 5\}$ .

**22** ★★★  
30 min.**Lycée Victor Hugo, Poitiers**Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x \neq 2$  par  $f(x) = \frac{3x + 1}{x - 2}$ .

- Étudier la fonction. Construire sa courbe représentative ( $\mathcal{C}$ ) dans un repère orthogonal ( $O, \vec{i}, \vec{j}$ ) après avoir déterminé sa nature.
- Construire dans le même repère, la courbe représentative ( $\mathcal{C}_g$ ) de la fonction  $g$  définie par  $g(x) = x^2 + x - 6$ .
- Résoudre graphiquement :

$$\frac{3x + 1}{x - 2} \leq x^2 + x - 6$$

puis retrouver les résultats par le calcul.

**23** ★★★  
15 min.**Lycée Hélène Boucher, Paris**

1. Montrer que pour tout
- $x \neq -1$
- ,

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + \frac{x^2}{1 + x}$$

2. Montrer que pour tout  $x \geq -\frac{1}{2}$ ,

$$0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 2$$

3. En déduire que, pour  $x \geq -\frac{1}{2}$ ,

$$0 \leq \frac{x^2}{1+x} \leq 2x^2$$

puis que :

$$1-x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1-x+2x^2$$

**24** ★★★  
15 min.

**Lycée Lacordaire, Marseille**

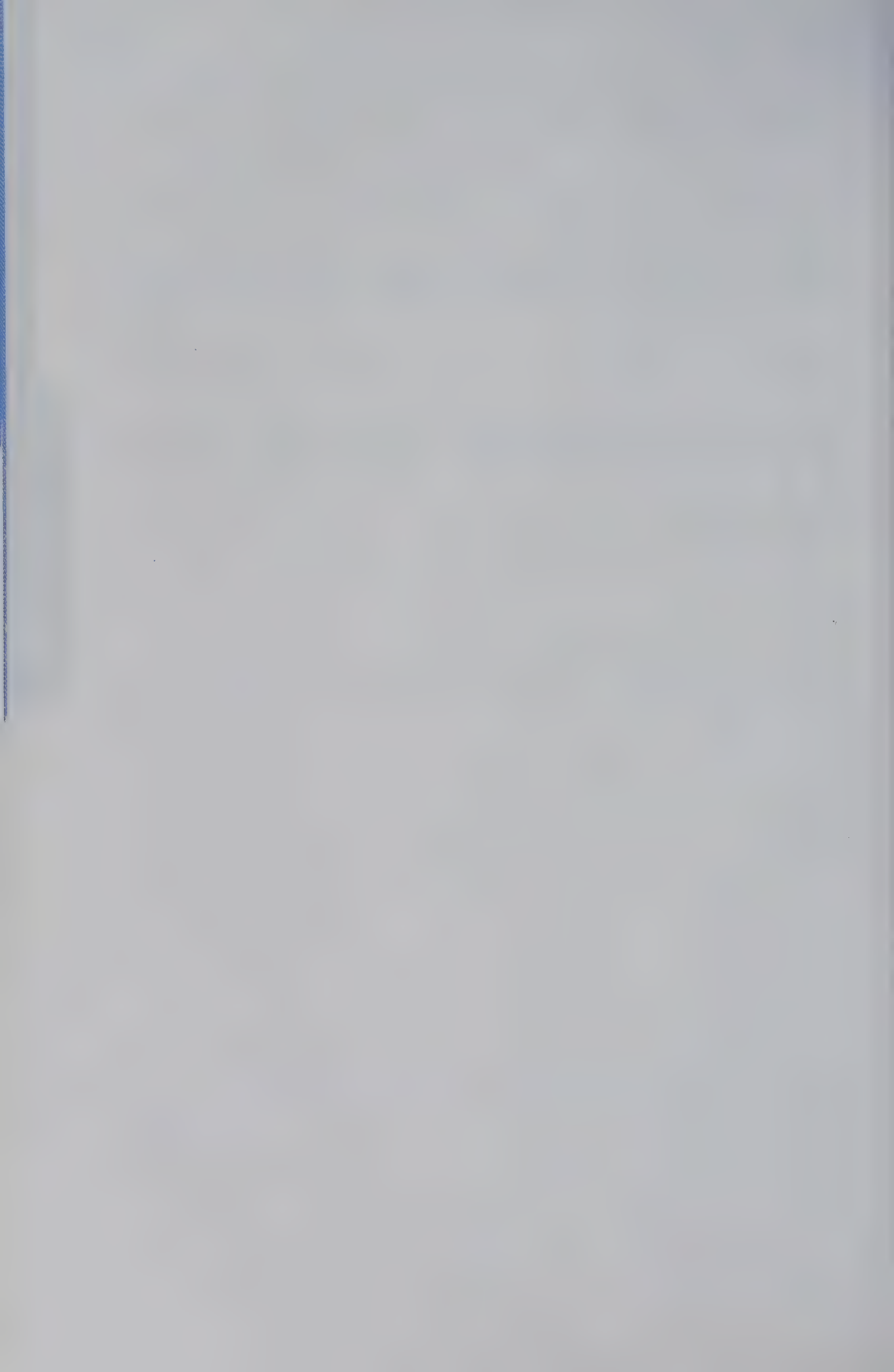
On donne l'expression  $A(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ .

1. Factoriser  $A(x)$  en commençant par écrire que :

$$A(x) = x^3 - x^2 + 4x^2 - 4$$

2. En déduire la résolution dans  $\mathbb{R}$  de l'inéquation :

$$\frac{(x-1)^2 - 2x + 2}{x^3 + 3x^2 - 4} \geq 0$$



## 1 ————— Lycée Hoche, Versailles

1. On développe :

$$\begin{aligned}(3x + \sqrt{2})^3 &= (3x + \sqrt{2})^2 \times (3x + \sqrt{2}) \\ &= (9x^2 + 6x\sqrt{2} + 2) \times (3x + \sqrt{2}) \\ &= 27x^3 + 9x^2\sqrt{2} + 18x^2\sqrt{2} + 12x + 6x + 2\sqrt{2} \\ &= 27x^3 + 27x^2\sqrt{2} + 18x + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

2. Posons  $N = 875683$ . On doit calculer  $X = N^2 - (N + 1)(N - 1)$ , ce qui donne facilement :

$$X = N^2 - (N^2 - 1) = 1$$

3. Le facteur commun  $(2x - 3)$  apparaît dans  $E$  :

$$\begin{aligned}E &= (2x - 3)^2 + (3 - 2x)(x - 1) - 6 + 4x \\ &= (2x - 3)^2 - (2x - 3)(x - 1) + 2(2x - 3) \\ &= (2x - 3)[(2x - 3) - (x - 1) + 2] \\ &= (2x - 3)(2x - 3 - x + 1 + 2) \\ &= (2x - 3)x\end{aligned}$$

$F$  est la différence de deux carrés :

$$\begin{aligned}F &= (a + 2)^2 - 4(5a - 3)^2 \\ &= (a + 2)^2 - [2(5a - 3)]^2 \\ &= [(a + 2) - 2(5a - 3)][(a + 2) + 2(5a - 3)] \\ &= (-9a + 8)(11a - 4)\end{aligned}$$

$G$  est également la différence de deux carrés :

$$G = a^4 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$$

## 2 ————— Lycée Colbert, Paris

1. On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{-3}{1+x} &\geq 3 \\ \Leftrightarrow \frac{-3}{1+x} &\geq \frac{3(1+x)}{1+x}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3 - 3(1+x)}{1+x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3(1+1+x)}{1+x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3(2+x)}{1+x} \geq 0$$

On dresse un tableau de signes :

| $x$                   | $+\infty$ | $-2$ | $-1$ | $+\infty$ |
|-----------------------|-----------|------|------|-----------|
| $2+x$                 |           | $-$  | $0$  | $+$       |
| $-3(2+x)$             |           | $+$  | $0$  | $-$       |
| $x+1$                 |           | $-$  | $-$  | $0$       |
| $\frac{-3(2+x)}{x+1}$ |           | $-$  | $0$  | $+$       |

D'après le tableau, l'ensemble des solutions est donc :

$$S = [-2, -1[$$

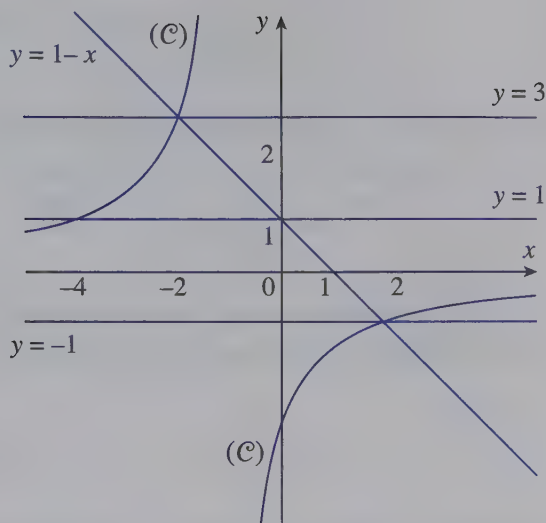
On retrouve graphiquement ce résultat en plaçant sur la figure la droite d'équation  $y = 3$ . Les solutions sont les abscisses des points de  $(\mathcal{C})$  qui sont situés au-dessus de cette droite (voir figure à la fin du corrigé). Il s'agit effectivement des points d'abscisses comprises entre  $-2$  et  $-1$  (on exclut  $-1$  car  $f$  n'est pas définie en  $-1$ ).

2. Sur la figure, on représente les droites horizontales  $y = 1$  et  $y = -1$ . On cherche les abscisses des points de  $(\mathcal{C})$  qui sont dans la bande délimitée par ces deux droites. On lit l'ensemble des solutions sur la figure :

$$S = ]-\infty; -4[ \cup ]2; +\infty[$$

3. On cherche les abscisses des points de la courbe qui sont au-dessus de la droite d'équation  $y = 1 - x$ . On lit sur le dessin l'ensemble des solutions :

$$S = [-2; -1] \cup [2; +\infty[$$



### 3 ————— Lycée Montesquieu, Le Mans

1. On commence par factoriser l'expression :

$$\begin{aligned}
 (x+6)(x-3) - 2x + 6 &\geq 0 \Leftrightarrow (x+6)(x-3) - 2(x-3) \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-3)[(x+6) - 2] \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-3)(x+4) \geq 0
 \end{aligned}$$

On utilise un tableau de signes :

| $x$          | $-\infty$ | $-4$ | $3$ | $+\infty$ |
|--------------|-----------|------|-----|-----------|
| $x+4$        |           | $-$  | $0$ | $+$       |
| $x-3$        |           | $-$  | $0$ | $+$       |
| $(x-3)(x+4)$ |           | $+$  | $-$ | $+$       |

On conclut :

$$S = ]-\infty; -4] \cup [3; +\infty[$$

2. On remarque qu'il faudra exclure la valeur 1 (à cause du dénominateur). Surtout pas de produits en croix, il faut réduire au même dénominateur puis rassembler l'expression dans le même membre :

$$\begin{aligned}
 \frac{x+3}{1-x} &\geq 2 \Leftrightarrow \frac{x+3}{1-x} \geq \frac{2(1-x)}{(1-x)} \\
 &\Leftrightarrow \frac{x+3}{1-x} - \frac{2(1-x)}{(1-x)} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{(x+3) - 2(1-x)}{1-x} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x+3-2+2x}{1-x} \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+1}{1-x} \geq 0$$

Les valeurs importantes sont  $\frac{-1}{3}$  et 1, on utilise un tableau de signes :

| $x$                | $-\infty$ | $\frac{-1}{3}$ | 1 | $+\infty$ |
|--------------------|-----------|----------------|---|-----------|
| $3x+1$             | -         | 0              | + | +         |
| $1-x$              | +         | +              | 0 | -         |
| $\frac{3x+1}{1-x}$ | -         | 0              | + | -         |

On obtient :

$$S = \left[ \frac{-1}{3}, 1 \right[$$

3. Ici, pas de calcul à faire : quel que soit le réel  $x$ , son carré  $x^2$  est positif, donc  $25x^2 + 4 \geq 0$ . L'ensemble des solutions est donc  $\mathbb{R}$ .
4. On reconnaît un produit remarquable :

$$25x^2 - 4 = (5x - 2)(5x + 2)$$

Cette expression s'annule en  $\frac{2}{5}$  et  $-\frac{2}{5}$ , d'où le tableau de signes :

| $x$         | $-\infty$ | $-\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $+\infty$ |
|-------------|-----------|----------------|---------------|-----------|
| $5x - 2$    | -         | 0              | +             | +         |
| $5x + 2$    | -         | 0              | +             | +         |
| $25x^2 - 4$ | +         | 0              | -             | +         |

D'où :

$$S = \left] -\infty; -\frac{2}{5} \right] \cup \left[ \frac{2}{5}; +\infty \right[$$

## 4 ———— Lycée Auguste Renoir, Cagnes-sur-Mer

1. Il suffit de développer :

$$4 - (x - 1)^2 = 4 - (x^2 - 2x + 1) = 4 - x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 2x + 3$$

On reconnaît dans  $f(x) = 4 - (x - 1)^2$  la différence de deux carrés, ce qui permet de factoriser :

$$\begin{aligned} f(x) &= (2 - (x - 1))(2 + (x - 1)) \\ &= (3 - x)(1 + x) \end{aligned}$$

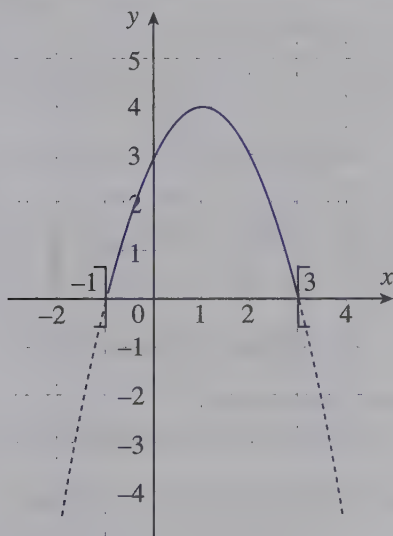
On peut dresser un tableau de signe :

| $x$              | $-\infty$ | $-1$ | $3$ | $+\infty$ |
|------------------|-----------|------|-----|-----------|
| $x + 1$          |           | $-$  | $0$ | $+$       |
| $3 - x$          |           | $+$  | $0$ | $-$       |
| $(3 - x)(x + 1)$ |           | $-$  | $+$ | $-$       |

On conclut :

$$S = ] - 1, 3[$$

2. Pour résoudre graphiquement l'inéquation, on fait apparaître sur la figure les points d'ordonnée strictement positive. Leurs abscisses sont les solutions de l'inéquation.



On retrouve bien l'intervalle  $] - 1, 3[$ .

## 5 ————— Lycée Descartes, Antony

1. Les deux membres étant constitués de sommes et de produits, pas de problème de définition : le domaine est  $\mathbb{R}$ . Il y a un  $x^3$ , il faut être prudent. Vue la façon dont sont disposés les deux membres de l'inéquation, il faut penser à factoriser chacun d'entre eux :

$$x^2(x - 1) \geq 4(x - 1)$$

On passe tout dans le même membre, et on obtient :

$$x^2(x - 1) - 4(x - 1) \geq 0$$

$$(x - 1)(x^2 - 4) \geq 0$$

$$(x - 1)(x - 2)(x + 2) \geq 0$$

On dresse un tableau de signes :

| $x$     | $-\infty$ | $-2$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x - 1$ |           | -    | -   | 0   | +         |
| $x - 2$ |           | -    | -   | -   | 0         |
| $x + 2$ |           | -    | 0   | +   | +         |
| produit |           | -    | 0   | +   | 0         |

On en déduit :

$$S = [-2; 1] \cup [2; +\infty[$$

2. Il faut ôter de l'ensemble de définition les valeurs qui annulent le dénominateur. Factorisons celui-ci :  $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ . L'inéquation est donc définie sur  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ . Il ne reste qu'à étudier le signe de  $\frac{x + 2}{(x - 1)(x + 1)}$  :

| $x$                            | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|--------------------------------|-----------|------|------|-----|-----------|
| $x - 1$                        |           | -    | -    | -   | 0         |
| $x + 1$                        |           | -    | -    | 0   | +         |
| $x + 2$                        |           | -    | 0    | +   | +         |
| $\frac{x + 2}{(x - 1)(x + 1)}$ |           | -    | 0    | +   | +         |

On en déduit :

$$S = ]-\infty; -2[ \cup ]-1; 1[$$

3. On passe  $16x$  à gauche et on factorise :

$$x^2 - 16x \geq 0 \Leftrightarrow x(x - 16) \geq 0$$

En s'aidant au besoin d'un tableau de signes, on obtient :

$$S = ]-\infty; 0] \cup [16; +\infty[$$

## 6 ————— Lycée Carnot, Dijon

Pour résoudre cette inéquation, on passe tout dans le même membre et on factorise :

$$(2x + 5)^2 - (3x + 2)^2 \leq 0$$

$$\left((2x + 5) + (3x + 2)\right)\left((2x + 5) - (3x + 2)\right) \leq 0$$

$$(5x + 7)(-x + 3) \leq 0$$

Dressons un tableau de signes :

| $x$                | $-\infty$ | $-\frac{7}{5}$ | $3$ | $+\infty$ |
|--------------------|-----------|----------------|-----|-----------|
| $5x + 7$           |           | -              | 0   | +         |
| $-x + 3$           |           | +              | +   | 0         |
| $(5x + 7)(-x + 3)$ |           | -              | 0   | -         |

On en déduit :

$$S = \left] -\infty; -\frac{7}{5} \right] \cup [3; +\infty[$$

## 7 ————— Lycée Saint-Jean, Limoges

1.

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 - x^2 &\geq 0 \\ ((2x+1)+x)((2x+1)-x) &\geq 0 \\ (3x+1)(x+1) &\geq 0\end{aligned}$$

Utilisez éventuellement un tableau de signes pour trouver :

$$S = ]-\infty, -1] \cup [-\frac{1}{3}, +\infty[$$

2. Piège !!! Il s'agit en fait du développement du produit remarquable :

$$[(3x+2)-(x+1)]^2$$

C'est un carré, il n'est donc négatif (au sens large) que lorsqu'il vaut zéro. D'où :

$$(3x+2)-(x+1)=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Conclusion :  $S = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$ .

## 8 ————— Lycée Charlemagne, Paris

1. La somme de deux nombres positifs est toujours positive, donc  $S = \mathbb{R}$ .

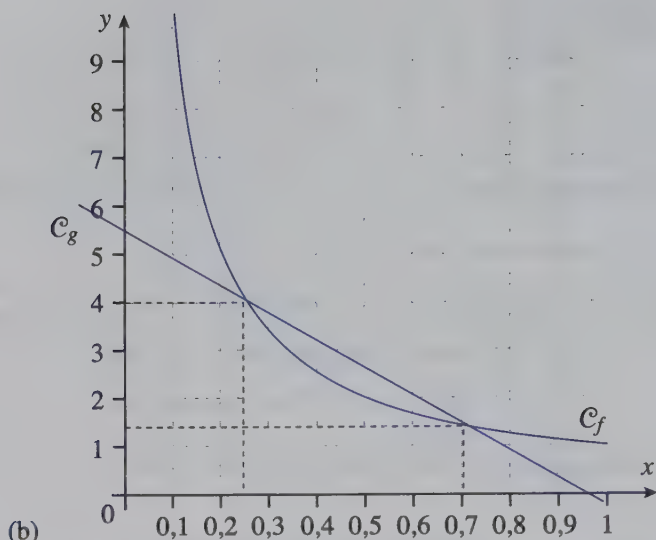
2. En divisant par 2, on obtient  $|x - \frac{5}{2}| \leq \frac{3}{2}$ , donc

$$S = \left[ \frac{5}{2} - \frac{3}{2}, \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \right] = [1, 4]$$

## 9 ————— Lycée Camille Claudel, Troyes

1. (a)

|        |     |     |      |     |     |      |      |      |      |   |
|--------|-----|-----|------|-----|-----|------|------|------|------|---|
| $x$    | 0,1 | 0,2 | 0,3  | 0,4 | 0,5 | 0,6  | 0,7  | 0,8  | 0,9  | 1 |
| $f(x)$ | 10  | 5   | 3,33 | 2,5 | 2   | 1,67 | 1,43 | 1,25 | 1,11 | 1 |



- (c) Ne vous laissez pas éblouir par tous ces radicaux.  $g$  est une simple fonction... affine, de la forme  $g(x) = ax + b$ . Ici  $a = -\frac{8}{\sqrt{2}}$  et  $b = 4 + \sqrt{2}$ . Comme le coefficient directeur  $a$  est strictement négatif, la fonction  $g$  est strictement décroissante. Sa courbe représentative  $C_g$  est une droite (c'est pour cela que l'on vous demande de calculer seulement trois points ; en fait, deux suffiraient).

(d)

| $x$    | 0                          | 0,25 | 0,5                        |
|--------|----------------------------|------|----------------------------|
| $g(x)$ | $4 + \sqrt{2} \simeq 5,41$ | 4    | $4 - \sqrt{2} \simeq 2,59$ |

- (e) Les courbes  $C_f$  et  $C_g$  se coupent en deux points. Le premier a visiblement pour ordonnée 4. Son abscisse se trouve dans le tableau de valeurs de  $g$  : elle vaut 0,25. (On peut se contenter de lire cette abscisse sur le graphique).

Le deuxième point d'intersection a pour abscisse 0,7 (l'ordonnée n'a pas d'importance). Si vous avez fait un dessin très précis, vous pouvez vous rendre compte que l'abscisse de ce point d'intersection est très légèrement plus grande que 0,7. Mais ne trichez pas (le calcul exact est fait à la fin de l'exercice) !

La lecture graphique donne 0,25 et 0,7 comme abscisses pour les points d'intersection.

La courbe  $C_f$  passe en-dessous de la droite  $C_g$  entre ces deux points. On obtient pour ensemble des solutions de  $g(x) > f(x)$  :

$$S = ]0,25 ; 0,7[$$

2. (a) On calcule :

$$\begin{aligned} g(x) > f(x) &\Leftrightarrow -\frac{8}{\sqrt{2}}x + 4 + \sqrt{2} > \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{-8x + 4\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{x} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{-8x^2 + 4x\sqrt{2} + 2x}{x\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{x\sqrt{2}} > 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{-8x^2 + 4x\sqrt{2} + 2x - \sqrt{2}}{x\sqrt{2}} > 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{-8x^2 + 2x(2\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2}}{x\sqrt{2}} > 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{8x^2 - 2x(2\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}}{x\sqrt{2}} < 0
 \end{aligned}$$

(b) On développe :

$$\begin{aligned}
 P(x) &= -8\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right) \\
 &= (-8x + 2)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right) \\
 &= 8x^2 - 8x\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} - 2x \\
 &= 8x^2 - 4x\sqrt{2} - 2x + \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

On reconnaît dans :

$$P(x) = 8x^2 - 2x(2\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}$$

le numérateur de :

$$\frac{8x^2 - 2x(2\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}}{x\sqrt{2}}$$

(c) L'inéquation  $g(x) > f(x)$  devient donc :

$$\frac{-8\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)}{x\sqrt{2}} < 0$$

Ne perdons pas de vue que cette inéquation est à résoudre sur  $]0, 1]$ . On a donc  $x\sqrt{2} > 0$ , et on peut simplifier l'inéquation en :

$$-8\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right) < 0$$

L'expression s'annule pour  $x = \frac{1}{4}$  et  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Il s'agit des abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  :  $\frac{1}{4} = 0,25$  et  $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,71$ .

On dresse un tableau de signes :

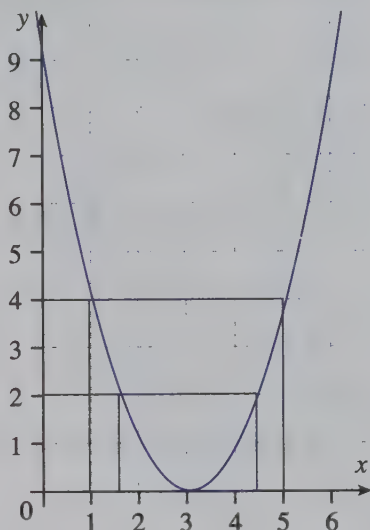
| $x$                              | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 |
|----------------------------------|---|---------------|----------------------|---|
| $-8\left(x - \frac{1}{4}\right)$ | + | 0             | -                    | - |
| $\frac{\sqrt{2}}{2} - x$         | + | +             | 0                    | - |
| $P(x)$                           | + | 0             | -                    | + |

D'après le tableau :

$$S = \left] \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$$

## 10 ————— Lycée Paul Lapie, Courbevoie

1. On détermine sur la figure les points d'ordonnées 4, 2 ou -1.



- (a) Il y a deux points d'ordonnée 4, d'abscisses : 1 et 5.
- (b) Il y a deux points d'ordonnée 2. L'un a une abscisse comprise entre 1 et 2, l'autre a une abscisse comprise entre 4 et 5.
- (c) Aucun point de la courbe n'a une ordonnée négative.

2. (a)

$$\begin{aligned}
 (x-3)^2 &= 4 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 4 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-3)^2 - 2^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-3-2)(x-3+2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-5)(x-1) = 0
 \end{aligned}$$

On a donc deux solutions :

$$S = \{1; 5\}$$

(b) De la même façon :

$$\begin{aligned}
 (x-3)^2 &= 2 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-3)^2 - \sqrt{2}^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2}) = 0
 \end{aligned}$$

D'où :

$$S = \{3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\}$$

(c) Un carré étant toujours positif ou nul, l'équation :

$$(x - 3)^2 = -1$$

n'a pas de solution et  $S = \emptyset$ .

## 11 ————— Lycée Jacques Monod, Clamart

1. Pour vérifier le signe d'un produit, on peut utiliser un tableau de signes :

| $x$               | $+\infty$ | $-1$ | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|-------------------|-----------|------|---------------|-----------|
| $x + 1$           |           | $-$  | $0$           | $+$       |
| $3 - 2x$          | $+$       | $+$  | $0$           | $-$       |
| $(x + 1)(3 - 2x)$ | $-$       | $0$  | $+$           | $-$       |

On lit dans le tableau l'ensemble des solutions de  $(x + 1)(3 - 2x) < 0$  :

$$S = ]-\infty, -1[ \cup \left] \frac{3}{2}, +\infty \right[$$

Résolution de  $(x + 1)(2x - 1) > x^2 - 1$ .

Rappelez-vous le grand principe : ne jamais développer, à moins de ne pas pouvoir faire autrement. Ici, le produit remarquable  $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$  vous tend les bras, et il n'y a plus qu'à factoriser par  $(x + 1)$  :

$$(x + 1)(2 - x) > (x - 1)(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(2 - x) - (x - 1)(x + 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(3 - 2x) > 0$$

Ça devrait vous rappeler quelque chose... D'après le tableau de signes ci-dessus, l'ensemble des solutions est :

$$S' = \left] -1, \frac{3}{2} \right[$$

2. On résout, non sur  $\mathbb{R}$ , mais sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{5} \right\}$  à cause du dénominateur. Si vous avez envie d'effectuer des « produits en croix », résistez à vos pulsions : vous ne connaissez pas le signe du dénominateur, et donc on ne sait pas ce qui arrivera au sens de l'inégalité après multiplication (en fait, on peut faire une discussion, mais c'est assez lourd). La meilleure méthode est une réduction au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{2x - 7}{1 - 5x} < 3 &\Leftrightarrow \frac{2x - 7}{1 - 5x} < \frac{3 - 15x}{1 - 5x} \\ &\Leftrightarrow \frac{2x - 7}{1 - 5x} - \frac{3 - 15x}{1 - 5x} < 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-7)-(3-15x)}{1-5x} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{17x-10}{1-5x} < 0$$

On dresse un tableau de signes. Pour connaître l'ordre des valeurs importantes :  $\frac{10}{17}$  et  $\frac{1}{5}$ , vous pouvez vous référer à votre machine, ou (mieux !), utiliser les produits en croix (ici, vous connaissez les signes) :

$$5 \times 10 > 17 \text{ donc } \frac{10}{17} > \frac{1}{5}$$

Voici le tableau de signes :

| $x$                       | $+\infty$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{10}{17}$ | $+\infty$ |
|---------------------------|-----------|---------------|-----------------|-----------|
| $17x - 10$                | $-$       | $-$           | $0$             | $+$       |
| $1 - 5x$                  | $+$       | $0$           | $-$             | $-$       |
| $\frac{17x - 10}{1 - 5x}$ | $-$       | $+$           | $0$             | $-$       |

L'ensemble des solutions est donc :

$$S = ]-\infty, \frac{1}{5}[ \cup ]\frac{10}{17}, +\infty[$$

## 12 ————— Lycée Foch, Rodez

1. Il suffit de développer l'expression :

$$(3x+4)(5x-3) = 15x^2 - 9x + 20x - 12 = 15x^2 + 11x - 12 = f(x)$$

2. (a)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow (3x+4)(5x-3) = 0$ . Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, donc  $3x+4=0$  ou  $5x-3=0$ . On obtient les deux solutions :

$$S = \left\{ \frac{-4}{3}, \frac{3}{5} \right\}$$

(b)  $f(x) = 15x^2 \Leftrightarrow 15x^2 + 11x - 12 = 15x^2 \Leftrightarrow 11x - 12 = 0$ . D'où une seule solution :

$$S = \left\{ \frac{12}{11} \right\}$$

(c)

$$f(x) = -12 \Leftrightarrow 15x^2 + 11x - 12 = -12 \Leftrightarrow 15x^2 + 11x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(15x + 11) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, d'où  $x = 0$  ou  $15x + 11 = 0$ . Il vient :

$$S = \left\{ 0, \frac{-11}{15} \right\}$$

- (d) On reconnaît la présence de  $5x - 3$  des deux côtés du signe égale, il faut donc factoriser par  $5x - 3$  :

$$\begin{aligned}
 f(x) = 5x - 3 &\Leftrightarrow (3x + 4)(5x - 3) = 5x - 3 \\
 &\Leftrightarrow (3x + 4)(5x - 3) - (5x - 3) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (5x - 3)[(3x + 4) - 1] = 0 \\
 &\Leftrightarrow (5x - 3)(3x + 3) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 3(5x - 3)(x + 1) = 0
 \end{aligned}$$

Là encore, on utilise le résultat sur les produits nuls, d'où  $5x - 3 = 0$  ou  $x + 1 = 0$ . Il vient :

$$S = \left\{-1, \frac{3}{5}\right\}$$

(e)

$$\begin{aligned}
 f(x) = 14x^2 + 11x + 4 &\Leftrightarrow 15x^2 + 11x - 12 = 14x^2 + 11x + 4 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - 4)(x + 4) = 0 \text{ (produit remarquable)}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$S = \{-4, +4\}$$

## 13 ————— Lycée Chateaubriand, Rennes

1.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 3(x - 2)(x^2 + 1) - (6x^2 - 5)(x - 2) \\
 &= (x - 2)[3(x^2 + 1) - (6x^2 - 5)] \\
 &= (x - 2)[3x^2 + 3 - 6x^2 + 5] \\
 &= (x - 2)[-3x^2 + 8] \\
 &= (x - 2)(\sqrt{8} - x\sqrt{3})(\sqrt{8} + x\sqrt{3})
 \end{aligned}$$

2.

$$16a^4 - 9 = (4a^2 - 3)(4a^2 + 3) = (2a - \sqrt{3})(2a + \sqrt{3})(4a^2 + 3)$$

3. On utilise le produit remarquable :  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ . Il vient :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 - 2x + 1 - 7(x - 1) + (x + 2)(1 - x) \\
 &= (x - 1)^2 - 7(x - 1) + (x + 2)(1 - x) \\
 &= (x - 1)[(x - 1) - 7 - (x + 2)] \\
 &= (x - 1)[x - 1 - 7 - x - 2] \\
 &= -10(x - 1)
 \end{aligned}$$

Remarque : Bizarrement, on obtient le même résultat en développant :

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 7x + 7 + x + 2 - x^2 - 2x = -10x + 10 = -10(x - 1)$$

Mais c'est exceptionnel ! Ça marche seulement parce que les coefficients des  $x^2$  se compensent. Le simple développement échoue, par exemple, si on modifie un peu la formule, par exemple :

$$x^2 - 2x + 1 - 7(x - 1) + (3x + 2)(1 - x) = -2x^2 - 8x + 10 = ??$$

Alors que la factorisation par  $(x - 1)$  donne :

$$x^2 - 2x + 1 - 7(x - 1) - (3x + 2)(x - 1) = -2(x - 1)(5 + x)$$

4. Pour ne pas tomber dans le piège, il faut se souvenir de  $(ab)^2 = a^2b^2$ . Comme  $6x - 3 = 3(2x - 1)$ , on aura  $(6x - 3)^2 = 9(2x - 1)^2$  (et non pas  $3(2x - 1)^2$  !). Les calculs donnent :

$$\begin{aligned} f(x) &= (6x - 3)^2 - (2x - 1) \\ &= 9(2x - 1)^2 - (2x - 1) \\ &= (2x - 1)[9(2x - 1) - 1] \\ &= (2x - 1)(18x - 9 - 1) \\ &= (2x - 1)(18x - 10) \\ &= 2(2x - 1)(9x - 5) \end{aligned}$$

## 14 ————— Lycée Victor Duruy, Paris

1. (a) Avec le tarif A, 8 km coûtent :

$$5 + 8 \times 0,40 = 5 + 3,20 = 8,20 \text{ €}$$

Avec le tarif B, le même trajet revient à :  $8 \times 0,60 = 4,80 \text{ €}$ . Il vaut donc mieux utiliser le taxi B.

- (b) Pour 30 km, le tarif A coûte :

$$5 + 30 \times 0,40 = 5 + 12 = 17 \text{ €}$$

alors que le tarif B revient à :  $30 \times 0,60 = 18 \text{ €}$ . Il vaut donc mieux prendre le taxi A.

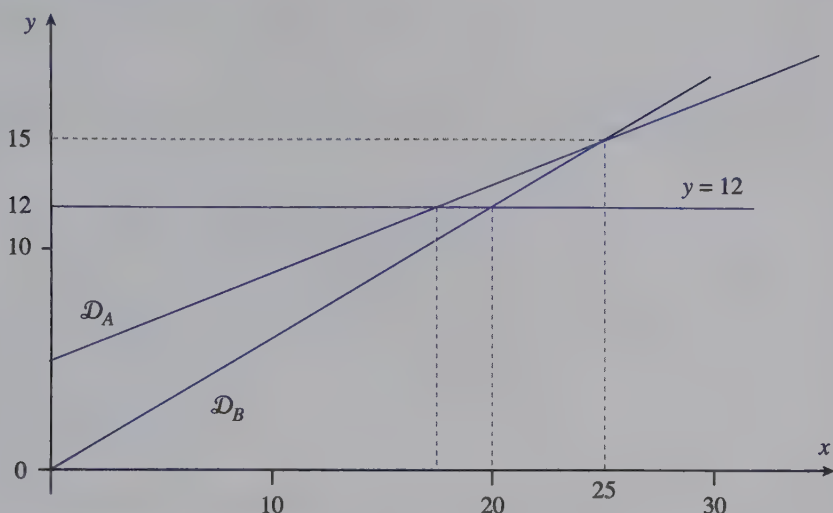
2. Dans le cas général, pour  $x$  kilomètres, le tarif A revient à :

$$A(x) = 5 + 0,40x$$

et le tarif B :

$$B(x) = 0,60x$$

3. (a) Il s'agit de deux fonctions affines (la seconde est même linéaire), donc  $\mathcal{D}_A$  et  $\mathcal{D}_B$  sont deux droites. D'après nos calculs,  $\mathcal{D}_A$  passe par le point de coordonnées (30, 17) et, par exemple (0, 5) ;  $\mathcal{D}_B$  passe par le point de coordonnées (30, 18) et (0, 0). On obtient la représentation :



(b) Les coordonnées de l'intersection sont données par le système :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} y = 5 + 0,40.x \\ y = 0,60.x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,60.x = 5 + 0,40.x \\ y = 0,60.x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,20x = 5 \\ y = 0,60.x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{0,20} = 25 \\ y = 0,60 \times 25 = 15 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Pour 25 km, les deux tarifs sont équivalents (on paiera 15 € dans les deux cas).

4. (a) À droite du point d'intersection (c'est-à-dire pour des trajets de plus de 25 km), la droite  $\mathcal{D}_A$  est en-dessous de la droite  $\mathcal{D}_B$ , le taxi A est donc moins cher.

(b) On utilise la droite horizontale, d'équation  $y = 12$  pour lire sur le graphique, pour chaque tarif, les distances correspondant à 12 €. La droite horizontale coupe  $\mathcal{D}_A$  à gauche du point où elle coupe  $\mathcal{D}_B$ . On parcourt donc plus de kilomètres avec le tarif B. D'après le graphique, le tarif B permet de parcourir 20 kilomètres. C'est moins de 25 : on est bien dans le domaine où le tarif B est moins cher (plus de kilomètres pour le même prix).

## 15 ————— Lycée Blaise Pascal, Orsay

1.

$$\begin{aligned}
 \frac{5x+3}{4} - \frac{x-9}{3} &= \frac{x}{2} + 5 \\
 \frac{15x+9}{12} - \frac{4x-36}{12} &= \frac{6x}{12} + \frac{60}{12} \\
 15x+9-4x+36 &= 6x+60
 \end{aligned}$$

$$5x = 15$$

$$x = 3$$

L'ensemble des solutions est :  $S = \{3\}$ .

2.

$$(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2 = 0$$

$$\left((4x^2 - 3x - 18) + (4x^2 + 3x)\right)\left((4x^2 - 3x - 18) - (4x^2 + 3x)\right) = 0$$

$$(4x^2 - 3x - 18 + 4x^2 + 3x)(4x^2 - 3x - 18 - 4x^2 - 3x) = 0$$

$$(8x^2 - 18)(-6x - 18) = 0$$

$$2(4x^2 - 9)(-6)(x + 3) = 0$$

$$(-12)(2x - 3)(2x + 3)(x + 3) = 0$$

Un produit de facteurs est nul quand l'un des facteurs est nul. On obtient l'ensemble de solutions :  $S = \left\{-3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

3. Il faut déjà remarquer que les valeurs 4 et 5, qui annulent les dénominateurs, ne sont pas autorisées...

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{x-5} + \frac{x-6}{x-4} &= 2 - \frac{2}{x-4} \Rightarrow \frac{x-4}{x-5} = -\frac{x-6}{x-4} + 2 - \frac{2}{x-4} \\ &= -\frac{x-6}{x-4} + \frac{2x-8}{x-4} - \frac{2}{x-4} \\ &= \frac{-x+6+2x-8-2}{x-4} \\ &= \frac{x-4}{x-4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x-4 = x-5$$

$$\Rightarrow -4 = -5$$

Ceci ne peut visiblement pas être vrai, il n'y a pas de solution :  $S = \emptyset$

## 16 ————— Lycée Stanislas, Paris

1.

$$x^2 + 5x + 9 < (x-1)x + 12$$

$$x^2 + 5x + 9 < x^2 - x + 12$$

$$5x + x < 12 - 9$$

$$6x < 3$$

$$x < \frac{1}{2}$$

L'ensemble des solutions est donc :  $S = ]-\infty; \frac{1}{2}[$

2. Il faut d'abord résoudre chaque partie de l'inéquation indépendamment, après avoir remarqué que la valeur 5 n'est pas autorisée.

$$\begin{aligned}
 2 &< \frac{x-3}{x-5} \\
 \frac{2x-10}{x-5} &< \frac{x-3}{x-5} \\
 \frac{2x-10}{x-5} - \frac{x-3}{x-5} &< 0 \\
 \frac{2x-10-x+3}{x-5} &< 0 \\
 \frac{x-7}{x-5} &< 0
 \end{aligned}$$

On construit un tableau de signes :

| $x$               | $-\infty$ | 5   | 7     | $+\infty$ |
|-------------------|-----------|-----|-------|-----------|
| $x-7$             | -         | -   | 0 +   | +         |
| $x-5$             | -         | 0 + | +     | +         |
| $\frac{x-7}{x-5}$ | +         |     | - 0 + | +         |

La première inégalité n'est donc vérifiée que si :  $5 < x < 7$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{x-3}{x-5} &< 3 \\
 \frac{x-3}{x-5} &< \frac{3x-15}{x-5} \\
 0 &< \frac{3x-15}{x-5} - \frac{x-3}{x-5} \\
 0 &< \frac{3x-15-x+3}{x-5} \\
 0 &< \frac{2x-12}{x-5} \\
 0 &< \frac{x-6}{x-5}
 \end{aligned}$$

Là encore, on a le tableau de signes suivant :

| $x$                   | $-\infty$ | 5     | 6     | $+\infty$ |
|-----------------------|-----------|-------|-------|-----------|
| $x - 6$               |           | -     | - 0 + |           |
| $x - 5$               |           | - 0 + |       | +         |
| $\frac{x - 6}{x - 5}$ |           | +     | - 0 + |           |

La deuxième inégalité n'est vérifiée que si :  $x < 5$  ou  $x > 6$

Les deux inégalités ne sont donc vérifiées en même temps que si  $x > 6$  et  $x < 7$ , donc l'ensemble des solutions est :

$$S = ]6; 7[$$

## 17 ————— Lycée Évariste Galois, Sartrouville

1.

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{4} > \frac{5x+1}{6} &\Leftrightarrow \frac{3x+1}{2} > \frac{5x+1}{3} \\ &\Leftrightarrow 9x+3 > 10x+2 \\ &\quad \text{(en effectuant les produits en croix)} \\ &\Leftrightarrow 1 > x \end{aligned}$$

D'où  $S = ]-\infty, 1[$ .

2. Un carré, positif, ne peut jamais être plus petit que  $-1$ , il n'y a donc pas de solution.  
 $S = \emptyset$ .

3. On développe :

$$\begin{aligned} 2x - 2 - 3x - 3 &> 4x - 8 \\ 2x - 3x - 4x &> 2 + 3 - 8 \\ -5x &> -3 \\ x &< \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } S = \left] -\infty, \frac{3}{5} \right[$$

4.  $(-2x - 3)^4$  est toujours positif. S'il n'est pas nul, il faut que  $x$  soit positif pour que le produit  $x(-2x - 3)^4$  soit supérieur à 0. Si  $(-2x - 3)^4 = 0$ , c'est que  $-2x - 3 = 0$ , et donc  $x = -\frac{3}{2}$ . On obtient :

$$S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\} \cup [0, +\infty[$$

5. On réduit toutes les fractions au dénominateur 4 :

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{4} - \frac{20}{4} &\leq \frac{4x-6}{4} + \frac{3}{4} \\ x-1-20 &\leq 4x-6+3 \\ -21+6-3 &\leq 4x-x \\ -18 &\leq 3x \\ -6 &\leq x\end{aligned}$$

D'où :  $S = [-6, +\infty[$ .

18 **Lycée La Fontaine, Paris**

1. Au vu des dénominateurs, l'ensemble de définition s'écrit :  $D = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ . On résout :

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{[(x+1) - (x-1)][(x+1) + (x-1)]}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2 \cdot 2x}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4x}{(x-1)(x+1)} \leq 0\end{aligned}$$

Avec l'aide d'un tableau de signes :

| $x$                     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|-------------------------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $4x$                    | -         | -    | 0   | +   | +         |
| $x-1$                   | -         | -    | -   | 0   | +         |
| $x+1$                   | -         | 0    | +   | +   | +         |
| $\frac{4x}{(x-1)(x+1)}$ | -         | +    | 0   | -   | +         |

On obtient pour cette première inéquation :

$$S_1 = ]-\infty, -1[ \cup ]0, 1[$$

La seule solution dans  $\mathbb{N}$  est 0. ( $S'_1 = \{0\}$ ).

2. Pour la seconde inéquation un tableau de signes plus petit permet de trouver sans problème :

$$S_2 = [-4, 2]$$

Les seules solutions dans  $\mathbb{N}$  sont 0, 1 et 2 :

$$S'_2 = \{0; 1; 2\}$$

# 19

Lycée Murat, Issoire

1.  $f(x) = x^2 + 2x\sqrt{3} + 3 - 5 = x^2 + 2x\sqrt{3} - 2.$

2. On reconnaît une expression du type  $A^2 - B^2$  :

$$f(x) = (x + \sqrt{3} + \sqrt{5})(x + \sqrt{3} - \sqrt{5})$$

3. On utilise la forme développée pour calculer :

- $f(\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{6} - 2 = 2\sqrt{6}.$
- $f(0) = -2.$

La forme factorisée est plus adaptée pour calculer :

$$f(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = (\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) = 0$$

Enfin, la forme de l'énoncée permet de voir facilement :

$$f(-\sqrt{3}) = -5$$

4. On doit résoudre :

$$(x + \sqrt{3} + \sqrt{5})(x + \sqrt{3} - \sqrt{5}) = 0$$

Un produit s'annule lorsque l'un au moins des facteurs est nul, d'où deux solutions :

$$S = \{\sqrt{5} - \sqrt{3}; -\sqrt{5} - \sqrt{3}\}$$

5. On se sert de l'étude précédente pour dresser un tableau de signes. On note au passage que  $-\sqrt{5} - \sqrt{3} < \sqrt{5} - \sqrt{3}$  (car  $-\sqrt{5} < \sqrt{5}$ ).

| $x$                       | $-\infty$ | $-\sqrt{5} - \sqrt{3}$ | $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|---------------------------|-----------|------------------------|-----------------------|-----------|
| $x + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ | -         | 0                      | +                     | +         |
| $x + \sqrt{3} - \sqrt{5}$ | -         | -                      | 0                     | +         |
| $f(x)$                    | +         | 0                      | -                     | +         |

D'après le tableau :

$$S = ]-\infty, -\sqrt{5} - \sqrt{3}] \cup [\sqrt{5} - \sqrt{3}, +\infty[$$

6. L'inéquation  $(x + \sqrt{3})^2 - 5 \leq -5$  s'écrit :

$$(x + \sqrt{3})^2 \leq 0$$

Le carré d'un réel est toujours positif ou nul. On ne peut avoir  $(x + \sqrt{3})^2 \leq 0$  qu'à la seule condition :  $(x + \sqrt{3})^2 = 0$ . D'où une solution unique :

$$S = \{-\sqrt{3}\}$$

7. S'il y a une solution  $x$ , on aurait  $(x + \sqrt{3})^2 \leq -1$ , ce qui est impossible (car un carré est toujours positif). D'où  $S = \emptyset$ .

## 20 Lycée Lambert, Mulhouse

Insistons encore :



Toute équation du premier degré se ramène à la forme  $ax + b = 0$

Pour une équation du second degré, on rassemble tous les termes dans le même membre de l'équation et *on factorise*, pour se retrouver dans le cas d'un produit nul de facteurs du premier degré.

1. Si vous ne voyez pas de facteur commun, c'est normal, regardez mieux : il n'y a pas de  $x^2$ , il s'agit d'une simple équation du premier degré. Il suffit donc de développer :

$$\begin{aligned}
 7(2x + 4) - 5(4x - 3) &= \frac{2}{5} - \frac{3x - 5}{2} \\
 \Leftrightarrow 14x + 28 - 20x + 15 &= \frac{4}{10} - \frac{15x - 25}{10} \\
 \Leftrightarrow -6x + 43 &= \frac{29 - 15x}{10} \\
 \Leftrightarrow -60x + 430 &= 29 - 15x \\
 \Leftrightarrow -45x &= -401 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{401}{45}
 \end{aligned}$$

D'où l'ensemble des solutions :

$$S = \left\{ \frac{401}{45} \right\}$$

2. Là non plus, pas de facteur commun évident, et pas de produit remarquable. Il faut se résoudre (la mort dans l'âme)... à développer :

$$\begin{aligned}
 (3x - 2)(2x - 5) + 2(x - 5)(7 - 3x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 6x^2 - 15x - 4x + 10 + (2x - 10)(7 - 3x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 6x^2 - 19x + 10 + 14x - 6x^2 - 70 + 30x &= 0 \\
 \Leftrightarrow 25x - 60 &= 0
 \end{aligned}$$

On comprend mieux pourquoi il fallait développer. L'équation est en fait du premier degré (un peu camouflé, il est vrai). L'unique solution est :

$$\frac{60}{25} = \frac{12}{5}$$

D'où :

$$S = \left\{ \frac{12}{5} \right\}$$

3. Décidément, pas de chance, toujours pas de facteur commun à l'horizon. Développons, pour voir :

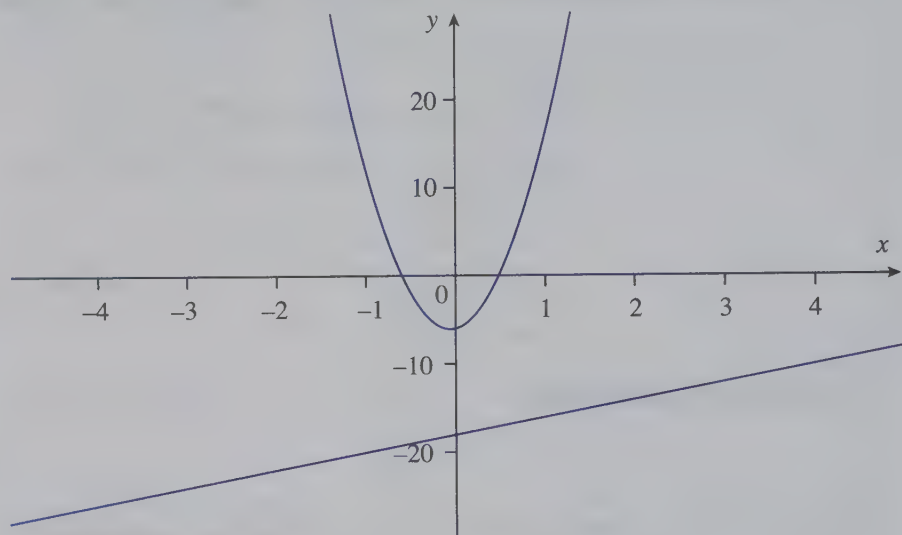
$$(5x + 3)(4x - 2) = 2(x - 9) \Leftrightarrow 20x^2 - 10x + 12x - 6 = 2x - 18$$

$$\Leftrightarrow 20x^2 + 12 = 0$$

Comme un carré est toujours positif, l'expression  $20x^2 + 12$  ne vaut jamais zéro, il n'y a donc pas de solution :

$$S = \emptyset$$

Sur le graphique ci-dessous, nous voyons les courbes représentatives des fonctions  $x \mapsto (5x + 3)(4x - 2)$  (parabole) et  $x \mapsto 2(x - 9)$  (droite). On constate en effet que ces deux courbes n'ont pas de point d'intersection.



4. On rassemble tous les termes du même côté du signe = :

$$9(4x - 1)^2 - (3x - \frac{1}{2})^2 = 0$$

Il faut reconnaître que  $9(4x - 1)^2$  est un carré. Comme  $9 = 3^2$ , on a :

$$9(4x - 1)^2 = [3(4x - 1)]^2 = (12x - 3)^2$$

L'équation se ramène donc à :

$$(12x - 3)^2 - (3x - \frac{1}{2})^2 = 0$$

Il s'agit de la différence de deux carrés, que l'on factorise :

$$(12x - 3 + 3x - \frac{1}{2})(12x - 3 - 3x + \frac{1}{2}) = 0$$

Ou encore :

$$(15x - \frac{7}{2})(9x - \frac{5}{2}) = 0$$

Ce produit est nul si et seulement si  $15x - \frac{7}{2} = 0$  ou  $9x - \frac{5}{2} = 0$ . La première équation donne la solution  $\frac{7}{30}$ , la seconde  $\frac{5}{18}$ . D'où les solutions :

$$S = \left\{ \frac{7}{30}, \frac{5}{18} \right\}$$

5. Enfin une équation avec un beau facteur commun  $(2 - x)$  !

$$\begin{aligned} (2 - x)(5x + 3) + (x - 2)(3 - x) - (2 - x) &= 0 \Leftrightarrow (2 - x)[(5x + 3) - (3 - x) - 1] = 0 \\ &\Leftrightarrow (2 - x)(5x + 3 - 3 + x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2 - x)(6x - 1) = 0 \end{aligned}$$

On s'est une nouvelle fois ramené au cas d'un produit nul, les deux solutions sont 2 et  $\frac{1}{6}$  :

$$S = \left\{ \frac{1}{6}; 2 \right\}$$

## 21 ————— Lycée Jean-Baptiste Say, Paris

1. L'expression  $(3x + 1)(2 - 4x)$  est un produit, qui s'annule si  $3x + 1 = 0$  ou si  $2 - 4x = 0$ , donc pour  $x = -\frac{1}{3}$  ou  $x = \frac{1}{2}$ . On dresse un tableau de signes :

| $x$                | $-\infty$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|--------------------|-----------|----------------|---------------|-----------|
| $3x + 1$           |           | -              | 0             | +         |
| $2 - 4x$           |           | +              | 0             | -         |
| $(3x + 1)(2 - 4x)$ |           | -              | 0             | -         |

D'après le tableau de signe,  $(3x + 1)(2 - 4x) \leq 0$  pour  $x \leq -\frac{1}{3}$  et  $x \geq \frac{1}{2}$ , d'où l'ensemble des solutions :

$$S = ]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$$

2. On utilise la méthode habituelle : on rassemble tous les termes dans le même membre, et on résout :

$$0 < (3x + 1)^2 - \left(\frac{1}{2}x - 7\right)^2$$

Le membre de droite est la différence de deux carrés, on factorise :

$$0 < [(3x + 1) + \left(\frac{1}{2}x - 7\right)][(3x + 1) - \left(\frac{1}{2}x - 7\right)]$$

On obtient :

$$0 < \left(\frac{7}{2}x - 6\right)\left(\frac{5}{2}x + 8\right)$$

Le produit s'annule si  $\frac{7}{2}x - 6 = 0$  ou si  $\frac{5}{2}x + 8 = 0$ , donc pour  $x = \frac{12}{7}$  ou  $x = -\frac{16}{5}$ . On dresse un tableau de signes :

| $x$                                    | $-\infty$ | $-\frac{16}{5}$ | $\frac{12}{7}$ | $+\infty$ |
|----------------------------------------|-----------|-----------------|----------------|-----------|
| $\frac{7}{2}x - 6$                     |           | -               | - 0 +          |           |
| $\frac{5}{2}x + 8$                     |           | - 0 +           | + +            |           |
| $(\frac{7}{2}x - 6)(\frac{5}{2}x + 8)$ |           | + 0 - 0 +       |                |           |

D'après le tableau de signe,  $(\frac{7}{2}x - 6)(\frac{5}{2}x + 8) > 0$  pour  $x < -\frac{16}{5}$  ou  $x > \frac{12}{7}$ , d'où l'ensemble des solutions :

$$S = ]-\infty, -\frac{16}{5}[ \cup ]\frac{12}{7}, +\infty[$$

3. Du point de vue du signe, un quotient se comporte comme un produit. Il faut en plus tenir compte de l'ensemble de définition. Le numérateur s'annule en 1, le dénominateur en 7, dressons un tableau de signes :

| $x$                     | $-\infty$ | 1       | 7 | $+\infty$ |
|-------------------------|-----------|---------|---|-----------|
| $-2(x - 1)$             |           | + 0 -   | - |           |
| $7 - x$                 |           | + + 0 - |   |           |
| $\frac{-2(x-1)}{(7-x)}$ |           | + 0 -   | + |           |

(Attention à la présence du  $-2$  pour le signe du numérateur !) On conclut :

$$S = ]-\infty, 1[ \cup ]7, +\infty[$$

4. Quant on résout une inéquation où  $x$  apparaît au dénominateur, le grand principe est de tout rassembler dans le même membre et de mettre les différents termes au même dénominateur, et de ne pas faire de produits « en croix ». On a ici :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{1-2x} < -1 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{1-2x} + 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 1 - 2x}{1-2x} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{1-2x} < 0 \end{aligned}$$

On a le choix entre deux méthode. La meilleure est probablement le tableau de signes. Ce n'est peut-être pas la façon la plus « frime », mais c'est certainement la plus sûre :

| $x$                    | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $+\infty$ |   |
|------------------------|-----------|---------------|-----|-----------|---|
| $(x-1)^2$              |           | +             | +   | 0         | + |
| $1-2x$                 |           | +             | 0   | -         | - |
| $\frac{(x-1)^2}{1-2x}$ |           | +             | -   | 0         | - |

D'où l'ensemble des solutions :

$$S = ]\frac{1}{2}, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

Autre méthode : le numérateur est un carré, toujours positif, donc la fraction est négative lorsque  $1-2x$  est négatif, donc pour  $x \geq \frac{1}{2}$ . On doit enlever les valeurs  $\frac{1}{2}$  (où la fraction n'est pas définie), et 1 (où la fraction s'annule), d'où l'ensemble :

$$S = ]\frac{1}{2}, +\infty[ - \{1\}$$

(c'est le même ensemble que celui que nous avons trouvé).

5. Même si des  $x$  apparaissent au dénominateur, on a tout de même le droit de simplifier les fractions avant de commencer d'autres calculs, d'où l'inéquation :

$$\frac{1}{(5-x)^2} \leq \frac{3x}{(5-x)^2}$$

Ne pas oublier que, même si la valeur 0 ne semble plus intervenir, nous continuons à résoudre l'équation dans  $\mathbb{R} - \{0; 5\}$ . La valeur 0 ne doit pas apparaître dans l'ensemble des solutions.

Ici, le dénominateur est strictement positif, quelle que soit la valeur de  $x$ . On peut donc simplifier et résoudre :

$$1 \leq 3x$$

La « simplification » revient à multiplier les deux membres par  $(5-x)^2$ . Comme  $(5-x)^2 > 0$ , le sens de l'inégalité ne change pas. Noter que  $x = 5$  est exclu de l'ensemble de définition, (c'est ce qui permet d'affirmer  $(5-x)^2 > 0$  et pas seulement  $(5-x)^2 \geq 0$ ).

On obtient donc  $x \geq \frac{1}{3}$ . Pensez à retirer la valeur 5 (0 ne convient de toutes façons pas) ; l'ensemble des solutions est donc :

$$S = [\frac{1}{3}, +\infty[ - \{5\} = [\frac{1}{3}, 5[ \cup ]5, +\infty[$$

## 22 ————— Lycée Victor Hugo, Poitiers

1. Pour étudier une fonction, on commence par donner son ensemble de définition. Au vu du dénominateur, on écrit :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Pour trouver la nature de la courbe représentative, nous allons commencer par faire apparaître le terme  $(x - 2)$  au numérateur.

$$f(x) = \frac{3x + 1}{x - 2} = \frac{3x - 6 + 7}{x - 2} = \frac{3(x - 2) + 7}{x - 2}$$

En simplifiant, on obtient :

$$f(x) = 3 + \frac{7}{x - 2}$$

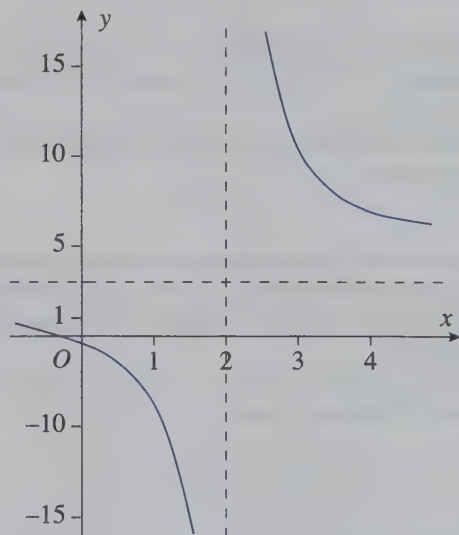
Par rapport à la courbe de la fonction  $x \mapsto \frac{7}{x-2}$ , celle de  $f$  a été « remontée » de  $+3$ , c'est-à-dire, exprimé en termes mathématiques, qu'elle a subi une translation de vecteur  $3\vec{j}$ . Vous savez que pour passer de la courbe de  $x \mapsto \frac{7}{x}$  à la courbe  $x \mapsto \frac{7}{x-2}$ , on utilise la translation de vecteur  $2\vec{i}$ . Conclusion : la courbe de  $f$  s'obtient à partir de celle de  $x \mapsto \frac{7}{x}$  par la translation de vecteur  $2\vec{i} + 3\vec{j}$ . Or,  $x \mapsto \frac{7}{x}$  est une fonction de référence. On en déduit le tableau de variation de  $f$  ci-dessous. La courbe obtenue est une hyperbole.

|        |           |                               |           |
|--------|-----------|-------------------------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $2$                           | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           | $\searrow \parallel \searrow$ |           |

Avant de tracer la courbe, on peut calculer quelques valeurs :

|        |      |      |    |     |     |    |      |     |
|--------|------|------|----|-----|-----|----|------|-----|
| $x$    | 0    | 0,5  | 1  | 1,5 | 2,5 | 3  | 3,5  | 4   |
| $f(x)$ | -0,5 | -5/3 | -4 | -11 | 17  | 10 | 23/3 | 6,5 |

Traçons maintenant la courbe représentative :

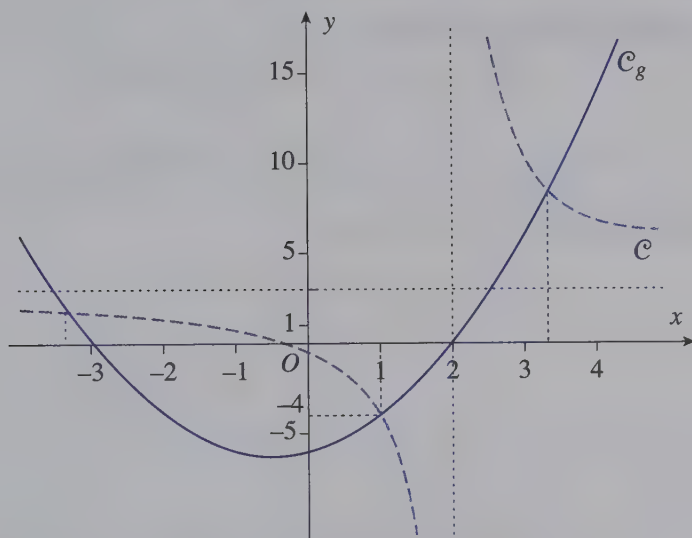


2. La courbe de la fonction  $x \mapsto x^2 + x - 6$  est une parabole. Pour trouver son sommet, il faut commencer la factorisation de l'expression :

$$g(x) = x^2 + x - 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6$$

Ceci fait apparaître que  $g(x)$  est minimum quand le carré  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$  est le plus petit possible, c'est-à-dire nul, donc quand  $x = -\frac{1}{2}$ . Le sommet de la parabole a donc comme coordonnées :  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ . On calcule quelques valeurs avant de tracer la courbe :

|        |    |    |    |   |   |    |
|--------|----|----|----|---|---|----|
| $x$    | -1 | 0  | 1  | 2 | 3 | 4  |
| $g(x)$ | -6 | -6 | -4 | 0 | 6 | 14 |



3. D'après le graphique, la courbe de  $g$  est « au-dessus » de celle de  $f$  pour

$$x \in ]-\infty, -3,3] \cup [1; 2[ \cup [3,3; +\infty[$$

(Attention !  $f$  n'est par définie en 2. Notez bien que l'on vous demande une lecture graphique, alors pas de surenchère de précision !)

On peut aussi retrouver ce résultat par le calcul :

$$\begin{aligned}
 \frac{3x+1}{x-2} \leq x^2+x-6 &\Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-2} \leq \frac{(x^2+x-6)(x-2)}{x-2} \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x^3+x^2-6x-2x^2-2x+12}{x-2} - \frac{3x+1}{x-2} \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x^3-x^2-11x+11}{x-2} \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x^2(x-1)-11(x-1)}{x-2} \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{(x^2-11)(x-1)}{x-2} \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{(x-\sqrt{11})(x+\sqrt{11})(x-1)}{x-2}
 \end{aligned}$$

Pour résoudre cette inéquation, il ne reste plus qu'à dresser un tableau de signes :

| $x$             | $-\infty$ | $-\sqrt{11}$ | 1 | 2 | $\sqrt{11}$ | $+\infty$ |   |   |   |
|-----------------|-----------|--------------|---|---|-------------|-----------|---|---|---|
| $x - \sqrt{11}$ | —         |              | — |   | —           | 0         | + |   |   |
| $x + \sqrt{11}$ | —         | 0            | + |   | +           |           | + |   |   |
| $x - 1$         | —         |              | — | 0 | +           |           | + |   |   |
| $x - 2$         | —         |              | — |   | 0           | +         | + |   |   |
| fraction        | +         | 0            | — | 0 | +           |           | — | 0 | + |

L'ensemble des solutions est confirmé :

$$S = ]-\infty; -\sqrt{11}] \cup [1; 2[ \cup [\sqrt{11}; +\infty[$$

## 23 ————— Lycée Hélène Boucher, Paris

1. Il suffit de simplifier le deuxième membre :

$$\begin{aligned} 1 - x + \frac{x^2}{1+x} &= \frac{(1-x)(1+x)}{1+x} + \frac{x^2}{1+x} \\ &= \frac{1-x^2}{1+x} + \frac{x^2}{1+x} \\ &= \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

2. Si  $x \geq -\frac{1}{2}$ , il est clair que  $x+1 > 0$ , donc  $\frac{1}{1+x} \geq 0$ . De plus on a :

$$\begin{aligned} x &\geq -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x+1 &\geq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} &\leq 2 \text{ puisque } x+1 > 0. \end{aligned}$$

On a pu passer aux inverses dans l'inégalité car les deux membres étaient strictement positifs ! D'où le résultat :

$$0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 2$$

3. L'encadrement précédent peut être multiplié par  $x^2$ , réel positif. L'ordre n'est pas modifié :

$$0 \leq \frac{x^2}{1+x} \leq 2x^2$$

On en déduit :

$$1 - x \leq 1 - x + \frac{x^2}{1+x} \leq 1 - x + 2x^2 \quad (\text{en ajoutant } 1 - x)$$

or, d'après la première question :

$$1 - x + \frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

donc :

$$1 - x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + 2x^2$$

## 24 ————— Lycée Lacordaire, Marseille

1.

$$\begin{aligned} A(x) &= x^3 - x^2 + 4x^2 - 4 \\ &= x^2(x - 1) + 4(x^2 - 1) \\ &= x^2(x - 1) + 4(x + 1)(x - 1) \\ &= (x - 1)[x^2 + 4(x + 1)] \\ &= (x - 1)(x^2 + 4x + 4) \\ &= (x - 1)(x + 2)^2 \end{aligned}$$

2. Factorisons le numérateur :

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 - 2x + 2 &= (x - 1)^2 - 2(x - 1) \\ &= (x - 1)(x - 1 - 2) \\ &= (x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

L'inéquation devient donc :

$$\frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 1)(x + 2)^2} \geq 0$$

L'inéquation est définie seulement sur  $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$  (à cause du dénominateur). Maintenant que nous avons éliminé 1, nous pouvons simplifier la fraction :

$$\frac{x - 3}{(x + 2)^2} \geq 0$$

Le dénominateur étant toujours strictement positif pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ , on se ramène à  $x - 3 \geq 0$ , donc  $x \geq 3$ . Un coup d'œil suffit à vérifier que les valeurs interdites ne posent pas de problème :

$$S = [3, +\infty[$$



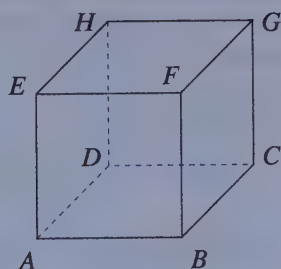
## Géométrie dans l'espace

*Tous les esprits justes et précis  
appartiennent à la géométrie.  
(d'Alembert)*

### 5.1 Introduction

#### 5.1.1 Exercice type

Soit  $ABCDEFGH$  le cube suivant, de côté  $a$  :



1. Citez toutes les arêtes perpendiculaires à  $(AB)$ , puis toutes les arêtes orthogonales à  $(EF)$ .
2. On appelle  $I$  le milieu de  $[AB]$  et  $K$  le milieu de  $[AE]$ . Montrez que  $(KI)$  et  $(HC)$  sont parallèles.
3. Dessiner l'intersection du cube et du plan  $(IHC)$ .
4. Déterminer le volume de la pyramide  $ABCDE$ .

• Lycée La Fontaine, Paris •

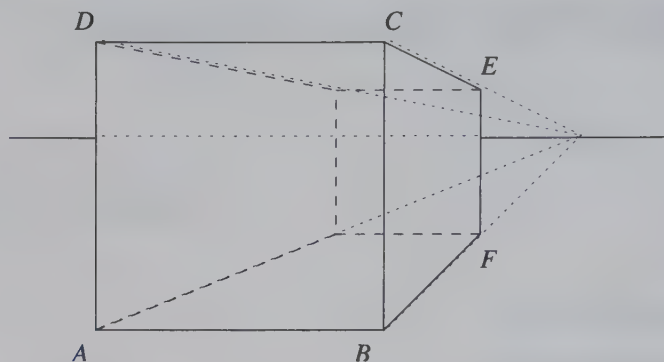
### 5.2 Comment « dessiner » dans l'espace ?

La première difficulté de la géométrie dans l'espace, c'est de représenter sur une feuille ou tableau, donc sur une surface plane, une configuration en trois dimensions. C'est le problème du dessin en « perspective ».

### 5.2.1 La perspective des peintres

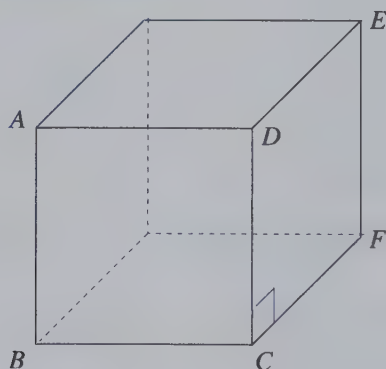
Les peintres utilisent une méthode de perspective très efficace car elle donne des résultats extrêmement réalistes.

Elle consiste à se donner tout d'abord une ligne d'horizon. Toutes les droites qui ont dans la réalité la même direction, concourent sur le dessin en un point de cette ligne d'horizon. Dans les plans parallèles au plan de la feuille, les proportions sont donc respectées. Par exemple, ci-dessous, un cube est représenté dans cette perspective.



Comme vous le voyez,  $ABCD$  est bien un carré. Néanmoins, la face  $BCEF$  est représentée par un trapèze. C'est ennuyeux, car sur le dessin, les diagonales  $[CF]$  et  $[BE]$  ne se coupent pas en leur milieu. C'est pourquoi on préfère souvent une méthode dite de « perspective isométrique » ou « perspective cavalière ».

### 5.2.2 La perspective cavalière

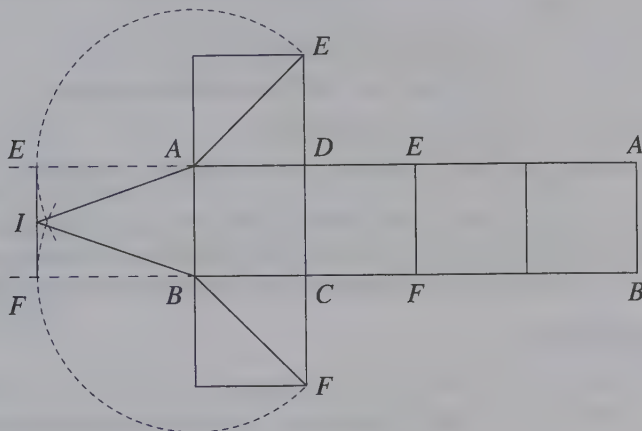


Cette fois, toutes les droites parallèles dans la réalité le sont aussi sur le dessin. Les perpendiculaires au plan de la feuille sont représentées avec un angle de  $45^\circ$ . Sur ces perpendiculaires, les vraies longueurs sont divisées par  $\sqrt{2}$ .

L'avantage de cette méthode est qu'elle respecte les milieux (la face  $DCFE$ , carrée, est représentée par un losange). Néanmoins, on peut avoir besoin, pour certains exercices, de représenter les angles et les longueurs *en vraie grandeur*. Il faut alors recourir à un patron.

### 5.2.3 Le patron

Vous avez déjà représenté ou fabriqué, en classe de troisième, les patrons de divers objets dans l'espace. Si on appelle  $I$  le milieu de  $[EF]$  dans le cube ci-dessus, on peut représenter le triangle  $ABI$  en vraie grandeur grâce au patron :



Nous sommes ici face à un paradoxe, puisque plus nous voulons que notre dessin soit conforme à la réalité, aux « vraies » mesures, moins il est « réaliste » dans son apparence. Ceci est dû à la difficulté qu'il y a à représenter l'espace dans le plan d'une feuille, et c'est ce qui fait que tant de gens ont du mal à « voir » dans l'espace. Si c'est votre cas, il y a une solution : acquérir de l'expérience (en étudiant, par exemple, les exercices proposés ici !) et bien connaître toutes les définitions et propriétés du cours. C'est de cette manière que les mathématiciens peuvent raisonner sur des espaces à 4, 5, voire une infinité de dimensions ! Plus il est difficile de représenter les situations étudiées, et plus votre maîtrise du cours doit être précise...

## 5.3 Savoir maîtriser le vocabulaire

Dans l'espace des situations nouvelles apparaissent. La plus remarquable est que l'on peut y trouver des droites qui ne sont ni sécantes, ni parallèles. Il est donc nécessaire de revoir son vocabulaire et de préciser ce que l'on entend par « parallèle », « sécantes », etc... De plus, on découvre de nouveaux objets, les plans, dont on étudie les propriétés.

### 5.3.1 Définition des droites et des plans dans l'espace

Comment déterminer une droite de l'espace ?

– En donnant deux points distincts sur cette droite.

Comment déterminer un plan de l'espace ?

– En donnant, au choix :

- soit 3 points non alignés (c'est-à-dire, qu'ils ne sont pas sur une même droite) ;
- soit une droite et un point (qui n'est pas sur la droite) ;
- soit deux droites parallèles (non confondues) ;
- deux droites sécantes.

### 5.3.2 Les droites coplanaires

#### Définition

Deux droites sont coplanaires si et seulement si elles sont incluses dans le même plan.

Dans ce cas, tout se passe comme si on faisait de la géométrie plane. Les droites coplanaires peuvent donc être :

- *sécantes* si elles ont un unique point commun.
- *parallèles* si elles sont confondues ou n'ont aucun point commun.
- *perpendiculaires* si elles forment un angle droit.

Deux droites parallèles ou deux droites sécantes sont *toujours* coplanaires.



Dans l'espace, deux droites perpendiculaires à une même troisième ne sont pas nécessairement parallèles. Par exemple, dans le cube de l'exercice type,  $(AB)$  et  $(CG)$  sont toutes deux perpendiculaires à  $(BC)$  mais ne sont pas parallèles.

### 5.3.3 Cas général

Dans l'espace, il est facile de trouver des droites qui ne sont pas dans le même plan. Dans ce cas, comme elles ne sont pas coplanaires, elles ne sont ni sécantes, ni parallèles.

*Exemple :* Considérons le cube  $ABCDEFGH$  de l'exercice type. Les droites  $(AB)$  et  $(CG)$  ne sont ni sécantes, ni parallèles. De même pour les droites  $(AB)$  et  $(EC)$ .

On peut utiliser la définition équivalente suivante :

#### Définition

Deux droites sont orthogonales ssi une parallèle à l'une est perpendiculaire à l'autre.

#### Remarques

- Des droites orthogonales de l'espace ne sont pas nécessairement sécantes.
- Des droites qui sont à la fois orthogonales et sécantes sont perpendiculaires.

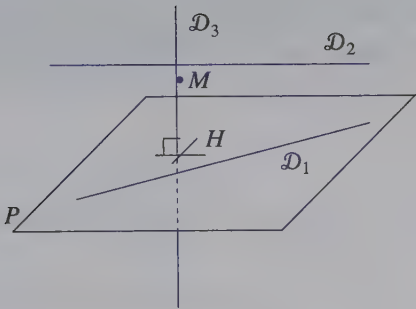
*Exemple :* Dans le cube de l'exercice type, les droites  $(AB)$  et  $(CG)$  sont orthogonales car  $(AB)$  et  $(BF)$  sont perpendiculaires et  $(CG) \parallel (BF)$ .

### 5.3.4 Les droites et les plans

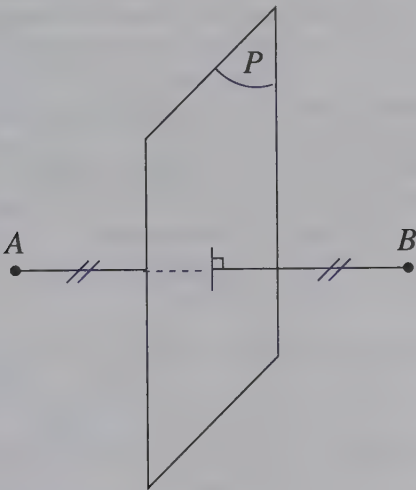
Une droite peut être :

- *incluse* dans un plan, si tous ses points appartiennent au plan ;
- *parallèle* à un plan, s'ils n'ont aucun point commun (ou si la droite est incluse dans le plan) . Par un point, il passe une infinité de droites parallèles à un plan donné.
- *sécante* à un plan, s'ils ne sont pas parallèles. Ils ont alors un unique point commun.
- *orthogonale* (ou *perpendiculaire*) à un plan, si elle est orthogonale à toutes les droites incluses dans le plan. Remarquez qu'elle est nécessairement sécante au plan dans ce cas. Par un point, il passe une seule droite orthogonale à un plan donné, ce qui permet de définir la projection orthogonale sur ce plan (voir figure).

La figure représente un plan  $P$ , une droite  $D_1$  incluse dans  $P$ , une droite  $D_2$  parallèle à  $P$ , et  $D_3$ , orthogonale à  $P$  en  $H$ .  $H$  est le projeté orthogonal du point  $M$  sur  $P$ .



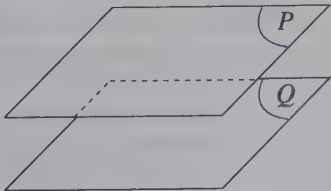
Par un point, il passe un seul plan orthogonal à une droite donnée. Étant donné un segment  $[AB]$ , on définit le *plan médiateur* de  $[AB]$  comme étant le plan orthogonal à  $(AB)$  qui passe par le milieu de  $[AB]$ . Le plan médiateur est l'ensemble des points de l'espace équidistants de  $A$  et de  $B$  (remarquez l'analogie avec la médiatrice, en géométrie plane).



5.3.5 Les plans entre eux

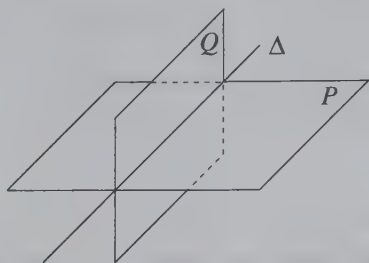
Deux plans peuvent être :

- *confondus ou égaux*
- *parallèles* s'ils sont confondus ou s'ils n'ont aucun point commun (*figure*). Par un point, il passe un unique plan parallèle à un plan donné.



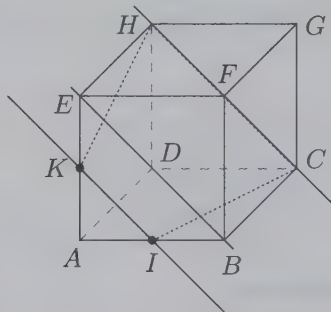
- *sécants* s'ils ne sont pas parallèles. Leur intersection est alors une droite.

- *perpendiculaires* si l'un des plans contient une droite orthogonale à l'autre plan. Méfiez-vous, car des droites incluses dans des plans perpendiculaires ne sont pas nécessairement perpendiculaires, ni même orthogonales. Elles peuvent même être parallèles !



## 5.4 Solution de l'exercice type

1. Il faut trouver toutes les arêtes qui forment avec  $(AB)$  un angle droit. On obtient :  $(AE)$ ,  $(AD)$ ,  $(BC)$  et  $(BF)$ , c'est-à-dire toutes les arêtes sécantes à  $(AB)$ . Les arêtes *orthogonales* à  $(EF)$  ne sont pas nécessairement sécantes à  $(EF)$ . On obtient :  $(EA)$ ,  $(EH)$ ,  $(FG)$ ,  $(FB)$ , mais aussi  $(AD)$ ,  $(DH)$ ,  $(CG)$  et  $(BC)$ .
2. Il faut savoir appliquer, quand il le faut, les théorèmes de géométrie plane dans certains plans de la figure. Ici, les points  $A, B, E, F, I$  et  $K$  sont coplanaires (ils sont tous dans le plan  $(EAB)$ ). On applique le théorème de quatrième qui dit que, dans un triangle, la droite passant par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté. D'où :  $(IK)$  et  $(EB)$  sont parallèles.



$ABFE$  et  $DCGH$  sont des carrés de même côté, donc  $CH = EB$  ; par ailleurs,  $EH = FG = BC$ . Comme  $EH = BC$  et  $CH = EB$ , alors  $EHCB$  est un parallélogramme (c'est même un rectangle, mais nous n'en avons pas besoin), et  $(EB)$  et  $(HC)$  sont parallèles.

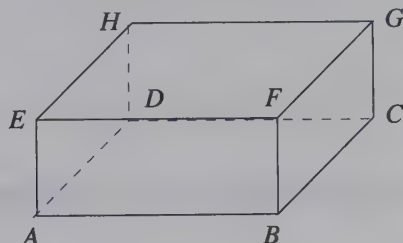
*Conclusion* :  $(IK) \parallel (HC)$ .

3. On déduit de la question précédente que  $(IK)$  et  $(HC)$  sont coplanaires, donc que  $K \in (IHC)$ , ce qui permet de tracer l'intersection de ce plan et du cube.

## 1 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Louis-le-Grand, Paris

15 min.

$ABCDEFGH$  est un parallélépipède rectangle.



1. Quelle propriété possède-t-il lorsque les droites  $(AH)$  et  $(FC)$  sont orthogonales ?
2. On suppose :  $(AH) \perp (FC)$  et  $(EB) \perp (DG)$ . Quelle est la nature du parallélépipède ? Justifier.

## 2 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Le Corbusier, Poissy

10 min.

Les mesures en  $\text{cm}^3$  et  $\text{cm}^2$  du volume et de l'aire d'une boule sont égales. Quel est le diamètre de cette sphère ?

## 3 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Notre-Dame-la-Riche, Tours

15 min.

Vrai ou faux ?

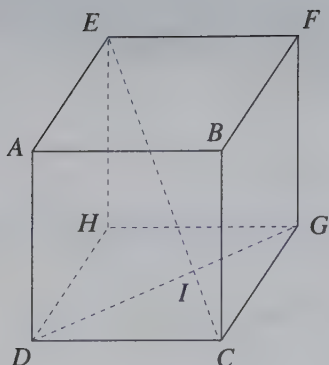
1. Si  $D \perp \Delta$  et  $D' \perp \Delta$ , alors  $D \parallel D'$ .
2. Si  $D \perp P$  et  $D' \parallel D$ , alors  $D' \perp P$ .
3. Si  $D \subset P$ ,  $D' \subset P'$  et  $P \parallel P'$  alors  $D \parallel D'$ .
4. La boule de rayon 3 a même volume que le cylindre de rayon 3 et de hauteur 4.
5. Si  $D \parallel P$  et  $\Delta \perp D$  alors  $\Delta \perp P$

Justifier par des exemples dans le cube.

## 4 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Rodin, Paris

10 min.

Soit le cube  $ABCDEFGH$  (page suivante).



Les droites  $(EC)$  et  $(DG)$  sont-elles sécantes au point  $I$  ?

**5** ★★  
30 min.

Lycée Sainte-Marie, Cholet

$A, B, C, D, E, F, G, H$  sommets d'un parallélépipède rectangle.  $AB = 8$ ,  $AD = 5$ , et  $AE = 4$ .

1. Réaliser un patron du pavé.
2. Calculer les longueurs des diagonales des faces  $ABCD$ ,  $ABFE$ ,  $ADHE$ , et comparer aux valeurs mesurées sur le patron.
3. On définit le point  $I$  de  $[FE]$  par  $FI = 2$ . Dans le plan  $(ABF)$ , la droite passant par  $I$  et parallèle à  $(EB)$  coupe  $(FB)$  en  $J$  ; dans le plan  $(FBC)$ , la droite passant par  $J$  et parallèle à  $(BG)$  coupe  $(FG)$  en  $K$ .

(a) Placer les points  $I, J, K$ .

(b) Calculer les longueurs  $FJ$  et  $FK$ .

(c) Comparer les directions de  $[IK]$  et  $[EG]$

(d) Dessiner chacun des triangles  $EBG$  et  $IJK$  en vraie grandeur, et comparer les rapports  $\frac{IJ}{EB}$ ,  $\frac{JK}{BG}$ , et  $\frac{KI}{EG}$

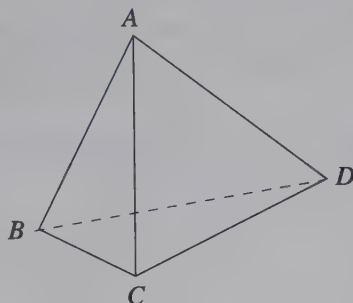
(e) Soient  $V_1$  le volume de la pyramide  $FEBG$  et  $V_2$  celui de  $FIKJ$ . Calculer  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $\frac{V_2}{V_1}$ .

Vérifier :  $\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{IJ}{EB}\right)^3$

6★★  
15 min.

Lycée Michelet, Vanves

On considère un tétraèdre  $ABCD$  (faire une figure en représentant les points suivant la disposition ci-contre).  $I$  est un point de l'arête  $[AB]$ . Le plan passant par  $I$  et parallèle au plan  $(ACD)$  coupe  $(BC)$  en  $J$  et  $(BD)$  en  $K$ . Le plan passant par  $I$  et parallèle au plan  $(BCD)$  coupe  $(AC)$  en  $L$  et  $(AD)$  en  $M$ .



1. Faire la figure.
2. Quelle est la nature du quadrilatère  $JKLM$  ? Justifier.

7★★  
15 min.

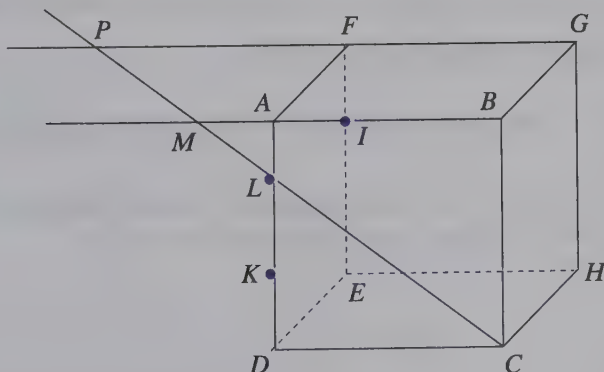
Lycée Emmanuel Mounier, Grenoble

Soient  $P, Q, R$  trois plans sécants deux à deux et n'ayant aucun point commun à eux trois. On pose  $D_1 = P \cap Q$ ,  $D_2 = P \cap R$ ,  $D_3 = R \cap Q$ . Que peut-on dire de  $D_1, D_2$  et  $D_3$  ? Justifier.

8★★  
15 min.

Lycée Paul Lapie, Courbevoie

Soit  $ABCDEFGH$  le cube ci-dessous. Soit  $I$  un point du segment  $[AB]$ ,  $L$  et  $K$  deux points du segment  $[AD]$ .

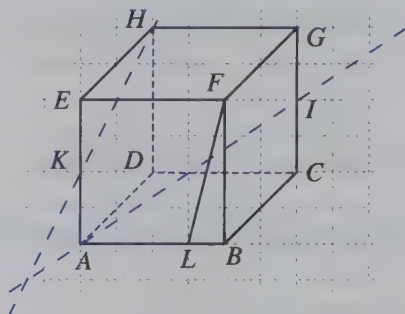


1. (a)  $I$  appartient-il au segment  $[EF]$  ?  
 (b)  $I$  appartient-il plan  $(FGB)$  ?  
 (c)  $I$  appartient-il au plan  $(KDC)$  ?
2.  $K, E$  et  $H$  sont-ils alignés ?
3. (a) Les droites  $(CL)$  et  $(AB)$  sont-elles sécantes ?

- (b) Les droites  $(CL)$  et  $(GF)$  sont-elles sécantes ?  
 (c) Que peut-on dire du point  $P$  ?
4. Les droites  $(BG)$  et  $(AD)$  sont-elles sécantes ?  
 5. Les droites  $(CB)$  et  $(EF)$  sont-elles coplanaires ?

9 ★★★  
25 min.

Lycée Hoche, Versailles



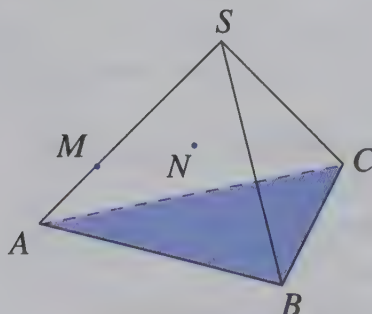
Reproduire la figure ci-dessus (un carreau mesure 1 cm de côté).  $I$ ,  $K$  et  $L$  sont des points choisis sur les arêtes  $[CG]$ ,  $[AE]$  et  $[AB]$  du cube.

1. Les droites  $(HK)$  et  $(IA)$  sont-elles sécantes ? Justifier.
2. Les droites  $(FL)$  et  $(HK)$  sont-elles parallèles ? Justifier.
3. Dessiner l'intersection des plans  $(HAI)$  et  $(ABC)$ . Justifier brièvement.
4. Dessiner l'intersection des plans  $(HAI)$  et  $(HGF)$ . Justifier brièvement.
5. Dessiner l'intersection de  $(HAI)$  et du cube.

10 ★★★  
10 min.

Lycée Condorcet, Paris

On considère le tétraèdre  $SABC$ .  $M \in [SA]$  et  $N \in (SAB)$ . Déterminer la section du tétraèdre par le plan  $P$  passant par  $M$  et  $N$  et parallèle à  $(BC)$ .



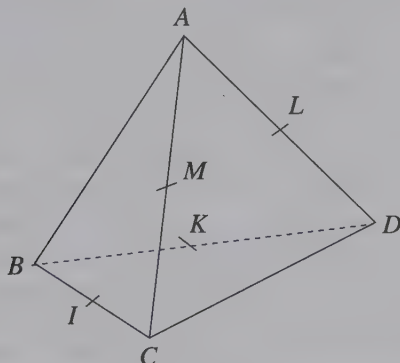
# 11

★★★  
30 min.

## Lycée Claude Monet, Paris

$ABCD$  est un tétraèdre régulier, d'arête  $a$ .  $I$ ,  $K$ ,  $L$  et  $M$  sont les milieux respectifs de  $[BC]$ ,  $[BD]$ ,  $[AD]$  et  $[AC]$ .

1. Quelle est l'aire totale des faces du tétraèdre ?
2. Reproduire la figure ci-dessous.



Déterminer l'intersection des plans  $(AID)$  et  $(BMD)$  et la représenter sur la figure.

3. (a) Quelle est la position relative des droites  $(IK)$  et  $(ML)$  ?  
(b) Que peut-on en déduire pour les points  $I$ ,  $K$ ,  $L$  et  $M$  ?
4. (a) Prouver que la droite  $(BC)$  est perpendiculaire au plan  $(AID)$ .  
(b) Que peut-on en déduire pour les droites  $(BC)$  et  $(AD)$  ?  
(c) Sans démonstration et à l'aide de (b), énoncer une propriété remarquable du tétraèdre régulier.
5. Quelle est la nature du quadrilatère  $IKLM$  ? (Justifier avec soin).

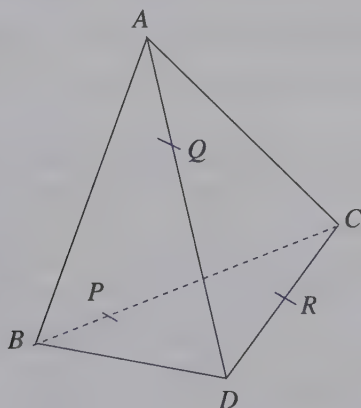
# 12

★★★  
30 min.

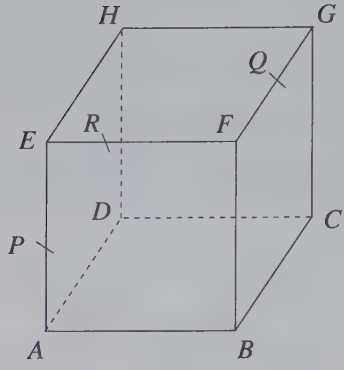
## Institution des chartreux, Lyon

Tracer la section de chacun des deux solides ci-dessous par le plan  $(PQR)$  :

1. Tétraèdre :



2. Cube :



## 1 ————— Lycée Louis-le-Grand, Paris

1. Les droites  $(FC)$  et  $(ED)$  sont parallèles, donc si  $(AH)$  et  $(FC)$  sont orthogonales, comme on sait par ailleurs que  $(ED)$  et  $(AH)$  sont coplanaires, alors  $(ED)$  et  $(AH)$  sont perpendiculaires.

La face  $EADH$  est un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires, c'est donc un carré. On peut dire que  $ABCDEFGH$  est un prisme droit à base carrée.

2. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, on remarque que  $EADH$  et  $EABF$  sont des carrés. On en déduit respectivement que  $EH = EA$  et que  $EA = EF$ . La face  $EFGH$  est donc un rectangle dont deux côtés consécutifs ont même longueur, c'est donc un carré. Les faces parallèles respectivement aux trois faces carrées mentionnées sont nécessairement carrées, donc  $ABCDEFGH$  est un cube.

## 2 ————— Lycée Le Corbusier, Poissy

Notons  $R$  le rayon de la sphère. Le volume et l'aire ont la même valeur, donc

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2$$

On peut diviser sans problème les deux membres par  $4\pi R^2$  car  $R \neq 0$ , il vient :

$$\frac{R}{3} = 1$$

donc  $R = 3$ , et le diamètre de la sphère est de 6 cm.

## 3 ————— Lycée Notre-Dame-la-Riche, Tours

Les contre-exemples sont pris sur le cube  $ABCDEFGH$  de la figure.

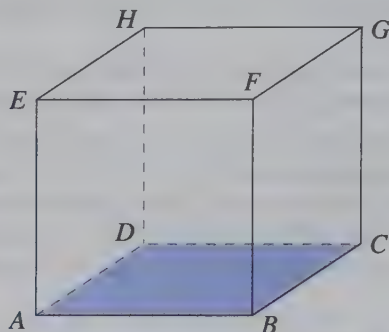
1. C'est faux, car  $(BC)$  et  $(DH)$  sont tous deux perpendiculaires à  $(DC)$ , mais ne sont pas parallèles.
2. C'est tout à fait vrai :  $D$  étant orthogonale à toutes les droites incluses dans  $P$ , sa parallèle  $D'$  est elle aussi orthogonale à toutes ces droites, donc  $D' \perp P$ .
3. C'est absolument faux. On peut trouver de nombreux exemples de droites incluses dans des plans parallèles, mais qui elles-mêmes ne sont pas parallèles. Par exemple,  $(AB)$  et  $(DH)$  (respectivement dans les plans parallèles  $(ABF)$  et  $(CDH)$ ).
4. Oui, car la boule de rayon 3 a pour volume :

$$\frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 4 \times 9\pi = 36\pi$$

et le cylindre de rayon 3 et de hauteur 4 :

$$\pi \times 3^2 \times 4 = 36\pi$$

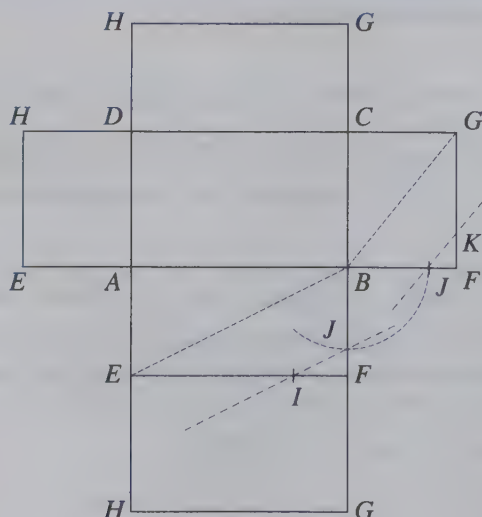
5. Non : une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à *toutes* les droites de ce plan, pas seulement une seule. On peut trouver un contre-exemple avec  $D = (FG)$ ,  $P = (ABC)$ , et  $\Delta = (EF)$ .  $(FG)$  est parallèle à  $(ABC)$ ,  $(EF)$  et  $(FG)$  sont orthogonales (elles sont même perpendiculaires), mais  $(EF)$  et  $(ABC)$  ne sont pas orthogonaux ( $(EF)$  est d'ailleurs parallèle à  $(ABC)$ ).



#### 4 ————— Lycée Rodin, Paris

La réponse est non. On a affaire à deux droites non parallèles, mais non sécantes. En effet, deux droites sécantes définissent un plan. Si  $(EC)$  et  $(DG)$  se coupaient, alors  $E$ ,  $C$ ,  $D$  et  $G$  seraient coplanaires. Or, il est clair que  $E$  n'appartient pas au plan  $(CGD)$ ...

#### 5 ————— Lycée Sainte-Marie, Cholet



1.

2. Pour calculer la longueur de la diagonale de  $ABCD$ , on applique le théorème de Pythagore au triangle  $ABD$  rectangle en  $A$ .

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 8^2 + 5^2 = 64 + 25 = 89$$

Donc la diagonale de  $ABCD$  mesure  $\sqrt{89}$  (rappel : un rectangle est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur).

On procède de même pour  $ABFE$ , avec :

$$EB^2 = AE^2 + AB^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$$

$$\text{d'où } EB = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Enfin, pour  $ADHE$  :

$$ED^2 = AE^2 + AD^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$$

$$\text{d'où } ED = \sqrt{41}.$$

Si votre patron a été correctement réalisé, vous devez y mesurer approximativement  $BD \approx 9,4$ ,  $EB \approx 8,9$  et  $ED \approx 6,4$ .

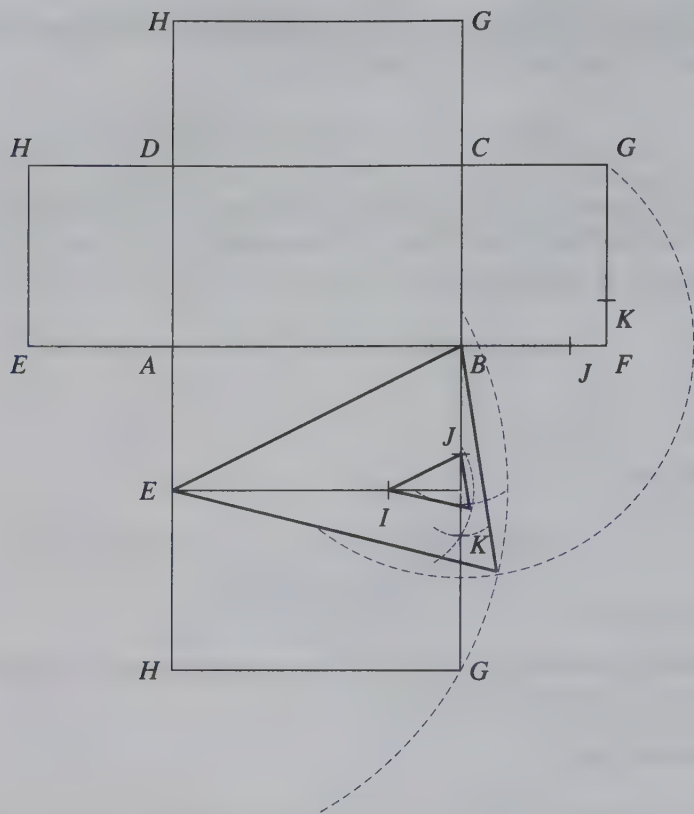
3. (a) Voir la figure.

- (b) Dans le triangle  $BEF$ ,  $(IJ)$  est parallèle à la base  $(BE)$ ,  $\frac{FI}{EF} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ , donc (théorème de Thalès)  $\frac{FJ}{FB} = \frac{1}{4}$ .  $FB = 4$ , donc  $FJ = 1$ .

On applique à nouveau le théorème de Thalès (version troisième), cette fois dans le triangle  $BFG$ , où  $(JK)$  est parallèle à  $(BG)$ . Comme  $\frac{FJ}{FB} = \frac{1}{4}$ , on a :  $\frac{FK}{FG} = \frac{1}{4}$ .  $FG = 5$  (voir le patron), donc  $JK = \frac{5}{4} = 1,25$ .

- (c) Plaçons-nous dans le triangle  $EGF$ .  $I$  est sur  $[EF]$ , et  $K$  sur  $[FG]$ . En outre, nous savons que  $\frac{FI}{EF} = \frac{FK}{FG} = \frac{1}{4}$ , donc (réciproque du théorème de Thalès)  $(IK)$  et  $(EG)$  sont parallèles.

- (d) Pour dessiner  $EBG$  en vraie grandeur, on s'est servi de la longueur  $EB$  déjà tracée sur le patron, sur la face  $ABFE$ . La « vraie » distance  $BG$  se trouve sur la face  $BFGC$ , et  $EG$  se trouve sur la face  $EFGH$ . Pour dessiner un triangle qui ait les bonnes longueurs, on trace un arc de cercle de centre  $B$  de rayon  $BG$ , puis un deuxième arc de centre  $E$  de rayon  $EG$ . Ces deux arcs se croisent en un point qui forme, avec les extrémités du segment  $[EB]$  choisi au départ, une représentation en vraie grandeur de triangle  $EBG$  (le grand triangle en gras sur la figure suivante) :



On utilise la même méthode pour tracer en vraie grandeur le triangle  $IJK$ . C'est le petit triangle en gras sur la figure.

En comparant le plus précisément possible, on obtient :

$$\frac{IJ}{EB} = \frac{JK}{BG} = \frac{KI}{EG} = \frac{1}{4}$$

- (e) Pour passer de la pyramide  $FEBG$  à la pyramide  $FIKJ$ , on a réduit les longueurs au quart. Le volume a donc été divisé par  $4^3 = 64$ . D'où  $\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{IJ}{EB}\right)^3$ .

On peut le vérifier en calculant indépendamment  $V_1$  et  $V_2$ .  $V_1$  est le volume de  $FEBG$  de base  $FBE$  et de hauteur  $FG$ . On obtient :

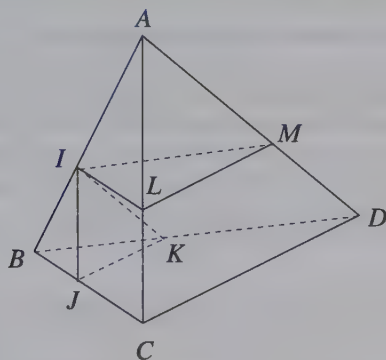
$$V_1 = \frac{FBE \times FG}{3} = \frac{\frac{4 \times 8}{2} \times 5}{3} = \frac{80}{3}$$

$V_2$  est le volume de  $FIKJ$ , pyramide de base  $FIJ$  et de hauteur  $FK = 1,25$ . On obtient :

$$V_2 = \frac{\frac{1 \times 2}{2} \times 1,25}{3} = \frac{1,25}{3}$$

On vérifie bien que  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{64}$ .

## 6 Lycée Michelet, Vanves



1.

2. Dans le cas général, nous allons démontrer que  $JKML$  est un trapèze. C'est un parallélogramme si nous avons choisi  $I$  milieu de  $[AB]$ .

$(JK)$  et  $(CD)$  sont incluses dans  $(BCD)$ . Or,  $(JK) \subset (IJK)$  et  $(CD) \subset (ACD)$ . Ces deux plans, sécants à  $(BCD)$ , étant parallèles, on a :  $(JK) \parallel (CD)$ .

De même,  $(ILM) \parallel (BCD)$ ,  $(LM)$  et  $(CD)$  sont coplanaires, donc  $(LM) \parallel (CD)$ . Il vient :  $(JK) \parallel (LM)$ .

En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle  $ABC$ , comme  $(IJ) \parallel (AC)$ , on a :

$$\frac{BI}{BA} = \frac{BJ}{BC}$$

On applique le même théorème dans  $BCD$ , où  $(JK) \parallel (CD)$ , il vient :

$$\frac{BJ}{BC} = \frac{JK}{CD}$$

De la même façon, en appliquant le théorème de Thalès dans  $ABC$ , considérant que  $(IL) \parallel (BC)$ , on obtient :

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AL}{AC}$$

Enfin, puisque dans  $ACD$ ,  $(LM) \parallel (CD)$ , il vient :

$$\frac{AL}{AC} = \frac{LM}{CD}$$

Résumons nous. Nous avons d'une part prouvé que

$$\frac{JK}{CD} = \frac{BJ}{BC} = \frac{BI}{BA}$$

et de l'autre que

$$\frac{LM}{CD} = \frac{AL}{AC} = \frac{AI}{BA}$$

Si  $AI = BI$ , donc si  $I$  est le milieu de  $[AB]$ , alors  $JK = LM$ , et comme  $(JK) \parallel (LM)$ ,  $JKLM$  est un parallélogramme.

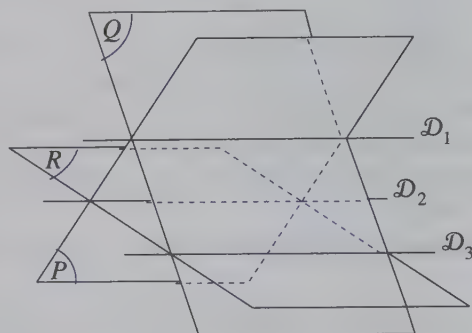
Sinon (cas général),  $JKLM$  a bien deux côtés parallèles, mais « malheureusement » pas de la même longueur, c'est donc un trapèze.

## 7 ————— Lycée Emmanuel Mounier, Grenoble

Les trois droites  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  sont parallèles. Examinons le cas de  $D_1$  et  $D_2$ . Si elles se coupent, leur point d'intersection appartient à la fois à  $D_1$ , donc à  $P$  et  $Q$ , et à  $D_2$ , donc à  $P$  et  $R$ . On a donc un point commun à  $P$ ,  $Q$  et  $R$ , ce qui est exclu par l'énoncé. Bien sûr, dans l'espace, deux droites peuvent ne pas se couper, sans être non plus parallèles. Or,  $D_1$  et  $D_2$  sont toutes deux dans le plan  $P$ . On a donc :

$$D_1 \parallel D_2$$

De même,  $D_2 \parallel D_3$ , donc ces trois droites sont parallèles.



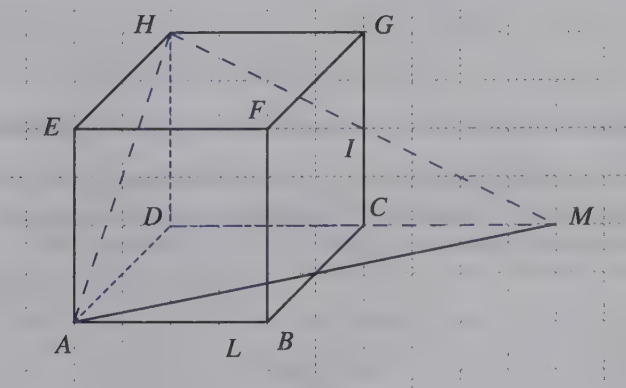
## 8 ————— Lycée Paul Lapie, Courbevoie

- Le dessin peut induire en erreur. Mais l'énoncé précise bien que  $I$  est un point du segment  $[AB]$  et donc il n'est pas sur  $[EF]$ , mais devant.
  - $I$  appartient à  $(FGB)$ , car il est sur la face  $ABGF$ .
  - Le plan  $(KDC)$  est celui de la face  $ABCD$ , il possède donc  $I$ .
- Là encore, si on se contente d'appliquer un double-décimètre, on pourrait croire que les trois points sont alignés. Or la droite  $(EH)$  est (strictement) parallèle au plan de la face  $ABCD$ , donc elle n'a aucun point commun avec ce plan (et en particulier, elle ne passe pas par  $K$ ).
- $C$ ,  $L$ ,  $A$  et  $B$  sont 4 points de la face  $ABCD$ , ils sont donc coplanaires, donc les droites  $(AB)$  et  $(CL)$  sont coplanaires. On en déduit qu'elles sont soit sécantes, soit parallèles. Il est clair que l'on est dans le premier cas (elles sont sécantes).
  - Le dessin est trompeur. Il est impossible que les droites  $(CL)$  et  $(GF)$  se coupent, car  $(CL)$  est une droite du plan  $(ABC)$  et  $(GF)$  est une droite du plan  $(FGH)$ . Or ces deux plans sont parallèles (faces opposées dans un cube). N'allez pas en conclure que  $(CL)$  soit parallèle à  $(GF)$ . Ces deux droites ne sont ni sécantes, ni parallèles.

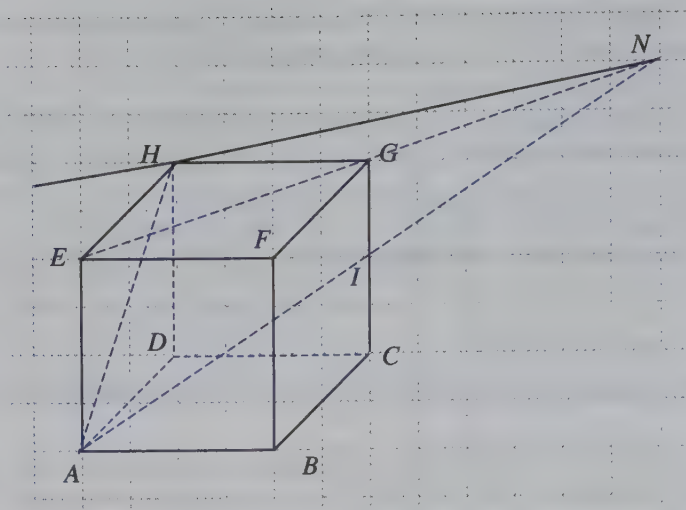
- (c)  $P$  n'est pas bien défini : est-ce un point de  $(CL)$  que l'on verrait devant  $(FG)$  ? Est-ce un point de  $(FG)$  qui serait caché par  $(CL)$  ?
4.  $(BG)$  et  $(AD)$  ne sont pas sécantes, car  $(BG)$  est une droite du plan  $(GBH)$  et  $AD$  est une droite du plan  $(ADE)$ . Or ces deux plans sont strictement parallèles.
5. Considérons les carrés  $ABCD$  et  $EFAD$ . On constate que  $(CB)$  et  $(EF)$  sont toutes deux parallèles à  $(AD)$ . Elles sont donc parallèles, et donc coplanaires.

## 9 ————— Lycée Hoche, Versailles

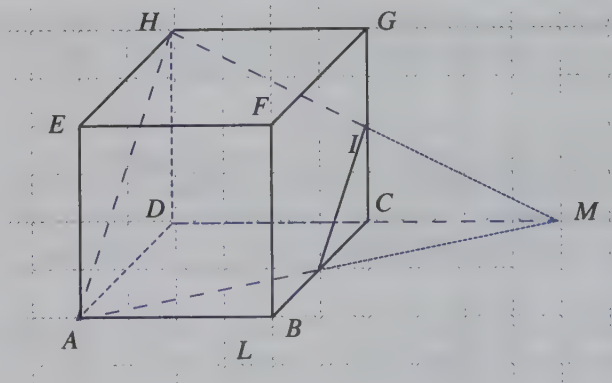
1. Les droites  $(IA)$  et  $(HK)$  ne sont pas sécantes, car  $(HK)$  est incluse dans le plan  $(ADE)$ , alors que  $(IA)$  coupe ce plan en  $A$ .  $A$  n'appartenant pas à  $(HK)$ , il n'y a pas de point commun aux deux droites.
2.  $(FL)$  est sécante au plan  $(FBC)$  en  $F$ .  $(FBC)$  et  $(ADE)$  étant parallèles,  $(FL)$  est donc sécante à  $(ADE)$ . Or,  $(HK)$  est incluse dans  $(ADE)$ . Donc  $(FL)$  ne peut être parallèle à  $(HK)$ .
3. L'intersection de  $(HAI)$  et  $(ABC)$  est une droite passant par  $A$ , et par l'intersection de  $(HI)$  (incluse dans  $(HAI)$ ) et  $(CD)$  (incluse dans  $(ABC)$ ). On peut facilement déterminer l'intersection  $M$  de  $(HI)$  et  $(CD)$  car ces droites sont toutes deux incluses dans  $(CDH)$ . On a représenté la droite  $(AM)$  sur la figure :



4. L'intersection de  $(HAI)$  et  $(HGF)$  est une droite qui contient  $H$  et  $N$ , intersection de  $(AI)$  ( $\subset (HAI)$ ) et  $(EG)$  ( $\subset (HGF)$ ).  $N$  est facile à déterminer, puisque  $(AI)$  et  $(EG)$  sont toutes deux dans le même plan  $(AEG)$ . On a représenté la droite  $(HN)$  sur la figure :

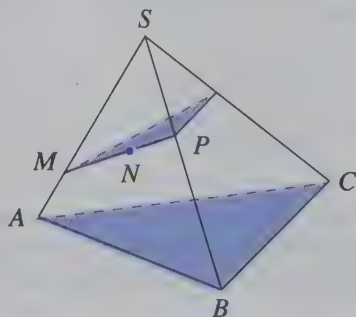


5. On s'appuie sur le résultat de la question c).



## 10 ————— Lycée Condorcet, Paris

Il faut tracer le segment de la droite  $(MN)$  inclus dans la face  $SAB$ .  $(MN)$  coupe  $(SB)$  en  $P$ . On trace alors, sur la face  $SBC$ , la parallèle à  $(BC)$  passant par  $P$ . Cette droite et  $(MN)$  déterminent le plan passant par  $M$  en  $N$  et parallèle à  $(BC)$ .

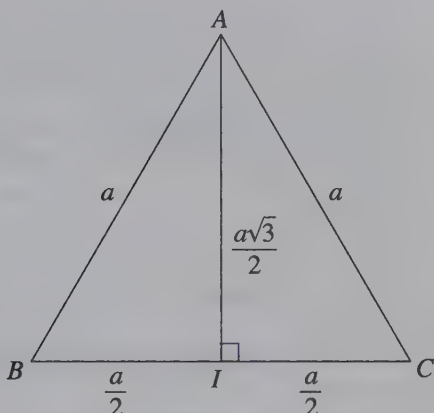


# 11

---

**Lycée Claude Monet, Paris**

1. Un tétraèdre régulier a quatre faces, qui sont des triangles équilatéraux.



Dans le triangle  $ABC$ , par exemple, on calcule  $AI$  par le théorème de Pythagore.

$BI = \frac{a}{2}$ ,  $AB = a$ , donc :

$$AI^2 = AB^2 - BI^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

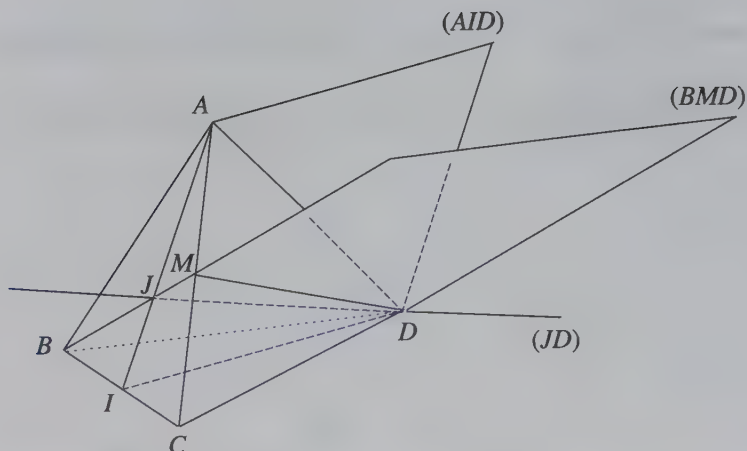
D'où  $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . L'aire du triangle  $ABC$  est :

$$\frac{1}{2} \times AI \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} \times a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

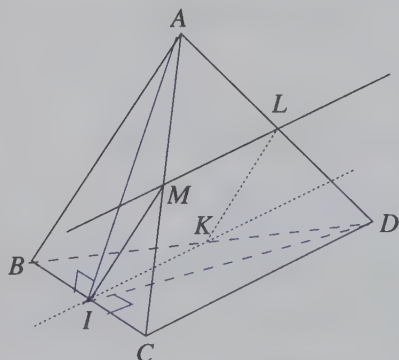
L'aire totale des 4 faces est donc :

$$\mathcal{A} = a^2\sqrt{3}$$

2. Deux plans se coupent selon une droite.  $(AID)$  contient la droite  $(AI)$  et le point  $D$ .  $(BMD)$  contient également le point  $D$  et la droite  $(BM)$ . L'intersection de ces deux plans contient donc  $D$  et l'intersection  $J$  des droites  $(AI)$  et  $(BM)$ . C'est donc la droite  $(JD)$ .



3. (a) Dans le triangle  $ACD$ ,  $M$  est le milieu de  $[AC]$ ,  $L$  est le milieu de  $[AD]$ , donc  $(ML)$  est parallèle à  $(CD)$ .  
 Dans le triangle  $BCD$ ,  $I$  est le milieu de  $[BC]$  et  $K$  est le milieu de  $[BD]$ , donc  $(IK)$  est parallèle à  $(CD)$ .  
 On conclut que  $(ML)$  et  $(IK)$  sont parallèles.
- (b) On peut en déduire que ces quatre points sont coplanaires.
4. (a) On a vu plus haut que  $(AI)$  est la hauteur issue de  $A$  dans le triangle équilatéral  $ABC$ . donc  $(AI)$  est perpendiculaire à  $(BC)$ .  
 De même,  $(ID)$  est la hauteur issue de  $D$  dans  $BCD$ , donc  $(ID) \perp (BC)$ .  
 $(BC)$  est perpendiculaire à deux droites sécantes de  $(AID)$  donc  $(BC)$  est perpendiculaire à  $(AID)$ .



- (b) La droite  $(AD)$  est une droite du plan  $(AID)$ . Or  $(BC)$  est perpendiculaire à ce plan. Donc  $(BC)$  est orthogonale à la droite  $(AD)$ . (Notez que ces deux droites ne sont pas sécantes !)
- (c) Propriété : dans un tétraèdre régulier, les arêtes opposées sont orthogonales.
5. Nous avons déjà vu que  $(ML)$  et  $(IK)$  sont parallèles.  
 On peut également remarquer que  $(IM)$  est une droite des milieux dans  $ABC$ , donc  $(IM)$  est parallèle à  $(AB)$ .  $(LK)$  est une droite des milieux dans  $ADB$ , donc  $(LK)$  est parallèle à  $(AB)$ . Il vient :  $(IM) \parallel (LK)$ .  
 Finalement,  $IKLM$  est un parallélogramme.

# 12 ——— Institution des chartreux, Lyon

Dans ces exercices, nous dirons « face » pour désigner le plan qui contient la face du solide.

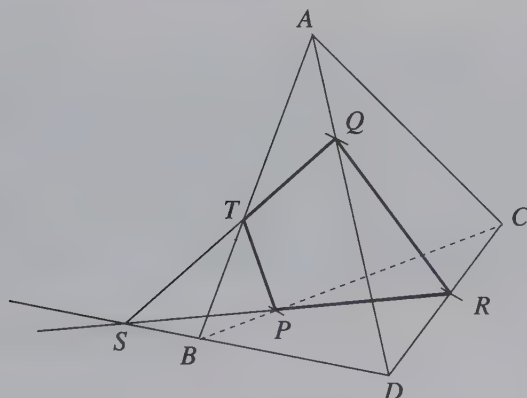
## 1. D'abord, les parties faciles :

Le plan  $(PQR)$  coupe la face  $(ADC)$  selon la droite  $(QR)$ , et la face  $(BDC)$  selon la droite  $(PR)$ .

Cherchons maintenant l'intersection avec les deux autres faces.

La droite  $(PR)$  coupe la droite  $(BD)$  en un point  $S$ . Ce point est à la fois sur le plan  $(PQR)$  (car il est sur la droite  $(PR)$ ) et sur le plan  $(ABD)$  (car il est sur la droite  $(BD)$ ). Le point  $Q$  est également sur les plans  $(ABD)$  et  $(PQR)$  ; donc  $(QS)$  est la droite d'intersection des plans  $(ABD)$  et  $(PQR)$ . Cette droite coupe  $(AB)$  en un point  $T$ .  $T$  est à la fois sur le plan  $(PQR)$  (car  $T \in (QS)$ ),  $(ABD)$  et  $(ABC)$  (car  $T \in (AB)$ ).

Donc  $(PT)$  est l'intersection de  $(PQR)$  et de la face  $(ABC)$ , et  $(QT)$  est l'intersection de  $(PQR)$  et de la face  $(ABD)$ .

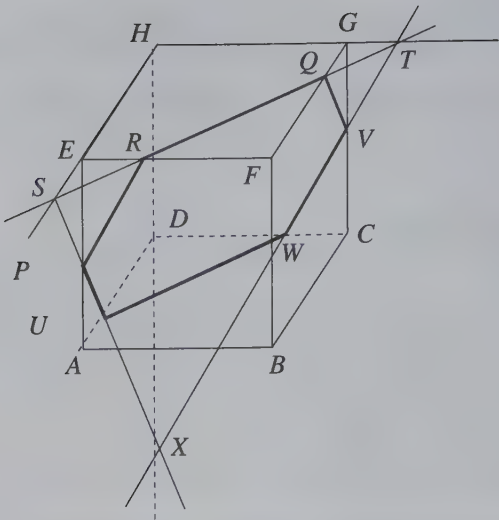


## 2. Le cube a six faces, il faut donc s'attendre à un hexagone. On a facilement les intersections de $(PQR)$ avec les faces $EFGH$ et $ABFE$ , puisqu'il s'agit respectivement de $(QR)$ et $(PR)$ .

La droite  $(QR)$  coupe respectivement  $(EH)$  en  $S$  et  $(GH)$  en  $T$ .

$S$  appartient au plan  $(PQR)$  (car  $S \in (QR)$ ), donc  $(SP)$  est une droite de  $(PQR)$ . Or  $S$  et  $P$  appartiennent également au plan de la face  $ADHE$ . Donc  $(SP)$  est l'intersection de  $(PQR)$  et de  $ADHE$ .

Notons  $X$  l'intersection de  $(SP)$  et de  $(DH)$ .  $X$  est un point commun à  $EDCG$  et à  $(PQR)$  ; C'est également le cas de  $T$ . Donc  $(XT)$  est l'intersection de  $EDCG$  et de  $(PQR)$ .  $(XT)$  et  $(XS)$  coupent respectivement  $(CD)$  et  $(AD)$  en deux points  $W$  et  $U$  qui déterminent l'intersection de  $(PQR)$  et de la face  $ABCD$ , d'où la section hexagonale  $UWVQRP$  :



# Géométrie dans le plan

Lorsqu'on compose trois symétries...  
l'effet est extrêmement agréable.  
(Brewster)

## 6.1 Configurations classiques du plan

### 6.1.1 Exercice type n° 1

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de diamètre  $[AB]$ , de centre  $O$  et  $C$  un point de  $\mathcal{C}$  distinct de  $A$  ou  $B$ . Soit  $I$  le milieu de  $[BC]$  et  $J$  celui de  $[OA]$ . La droite  $(CJ)$  coupe  $(OI)$  en  $K$ .

1. Montrer que  $(OI)$  et  $(BC)$  sont perpendiculaires.
2. Montrer que  $COKA$  est un parallélogramme.
3. Montrer que  $O$  est le centre de gravité de  $BCK$ . Que dire de  $BCK$  ?

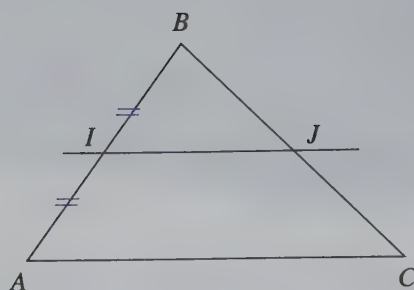
• Lycée Janson de Sailly, Paris •

### 6.1.2 Le parallélogramme

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- $[AC]$  et  $[BC]$  ont même milieu.

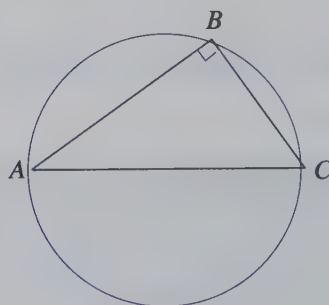
### 6.1.3 Le triangle

- Les trois hauteurs sont concourantes. Le point d'intersection  $H$  s'appelle l'orthocentre du triangle.
- Les trois médiatrices des côtés sont concourantes. Le point d'intersection  $O$  est le centre du cercle circonscrit.
- Les trois médianes sont concourantes. Le point d'intersection  $G$  est le centre de gravité (situé aux deux-tiers de chaque médiane).
- Si  $I$  est le milieu de  $[AB]$  et  $J$  celui de  $[BC]$  alors  $(IJ)$  est parallèle à  $(AC)$
- (Réciproque) Si  $I$  est le milieu de  $[AB]$ , alors la parallèle à  $(AC)$  qui passe par  $I$  coupe  $[BC]$  en son milieu.



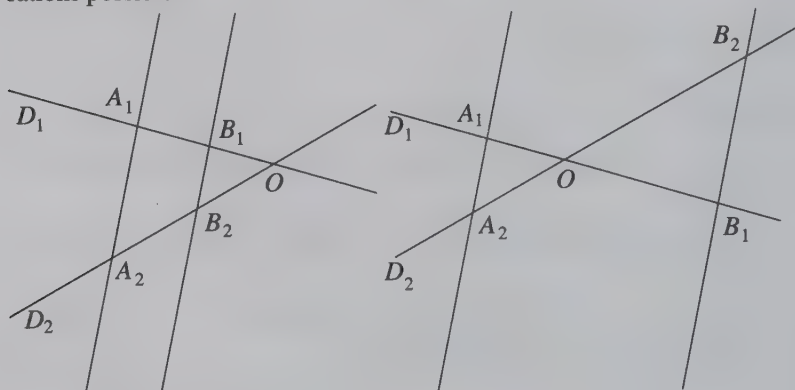
### 6.1.4 Le triangle rectangle

- Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est un diamètre du cercle circonscrit.
- (Réciproque) Si  $B$  appartient au cercle de diamètre  $[AC]$ , alors le triangle  $ABC$  est rectangle en  $B$ .



### 6.1.5 Le théorème de Thalès

Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux droites sécantes en  $O$ . Soient deux droites parallèles qui coupent  $D_1$  respectivement en  $A_1$  et  $B_1$ , et  $D_2$  respectivement en  $A_2$  et  $B_2$ . On a deux configurations possibles :



Alors :

$$\frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}$$

Ne cherchez pas à apprendre ces formules par cœur. Vous risquez la catastrophe si les noms des points ne sont pas les mêmes dans votre énoncé. Faites plutôt une figure, remarquez bien quelles sont les longueurs proportionnelles, quels sont les angles égaux, et n'oubliez pas de citer le nom de Thalès pour justifier ce que vous constatez sur le dessin.

### 6.1.6 La réciproque du théorème de Thalès

#### Théorème

Si  $D_1$  et  $D_2$  sont deux droites sécantes en  $O$ .

$A_1$  et  $B_1$  deux points de  $D_1$ , distincts de  $O$ .

$A_2$  et  $B_2$  deux points de  $D_2$ , distincts de  $O$ .

Si

$$\frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_1}{OB_1}$$

et si les points  $O, A_1, B_1$  et les points  $O, A_2, B_2$  sont dans le même ordre, alors les droites  $(A_1A_2)$  et  $(B_1B_2)$  sont parallèles.

*Remarque :* On voit qu'on est alors dans une des deux configurations de Thalès, on peut en déduire :

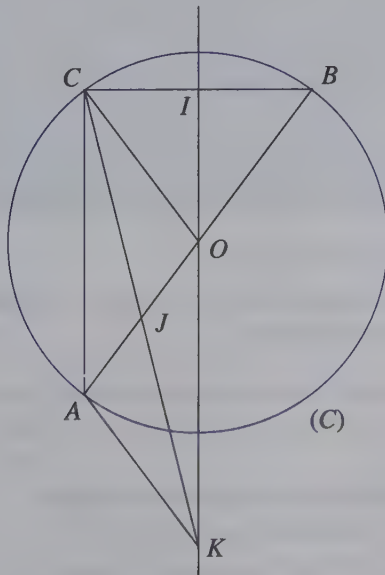
$$\frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}$$

### 6.1.7 Solution de l'exercice type n° 1

1. Dans le triangle  $ABC$ ,  $I$  est le milieu de  $[BC]$  et  $O$  est le milieu de  $[AB]$  donc  $(OI)$  est parallèle à  $(AC)$  (droite des milieux).

$C$  appartient au cercle de diamètre  $[AB]$  donc  $ABC$  est rectangle en  $C$  et  $(AC) \perp (BC)$ .

Conclusion : Comme  $(AC) \perp (BC)$  et  $(AC) \parallel (OI)$ , on a :  $(BC) \perp (OI)$ .



2. Les droites  $(OI)$  et  $(AC)$  sont parallèles, donc les triangles  $ACJ$  et  $OJK$  sont en configuration de Thalès. Il vient :

$$\frac{JK}{JC} = \frac{JO}{JA} = 1$$

(car  $JO = JA$ ), donc  $JK = JC$  et  $J$  est le milieu de  $[CK]$ .

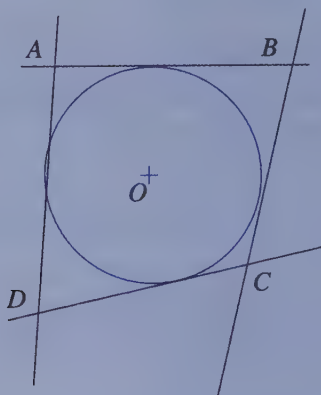
Les diagonales de  $COKA$  se coupent en leur milieu  $J$  donc  $COKA$  est un parallélogramme.

3.  $J$  est le milieu de  $[CK]$ , donc  $(BJ)$  est une médiane de  $BCK$ .  $I$  est le milieu de  $[BC]$  donc  $(IK)$  est une autre médiane de  $BCK$ . Ces deux médianes se coupent en  $O$ , donc  $O$  est le centre de gravité de  $BCK$  (intersection des médianes). Comme  $(OI) \perp (BC)$ ,  $(OI)$  est également la hauteur issue de  $K$  dans  $BCK$  et la médiatrice de  $[BC]$ .  $K$  appartenant à la médiatrice de  $[BC]$ , on a  $KB = KC$  et donc  $BCK$  est isocèle en  $K$ .

## 6.2 Les transformations du plan

### 6.2.1 Exercice type n° 2

On se donne un quadrilatère  $ABCD$ , dans lequel est inscrit un cercle de centre  $O$ . Il faut prouver que  $AB + CD = BC + DA$ .



• Lycée Louis-le-Grand, Paris •

### 6.2.2 Propriétés communes

Nous rappelons ici les caractéristiques de l'image d'une figure par différentes transformations que vous avez vues au collège.

Les symétries orthogonales (ou axiales), les symétries centrales, les translations et les rotations vérifient les propriétés suivantes ( $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  désignent les images de points  $A$ ,  $B$  et  $C$ ).

- Des points alignés ont pour images des points alignés.
- L'image de la droite  $(AB)$  est la droite  $(A'B')$ .
- L'image du segment  $[AB]$  est le segment  $[A'B']$ .

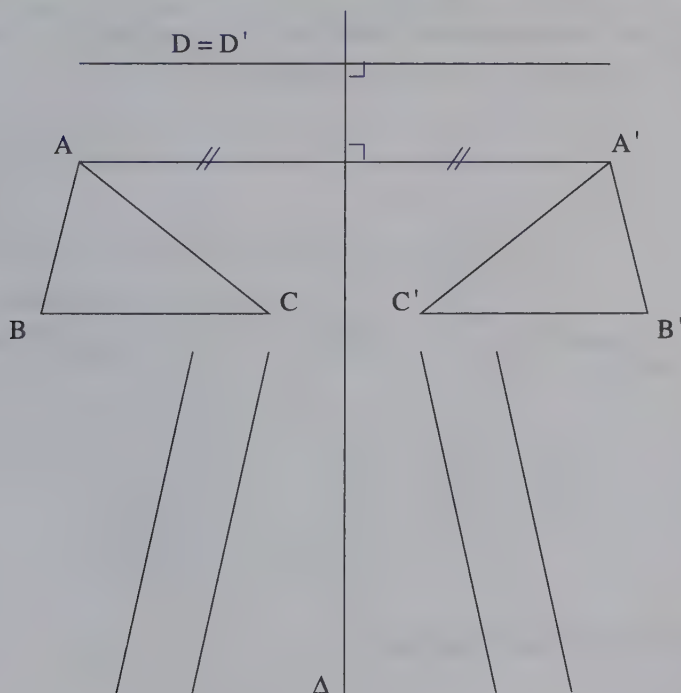
- Conservation des distances :  $AB = A'B'$ .
- L'image du milieu de  $[AB]$  est le milieu de  $[A'B']$ .
- L'image d'un cercle de centre  $A$  est le cercle de centre  $A'$ , de même rayon (vient de la conservation des distances).
- Conservation du parallélisme : les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.
- Conservation des angles (non orientés) :  $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ .
- Conservation de l'orthogonalité : les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires (vient de la conservation des angles).

Un *point invariant* est un point qui est sa propre image (la transformation ne le change pas, ne le fait pas « varier »).

Si une droite a pour image elle-même, on dit qu'elle est *globalement invariante*.

Si de plus tous ses points sont invariants, on dit que la droite est *invariante point par point*.

### 6.2.3 Symétrie orthogonale d'axe $\Delta$



#### Propriétés

- $\Delta$  est la médiatrice de  $[AA']$ .
- Les angles orientés sont changés en leur opposés (les angles non orientés sont conservés).
- Les points de l'axe sont invariants.

- Les droites orthogonales à l'axe sont globalement invariantes.
- Si  $D'$  est l'image de la droite  $D$ , alors  $\Delta$  est bissectrice de l'angle formé par les droites  $D$  et  $D'$ .

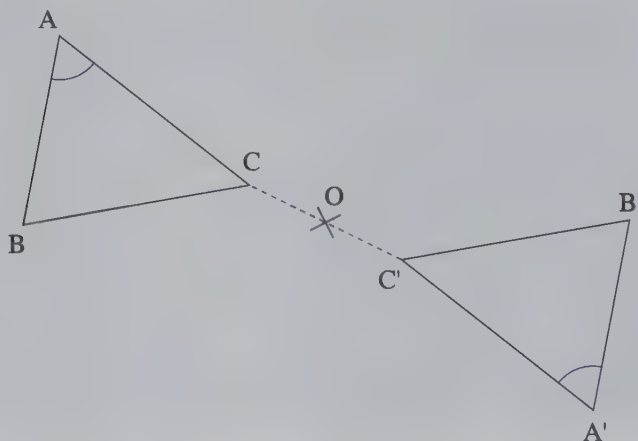
Ne pas confondre la propriété : « les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles » (valable pour toutes les transformations que vous connaissez) et : « L'image d'une droite est une droite parallèle » (ce qui n'est vrai que pour les symétries centrales et les translations).

Dans le cas d'une symétrie d'axe  $\Delta$ , par exemple, si  $D_1$  et  $D_2$  sont deux droites parallèles, que  $D'_1$  est l'image de  $D_1$  et  $D'_2$  l'image de  $D_2$ , alors  $D'_1 \parallel D'_2$ . Pourtant, comme on peut le voir sur la figure, il n'y a pas de raison que  $D_1$  et  $D'_1$  soient parallèles.

### 6.2.4 Symétrie de centre $O$

#### Propriétés

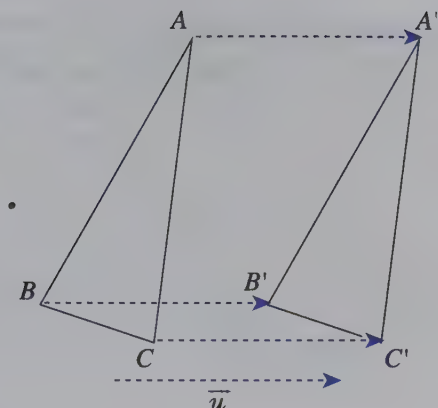
- $O$  est le milieu de  $[AA']$ .
- Les angles orientés sont conservés.
- L'image d'une droite est une droite parallèle.
- Le centre de symétrie est l'unique point invariant.



### 6.2.5 Translation de vecteur $\vec{u}$

#### Propriétés

- $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ .
- Il n'y a pas de point invariant (si  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ).
- Les angles orientés sont conservés.
- L'image d'une droite est une droite parallèle.



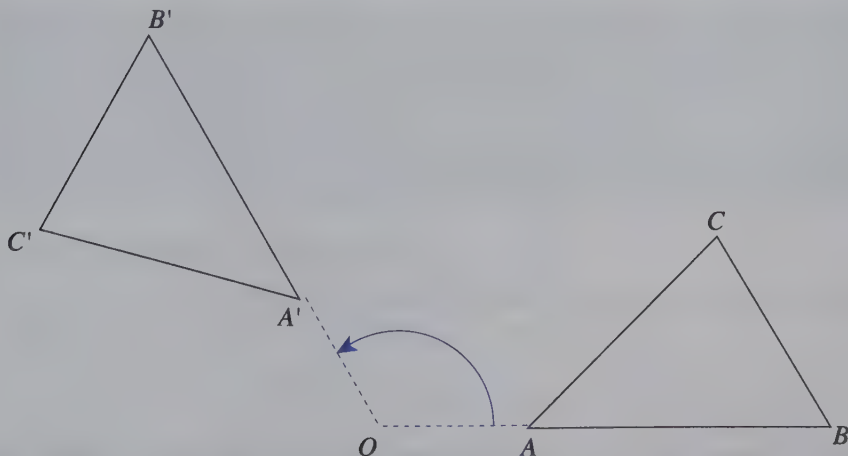
### 6.2.6 Rotation de centre $O$ et d'angle $\alpha$

Il faut indiquer dans quel sens a lieu la rotation. On utilise des angles orientés. S'ils ont le signe  $+$ , la rotation a lieu dans le *sens trigonométrique*, c'est-à-dire le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre (comme pour fermer un robinet).

Un signe moins indique que l'on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre (sens rétrograde, comme pour ouvrir un robinet).

#### Propriétés

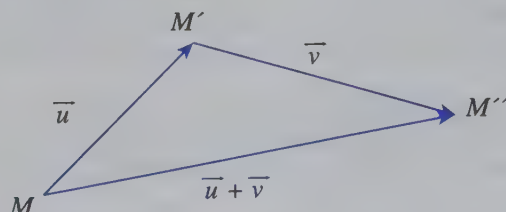
- $OA = OA'$
- $\widehat{AOA'} = \alpha$
- Le centre de la rotation est le seul point invariant (si  $\alpha \neq 0$ )
- Les angles orientés sont conservés.
- L'angle formé par les droites  $(AB)$  et  $(A'B')$  est l'angle de rotation



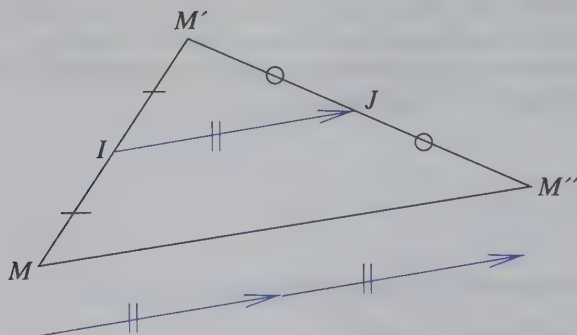
*Remarque :* Si  $\alpha = 180^\circ$ , la rotation n'est autre que la symétrie de centre  $O$ .

### 6.2.7 Effet de deux transformations successives

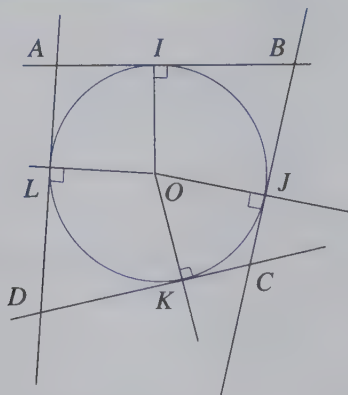
*Propriété :* Si  $M'$  est l'image de  $M$  par la translation de vecteur  $\vec{u}$  et si  $M''$  est l'image de  $M'$  par la translation de vecteur  $\vec{v}$ , alors  $M''$  est l'image de  $M$  par la translation de vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$ .



*Propriété :* Si  $M'$  est l'image de  $M$  par la symétrie de centre  $I$  et si  $M''$  est l'image de  $M'$  par la symétrie de centre  $J$ , alors  $M''$  est l'image de  $M$  par la translation de vecteur  $2\vec{IJ}$ .



### 6.2.8 Solution de l'exercice type n° 2



Nous allons noter  $I, J, K, L$  les intersections du cercle inscrit avec, respectivement,  $(AB), (BC), (CD)$  et  $(DA)$ . Ces quatre droites sont tangentes au cercle, donc orthogonales, respectivement, à  $(OI), (OJ), (OK)$  et  $(OL)$ .

On peut écrire  $OI = OJ$ , puisque ce sont des rayons du cercle. Le point  $O$  est donc équidistant des droites  $(AB)$  et  $(BC)$ , on en déduit que  $(OB)$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{ABC}$ .

De là, on peut affirmer que les droites  $(AB)$  et  $(BC)$  sont symétriques par rapport à l'axe  $(OB)$ . Par cette même symétrie, le point  $O$  est naturellement invariant.

Les images, par une symétrie orthogonale, de deux droites perpendiculaires, sont deux droites perpendiculaires (conservation des angles). Donc l'image de  $(OI)$ , droite perpendiculaire à  $(AB)$  et qui passe par  $O$ , est une droite perpendiculaire à l'image de  $(AB)$  et qui passe par l'image de  $O$ , c'est-à-dire une droite perpendiculaire à  $(BC)$  passant par  $O$ . Cette droite, c'est  $(OJ)$ . On a maintenant :

- $(AB)$  et  $(BC)$  sont symétriques par rapport à  $(OB)$
- $(OI)$  et  $(OJ)$  sont symétriques par rapport à  $(OB)$

Or  $I$  est l'intersection de  $(AB)$  et de  $(OI)$ . Son image par la symétrie d'axe  $(OB)$  n'est autre que  $J$ , intersection de  $(BC)$  et de  $(OJ)$ .

$B$  est un point de l'axe, donc est invariant, et comme la symétrie orthogonale conserve les distances, on en déduit :  $BI = BJ$ .

En procédant de même autour des autres angles du quadrilatère, on obtient :  $AI = AL$ ,  $DL = DK$ , et  $CK = CJ$ . On est au but :

$$\begin{aligned} AB + CD &= AI + IB + CK + KD \\ &= AL + JB + CJ + DL \\ &= AL + DL + JB + CJ = AD + BC \end{aligned}$$

## 6.3 Comment utiliser les triangles isométriques et semblables ?

### 6.3.1 Exercice type n° 3

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle, et quatre points distincts  $B, C, Q$  et  $P$  (placés dans cet ordre sur le cercle) tels que  $(BP)$  et  $(CQ)$  se coupent en  $A$ . Montrer que :

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$$

• Lycée Montaigne, Paris •

### 6.3.2 Triangles isométriques

Deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont isométriques si et seulement si, quitte à échanger les noms des sommets,  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$  et  $BC = B'C'$ .

Concrètement, deux triangles sont isométriques lorsqu'ils sont *superposables*.

*Théorème (Théorème côté-angle-côté)*

Si  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont deux triangles tels que  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $AB = A'B'$  et  $AC = A'C'$ , alors  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont isométriques.

**Théorème (Théorème angle-côté-angle)**

Si  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont deux triangles tels que  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $AB = A'B'$  et  $\hat{B} = \hat{B}'$ , alors  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont isométriques.

**Propriété :** (Angles dans des triangles isométriques.) Si  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont isométriques, deux cas se présentent :

- $\widehat{ABC} = +\widehat{A'B'C'}$ ,  $\widehat{BCA} = +\widehat{B'C'A'}$  et  $\widehat{CAB} = +\widehat{C'A'B'}$  : les triangles sont *directement* isométriques. On peut faire glisser le triangle  $A'B'C'$  sur le plan jusqu'à recouvrir le triangle  $ABC$ .
- $\widehat{ABC} = -\widehat{A'B'C'}$ ,  $\widehat{BCA} = -\widehat{B'C'A'}$  et  $\widehat{CAB} = -\widehat{C'A'B'}$  : les triangles sont *indirectement* isométriques. Il faut « soulever » le triangle  $A'B'C'$  et le retourner pour pouvoir le superposer à  $ABC$ .

**Remarque :** On peut transformer un triangle en un triangle isométrique donné en lui appliquant une succession d'isométries (symétrie orthogonale, rotation et translation).

**6.3.3 Triangles semblables (ou de même forme)****Définition**

Deux triangles sont semblables (on dit aussi : « de même forme ») si et seulement si les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre.

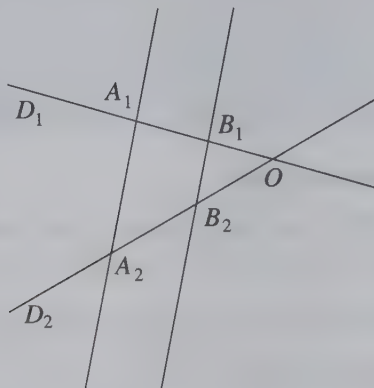
On rappelle que la somme des angles d'un triangle est toujours  $\pi$  (en radians), soit  $180^\circ$ . On peut donc affirmer que deux triangles sont semblables si et seulement si deux des angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre.

**Théorème (Théorème côté-angle-côté)**

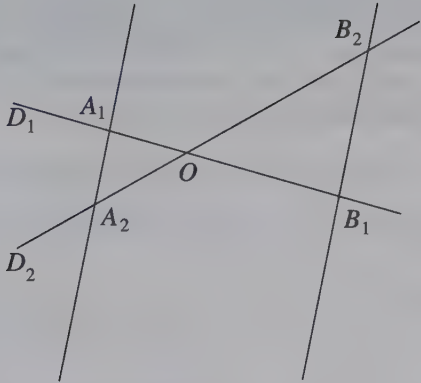
Si  $k > 0$  est un réel et  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont deux triangles tels que  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $A'B' = k AB$  et  $A'C' = k AC$ , alors  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont semblables.

**Théorème (énoncé du théorème de Thalès avec les triangles semblables)**

Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux droites sécantes ;  $\Delta$  et  $\Delta'$  deux droites parallèles qui coupent respectivement  $D_1$  en  $A_1$  et  $B_1$  et  $D_2$  en  $A_2$  et  $B_2$ . On est donc dans l'une des deux configurations :



ou bien :



Alors  $A_1OA_2$  et  $B_1OB_2$  sont de même forme. On a donc :

$$\frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}$$

et  $\widehat{A_1OA_2} = \widehat{B_1OB_2}$ ,  $\widehat{OA_2A_1} = \widehat{OB_2B_1}$  et  $\widehat{A_2A_1O} = \widehat{B_2B_1O}$ . Ces trois égalités sont vraies, même avec des angles orientés.

*Propriété :* (Coefficient d'agrandissement/réduction.)  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont deux triangles semblables si et seulement si, (quitte à changer les noms des sommets), on a :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k > 0$$

(où  $k$  est une constante réelle dépendant des deux triangles).

On a alors la relation :

$$\text{Aire}(A'B'C') = \text{Aire}(ABC) \times k^2$$

*Remarque :* On peut également énoncer une réciproque du théorème de Thalès utilisant les triangles de même forme :

Soient  $OA_1A_2$  et  $OB_1B_2$  deux triangles de même forme.

Si  $O, A_1, B_1$  d'une part et  $O, A_2, B_2$  de l'autre sont alignés et dans cet ordre, alors  $(A_1A_2) \parallel (B_1B_2)$ .

### 6.3.4 Solution de l'exercice type n° 3

Les deux angles  $\widehat{CBP}$  et  $\widehat{CQP}$  sont inscrits dans le cercle et interceptent le même arc, donc ils sont égaux. Les deux angles  $\widehat{BAC}$  et  $\widehat{QAP}$  sont opposés par le sommet, donc égaux. De là, les deux triangles  $ABC$  et  $QAP$  sont semblables, et l'on a :

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{QP}$$

Pour ne pas se tromper dans l'ordre des points, on peut dresser un petit tableau où l'on fait se correspondre les angles égaux :

|                |           |           |           |
|----------------|-----------|-----------|-----------|
| triangle $APQ$ | $\hat{A}$ | $\hat{P}$ | $\hat{Q}$ |
| triangle $ABC$ | $\hat{A}$ | $\hat{B}$ | $\hat{C}$ |

Dans ce livre, nous dirons : « les sommets  $A$ ,  $P$  et  $Q$  de  $APQ$  correspondent (ou *sont homologues*) respectivement aux sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$  de  $ABC$ . (Des objets ou des personnes sont *homologues* lorsqu'ils ont la même fonction. Par exemple : « le premier ministre français a rencontré son homologue britannique »).

On se sert ensuite de ce tableau à la manière d'un tableau de proportionnalité :

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AB}{AC}, \text{ etc.}$$

## 1 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Brizeux, Quimper

10 min.

$ABD$  et  $ACE$  sont deux triangles équilatéraux construits à l'extérieur du triangle quelconque  $ABC$ . Démontrer que  $BE = CD$ .

## 2 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Lamartine, Mâcon

15 min.

Soit  $ABC$  un triangle ;  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont les milieux respectifs des côtés  $[BC]$ ,  $[AC]$  et  $[AB]$ .

1. Montrer que les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont semblables.

2. Montrer que  $\text{Aire}(ABC) = 4 \times \text{Aire}(A'B'C')$ .

## 3 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Romain Rolland, Ivry-sur-Seine

10 min.

$BAC$  est un triangle rectangle en  $A$ .  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $[BC]$ .  $I$  est un point de  $[AH]$ . La droite parallèle à  $(AB)$  passant par  $I$  coupe  $(BC)$  en  $J$  et  $(AC)$  en  $K$ . Démontrer que  $(CI)$  est perpendiculaire à  $(AJ)$ .

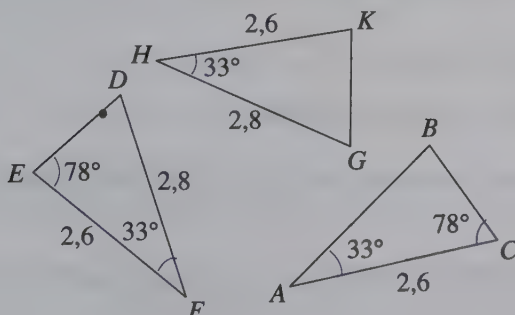
## 4 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Georges Brassens, Courcouronnes

15 min.

1. Les triangles  $ABC$  et  $DEF$  sont-ils isométriques ?

2. Les triangles  $DEF$  et  $GHK$  sont-ils isométriques ?

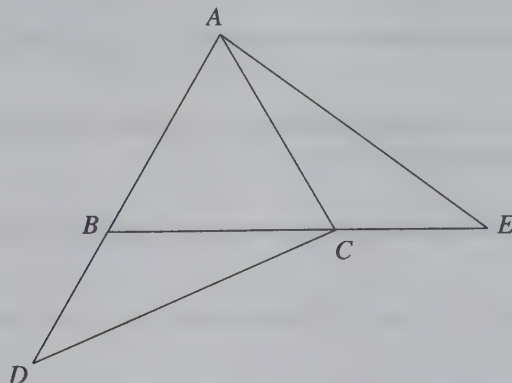
3. Les triangles  $ABC$  et  $GHK$  sont-ils isométriques ?



## 5 ★ ——— Lycée Claude Debussy, Saint-Germain-en-Laye

15 min.

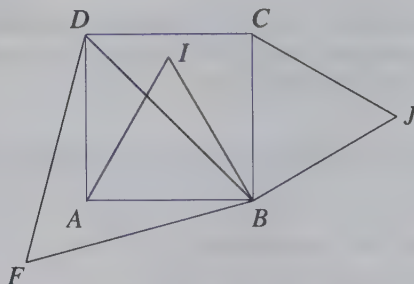
Le triangle  $ABC$  est équilatéral et  $BD = CE$ .  
Montrer que  $AE = CD$ .



## 6 ★ ——— Lycée Pissarro, Pontoise

15 min.

Soit  $ABCD$  un carré,  $CBJ$ ,  $ABI$  et  $BDF$  trois triangles équilatéraux disposés comme suit :



1. Montrer que  $F$ ,  $A$  et  $C$  sont alignés.
2. On note  $r$  la rotation de centre  $B$ , d'angle  $60^\circ$  et de sens indirect (indiqué par la flèche).
  - (a) Quelles sont les images de  $F$ ,  $A$  et  $C$  par  $r$  ?
  - (b) En déduire que  $D$ ,  $I$  et  $J$  sont alignés.

## 7 ★ ——— Lycée Scheurer-Kestner, Thann

10 min.

Dans la figure ci-dessous, les cercles  $C$  et  $C'$  ont même centre  $O$  et  $\widehat{ADC} = 105^\circ$ . Déterminer la mesure de l'angle  $\widehat{MNP}$ .



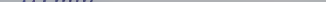
**8** ★  **Lycée Jacques Prévert, Pont-Audemer**  
15 min.

$ABC$  est un triangle rectangle en  $A$ . Soit  $H$  le pied de la hauteur issue de  $A$ .

1. Montrer que les triangles  $ABC$ ,  $AHB$  et  $HAC$  sont semblables.
2. En déduire que  $AH^2 = HB \times HC$  et que  $AB^2 = BH \times BC$ .

**9** ★ **5 min.** **Lycée Colbert, Paris**

$ABCD$  étant un parallélogramme de centre  $O$ ,  $I$  et  $J$  milieux de  $[OD]$  et  $[OB]$ .  
Comparer  $IC$  et  $JA$ .

**10**★  **Lycée Raspail, Paris**  
10 min.

Soit  $ABC$  un triangle isocèle rectangle en  $A$ . Soit  $M$  un point de  $[AB]$ . La parallèle à  $(AC)$  passant par  $M$  coupe  $[BC]$  en  $N$  ; la parallèle à  $(AB)$  passant par  $N$  coupe  $[AC]$  en  $P$ . On note  $\mathcal{A}$  l'aire du triangle  $ABC$ .

1. Montrer que  $APNM$  est un rectangle.
2. On pose  $x = \frac{AM}{AB}$ . Donner l'aire de  $PNC$  en fonction de  $x$  et  $\mathcal{A}$ .
3. Donner l'aire de  $MBN$  en fonction de  $x$  et  $\mathcal{A}$ .
4. Exprimer l'aire du rectangle  $AMNP$  en fonction de  $x$  et  $\mathcal{A}$ .
5. Résoudre l'inéquation  $2x(1-x) \geq \frac{1}{2}$  et montrer que l'aire du rectangle est maximum quand  $M$  est le milieu de  $[AB]$ .

# 11 ★ ————— Lycée Thiers, Marseille

20 min.

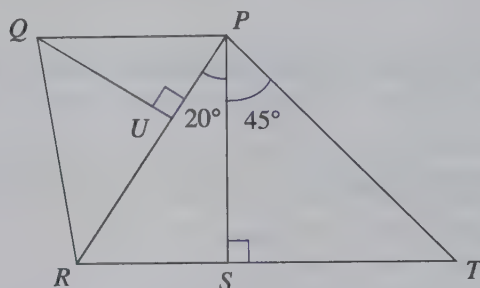
Soit  $ABCD$  un trapèze convexe de bases  $[AB]$  et  $[DC]$ ;  $M$  et  $N$  les milieux respectifs de  $[AB]$  et de  $[CD]$ .

1. Soit  $O$  l'intersection des droites  $(AD)$  et  $(BC)$ . Montrer que  $OMB$  et  $ONC$  sont semblables.
2. Soit  $O'$  le point d'intersection des droites  $(AC)$  et  $(BD)$ . Montrer que  $O'MB$  et  $O'ND$  sont semblables.

# 12 ★ ————— Lycée François Villon, Paris

20 min.

On considère la figure ci-dessous, où  $TP = 7$ ,  $PQ = 5$ ,  $\widehat{TPS} = 45^\circ$  et  $\widehat{SPR} = 20^\circ$ . Les droites  $(QP)$  et  $(RT)$  sont parallèles.



1. Montrer que le triangle  $PST$  est rectangle isocèle.
2. Calculer l'angle  $\widehat{PRS}$ . Montrer que les angles  $\widehat{PRS}$  et  $\widehat{QPR}$  sont égaux.
3. Calculer  $PS$ ,  $PR$ ,  $UQ$ ,  $UR$  et  $\widehat{QRU}$ . On donnera un arrondi au dixième près des longueurs et de la mesure de l'angle.
4. Calculer l'aire du quadrilatère  $QPTR$ .

# 13 ★ ————— Lycée Henri IV, Paris

10 min.

Construire un triangle  $ABC$  dont on connaît  $B$ ,  $C$ ,  $G$  le centre de gravité.

# 14 ★ ————— Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

10 min.

Soit  $ABC$  un triangle,  $I$  le milieu de  $[BC]$ . Une droite  $\Delta$  parallèle à  $(AI)$  coupe  $(BC)$ ,  $(CA)$  et  $(AB)$ , respectivement en  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ . Montrer :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB'}{AC'}$$

# 15★ Lycée Kléber, Strasbourg

15 min.

$ABCD$  est un trapèze avec  $(AB) \parallel (CD)$ . Par  $E$ , intersection des diagonales  $(AC)$  et  $(BD)$ , on mène  $\Delta$ , parallèle à  $(AD)$  et qui coupe  $[DC]$  en  $F$ , ainsi que  $\Delta'$ , parallèle à  $(BC)$  et qui coupe  $[DC]$  en  $G$ .

1. Faire une figure.
2. Montrer que  $GC = DF$ .

# 16★★ Lycée Evariste Galois, Sartrouville

20 min.

Soit  $ABC$  un triangle équilatéral inscrit dans un cercle  $(C)$ .  $M$  est un point quelconque de l'arc de cercle  $AB$  qui ne contient pas  $C$ .

On se propose de prouver que  $MA + MB = MC$ .

1. (a) Faire une figure avec  $AB = 6$  cm et  $BM = 2$  cm.  
(b) Placer le point  $P$  du segment  $[MC]$  tel que  $MP = MA$ .
2. (a) Quelle est la mesure de l'angle  $\widehat{AMC}$  ?  
(b) Montrer que le triangle  $AMP$  est équilatéral.
3. Comparer les triangles  $AMB$  et  $APC$ .
4. Résoudre le problème posé.

# 17★★ Lycée Brizeux, Quimper

20 min.

Soit  $ABC$  un triangle isocèle de base  $[BC]$  et  $M$  un point de  $[BC]$ . Par  $M$ , on mène la perpendiculaire à  $(AB)$ , qui coupe  $(AB)$  en  $P$ , et la perpendiculaire à  $(AC)$ , qui coupe  $(AC)$  en  $Q$ . Par  $C$ , on mène la perpendiculaire à  $(MP)$  qui coupe  $(MP)$  en  $R$ .

1. Démontrer que les triangles  $MQC$  et  $MRC$  sont isométriques.
2. En déduire que la quantité  $MP + MQ$  est constante, c'est-à-dire indépendante de la position du point  $M$ . Que représente cette constante pour le triangle  $ABC$  ?

# 18★★ Lycée St Aspais, Fontainebleau

30 min.

Dans un plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points :  $A(3; 3)$ ,  $B(5; 2)$ ,  $C(1; -1)$ ,  $E(11; 2)$ ,  $F(7; 4)$ .

1. Faire une figure.
2. Montrer que les droites  $(AB)$  et  $(EF)$  sont parallèles.
3. Montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle.
4. Soit  $G(7; -6)$   
(a) Calculer  $FG$ ,  $EF$  et  $EG$ .  
(b) Montrer que les triangles  $ABC$  et  $EFG$  ont leurs côtés proportionnels.

- (c) Que peut-on en déduire pour ces deux triangles ?  
 (d) Sans calculer les aires, montrer que l'aire de  $ABC$  est le quart de l'aire de  $EFG$ .

**19** ★★

30 min.

Lycée Racine, Paris

Soit  $ABC$  un triangle non rectangle,  $O$  le centre du cercle circonscrit  $\Gamma$  et  $H$  son orthocentre.  $D$  est le point diamétralement opposé à  $A$  sur  $\Gamma$ .

1. Faire une figure, que l'on complétera au fur et à mesure des questions.
2. (a) Déterminer la nature des triangles  $ACD$  et  $ABD$ .  
 (b) En déduire que  $(BH)$  est parallèle à  $(CD)$  et que  $(CH)$  est parallèle à  $(BD)$ .  
 (c) En déduire que  $[BC]$  et  $[DH]$  ont même milieu  $I$ .
3. Soit  $K$  le symétrique de  $H$  par rapport à  $(BC)$ . Soit  $J$  le milieu de  $[HK]$ .  
 (a) En utilisant le triangle  $HKD$ , montrer que  $(KD)$  est parallèle à  $(JI)$ .  
 (b) En déduire que les droites  $(AK)$  et  $(KD)$  sont perpendiculaires.
4. En déduire que  $K$  appartient au cercle  $\Gamma$ .

**20** ★★

30 min.

Lycée Louis Armand, Chambéry

Soit  $\Gamma$  un cercle de centre  $O$ , de rayon  $R > 0$ . Soit  $M$  un point du plan, « extérieur » au cercle.

Deux droites passant par  $M$  sont sécantes à  $\Gamma$  en  $A$  et  $B$  pour l'une, en  $C$  et  $D$  pour l'autre (on nomme les points en s'éloignant de  $M$ ). On note  $d = OM$ .

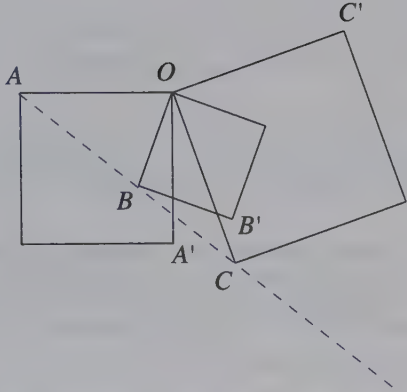
1. Démontrer que les triangles  $AMD$  et  $BMC$  sont semblables.
2. En déduire que  $MA \times MB = MC \times MD$ .
3. La droite  $(MO)$  est sécante à  $\Gamma$  en  $E$  et en  $F$  (nommés en partant de  $M$ ). Montrer que  $ME \times MF = d^2 - R^2$ .
4. Déduire des questions précédentes que le produit  $MA \times MB$  ne dépend pas de la sécante choisie et qu'il est égal à  $d^2 - R^2$ .
5. La droite  $(MT)$  est tangente à  $\Gamma$  en  $T$ . Prouver l'égalité  $MA \times MB = MT^2$ .
6. Utiliser l'égalité précédente pour prouver que les triangles  $MAT$  et  $MTB$  sont semblables.
7. Prouver que les angles  $\widehat{ABT}$  et  $\widehat{ATM}$  ont même mesure.

**21** ★★

20 min.

Lycée Saint Jean, Douai

Sur la figure suivante, les trois carrés ont un sommet commun  $O$  et les sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.



Démontrer que les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont alignés.

22

★★

10 min.

Lycée Jean Moulin, Lyon

Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$ .  $I$  et  $J$  sont les milieux respectifs de  $[AB]$  et  $[AC]$ .  
En utilisant l'axe de symétrie :

- 1. montrer que  $CI = BJ$  ;
- 2. si  $G$  est le centre de gravité du triangle, montrer que  $\widehat{GIB} = \widehat{GJC}$ .
- 3. si  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ , montrer que le triangle  $H I J$  est isocèle.

23

★★

10 min.

Lycée Hélène Boucher, Thionville

Soit  $MNP$  un triangle et  $K$  le milieu de  $[MN]$ .

- 1. En utilisant la hauteur issue de  $P$  dans le triangle  $MNP$ , démontrer que la médiane  $(PK)$  partage le triangle  $MNP$  en deux triangles de même aire.
- 2. Démontrer que la hauteur issue de  $M$  dans le triangle  $PMK$  a même longueur que la hauteur issue de  $N$  dans le triangle  $PNK$ .
- 3. Que peut-on dire des distances des points  $M$  et  $N$  à la médiane  $(PK)$  ?

24

★★

30 min.

Lycée Francisque Sarcey, Dourdan

Soit  $MNP$  un triangle rectangle en  $M$ . À l'extérieur de ce triangle, on construit les carrés  $MNRS$  et  $MPUT$ . Les droites  $(RS)$  et  $(UT)$  se coupent en  $V$ .

- 1. Montrer que  $MP = SV$ .
- 2. Montrer que les triangles  $MNP$  et  $MSV$  sont isométriques. En déduire que  $\widehat{MNP} = \widehat{SMV}$ .
- 3. Les droites  $(MV)$  et  $(NP)$  se coupent en  $H$ . Montrer que les triangles  $MNH$  et  $MPH$  sont semblables.

ÉNONCÉS

4. En déduire :

- (a) que les droites  $(MV)$  et  $(NP)$  sont perpendiculaires.
- (b) que  $MH^2 = HN \times HP$ .

## 25 ★★ ————— Lycée René Cassin, Arpajon

20 min.

Soit  $ABC$  un triangle.  $O$  est le centre du cercle circonscrit à  $ABC$  et  $R$  son rayon.  $D$  est le symétrique de  $A$  par rapport à  $O$  et  $H$  est le pied de la hauteur issue de  $A$ .

- Montrer que les triangles  $ABD$  et  $AHC$  sont semblables.
- Montrer que  $AH \times 2R = AB \times AC$ .
- On pose  $a = BC$ ,  $b = AC$  et  $c = AB$ . Soit  $S$  l'aire du triangle  $ABC$ . Montrer :

$$R = \frac{abc}{4S}$$

## 26 ★★ ————— Lycée du Bâtiment, Paris

15 min.

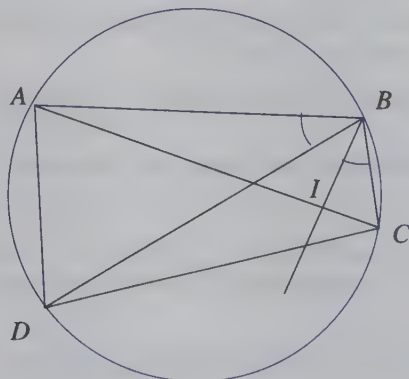
Soit le quadrilatère  $ABCD$ , tel que :  $AB = 8$ ,  $AD = 4$ ,  $DC = 4,5$ ,  $BC = 3$  et  $BD = 6$ .

- Construire le quadrilatère en expliquant votre méthode.
- Montrer que les triangles  $ABD$  et  $BCD$  sont semblables.
- En déduire que  $ABCD$  est un trapèze.

## 27 ★★ ————— Lycée Jacques Prévert, Taverny

20 min.

Soit  $ABCD$  un quadrilatère inscrit dans un cercle. Soit  $I$  le point de  $[AC]$  tel que  $\widehat{ABD} = \widehat{IBC}$ .



- Montrer que les triangles  $ABD$  et  $IBC$  sont semblables. En déduire :

$$AD \times BC = IC \times BD$$

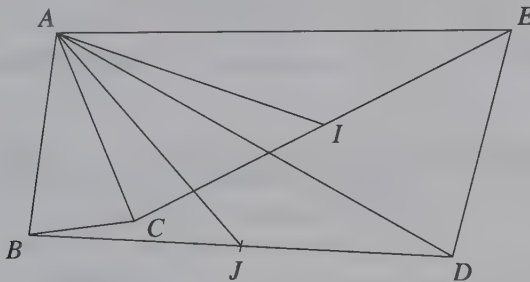
- De même, trouver un produit égal à  $AB \times CD$  en montrant que les triangles  $ABI$  et  $DBC$  sont semblables.
- En déduire :

$$AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$$

## 28 ★★ ————— Lycée Camille Claudel, Palaiseau

15 min.

$ABC$  et  $ADE$  sont deux triangles isocèles de sommet commun  $A$  et  $\widehat{EAD} = \widehat{CAB}$  orientés dans le même sens, celui des aiguilles d'une montre.



- Démontrer que les triangles  $BAD$  et  $CAE$  sont isométriques. En déduire que  $BD = EC$ .
- On désigne par  $I$  et  $J$  les milieux respectifs des segments  $[CE]$  et  $[BD]$ . Démontrer que les triangles  $AIC$  et  $AJB$  sont isométriques. En déduire que le triangle  $AIJ$  est isocèle.

## 29 ★★ ————— Lycée Jean Vilar, Les Mureaux

30 min.

$ABCD$  est un carré de 4 cm de côté.  $I$  est le milieu du segment  $[AB]$  et  $J$  celui de  $[BC]$ . La droite  $(AJ)$  coupe le segment  $[DI]$  en  $H$  et la diagonale  $[DB]$  en  $K$ .

- Faire une figure.
- Démontrer que les triangles  $DAI$  et  $ABJ$  sont isométriques.
- Démontrer que les triangles  $AIH$  et  $ABJ$  ont la même forme. Calculer le rapport de proportionnalité des longueurs des côtés respectifs des deux triangles.
- Exprimer l'aire du triangle  $AIH$  en fonction de l'aire du carré  $ABCD$ .
- Montrer que  $AKD$  et  $BKJ$  sont semblables. Quel est le coefficient de proportionnalité entre ces deux triangles ? En déduire  $HK$ ,  $DH$  et l'aire de  $HKD$ .
- $HKD$  et  $AHI$  sont-ils semblables ?

## 30 ★★ ————— Lycée Raspail, Paris

20 min.

On considère un trapèze convexe  $EFGH$  avec  $(EF)$  parallèle à  $(GH)$ . Les diagonales  $(EG)$  et  $(HF)$  se coupent en  $O$  ; les côtés  $(EH)$  et  $(FG)$  se coupent en  $P$ . La droite  $(PO)$  coupe respectivement la droite  $(EF)$  en  $A$  et la droite  $(GH)$  en  $B$ .

Démontrer que :

$$\frac{OB}{OA} = \frac{PB}{PA}$$

### 31 ★★ Lycée Français, Bruxelles 15 min.

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de centre  $O$ , de rayon  $R$ , et  $[AB]$  un diamètre. Soit  $M$  un point de  $\mathcal{C}$ , distinct de  $A$ ,  $m$  le milieu de  $[AM]$  et  $N$  le symétrique de  $m$  par rapport à  $O$ .

1. Montrer que  $m$  appartient au cercle de diamètre  $[AO]$ .
2. Montrer que  $N$  appartient au cercle de diamètre  $[BO]$ .

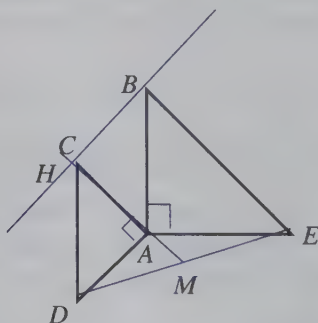
### 32 ★★ Lycée Thiers, Marseille 20 min.

Soit  $ABC$  un triangle. On note  $G$  son centre de gravité,  $O$  le centre de son cercle circonscrit.  $A'$ ,  $B'$ , et  $C'$  sont les milieux respectifs de  $[BC]$ ,  $[AC]$  et  $[AB]$ .

1. Montrer que  $A'B'C'$  et  $ABC$  sont semblables. Quel est le coefficient d'agrandissement/réduction ?
2. Montrer que  $(OA')$  est une hauteur de  $A'B'C'$ . Que représente  $O$  pour le triangle  $A'B'C'$  ?
3. Montrer que  $(GB')$  est une médiane de  $A'B'C'$ . Que représente  $G$  pour le triangle  $A'B'C'$  ?

### 33 ★★ Lycée Louis-le-Grand, Paris 25 min.

Soient  $ADC$  et  $ABE$  deux triangles rectangles en  $A$  et isocèles.  $M$  est le milieu de  $[DE]$ ;  $H$  est l'intersection de  $(AM)$  et  $(BC)$ .  $r$  est la rotation de centre  $A$  qui transforme  $C$  en  $D$ . Reproduire la figure avec  $AE = 4$  cm et  $AC = 2$  cm.



1. Déterminer  $r(E)$ .
2. Construire  $F = r(D)$  et  $M' = r(M)$ .
3. Montrer que  $A$  est le milieu de  $[CF]$ .
4. Montrer que  $(AM') \parallel (BC)$
5. Dédire que  $(AH)$  est perpendiculaire à  $(BC)$ .

### 34★★ ————— Lycée Pasteur, Strasbourg

20 min.

Les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont alignés, dans cet ordre, avec  $AB = BC = CD = 4$  cm. On note  $(C_1)$ ,  $(C_2)$ ,  $(C_3)$  les cercles de diamètre  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$  leurs centres respectifs. Soit  $C_4$  le cercle de diamètre  $[AO_3]$  et  $T$  un des points d'intersection des cercles  $C_3$  et  $C_4$ .

1. Faire une figure.
2. Prouver que la droite  $(AT)$  est tangente au cercle  $(C_3)$ .
3. La droite  $(AT)$  coupe le cercle  $(C_2)$  en  $P$  et  $Q$ . Soit  $I$  le milieu du segment  $[PQ]$ .
  - (a) Montrer que les droites  $(O_2I)$  et  $(AT)$  sont perpendiculaires.
  - (b) Calculer la longueur  $O_2I$ .
  - (c) En déduire la longueur  $PQ$ .

### 35★★ ————— Lycée Chateaubriand, Rennes

15 min.

Un triangle  $ABC$  de hauteur  $[AH]$  est tel que  $AB = 5$ ,  $BC = 8$ , et  $AH = 4$  (unité : le cm). Construire ce triangle.

Par un point  $K$  de  $[AH]$ , on mène la parallèle à  $(BC)$ . Elle coupe  $[AB]$  en  $M$  et  $[AC]$  en  $N$ .  $P$  et  $Q$  sont les projetés orthogonaux de  $M$  et  $N$  sur  $(BC)$ . On note  $AK = x$ .

1. Calculer en fonction de  $x$  l'aire  $a(x)$  du rectangle  $MNPQ$ .
2. Pour quelle valeur de  $x$  ce rectangle a-t-il une aire maximale ? Quelle est ce maximum ?

### 36★★ ————— Lycée Henri IV, Paris

15 min.

Un triangle  $ABC$  est tel que la hauteur issue de  $A$  a une longueur qui est la somme des longueurs des deux hauteurs. Montrer :

$$\frac{1}{\sin \widehat{A}} = \frac{1}{\sin \widehat{B}} + \frac{1}{\sin \widehat{C}}$$

### 37★★ ————— Lycée Louis-le-Grand, Paris

20 min.

$ABC$  est un triangle quelconque.

1. En utilisant la hauteur issue de  $B$  et les notations usuelles  $a = BC$ ,  $b = AC$  et  $c = AB$ , montrer que l'aire  $S$  du triangle vérifie :

$$S = \frac{bc \sin \widehat{A}}{2}$$

2. Écrire deux autres formules analogues (sans démonstration).
3. En déduire :

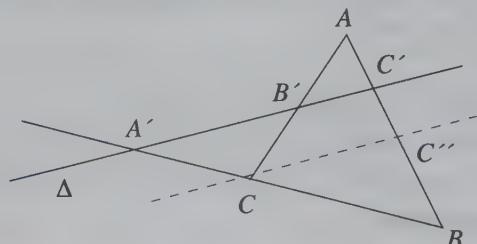
$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2S}$$

# 38★★

15 min.

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

On considère la figure ci-contre où  $(CC'')$  et  $\Delta$  sont parallèles.  $ABC$  est un triangle quelconque, et  $\Delta$  est une transversale quelconque.



Montrer :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1$$

# 39★★

15 min.

Lycée Louis-le-Grand, Paris

Deux cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont sécants en  $A$  et  $B$ . Soient  $P$  et  $Q$  les points diamétralement opposés à  $A$  sur chacun des cercles. Faire une figure et montrer que  $P$ ,  $B$  et  $Q$  sont alignés.

# 40★★★

15 min.

Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

$A$ ,  $B$ ,  $C$  sont trois points sur un cercle de centre  $O$ .  $D$  est le point diamétralement opposé à  $A$  sur le cercle.  $I$  est le milieu de  $[BC]$  et  $[AM]$ ,  $[BN]$ ,  $[CP]$  les trois hauteurs du triangle  $ABC$ .  $H$  est l'orthocentre de  $ABC$  et  $(AM)$  recoupe le cercle en  $H'$ .

1. Justifier que  $\widehat{ABD}$ ,  $\widehat{AH'D}$ ,  $\widehat{ACD}$  sont trois angles droits.
2. Montrer que  $BDCH$  est un parallélogramme et que  $I$  est le milieu de  $[DH]$ .
3. Montrer que  $M$  est le milieu de  $[HH']$ .

# 41★★★

30 min.

Lycée Hoche, Versailles

Soit  $ABCD$  un carré de centre  $O$ ;  $E \in [AB]$ ,  $F \in [BC]$ ,  $G \in [CD]$  et  $H \in [AD]$  tels que  $AE = BF = CG = DH$ . On veut montrer que  $EFGH$  est un carré.

1. (Méthode 1)
  - (a) Montrer que  $EBF$  et  $FCG$  sont isométriques. On admet que, de même,  $FCG$  et  $GDH$  sont isométriques, ainsi que  $GDH$  et  $HAE$ .
  - (b) En déduire que  $EFGH$  est un losange, puis un carré.
2. Soit  $r$  le quart de tour de centre  $O$  qui transforme  $A$  en  $B$ .
  - (a) Déterminer l'image de  $[AB]$ .

- (b) Montrer que l'image de  $E$  est  $F$ . On a de même :  $G = r(F)$ ,  $H = r(G)$ ,  $E = r(H)$ .
- (c) En déduire que  $E$ ,  $O$  et  $G$  sont alignés.
- (d) Montrer que  $EFGH$  est un parallélogramme, puis un carré.

## 42 ★★★ ————— Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

40 min.

Soit  $(\Gamma)$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 3 cm,  $(\mathcal{C})$  un cercle de centre  $I$ , de rayon 4 cm, passant par  $O$ .  $(\Gamma)$  et  $(\mathcal{C})$  se coupent en  $A$  et  $C$ . La droite  $(OA)$  recoupe  $(\Gamma)$  en  $B$  et coupe  $(IC)$  en  $D$ .

1. Montrer que  $(OI)$  est médiatrice de  $[AC]$ . En déduire que  $(OI)$  est parallèle à  $(BC)$ .
2. Montrer que les triangles  $OBC$  et  $OIC$  sont semblables. En déduire que  $BC = 2,25$  cm.
3. En déduire  $\frac{DC}{DI}$  et  $DC$ .

## 43 ★★★ ————— Lycée Albert Camus, Bois-Colombes

30 min.

Soit  $(\Gamma)$  le demi-cercle de centre  $O$  et de diamètre  $[AB]$ . Soit  $I$  le point d'intersection de  $(\Gamma)$  avec la médiatrice de  $[AB]$ . Soit  $M$  un point de  $\widehat{AI}$  et  $N$  tel que  $A$ ,  $M$  et  $N$  soient alignés dans cet ordre et  $MN = MB$ .

1. Quelle est la nature de  $AIB$  ? Justifier.
2. Déterminer la valeur de  $\widehat{IMB}$ . En déduire celle de  $\widehat{NMI}$ .
3. Montrer que  $INM$  et  $IBM$  sont isométriques.
4. Application :  $(\Gamma)$ ,  $A$ ,  $B$  et  $I$  sont fixes.  $M$  se déplace sur  $\widehat{AI}$ . Montrer que  $N$  se déplace sur un cercle fixe.

## 44 ★★★ ————— Lycée Louis-le-Grand, Paris

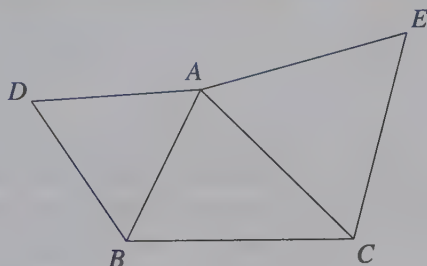
40 min.

$ABCD$  est un carré.  $E \in (AB)$ ,  $F \in (BC)$ ,  $G \in (CD)$ ,  $H \in (AD)$  tels qu'on ait  $(EG)$  orthogonale à  $(FH)$ .

1. Soit  $I$ , intersection de  $(EG)$  et  $(BC)$ , et  $J$ , celle de  $(FH)$  et  $(AB)$ . Montrer que  $(EF)$  et  $(IJ)$  sont orthogonales.
2. Comment choisir  $(EG)$  et  $(FH)$  pour que  $EFGH$  soit un carré ?



## 1 ————— Lycée Brizeux, Quimper

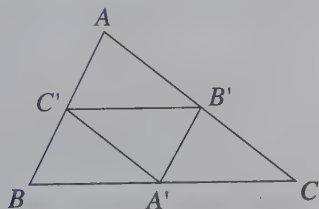


On constate :

1.  $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = \widehat{BAC} + 60^\circ$  et  $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = 60^\circ + \widehat{BAC}$   
donc  $\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ .
2.  $AE = AC$  car  $AEC$  est équilatéral.
3.  $AB = AD$  car  $ABD$  est équilatéral.

On en déduit que les triangles  $ABE$  et  $ADC$  sont isométriques ; les sommets  $A$ ,  $B$  et  $E$  ont respectivement pour homologues  $A$ ,  $D$  et  $C$ . D'où :  $CD = BE$ .

## 2 ————— Lycée Lamartine, Mâcon



1. D'après le théorème des milieux, appliqué dans le triangle  $ABC$ , on a :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{2}$$

Les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont donc de même forme.

2. D'après les calculs ci-dessus, 2 est le rapport des côtés de  $ABC$  à  $A'B'C'$ .

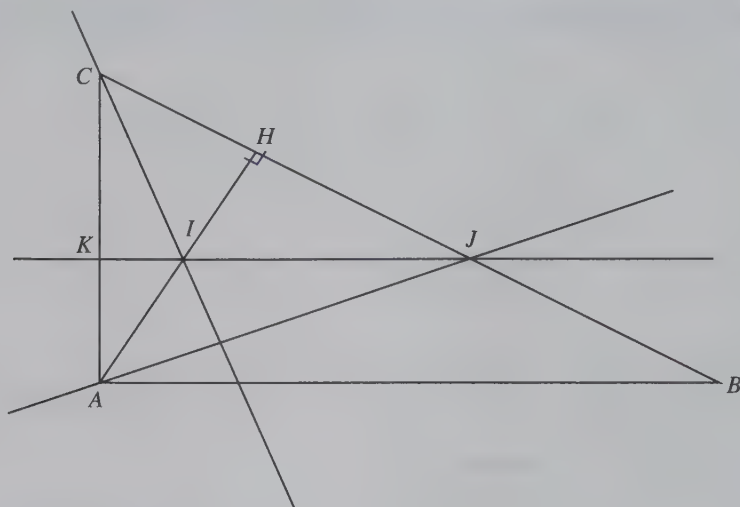
$$\text{Aire}(ABC) = 2^2 \times \text{Aire}(A'B'C') = 4 \times \text{Aire}(A'B'C')$$

## 3 ————— Lycée Romain Rolland, Ivry-sur-Seine

On considère le triangle  $AJC$ .

$(AH)$  est la hauteur issue de  $A$ .

Comme  $(JK)$  et  $(AB)$  sont parallèles et que  $(AB)$  et  $(AC)$  sont perpendiculaires, on en déduit que  $(JK)$  et  $(AC)$  sont perpendiculaires.  $(JK)$  est donc une hauteur de  $AJC$ . Finalement,  $I$  étant l'intersection des deux hauteurs  $(JK)$  et  $(AH)$ ,  $I$  est donc l'orthocentre du triangle  $AJC$ . En particulier,  $(CI)$  est une hauteur donc  $(CI)$  et  $(AJ)$  sont perpendiculaires.



#### 4 ——— Lycée Georges Brassens, Courcouronnes

1. Pour montrer que  $ABC$  et  $DEF$  sont isométriques, on utilise le théorème angle-côté-angle. On a :

- $\hat{A} = \hat{E} = 33^\circ$
- $\hat{C} = \hat{F} = 78^\circ$
- $AC = EF = 2,6$

donc les triangles  $DEF$  et  $ABC$  sont isométriques. (On peut donc en déduire  $BC = DF$  et  $DE = AB$ ).

2. Pour montrer que  $GHK$  et  $DEF$  sont isométriques, on utilise le théorème côté-angle-côté. On a :

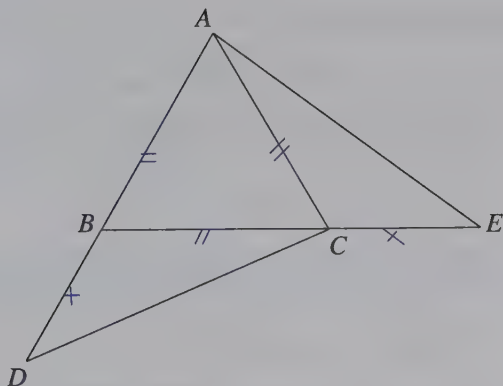
- $GH = DF$
- $\hat{H} = \hat{F}$
- $KH = FE$

On en conclut que  $GHK$  et  $DEF$  sont isométriques.

3. Comme  $ABC$  et  $DEF$  sont isométriques, et que  $DEF$  et  $GHK$  sont isométriques, alors  $ABC$  et  $GHK$  sont isométriques.

#### 5 ——— Lycée Claude Debussy, Saint-Germain-en-Laye

Notons sur la figure les longueurs égales :



On sait déjà que  $BD = CE$  et  $AC = BC$  (car  $ABC$  équilatéral), il suffit de montrer que  $BCD$  et  $ACE$  sont isométriques pour en déduire  $AE = CD$ . Comme on connaît l'égalité de deux côtés, il suffit de montrer que  $\widehat{DBC} = \widehat{ECA}$ . Or,  $\widehat{DBC}$  et  $\widehat{CBA}$  sont supplémentaires (somme égale à  $180^\circ$ ) et  $\widehat{CBA} = 60^\circ$  donc  $\widehat{DBC} = 120^\circ$ . De même,  $\widehat{ECA}$  et  $\widehat{ACB}$  sont supplémentaires, donc  $\widehat{ECA} = 120^\circ$ .  
Finalement, on applique le théorème côté-angle-côté :

- $DB = EC$
- $\widehat{DBC} = \widehat{ECA}$
- $BC = CA$

donc  $DBC$  et  $ECA$  sont isométriques, et donc  $AE = CD$ .

## 6 Lycée Pissarro, Pontoise

1.  $FBD$  est équilatéral, donc  $F$  est sur la médiatrice de  $[BD]$ .  $ABD$  est isocèle en  $A$  donc  $A$  est sur la médiatrice de  $[BD]$ . De même,  $C$  est sur la médiatrice de  $[BD]$ . On en déduit que  $A$ ,  $C$  et  $F$  sont alignés.
2. (a)
  - $BF = BD$  et  $\widehat{FBD} = 60^\circ$  donc  $D = r(F)$ .
  - $AB = IB$  et  $\widehat{ABI} = 60^\circ$  donc  $I = r(A)$ .
  - $CB = BJ$  et  $\widehat{CBJ} = 60^\circ$  donc  $J = r(C)$ .
- (b) Une rotation conserve l'alignement. Comme  $F$ ,  $A$  et  $C$  sont alignés, on en déduit que  $D$ ,  $I$  et  $J$  sont alignés.

## 7 Lycée Scheurer-Kestner, Thann

Dans le cercle  $(C')$ ,  $\widehat{MNP}$  et  $\widehat{MOP}$  sont respectivement un angle inscrit et un angle au centre qui interceptent le même arc, donc :

$$\widehat{MNP} = \frac{1}{2} \widehat{MOP}$$

On a  $\widehat{MOP} = \widehat{AOB}$  (angles opposés par le sommet).

Dans le cercle  $(C)$ ,  $\widehat{AOB}$  et  $\widehat{ADB}$  sont respectivement un angle au centre et un angle

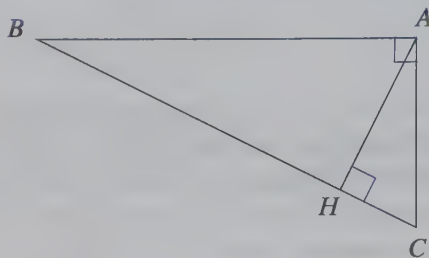
inscrit qui interceptent le même arc, donc :

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{ADB}$$

Il vient :  $\widehat{MNP} = \widehat{ADB}$ . Or, l'angle  $\widehat{BDC}$  est droit car  $D$  appartient au cercle de diamètre  $[BC]$ . D'où :

$$\widehat{ADB} = \widehat{ADC} - \widehat{BDC} = 105 - 90 = 15^\circ$$

## 8 Lycée Jacques Prévert, Pont-Audemer



1.  $AHC$  est rectangle en  $H$  et  $ABC$  est rectangle en  $A$ .  $\widehat{HCA} = \widehat{ACB}$  (même angle). Donc  $AHC$  et  $ABC$  sont semblables (deux angles égaux). Les sommets  $C$ ,  $H$  et  $A$  de  $AHC$  correspondent respectivement aux sommets  $C$ ,  $A$ ,  $B$  de  $ABC$ . De même,  $AHB$  et  $ABC$  sont semblables (échanger les noms des points  $B$  et  $C$ ) et les sommets  $B$ ,  $H$  et  $A$  de  $AHB$  correspondent respectivement à  $B$ ,  $A$  et  $C$  dans  $ABC$ .
2. D'après la question précédente,  $AHB$  et  $AHC$  sont semblables, les sommets  $A$ ,  $H$  et  $B$  de  $AHB$  correspondent respectivement à  $C$ ,  $H$  et  $A$  dans  $AHC$ . On en déduit :

$$\frac{AH}{HB} = \frac{HC}{HA}$$

et donc :

$$AH^2 = HB \times HC$$

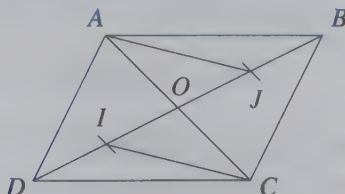
De même,  $ABC$  et  $ABH$  étant semblables, on a :

$$\frac{AB}{BH} = \frac{BC}{AB}$$

et donc :

$$AB^2 = BH \times AB$$

## 9 Lycée Colbert, Paris



On a bien envie d'utiliser le fait que  $O$  est le milieu de  $[IJ]$ , mais il faut le démontrer *proprement*. Notons  $S$  la symétrie de centre  $O$ .

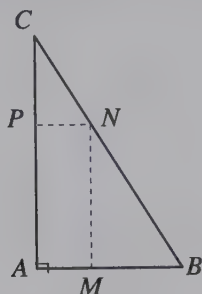
$O$  est le milieu de  $[DB]$ , donc  $S(D) = B$ . En outre,  $S(O) = O$ . La symétrie « conserve » le milieu donc l'image par  $S$  de  $I$ , milieu de  $[OD]$ , est le milieu de  $[OB]$ , c'est-à-dire  $J$ . En remarquant que  $S(C) = A$ , et sachant que la symétrie centrale conserve les distances, on déduit de  $S(I) = J$  que  $IC = JA$ .

## 10 Lycée Raspail, Paris

1. 
$$\begin{cases} (AP) \parallel (MN) & \text{car } (AP) = (AC) \text{ et } (AC) \parallel (MN) \\ (PN) \parallel (AM) & \text{car } (AM) = (AB) \text{ et } (PN) \parallel (AB) \end{cases}$$

donc  $APNM$  est un parallélogramme.

De plus, il y a un angle droit en  $A$ , donc  $APNM$  est un rectangle.



2.  $CPN$  et  $CAB$  sont semblables car leurs angles sont 2 à 2 de même mesure. De plus,  $PN = AM = x AB$ , on en déduit :

$$\text{Aire}(PNC) = x^2 \times \mathcal{A}$$

3.  $BNM$  et  $BCA$  sont semblables, puisque leurs angles sont 2 à 2 de même mesure. De plus,  $MB = AB - AM = (1 - x)AB$ . Par suite :

$$\text{Aire}(BNM) = (1 - x)^2 \times \mathcal{A}$$

4.

$$\begin{aligned} \text{Aire}(AMNP) &= \mathcal{A} - \text{Aire}(CPN) - \text{Aire}(BNM) \\ &= \mathcal{A} - x^2 \mathcal{A} - (1 - x)^2 \mathcal{A} \\ &= (1 - x^2 - (1 - x)^2) \mathcal{A} \\ &= (1 - x^2 - 1 + 2x - x^2) \mathcal{A} \\ &= 2x(1 - x) \mathcal{A} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} 2x(1 - x) &\geq \frac{1}{2} \iff x(1 - x) \geq \frac{1}{4} \\ &\iff x - x^2 - \frac{1}{4} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\iff -x \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0$$

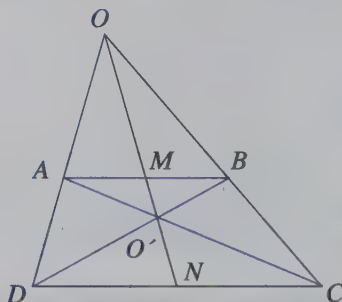
$$\iff \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0$$

$$\iff x - \frac{1}{2} = 0 \text{ (car un carré ne peut être négatif)}$$

$$\iff x = \frac{1}{2}$$

L'aire du rectangle est maximale quand  $x = \frac{1}{2}$ , donc quand  $M$  est le milieu de  $[AB]$ .

## 11 ————— Lycée Thiers, Marseille



1.  $OAB$  et  $OCD$  sont semblables car  $(AB) \parallel (CD)$ . On a :

$$\frac{BM}{CN} = \frac{BA}{CD} \text{ et } \frac{BA}{CD} = \frac{OB}{OC}$$

donc  $OMB$  et  $ONC$  sont semblables (en appliquant le théorème côté-angle-côté aux angles  $\hat{B}$  et  $\hat{C}$ ).

2. De la même façon,  $AO'B$  et  $CO'D$  sont semblables, donc  $O'MB$  et  $O'ND$  le sont également.

## 12 ————— Lycée François Villon, Paris

1.  $PST$  est rectangle en  $S$  d'après la figure de l'énoncé. Or  $\widehat{SPT} = 45^\circ$ . Donc  $\widehat{PTS} = 180 - 90 - 45 = 45^\circ$ . Le triangle  $PST$  est également isocèle (en  $S$ ).
2. De même,  $PRS$  est rectangle en  $S$ , et  $\widehat{SPR} = 20^\circ$ , donc :

$$\widehat{PRS} = 180 - 90 - 20 = 70^\circ$$

Comme  $(PQ) \parallel (RS)$ , les angles  $\widehat{QPR}$  et  $\widehat{PRS}$  sont alternes internes, donc égaux.

3. Dans le triangle  $PST$ , rectangle en  $S$  :

$$\frac{PS}{PT} = \cos \widehat{SPT} = \cos 45^\circ$$

donc  $PS = 7 \times \cos 45^\circ \simeq 4,9$ .

Dans le triangle  $PRS$ , rectangle en  $S$  :

$$\frac{PS}{PR} = \cos \widehat{RPS} = \cos 20^\circ$$

donc :

$$PR = \frac{PS}{\cos 20^\circ} = 7 \frac{\cos 45^\circ}{\cos 20^\circ} \simeq 5,3$$

Dans le triangle  $UPQ$ , rectangle en  $U$  :

$$\frac{UQ}{PQ} = \sin \widehat{UPQ} = \sin 70^\circ$$

d'où :

$$UQ = PQ \times \sin 70^\circ = 5 \sin 70^\circ = 4,7$$

Dans ce même triangle :

$$\frac{UP}{PQ} = \cos \widehat{UPQ} = \cos 70^\circ$$

donc  $UP = PQ \times \cos 70^\circ = 5 \cos 70^\circ$ .

Finalement,

$$UR = PR - PU = 7 \frac{\cos 45^\circ}{\cos 20^\circ} - 5 \cos 70^\circ \simeq 3,6$$

Dans le triangle  $QRU$ , rectangle en  $U$  :

$$\frac{QU}{RU} = \tan \widehat{QRU}$$

donc  $\tan \widehat{QRU} \simeq 1,32$ . D'où  $\widehat{QRU} \simeq 52,9^\circ$ .

4. L'aire de  $QPTR$  est la somme des aires de  $QPR$  et de  $PRT$ . Comme  $QU$  est une hauteur de  $QPR$  et  $PS$  une hauteur de  $PRT$ , l'aire cherchée est :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} QU \times PR + \frac{1}{2} RT \times SP$$

On connaît  $ST = PS \simeq 4,9$ . Calculons encore  $RS$ . Dans le triangle  $PRS$ , on a :

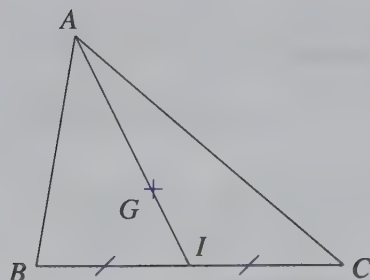
$$\tan 70^\circ = \frac{PS}{RS}$$

donc  $RS = \frac{PS}{\tan 70^\circ} \simeq 1,8$ . D'où  $RT \simeq 6,7$  et :

$$\mathcal{A} \simeq 28,8$$

## 13 ————— Lycée Henri IV, Paris

On sait que le centre de gravité se trouve au tiers de la médiane. Il suffit donc de construire le milieu  $I$  de  $[BC]$ , puis de reporter deux fois la longueur  $IG$  sur la médiane pour trouver  $A$ .



Autre méthode : on construit  $I$ , le milieu de  $[BC]$  et  $B'$ , symétrique de  $B$  par rapport à  $G$ . Par  $B'$ , on mène la droite  $(D)$ , parallèle à  $(CG)$ . Elle coupe  $(IG)$  en  $A$ .

Magique ? Non. On sait que  $(IG)$  sera une médiane de  $ABC$ , il est normal d'avoir  $A \in (IG)$ . Maintenant,  $G$  est milieu de  $[BB']$ . Par construction, la droite  $(CG)$  est parallèle à  $(B'A)$  et passe par le milieu de  $[BB']$ , donc elle passe également par le milieu de  $[AB]$ . C'est donc la médiane issue de  $C$  dans  $ABC$ .  $G$ , intersection de deux médianes, est bien le centre de gravité de  $ABC$ .

## 14 ————— Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Voir la figure à la fin du corrigé.

Telle qu'elle, l'égalité est assez difficile à comprendre, mais on peut la transformer en :

$$\frac{AC'}{AB} = \frac{AB'}{AC}$$

Ce qui fait apparaître des rapports de longueurs entre des points *alignés*. Il suffit d'appliquer correctement le théorème de Thalès.

En considérant les triangles  $AIC$  et  $B'CA'$ , en configuration de Thalès,

$$\frac{AB'}{AC} = \frac{IA'}{IC}$$

$I$  est le milieu de  $[BC]$ , donc  $IC = BI$ , d'où :

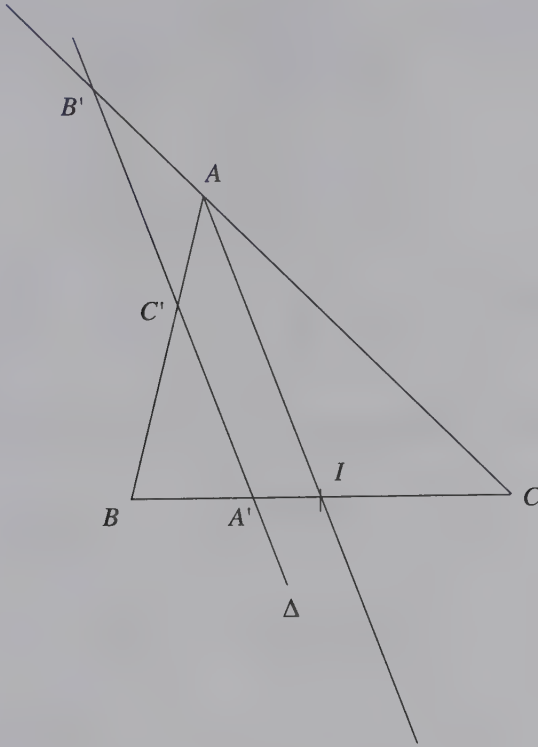
$$\frac{AB'}{AC} = \frac{IA'}{BI}$$

Les triangles  $BC'A'$  et  $BAI$  sont également en configuration de Thalès, donc :

$$\frac{IA'}{BI} = \frac{AC'}{BA}$$

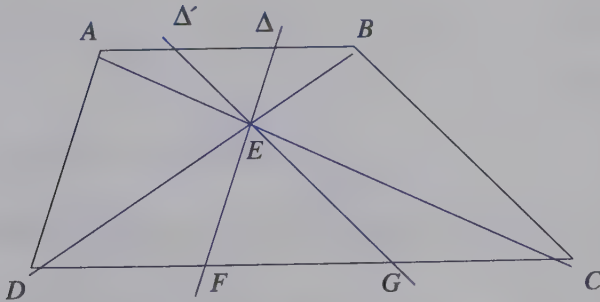
On conclut :

$$\frac{AB'}{AC} = \frac{AC'}{BA}$$



# 15 Lycée Kléber, Strasbourg

1.



2. Les triangles  $ACD$  et  $EFC$  sont en configuration de Thalès, donc :

$$\frac{DF}{DC} = \frac{AE}{AC}$$

En fait, l'énoncé classique du théorème donne seulement l'égalité :

$$\frac{CF}{CD} = \frac{CE}{AC}$$

Mais :

$$\frac{DF}{DC} = \frac{DC - FC}{CD} = 1 - \frac{FC}{CD}$$

et

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AC - EC}{AC} = 1 - \frac{EC}{AC}$$

on a donc bien :

$$\frac{DF}{DC} = \frac{AE}{AC}$$

Les triangles  $CDE$  et  $ABE$  sont en configuration de Thalès, donc :

$$\frac{BE}{DE} = \frac{AE}{EC}$$

Or :

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AE + EC}{AE} = 1 + \frac{EC}{AE}$$

et :

$$\frac{BD}{BE} = \frac{BE + ED}{BE} = 1 + \frac{AE}{EC}$$

On en déduit :

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BE}$$

et en inversant :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BE}{BD}$$

Enfin, les triangles  $DGE$  et  $DCB$  étant en configuration de Thalès, il vient comme ci-dessus :

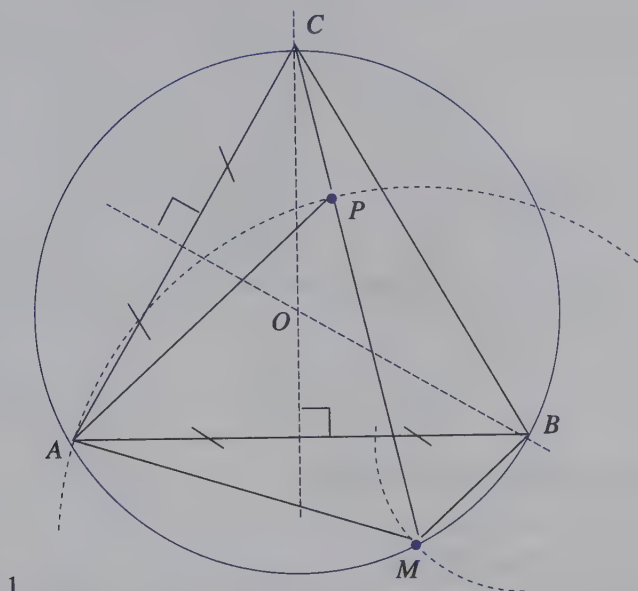
$$\frac{BE}{BD} = \frac{CG}{CD}$$

En rassemblant nos résultats, il vient :

$$\frac{CF}{CD} = \frac{AE}{AC} = \frac{BE}{BD} = \frac{CG}{CD}$$

et donc  $GC = DF$ .

## 16 ————— Lycée Évariste Galois, Sartrouville



1.

2. (a) Les angles  $\widehat{AMC}$  et  $\widehat{ABC}$  interceptent le même arc, donc  $\widehat{AMC} = \widehat{ABC}$ . Comme  $ABC$  est équilatéral, on en déduit :  $\widehat{AMC} = 60^\circ$ .

(b)  $AM = AP$  donc  $AMP$  est isocèle en  $A$ . On en déduit  $\widehat{APM} = \widehat{AMP}$ . Or  $\widehat{AMP} = \widehat{AMC}$  donc  $\widehat{APM} = 60^\circ$ . Le triangle  $AMP$  est donc équilatéral.

3. Comparer les deux triangles, c'est dire s'ils sont semblables ou isométriques. On constate :

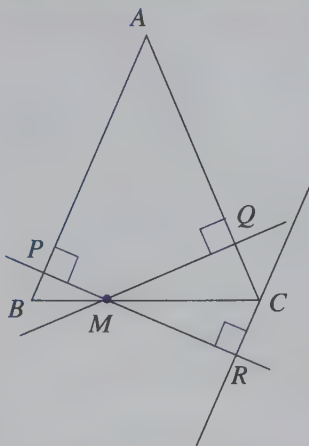
(a)  $AB = CA$  car  $ABC$  est équilatéral.

(b)  $AM = AP$  car  $AMP$  est équilatéral.

(c)  $\widehat{ACM} = \widehat{ABM}$  car ils interceptent le même arc. Comme  $\widehat{ACP} = \widehat{ACM}$ , il vient :  $\widehat{ABM} = \widehat{ACP}$ .

On en déduit que  $ABM$  et  $ACP$  sont isométriques ; les sommets  $A, B$  et  $M$  sont respectivement homologues à  $A, C$  et  $P$ . En particulier,  $MB = PC$ .

4. On a  $MB = PC$  et  $MA = MP$  donc  $MA + MB = MP + PC = MC$  (car  $M, P$  et  $C$  sont alignés et dans cet ordre).



1. On compare les triangles  $MQC$  et  $MRC$  :

(a)  $MC = MC$  (évidemment !)

(b)  $\widehat{MQC} = \widehat{MRC}$  (angles droits).

(c) La droite  $(PR)$  est orthogonale à  $(AB)$  et à  $(AC)$ , donc  $(CR)$  et  $(AB)$  sont parallèles. On en déduit que  $\widehat{CBA} = \widehat{BCR}$  (angles alternes internes). Comme  $ABC$  est isocèle en  $A$ , on a :  $\widehat{CBA} = \widehat{BCA}$ . Or,  $\widehat{BCA} = \widehat{MCQ}$  et  $\widehat{BCR} = \widehat{MCR}$  (mêmes demi-droites), d'où  $\widehat{MCQ} = \widehat{MCR}$ .

On en déduit que les triangles  $MCQ$  et  $MRC$  sont isométriques. Les sommets  $Q$ ,  $M$  et  $C$  sont homologues respectivement à  $R$ ,  $M$  et  $C$ .

2. D'après la question précédente,  $MQ = MR$ , donc

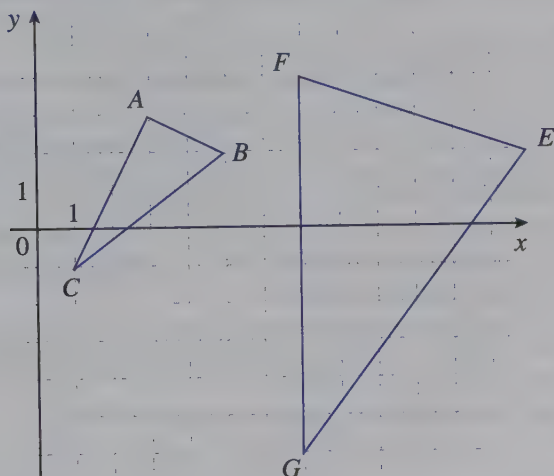
$$MP + MQ = MP + MR = PR$$

$PR$  est la distance entre les deux droites parallèles  $(AB)$  et  $(AC)$ . C'est donc une constante.

Cette distance est également celle du point  $C$  à la droite  $(AB)$ , c'est-à-dire la hauteur issue de  $C$  dans le triangle  $ABC$ .

## 18 ————— Lycée St Aspais, Fontainebleau

1.



2. Méthode 1 : on calcule les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Ces coordonnées sont proportionnelles donc les deux vecteurs sont *colinéaires* : les droites  $(AB)$  et  $(EF)$  sont donc parallèles.

Méthode 2 : On calcule le coefficient directeur des droites  $(AB)$  et  $(EF)$ . Pour  $(AB)$ , on a :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 3}{5 - 3} = \frac{-1}{2}$$

On obtient le même coefficient directeur pour la droite  $(EF)$ , donc  $(AB) \parallel (EF)$ .

3. On calcule les longueurs  $AB$ ,  $AC$  et  $BC$ , par la formule habituelle :

$$AB = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

De même,  $AC = 2\sqrt{5}$  et  $BC = 5$ .

On applique alors la réciproque du théorème de Pythagore :

$$AB^2 + AC^2 = 5 + 20 = 25 = BC^2$$

donc le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .

4. (a) On obtient :  $FG = 10$ ,  $EF = 2\sqrt{5}$  et  $EG = 4\sqrt{5}$ .

(b) On constate :

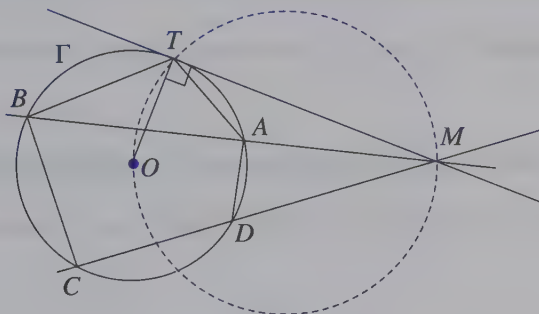
$$\frac{AB}{EF} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AC}{EG} = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$



2. (a)  $[AD]$  est un diamètre de  $\Gamma$  et  $C \in \Gamma$  donc  $ACD$  est rectangle en  $C$ . Pour la même raison,  $ABD$  est rectangle en  $B$ .
- (b)  $(BH) \perp (AC)$  car  $(BH)$  est une hauteur de  $ABC$ .  
 $(CD) \perp (AC)$  par  $ACD$  rectangle en  $C$ .  
 On en déduit que  $(BH) \parallel (CD)$ .  
 De même,  $(CH) \perp (AB)$  (car  $(CH)$  est une hauteur de  $ABC$ ) et  $(BD) \perp (AB)$  (car  $ABD$  est rectangle en  $B$ ) donc  $(CH) \parallel (BD)$ .
- (c)  $(BH) \parallel (CD)$  et  $(CH) \parallel (BD)$  donc  $BHCD$  est un parallélogramme. On en déduit que  $[BC]$  et  $[HD]$  ont même milieu.
3. (a) Dans le triangle  $HKD$ ,  $J$  est le milieu de  $[HK]$  et  $I$  est le milieu de  $[HD]$  donc  $(IJ) \parallel (DK)$  (droite des milieux).
- (b) On rappelle que  $I, J, B$  et  $C$  sont alignés car  $I$  est le milieu de  $[BC]$  et, comme  $H$  et  $K$  sont symétriques par rapport à  $(BC)$ , leur milieu  $J$  appartient à l'axe  $(BC)$ .  
 La symétrie de  $H$  et  $K$  justifie également que  $(BC) \perp (HK)$ . Or,  $(BC) \perp (AH)$  car  $(AH)$  est une hauteur de  $ABC$ , d'où  $(HK) \parallel (AH)$ , ce qui justifie que  $A, H, K$  (et  $J$ ) sont alignés.  
 En particulier  $(AK) = (AH)$  et  $(IJ) = (BC)$  donc  $(AK) \perp (IJ)$ . D'après la question (a), il vient :  $(KD) \perp (AK)$ .
4. Le triangle  $ADK$  est rectangle en  $K$ , donc son cercle circonscrit est le cercle diamètre  $[AD]$ , c'est-à-dire  $\Gamma$ . D'où  $K \in \Gamma$  (puisque  $\Gamma$  est circonscrit à  $ADK$  !)

## 20 ————— Lycée Louis Armand, Chambéry



1.  $\widehat{BMC} = \widehat{AMD}$  (mêmes demi-droites). Dans le cercle  $\Gamma$ , les angles  $\widehat{DCB}$  et  $\widehat{DAB}$  interceptent le même arc  $\widehat{BD}$ , et leurs sommets  $C$  et  $A$  sont de part et d'autre de la droite  $(BD)$  donc les angles  $\widehat{DCB}$  et  $\widehat{DAB}$  sont supplémentaires. Or,  $\widehat{MAD}$  et  $\widehat{DAB}$  sont supplémentaires, donc  $\widehat{MAD}$  et  $\widehat{DCB}$  sont égaux.  
 On en déduit que les triangles  $BMC$  et  $AMD$  sont semblables (ils ont deux angles égaux). Les points  $M, A, D$  sont respectivement analogues à  $M, C$  et  $D$
2. On en déduit que  $\frac{AM}{DM} = \frac{CM}{BM}$ , donc  $AM \times BM = CM \times DM$ .
3. Les points de la droite  $(OM)$  apparaissant dans l'ordre :  $M, E, O, F$ , on a  $ME = MO - OE = d - R$  et  $MF = MO + OF = d + R$ , donc :
- $$ME \times MF = (d - R) \times (d + R) = d^2 - R^2$$

4. La question (b) montrer que le produit  $MB \times MA$  est indépendant de la sécante choisie, puisqu'il est conservé si on prend une autre sécante.

En particulier,  $MB \times MA$  prend la même valeur que si l'on utilise une sécante qui passe par  $O$ . D'après le calcul du (c), on a donc  $MB \times MA = d^2 - R^2$ .

5.  $OMT$  est rectangle en  $T$ , donc  $OT^2 + MT^2 = OM^2$ , d'où  $MT^2 = OM^2 - OT^2 = d^2 - R^2$ . Il vient, d'après (d) :  $MT^2 = MA \times MB$ .

La tangente peut être considérée comme un cas-limite d'une sécante, où les deux points d'intersection  $A$  et  $B$  seraient confondus.

6. Comme  $MT^2 = MA \times MB$ , on a :  $\frac{MT}{MA} = \frac{MB}{MT}$ .

Par ailleurs,  $\widehat{AMT} = \widehat{BMT}$  (mêmes demi-droites). D'après le théorème côté-angle-côté, les triangles  $AMT$  et  $BMT$  sont semblables. Les points  $M$ ,  $A$  et  $T$  sont respectivement homologues de  $M$ ,  $T$  et  $B$ .

7. On déduit de (f) que  $\widehat{MBT} = \widehat{MTA}$ . Or,  $\widehat{ABT} = \widehat{MBT}$  (même demi-droites) donc  $\widehat{ABT} = \widehat{ATM}$ .

La valeur  $d^2 - R^2$  s'appelle la *puissance* du point  $M$  par rapport au cercle. Selon son signe, on peut vérifier que  $M$  est *extérieur* au cercle ( $d > R$ , donc  $d^2 - R^2 > 0$ ), sur le cercle ( $d = R$  donc  $d^2 - R^2 = 0$ ), ou à l'intérieur du cercle ( $d < R$  donc  $d^2 - R^2 < 0$ ).

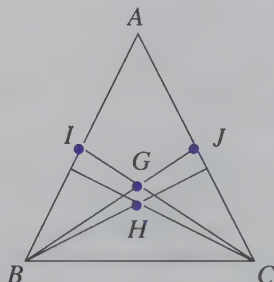
## 21 ————— Lycée Saint Jean, Douai

Par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $90^\circ$  :  $A$  a pour image  $A'$ ,  $B$  a pour image  $B'$  et  $C$  a pour image  $C'$ .

$A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés. Or la rotation conserve l'alignement donc  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont alignés.

## 22 ————— Lycée Jean Moulin, Lyon

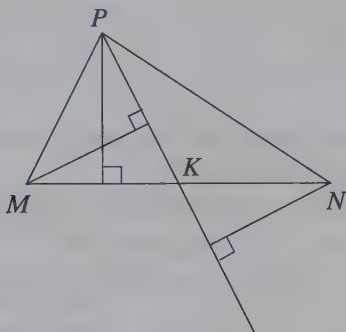
$ABC$  est isocèle en  $A$ , donc la médiatrice  $D$  de  $[BC]$  est axe de symétrie du triangle.



1. Les côtés  $[AB]$  et  $[AC]$  sont symétriques par rapport à  $D$ , donc leurs milieux  $I$  et  $J$  sont symétriques.

$J$  et  $B$  sont respectivement symétriques de  $I$  et  $C$  par rapport à  $D$ , donc  $JB = IC$  (conservation des longueurs).

- 23 ————— Lycée Hélène Boucher, Thionville



- $$\text{Aire}(MNP) = \frac{h \times MN}{2} = 2 \times \frac{h \times MK}{2} = 2\text{Aire}(MKP)$$

$$a = \frac{h_1 \times PK}{2} = \frac{h_2 \times PK}{2}$$

Ceci ne fait pas de  $(PK)$  la médiatrice de  $[MN]$ . Il faudrait pour cela que tous les *points* de  $(PK)$  soient équidistants de  $M$  et de  $N$ . Le seul point de  $(PK)$  qui vérifie cette propriété est...  $K$ , le milieu de  $[MN]$ . Sauf bien sûr si vous avez pris le cas particulier d'un triangle  $MNP$  isocèle en  $P$  (alors médiane issue de  $P$  et médiatrice de  $[MN]$  sont confondues).

## 24 ————— Lycée Francisque Sarcey, Dourdan

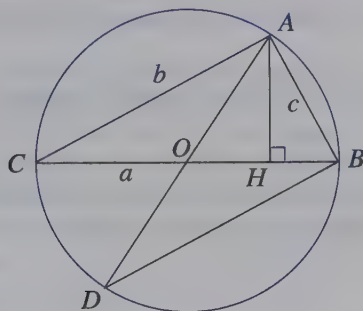
On commence par une figure, que l'on complétera au fur et à mesure :



Il vient immédiatement (produits en croix) :  $MH^2 = HN \times HP$ .

## 25 ————— Lycée René Cassin, Arpajon

On commence naturellement par une figure :



1. Les angles  $\widehat{ACH}$  et  $\widehat{ADB}$  sont des angles inscrits qui interceptent le même arc, ici :  $\widehat{AB}$ , donc  $\widehat{ACH} = \widehat{ADB}$ .

Le triangle  $ABD$  est inscrit dans un cercle de diamètre  $[AD]$  (car  $O$  est le milieu de  $[AD]$ ) donc  $ABD$  est rectangle en  $B$ . Par ailleurs,  $ACH$  est rectangle en  $H$  (car  $AH$ ) est une hauteur de  $ABC$ ) donc  $\widehat{CHA} = \widehat{BDA} = 90^\circ$ .

De là,  $ABD$  et  $CHA$  sont semblables. Les sommets  $A, B$  et  $D$  de  $ABD$  sont homologues de  $A, H, C$ .

2. On en déduit la relation de proportionnalité :

$$\frac{AH}{AB} = \frac{AC}{AD}$$

Or  $AD = 2R$  (diamètre du cercle circonscrit), d'où :

$$2R \times AH = AB \times AC$$

en effectuant les produits croisés.

3. On se rappelle la formule donnant l'aire d'un triangle :

$$\text{Aire} = \frac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{2}$$

D'où :

$$S = \frac{BC \times AH}{2}$$

D'après la question précédente, on a :

$$AH = \frac{AB \times AC}{2R}$$

Donc :

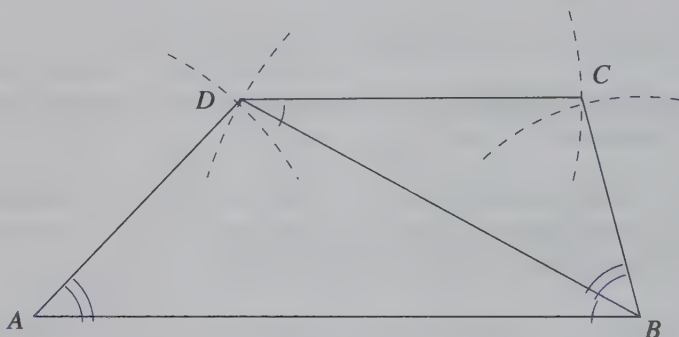
$$S = \frac{BC \times AB \times AC}{4R}$$

Ou encore (en multipliant les deux membres par  $\frac{R}{S}$ ) :

$$R = \frac{BC \times AB \times AC}{4S} = \frac{abc}{4S}$$

## 26 ————— Lycée du Bâtiment, Paris

1. On commence par fixer les points  $A$  et  $B$  tels que  $AB = 8$ . Le cercle de centre  $A$  et de rayon 4 et celui de centre  $B$  et de rayon 6 se coupent en deux points, on nomme  $D$  l'un d'entre eux. On a donc  $AB = 8$ ,  $AD = 4$  et  $BD = 6$ . De la même façon, le cercle de centre  $D$  et de rayon 4,5 coupe le cercle de centre  $B$  et de rayon 3 en deux points. On nomme l'un d'entre eux  $C$ , de sorte que  $C$  soit extérieur au triangle  $ABD$ . On a ainsi construit un quadrilatère, connaissant ses côtés et une diagonale.



2. Notons que dans  $ABD$  :  $AB = 8$ ,  $BD = 6$ ,  $AD = 4$  et dans  $BCD$  :  $BD = 6$ ,  $BC = 4,5$  et  $CD = 3$ . On remarque :

$$\begin{aligned}\frac{AB}{BD} &= \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ \frac{BD}{DC} &= \frac{6}{4,5} = \frac{4}{3} \\ \frac{AD}{BC} &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

donc :

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{DC} = \frac{AD}{BC} = \frac{4}{3}$$

On en déduit que les triangles  $ABD$  et  $BCD$  sont semblables.



Si on doit démontrer que des triangles sont semblables et qu'on ne connaît rien sur les angles, il faut démontrer que leurs côtés sont proportionnels. Il est conseillé d'écrire les trois côtés dans l'ordre (croissant ou décroissant) pour mieux se rendre compte de la proportionnalité et savoir quels quotients écrire (quotient des plus grands côtés, puis des intermédiaires, et enfin des plus petits).

3. On vient de voir que les triangles sont semblables, en particulier les côtés  $[AB]$ ,  $[BD]$  et  $[AD]$  de  $ABD$  sont homologues respectivement à  $[BD]$ ,  $[DC]$  et  $[BC]$

dans  $BCD$ .

Le point  $B$  de  $ABD$ , commun aux côtés  $[AB]$  et  $[BD]$ , correspond donc au point  $D$  dans  $BCD$ , commun aux côtés  $[BD]$  et  $[DC]$ .

On en déduit que  $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ . Comme  $C$  est extérieur à  $ABD$ , les angles  $\widehat{ABD}$  et  $\widehat{BDC}$  sont alternes-internes, donc  $(CD)$  et  $(AB)$  sont parallèles.  $ABCD$  est donc un trapèze.

## 27 ————— Lycée Jacques Prévert, Taverny

1. Montrons que  $ABD$  et  $IBC$  sont semblables. On sait que  $\widehat{ABD} = \widehat{IBC}$ . Par ailleurs,  $\widehat{ICB} = \widehat{ADB}$  car ce sont deux angles inscrits dans le cercle et qui interceptent le même arc :  $\widehat{AB}$ . On en déduit que les triangles  $ABD$  et  $IBC$  sont semblables, les sommets  $A, B$  et  $D$  de  $ABD$  correspondant respectivement à  $I, B$  et  $C$ . Les côtés sont proportionnels, donc :

$$\frac{AD}{IC} = \frac{BD}{BC}$$

Il vient donc  $AD \times BC = IC \times BD$ .

2. Montrons que  $ABI$  et  $DBC$  sont semblables.

- $\widehat{BAI} = \widehat{DBC}$  car ce sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc :  $\widehat{BC}$ .

•

$$\begin{aligned}\widehat{ABI} &= \widehat{ABD} + \widehat{DBI} \\ &= \widehat{IBC} + \widehat{DBI} \\ &= \widehat{DBC}\end{aligned}$$

$ABI$  et  $DBC$  sont donc semblables, les sommets  $A, B$  et  $I$  de  $ABI$  correspondant respectivement à  $D, B, C$  dans  $DBC$ .

On cherche une relation faisant intervenir  $AB$  et  $CD$ . Le côté  $[AB]$  de  $ABI$  correspond au côté  $[DB]$  de  $DBC$  ; le côté  $[CD]$  de  $DBC$  correspond au côté  $[AI]$  dans  $ABI$ . On obtient :

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AI}{CD}$$

et donc  $AB \times CD = DB \times AI$ .

3. Comme  $I$  est sur le segment  $[AC]$ , on a :  $AC = AI + IC$ . Finalement,

$$\begin{aligned}BD \times AC &= BD \times (AI + IC) \\ &= BD \times AI + BD \times IC \\ &= AB \times CD + AD \times BC\end{aligned}$$

## 28 ————— Lycée Camille Claudel, Palaiseau

1. Comme  $ABC$  est isocèle en  $A$ , on a  $AB = AC$ . De même,  $AD = AE$  car  $ADE$  est isocèle en  $A$ . Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\widehat{BAD} &= \widehat{BAC} + \widehat{CAD} \\ &= \widehat{DAE} + \widehat{CAD} \\ &= \widehat{CAD} + \widehat{DAE} \\ &= \widehat{CAE}\end{aligned}$$

On peut alors appliquer le théorème côté-angle-côté dans les triangles  $ABD$  et  $CAE$  :  $AB = AC$ ,  $AD = AE$  et  $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$  donc  $ABD$  et  $CAE$  sont isométriques. Comme  $ABD$  et  $CAE$  sont isométriques, on en déduit l'égalité des troisièmes côtés, c'est-à-dire :  $BD = CE$ .

2. Comme  $I$  est le milieu de  $[CE]$  et  $J$  celui de  $[BD]$ , on a  $BJ = CI = \frac{1}{2}BD$ .

Par ailleurs,  $AB = AC$  car  $ABC$  isocèle en  $C$ .

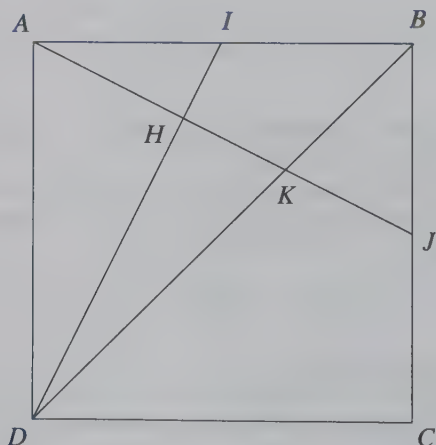
$\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$  car  $ABD$  et  $ACE$  sont isométriques. D'où  $\widehat{ABJ} = \widehat{ACI}$  (ce sont respectivement les mêmes angles que  $\widehat{ABD}$  et  $\widehat{ACE}$ ).

D'après le théorème côté-angle-côté appliqué dans les triangles  $ABJ$  et  $ACI$ , ce qui montre que  $ABJ$  et  $ACI$  sont isométriques. Les sommets  $A$ ,  $B$  et  $J$  de  $ABJ$  sont homologues aux sommets  $A$ ,  $C$  et  $I$  de  $ACI$ .

En particulier,  $AJ = AI$  donc  $AIJ$  est isocèle en  $A$ .

## 29 ————— Lycée Jean Vilar, Les Mureaux

- 1.



2. Appliquons le théorème côté-angle-côté dans les triangles  $ADI$  et  $AJB$ .

- $AD = AB$  (côtés du carré)
- $AI = BJ$  (demi-côtés)

- $\widehat{DAI} = \widehat{ABJ}$  (angles droits du carré)

donc  $ADI$  et  $ABJ$  sont isométriques.

3. Comparons les angles dans les triangles  $AIH$  et  $ABJ$  :

- $\widehat{HAI} = \widehat{BAJ}$  (c'est le même angle).
- $\widehat{AIH} = \widehat{AID}$  or  $\widehat{AID} = \widehat{AJB}$  car  $AID$  et  $AJB$  sont isométriques (question précédente).

$AIH$  et  $ABJ$  ont deux angles égaux, ils sont donc semblables. En comparant les angles aux sommets, on constate que les sommets  $A$ ,  $I$  et  $H$  de  $AIH$  sont homologues aux sommets  $A$ ,  $J$  et  $B$  de  $AJB$ .

Calculons la longueur  $AJ$ .  $ABJ$  est rectangle en  $B$ , donc d'après le théorème de Pythagore :

$$AJ^2 = AB^2 + BJ^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

D'où  $AJ = 2\sqrt{5}$  (environ 4,5 cm).

Le rapport de proportionnalité entre  $AIH$  et  $ABJ$  est donc donné par :

$$\frac{AJ}{AI} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

4. On peut voir géométriquement que le carré  $ABCD$  est recouvert par 4 triangles identiques à  $ABJ$ . On peut le vérifier par le calcul. Notons  $a$  le côté de  $ABCD$ .

Le carré a pour aire  $a^2$ .

L'aire du triangle  $ABJ$  est :

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} \times AB \times BJ = \frac{1}{2} \times a \times \frac{a}{2} = \frac{1}{4}a^2$$

D'après la question précédente, l'aire du triangle  $AIH$  vaut :

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{A}_1}{5} = \frac{a^2}{20}$$

(Attention : appliqué aux aires, le coefficient de proportionnalité de  $\sqrt{5}$  doit être élevé au carré).

5.  $AKD$  et  $BKJ$  sont semblables car ils sont en configuration de Thalès. On peut également le justifier en disant que  $\widehat{AKD} = \widehat{BKJ}$  (angles opposés par le sommet) et, comme  $(AD) \parallel (BJ)$ , on a :  $\widehat{ADK} = \widehat{KBJ}$  (angles alternes internes). Les sommets  $A$ ,  $K$ ,  $D$  de  $AKD$  correspondent respectivement à  $J$ ,  $K$  et  $B$  dans  $BKJ$ . Le rapport de proportionnalité est donné par :

$$\frac{BJ}{AD} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que  $AK = 2KJ$ , et donc  $AK = \frac{2}{3}AJ = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ . D'après la question

précédente,  $AH = \frac{1}{\sqrt{5}}AB = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ .

Finalement,

$$HK = AK - AH$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4\sqrt{5}}{3} - \frac{4\sqrt{5}}{5} \\
 &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \times 4\sqrt{5} \\
 &= \frac{2}{15} \times 4\sqrt{5} = \frac{8\sqrt{5}}{15}
 \end{aligned}$$

soit environ 1,2 cm.

Calculons maintenant  $DH$ . On a évidemment  $DI = AJ = 2\sqrt{5}$  et, d'après les questions précédentes,

$$HI = \frac{BJ}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

On conclut :

$$DH = DI - HI = 2\sqrt{5} - \frac{2}{5}\sqrt{5} = \frac{8}{5}\sqrt{5}$$

(environ 3,6 cm).

$AHI$  est semblable à  $ABJ$ , donc rectangle en  $H$ .  $HKD$  est donc également rectangle en  $H$ , donc son aire est :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_2 &= \frac{1}{2} HD \times HK \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{8}{5}\sqrt{5} \times \frac{8\sqrt{5}}{15} \\
 &= \frac{8 \times 8 \times 5}{2 \times 5 \times 15} = \frac{32}{15}
 \end{aligned}$$

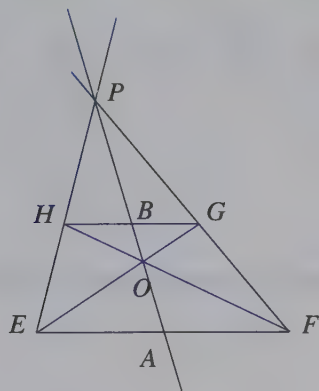
soit environ 2,13 cm<sup>2</sup>.

6.  $HKD$  et  $AHI$  ne sont pas semblables, car leurs côtés ne sont pas proportionnels. En effet, si on effectue le rapport des côtés adjacents à l'angle droit, on obtient :

$$\frac{HI}{AH} = \frac{1}{2}$$

alors que

$$\frac{HK}{HD} = \frac{1}{3}$$



Les triangles  $OBG$  et  $OA E$  sont semblables, car leurs angles en  $O$  sont opposés par le sommet (donc égaux) ;  $\widehat{B} = \widehat{A}$  et  $\widehat{G} = \widehat{E}$  (ces angles sont alternes internes car  $(GH)$  et  $(EF)$  sont parallèles). Les sommets  $O$ ,  $B$  et  $G$  correspondent respectivement à  $O$ ,  $A$  et  $E$ , et donc :

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OG}{OE}$$

De même,  $OGH$  et  $OEF$  sont semblables :

$$\begin{aligned}\widehat{O} &\leftrightarrow \widehat{O} \\ \widehat{G} &\leftrightarrow \widehat{E} \\ \widehat{H} &\leftrightarrow \widehat{F}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{OG}{OE} = \frac{HG}{FE}$$

On utilise maintenant que  $GPH$  et  $EFP$  sont semblables :

$$\begin{aligned}\widehat{P} &\leftrightarrow \widehat{P} \\ \widehat{G} &\leftrightarrow \widehat{F} \\ \widehat{H} &\leftrightarrow \widehat{E}\end{aligned}$$

Il vient :

$$\frac{HG}{EF} = \frac{PG}{PF}$$

Enfin,  $PGB$  et  $PFA$  étant semblables :

$$\begin{aligned}\widehat{P} &\leftrightarrow \widehat{P} \\ \widehat{G} &\leftrightarrow \widehat{F} \\ \widehat{B} &\leftrightarrow \widehat{A}\end{aligned}$$

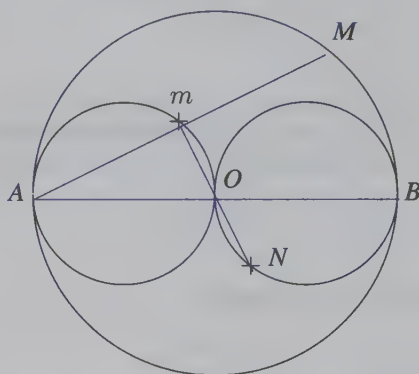
et donc :

$$\frac{PG}{PF} = \frac{PB}{PA}$$

Finalement :

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OG}{OE} = \frac{HG}{FE} = \frac{PG}{PF} = \frac{PB}{PA}$$

## 31 ————— Lycée Français, Bruxelles



1. Pour montrer que  $m$  appartient au cercle de diamètre  $[AO]$ , il suffit de montrer que  $AOm$  est rectangle en  $m$ .

Dans le triangle  $AMB$ ,  $O$  est le milieu de  $[AB]$  et  $m$  est le milieu de  $[AM]$ , donc la droite  $(Om)$  est parallèle à  $(MB)$  (droite des milieux).

Or  $M$  est sur le cercle de diamètre  $[AB]$ , donc  $AMB$  est rectangle en  $M$ .

On a  $(Om) \parallel (MB)$  et  $(MB) \perp (AM)$  donc  $(Om) \perp (AM)$ , ce qui montre que  $AOm$  est bien rectangle en  $m$ , et donc  $m$  est sur le cercle de diamètre  $[AO]$ .

2. Comparons les triangles  $AOm$  et  $BON$  :

$Om = ON$  car  $m$  et  $N$  sont symétriques par rapport à  $O$  ;

$OB = OA$  car  $O$  le centre du cercle de diamètre  $[AB]$  ;

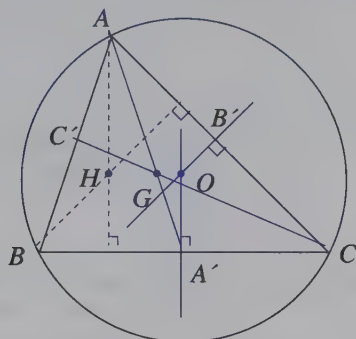
$\widehat{AOm} = \widehat{BON}$  (angles opposés par le sommet).

D'après le théorème côté-angle-côté, les deux triangles sont isométriques, et les sommets  $A$ ,  $O$ , et  $m$  de  $AOm$  correspondent à  $B$ ,  $O$  et  $N$  dans  $BON$ .

On en déduit que  $BON$  est rectangle en  $N$ , et donc  $N$  est sur le cercle de diamètre  $[OB]$ .

# 32

Lycée Thiers, Marseille



1. Dans  $ABC$ ,  $A'$  est le milieu de  $[BC]$  et  $B'$  celui de  $[AC]$ . D'après une propriété vue au collège (qui est en fait un cas particulier du théorème de Thalès), on a :

$$A'B' = \frac{1}{2}AB$$

De même,  $A'C' = \frac{1}{2}AC$  et  $B'C' = \frac{1}{2}BC$ . On en déduit que les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont semblables, le coefficient de proportionnalité étant de  $\frac{1}{2}$ .

2. D'après la propriété de la droite des milieux,  $(B'C') \parallel (BC)$ .

$O$  est le centre du cercle circonscrit à  $ABC$ , c'est l'intersection des médiatrices des côtés de  $ABC$ , donc en particulier  $(OA')$  est la médiatrice de  $[BC]$  et  $(OA') \perp (BC)$ .

D'où  $(OA') \perp (B'C')$ .  $(OA')$  est donc la hauteur issue de  $A'$  dans  $A'B'C'$ .

De la même façon, on montre que  $(OB')$  et  $(OC')$  sont les autres hauteurs de  $A'B'C'$ .  $O$  est l'intersection des hauteurs, c'est l'orthocentre de  $A'B'C'$ .

3. Comme  $(B'C') \parallel (BC)$  et  $(BC') \parallel (A'B')$ ,  $A'B'C'B$  est un parallélogramme, et donc  $(BB')$  coupe  $[A'C']$  en son milieu. C'est donc la médiane de  $A'B'C'$ , issue de  $B'$ . Or  $(GB') = (BB')$ , ce qui répond à la question posée. Finalement, est l'intersection de  $(GB')$ ,  $(GA')$  et  $(GC')$ , qui sont les médianes de  $A'B'C'$ .  $G$  est donc le centre de gravité de  $A'B'C'$ .

# 33

Lycée Louis-le-Grand, Paris

1.  $ACD$  est isocèle et rectangle en  $A$ , donc  $r$  est un quart de tour. Comme  $ABE$  est isocèle et rectangle en  $A$ , la même rotation transforme  $E$  en  $B$  (on tourne dans les deux cas dans le sens inverse des aiguilles d'une montre). d'où  $r(E) = B$ .





Il vient :  $MK = \frac{3x}{4}$  et  $KN = \frac{5x}{4}$ , d'où  $MN = 2x$ . On calcule donc facilement l'aire du rectangle :

$$a(x) = MN \times MP = 2x(4 - x)$$

2. Il faut écrire :

$$a(x) = -2(x^2 - 4x)$$

On reconnaît dans  $x^2 - 4x$  le début d'un produit remarquable :

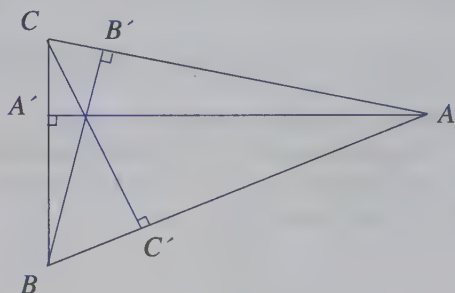
$$= -2[x^2 - 4x + 4 - 4]$$

$$= -2[(x - 2)^2 - 4]$$

$$= 8 - 2(x - 2)^2$$

Cette dernière écriture fait apparaître que  $a(x)$  est toujours inférieure à 8, avec égalité si  $(x - 2)^2 = 0$ , c'est-à-dire si  $x = 2$ . L'aire du rectangle atteint alors son maximum :  $a(2) = 8$ .

## 36 ————— Lycée Henri IV, Paris



Notons  $h$  la hauteur issue de  $A$ ,  $h_1$  celle issue de  $C$  et  $h_2$  celle issue de  $B$ , et notons  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les pieds des hauteurs issues de  $A$ ,  $B$ , et  $C$ .

En considérant le triangle  $ABA'$ , rectangle en  $A'$ , on constate :

$$\sin \widehat{B} = \frac{h}{AB}$$

En considérant le triangle  $ACA'$ , rectangle en  $A'$ , on a :

$$\sin \widehat{C} = \frac{h}{AC}$$

Dans le triangle  $ACC'$ , rectangle en  $C'$ , on a :

$$\sin \widehat{A} = \frac{h_1}{AC}$$

Dans le triangle  $ABB'$ , rectangle en  $B'$ , on a :

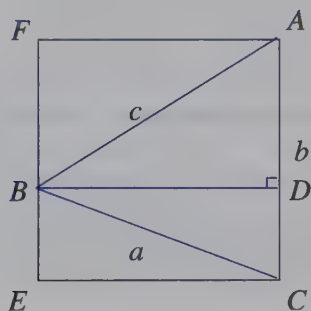
$$\sin \widehat{A} = \frac{h_2}{AB}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sin \widehat{B}} + \frac{1}{\sin \widehat{C}} &= \frac{AB}{h} + \frac{AC}{h} \\
 &= \frac{1}{h} \left( \frac{h_2}{\sin \widehat{A}} + \frac{h_1}{\sin \widehat{A}} \right) \\
 &= \frac{1}{h \sin \widehat{A}} \times (h_2 + h_1) \\
 &= \frac{1}{h \sin \widehat{A}} \times h \\
 &= \frac{1}{\sin \widehat{A}}
 \end{aligned}$$

## 37 ————— Lycée Louis-le-Grand, Paris

1.



À partir de  $[AC]$ , on construit un carré  $ACEF$  tel que  $B \in [EF]$ . Appelons  $D$  le pied de la hauteur issue de  $B$  dans le triangle  $ABC$ .

En considérant tour à tour le triangle  $ABD$  et le rectangle  $ADBF$ , puis le triangle  $BCD$  et le rectangle  $BECD$ , on montre facilement que l'aire du carré  $ACEF$  vaut le double de l'aire de  $ABC$ . On peut calculer la longueur du côté du carré en prenant la longueur de la hauteur issue de  $B$  dans  $ABC$ . Dans le triangle  $ABD$ , on peut écrire  $BD = AB \sin \widehat{A}$  donc  $BD = c \sin \widehat{A}$ . Finalement, l'aire du carré est :

$$BD \times AC = c \sin \widehat{A} \times b$$

et donc l'aire du triangle  $ABC$  est :

$$S = \frac{bc \sin \widehat{A}}{2}$$

2. De même,

$$S = \frac{ab \sin \widehat{C}}{2} \text{ et } S = \frac{ac \sin \widehat{B}}{2}$$

3. Il n'y a qu'à remplacer successivement  $S$  par chacune des formules trouvées plus haut pour démontrer le résultat. Par exemple,

$$\frac{abc}{2S} = \frac{abc}{bc \sin \widehat{A}} = \frac{a}{\sin \widehat{A}}$$

## 38 ————— Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Il faut appliquer correctement le théorème de Thalès à deux endroits de la figure. On remarque que les triangles  $A'BC'$  et  $CBC''$  sont en configuration de Thalès, donc

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{C'B}{C'C''}$$

De même, les triangles  $AB'C'$  et  $ACC''$  sont en configuration de Thalès, donc :

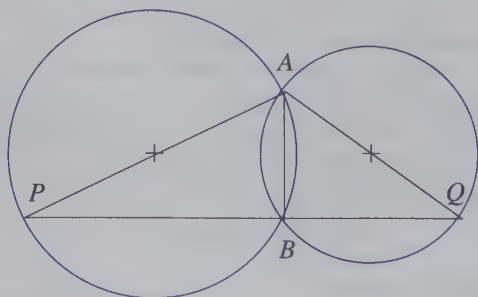
$$\frac{B'C}{B'A} = \frac{C'C''}{C'A}$$

Il vient enfin :

$$\frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} \times \frac{C'A}{C'B} = \frac{C'B}{C'C''} \times \frac{C'C''}{C'A} \times \frac{C'A}{C'B} = 1$$

## 39 ————— Lycée Louis-le-Grand, Paris

$B$  appartenant au cercle de diamètre  $[AP]$ , le triangle  $ABP$  est rectangle en  $B$ , donc  $(BP) \perp (AB)$ .  $B$  appartenant au cercle de diamètre  $[AQ]$ ,  $ABQ$  est rectangle en  $B$ , donc  $(BQ) \perp (AB)$ . On en déduit que  $(BP)$  et  $(BQ)$  sont parallèles, donc confondues, puisqu'elles contiennent toutes les deux le point  $B$ .



Conclusion :  $B$ ,  $P$  et  $Q$  sont alignés.

## 40 ————— Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

1. Vous avez déjà vu ce résultat en quatrième : le triangle formé par un point d'un cercle et son diamètre est rectangle, et le diamètre est l'hypoténuse. Ce qui permet d'affirmer que, puisque  $[AD]$  est un diamètre du cercle,  $\widehat{ABD}$ ,  $\widehat{AH'D}$  et  $\widehat{ACD}$  sont des angles droits.



- $CF = BC - BF = BA - AE = BE$ .
- $\widehat{GCF} = \widehat{FBE}$  (angles droits dans le carré  $ABCD$ ).

Donc  $EBF$  et  $FCG$  sont isométriques, d'après le théorème côté-angle-côté. En particulier,  $FG = EF$ .

- (b) De la même façon, on démontre  $EF = FG = GH = HE$ , donc  $EFGH$  est un losange. Montrons que l'angle  $\widehat{EFG}$  est droit.

Comme  $FCG$  et  $EBF$  sont isométriques, on sait que  $\widehat{CFG} = \widehat{BEF}$ .

Le triangle  $EBF$  est rectangle en  $B$ , donc  $\widehat{BEF} + \widehat{EFB} = 90^\circ$ .

On en conclut que  $\widehat{CFG} + \widehat{EFB} = 90^\circ$ . Or  $\widehat{CFG} + \widehat{GFE} + \widehat{EFB} = 180^\circ$  donc  $\widehat{GFE} = 90^\circ$ .  $EFGH$  est donc un carré.

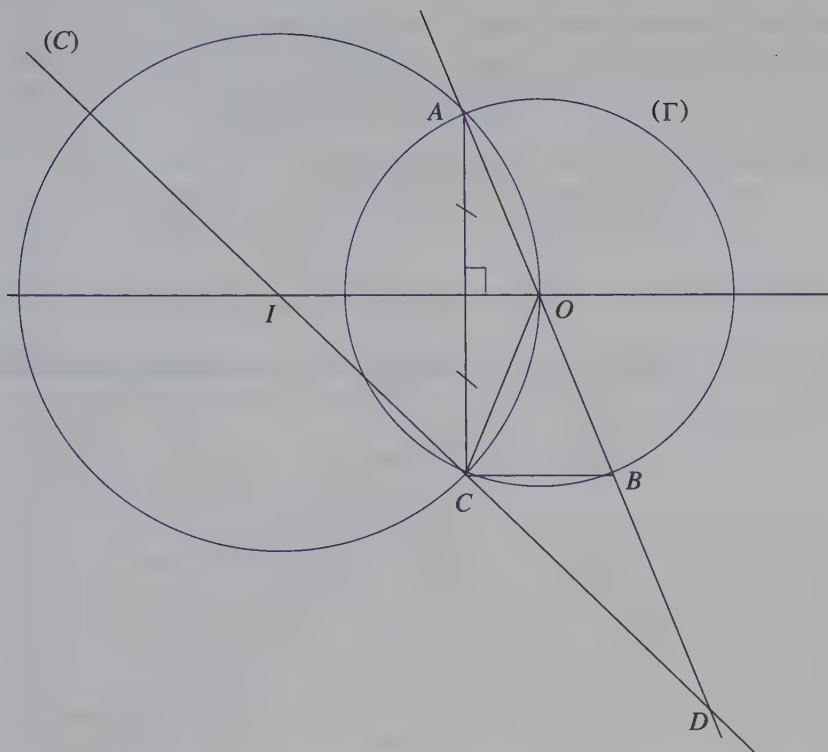
2. (a)  $r(A) = B$  et  $r(B) = C$  donc l'image de  $[AB]$  et  $[BC]$ .

- (b) Notons provisoirement  $E' = r(E)$ . Comme  $E \in [AB]$ , son image  $E'$  est un élément de  $[BC]$ .

Comme une rotation conserve les distances,  $r(A) = B$  et  $r(E) = E'$  justifient :  $AE = BE'$ . Or  $AE = BF$ .  $E'$  est donc un point de  $[BC]$  à la distance  $BF$  de  $B$ . C'est donc tout simplement  $F$ .

- (c)  $F = r(E)$  et  $G = r(F)$ . On passe de  $E$  à  $G$  par deux quarts de tour de centre  $O$ , donc de  $E$  à  $G$  par un demi-tour.  $O$  est donc le milieu de  $[EG]$ .

- (d) De même,  $O$  est le milieu de  $[FH]$ . Comme  $[EG]$  et  $[FH]$  ont même milieu,  $EFGH$  est donc un parallélogramme, dont les diagonales ont même longueur (car  $OE = OF = OG = OH$ ), donc un rectangle.  $r(E) = F$  donc  $(OE)$  et  $(OF)$  sont orthogonaux. Les diagonales du rectangle  $EFGH$  sont orthogonales, donc  $EFGH$  est un carré.



1. Comme  $A$  et  $C$  sont des points de  $(C)$ , on a  $IA = IC$ . Comme ce sont également des points de  $(\Gamma)$ , on a  $OA = OC$ .  $O$  et  $I$  sont équidistants de  $A$  et de  $C$ , ils sont donc sur la médiatrice de  $[AC]$ . On en déduit que  $(OI)$  est la médiatrice de  $[AC]$ .  $[AB]$  est un diamètre du cercle  $(\Gamma)$  donc  $ABC$  est rectangle en  $C$ . On a  $(OI) \perp (AC)$  car  $(OI)$  est la médiatrice de  $[AC]$ , et  $(AC) \perp (BC)$  car  $ABC$  est rectangle en  $C$ , donc  $(OI) \parallel (BC)$ .

2. On a  $\widehat{BCO} = \widehat{IOC}$  (angles alternes internes).  
 $OB = OC$  (car  $B$  et  $C$  sont sur le cercle  $(\Gamma)$ ) donc  $OBC$  est isocèle en  $O$ .  
 $IO = IC$  (car  $C$  et  $O$  sont sur le cercle  $(C)$ ) donc  $IOC$  est isocèle en  $I$ .  
On en déduit que  $\widehat{CBO} = \widehat{OCB} = \widehat{COI} = \widehat{ICO}$ . Les triangles  $IOC$  et  $OCB$  ont deux paires d'angles au sommet égaux, ils sont donc semblables. Les sommets  $I$ ,  $O$ , et  $C$  de  $IOC$  sont homologues respectivement à  $O$ ,  $B$  et  $C$  dans  $OCB$ . On a en particulier :

$$\frac{BC}{OC} = \frac{OC}{IC}$$

donc :

$$BC = OC \times \frac{OC}{IC} = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ cm}$$

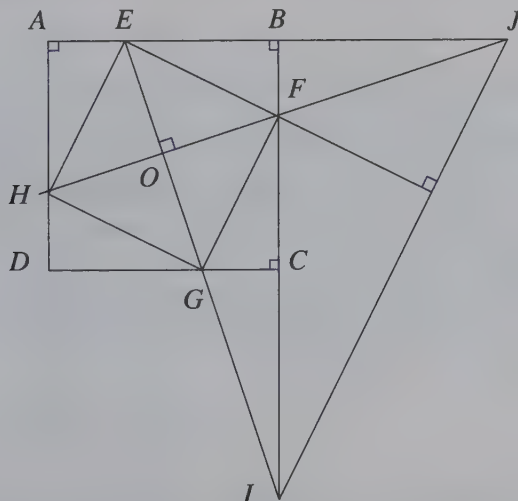
3.  $(OI) \parallel (BC)$ , donc on peut appliquer le théorème de Thalès dans les triangles  $OID$



3. Les triangles  $IMN$  et  $IBM$  ont le côté  $[IM]$  en commun ;  $MN = BM$  par hypothèse ; de plus  $\widehat{IMN} = \widehat{IMB} = 45^\circ$ . D'après le théorème côté-angle-côté, les triangles  $IMN$  et  $IBM$  sont isométriques, les sommets  $I$ ,  $M$  et  $N$  de  $IMN$  étant homologues aux sommets  $I$ ,  $M$  et  $B$  de  $IBM$ .
4. D'après le résultat précédent, on a également  $IN = IB$ . Donc  $N$  appartient au cercle de centre  $I$  et de rayon  $IB$ . Un calcul (non demandé) montre que  $IB = OB\sqrt{2}$ .

## 44 ————— Lycée Louis-le-Grand, Paris

1. Il faut considérer les hauteurs du triangle  $EIJ$ .  $(AB)$  et  $(BC)$  (donc  $(BI)$ ) sont perpendiculaires, ce qui fait de  $(BI)$  une hauteur de  $EIJ$ .  $(EG)$  et  $(HF)$  sont perpendiculaires, donc  $(EI) \perp (FJ)$  et  $(FJ)$  est une deuxième hauteur de  $EIJ$ . Sachant que  $(BI)$  et  $(FJ)$  se coupent en  $F$ ,  $F$  est l'orthocentre de  $EIJ$ , et donc  $(EF)$ , hauteur, est perpendiculaire à  $(IJ)$ .
2. Notons  $K$  l'intersection des diagonales de  $EFGH$ . Si l'on suppose que  $EFGH$  est un carré,  $K$  est le milieu de  $[EG]$  et de  $[FH]$ . Montrons que  $K$  est le milieu de  $[AC]$ . En appelant  $S$  la symétrie centrale de centre  $K$ , on constate que  $S(H) = F$ . L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle, donc l'image de  $(AD)$ , droite contenant  $H$ , est une droite parallèle qui passe par  $F$ , c'est-à-dire  $(BC)$ . De même,  $S(E) = G$ , et on montre que l'image de  $(AB)$  est  $(DC)$ .  $A$  est l'intersection de  $(AD)$  et  $(AB)$ , donc  $S(A)$  est l'intersection de  $(BC)$  et  $(DC)$ . Il vient  $S(A) = C$ , donc  $K$  est le milieu de  $[AC]$ , et  $K$  est le centre du carré  $ABCD$ .



Dans un deuxième temps, supposons que  $(EG)$  et  $(FH)$  se coupent au centre de  $ABCD$ , que nous notons  $O$ , et montrons que  $EFGH$  est un carré.

Montrons que  $O$  est le milieu des diagonales de  $EFGH$ .

Les triangles  $AOH$  et  $OFC$  sont en configuration de Thalès, donc

$$\frac{OF}{OH} = \frac{OC}{OA} = 1$$

Ce qui montre que  $OF = OH$ , donc  $O$  est le milieu de  $[FH]$ .

De même,  $O$  est le milieu de  $[EG]$ .

On sait désormais que  $EFGH$  est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires. C'est donc un losange. Pour prouver que c'est un carré, nous allons démontrer que ses diagonales ont même longueur.

Les triangles  $EBI$  et  $GCI$  sont en configuration de Thalès, donc :

$$\frac{EG}{EI} = \frac{BC}{BI}$$

De même, les triangles  $JAH$  et  $JBH$  sont en configuration de Thalès, on en déduit :

$$\frac{HF}{HJ} = \frac{AB}{AJ}$$

On en déduit les égalités :

$$EG = BC \times \frac{EI}{BI} \text{ et } HF = BA \times \frac{HJ}{AJ}$$

En calculant l'aire du triangle  $EIJ$  de deux façons différentes, on obtient (entre autres) l'égalité :

$$OJ \times EI = BI \times EJ$$

et donc

$$\frac{EI}{BI} = \frac{EJ}{OJ}$$

Il vient :

$$EG = BC \times \frac{EJ}{OJ}$$

Observons le triangle  $EOJ$  rectangle en  $O$ . On peut écrire  $\cos \widehat{EJO} = \frac{OJ}{EJ}$ . Dans le triangle  $AHJ$ , rectangle en  $A$ , on peut écrire  $\cos \widehat{AJH} = \frac{AJ}{AH}$ .  $\widehat{EJO} = \widehat{AJH}$ , donc  $\frac{OJ}{EJ} = \frac{AJ}{AH}$  et :

$$\frac{EJ}{OJ} = \frac{AH}{AJ}$$

En utilisant que  $BC = AB$ , on écrit :

$$EG = BC \times \frac{AH}{AJ} = AB \times \frac{AH}{AJ} = HF$$

Le quadrilatère  $EFGH$  est un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires, se coupent en leur milieu, et ont même longueur, c'est donc un carré.

# Coordonnées et systèmes linéaires

Bien que l'idée qui la sous-tend soit ridiculement simple,  
la méthode de la géométrie analytique est si puissante  
que de vulgaires gamins peuvent s'en servir  
pour démontrer des résultats qui auraient laissé pantois  
les grands mathématiciens grecs : Euclide, Archimède ou Apollonius.  
(Bell)

## 7.1 Repérage

### 7.1.1 Exercice type n° 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points  $A(-3; 0)$ ,  $B(-6; -3)$  et  $C\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$ .

1. Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.
2. Déterminer les coordonnées du point  $D$  pour que  $COBD$  soit un parallélogramme.
3. Déterminer les coordonnées du point  $M$  centre de ce parallélogramme.

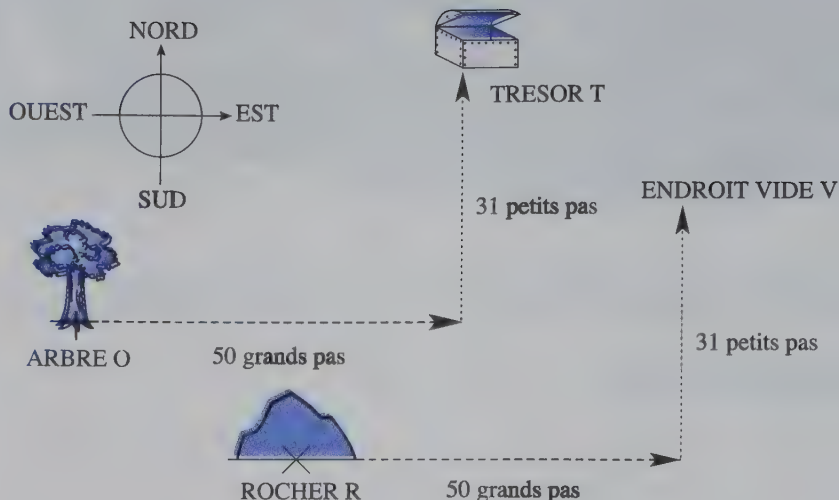
• Lycée Lavoisier, Paris •

### 7.1.2 Une histoire de pirate...

Pour repérer son trésor, un pirate a écrit :

« À partir de l'arbre creux, faire 50 grand pas vers l'est, puis 31 petits pas vers le nord ».  
Dans cette phrase, les seuls renseignements chiffrés sont 50 et 31. Mais seuls, ils ne permettront pas de retrouver le trésor ! Nous avons besoin :

- d'un objet de référence : l'arbre creux. Si, à la place, on part du gros rocher, on ne trouvera pas le trésor.
- de la *direction* des pas (est-ouest et nord-sud), et de leur *sens* (est, et non ouest ; nord, et non sud) ;



- de la *longueur* des pas dans chaque direction (si on fait 50 petits pas vers l'est et 31 grands pas vers le nord, le trésor est perdu !)
- enfin, du nombre de pas dans chaque direction...

Il s'agit donc de réaliser une première *translation* de 50 petits pas vers l'est puis une seconde de 31 grands pas vers le nord ; ce qui revient à décrire le mouvement total de  $O$  à  $T$  par une translation selon le vecteur  $\overrightarrow{OT}$ .

La même translation, réalisée à partir du rocher  $R$ , n'aboutit pas au trésor. La position du point  $T$  est donc déterminée par la donnée de  $O$  et du vecteur de translation.

Supposons maintenant que notre pirate soit un mathématicien, il dira :

- Soit  $O$  l'arbre creux (le point de référence) ;
- soit  $\vec{i}$  le vecteur de direction est-ouest, orienté vers l'est, de longueur 1 m (la longueur d'un grand pas) ;
- soit  $\vec{j}$  le vecteur de direction nord-sud, orienté vers le nord, de longueur 50 cm (la longueur d'un petit pas) ;
- dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , les coordonnées du trésor sont  $(50, 31)$ .

### 7.1.3 Coordonnées

#### 7.1.3.1 Repère du plan

Pour repérer les points du plan (c'est-à-dire, indiquer leur position), on choisit un point de référence, en général noté  $O$ .

On se donne ensuite deux droites orthogonales, appelées *axes*, qui se coupent en  $O$ . L'une sera l'*axe des abscisses*, l'autre l'*axe des ordonnées*.

Pour chaque axe, on choisit une orientation (ou « sens ») et une unité. Par exemple, sur la carte au trésor, l'axe des abscisses est orienté vers l'est et l'unité est 1 m ; l'axe des ordonnées est orienté vers le nord et son unité est 50 cm.

Notons  $I$  le point d'abscisse  $+1$  sur l'axe des abscisses. Si je connais  $O$  et  $I$ , je sais retrouver :

- l'axe des abscisses :  $(OI)$  ;
- l'orientation de cet axe : de  $O$  vers  $I$  ;
- l'unité sur cet axe : la longueur  $OI$ .

De la même façon, notons  $J$  est le point d'ordonnée  $+1$  sur l'axe des ordonnées. Si on me donne  $O$  et  $J$ , je peux sans problème retrouver :

- l'axe des ordonnées :  $(OJ)$  ;
- l'orientation de cet axe : de  $O$  vers  $J$  ;
- l'unité sur cet axe : la longueur  $OJ$ .

En donnant seulement les trois points  $(O, I, J)$ , on donne tous les renseignements suivants : origine, axes, orientation des axes, unités.

Plutôt que le point  $I$ , on a pris l'habitude de donner le vecteur  $\vec{i} = \vec{OI}$ . Au fond, ça ne change par grand'chose. En effet, si on connaît  $I$  et  $O$ , on connaît évidemment  $\vec{OI}$  ; réciproquement, si on connaît  $\vec{OI}$  et  $O$ , alors on connaît  $I$  (image de  $O$  par la translation de vecteur  $\vec{OI}$ ).

De même on donne le vecteur  $\vec{j} = \vec{OJ}$  à la place du point  $J$ .

On dit que  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un *repère* (cartésien) du plan.  $O$  est l'*origine* du repère.

### 7.1.4 Repères orthogonaux et orthonormés

Comme les axes sont orthogonaux, on dit que le repère est *orthogonal*. On représente l'axe des abscisses horizontalement et l'axe des ordonnées verticalement.

Si de plus on a pris la même unité sur les deux axes, on dit que le repère est *orthonormé*.

En mathématiques (sauf en statistiques), la quasi-totalité des repères que vous rencontrerez seront orthonormés. Dans ces repères, les calculs sont simplifiés ; on peut appliquer, par exemple, la formule donnant la longueur d'un segment (qui est fausse quand les unités sont différentes sur les deux axes).

Vous utiliserez des repères non orthonormés en statistiques, en géographie, en économie, en physique. Dans ces disciplines, on est amené à établir des graphiques reliant des données de natures différentes : par exemple, des années et des tonnes de charbon. Il n'y a en général pas de raison de vouloir représenter une tonne de charbon et une année par la même longueur sur le graphique...

### 7.1.5 Coordonnées des points

Dire que le point  $M$  a pour coordonnées cartésiennes le couple  $(x, y)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , signifie que pour aller de  $O$  à  $M$ , on fait  $x$  « pas » horizontaux et  $y$  « pas » verticaux, le sens et la longueur des pas étant indiqués par l'orientation et l'unité sur les deux axes.

Il faut bien sûr tenir compte du signe de  $x$  et  $y$  : faire  $-2$  pas vers la gauche signifie en fait faire 2 pas vers la droite !

$x$  est l'abscisse de  $M$ , et  $y$  est l'ordonnée de  $M$ . Le couple  $(x, y)$  ne dépend que de  $M$  et du repère.

Pour repérer un point  $M$  sur le plan, on a donc besoin de 2 nombres : on dit que le plan est de dimension 2.

Dans l'espace, on a besoin d'une troisième coordonnée : on est en dimension 3. En physique, on doit souvent répondre simultanément à la question : « où ? », mais aussi : « quand ? ». Indiquer la position d'un mobile dans l'espace n'est pas très utile, si on ne sait à quelle date il occupe ou a occupé cette position. Le temps est donc ici une quatrième coordonnée (la « quatrième dimension » !)

### 7.1.6 Coordonnées d'un vecteur

Si, dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on a :  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$ , alors le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ .

Ceci signifie :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$$

*Remarque* : On indique les coordonnées d'un point en ligne :  $M(2, 1)$  ; on indique celles d'un vecteur en colonne :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  (sans mettre de signe = !)

### 7.1.7 Coordonnées d'une somme de vecteurs

Soient  $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ , alors  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$  a pour coordonnées :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

### 7.1.8 La relation de Chasles

Si  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$ , et  $C(x_C, y_C)$  sont trois points du plan, il suffit de calculer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{AC}$  pour constater :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

### 7.1.9 Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Soient  $k$  un réel et  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , alors :

$$k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

### 7.1.10 Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils sont même direction (ils sont « parallèles »).



**À retenir**

(Critères pratiques) Soient  $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ .

- $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont colinéaires si et seulement si on peut trouver un coefficient de proportionnalité  $k$  tel que  $\vec{u}_2 = k\vec{u}_1$ , ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} x_2 = kx_1 \\ y_2 = ky_1 \end{cases}$$

- Les deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si

$$x_1y_2 - y_1x_2 = 0$$

*Exemple :* Si  $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , dites directement que  $\vec{u}_1 = 3\vec{u}_2$ , ce qui montre que les deux vecteurs sont colinéaires.

On peut également remarquer :  $3 \times 2 - 6 \times 1 = 0$ , ce qui confirme le résultat.

### 7.1.11 Vecteurs directeurs d'une droite

Un vecteur *non nul* est un vecteur directeur de la droite  $D$  si et seulement si sa direction est celle de  $D$ . (Le vecteur est « parallèle » à la droite).

On dit que c'est un vecteur *directeur* car il indique sa *direction*.

*Exemple :* Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ,  $\vec{i}$  est un vecteur directeur de l'axe des abscisses,  $\vec{j}$  est un vecteur directeur de l'axe des ordonnées.

#### Propriétés

- $\overrightarrow{AB}$  est un vecteur directeur de  $(AB)$ .
- Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs, qui sont tous colinéaires.
- Si  $A$  est un point de la droite  $D$ ,  $\vec{u}$  un vecteur directeur de  $(AB)$  et  $B$  l'image de  $A$  par la translation de vecteur  $\vec{u}$ , alors  $B$  est un point de  $D$ .
- En revanche,  $\overrightarrow{EF}$  peut être un vecteur directeur de  $D$  sans que ni  $E$ , ni  $F$  ne soit sur  $D$ .

### 7.1.12 Montrer que trois points sont alignés

Rappel : «  $A$ ,  $B$  et  $C$  » sont alignés signifie qu'ils sont situés sur la même droite.

$A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés si et seulement si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.

*Exemple :*  $A(3, 3)$  ;  $B(5, 4)$  ;  $C(-1, 1)$ . On a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

On constate  $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$  donc  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.

*Remarque :* Il suffit de former deux vecteurs distincts contenant les trois points. On peut remplacer  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  par :

- $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BC}$  ;
- $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$ , etc.

### 7.1.13 Coordonnées du milieu d'un segment

Si  $M$  est le milieu de  $[AB]$ , avec  $A(x_A, x_B)$  et  $B(x_B, y_B)$ , alors :

$$M \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

### 7.1.14 Longueur d'un segment

Dans un repère orthonormé, la longueur du segment  $[AB]$  est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

### 7.1.15 Solution de l'exercice type n° 1

1.  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés si et seulement si les droites  $(AB)$  et  $(AC)$  sont confondues. Comme ces deux droites passent par  $A$ , il suffit de vérifier que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires. On calcule leurs coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 + 3 \\ -3 - 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + 3 \\ \frac{9}{2} - 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs sont bien colinéaires (on a  $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ ), donc les trois points sont alignés.

2.  $COBD$  est un parallélogramme si et seulement si  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BD}$ . Comme  $O$  est l'origine du repère, les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{OC}$  sont, par définition, celles de  $C$  :

$$\overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Notons provisoirement  $(x_D, y_D)$  les coordonnées de  $D$ . Le vecteur  $\overrightarrow{BD}$  a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} x_D + 6 \\ y_D + 3 \end{pmatrix}$$

Il suffit de résoudre l'équation :

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 6 = \frac{3}{2} \\ y_D + 3 = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -\frac{9}{2} \\ y_D = \frac{3}{2} \end{cases}$$

D'où :  $D \left( -\frac{9}{2}, \frac{3}{2} \right)$ .

3. Le centre du parallélogramme est le milieu commun des diagonales  $[BC]$  et  $[OD]$ . Comme  $O(0, 0)$ , il est préférable d'utiliser le segment  $[OD]$ , il vient facilement :

$$M \left( -\frac{9}{4}, \frac{3}{4} \right)$$

## 7.2 Équations de droite

### 7.2.1 Exercice type n° 2

Soient, dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , trois points  $A(-1; -1)$ ,  $B(-3; 0)$  et  $C(3; 2)$ . Donner une équation de  $(AB)$ , puis de la parallèle à  $(AB)$  passant par  $C$ .

• Lycée Paul Valéry, Sète •

### 7.2.2 Qu'est-ce qu'une équation ?

Une *égalité* est une expression où intervient le signe  $=$ .

Exemple :  $a = 2$ ,  $1 + 3 = 5$ ,  $x + 3 = 7$ ,  $x + a = 7$ ,  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ,  $x + 1 = x + 3$ .

Une égalité peut contenir une ou plusieurs variables ( $a$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $A...$ ).

Plusieurs cas se présentent :

- L'égalité est toujours fausse :  $1 + 5$ ,  $x + 1 = x + 3$  ;
- Elle est toujours vraie :  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . Il s'agit d'une *identité*. Par exemple,  $x + x = 2x$ ,  $3(x + y) = 3x + 3y$  sont des identités.
- Elle est parfois vraie, parfois fausse, selon les valeurs que l'on attribue aux variables. Par exemple,  $x + 3 = 7$  est fausse si  $x = 1$ , mais elle est vraie si  $x = 4$ .

Devant une égalité, on peut donc se poser la question : quelles sont les valeurs que l'on peut attribuer aux variables pour rendre cette égalité vraie ?

Examinons quelques exemples :

$x + 3 = 7$  :  $x = 4$  est la seule possibilité.

$(x + 3)(x - 2) = 0$  :  $x = -3$  ou  $x = 2$  (2 possibilités).

Considérons maintenant l'équation :  $x + a = 7$  et demandons à deux personnes combien de solutions ils trouvent.

- Jacques : « L'égalité est vraie lorsque  $x = 3$  et  $a = 4$  ; ou encore  $x = 2$  et  $a = 5$ , etc. on voit qu'il y a une infinité de possibilités. »
- Émilie : « C'est comme pour  $x + 3 = 7$ , on avait fait  $x = 7 - 3 = 4$ . Ici, à partir de  $x + a = 7$  on tire  $x = 7 - a$ . Il y a une seule solution, qui est  $7 - a$ . »

Qui a raison ? En fait.. un peu les deux. La question a été mal posée. Il ne suffit pas de dire « résoudre l'équation ». Il faut aussi préciser quelles sont les *inconnues*, c'est-à-dire quelles variables on veut calculer en fonction des autres.

Jacques a considéré qu'il y avait deux inconnues  $a$  et  $x$  et compte toutes les possibilités.

De son côté, Émilie résout l'équation  $x + a = 7$  d'inconnue  $x$ , et donne son unique solution en fonction de  $a$ .

Lorsque l'équation admet deux inconnues, les solutions sont souvent trop nombreuses, pour qu'on puisse en faire la liste.

Chaque solution est un *couple*  $(x; y)$ , ce qui signifie que  $(0, 2)$  et  $(2, 0)$  définissent deux éventuelles solutions différentes (ni une, ni quatre !)

On doit donc se contenter de représenter les solutions graphiquement. Dans un repère du plan, on placera pour chaque  $(x; y)$  solution de l'équation, le point de coordonnées  $(x; y)$ .

Dans le cas d'une équation du type :

$$y = mx + p$$

(d'inconnues  $x$  et  $y$ ) on constate que les points solutions forment la droite représentative de la fonction affine  $x \mapsto mx + p$ . On dira que  $y = mx + p$  est une *équation* de la droite.

*Remarque* (Cas où l'inconnue est cachée.) : Considérons l'égalité  $x = 0$  et résolvons l'équation.

S'il s'agit de l'équation à une inconnue  $x = 0$ , elle admet (évidemment) une seule solution.

Mais s'il s'agit d'une équation à *deux* inconnues ( $x$  et  $y$ ) alors elle admet une infinité de solutions (tous les couples de la forme  $(0, y)$ , où  $y$  peut prendre toutes les valeurs réelles possibles).

*Remarque* : Prenez garde aux restrictions données par l'énoncé : l'équation à une inconnue  $x = \frac{1}{2}$  admet clairement une solution dans  $\mathbb{R}$ , mais elle n'a pas de solution dans  $\mathbb{N}$ .

## 7.2.3 Équation d'une droite

### 7.2.3.1 Cas des droites verticales

Les droites parallèles à l'axe des ordonnées, couramment appelées droites « verticales », admettent une équation de la forme :

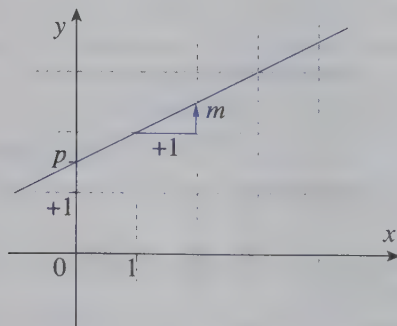
$$x = c$$

où  $c$  est un réel fixé. Ces droites sont assez faciles à représenter (déterminer  $c$  sur l'axe des abscisses et tracer la droite verticale).

### 7.2.3.2 Cas des droites obliques

Les autres droites (dites droites « obliques ») ont une équation de la forme :

$$y = mx + p$$



$p$  s'appelle l'*ordonnée à l'origine*, ce qui signifie que le point de coordonnées  $(0; p)$  appartient à la droite.  $p$  est donc l'ordonnée du point de la droite qui est sur l'axe des ordonnées (c'est-à-dire, à la verticale de l'origine  $O$ , d'où son nom).

$m$  s'appelle le *coefficient directeur de la droite*. Ce coefficient est utilisé dans la méthode dite « des petits pas », ou de « l'escalier ». Lorsqu'en partant d'un point de la droite, on ajoute  $+1$  à l'abscisse, il faut ajouter  $+m$  à l'ordonnée pour obtenir un autre point de la droite. En effet, si  $A(x_A, y_A)$  est un point de la droite, on a :

$$y_A = mx_A + p$$

Si  $B(x_B, y_B)$  est un point de la droite tel que  $x_B = x_A + 1$ , on peut écrire :

$$y_B = mx_B + p = m(x_A + 1) + p = mx_A + m + p = mx_A + p + m = y_A + m$$

Ce calcul montre qu'en ajoutant 1 à l'abscisse de  $A$ , il faut bien ajouter  $m$  à son ordonnée pour obtenir un point de la droite.

On en déduit que le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite (c'est tout simplement le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  du calcul précédent).

## 7.2.4 Comment calculer le coefficient directeur ?

### 7.2.4.1 On connaît deux points de la droite

On peut rappeler ici la formule de calcul du coefficient directeur d'une droite passant par deux points distincts  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

(Remarque :  $A$  et  $B$  ne peuvent avoir la même abscisse, sinon  $(AB)$  serait « verticale »). Vous pouvez remarquer qu'il s'agit du quotient de l'ordonnée de  $\overrightarrow{AB}$  par son abscisse. Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite, avec  $a \neq 0$ , alors le coefficient directeur est :

$$m = \frac{b}{a}$$

### 7.2.4.2 On connaît un vecteur directeur

- Si le vecteur directeur est de la forme  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ , alors la droite est verticale et n'a donc pas de coefficient directeur.
- Si le vecteur directeur  $\vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , avec  $a \neq 0$ , alors on remarque que le vecteur :  $\frac{1}{a}\vec{u}$ , qui a pour coordonnées :  $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix}$ , est aussi un vecteur directeur de la droite, dont les coordonnées sont de la forme  $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ , donc  $m = \frac{b}{a}$ .

## 7.2.5 Comment calculer l'équation d'une droite ?

### 7.2.5.1 Méthode par identification

a) *Cas d'une droite donnée par un point et un vecteur non nul*

Soient  $A(x_A, y_A)$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ . Si  $a = 0$ , alors la droite est verticale et a pour équation  $x = x_A$ .

Sinon, la droite est oblique, elle admet une équation de type  $y = mx + p$ , avec  $m = \frac{b}{a}$ .

Comme  $A$  est un point de la droite, on obtient :  $p = y_A - mx_A$ .

b) *Cas d'une droite donnée par deux points distincts*

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points de la droite.

Si les deux points ont la même abscisse  $c = x_A = x_B$ , la droite a pour équation  $x = c$ .  
Sinon, la droite  $(AB)$  est oblique, et admet donc une équation de la forme  $y = mx + p$ .

On sait que  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ , on peut donc calculer  $p = y_A - mx_A$  (ou  $p = y_B - mx_B$ ).

### 7.2.5.2 Méthode des vecteurs colinéaires

a) *Cas d'une droite donnée par un point et un vecteur non nul*

Soient  $A(x_A; y_A)$  et un vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ . Un point  $M(x; y)$  appartient à la droite si et seulement si  $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  sont colinéaires, d'où :

$$b(x - x_A) - a(y - y_B) = 0$$

Si  $a = 0$ , alors la droite est verticale et a pour équation  $x = x_A$ .

Sinon, on obtient :  $y = \frac{b}{a}x + y_B - \frac{b}{a}x_A$ .

On peut également poser l'existence d'un réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u}$ , d'où

$$\begin{cases} x - x_A = k \cdot a \\ y - y_B = k \cdot b \end{cases}$$

qui permet de retrouver la formule  $b(x - x_A) - a(y - y_B) = b \cdot k \cdot a - a \cdot k \cdot b = 0$ .

b) *Cas d'une droite donnée par deux points distincts*

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  ces deux points.

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est un vecteur directeur de la droite, on peut se ramener ainsi au cas précédent.

## 7.2.6 Droites parallèles

Deux droites sont parallèles si et seulement si, soit elles sont toutes deux parallèles à l'axe des ordonnées, soit elles ont même coefficient directeur.

## 7.2.7 Solution de l'exercice type n° 2

On a d'abord besoin des coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Nous allons utiliser les deux méthodes, assez différentes dans l'esprit.

**Identification.** Les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$  donnent directement le coefficient directeur de  $(AB)$  :  $-\frac{1}{2}$ . L'équation de  $(AB)$  s'écrit  $y = -\frac{1}{2}x + p$ . Comme  $A(-1; -1)$  est un point de  $(AB)$ , on a  $-1 = \frac{1}{2} + p$ , d'où  $p = -\frac{3}{2}$ . Conclusion :  $(AB)$  a pour équation  $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ .

**Vecteurs colinéaires.** Notons  $D$  la droite parallèle à  $(AB)$  et passant par  $C$ . Elle a pour vecteur directeur  $\overrightarrow{AB}$ . Le point  $M(x; y)$  appartient à  $D$  si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{CM}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires. On écrit leurs coordonnées :

$$\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En exprimant que les deux vecteurs sont colinéaires, on a :  $(x-3) \times 1 - (y-2) \times (-2) = 0$ , ce qui donne  $x + 2y - 7 = 0$  et donc, en simplifiant :  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ .

## 7.3 Savoir résoudre un système d'équations

### 7.3.1 Exercice type n° 3

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 2x^2 - 3y^2 = -19 \end{cases}$$

• Lycée Fustel-de-Coulanges, Massy •

### 7.3.2 Cas d'équations sans carrés

Vous avez étudié en troisième les systèmes de deux équations à deux inconnues. On utilise deux méthodes de résolution : substitution et combinaison.

#### 7.3.2.1 Substitution

Il s'agit de calculer l'une des inconnues en fonction des autres grâce à l'une des équations, et de remplacer, de substituer ce que l'on a trouvé dans les autres équations. Concrètement, dans le système :

$$\begin{cases} x - y = -16 \\ 3x + 5y = 40 \end{cases}$$

On peut calculer grâce à la première équation :  $x = y - 16$  et remplacer :

$$\begin{cases} x = y - 16 \\ 3(y - 16) + 5y = 40 \end{cases}$$

et après simplifications :

$$\begin{cases} x = y - 16 \\ 8y - 48 = 40 \end{cases}$$

Remarquez qu'il faut, pour que chaque système que vous écrivez soit équivalent, (c'est-à-dire qu'ils aient les mêmes solutions), garder l'équation qui donne la valeur de  $x$ . On la recopie dans chaque système, sans la modifier. Avec la dernière équation, on obtient :  $8y = 88$ , donc  $y = 11$ . On remplace  $y$  par 11 dans la première équation :

$$\begin{cases} x = 11 - 16 = -5 \\ y = 11 \end{cases}$$

Il y a une (unique) solution :  $(-5; 11)$ . Attention si vous donnez *l'ensemble* des solutions : il ne contient qu'un seul élément. On note :

$$S = \{(-5; 11)\}$$

### 7.3.2.2 Combinaison

Vous avez le droit, dans un système d'équations, de multiplier les équations par un réel non nul et d'ajouter une des équations à une autre, dans le but de supprimer une inconnue. On obtient alors un système équivalent. N'oubliez pas d'indiquer en marge de votre système les opérations que vous avez réalisées, ce qui permet au correcteur de mieux suivre votre raisonnement. Par exemple, pour le système

$$\begin{cases} x - y = -16 \\ 3x + 5y = 40 \end{cases}$$

On peut se débarrasser de  $y$  dans la deuxième équation en multipliant la première ligne par 5, et en ajoutant le résultat à la deuxième ligne. Notez ceci :  $L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1$ . On obtient :

$$L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1 \quad \begin{cases} x - y = -16 \\ 3x + 5y + 5(x - y) = 40 - 5 \times 16 \end{cases}$$

On simplifie :

$$\begin{cases} y = x + 16 \\ 8x = -40 \end{cases}$$

et enfin :

$$\begin{cases} y = 11 \\ x = -5 \end{cases}$$

On retrouve :

$$S = \{(-5; 11)\}$$

### 7.3.3 Lien avec les équations de droites

#### 7.3.3.1 Interprétation géométrique

Examinons de nouveau le système :

$$\begin{cases} x - y = -16 \\ 3x + 5y = 40 \end{cases}$$

Dans chacune des équations, écrivons  $y$  en fonction de  $x$ . On obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} y = x + 16 \\ y = -\frac{3}{5}x + 8 \end{cases}$$

Notons  $f$  et  $g$  les deux fonctions affines telles que :

$$f(x) = x + 16 \text{ et } g(x) = -\frac{3}{5}x + 8$$

Le problème revient donc à chercher les  $(x, y)$  tels que :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

La première équation signifie que  $(x, y)$  est un point de la droite représentative de  $f$ , la seconde équation signifie que  $(x, y)$  est un point de la droite représentative de  $g$ . La question posée est donc équivalente à la recherche des points d'intersection de deux droites :

- La droite  $D_1$ , d'équation  $y = x + 16$ , qui représente  $f$  ;
- la droite  $D_2$ , d'équation  $y = -\frac{3}{5}x + 8$ , qui représente  $g$ .

Les deux droites ayant des coefficients directeurs différents, elles ne sont donc pas parallèles.  $D_1$  et  $D_2$  ont donc un unique point d'intersection ; le couple des coordonnées de ce point est la solution du système.

### 7.3.3.2 Nombre de solutions en fonction du type de système

Tout système linéaire peut se ramener comme ci-dessus à l'un des cas suivants :

*intersection de droites obliques*

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$$

1. Si  $a \neq c$ , les droites  $D_1$  (d'équation  $y = ax + b$ ) et  $D_2$  (d'équation  $y = cx + d$ ) sont sécantes, il existe donc un unique couple solution.
2. Si  $a = c$ , alors  $D_1$  et  $D_2$  sont parallèles.
  - (a) Si  $b = d$ , alors  $D_1 = D_2$ , le système est équivalent à une seule des deux équations, par exemple :  $y = ax + b$ , et il y a une infinité de solutions (tous les couples des coordonnées des points de  $D_1$ ).
  - (b) Si  $b \neq d$ , alors  $D_1$  et  $D_2$  sont *strictement* parallèles ; il n'y a pas de point d'intersection donc pas de solution.

*droites parallèles à l'axe des ordonnées*

$$\begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution si  $a \neq b$ , et une infinité (toute la droite d'équation  $x = a$ ) si  $a = b$ .

intersection d'une droite verticale et d'une droite oblique

$$\begin{cases} y = ax + b \\ x = c \end{cases}$$

C'est un cas facile : les deux droites sont toujours sécantes, il y a donc un unique point d'intersection, et donc un seul couple-solution pour le système.

Il est parfaitement inutile d'apprendre par cœur les différents cas : une fois les équations de droites écrites, il n'est pas difficile de se rendre compte si on a affaire à des droites parallèles ou sécantes. On retiendra :



### À retenir

Un système linéaire a 0, 1 ou une infinité de solutions.

Pour les compter sans résoudre complètement le système, on transforme les équations en équations de droite.

### 7.3.3.3 Méthode du déterminant

On veut résoudre le système :

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

- Si  $ad - bc = 0$ , alors  $ad = bc$ , et donc  $a$  et  $b$  sont proportionnels à  $c$  et  $d$ . Si  $p$  et  $q$  ne sont pas proportionnels, alors il n'y a pas de solution. Par exemple, le système :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 7 \end{cases}$$

n'admet pas de solution (car  $7 \neq 2 \times 5$ ). En revanche, si  $p$  et  $q$  sont proportionnels, on peut éliminer l'une des deux équations. Par exemple, dans :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$$

la seconde équation se déduit de la première (en multipliant par 2), et le système se ramène simplement à l'équation :

$$2x + 3y = 5$$

qui admet une infinité de solutions.

- Si  $ad - bc \neq 0$ , alors  $dL_1 - bL_2$  fournit la relation :

$$(ad - bc)x = dp - aq$$

et  $aL_2 - cL_1$  donne :

$$(ad - bc)y = aq - cp$$

D'où  $x = \frac{dp - aq}{ad - bc}$  et  $y = \frac{aq - cp}{ad - bc}$ . Vous pouvez vérifier qu'il s'agit bien d'une solution du système. Elle est unique.



### À retenir

Si  $ad - bc \neq 0$ , alors le système :

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

admet une unique solution.

Si  $ad - bc = 0$ , il en admet 0 ou une infinité.

### 7.3.4 Autre cas...

La plupart des systèmes d'équations que l'on vous demande de résoudre en Seconde sont des systèmes *linéaires*, c'est-à-dire qu'il y apparaît les inconnues  $x$ ,  $y$ ,  $t$ , etc., mais en aucun cas  $\sqrt{x}$ ,  $y^2$  ou  $\sin t$ . Néanmoins, il peut vous arriver de rencontrer des systèmes non linéaires, par exemple :

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{6}{y} = 3 \\ \frac{8}{x} - \frac{3}{y} = 3 \end{cases}$$

Il suffit de se ramener à un système linéaire, en posant :  $X = \frac{1}{x}$  et  $Y = \frac{1}{y}$ . Le système ci-dessus devient :

$$\begin{cases} 2X + 6Y = 3 \\ 8X - 3Y = 3 \end{cases}$$

On résout facilement par combinaisons :

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \quad \begin{cases} 18X = 9 \\ 8X - 3Y = 3 \end{cases}$$

et en calculant de proche en proche, on obtient :  $X = \frac{1}{2}$  et  $Y = \frac{1}{3}$ . Ne perdez pas de vue notre objectif : calculer  $x$  et  $y$  (et non pas  $X$  et  $Y$ ). On trouve sans difficulté :  $x = 2$  et  $y = 3$ . D'où la solution :  $(2, 3)$ .

### 7.3.5 Solution de l'exercice type n° 3

Pour se ramener à un système linéaire, on pose  $X = x^2$  et  $Y = y^2$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 2x^2 - 3y^2 = -19 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = 13 \\ 2X - 3Y = -19 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \quad \begin{cases} X + Y = 13 \\ 5X = 20 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = 13 \\ X = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = 13 - 4 = 9 \\ X = 4 \end{cases}$$

On obtient enfin :

$$Y = 9 \text{ et } X = 4$$

ce qui donne  $x = 2$  ou  $x = -2$ , et  $y = 3$  ou  $y = -3$ . En tenant compte de tous les cas, on obtient l'ensemble de solutions suivant :

$$S = \{(2; 3), (-2; 3), (2; -3), (-2; -3)\}$$

## 1 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Champollion, Grenoble 20 min.

Soient  $A(2; 1)$ ,  $B(5; 3)$ ,  $C(7; 0)$  et  $E\left(\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .

1. Montrer que  $ABC$  est un triangle rectangle isocèle.
2. Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $E$  et de rayon  $\frac{\sqrt{26}}{2}$ .
  - (a) Vérifier que  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des points de  $\mathcal{C}$  et que  $E$  est le milieu de  $[AC]$ .
  - (b) Construire  $\mathcal{C}$ .
3. Sachant  $\widehat{CAB} = 45^\circ$ , quelle est l'angle  $\widehat{ACB}$  ?

## 2 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Carnot, Dijon 10 min.

Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $I(1; -2)$ , de rayon 5. Montrer que  $A(4; 2)$  et  $B(-2; -6)$  sont deux points diamétralement opposés de  $\mathcal{C}$ .

## 3 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Marie Curie, Versailles 10 min.

On donne les quatre points  $A(-2; 0)$ ,  $B(4; -2)$ ,  $C(5; 1)$  et  $D(-1; 3)$ . Montrer que le quadrilatère  $ABCD$  est un rectangle.

## 4 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Buffon, Paris 20 min.

On se place dans un repère orthonormé et on donne :  $A(-5; 6)$ ,  $B(-1; 1)$ ,  $C(7; -8)$  et  $D(9; 9)$ .

1. Calculer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{BD}$ .
2. Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont-ils alignés ? (justifier)
3. Le triangle  $ABD$  est-il rectangle en  $B$  ? (justifier)

## 5 ★ \_\_\_\_\_ Lycée Chaptal, Paris 20 min.

Le plan étant rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points  $A(4; -1)$  et  $B(3; -8)$ .

1. Montrer que la droite  $(AB)$  a pour équation  $y = 7x - 29$ .

- Déterminer une équation de la droite  $D$  passant par  $C(0, -1)$  et parallèle à  $(AB)$ .
- Soient  $E(3; -2)$  et  $F(2; 2)$ . Déterminer une équation de la droite  $(EF)$ .
- Les droites  $(D)$  et  $(EF)$  sont-elles sécantes ? Justifier. Si oui, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

**6** ★  
15 min.

**Lycée Carnot, Dijon**

On donne les points  $A(1; 0)$  et  $B(4; 2)$ . Écrire une équation de la médiatrice du segment  $[AB]$ .

**7** ★  
5 min.

**Lycée François Ier, Le Havre**

Soit  $D$  la droite d'équation :  $y = -3x + 1$ . On munit le plan d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ , et  $t$  la translation de vecteur  $\vec{u}$ . Trouver l'équation de l'image de  $D$  par  $t$ .

**8** ★  
15 min.

**Lycée Lacordaire, Marseille**

- Dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , déterminer l'équation de la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A$  et de coefficient directeur  $-1$  avec  $A(2; 3)$ .
- Donner l'équation de  $\Delta$ , la droite passant par  $B(0; 2)$  et parallèle à  $\mathcal{D}$ .
- Construire  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$ .

**9** ★  
15 min.

**Lycée Voltaire, Paris**

On se place dans un repère orthonormé et on donne :  $A(1; -1)$ ,  $B(3; -3)$  et  $C(1; 6)$ .

- Calculer l'équation de la droite  $(AB)$ .
- Calculer l'équation de la droite  $(d)$  qui passe par le point  $C$  et qui est parallèle à la droite  $(AB)$ .

**10** ★  
15 min.

**Lycée Voltaire, Paris**

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} \frac{2x+3y}{3x-2y} - \frac{4x-3y}{5x-3y} = 1 \\ \frac{6}{2} - \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \\ 3x - y = 24 \end{cases}$$

# 11 ★ ————— Lycée Fragonard, L'Isle-Adam

10 min.

Dans une classe.

Au début, il y a deux fois plus de garçons que de filles. Six garçons quittent la salle et six filles arrivent. Il y a alors deux fois plus de filles que de garçons. Combien de garçons et de filles y avait-il au début ?

# 12 ★ ————— Lycée Lamartine, Paris

15 min.

Soit  $(S)$  le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ (x + y)^2 = 9 \end{cases}$$

1. Quelles sont les valeurs possibles de la somme  $x + y$  ?
2. En déduire les solutions du système  $(S)$ .

# 13 ★ ————— Lycée Jean Monnet, Franconville

10 min.

Une salle de théâtre compte 150 places, les unes à 21 €, les autres à 26 €. Quand elle est pleine, la recette totale est de 3300 €. Combien y a-t-il de places de chaque sorte ?

# 14 ★ ————— Lycée Notre-Dame, Saint-Nazaire

10 min.

Si deux capitaux sont placés, le premier à 10 %, le second à 8 %, la différence des revenus annuels est de 200 €. Si le premier était placé à 8 % et le second à 10 %, la différence des revenus annuels serait de 70 €. Déterminer les deux capitaux.

# 15 ★ ————— Lycée Auguste Renoir, Asnières-sur-Seine

10 min.

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + 2y = -1 \\ -2x + 2\sqrt{2}y = \sqrt{2} \end{cases}$$

# 16 ★★ ————— Lycée Victor Louis, Talence

30 min.

Dans un repère orthonormal, on considère les points  $M(-1; 1)$ ,  $N(1; -5)$  et  $P(-4; 0)$ .

1. Démontrer que le triangle  $MNP$  est rectangle.
2. Les points  $R$ ,  $S$ ,  $T$  et  $U$  ont pour coordonnées  $R(7; -3)$ ,  $S(5; 3)$ ,  $T(-2; 4)$  et  $U(-5; 3)$ . Démontrer que  $MNRS$  est un parallélogramme.
3. Soit  $L$  le milieu de  $[ST]$ . Déterminer les coordonnées du point  $V$ , symétrique de  $M$  par rapport à  $L$ .

4. Le point  $H$  a pour coordonnées  $(-3; -1)$ . Démontrer que les points  $M, V, H$  d'une part et  $N, P$  et  $H$  d'autre part, sont alignés. Que peut-on en conclure ?
5. Démontrer que  $(MV)$  est perpendiculaire à  $(NP)$ .
6. Démontrer l'égalité :  $MH^2 = HN \times HP$ .

17★★

15 min.

Lycée Sacré-Cœur, Amiens

Dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  repère orthonormé, construire les points  $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$  du plan (où  $\alpha$  est un réel), tels que :

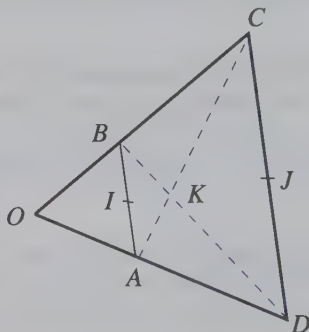
$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha - 1$$

18★★

20 min.

Lycée Montesquieu, Bordeaux

Soit un trapèze  $ABCD$ , de bases  $[AB]$  et  $[CD]$ . On suppose que les droites  $(AD)$  et  $(BC)$  se coupent en  $O$ . On note  $I$  et  $J$  les milieux respectifs des segments  $[AB]$  et  $[CD]$  et  $K$  le point d'intersection des diagonales  $(AC)$  et  $(BD)$ .



Soit  $k$  le réel tel que  $\vec{OD} = k\vec{OA}$ . On se place dans le repère  $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$ .

1. Quelles sont les coordonnées de  $O, A, B$  et  $D$  dans ce repère ?
2. Quelle est l'équation de la droite  $(CD)$  dans ce repère ? En déduire que  $C(0, k)$ .
3. Calculer les coordonnées de  $I, J$ , et  $K$ .
4. Montrer que les points  $O, I, J$ , et  $K$  sont alignés.

19★★

10 min.

Lycée Montesquieu, Le Mans

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On considère les points  $A(-1; -1)$ ,  $B(1; 3)$  et  $C(4; -1)$ .

1. Déterminer les coordonnées du point  $D$  de manière à ce que  $ABCD$  soit un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées du centre de  $ABCD$ .
3. Quelle est la nature du triangle  $ABC$  ? (Justifier).

## 20 ★★ Lycée du Parc, Lyon

15 min.

Dans les deux cas suivants, déterminer une équation de la droite  $\Delta$ , parallèle à  $(D)$  et passant par  $A$ .

1.  $A(2; 1)$ .  $(D)$  a comme équation  $y = -x + 2$ .
2.  $A(2; -3)$ .  $(D) = (BC)$ , avec  $B(-1; 0)$  et  $C(-1; 3)$ .

## 21 ★★ Lycée Chrestien-de-Troyes, Troyes

20 min.

Dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  orthonormé, on donne  $A(-2; 2)$ ,  $B(1; -3)$  et  $C(3; 6)$ .

1. Montrer que  $A$ ,  $B$ , et  $C$  ne sont pas alignés.
2. Déterminer une équation de la médiane issue de  $A$  dans  $(ABC)$ .
3. Déterminer une équation de la médiane issue de  $B$  dans  $(ABC)$ .
4. Déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle  $(ABC)$ .

## 22 ★★ Lycée Fénelon, Paris

20 min.

Le plan est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Déterminer une équation cartésienne de l'image de la droite  $\mathcal{D}_1$  par la translation de vecteur  $\vec{u}$ .

On donne  $\mathcal{D}_1 : y = x - 2$  et  $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

2. Déterminer une équation cartésienne de l'image de la droite  $(\mathcal{D}_2)$  par la symétrie centrale de centre  $\Omega$ .

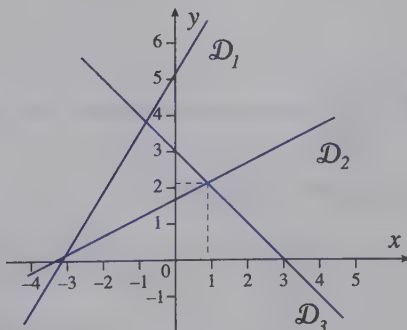
On donne  $\mathcal{D}_2 : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  et  $\overrightarrow{O\Omega} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

## 23 ★★ Lycée Hoche, Versailles

30 min.

Retrouver, parmi les équations ci-dessous, celles qui correspondent aux droites du dessin (lorsque cela est possible !).

1.  $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$
2.  $y = \frac{1}{2}x - 2$
3.  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$
4.  $y = 3x - 3$
5.  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
6.  $y = \frac{5}{3}x + 5$



**24** ★★  
20 min.

Lycée Claude Monet, Paris

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 4y = -24 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2 - 2y^2 = 2 \\ 3x^2 - 4y^2 = -24 \end{cases}$$

**25** ★★  
20 min.

Lycée Jacques Monod, Clamart

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{cases} 2x^2 - \frac{9}{y+1} = 15 \\ 3x^2 - \frac{24}{y+1} = 19 \end{cases}$$

On posera  $X = x^2$  et  $Y = \dots$

**26** ★★  
15 min.

Lycée Hoche, Versailles

Résoudre le système suivant en indiquant la méthode utilisée.

$$\begin{cases} 2u - 3v = 4 \\ 10u + 2v = 3 \end{cases}$$

En déduire la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{2}{x-3} - \frac{3}{y+5} = 4 \\ \frac{5}{x-3} + \frac{1}{y+5} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

**27** ★★  
10 min.

Lycée Hoche, Versailles

Résoudre dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  le système :

$$\begin{cases} \frac{3}{(2x+1)^2} - \frac{4}{|3y-5|} = 32 \\ \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{5}{|3y-5|} = 12 \end{cases}$$

**28**★★

20 min.

**Lycée Molière, Paris**

Un canot automobile met cinq heures pour aller, par voie fluviale, de la ville  $A$  à la ville  $B$ . En conservant la même vitesse propre, il met sept heures et trente minutes pour le trajet inverse.

1. Combien de temps un radeau se déplaçant à la vitesse du courant mettrait-il pour relier les deux villes ?
2. Si la vitesse propre du canot augmentait de  $1,6$  km/h, il mettrait 45 minutes de moins pour revenir de  $B$  vers  $A$ . Calculer la vitesse propre du canot et celle du courant.

**29**★★

20 min.

**Lycée Carnot, Dijon**

Soit le système :

$$S \begin{cases} 5x + y = 4 \\ -3x + 12y = -12 \end{cases}$$

1. Sans résoudre, justifier l'existence d'une (ou de plusieurs) solution(s).
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  le système  $S$ .
3. Dédire des questions précédentes la résolution du système :

$$S \begin{cases} \frac{5}{x+1} + \frac{1}{y-2} = 4 \\ \frac{-3}{x+1} + \frac{12}{y-2} = -12 \end{cases}$$

**30**★★

20 min.

**Lycée David d'Angers, Angers**

1. Résoudre le système :

$$\begin{cases} 7x - 4y = 29 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

2. Soit le système :

$$\begin{cases} 2x - y = 9 \\ \frac{10}{3}x - \frac{5}{3}y - 15 = 0 \end{cases}$$

- (a) Le couple  $(0; -9)$  est-il solution du système ? Même question avec  $(1; 6)$  et  $(1; -7)$ . Que peut-on en déduire ?
- (b) Donner l'ensemble des solutions du système.

# 31 ★★★ ————— Lycée Condorcet, Paris

25 min.

À tout réel  $m \neq 3$  on associe la droite  $D_m$  d'équation :

$$y = \frac{2m-1}{m-3}x + \frac{-7m+6}{m-3}$$

1. Déterminer  $m$  et donner l'équation de  $D_m$  pour que :

- (a)  $D_m$  passe par  $A(1; 1)$ .
- (b)  $D_m$  passe par  $O$ .
- (c)  $D_m$  soit parallèle à l'axe des abscisses.
- (d) Peut-on trouver  $m$  tel que  $D_m$  soit parallèle à l'axe des ordonnées ?
- (e)  $D_m$  soit parallèle à  $\Delta$  d'équation  $y = 3x - 6$ .
- (f)  $D_m$  admette  $(-2)$  comme coefficient directeur.

2. Montrer qu'il existe un point  $K$  qui appartient à toutes les droites  $D_m$ .

# 32 ★★★ ————— Lycée Louis-le-Grand, Paris

40 min.

Résoudre les systèmes suivants :

1.  $\begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1 \end{cases}$
2.  $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = -5 \\ 2x^{151} - 3y^{12} = 17 \end{cases}$
3.  $\begin{cases} 2x + 3y - 11 = 0 \\ 3x - 5y - 7 = 0 \end{cases}$
4.  $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ (x + y)^2 = 16 \end{cases}$
5.  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 - y^2 = 18 \end{cases}$

## 1 Lycée Champollion, Grenoble

1. Nous allons calculer les longueurs des trois côtés de  $ABC$ . Utilisons la formule de calcul de la distance :

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(7-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5^2 + 1} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

$$BC = \sqrt{(7-5)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Il devient clair que  $ABC$  est isocèle en  $B$ . De plus, on a :

$$AB^2 + BC^2 = 13 + 13 = 26 = AC^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore,  $ABC$  est rectangle en  $B$ .

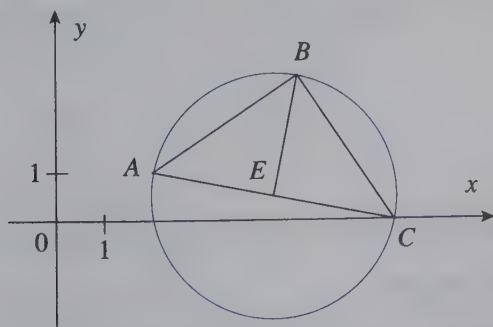
2. (a) En s'y prenant par le bon bout, on évite quelques calculs. En effet, il n'est pas difficile de constater que  $E$  est bien le milieu de  $[AC]$  car  $\frac{9}{2} = \frac{2+7}{2}$  et  $\frac{1}{2} = \frac{1+0}{2}$ .

Or, le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est aussi le centre de son cercle circonscrit, donc  $EA = EB = EC$ . Puisque  $AC = \sqrt{26}$ , on a :

$$AE = EC = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

Finalement,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des points de  $\mathcal{C}$ .

- (b)  $\mathcal{C}$  n'est autre que le cercle de centre  $E$  passant par  $A$  :



3. Comme  $ABC$  est isocèle et rectangle en  $B$ , on a nécessairement  $\widehat{ACB} = 45^\circ$ .

## 2 ————— Lycée Carnot, Dijon

On exprime les coordonnées du milieu de  $[AB]$  :  $\left(\frac{4-2}{2}; \frac{2-6}{2}\right)$ , donc  $(1; -2)$ .  $I$  est donc le milieu de  $[AB]$ . De plus, on calcule la longueur  $AB$  :

$$AB = \sqrt{(4+2)^2 + (2+6)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$[AB]$  est donc un diamètre du cercle de centre  $I$  et de rayon  $\frac{10}{2} = 5$ . Il s'agit du cercle  $\mathcal{C}$ .

## 3 ————— Lycée Marie Curie, Versailles

Calculons les longueurs des côtés et d'une diagonale :

$$AB^2 = (4+2)^2 + (-2-0)^2 = 6^2 + 2^2 = 36 + 4 = 40$$

$$BC^2 = (5-4)^2 + (1+2)^2 = 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$$

$$CD^2 = (-1-5)^2 + (3-1)^2 = 6^2 + 2^2 = 36 + 4 = 40$$

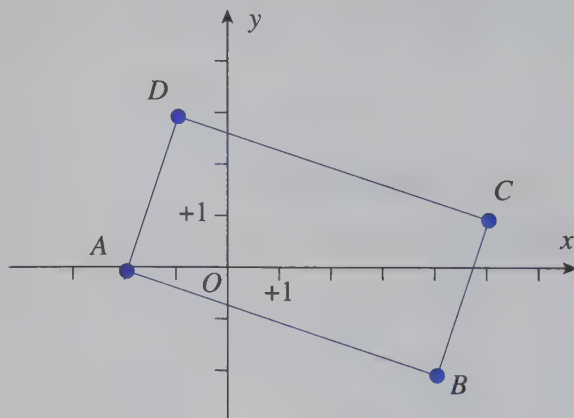
$$DA^2 = (-2+1)^2 + (0-3)^2 = 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$$

$$AC^2 = (5+2)^2 + (1-0)^2 = 7^2 + 1^2 = 49 + 1 = 50$$

On constate que  $AB = CD$  et  $DA = BC$  donc  $ABCD$  est un parallélogramme.

On voit également que  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ; d'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $B$ .

L'un des angles du parallélogramme  $ABCD$  étant droit, il s'agit d'un rectangle.



## 4 ————— Lycée Buffon, Paris

1. On applique les formules :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1+5 \\ 1-6 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

De même :

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2. Si  $A$ ,  $B$  et  $C$  étaient alignés, alors  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$  seraient colinéaires (ils dirigeraient la droite passant par  $A$ ,  $B$  et  $C$ ). Or, les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$  ne sont pas proportionnelles, donc  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BC}$  ne sont pas colinéaires, et donc  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

3. On calcule les carrés des côtés :

$$AB^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$$

$$BD^2 = 10^2 + 8^2 = 100 + 64 = 164$$

$$AD^2 = 14^2 + 3^2 = 196 + 9 = 205$$

On constate  $AD^2 = AB^2 + BD^2$ . D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle  $ABD$  est rectangle en  $B$ .

## 5

Lycée Chaptal, Paris

1. Puisqu'on vous donne l'équation, ce n'est pas la peine de vous fatiguer. Vous savez que  $y = 7x - 29$  est l'équation d'une droite. Il suffit de vérifier qu'elle passe par  $A$  et  $B$ . Remplaçons donc  $x$  et  $y$  par les coordonnées de  $A$  :  $7 \times 4 - 29 = -1$ . Cette égalité est vraie, donc  $A$  est bien un point de la droite. De même,  $7 \times 3 - 29 = -8$  donc  $B$  est bien un point de la droite. Deux points suffisent à déterminer une droite, donc  $y = 7x - 29$  est bien une équation de la droite  $(AB)$ .

2. Une parallèle à  $(AB)$  a même coefficient directeur, la droite cherchée aura donc une équation du type :

$$y = 7x + b$$

Comme elle passe par  $C(0, -1)$ , l'ordonnée à l'origine ( $b$ ) vaut  $-1$ . D'où l'équation :  $y = 7x - 1$ .

3.  $E$  et  $F$  n'ont pas la même abscisse, donc la droite  $(EF)$  n'est pas parallèle à  $(Oy)$ . Elle admet donc une équation du type  $y = ax + b$ . Comme elle passe par  $E(3, -2)$  et  $F(2, 2)$ , on obtient les équations :

$$\begin{cases} -2 = 3a + b \\ 2 = 2a + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = a \text{ (en soustrayant)} \\ b = 2 - 2a = 2 + 8 = 10 \text{ (en substituant la valeur de } b) \end{cases}$$

D'où l'équation de  $(EF)$  :  $y = -4x + 10$ .

4. Les droites  $D$  et  $(EF)$  sont sécantes car elles n'ont pas le même coefficient directeur.

On calcule leur intersection en résolvant le système :

$$\begin{cases} y = 7x - 1 \text{ (équation de } D) \\ y = -4x + 10 \text{ (équation de } (EF)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -11x + 11 \text{ (en soustrayant)} \\ y = 7x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}$$

Le point d'intersection a donc pour coordonnées  $G(1, 6)$ .

## 6 ————— Lycée Carnot, Dijon

La difficulté de cet exercice est de trouver la propriété des médiatrices qu'il faut utiliser. On sait que tout point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  appartient à la médiatrice de  $[AB]$  si et seulement s'il est équidistant de  $A$  et  $B$ , c'est-à-dire :  $AM = BM$ .

En élevant au carré et en tenant compte de  $A(1; 0)$  et  $B(4; 2)$ , il vient :

$$\begin{aligned} AM^2 = BM^2 &\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x-4)^2 + (y-2)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 \\ &\Leftrightarrow -2x + 1 = -8x - 4y + 20 \\ &\Leftrightarrow 4y = -6x + 19 \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{19}{4} \text{ (car } \frac{6}{4} = \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

L'équation de la médiatrice est donc :

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{19}{4}$$

## 7 ————— Lycée François Ier, Le Havre

L'image d'une droite par une translation est une droite parallèle, donc l'équation de l'image de  $D$  est de la forme :

$$y = -3x + c$$

Prenons au hasard un point de  $D$ , par exemple le point de coordonnées  $(1, -2)$ , que nous noterons  $M$ . L'image par  $M$  par la translation de vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , est le point de coordonnées  $(1+2, -2+1)$ , donc  $(3, -1)$ .

L'image de  $D$  passe nécessairement par ce point, donc  $-1 = -3 \times 3 + c = 0$ , ce qui donne :  $c = 8$ .

L'équation de l'image de la droite  $D$  par la translation  $t$  a donc pour équation :

$$y = -3x + 8$$

## 8 ————— Lycée Lacordaire, Marseille

1.  $\mathcal{D}$  a pour coefficient directeur :  $-1$ . Notons donc  $y = -x + c$  son équation.

$\mathcal{D}$  passe par  $A(2; 3)$ , donc  $3 = -2 + c$ . On en déduit  $c = 5$  et l'équation de  $\mathcal{D}$  est :

$$y = -x + 5$$

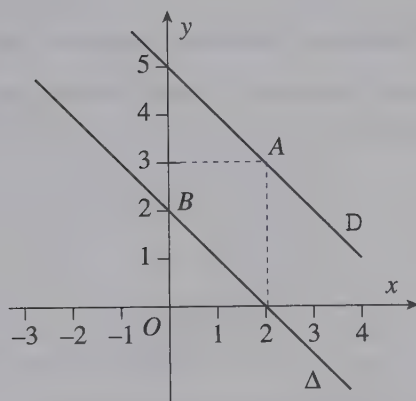
2. Puisque  $\Delta$  est parallèle à  $\mathcal{D}$ , elle a le même coefficient directeur, donc son équation est du type :

$$y = -x + c$$

$\Delta$  passe par  $B(0, 2)$ , donc  $2 = -0 + c$  et  $c = 2$ . L'équation de  $\Delta$  est donc :

$$y = -x + 2$$

3.



## 9 ————— Lycée Voltaire, Paris

1.  $A$  et  $B$  n'ont pas la même abscisse, donc  $(AB)$  n'est pas verticale. On en déduit qu'elle admet une équation de la forme :  $y = ax + b$ . En substituant les coordonnées de  $A$  et  $B$  à  $x$  et  $y$  dans l'équation, on obtient le système d'inconnues  $a$  et  $b$  :

$$\begin{cases} -1 = a + b \\ 3 = 3a + b \end{cases}$$

On tire de la première équation  $a = -1 - b$ . En substituant cette valeur dans la deuxième, on obtient :

$$\begin{aligned} 3 &= 3(-1 - b) + b \Leftrightarrow 3 = -3 - 3b + b \\ &\Leftrightarrow 6 = -2b \\ &\Leftrightarrow -3 = b \end{aligned}$$

et donc  $a = -1 - b = 2$ .

Autre méthode : on calcule directement le coefficient directeur  $a$ .

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 1}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1$$

L'équation de  $(AB)$  est donc du type  $y = 2x + b$ . On substitue les coordonnées de  $A$  (par exemple) dans l'équation :  $-1 = 2.1 + b$  et on retrouve  $b = -3$ .

L'équation de  $(AB)$  est donc :

$$y = 2x - 3$$

2.  $(d)$  étant parallèle à  $(AB)$ , son équation commence de la même manière :

$$y = 2x + c$$

Pour calculer  $c$ , on utilise les coordonnées de  $C$ .  $C \in (d)$  donc :

$$6 = 2 \times 1 + c$$

et donc  $c = 4$ . L'équation de  $(d)$  est donc  $y = 2x + 4$ .

## 10 ————— Lycée Voltaire, Paris

1. Commençons par nous débarrasser des dénominateurs, en multipliant la première ligne par 6 et la deuxième par 2 :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4x + 3y = 6 \\ 3x - 2y - 5x + 3y = 6 \end{cases}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\begin{cases} -2x + 6y = 6 \\ -2x + y = 6 \end{cases}$$

En ôtant la deuxième ligne à la première, on élimine  $x$  :

$$\begin{cases} 5y = 0 \\ -2x + y = 6 \end{cases}$$

Il vient  $y = 0$  et  $x = -3$ . Conclusion :

$$S = \{(-3, 0)\}$$

2. Effectuons d'abord les produits en croix dans la première ligne.

$$\begin{cases} 5x = 7y \\ 3x - y = 24 \end{cases}$$

On utilise la deuxième ligne, sous la forme :  $y = 3x - 24$ , pour procéder par substitution :

$$\begin{cases} 5x = 7(3x - 24) \\ y = 3x - 24 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} 5x - 21x = -7 \times 3 \times 8 \\ y = 3x - 24 \end{cases}$$

Il vient :

$$\begin{cases} x = \frac{21}{2} \\ y = \frac{63}{2} - \frac{48}{2} = \frac{15}{2} \end{cases}$$

et  $S = \left\{ \left( \frac{21}{2}; \frac{15}{2} \right) \right\}$

## 11 ————— Lycée Fragonard, L'Isle-Adam

Notons  $x$  le nombre de filles et  $y$  celui de garçons qu'il y a au départ. Il y a à ce moment-là deux fois plus de garçons que de filles, donc  $y = 2x$ . Si 6 garçons partent, il en reste  $y - 6$ . Si 6 filles arrivent, il y en a alors  $x + 6$ . Alors, il y a deux fois plus de filles, c'est-à-dire que  $x + 6 = 2(y - 6)$ . Il ne reste plus qu'à résoudre le système :

$$\begin{cases} y = 2x \\ x + 6 = 2(y - 6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x + 6 = 2y - 12 \end{cases}$$

Par substitution :

$$\begin{cases} y = 2x \\ x = 2(2x) - 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ -3x = -18 \end{cases}$$

On obtient facilement  $x = 6$  et  $y = 12$ . Comme il s'agit d'un problème « concret », ne donnez pas un ensemble de solutions ; écrivez plutôt : « Il y avait au départ 6 filles et 12 garçons. »

## 12 ————— Lycée Lamartine, Paris

1. Puisque le carré de  $x + y$  vaut 9, on en déduit que  $x + y = 3$  ou  $x + y = -3$ . Le système proposé peut donc être séparé en deux « sous-systèmes » :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + y = -3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Les solutions du système de départ sont celles de l'un ou de l'autre de ces deux sous-systèmes.

2. Résolvons chaque système par substitution. Pour le premier, on écrit :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + y = -3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2(-x - 3) = 7 \\ y = -x - 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2x - 6 = 7 \\ y = -x - 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = -16 \end{cases} \end{aligned}$$

Pour le second système :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x + y = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2(-x + 3) = 7 \\ y = -x + 3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2x + 6 = 7 \\ y = -x + 3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$S = \{(13; -16), (1; 2)\}$$

### 13 ——— Lycée Jean Monnet, Franconville

Appelons  $x$  le nombre de places à 21 € et  $y$  le nombre de places à 26 €. Des renseignements de l'énoncé, on tire le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 21x + 26y = 3300 \end{cases}$$

On peut procéder par substitution :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} x = 150 - y \\ 21(150 - y) + 26y = 3300 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 150 - y \\ 3150 - 21y + 26y = 3300 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 150 - y \\ 5y = 150 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 30 \\ x = 120 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Il y a donc 30 places à 26 € et 120 places à 21 €.

### 14 ——— Lycée Notre-Dame, Saint-Nazaire

Notons  $x$  le premier capital, et  $y$  le second. A dix pour cent,  $x$  rapporte  $\frac{10}{100}x$ , et ainsi de suite... D'après les renseignements de l'énoncé, on obtient le système :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \frac{10}{100}x - \frac{8}{100}y = 200 \\ \frac{8}{100}x - \frac{10}{100}y = 70 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 8y = 20000 \\ 8x - 10y = 7000 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow L_1 \leftarrow 8L_1 - 10L_2 \quad \begin{cases} 36y = 90000 \\ 8x - 10y = 7000 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2500 \\ 8x = 32000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2500 \\ x = 4000 \end{cases}$$

Les deux capitaux sont respectivement de 4000 € et de 2500 €.

## 15 ———— Lycée Auguste Renoir, Asnières-sur-Seine

On résout par combinaisons :

$$L_1 \leftarrow 2L_1 + \sqrt{2}L_2 \quad \begin{cases} 8y = 0 \\ -2x + 2\sqrt{2}y = \sqrt{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ -2x = \sqrt{2} \end{cases}$$

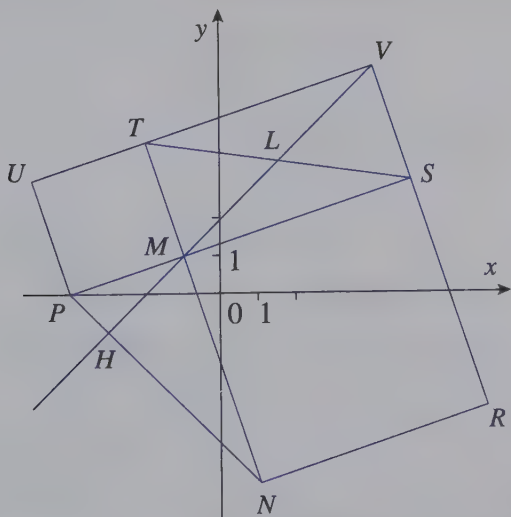
$$\text{D'où } S = \left\{ \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \right\}.$$

## 16 ———— Lycée Victor Louis, Talence

Dans cet exercice, on utilise à plusieurs reprises la formule permettant de calculer la distance entre deux points  $A$  et  $B$  dans un repère orthonormal :

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

On commence par une figure, où on place les points au fur et à mesure :



1. Nous allons appliquer la réciproque du théorème de Pythagore. On calcule les carrés des côtés :

$$MN^2 = (1 - (-1))^2 + (-5 - 1)^2 = 2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40$$

$$MP^2 = (-4 - (-1))^2 + (-1)^2 = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10$$

$$PN^2 = (1 - (-4))^2 + (-(-5))^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$$

On constate :  $MN^2 + MP^2 = PN^2$  donc le triangle  $MNP$  est rectangle en  $M$ .

2. Pour montrer que  $MNRS$  est un parallélogramme, on a deux méthodes possibles utilisant les coordonnées :

*Avec les vecteurs* On calcule les coordonnées de :

$$\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{SR} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

On constate  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SR}$  donc  $MNRS$  est un parallélogramme.

*Avec les milieux* Le milieu de  $[MN]$  a pour coordonnées :  $\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{1-5}{2}\right)$ , donc  $(0, -2)$ . Le milieu de  $[SN]$  a les mêmes coordonnées.  $[MN]$  et  $[SN]$  ont même milieu, on en déduit que  $MNRS$  est un parallélogramme.

3. Là encore, deux méthodes possibles :

*Avec les vecteurs*  $L$  est le milieu de  $[ST]$  et de  $[MV]$  donc  $MTVS$  est un parallélogramme, et  $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{TV}$ . On calcule :

$$\overrightarrow{MS} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Notons  $V(x, y)$ . Les coordonnées de  $\overrightarrow{TV}$  sont :

$$\overrightarrow{TV} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \end{pmatrix}$$

Il n'y a plus qu'à résoudre le système :

$$\begin{cases} x+2=6 \\ y-4=2 \end{cases}$$

D'où  $x=4$  et  $y=6$ . Il vient :  $V(4, 6)$ .

*Avec les milieux* On calcule les coordonnées de  $L$ , milieu de  $[ST]$  :

$$L \left( \frac{5-2}{2}, \frac{3+4}{2} \right)$$

$$\text{donc } L \left( \frac{3}{2}, \frac{7}{2} \right).$$

Notons  $V(x, y)$  ;  $L$  étant le milieu de  $[MV]$ , ses coordonnées s'écrivent également :

$$L \left( \frac{x-1}{2}, \frac{y+1}{2} \right)$$

On identifie, on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{y+1}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

On obtient  $x = 4$  et  $y = 6$ , et donc  $V(4, 6)$ .

4. On calcule les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{MV} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{MH} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ . On constate que  $\overrightarrow{MV}$  et  $\overrightarrow{MH}$  sont colinéaires (coordonnées proportionnelles), donc  $M$ ,  $V$  et  $H$  sont alignés.

De même :

$$\overrightarrow{NP} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{NH} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{NP}$  et  $\overrightarrow{NH}$  sont colinéaires, donc  $N$ ,  $P$  et  $H$  sont alignés.

On en conclut que les droites  $(MV)$  et  $(NP)$  se coupent en  $H$ .

5. Montrer que  $(MV)$  est perpendiculaire à  $(NP)$  revient à montrer que  $MHP$  est un triangle rectangle. On calcule comme à la première question :

$$MH^2 = 8$$

$$PH^2 = 2$$

$$MP^2 = 10$$

$MP^2 = MH^2 + PH^2$ . D'après la réciproque du théorème de Pythagore,  $MPH$  est un triangle rectangle en  $H$ . Donc  $(MV)$  est perpendiculaire à  $(NP)$ .

6. On calcule encore  $HN^2 = 32$ . L'égalité demandée ne concerne que des nombres positifs, on obtient une égalité équivalente en élevant au carré. Montrons donc que :

$$MH^4 = HN^2 \times HP^2$$

On a  $HN^2 = 32$ ,  $HP^2 = 2$  et  $MH^2 = 8$  donc  $MH^4 = 64$ . On a bien  $64 = 32 \times 2$ , donc l'égalité  $MH^4 = HN^2 \times HP^2$  est vraie, et donc :

$$MH^2 = HN \times HP$$

## 17 ————— Lycée Sacré-Cœur, Amiens

L'énoncé demande de « construire » les points  $M$  en question, il serait donc très maladroît d'essayer de calculer  $\alpha$ .

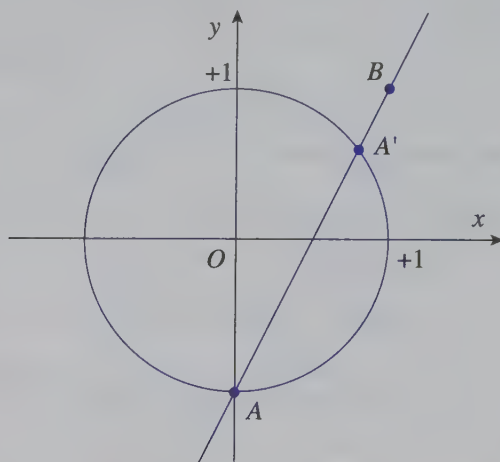
Il faut se rappeler que, quel que soit le réel  $\alpha$ , les points de coordonnées du type  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  sont des points du cercle trigonométrique (centre  $O$  et rayon 1).

Notons  $M(x_M, y_M)$  ; on veut que  $M$  soit sur le cercle trigonométrique, et qu'en plus il vérifie  $\sin \alpha = 2 \cos \alpha - 1$ , c'est-à-dire :

$$y_M = 2x_M - 1$$

Il ne reste plus qu'à construire la droite d'équation  $y = 2x - 1$ . Celle-ci passe, par exemple, par les points  $A(0; -1)$  et  $B(1; 1)$ .

Les points-solutions sont les intersections de la droite et du cercle trigonométrique. On obtient les deux points  $A$  et  $A'$  représentés ci-dessous :



## 18 ——— Lycée Montesquieu, Bordeaux.

1. Dans le repère  $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ , on a :  $O(0; 0)$ ,  $A(1; 0)$ ,  $B(0; 1)$  et  $D(k; 0)$  (car  $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OA}$ ).
2.  $(CD)$  est parallèle à  $(AB)$ . Le coefficient directeur de la droite  $(AB)$  est :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1$$

L'équation de  $(CD)$  est donc de la forme :  $y = -x + c$ .  $(CD)$  passe par  $D(k; 0)$ , donc  $0 = -k + c$ , d'où l'équation de  $(CD)$  :

$$y = -x + k$$

$C$  est sur l'axe des ordonnées (car  $O$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés) donc son ordonnée est l'ordonnée à l'origine de  $(CD)$ . On en déduit  $C(0, k)$ .

3.  $I$  est le milieu de  $[AB]$ . Or  $A(1; 0)$  et  $B(0; 1)$ , d'où :

$$I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$J$  est le milieu de  $[CD]$  ; or  $C(0; k)$  et  $D(k; 0)$  d'où :

$$J\left(\frac{k}{2}; \frac{k}{2}\right)$$

Pour calculer les coordonnées de  $K$ , intersection des droites  $(AC)$  et  $(BD)$ , on écrit les équations de ces deux droites :

Le coefficient directeur de  $(AC)$  est :

$$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{k}{-1} = -k$$

Comme  $(AC)$  passe par  $C(0, k)$ , son ordonnée à l'origine est  $k$ , d'où  $(AC) : y = -kx + k$ .

Le coefficient directeur de  $(BD)$  est :

$$\frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{-1}{k}$$

Comme  $(BD)$  passe par  $B(0, 1)$ , son ordonnée à l'origine est  $1$ , d'où

$$(BD) : y = \frac{-1}{k}x + 1.$$

On résout le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -kx + k \\ y = \frac{-1}{k}x + 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -kx + k = \frac{-1}{k}x + 1 \\ y = -kx + k \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{k} - k\right)x = 1 - k \\ y = -kx + k \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 - k^2}{k}x = 1 - k \\ y = -kx + k \end{cases} \end{aligned}$$

On sait que  $1 - k^2 = (1 - k)(1 + k)$ , on obtient donc :

$$x = \frac{k(1 - k)}{1 - k^2} = \frac{k(1 - k)}{(1 - k)(1 + k)} = \frac{k}{1 + k}$$

et donc

$$y = -kx + k = \frac{-k^2}{1 + k} + \frac{k + k^2}{1 + k} = \frac{k}{1 + k}$$

On conclut :

$$K\left(\frac{k}{1 + k}; \frac{k}{1 + k}\right)$$

Remarquons que les valeurs gênantes  $k = 0$ ,  $k = 1$  ou  $k = -1$  sont impossibles :

- Si  $k = 0$ , alors  $\overrightarrow{OD} = \vec{0}$  donc  $O = D$ , mais alors  $C$ ,  $B$  et  $D$  sont alignés, ce qui n'est pas possible car  $ABCD$  est un trapèze.
- Si  $k = 1$ , alors  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}$  donc  $D = A$ , ce qui contredit également la définition de  $ABCD$ .
- Si  $k = -1$ , alors  $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA}$  signifie que  $O$  est le milieu de  $[AD]$ .  $O$  serait également, d'après la question 2., le milieu de  $[BC]$ , et donc  $ABDC$  serait un parallélogramme, ce qui n'est pas possible.

4. Pour les points  $O$ ,  $I$ ,  $J$  et  $K$ , l'ordonnée est égale à l'abscisse, donc ces quatre points sont sur la droite d'équation  $y = x$ .

## 19 Lycée Montesquieu, Le Mans

1. Calculons les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{BA}$  :

$$\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Comme  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$  et  $C(4; -1)$ , les coordonnées de  $D$  sont  $4 - 2$  et  $-1 - 4$ , donc  $D(2, -5)$ .

2. Le centre du parallélogramme est le milieu des diagonales. En considérant la diagonale  $[AC]$ , le centre a pour coordonnées :

$$\left( \frac{-1 + 4}{2}, \frac{-1 - 1}{2} \right) \text{ donc } \left( \frac{3}{2}; -1 \right)$$

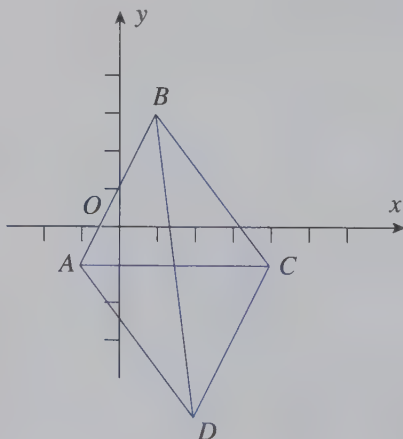
3. Calculons les longueurs des côtés de  $ABC$  :

$$AB^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

$$BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$AC^2 = 5^2 + 0 = 25$$

$BC = AC$  donc  $ABC$  est isocèle en  $C$ . Il n'est pas rectangle.



## 20 Lycée du Parc, Lyon

1. On veut une droite parallèle à  $(D)$ , les coefficients directeurs de  $D$  et  $\Delta$  doivent être égaux. Écrivons provisoirement l'équation de  $\Delta$  :

$$y = -x + b$$

et calculons  $b$  en exprimant que  $\Delta$  passe par  $A(2; 1)$  :

$$1 = -2 + b \Leftrightarrow 3 = b$$

L'équation de  $\Delta$  est :

$$y = -x + 3$$

2. Là, il y a une légère astuce. En effet,  $B$  et  $C$  ont la même abscisse, donc la droite  $(BC)$  est verticale. La droite  $\Delta$  est donc également verticale, donc elle admet une équation du type  $x = c$ . Comme  $\Delta$  passe par le point  $A$  d'abscisse 2, son équation est :

$$x = 2$$

## 21 ————— Lycée Chrestien-de-Troyes, Troyes

1. Vérifions que  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont pas colinéaires.  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ , et  $\overrightarrow{AC}$   $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ . D'où :  $3 \times 4 - (-5) \times 5 = 12 + 25 = 37 \neq 0$ . Les points  $A$ ,  $B$ , et  $C$  ne sont donc pas alignés.
2. La médiane issue de  $A$  passe également par le milieu de  $[BC]$ . Notons  $A'$  ce point et calculons ses coordonnées :

$$A\left(\frac{1+3}{2}; \frac{-3+6}{2}\right) \text{ donc } A\left(2; \frac{3}{2}\right)$$

Il s'agit de trouver l'équation de  $(AA')$ .  $A$  et  $A'$  n'ont pas la même abscisse, donc  $(AA')$  n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ; elle admet donc une équation du type  $y = ax + b$ . Comme elle passe par  $A$  et  $A'$ , les coordonnées de ces deux points vérifient l'équation, et on peut écrire :

$$\begin{cases} 2 = -2a + b \\ \frac{3}{2} = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = -4a \\ b = 2 + 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{8} \\ b = \frac{7}{4} \end{cases}$$

3. Calculons les coordonnées du milieu de  $[AC]$ , que l'on note  $B'$  :

$$B'\left(\frac{-2+3}{2}; \frac{2+6}{2}\right), \text{ donc } B'\left(\frac{1}{2}; 4\right)$$

Cette fois, calculons directement le coefficient directeur de  $(BB')$  par la formule :

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_B - y_{B'}}{x_B - x_{B'}} \\ &= \frac{-3 - 4}{1 - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-7}{\frac{1}{2}} \\
 &= -14
 \end{aligned}$$

Pour l'ordonnée à l'origine, on substitue les coordonnées de  $B$  dans l'équation  $y = -14x + b$ , il vient :

$$-3 = -14 + b \Leftrightarrow b = 11$$

L'équation de la médiane issue de  $B$  est donc :

$$y = -14x + 11$$

4. Le centre de gravité est l'intersection des médianes, donc il suffit de résoudre le système :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} y = \frac{-1}{8}x + \frac{7}{4} \\ y = -14x + 11 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1}{8}x + \frac{7}{4} = -14x + 11 \\ y = -14x + 11 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 14 = -112x + 88 \\ y = -14x + 11 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 111x = 72 \\ y = -14x + 11 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{24}{37} \\ y = \frac{71}{37} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le centre de gravité a donc pour coordonnées :

$$\left( \frac{24}{37}, \frac{71}{37} \right)$$

## 22 ————— Lycée Fénelon, Paris

1. L'image d'une droite par une translation est une droite parallèle, donc l'image de  $(\mathcal{D}_1)$  est une droite dont l'équation est de la forme :  $y = x + c$ . Pour calculer  $c$ , choisissons au hasard un point de  $\mathcal{D}_1$ .

Appelons  $M$  le point de coordonnées  $(1, -1)$ , qui est bien sur  $(\mathcal{D}_1)$ . Son image par la translation de vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  a pour coordonnées  $(1 - 1, -1 + 2)$ , soit :  $(0, 1)$ .

On obtient donc  $-0 + 1 + c = 0$ , soit :  $c = -1$ . L'équation de l'image de  $(\mathcal{D}_1)$  est donc :

$$y = x + 1$$

2. De même, l'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle.

L'équation de l'image de  $(\mathcal{D}_2)$  est donc de la forme :

$$y = \frac{1}{2}x + c$$

Pour calculer  $c$ , on choisit au hasard un point de  $\mathcal{D}_2$ .

Notons  $N$  le point de coordonnées  $(1, 1)$ , qui est sur  $(\mathcal{D}_2)$ . Pour calculer les coordonnées de son image  $N'(x, y)$  par la symétrie de centre  $\Omega$ , écrivons que  $\Omega$  est le milieu de  $[NN']$  :

$$\overrightarrow{NN'} = 2\overrightarrow{N\Omega}$$

Les coordonnées des deux vecteurs sont :  $\overrightarrow{NN'} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$  et  $2\overrightarrow{N\Omega} \begin{pmatrix} 2(-1-1) \\ 2(2-1) \end{pmatrix}$ , soit  $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ . On obtient le système :

$$\begin{cases} x-1 = -4 \\ y-1 = 2 \end{cases}$$

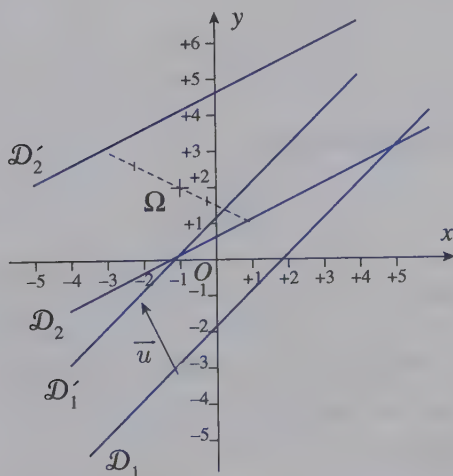
qui fournit les coordonnées  $(-3, 3)$  de  $N'$ .

L'image de  $(\mathcal{D}_2)$  passe par  $N'$ , donc :

$$3 = \frac{1}{2} \cdot (-3) + c$$

d'où  $c = \frac{9}{2}$ . On obtient une équation de l'image de  $\mathcal{D}_2$  :

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$



## 23 ————— Lycée Hoche, Versailles

Le mieux est de calculer directement les équations de  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$ .

1.  $\mathcal{D}_1$  a un vecteur directeur de coordonnées  $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ . (Utilisez la méthode « des petits pas ». Lorsqu'on avance sur  $\mathcal{D}_1$ , entre le moment où l'on croise l'axe des abscisses et celui où l'on croise celui des ordonnées, on fait trois « pas » vers la droite et cinq « pas » vers le haut.)

Son coefficient directeur est donc  $\frac{5}{3}$ .

On lit sur la figure l'ordonnée à l'origine (c'est-à-dire l'ordonnée du point d'intersection de  $(Oy)$  et de  $\mathcal{D}_1$ ) : +5.

D'où l'équation de  $\mathcal{D}_1$  :

$$y = \frac{5}{3}x + 5$$

Ce qui correspond à l'équation 6 de l'énoncé.

2.  $\mathcal{D}_2$  passe par les points de coordonnées  $(-3, 0)$  et  $(1, 2)$ . Donc (appliquez la méthode des « petits pas »), elle admet un vecteur directeur de coordonnées  $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ , et comme coefficient directeur :  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

L'équation de  $\mathcal{D}_2$  est donc de la forme :

$$y = \frac{1}{2}x + c$$

Comme elle passe par le point de coordonnées  $(-3, 0)$ , on peut déterminer  $c$  en remplaçant dans l'équation :

$$0 = -\frac{3}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$$

Finalement  $\mathcal{D}_2$  admet pour équation :

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Il s'agit de l'équation 5.

3.  $\mathcal{D}_3$  admet un vecteur directeur de coordonnées  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , donc le coefficient directeur -1. L'ordonnée à l'origine vaut +3.

L'équation de  $\mathcal{D}_3$  est donc :

$$y = -x + 3$$

$\mathcal{D}_3$  ne correspond donc à aucune des équations de l'énoncé.

# 24

## Lycée Claude Monet, Paris

Nous allons résoudre le premier système par *substitution* :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 3x - y = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 3x - 1 = y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5(3x - 1) = 12 \\ 3x - 1 = y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 15x - 5 = 12 \\ 3x - 1 = y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 17x = 17 \\ 3x - 1 = y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

La solution du système est donc (1; 2)

Le système suivant sera, pour changer, résolu par *combinaison* :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 3x - 4y = -24 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -24 \\ -10x + 4y = -4 \leftarrow 2 \times L_2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -24 \\ -7x = -28 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 4y = -24 \\ x = 4 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -4y = -36 \\ x = 4 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 \\ x = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

La solution du système est donc (4; 9)

Le dernier système sera considéré d'abord comme un système en  $x^2$  et  $y^2$ . Nous en déduirons ensuite les valeurs de  $x$  et  $y$ . Si l'on pose  $X = x^2$  et  $Y = y^2$ , on se retrouve avec le système que l'on vient de résoudre :

$$\begin{cases} 3X - 4Y = -24 \\ 5X - 2Y = 2 \end{cases}$$

Donc  $X = 4$  et  $Y = 9$ .  $x^2 = 4$  pour  $x = 2$  ou  $x = -2$ . D'autre part,  $y^2 = 9$  quand  $y = 3$  ou  $y = -3$ . On obtient donc l'ensemble des solutions :

$$S = \{(-2; -3), (-2; 3), (2; -3), (2; 3)\}$$

## 25 Lycée Jacques Monod, Clamart

Posons  $X = x^2$  et  $Y = \frac{3}{y+1}$  (vous pouvez poser  $Y = \frac{1}{y+1}$  mais  $\frac{3}{y+1}$  permet d'obtenir des coefficients plus simples.) Le système devient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2X - 3Y = 15 \\ 3X - 8Y = 19 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 \end{matrix} \begin{cases} 6X - 9Y = 45 \\ 6X - 16Y = 38 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \begin{cases} 7Y = 7 \\ 6X - 16Y = 38 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir  $Y = 1$  et  $X = 9$ .  $x^2 = 9$ , donc  $x$  vaut 3 ou  $-3$ .  
 $\frac{3}{y+1} = 1$ , donc  $y+1 = 3$  et  $y = 2$ . On obtient donc deux solutions :

$$S = \{(-3; 2), (3; 2)\}$$

## 26 Lycée Hoche, Versailles

Nous allons résoudre le système par combinaisons :

$$\begin{aligned} L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \quad \begin{cases} 2u - 3v = 4 \\ 17v = -17 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} v = -1 \\ 2u + 3 = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} v = -1 \\ u = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où la solution :  $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ . En posant  $u = \frac{1}{x-3}$  et  $v = \frac{1}{y+5}$ , et en multipliant la deuxième ligne par 2, on transforme le deuxième système proposé en le premier. Les solutions vérifient donc  $\frac{1}{x-3} = \frac{1}{2}$ , soit  $x-3 = 2$  donc  $x = 5$ , et  $\frac{1}{y+5} = -1$ , soit  $y+5 = -1$  et  $y = -6$ . L'ensemble des solutions s'écrit donc :

$$S = \{(5; -6)\}$$

## 27 Lycée Hoche, Versailles

Posons tout de suite :  $X = \frac{1}{(2x+1)^2}$  et  $Y = \frac{1}{|3y-5|}$ . Le système devient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3X - 4Y = 32 \\ 2X - 5Y = 12 \end{cases} &\Leftrightarrow L_1 \leftarrow 2L_1 - 3L_2 \begin{cases} 7Y = 28 \\ 2X - 5Y = 12 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Y = 4 \\ 2X = 32 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = 4 \\ X = 16 \end{cases}$$

On obtient enfin :  $\frac{1}{(2x+1)^2} = 16$  et  $\frac{1}{|3y-5|} = 4$ . Cherchons  $x$ .

$$(2x+1)^2 = \frac{1}{16} \text{ donc } 2x+1 = \frac{1}{4} \text{ ou } 2x+1 = -\frac{1}{4}$$

On a enfin :

$$x = -\frac{3}{8} \text{ ou } x = -\frac{5}{8}$$

Cherchons  $y$ .

$$|3y-5| = \frac{1}{4} \text{ donc } 3y-5 = \frac{1}{4} \text{ ou } 3y-5 = -\frac{1}{4}$$

On a enfin :

$$y = \frac{7}{4} \text{ ou } y = \frac{19}{12}$$

Conclusion :

$$S = \left\{ \left( -\frac{3}{8}; \frac{7}{4} \right), \left( -\frac{3}{8}; \frac{19}{12} \right), \left( -\frac{5}{8}; \frac{7}{4} \right), \left( -\frac{5}{8}; \frac{19}{12} \right) \right\}$$

## 28 Lycée Molière, Paris

1. Il est clair d'après l'énoncé que l'aller s'est effectué vers l'aval, alors que le retour était vers l'amont. A l'aller, il faut ajouter la vitesse de la rivière à la vitesse propre du bateau alors qu'au retour, il faut la soustraire. Notons  $v$  la vitesse du canot et  $v_R$  la vitesse de la rivière. On note  $t_1$  le temps à l'aller,  $t_2$  le temps au retour, et  $t$  le temps mis par le radeau. Le radeau se déplace à la vitesse  $v_R$ .

La seule constante de l'exercice, c'est la distance entre  $A$  et  $B$ . On peut l'écrire de trois façons différentes :  $(v + v_R)t_1$ ,  $(v - v_R)t_2$  et  $v_R t$ . On en déduit :

$$v + v_R = \frac{v_R t}{t_1} \text{ et } v - v_R = \frac{v_R t}{t_2}$$

Soustrayons ces deux égalités membre à membre pour éliminer  $v$ .

$$2v_R = \frac{v_R t}{t_1} - \frac{v_R t}{t_2}$$

En simplifiant par  $v_R$  et en mettant  $t$  en facteur :

$$2 = t \left( \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right)$$

On calcule simplement :

$$\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7,5} = \frac{3}{15} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15}$$

On en déduit :  $t = 30$ . Le radeau met trente heures pour aller de  $A$  à  $B$  (remarque : il ne peut pas faire le trajet inverse, n'est-ce-pas ?)

2. En notant  $t_3$  le nouveau temps mis au retour, on obtient :

$$(v + 1,6 - v_R)t_3 = v_R t \text{ donc } v - v_R + 1,6 = \frac{v_R t}{t_3}$$

On sait que  $v - v_R = \frac{v_R t}{t_2}$ , on a donc :

$$\frac{v_R t}{t_2} + 1,6 = \frac{v_R t}{t_3}$$

En factorisant :

$$1,6 = v_R t \left( \frac{1}{t_3} - \frac{1}{t_2} \right)$$

Calculons :

$$\frac{1}{t_3} - \frac{1}{t_2} = \frac{1}{6,75} - \frac{1}{7,5} = \frac{4}{27} - \frac{4}{30} = \frac{40}{270} - \frac{36}{270} = \frac{4}{270}$$

Il vient :

$$v_R = \frac{1,6 \times 270}{4 \times 30} = 3,6 \text{ km/h}$$

Pour trouver la vitesse du canot, on utilise

$$(v + v_R)t_1 = v_R t \Leftrightarrow 5v + 18 = 108 \Leftrightarrow 5v = 90 \Leftrightarrow v = 18$$

Le canot se déplace à 18 km/h.

## 29 ————— Lycée Carnot, Dijon

1. La première équation équivaut à  $y = -5x + 4$  et la seconde à  $y = \frac{1}{4}x - 1$ . La résolution du système équivaut à la recherche de l'intersection des deux droites d'équations  $y = -5x + 4$  et  $y = \frac{1}{4}x - 1$ . Ces droites n'ayant pas le même coefficient directeur, elles sont sécantes : elles ont un unique point d'intersection, donc le système admet une solution unique.

2. Par substitution :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 4 - 5x \\ -3x + 12(4 - 5x) = -12 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 5x \\ -63x + 48 = -12 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 5x \\ x = \frac{60}{63} \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui donne  $x = \frac{20}{21}$  et  $y = -\frac{16}{21}$ . D'où l'ensemble  $S = \left\{ \left( \frac{20}{21}, -\frac{16}{21} \right) \right\}$ .

3. Il suffit de poser  $X = \frac{1}{x+1}$  et  $Y = \frac{1}{y-2}$  pour se ramener au système précédent.

On obtient :  $x+1 = \frac{21}{20} \Leftrightarrow x = \frac{1}{20}$  et  $y-2 = -\frac{21}{16} \Leftrightarrow y = \frac{11}{16}$ .

Conclusion :

$$S = \left\{ \left( \frac{1}{20}, \frac{11}{16} \right) \right\}$$

## 30 ————— Lycée David d'Angers, Angers

1. Pour résoudre le système :

$$\begin{cases} 7x - 4y = 29 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

on peut procéder par substitution : la seconde équation donne  $y = 2x - 1$ , et on obtient le système équivalent :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 7x - 4(2x - 1) = 29 \\ y = 2x - 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4 = 29 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -25 \\ y = -51 \end{cases} \end{aligned}$$

La solution du système est donc  $(-25; -51)$ .

2. (a) En remplaçant  $(x; y)$  par  $(0; -9)$  dans le système, on obtient :

$$\begin{cases} 9 = 9 \\ 15 - 15 = 0 \end{cases}$$

ce qui est vrai, donc  $(0; -9)$  est solution du système.

Essayons maintenant  $(1; 6)$  :

$$\begin{cases} 2 - 6 = 9 \\ \frac{20}{3} - 10 - 15 = 0 \end{cases}$$

ce qui est évidemment faux.  $(1; 6)$  n'est pas solution.

Avec  $(1; -7)$  :

$$\begin{cases} 2 + 7 = 9 \\ \frac{10}{3} + \frac{35}{3} - 15 = 0 \end{cases}$$

Ces deux égalités sont vraies (penser à  $15 = \frac{45}{3}$ ) donc  $(1, -7)$  est solution du système.

On sait qu'un tel système se ramène au problème de l'intersection de deux droites données par leur équation. Il y a au moins deux solutions, donc au moins deux points d'intersection. Cela signifie que les deux droites sont confondues,

et qu'en fait les équations du système sont proportionnelles. On le vérifie facilement en multipliant la première équation par  $\frac{5}{3}$ . On obtient la seconde.

Le système est donc équivalent à la seule équation :  $2x - y = 9$ .

- (b) Écrite sous la forme  $y = 2x - 9$ , on reconnaît une équation de droite. Les solutions sont donc les coordonnées des points de cette droite. Ces coordonnées sont sous la forme  $(x; 2x - 9)$ . On écrit :

$$S = \{(x, 2x - 9), \quad x \in \mathbb{R}\}$$

## 31 Lycée Condorcet, Paris

1. (a) Si  $D_m$  doit passer par A, on doit avoir :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2m-1}{m-3} \cdot 1 + \frac{-7m+6}{m-3} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{2m-1-7m+6}{m-3} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{-5m+5}{m-3} \\ \Leftrightarrow m-3 &= -5m+5 \Leftrightarrow 6m=8 \\ m &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

- (b) Par la même méthode, on remplace  $x$  et  $y$  par 0 dans l'équation, et on obtient  $-7m+6=0$ , donc  $m = \frac{6}{7}$ .

- (c)  $D_m$  est parallèle à l'axe des abscisses quand son coefficient directeur est nul, donc quand  $\frac{2m-1}{m-3} = 0$ , d'où :  $m = \frac{1}{2}$ .

- (d) L'équation de  $D_m$  est du type  $y = ax + b$  (et non  $x = c$ ), il s'agit *toujours* d'une droite dite « oblique », c'est-à-dire qu'elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

- (e)  $D_m$  et  $\Delta$  sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{2m-1}{m-3} &= 3 \\ \Leftrightarrow 2m-1 &= 3m-9 \\ \Leftrightarrow 8 &= m \end{aligned}$$

- (f)  $D_m$  admet  $-2$  comme coefficient directeur si  $\frac{2m-1}{m-3} = -2$  et  $m \neq 3$ . On obtient :

$$\begin{aligned} (2m-1) &= -2 \times (m-3) \\ 2m-1 &= -2m+6 \\ 4m &= 7 \end{aligned}$$

$$m = \frac{7}{4}$$

2. Une méthode simple (et qui marche !), consiste à chercher l'intersection de deux droites particulières, et à vérifier que le point ainsi trouvé est sur toutes les droites  $D_m$ .

Nous vous proposons  $m = 2$  et  $m = 4$ , ce qui permet d'avoir des dénominateurs  $m - 3$  peu encombrants. Les équations pour ces droites sont :

•  $D_2 : y = -3x + 8$

•  $D_4 : y = 7x - 22$

Il n'y a plus qu'à résoudre le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -3x + 8 \\ y = 7x - 22 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 8 = 7x - 22 \\ y = -3x + 8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 30 = 10x \\ y = -3x + 8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Les droites  $D_2$  et  $D_4$  se coupent au point  $K(3; -1)$ . Vérifions que ce point appartient bien à toutes les droites  $D_m$ . Autrement dit, on vérifie que les coordonnées  $(3; -1)$  sont bien solutions de l'équation de la droite :

$$\frac{2m-1}{m-3} \cdot 3 + \frac{-7m+6}{m-3} = \frac{6m-3-7m+6}{-m+3} = 1$$

donc  $K$  appartient bien à  $D_m$ , quel que soit  $D_m$ .

On peut utiliser une méthode plus « originale » en réorganisant l'équation de la droite  $D_m$ , non plus comme une équation en  $x$  et en  $y$ , mais comme une équation en  $m$ , ce qui donne, au lieu de :

$$y = \frac{2m-1}{m-3}x + \frac{-7m+6}{m-3}$$

l'équation :

$$(2m-1)x + (3-m)y - 7m + 6 = 0$$

On développe :

$$2mx - x + 3y - my - 7m + 6 = 0$$

et on regroupe les termes :

$$(2x - y - 7)m - x + 3y + 6 = 0$$

Cette égalité doit être vraie *quel que soit le nombre*  $m \neq 3$ . On est en présence d'une fonction affine de  $m$  :  $m \mapsto am + b$ , qui est toujours nulle. Les coefficients  $a$

et  $b$  sont donc égaux à 0. On est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ -x + 3y + 6 = 0 \end{cases}$$

Vous pouvez procéder par combinaison et résoudre ce système. On obtient encore les coordonnées de  $K(3; -1)$ .

## 32 ————— Lycée Louis-le-Grand, Paris

1. Nous allons multiplier la seconde ligne par 6.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 3x + 2y = 6 \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3 \end{aligned}$$

Ce système ne contient en réalité qu'une seule équation. Les solutions sont donc les coordonnées des points de la droite d'équation :

$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

2. Pas d'affleurement. Vous savez résoudre des équations avec  $x^{151}$  ou  $y^{12}$ , vous ? Moi non plus. Et pourtant, si on vous a proposé cet exercice, c'est que vous devez pouvoir trouver la réponse. Examinez bien la première ligne du système. Vous avez trouvé ?  $x^2$  et  $y^2$  sont toujours positifs, donc  $3x^2 + 2y^2$  ne peut jamais valoir  $-5$ , quels que soient les  $x$  et  $y$  choisis. Conclusion : il n'y a pas de solution.
3. Nous allons procéder par combinaison, après avoir multiplié la première ligne par 3 et la seconde par 2 :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 3y - 11 = 0 \\ 3x - 5y - 7 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 33 \\ 6x - 10y = 14 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 19y = 19 \\ 6x = 10y + 14 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 6x = 24 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$S = \{(4; 1)\}$$

4. Ce système n'est pas linéaire, c'est-à-dire qu'il comporte un carré. Néanmoins, la deuxième ligne,  $(x + y)^2 = 16$ , peut être transformée en :

$$(x + y)^2 = 16 \Leftrightarrow x + y = 4 \text{ ou } x + y = -4$$

Il faut donc résoudre deux « sous-systèmes », que nous appellerons  $S'_4$  et  $S''_4$  :

$$S'_4 \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 8 \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 7 \end{cases}$$

$$S''_4 \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x + 2y = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 + 8 \\ x = -4 - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 13 \\ x = -17 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de  $S_4$  est :

$$\{(7; -3), (-17; 13)\}$$

5. Ici, pas question de séparer le système en deux sous-systèmes. Puisqu'on voit, à la deuxième ligne, un produit remarquable qui nous tend les bras, factorisons-le !

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 - y^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ (x + y)(x - y) = 18 \end{cases}$$

Dans la deuxième ligne, remplaçons  $x + y$  par la valeur donnée à la première ligne. On obtient le système :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2(x - y) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 11 \\ 2y = -7 \end{cases} \quad \text{somme et différence des lignes}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ y = \frac{-7}{2} \end{cases}$$

D'où l'ensemble de solutions :

$$\left\{ \left( \frac{11}{2}; -\frac{7}{2} \right) \right\}$$

# Statistiques

*Il appartenait à la société de statistique,  
et il voyait des statisticiens partout.  
(Reybaud)*

## 8.1 Introduction

### 8.1.1 Exercice type

Dans une classe de 30 élèves, il y a 12 filles et 18 garçons. Au contrôle de mathématiques, les filles ont obtenu :

7, 8, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 14, 17, 18

et les garçons :

5, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 14, 16

1. Calculer la moyenne des notes pour les deux groupes (on arrondira les résultats au dixième près).
2. À partir de ces résultats, calculer la moyenne de la classe.
3. Par mesure de clémence, le professeur ajoute 1 point à toutes les notes. Quelle est la nouvelle moyenne ?
4. Le dernier garçon n'avait en fait pas 5, mais 8. Quelle est, finalement, la moyenne de la classe ?

• Lycée Saint Aspais, Melun •

## 8.2 Notions de base

*Signe  $\Sigma$*  C'est un moyen pratique de noter une somme avec beaucoup de termes. Par exemple, au lieu d'écrire :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}$$

on parlera de la somme des  $x_i$ , où  $i$  est un *indice* (un numéro) qui varie de 1 à 10, ce qui s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{10} x_i$$

$\Sigma$  est la lettre grecque « Sigma » qui est équivalente au S (comme *Somme*). S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le nombre de termes, on notera plus simplement :

$$\sum_i x_i$$

**Statistique** Étude de la répartition d'un ensemble de personnes, d'objets, etc., appelé *population*, ou d'une partie (*échantillon*) de cette population, en fonction d'un *critère* (taille, poids, prix, etc.) Un *individu* est un élément de la population étudiée.

**Série statistique** Donnée, pour chaque valeur du critère, du nombre d'individus correspondant (*effectif*).

**Fréquence** Effectif divisé par l'effectif total. Elle permet de comparer la répartition de deux populations qui n'ont pas le même effectif total. C'est un nombre entre 0 et 1. Cependant, pour faciliter les calculs, on l'exprime souvent en % (donc entre 0 et 100).

**Mode** Le mode est la valeur du critère qui a la plus grande fréquence (par exemple, la couleur la plus courante, l'âge le plus fréquent, etc. dans la série étudiée).

**Critère qualitatif** C'est un type de critère ne permettant pas de calcul. Par exemple, la couleur des automobiles en France. On ne peut ajouter deux couleurs ! Il n'est pas question de calculer une couleur moyenne ou médiane. En revanche, on peut déterminer le *mode*.

**Critère quantitatif** C'est un critère qui permet des mesures chiffrées : taille, poids, distance, température, prix, etc. Il permet les calculs de moyenne, médiane, etc.

**Fréquence d'un événement** Un événement est un ensemble de valeurs du critère. Par exemple, sur l'exercice-type, « avoir 9 ou moins » est un événement. La fréquence d'un événement est la somme des fréquences des différentes valeurs qui le composent.

**Effectif cumulé** Répond à la question : « Combien d'individus correspondent à une valeur inférieure ou égale à... ? »

**Fréquence cumulée** Effectif cumulé divisé par l'effectif total, souvent exprimée en %.

**Classe** Lorsque les valeurs correspondant à un certain critère sont trop nombreuses, on les rassemble dans des intervalles, appelés « classes ». Le *centre* d'une classe est le milieu de l'intervalle. La *classe modale* est la classe ayant l'effectif le plus grand.

## 8.3 Résumé numérique d'une série statistique

Nous utilisons les notations suivantes :

- $x_1, x_2, \dots$  valeurs ;
- $n_1, n_2, \dots$  effectifs correspondants ;
- $n$  l'effectif total ;
- $f_1, f_2, \dots$  fréquences correspondantes (entre 0 et 1).

**Moyenne** La moyenne d'une série statistique est la moyenne des valeurs du critère, pondérée par les effectifs.

- **Calcul à partir des effectifs :**

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots}{n} = \frac{1}{n} \sum_i n_i x_i$$

- **Calcul à partir des fréquences :** On utilise  $f_i = \frac{n_i}{n}$  :

$$\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \dots = \sum_i f_i x_i$$

- **Cas d'une série donnée par classes :** On remplace chaque classe par son centre (ce qui revient à supposer que les individus sont répartis uniformément à l'intérieur de la classe), et on calcule la moyenne de ces centres (pondérés par les effectifs).

**Médiane** Valeur à partir de laquelle on dépasse 50% des effectifs. C'est donc une valeur  $m$  du critère, qui vérifie la propriété suivante :

- Moins de la moitié des effectifs correspond à des valeurs strictement inférieures à  $m$ .
- Moins de la moitié des effectifs correspond à des valeurs strictement supérieures à  $m$ .

**Classe médiane** Dans le cas d'une série donnée par classes, c'est la classe  $[a, b[$  qui vérifie la propriété :

- Moins de la moitié des effectifs correspond à des valeurs strictement inférieures à  $a$ .
- Moins de la moitié des effectifs correspond à des valeurs supérieures à  $b$ .

Par convention, le centre de la classe médiane est la *médiane* de la série.

On peut également remplacer (comme pour la moyenne) chaque classe par son centre et déterminer la médiane de cette nouvelle série. Cette méthode donne, de toutes façons, la même valeur.

**Étendue** C'est l'écart entre la plus grande valeur ( $\max x_i$ ) et la plus petite valeur ( $\min x_i$ ) prises dans la série :

$$e = \max x_i - \min x_i$$

Il s'agit d'une caractéristique de *dispersion*. Plus l'étendue est faible, plus la série est « concentrée » autour de la moyenne. Pour décrire une série statistique, on doit donner sa moyenne ou sa médiane (caractéristiques dites de « position »), et son étendue (dispersion).

### 8.3.1 Linéarité de la moyenne

Nous étudions une série statistique donnée comme ci-dessus par les valeurs  $x_i$ , leurs effectifs respectifs  $n_i$ , l'effectif total  $n$ . On applique une fonction affine aux valeurs  $x_i$ , c'est-à-dire que l'on calcule, pour chaque  $i$ , la valeur  $y_i = mx_i + p$  (où  $m$  et  $p$  sont deux constantes). Alors :

$$\bar{y} = \frac{n_1y_1 + n_2y_2 + \dots}{n}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n_1(mx_1 + p) + n_2(mx_2 + p) + \dots}{n} \\
&= \frac{n_1mx_1 + n_2mx_2 + \dots + n_1p + n_2p + \dots}{n} \\
&= \frac{m(n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + p(n_1 + n_2 + \dots))}{n} \\
&= m \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots}{n} + p \frac{n_1 + n_2 + \dots}{n} \\
&= m\bar{x} + p
\end{aligned}$$

On utilise la linéarité de la moyenne sans même y penser lorsque l'on change d'unité. Par exemple, si dans un concours de saut en hauteur, la moyenne des sauts (en mètres) a été de 1,81, il est évident que la moyenne des sauts (en centimètres) a été de 181. Les valeurs  $x_i$  étaient exprimées en mètres, on obtient les valeurs  $y_i$  en centimètres en calculant  $y_i = 100x_i$ , et donc  $\bar{y} = 100\bar{x}$ .

*Remarque :* La médiane possède la même propriété.

### 8.3.2 Moyenne de sous-groupes

On répartit la population en sous-groupes, d'effectifs  $N_1, N_2$ , etc. Chaque sous-groupe est lui-même une « petite population », on peut donc étudier la moyenne relativement à chaque sous-groupe :  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ , etc. On retrouve la moyenne (sur la population entière) en effectuant la moyenne des moyennes des sous-groupes, pondérée par l'effectif de chaque sous-groupe :

$$\bar{x} = \frac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2 + \dots}{N_1 + N_2 + \dots}$$

*Remarque :* Il est en général impossible de calculer la médiane d'une série à partir des médianes des sous-groupes.

### 8.3.3 Moyenne élaguée

Il arrive qu'au cours du relevé, des valeurs aberrantes (ab-errantes : « qui viennent d'une erreur ») soient introduites dans une série : erreur de mesure, erreur de report, etc. Dans ce cas, on peut décider de ne pas tenir compte de ces valeurs lors du calcul de la moyenne. On obtient une *moyenne élaguée*. (*Élaguer* un arbre, c'est couper les branches inutiles). Le plus souvent, on élague les valeurs extrêmes.

## 8.4 Solution de l'exercice type

1. La machine permet de calculer la moyenne des filles : 11,9, et la moyenne des garçons : 9,8.
2. On a calculé la moyenne de deux sous-groupes, on peut donc calculer celle de la classe :

$$\bar{x} = \frac{12 \times 11,9 + 18 \times 9,8}{12 + 18} = 10,6$$

3. On avait des notes  $x_i$ , on ajoute 1 point à chacune, on obtient de nouvelles notes  $y_i = x_i + 1$ . Par linéarité de la moyenne :

$$\bar{y} = \bar{x} + 1 = 11,6$$

4. On ajoute 3 points au garçon, donc 3 points au total des notes. Dans le calcul de la moyenne, ce total est divisé par 30 (effectif de la classe). Finalement, on a ajouté  $\frac{3}{30} = 0,1$  à la moyenne, qui devient : 11,7.



## 1 ★ 10 min. Lycée Brizeux, Quimper

La répartition des 200 salariés d'une entreprise d'après la durée du trajet aller qu'ils effectuent pour se rendre à leur lieu de travail est relevée dans un tableau. Reproduire ce tableau et le compléter :

| Durée en minutes | $n_i$ (effectifs) | $f_i$ (fréquences) en % | Effectifs cumulés croissants |
|------------------|-------------------|-------------------------|------------------------------|
| [5; 10[          |                   | 5                       |                              |
| [10; 15[         | 30                |                         |                              |
| [15; 20[         |                   |                         | 110                          |
| [20; 25[         |                   | 30                      |                              |
| [25; 30[         |                   |                         |                              |

## 2 ★ 10 min. Lycée Alphonse Daudet, Nîmes

Les quantités de lait en poudre consommées dans une journée par les 45 bébés d'une crèche sont fournies, en grammes, dans le tableau suivant :

| Consommation | Effectif |
|--------------|----------|
| [40; 45[     | 2        |
| [45; 50[     | 3        |
| [50; 55[     | 5        |
| [55; 60[     | 9        |
| [60; 65[     | 7        |
| [65; 70[     | 8        |
| [70; 75[     | 5        |
| [75; 80[     | 4        |
| [80; 85[     | 2        |

- Déterminer les effectifs cumulés croissants et les effectifs cumulés décroissants.
  - Combien de bébés consomment dans une journée plus de 60 g de lait en poudre ?
  - Combien de bébés consomment dans une journée moins de 70 g de lait en poudre ?
- Déterminer la classe modale de cette série ainsi que la moyenne.
- En étudiant la série des centres des classes, déterminer la valeur médiane de cette série.

### 3 ★ **Lycée Henri IV, Béziers**

20 min.

Le poids en kilogrammes d'une série de personnes se répartissent ainsi :

| poids               | [60, 64[ | [64, 68[ | [68, 72[ | [68, 72[ | [76, 80[ | [80, 84[ | [84, 88[ |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| fréquence           | 7%       | 12%      | 36%      | 15%      | 16%      | 10%      | 4        |
| fréquences cumulées |          |          |          |          |          |          |          |

1. Calculer la moyenne des poids de ces personnes.
2. Compléter le tableau par les fréquences cumulées croissantes.
3. Donner la classe médiane des poids de cette population.
4. Quel est le pourcentage des personnes pesant moins de 72 kg ?
5. Quel est le pourcentage des personnes pesant au moins 80 kg ?

### 4 ★ **Lycée Montesquieu, Bordeaux**

15 min.

On relève les notes obtenues au même contrôle par les élèves d'une même classe :

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| 11 | 12 | 9  | 15 | 1  | 18 | 7  |
| 6  | 10 | 7  | 2  | 14 | 2  | 15 |
| 4  | 7  | 14 | 13 | 16 | 6  | 17 |
| 13 | 9  | 15 | 5  | 10 | 4  | 5  |
| 15 | 7  | 5  | 9  | 11 | 14 | 14 |

Calculer la moyenne, la médiane et l'étendue de cette série.

### 5 ★ **Lycée Sacré-Cœur, Aix-en-Provence**

15 min.

On lance deux dés et on ajoute les numéros obtenus à chaque lancer. On remplit le tableau suivant :

| Résultats         | 2   | 3   | 4   | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10  | 11  | 12  |
|-------------------|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|
| Effectifs         | 302 | 497 | 904 | 1086 | 1408 | 1640 | 1341 | 1122 | 813 | 575 | 312 |
| Fréquences (en %) |     |     |     |      |      |      |      |      |     |     |     |

1. Déterminer pour chaque colonne la fréquence (en %).
2. Quelle est la médiane de cette série ?
3. Quelle est la fréquence de l'événement : « la somme des deux dés est supérieure ou égale à 5 » ?

6★

15 min.

Lycée Descartes, Tours

Le prix d'une baguette a été relevé dans les boulangeries de Farineville :

|            |          |          |          |          |          |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| prix en c. | [55, 60[ | [60, 65[ | [65, 70[ | [70, 75[ | [75, 80[ |
| effectifs  | 2        | 5        | 8        | 4        | 1        |
| fréquences |          |          |          |          |          |

1. Compléter le tableau.
2. Déterminer la moyenne de cette série.
3. Quelle est sa classe médiane ?
4. Une boulangerie supplémentaire ouvre et vend sa baguette à 70c. Quel est l'effet sur la moyenne ?

7★

15 min.

Lycée Janson de Sailly, Paris

Voici un tableau présentant la répartition des salaires horaires dans une entreprise :

|                |         |          |          |          |          |
|----------------|---------|----------|----------|----------|----------|
| Salaire (en €) | [7, 10[ | [10, 13[ | [13, 16[ | [16, 19[ | [19, 22[ |
| Effectifs      | 120     | 480      | 490      | 160      | 60       |

1. Calculer la moyenne des salaires dans cette entreprise.
2. On décide d'augmenter tous les salaires d'un euro. Quelle est la nouvelle moyenne ?

8★

20 min.

Lycée Lakanal, Sceaux

On a relevé les performances de 200 sauteurs en hauteur au cours d'une compétition scolaire :

|                 |            |            |            |            |
|-----------------|------------|------------|------------|------------|
| classes (en cm) | [60, 80[   | [80, 100[  | [100, 110[ | [110, 120[ |
| effectifs $n_i$ | 24         | 32         | 32         | 40         |
| classes (en cm) | [120, 130[ | [130, 150[ | [150, 180[ |            |
| effectifs $n_i$ | 60         | 10         | 2          |            |

1. Calculer le pourcentage de sauteurs ayant franchi moins de 110 cm.
2. Calculer la moyenne de cette série.
3. Quelle est la classe médiane de cette série ?

9★

10 min.

Lycée Vial, Nantes

Sur une route normalement limitée à 70 km/h, on relève la vitesse de 5 000 automobilistes :

|          |         |          |          |           |            |
|----------|---------|----------|----------|-----------|------------|
| km/h     | ]0; 30] | ]30; 50] | ]50; 70] | ]70; 100] | ]100; 130] |
| effectif | 600     | 900      | 1 800    | 1 200     | 500        |

1. Donner le tableau des fréquences (en pourcentages) de cette série statistique.
2. Déterminer la classe médiane de cette série. On appellera médiane le centre de cette classe.
3. Déterminer la vitesse moyenne des automobilistes.
4. Que signifie l'écart entre la moyenne et la médiane ?

**10** ★ 15 min.

**Lycée Jacques Monod, Clamart**

L'âge des élèves d'un lycée, à leur entrée en Seconde, se répartit comme suit :

|                 |    |    |    |    |    |
|-----------------|----|----|----|----|----|
| âge (ans)       | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| répartition (%) | 4  | 12 | 52 | 24 | 8  |

1. Calculer l'âge moyen à l'entrée en Seconde dans le lycée.
2. Quel est l'âge médian d'entrée au lycée ?

**11** ★ 30 min.

**Lycée Paul Lapie, Courbevoie**

Dans une classe de cinquième et une classe de seconde, on a demandé aux élèves le nombre d'heures par semaine consacrées à regarder la télévision.

Classe de seconde (32 élèves) :

|           |   |   |   |   |   |    |    |    |    |
|-----------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| temps (h) | 2 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 14 | 15 |
| effectif  | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 5  | 1  | 1  | 4  |

|           |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| temps (h) | 16 | 17 | 18 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| effectif  | 1  | 1  | 4  | 3  | 1  | 1  | 2  | 1  |

Classe de cinquième (27 élèves) :

|          |   |   |   |   |   |    |    |    |    |
|----------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| temps(h) | 0 | 4 | 5 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| effectif | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3  | 2  | 2  | 1  |

|          |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| temps(h) | 15 | 16 | 20 | 28 | 30 | 31 | 32 | 40 | 54 | 56 |
| effectif | 3  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 2  | 1  | 1  |

1. Pour chaque série, calculer la moyenne, la médiane et l'étendue.
2. Comparer et commenter les résultats des deux séries à l'aide des résultats de la question précédente.
3. Donner la distribution des fréquences en pourcentage de la classe de seconde. Quelle est la fréquence en pourcentage de l'événement : « temps inférieur à 14 h » ?
4. On regroupe les données des deux séries pour construire une nouvelle série. Calculer la moyenne de la nouvelle série en utilisant les moyennes des deux séries précédentes.

12★  
15 min.

Lycée Montaigne, Paris

Dans une usine, on étudie le nombre de pièces fabriquées par une machine pendant dix heures de fabrication :

|             |        |        |        |        |         |
|-------------|--------|--------|--------|--------|---------|
| heure       | [0, 2[ | [2, 4[ | [4, 6[ | [6, 8[ | [8, 10[ |
| nb pièces   | 300    | 500    | 1600   | 2100   | 900     |
| fréquences  |        |        |        |        |         |
| f. cumulées |        |        |        |        |         |

1. Calculer le nombre moyen de pièces fabriquées par heure.
2. Calculer les fréquences cumulées (en %) et les indiquer dans le tableau.
3. Quelle est la classe médiane ?

13★★  
20 min.

Lycée Claude Bernard, Paris

Dans un groupe de 25 coureurs de 100 m (15 femmes et 10 hommes) :

1. La moyenne des performances des femmes est de 12,32 s ; celle des hommes est de 11,48 s. Quelle est la moyenne de l'ensemble des coureurs ?
2. Après un mois d'entraînement, la moyenne des performances des femmes a diminué de 0,21 s et celle des hommes a diminué de 0,13 s. De combien la moyenne de l'ensemble a-t-elle varié ?
3. L'entraîneur sélectionne alors 10 hommes et 10 femmes. Outre les 10 hommes, il choisit les 10 femmes les plus rapides, dont la moyenne des performances est de 11,97 s. Quelle est la moyenne des performances des femmes qui n'ont pas été sélectionnées ?

14★★  
10 min.

Lycée Camille Sée, Paris

Après 4 devoirs, la moyenne d'un élève est 9,5. Quelle doit être sa cinquième note pour que sa moyenne soit de 10 ?

15★★  
10 min.

Lycée Masséna, Nice

Au premier janvier, une augmentation de la TVA cause une hausse des prix de 3%. Le responsable des ventes d'un magasin répercute cette augmentation sur tous les prix. Suite à cette augmentation, il regroupe les articles d'un rayon suivant leurs nouveaux prix et l'on établit le tableau suivant :

|             |         |          |           |            |
|-------------|---------|----------|-----------|------------|
| prix (€)    | [5, 10[ | [10, 50[ | [50, 100[ | [100, 120[ |
| nb articles | 10      | 120      | 70        | 40         |

Calculer le prix moyen des articles avant augmentation.

ÉNONCÉS

# 16 ★★ ——— Lycée Evariste Gallois, Noisy-le-Grand

15 min.

Dans une entreprise de 50 salariés, la répartition des salaires, en centaines d'euros, est donnée par le tableau suivant :

| Salaires (€) | [9, 12[ | [12, 15[ | [15, 18[ | [18, 25[ | [25, 37] |
|--------------|---------|----------|----------|----------|----------|
| Effectifs    | 12      | 20       | 8        | 6        | 4        |

1. Quelle est la fréquence des salaires inférieurs à 1800€ ?
2. Calculer les effectifs cumulés croissants. Déterminer la classe médiane et le salaire médian (centre de la classe médiane).
3. En présentant les calculs dans un tableau  $(x_i, n_i)$  puis en indiquant la formule utilisée, calculer le salaire moyen  $\bar{x}$  dans cette entreprise.
4. Quelle augmentation des salaires, en pourcentage, aura pour effet une hausse de 40€ du salaire moyen ?

# Corrigés | chapitre 8

## 1 ————— Lycée Brizeux, Quimper

| Durée en minutes | $n_i$ (effectifs) | $f_i$ (fréquences en %) | Effectifs cumulés croissants |
|------------------|-------------------|-------------------------|------------------------------|
| [5; 10[          | 10                | 5                       | 10                           |
| [10; 15[         | 30                | 15                      | 40                           |
| [15; 20[         | 70                | 35                      | 110                          |
| [20; 25[         | 60                | 30                      | 170                          |
| [25; 30[         | 30                | 15                      | 200                          |

## 2 ————— Lycée Alphonse Daudet, Nîmes

1. (a)

| Consommation | Effectif | Effectifs cumulés croissants | Effectifs cumulés décroissants |
|--------------|----------|------------------------------|--------------------------------|
| [40; 45[     | 2        | 2                            | 45                             |
| [45; 50[     | 3        | 5                            | 43                             |
| [50; 55[     | 5        | 10                           | 40                             |
| [55; 60[     | 9        | 19                           | 35                             |
| [60; 65[     | 7        | 26                           | 26                             |
| [65; 70[     | 8        | 34                           | 19                             |
| [70; 75[     | 5        | 39                           | 6                              |
| [75; 80[     | 4        | 43                           | 6                              |
| [80; 85[     | 2        | 45                           | 2                              |

- (b) D'après les effectifs cumulés décroissants, 26 bébés consomment plus de 60 g de lait en poudre.
- (c) D'après les effectifs cumulés croissants, 34 bébés consomment moins de 70 g de lait en poudre.
2. [55; 60[ est la classe modale (la classe de plus fort effectif). Calcul de la moyenne : 
$$\frac{2 \times 42,5 + 3 \times 47,5 + 5 \times 52,5 + 9 \times 57,5 + 7 \times 62,5 + 8 \times 67,5 + 5 \times 72,5 + 4 \times 77,5 + 2 \times 82,5}{45} = 62,7$$
3. On constate que 19 bébés consomment moins de 60 g par jour, et que 19 bébés consomment plus de 65 g de lait. Il y a donc, par rapport à la classe [60, 65[, moins de la moitié au-dessus et moins de la moitié en-dessous. On en déduit que c'est la classe médiane. La médiane est son centre : 62,5 g.

## 3 ————— Lycée Henri IV, Béziers

1. Pour calculer la moyenne d'une série répartie par classes, on considère que tout individu a pour poids le poids moyen à l'intérieur de chaque classe. En l'absence

d'autre renseignement, tout se passe comme si l'on étudiait la série suivante :

|           |          |          |          |          |          |          |          |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| poids     | [60, 64[ | [64, 68[ | [68, 72[ | [72, 76[ | [76, 80[ | [80, 84[ | [84, 88[ |
| centre    | 62       | 66       | 70       | 74       | 78       | 82       | 86       |
| fréquence | 7%       | 12%      | 36%      | 15%      | 16%      | 10%      | 4        |

Pour calculer la moyenne  $\bar{x}$ , on utilise la formule :

$$\bar{x} = \sum_i f_i x_i$$

où  $x_i$  sont les valeurs et  $f_i$  leurs fréquence.

On a donc :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 62 \times 0,07 + 66 \times 0,12 + 70 \times 0,36 + 74 \times 0,15 \\ &\quad + 78 \times 0,16 + 82 \times 0,10 + 86 \times 0,04 \\ &\approx 72,7 \text{ kg}\end{aligned}$$

Comment choisir la précision du résultat ? Bien entendu, ces calculs doivent être faits à la machine, qui donne 72,68. Non seulement il est *inutile* de donner plus d'un chiffre après la virgule, mais c'est même *nuisible*. Réfléchissons un instant au type de données étudié : le poids d'êtres humains adultes. Même si ces gens sont très préoccupés par leur ligne, il est peu probable que leur poids ait été mesuré avec une précision inférieure à 100 g. (C'est d'ailleurs une hypothèse assez audacieuse, 500 g serait plus raisonnable). Cela signifie qu'une personne qui affirme peser 64,3 kg a en réalité un poids compris entre 64,2 et 64,4 kg. Chacun introduit donc une erreur de 100 grammes dans la moyenne, qui ne peut donc être mesurée qu'à 100 grammes près au mieux.

Les autres réponses possibles sont donc 73 kg, 72,6 kg, mais surtout pas 72,68 kg...

2. Pour les fréquences cumulées, on ajoute les fréquences au fur et à mesure des classes. Pensez à contrôler que le total fait bien 100% ; si ce n'est pas le cas... vérifiez vos calculs !

|                     |          |          |          |          |          |          |          |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| poids               | [60, 64[ | [64, 68[ | [68, 72[ | [68, 72[ | [76, 80[ | [80, 84[ | [84, 88[ |
| fréquences          | 7%       | 12%      | 36%      | 15%      | 16%      | 10%      | 4        |
| fréquences cumulées | 7%       | 19%      | 55%      | 70%      | 86%      | 96%      | 100%     |

3. La fréquence cumulée correspondant à la classe [68, 72[ est 55%. Elle était de 19% pour la classe précédente. Cela signifie que l'on atteint la moitié (50%) de la population totale à l'intérieur de cette classe. C'est donc la classe médiane.



On peut appliquer le critère suivant : la classe [68, 72[ est la classe médiane, car moins de 50% des individus de la série ont un poids inférieur à 68 kg et moins de 50% des individus de la série ont un poids supérieur à 72 kg.

4. Le pourcentage de personnes pesant moins de 72 kg est justement la fréquence cumulée croissante correspondant à [68, 72[, soit 55%.
5. Les individus des deux dernières classes sont ceux qui pèsent au moins 80 kg et représentent 14 % de la population totale.

4 ————— Lycée Montesquieu, Bordeaux

On peut ranger les différentes notes dans un tableau d'effectifs (on a indiqué également les effectifs cumulés) :

|       |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |
|-------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| $n_i$ | 1 | 2 | 0 | 2 | 3 | 2  | 4  | 0  | 3  | 2  |
| $s_i$ | 1 | 3 | 3 | 5 | 8 | 10 | 14 | 14 | 17 | 19 |

|       |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $x_i$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| $n_i$ | 2  | 1  | 2  | 4  | 4  | 1  | 1  | 1  | 0  |
| $s_i$ | 21 | 22 | 24 | 28 | 32 | 33 | 34 | 35 | 35 |

Les données étaient rangées dans un tableau de 7 colonnes et 5 lignes, donc l'effectif total est  $n = 35$ . On calcule la moyenne :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i n_i x_i = 9,77$$

La plus basse note est 1, la plus haute 18, donc l'étendue est :

$$e = 18 - 1 = 17$$

L'effectif total est  $N = 35$ , le demi-effectif de 17,5. On constate que l'effectif cumulé croissant atteint (et dépasse) cette valeur pour la note 10.

On constate donc :

- Moins de la moitié (ici 17) des élèves ont une note strictement inférieure à 10.
- Moins de la moitié (ici  $35 - 19 = 16$ ) des élèves ont une note strictement supérieure à 10.

Conclusion : la médiane vaut  $m = 10$ .

Autre méthode. On peut ranger les notes des élèves dans l'ordre croissant :

1, 2, 2, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11,  
12, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 17, 18

10 est la note obtenue par le 18<sup>ème</sup> élève (il a 17 élèves devant et 17 élèves derrière lui).

5 ————— Lycée Sacré-Cœur, Aix-en-Provence

1. On calcule l'effectif total :  $N = 10\,000$ . Le calcul des fréquences se borne donc à ajouter une virgule :

|                   |      |      |      |       |       |       |       |
|-------------------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| Résultats         | 2    | 3    | 4    | 5     | 6     | 7     | 8     |
| Effectifs         | 302  | 497  | 904  | 1086  | 1408  | 1640  | 1341  |
| Fréquences (en %) | 3,02 | 4,97 | 9,04 | 10,86 | 14,08 | 16,40 | 13,41 |

|                   |       |      |      |      |
|-------------------|-------|------|------|------|
| Résultats         | 9     | 10   | 11   | 12   |
| Effectifs         | 1122  | 813  | 575  | 312  |
| Fréquences (en %) | 11,22 | 8,13 | 5,75 | 3,12 |

CORRIGÉS

2. En sommant les fréquences, on constate que la fréquence des résultats inférieurs strictement à 7 est de :

$$3,02 + 4,97 + 9,04 + 10,86 + 14,08 = 41,97\%$$

La fréquence des résultats supérieurs strictement à 7 est de :

$$13,41 + 11,22 + 8,13 + 5,75 + 3,12 = 41,63\%$$

La médiane de la série est donc  $m = 7$ .

3. On peut se contenter d'ajouter les fréquences, pour les résultats allant de 5 à 12. Essayons une autre méthode. La somme des 2 dés est strictement inférieure à 5 avec la fréquence :

$$3,02 + 4,97 + 9,04 = 17,03\%$$

Elle est donc supérieure ou égale à 5 avec la fréquence :

$$100 - 17,03 = 82,97\%$$

## 6 ————— Lycée Descartes, Tours

1. L'effectif total est  $n = 20$ .

| prix en c. | [55, 60[ | [60, 65[ | [65, 70[ | [70, 75[ | [75, 80[ |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| effectifs  | 2        | 5        | 8        | 4        | 1        |
| fréquences | 0,1      | 0,25     | 0,4      | 0,2      | 0,05     |

2. Pour une série donnée par classes, on considère que toute la classe est rassemblée au *centre* de classe. Autrement dit, on calcule en fait la moyenne de la série suivante :

| prix en c. | 57,5 | 62,5 | 67,5 | 72,5 | 77,5 |
|------------|------|------|------|------|------|
| effectifs  | 2    | 5    | 8    | 4    | 1    |

La moyenne est  $\bar{x} = 66,75c$ . On peut toujours critiquer une telle valeur, donnée au centième près alors que l'on a fait pour la calculer des hypothèses assez arbitraires (par exemple, l'unique boulangerie de la classe [75, 80[ vend peut-être sa baguette à 75c, et certainement pas à 77,5c !) Il est donc préférable de dire :

$$\bar{x} \simeq 67c$$

3. La classe médiane est [65, 70[. Il n'est pas difficile de voir que moins de la moitié des boulangeries sont « au-dessus », et moins de la moitié « en dessous ».
4. Tout se passe comme si on avait dans notre nouvelle série deux sous-groupes. Le premier est le sous-groupe des 20 premières boulangeries, de moyenne 66,75. Le second est le sous-groupe constitué par la seule nouvelle boulangerie, de moyenne 70 c. La moyenne finale est donc :

$$\bar{X} = \frac{20 \times 66,75 + 1 \times 70}{21} \simeq 66,90$$

La moyenne n'a donc pratiquement pas été modifiée.

## 7 ————— Lycée Janson de Sailly, Paris

1. L'effectif total est  $n = 1310$  et la moyenne de 13,49€.
2. Par linéarité de la moyenne, si les salaires augmentent de 1€, alors la moyenne également. La nouvelle moyenne sera donc de 14,49€.

## 8 ————— Lycée Lakanal, Sceaux

1. Il suffit d'ajouter les effectifs correspondant à des valeurs inférieures à 110 cm, soit  $24 + 32 + 32 = 88$ . Il n'y a plus qu'à déterminer le pourcentage :

$$\frac{88}{200} = \frac{44}{100} = 44\%$$

2. Pour calculer la moyenne, on remplace chaque classe par son centre, on obtient le tableau de valeurs :

| centres (en cm) | 70 | 90 | 105 | 115 | 125 | 140 | 165 |
|-----------------|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| effectifs $n_i$ | 24 | 32 | 32  | 40  | 60  | 10  | 2   |

On calcule alors la moyenne :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{24 \times 70 + 32 \times 90 + 32 \times 105 + 40 \times 115 + 60 \times 125 + 10 \times 140 + 2 \times 165}{200} \\ &= \frac{21\,750}{200} \\ &= 108,75 \text{ cm}\end{aligned}$$

3. On a vu que 88 candidats (moins de la moitié) avaient effectué un saut inférieur à 110 cm. Il y a de même  $60 + 10 + 2 = 72$  candidats (moins de la moitié) avec un saut supérieur à 120 cm. La classe médiane est donc  $[110, 120[$ .

## 9 ————— Lycée Vial, Nantes

Sur une route normalement limitée à 70 km/h, on relève la vitesse de 5 000 automobilistes :

| km/h     | ]0; 30] | ]30; 50] | ]50; 70] | ]70; 100] | ]100; 130] |
|----------|---------|----------|----------|-----------|------------|
| effectif | 600     | 900      | 1 800    | 1 200     | 500        |

1. Tableau les fréquences cumulées :

| km/h           | ]0; 30] | ]30; 50] | ]50; 70] | ]70; 100] | ]100; 130] |
|----------------|---------|----------|----------|-----------|------------|
| effectif       | 600     | 900      | 1 800    | 1 200     | 500        |
| fréquences (%) | 12      | 18       | 36       | 24        | 10         |

2. 30% des automobilistes ont une vitesse inférieure à 50 km/h.  $24 + 10 = 34\%$  d'entre eux ont une vitesse supérieure à 70 km/h. La classe médiane est donc  $]50, 70]$ . Par convention, la vitesse médiane est de 60 km/h.
3. La vitesse moyenne est de 62,5 km/h.

4. La médiane est légèrement inférieure à la moyenne, ce qui signifie que la moyenne des vitesses est tirée vers le haut par une minorité de conducteurs qui roulent à très grande vitesse (cette conclusion doit être relativisée, car l'écart entre moyenne et médiane est ici assez faible).

## 10 ————— Lycée Jacques Monod, Clamart

15

1. L'âge moyen est  $\bar{x} = 15,2$  (donc 15 ans).
2. Visiblement, moins de la moitié des élèves ont moins de 15 ans. De même, moins de la moitié des élèves ont plus de 15 ans. L'âge médian est donc également 15 ans.

## 11 ————— Lycée Paul Lapie, Courbevoie

1. Pour la classe de seconde : la moyenne est  $\bar{x} \simeq 14,4$ .  
L'étendue est  $24 - 2 = 22$ . La médiane est 15. En effet, 14 élèves regardent la télévision moins de 15 h par semaine, et 14 plus de 15 h.  
Pour la classe de cinquième : la moyenne est  $\bar{y} = 19,1$ .  
L'étendue est  $56 - 0 = 56$ . La médiane est 13 car 13 élèves regardent la télévision moins de 13 h, et 13 élèves regardent la télévision plus de 13 h (donc moins de la moitié des élèves se trouvent de part et d'autre de cette valeur).
2. Si on regarde la seule moyenne, on voit que les élèves de cinquième regardent la télévision plus longtemps que leurs camarades de seconde.  
Néanmoins, la comparaison des étendues montre que les situations des élèves du collège sont beaucoup plus diverses : certains ne regardent pas du tout la télévision, l'un d'entre eux la regarde... 8 heures par jour ! C'est ce petit nombre de « téléphages » qui tire la moyenne vers le haut.  
En fait, si on compare les médianes, on voit qu'en fait les élèves de cinquième sont dans leur majorité moins « accros » que leurs camarades du lycée...
3. Donnons le tableau des fréquences :

| temps (h)      | 2   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10   | 11  | 14  | 15   |
|----------------|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|------|
| effectif       | 1   | 2   | 1   | 1   | 2   | 5    | 1   | 1   | 4    |
| fréquences (%) | 3,1 | 6,3 | 3,1 | 3,1 | 6,3 | 15,6 | 3,1 | 3,1 | 12,5 |

| temps (h)      | 16  | 17  | 18   | 20  | 21  | 22  | 23  | 24  |
|----------------|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| effectif       | 1   | 1   | 4    | 3   | 1   | 1   | 2   | 1   |
| fréquences (%) | 3,1 | 3,1 | 12,6 | 9,4 | 3,1 | 3,1 | 6,3 | 3,1 |

La somme des fréquences vaut 100%. Si, pour des raisons d'arrondi, ce n'était pas le cas, l'habitude veut que l'on corrige les résultats en modifiant la fréquence maximale.

4. On connaît les moyennes de deux-sous groupes, la moyenne générale est donnée par :

$$\bar{X} = \frac{32\bar{x} + 27\bar{y}}{32 + 27} \simeq 16,4$$

## 12 — Lycée Montaigne, Paris

1. 5400 pièces ont été fabriquées en 10 heures, soit une moyenne de 540 pièces à l'heure.

2.

| heure           | [0, 2[ | [2, 4[ | [4, 6[ | [6, 8[ | [8, 10[ |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|---------|
| nb pièces       | 300    | 500    | 1600   | 2100   | 900     |
| fréquences (%)  | 5,6    | 9,3    | 29,6   | 38,9   | 16,6    |
| f. cumulées (%) | 5,6    | 14,9   | 44,5   | 83,4   | 100     |

3. La classe médiane est [6, 8[. En effet, moins de la moitié des valeurs se trouvent dans les classes inférieures ; moins de la moitié se trouvent dans la classe supérieure.

## 13 — Lycée Claude Bernard, Paris

1. On calcule la moyenne pondérée :

$$m = \frac{15 \times 12,32 + 10 \times 11,48}{25} = 11,984$$

11,984 est le résultat exact donné par la machine. Pour formuler sa réponse, il faut également s'interroger sur la précision des mesures des temps de chaque coureur. Les moyennes sont données au centième près, il faut donc se contenter de ce niveau de précision. La bonne réponse est donc : 11,98 s.

2. Pour connaître la variation, on calcule la moyenne pondérée des variations :

$$\Delta = \frac{15 \times 0,21 + 10 \times 0,13}{25} = 0,178$$

Au centième près, on calcule donc une amélioration de 0,18 s de l'ensemble des performances.

3. La moyenne de l'ensemble des femmes (on la note  $F$ ) est donnée par l'énoncé, compte tenu de l'amélioration de leurs performances :

$$F = 12,32 - 0,21 = 12,11 \text{ s}$$

$\bar{x}$  la moyenne des femmes sélectionnées et  $\bar{y}$  celle des autres femmes.

La moyenne du groupe féminin est la moyenne pondérée de  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$ , d'où l'équation :

$$F = \frac{10\bar{x} + 5\bar{y}}{15}$$

$$\Leftrightarrow 15 \times F = 10\bar{x} + 5\bar{y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{15 \times F - 10\bar{x}}{5} = \bar{y}$$

Comme  $\bar{x} = 11,97$  et  $F = 12,11$ , il vient :  $\bar{y} = 12,39$ .

## 14 — Lycée Camille Sée, Paris

Pour avoir une moyenne de 10 sur 5 notes, il faut que le total des notes obtenu soit 50. Pour l'instant, l'élève a une moyenne de 9,5 sur 4 notes, soit un total de  $4 \times 9,5 = 38$ . Il lui faut donc obtenir  $50 - 38 = 12$  au prochain devoir pour obtenir 10 de moyenne.

## 15 — Lycée Masséna, Nice

On calcule le prix moyen après l'augmentation :

$$\bar{y} = 55,52\text{€}$$

Notons  $\bar{x}$  le prix moyen avant l'augmentation. Par linéarité de la moyenne,  $\bar{x}$  a augmenté de 3%, c'est-à-dire :

$$\bar{y} = \left(1 + \frac{3}{100}\right)\bar{x}$$

Il vient :

$$\bar{x} = 53,90$$

## 16 — Lycée Evariste Gallois, Noisy-le-Grand

- 40 salariés sur 50 ont un salaire inférieur à 1800 €, soit 80 % des effectifs.
- 

| Salaires (€) | [9, 12[ | [12, 15[ | [15, 18[ | [18, 25[ | [25, 37] |
|--------------|---------|----------|----------|----------|----------|
| Effectifs    | 12      | 20       | 8        | 6        | 4        |
| Eff. cum.    | 12      | 32       | 40       | 46       | 50       |

La classe médiane est [12, 15[ car moins de la moitié des salariés (12) touchent un salaire inférieur à 1200 €, et moins de la moitié (18) touchent un salaire supérieur. D'où un salaire médian de 1350 €.

- On remplace chaque classe par son centre de classe :

| Salaires (€) | 1050 | 1350 | 1650 | 2150 | 3100 |
|--------------|------|------|------|------|------|
| Effectifs    | 12   | 20   | 8    | 6    | 4    |

Le salaire moyen obtenu est  $\bar{x} = 1562$  €.

- Il suffit de calculer le pourcentage d'une augmentation de 40 € par rapport à 1562. On obtient :

$$\frac{40}{1562} = 2,56\%$$

Par linéarité de la moyenne, une telle augmentation de tous les salaires augmentera le salaire moyen de 40 €.



# INTERROS des lycées

Pour un entraînement efficace en sciences,  
des ouvrages réalisés à partir d'énoncés **réellement posés**  
en contrôle dans de nombreux lycées de Paris et de province.

## Chaque chapitre comprend :

- un rappel de cours complet et synthétique,
- des exercices de difficulté croissante, avec une estimation de durée,
- tous les corrigés détaillés, incluant des conseils méthodologiques.

**Existe en maths, physique-chimie et SVT,  
de la 3<sup>e</sup> à la Terminale.**

## Et pour le supérieur :

**Les *Interros des Prépas*, de nombreux titres en maths,  
physique et chimie.**

Collection dirigée par Éric Maurette

**PRÉPAMATH**



Réussir son année  
**Les Guides ABC**  
Cours, méthodes,  
exercices corrigés



Réviser rapidement  
**Les Blocs-Fiches ABC**  
L'essentiel en fiches  
détachables



Se préparer à l'épreuve  
**Les Annales ABC**  
Toutes les annales du bac  
avec ou sans corrigés

13,50 €

ISBN : 978-2-09-184485-5



9 782091 844855



Toute une gamme pour réviser utile  
[www.abcbac.com](http://www.abcbac.com)

**Nathan**