

manuel
de l'élève
volume **2**

Sciences naturelles

VISIONS

MATHÉMATIQUE

3^e année du 2^e cycle
du secondaire



Claude Boivin
Dominique Boivin
Antoine Ledoux
Étienne Meyer
François Pomerleau
Vincent Roy

manuel
de l'élève
volume

2

Sciences naturelles

VISIONS

MATHÉMATIQUE

3^e année du 2^e cycle
du secondaire

Claude Boivin
Dominique Boivin
Antoine Ledoux
Étienne Meyer
François Pomerleau
Vincent Roy

LES ÉDITIONS
CEC
Une compagnie de Quebecor Media

Direction de l'édition
Véronique Lacroix

Direction de la production
Danielle Latendresse

Direction de la coordination
Rodolphe Courcy

Charge de projet
Julie Provost
Diane Karneyeff

Correction d'épreuves
Viviane Deraspe

Conception et réalisation
Dessine-moi un mouton



Illustrations techniques
Stéphan Vallières

Illustrations d'ambiance
Rémy Guenin

Cartes géographiques
Les Studios Artifisme

Recherche iconographique
Esther Ste-Croix

Les auteurs et l'éditeur remercient les personnes suivantes qui ont participé à l'élaboration du projet.

Consultation scientifique
Matthieu Dufour, professeur, UQAM

Consultation pédagogique
Josée Bédard, enseignante, école secondaire
les Etchemins, c.s. des Navigateurs
David Boissonneault, enseignant, école secondaire
Le Sommet, c.s. des Premières-Seigneuries
Hélène Forget, enseignante, école secondaire Polybel,
c.s. des Patriotes
Geneviève Morneau, enseignante, école secondaire
Monseigneur-Richard, c.s. Marguerite-Bourgeoys
Johanne Robert, enseignante, école secondaire
Louis-Cyr, c.s. des Grandes-Seigneuries
Mélanie Tremblay, professeure, UQAR, campus de Lévis



La *Loi sur le droit d'auteur* interdit la reproduction d'œuvres sans l'autorisation des titulaires des droits. Or, la photocopie non autorisée — le photocopillage — a pris une ampleur telle que l'édition d'œuvres nouvelles est mise en péril. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle

ou totale, du présent ouvrage est interdite sans l'autorisation écrite de l'Éditeur.

Dans cet ouvrage, la féminisation des titres de fonctions et des textes s'appuie sur des règles d'écriture proposées par l'Office de la langue française dans le guide *Au féminin*, Les Publications du Québec, 1991.

Les Éditions CEC inc. remercient le gouvernement du Québec de l'aide financière accordée à l'édition de cet ouvrage par l'entremise du Programme de crédit d'impôt pour l'édition de livres, administré par la SODEC.

Visions, Sciences naturelles, manuel de l'élève, volume 2,
3^e année du 2^e cycle du secondaire
© 2010, Les Éditions CEC inc.
9001, boul. Louis-H.-La Fontaine
Anjou (Québec) H1J 2C5

Tous droits réservés. Il est interdit de reproduire, d'adapter ou de traduire l'ensemble ou toute partie de cet ouvrage sans l'autorisation écrite du propriétaire du copyright.

Dépôt légal : 2010
Bibliothèque et Archives nationales du Québec
Bibliothèque et Archives Canada

ISBN 978-2-7617-2809-6

Imprimé au Canada

1 2 3 4 5 14 13 12 11 10

VISION **4**

Les vecteurs 2

Géométrie

RÉVISION 4

- Relations trigonométriques dans un triangle rectangle
- Relations dans un triangle quelconque : loi des sinus et loi des cosinus

SECTION 4.1

Les caractéristiques d'un vecteur 14

- Grandeur scalaire et grandeur vectorielle
- Vecteur
- Projection d'un vecteur
- Relations entre les vecteurs

SECTION 4.2

Les opérations sur les vecteurs 29

- Addition et soustraction de vecteurs
- Multiplication d'un vecteur par un scalaire
- Propriétés des opérations sur les vecteurs

SECTION 4.3

Combinaison linéaire et produit scalaire .. 43

- Combinaison linéaire
- Produit scalaire de deux vecteurs
- Propriétés du produit scalaire

CHRONIQUE DU PASSÉ

L'histoire des vecteurs 54

LE MONDE DU TRAVAIL

Les aérodynamiciens 56

VUE D'ENSEMBLE 58

BANQUE DE PROBLÈMES .. 66

VISION **5**

Les fonctions trigonométriques 70

Arithmétique et algèbre • Géométrie

RÉVISION 72

- Relations métriques dans le triangle rectangle
- Relation de Pythagore
- Relation faisant intervenir un angle de 30° dans un triangle rectangle

SECTION 5.1

Le cercle trigonométrique 82

- Radian
- Cercle trigonométrique
- Fonction périodique

SECTION 5.2

Les fonctions trigonométriques 97

- Fonction sinusoïdale
- Recherche de la règle d'une fonction sinusoïdale
- Fonction tangente
- Recherche de la règle d'une fonction tangente
- Fonctions arc sinus, arc cosinus et arc tangente

SECTION 5.3

La résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques 113

- Résolution d'une équation et d'une inéquation trigonométriques à une variable

SECTION 5.4

Les identités trigonométriques 124

- Identités trigonométriques
- Formules d'une somme ou d'une différence de deux angles

CHRONIQUE DU PASSÉ

Les mathématiciens indiens 136

LE MONDE DU TRAVAIL

Les ingénieurs opticiens 138

VUE D'ENSEMBLE 140

BANQUE DE PROBLÈMES .. 150



Les coniques 154

Géométrie

RÉVISION 156

- Pente d'un segment
- Distance entre deux points
- Équation d'une droite
- Résolution d'une équation du second degré
- Système d'équations à deux variables, l'une du 1^{er} degré et l'autre du 2^e degré

SECTION 6.1

Le cercle et l'ellipse 166

- Conique
- Cercle
- Recherche de l'équation d'un cercle
- Ellipse
- Recherche de l'équation d'une ellipse
- Région intérieure ou extérieure à un cercle ou à une ellipse

SECTION 6.2

L'hyperbole et la parabole 184

- Hyperbole
- Recherche de l'équation d'une hyperbole
- Région intérieure ou extérieure à une hyperbole
- Parabole
- Recherche de l'équation d'une parabole
- Région intérieure ou extérieure à une parabole

SECTION 6.3

L'intersection de coniques 199

- Points d'intersection entre une droite et une conique ou entre une parabole et une autre conique

CHRONIQUE DU PASSÉ

Germinal Pierre Dandelin 210

LE MONDE DU TRAVAIL

Les acousticiens 212

VUE D'ENSEMBLE 214

BANQUE DE PROBLÈMES .. 224

ALBUM 229

Technologies 230

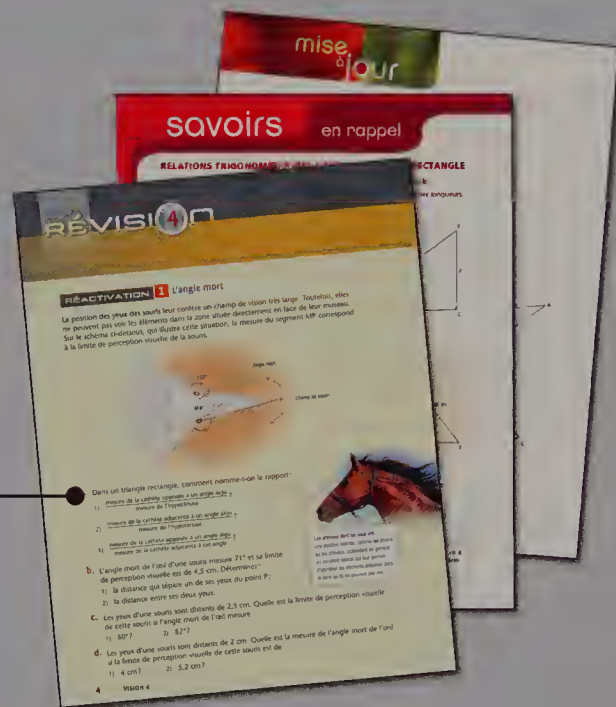
Savoirs 236

PRÉSENTATION D'UNE VISION

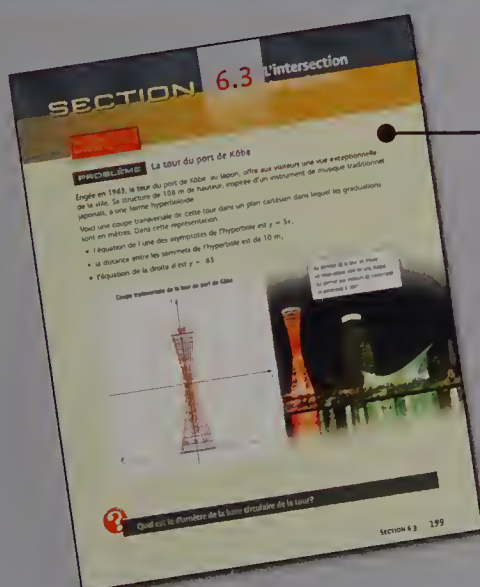
Ce manuel comporte trois *Visions*. Chaque *Vision* propose diverses SAÉ, une « Révision », des « Sections » et les rubriques particulières « Chronique du passé », « Le monde du travail », « Vue d'ensemble » et « Banque de problèmes ». Le manuel se termine par un « Album ».

LA RÉVISION

La « Révision » permet de réactiver des connaissances et des stratégies qui seront fréquemment utilisées dans la *Vision*. Cette rubrique comporte quelques activités de réactivation de connaissances antérieures, des **Savoirs en rappel** qui résument des éléments théoriques réactivés et une **Mise à jour** constituée d'exercices de renforcement sur les notions réactivées.



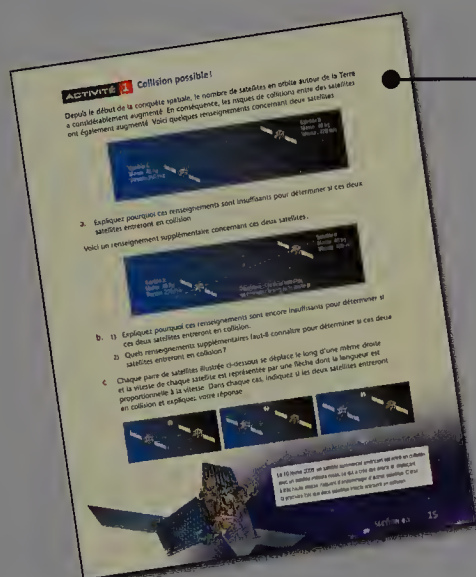
LES SECTIONS



Une *Vision* comporte des « Sections », chacune commençant par un **Problème** suivi de quelques **Activités** et des rubriques **Technomath**, **Savoirs** et **Mise au point**. Chaque « Section », associée à une SAÉ, contribue au développement des compétences disciplinaires et transversales ainsi qu'à l'appropriation des notions mathématiques qui sous-tendent le développement de ces mêmes compétences.

Problème

La première page de la section présente un problème déclencheur comportant une seule question. La résolution de ce problème nécessite le recours à différentes compétences et à différentes stratégies, et mobilise des connaissances.

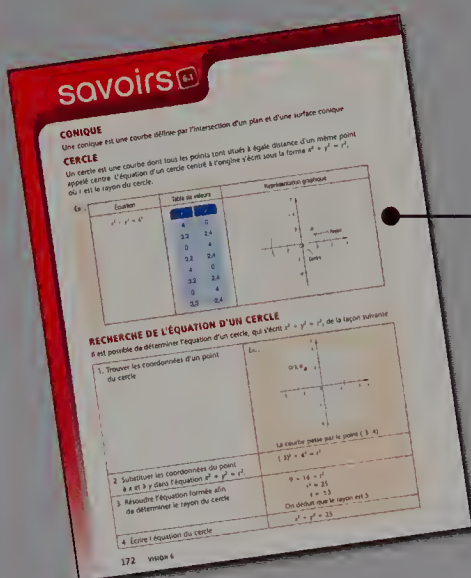


Activité

Les activités contribuent au développement des compétences disciplinaires et transversales, nécessitent le recours à différentes stratégies, mobilisent diverses connaissances et favorisent la compréhension des notions mathématiques. Elles peuvent prendre plusieurs formes: questionnaire, manipulation de matériel, simulation, texte historique, etc.

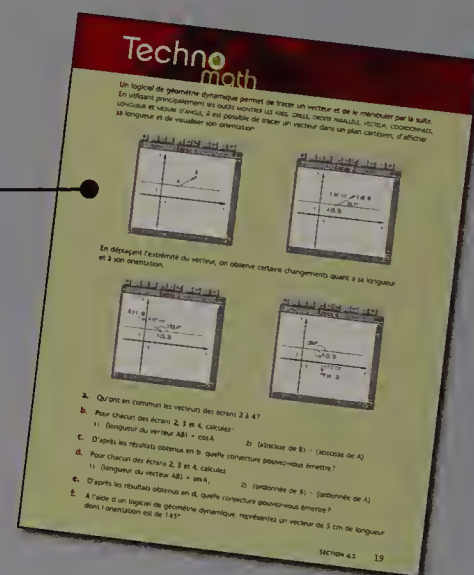
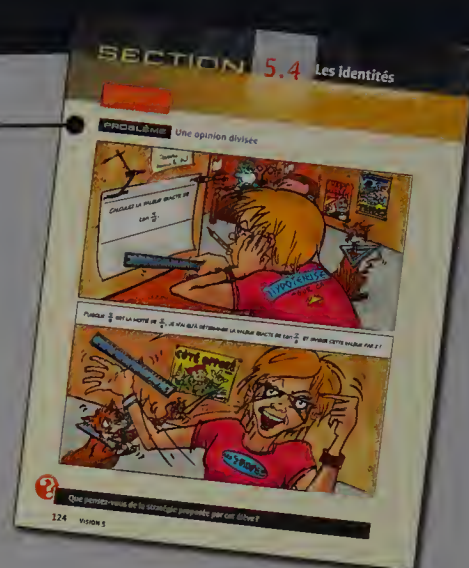
Technomath

La rubrique Technomath permet d'exploiter des outils technologiques tels qu'une calculatrice graphique, un logiciel de géométrie dynamique ou un tableur en montrant comment les utiliser et en proposant quelques questions en lien direct avec les notions mathématiques associées au contenu de la section.

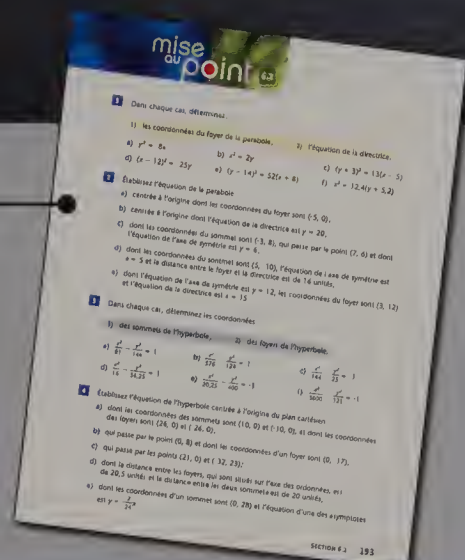


Savoirs

La rubrique Savoirs présente un résumé des éléments théoriques vus dans la section. Des exemples accompagnent les énoncés théoriques afin de favoriser la compréhension des différentes notions.



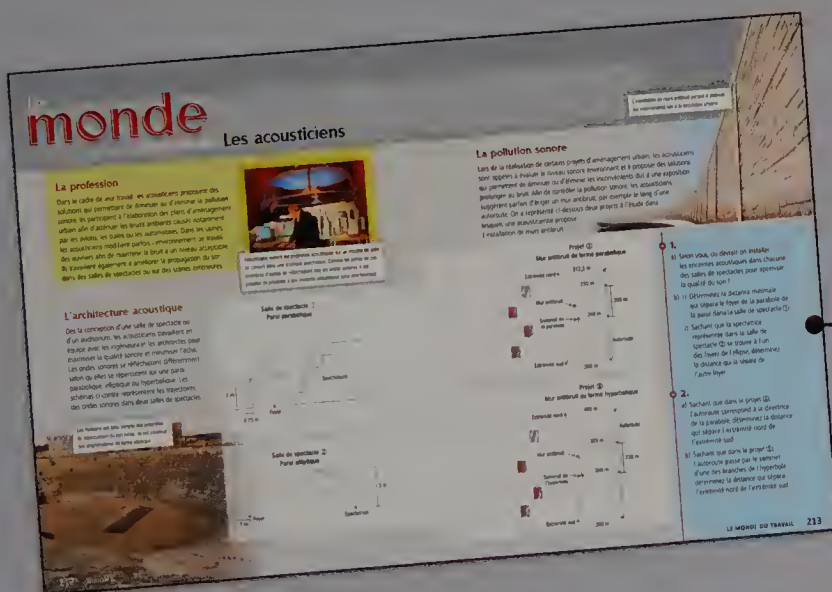
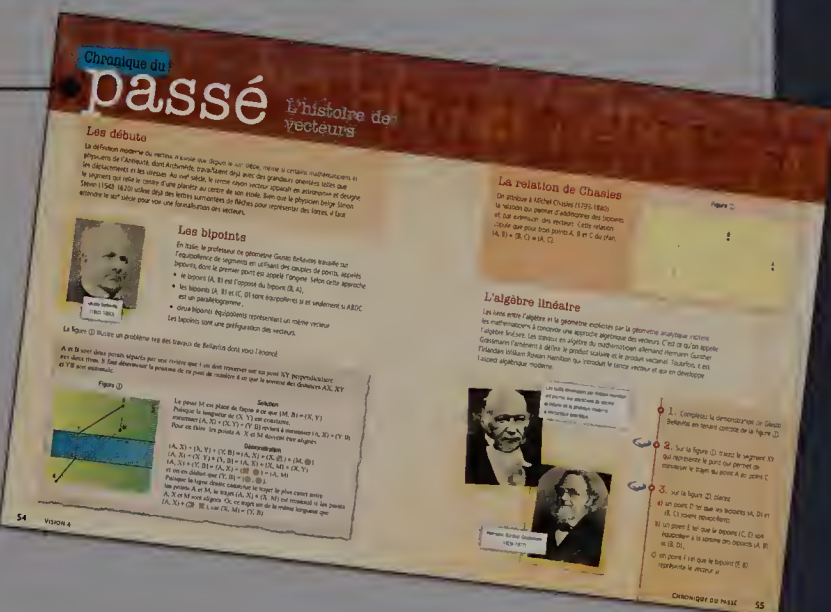
La rubrique **Mise au point** propose une série d'exercices et de problèmes contextualisés favorisant le développement des compétences et la consolidation des apprentissages faits dans la section.



LES RUBRIQUES PARTICULIÈRES

Chronique du passé

La rubrique « Chronique du passé » relate l'histoire de la mathématique et la vie de certains mathématiciens qui ont contribué au développement de notions mathématiques directement associées au contenu de la *Vision*. Une série de questions permettant d'approfondir le sujet accompagne cette rubrique.

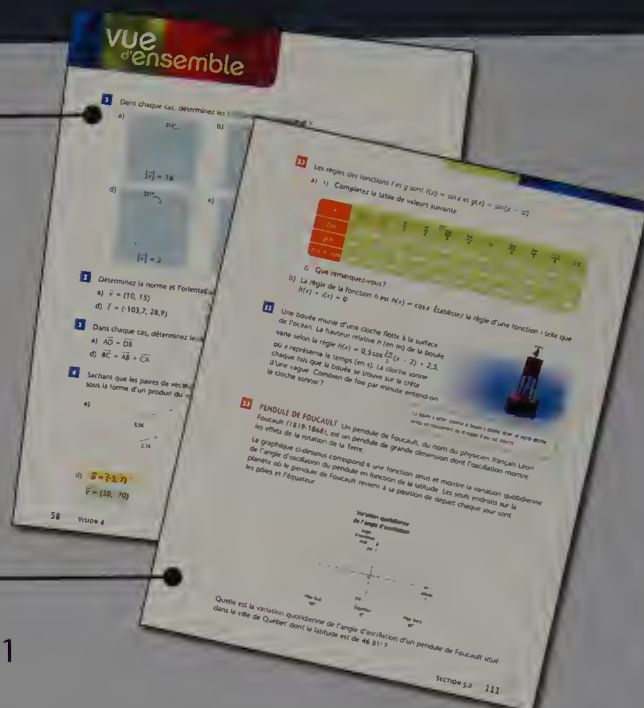


Le monde du travail

La rubrique « Le monde du travail » présente une profession ou un métier où sont exploitées les notions mathématiques étudiées dans la *Vision*. Une série de questions permettant d'approfondir le sujet accompagne cette rubrique.

Vue d'ensemble

La rubrique «Vue d'ensemble» présente une série d'exercices et de problèmes contextualisés permettant d'intégrer et de réinvestir les compétences développées et toutes les notions mathématiques étudiées dans la *Vision*.

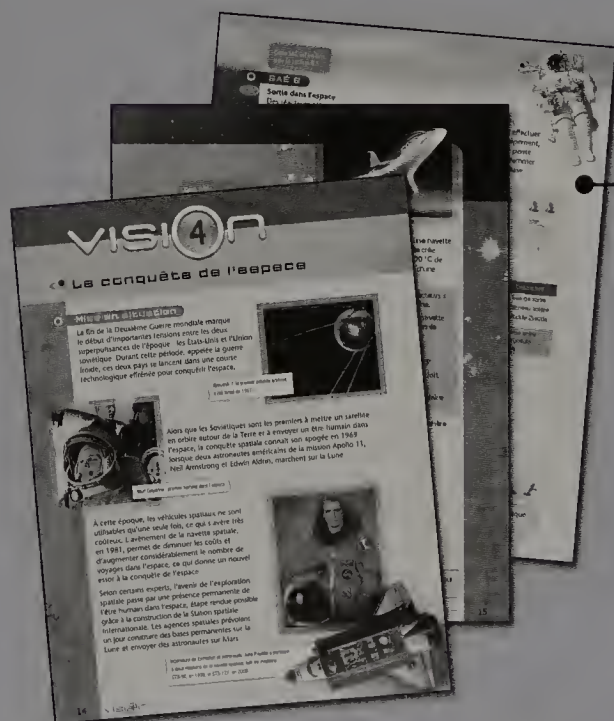
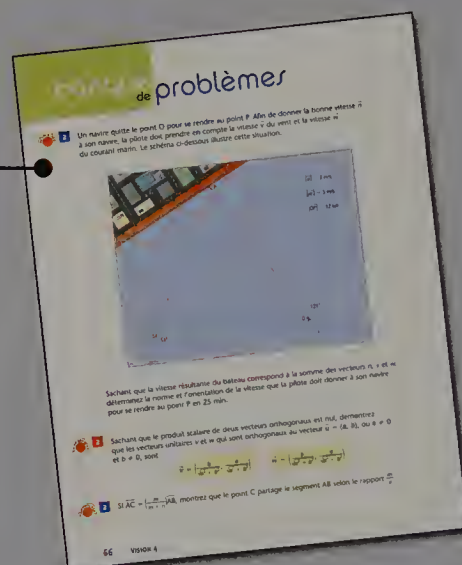


Dans les rubriques **Mise à jour**, **Mise au point**, «Vue d'ensemble» et «Banque de problèmes» :

- un numéro dans un carré bleu indique une priorité 1 et un numéro dans un carré orange, une priorité 2 ;
- lorsqu'un problème comporte des faits réels, un mot clé écrit en lettres majuscules et en rouge indique le sujet auquel il se rapporte.

Banque de problèmes

Cette rubrique clôt chaque *Vision* et présente des problèmes, pour la plupart contextualisés, qui privilégient chacun la résolution, le raisonnement ou la communication.



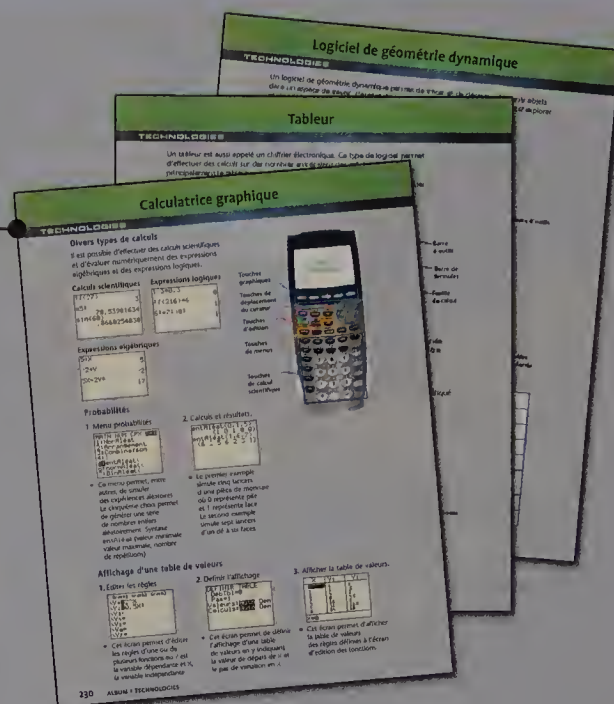
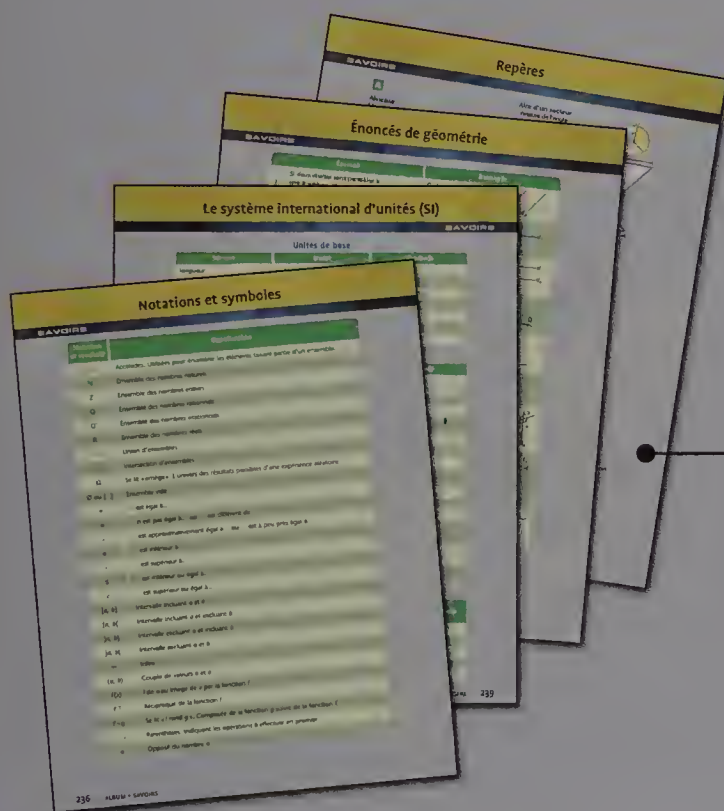
Répertoire des SAÉ

Le «Répertoire des SAÉ», présenté dans le *Guide d'enseignement*, regroupe des SAÉ qui sont liées par un fil conducteur thématique et dont chacune cible un domaine général de formation, une compétence disciplinaire et deux compétences transversales. Les apprentissages réalisés dans les sections aident à la réalisation des tâches proposées dans les SAÉ.

L'ALBUM

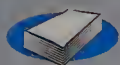
Situé à la fin du manuel, l'«Album» contient plusieurs outils qui viennent appuyer l'élève dans ses apprentissages. Il comporte deux parties distinctes.

La partie «Technologies» fournit des explications sur les principales fonctions de la calculatrice graphique, et sur l'utilisation d'un tableur et d'un logiciel de géométrie dynamique.



La partie «Savoirs» présente les notations et les symboles utilisés dans le manuel, ainsi que ceux du système international d'unités (SI). Des énoncés de géométrie sont également proposés. Cette partie se termine par un glossaire et un index.

LES PICTOGRAMMES



Indique qu'une fiche de travail est offerte dans le *Guide d'enseignement*.



Indique que l'activité peut se faire en travail coopératif. Des précisions à ce sujet sont données dans le *Guide d'enseignement*.



Indique que certains aspects de la compétence disciplinaire 1 sont mobilisés.



Indique que certains aspects de la compétence disciplinaire 2 sont mobilisés.



Indique que certains aspects de la compétence disciplinaire 3 sont mobilisés.

VISION 4

Les vecteurs

Alors que certaines mesures sont entièrement définies par un nombre, d'autres, comme les forces et les vitesses, nécessitent en plus qu'une orientation soit précisée. Mais comment faire pour communiquer efficacement toutes ces caractéristiques ? Dans *Vision 4*, vous apprendrez à travailler avec des vecteurs, à les représenter et à effectuer des opérations sur des vecteurs. Vous en utiliserez aussi pour résoudre des problèmes qui font intervenir des forces et des vitesses. Enfin, vous apprendrez à déterminer la grandeur et l'orientation d'un déplacement équivalent à plusieurs autres déplacements successifs.

Arithmétique et algèbre

Géométrie

- Addition et soustraction de vecteurs
- Multiplication d'un vecteur par un scalaire
- Produit scalaire
- Combinaison linéaire



RÉPERTOIRE
DES SAÉ

La conquête
de l'espace

Chronique du
passé

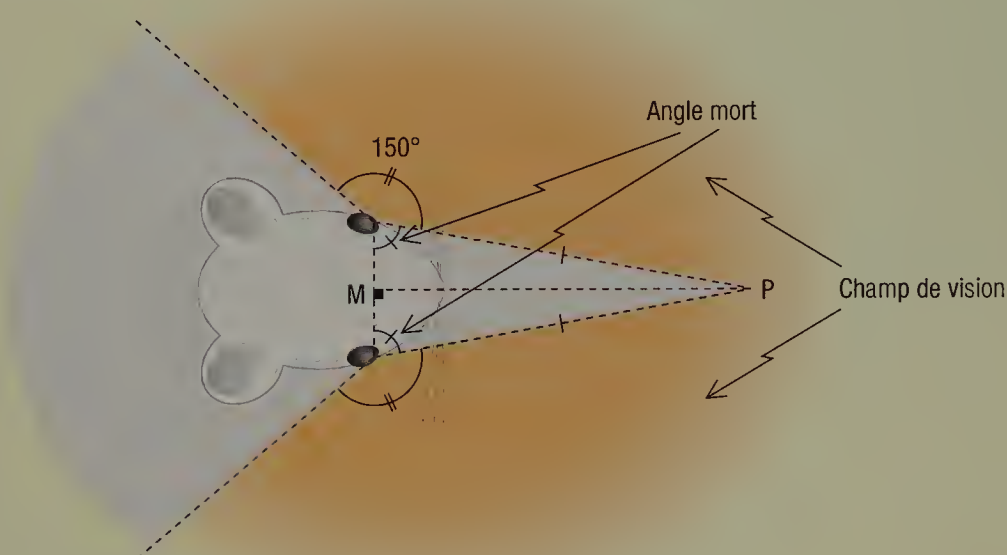
L'histoire
des vecteurs

Le
monde
du travail

Les aérodynamiciens

RÉACTIVATION 1 L'angle mort

La position des yeux des souris leur confère un champ de vision très large. Toutefois, elles ne peuvent pas voir les éléments dans la zone située directement en face de leur museau. Sur le schéma ci-dessous, qui illustre cette situation, la mesure du segment MP correspond à la limite de perception visuelle de la souris.



a. Dans un triangle rectangle, comment nomme-t-on le rapport :

- 1) $\frac{\text{mesure de la cathète opposée à un angle aigu}}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$?
- 2) $\frac{\text{mesure de la cathète adjacente à un angle aigu}}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$?
- 3) $\frac{\text{mesure de la cathète opposée à un angle aigu}}{\text{mesure de la cathète adjacente à cet angle}}$?

b. L'angle mort de l'œil d'une souris mesure 71° et sa limite de perception visuelle est de 4,5 cm. Déterminez :

- 1) la distance qui sépare un de ses yeux du point P ;
- 2) la distance entre ses deux yeux.

c. Les yeux d'une souris sont distants de 2,5 cm. Quelle est la limite de perception visuelle de cette souris si l'angle mort de l'œil mesure :

- 1) 80° ? 2) 82° ?

d. Les yeux d'une souris sont distants de 2 cm. Quelle est la mesure de l'angle mort de l'œil si la limite de perception visuelle de cette souris est de :

- 1) 4 cm ? 2) 5,2 cm ?



Les animaux dont les yeux ont une position latérale, comme les bovins ou les chevaux, possèdent en général un excellent odorat qui leur permet d'identifier les éléments présents dans la zone qu'ils ne peuvent pas voir.

RÉACTIVATION 2 Se rendre à bon port

Un navire quitte son port d'attache, situé au point P, pour se rendre à sa destination située au point D. Après 80 km de navigation, le capitaine réalise que les courants marins ont fait dévier la trajectoire du navire de 15° par rapport à la trajectoire souhaitée. Le schéma suivant illustre cette situation.



- De quel type est le triangle PND ?
- Établissez la relation qui permet de déterminer la mesure du côté ND d'après les mesures des côtés PN et PD et de celle de l'angle compris entre ces côtés.
- Lorsque le navire est situé au point N, à quelle distance se trouve-t-il de sa destination ?
- Établissez la relation qui existe entre les mesures des côtés ND, PN et PD et celles des angles opposés à ces côtés.
- Quelle est la mesure de l'angle D ?
- Pour se rendre à destination, le capitaine doit corriger la trajectoire du navire. Quelle est la mesure de l'angle de correction ?



Alors que la navigation astronomique permet de se repérer grâce aux étoiles, la navigation à l'estime consiste à déterminer la position d'un navire à partir de sa vitesse, de son cap et de sa dernière position connue. Les méthodes de navigation font en général appel à des notions de trigonométrie.

RELATIONS TRIGONOMÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

La **trigonométrie** est l'étude des relations entre les angles et les côtés d'un triangle.

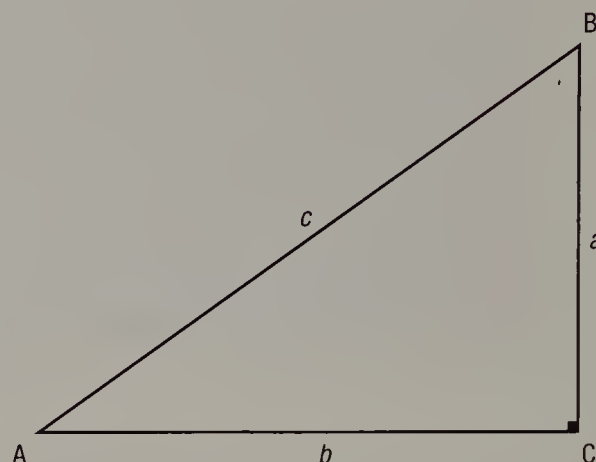
Un **rapport trigonométrique** est un nombre qui exprime un rapport de mesures des longueurs.

Dans un triangle rectangle, les trois principaux rapports trigonométriques sont :

$$\sin A = \frac{\text{mesure de la cathète opposée à } \angle A}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$$

$$\cos A = \frac{\text{mesure de la cathète adjacente à } \angle A}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$$

$$\tan A = \frac{\text{mesure de la cathète opposée à } \angle A}{\text{mesure de la cathète adjacente à } \angle A}$$



« Sin », « cos » et « tan » signifient respectivement sinus, cosinus et tangente.

Ex. : Dans le triangle DEF ci-contre :

$$\sin E = \frac{12}{20} = 0,6$$

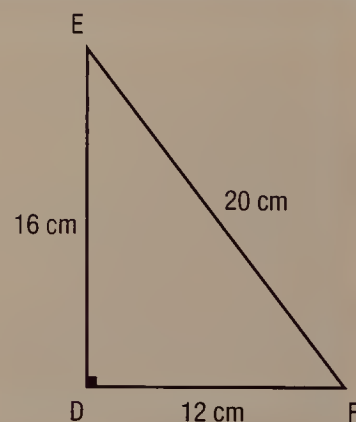
$$\sin F = \frac{16}{20} = 0,8$$

$$\cos E = \frac{16}{20} = 0,8$$

$$\cos F = \frac{12}{20} = 0,6$$

$$\tan E = \frac{12}{16} = 0,75$$

$$\tan F = \frac{16}{12} = 1,3$$



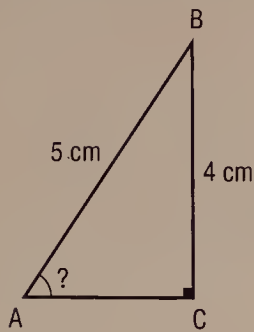
Résoudre un triangle, c'est déterminer les mesures de ses côtés et de ses angles à l'aide de quelques données connues.

Alors que sin, cos et tan permettent de calculer les rapports trigonométriques associés à des mesures d'angles données, arc sin, arc cos et arc tan permettent d'effectuer le travail inverse, c'est-à-dire de calculer les mesures d'angles à partir de la valeur des rapports correspondants.

« Arc sin », « arc cos » et « arc tan » signifient respectivement arc sinus, arc cosinus et arc tangente.

À noter que arc sin, arc cos et arc tan peuvent aussi s'écrire $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ et $\tan^{-1}$.

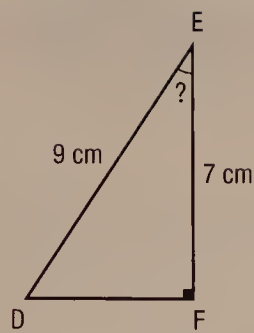
Ex. : Dans les triangles rectangles ci-dessous :



on a :

$$\sin A = \frac{4}{5} \text{ et } \arcsin \frac{4}{5} \approx 53,13^\circ.$$

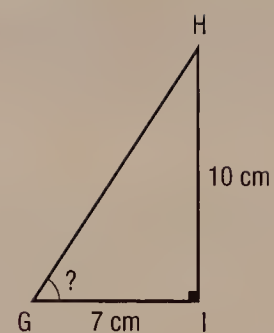
Donc, $m\angle A \approx 53,13^\circ$.



on a :

$$\cos E = \frac{7}{9} \text{ et } \arccos \frac{7}{9} \approx 38,94^\circ.$$

Donc, $m\angle E \approx 38,94^\circ$.



on a :

$$\tan G = \frac{10}{7} \text{ et } \arctan \frac{10}{7} \approx 55,01^\circ.$$

Donc, $m\angle G \approx 55,01^\circ$.

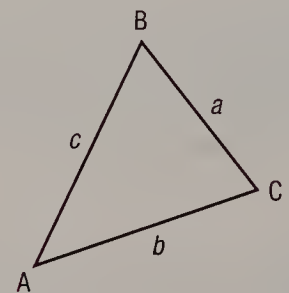
RELATIONS DANS UN TRIANGLE QUELCONQUE

Loi des sinus

Il est possible de résoudre un triangle quelconque si l'on connaît les mesures d'un angle, de son côté opposé et d'un autre côté ou d'un autre angle de ce triangle.

Les mesures des côtés d'un triangle sont proportionnelles au sinus des angles opposés à ces côtés. Dans le triangle ci-contre, on a :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

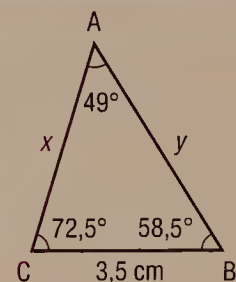


Ex. : Dans le triangle ci-contre :

$$\frac{x}{\sin 58,5^\circ} = \frac{3,5}{\sin 49^\circ} = \frac{y}{\sin 72,5^\circ}$$

$$\bullet \text{ On a : } x = \frac{\sin 58,5^\circ \times 3,5}{\sin 49^\circ}, \text{ soit } x \approx 3,95 \text{ cm.}$$

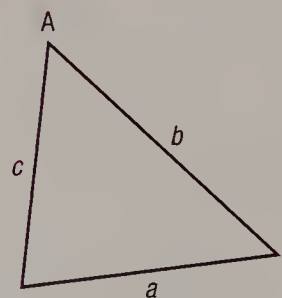
$$\bullet \text{ On a : } y = \frac{\sin 72,5^\circ \times 3,5}{\sin 49^\circ}, \text{ soit } y \approx 4,42 \text{ cm.}$$



Loi des cosinus

Il est possible de résoudre un triangle quelconque si l'on connaît les mesures de deux côtés et celle de l'angle compris entre ces côtés, ou si l'on connaît les mesures des trois côtés de ce triangle. Dans le triangle ci-contre, on a :

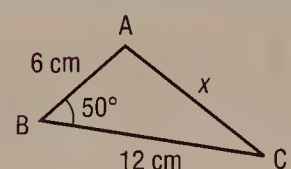
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$



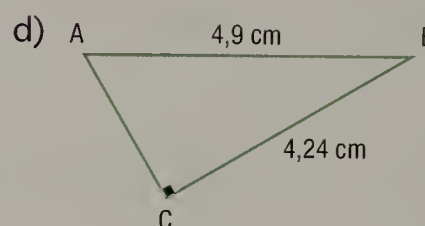
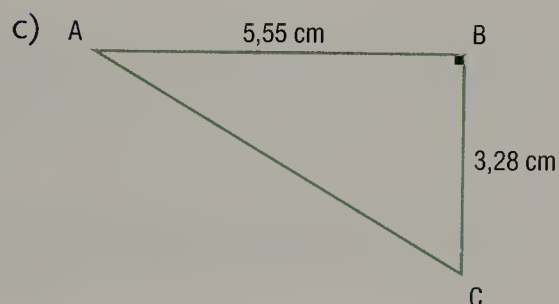
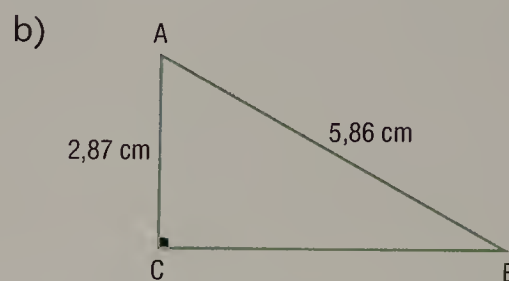
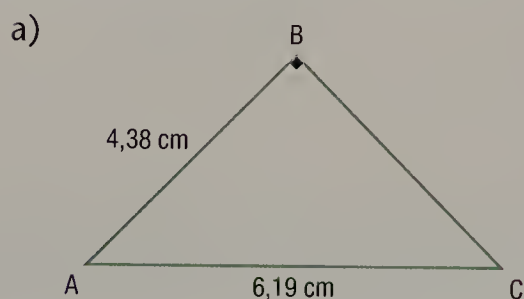
Ex. : Dans le triangle ci-contre :

$$x^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \times 12 \times 6 \cos 50^\circ$$

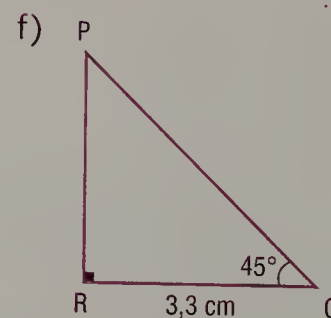
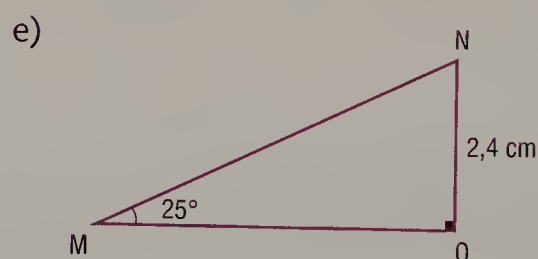
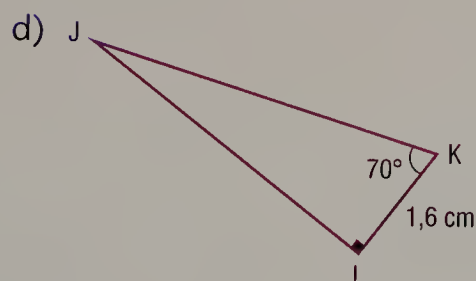
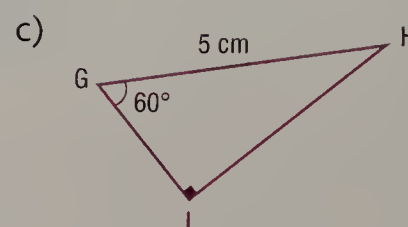
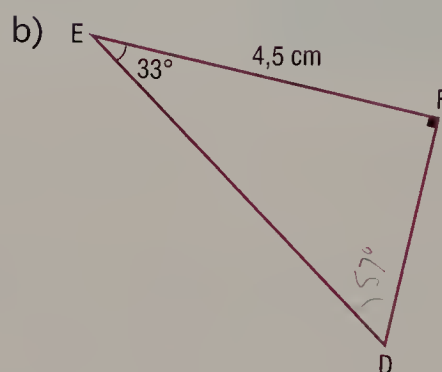
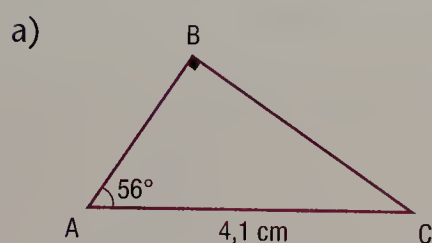
$$x \approx 9,35 \text{ cm}$$



1 Déterminez la mesure de l'angle A de chacun des triangles ci-dessous.



2 Résolvez les triangles suivants.



3 Dans un triangle ABC, déterminez la mesure de l'angle A sachant que :

a) $m\angle A < 90^\circ$ et $\sin A = 0,5$

b) $\cos A = 0,2$

c) $\tan A = 2$

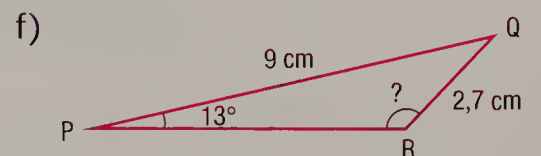
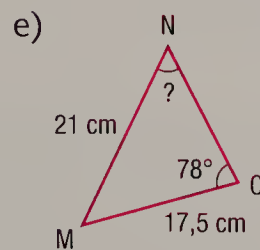
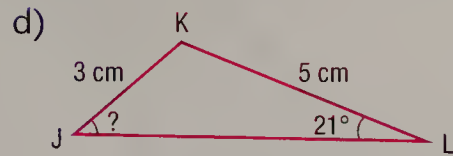
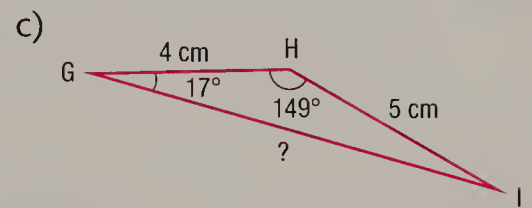
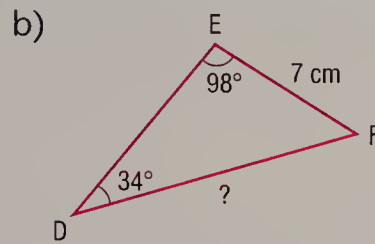
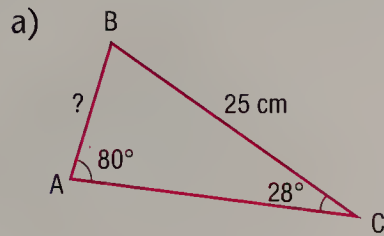
d) $m\angle A > 90^\circ$ et $\sin A = 0,3$

e) $m\angle A > 90^\circ$ et $\sin A = 0,9$

f) $\cos A = -0,65$

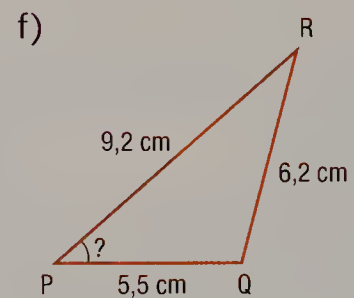
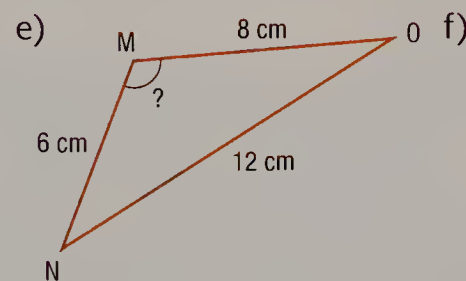
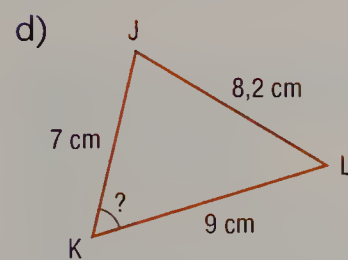
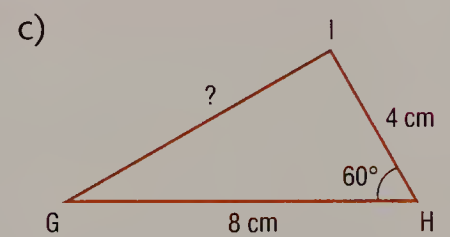
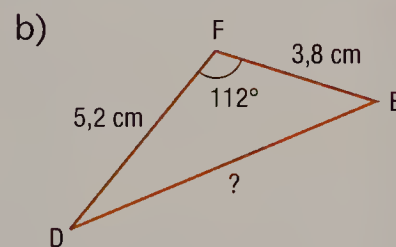
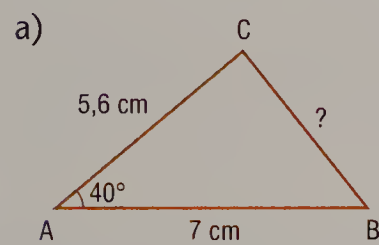
4

Dans chaque cas, déterminez la mesure manquante en utilisant la loi des sinus.



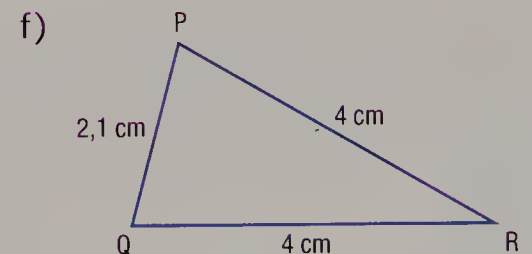
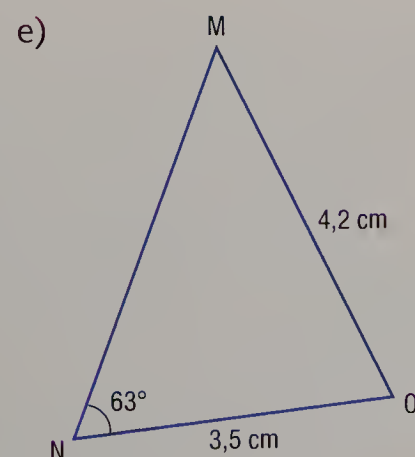
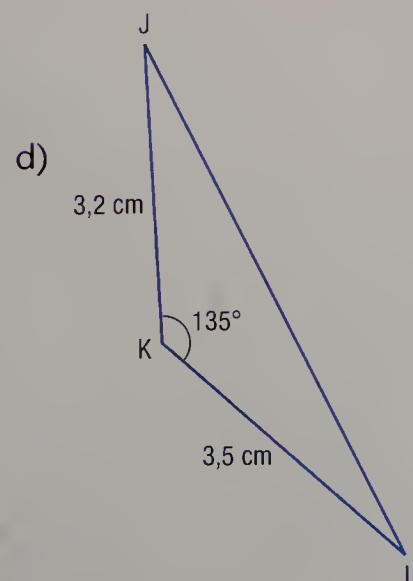
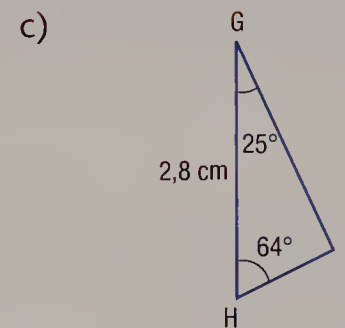
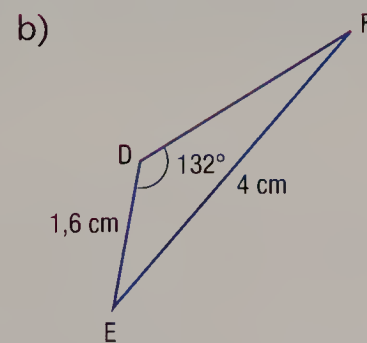
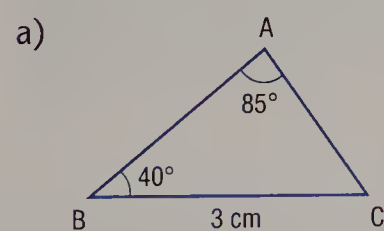
5

Dans chaque cas, déterminez la mesure manquante en utilisant la loi des cosinus.

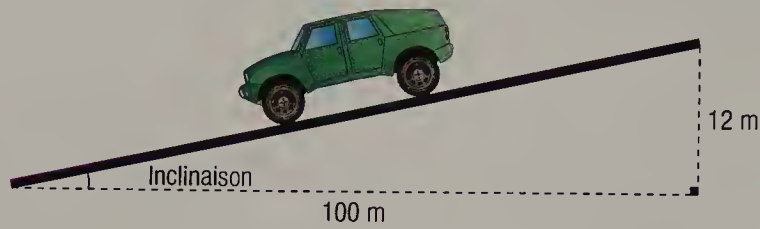


6

Résolvez les triangles suivants.



- 7** Sur les routes, on annonce une pente abrupte au moyen d'un panneau semblable à celui illustré ci-contre. Le schéma ci-dessous illustre une route dont la pente est de 12%.



Complétez le tableau suivant.

	Pente (%)	Inclinaison (°)
a)	2	
b)		3
c)	6	
d)		5
e)	10	
f)		10



Grâce à la convention de Vienne sur la signalisation routière ratifiée par la plupart des pays industrialisés, il existe une certaine uniformité internationale pour la signalisation routière. Cependant, les panneaux qui signalent un danger ont la forme d'un losange à fond jaune en Amérique, alors qu'ils ont la forme d'un triangle à fond blanc en Europe.

- 8** En tenant compte du triangle ci-contre:

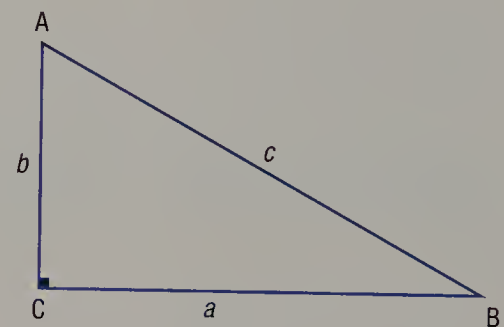
a) indiquez à quels rapports trigonométriques correspond:

1) $\frac{a}{c}$

2) $\frac{b}{c}$

3) $\frac{a}{b}$

4) $\frac{b}{a}$



b) indiquez si chacun des énoncés ci-dessous est vrai ou faux.

1) $\sin A = \cos B$

2) $\cos A = \sin B$

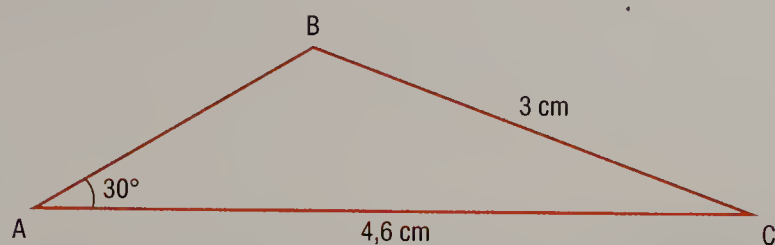
3) $\tan A = \tan B$

4) $\frac{\sin A}{\sin B} = \tan B$

- 9** Un câble d'acier doit être fixé à deux poteaux comme le montre l'illustration ci-dessous. Le point d'attache du câble sur chacun des poteaux se trouve à 3 m du sol. Quelle est la longueur de câble nécessaire à cette installation?



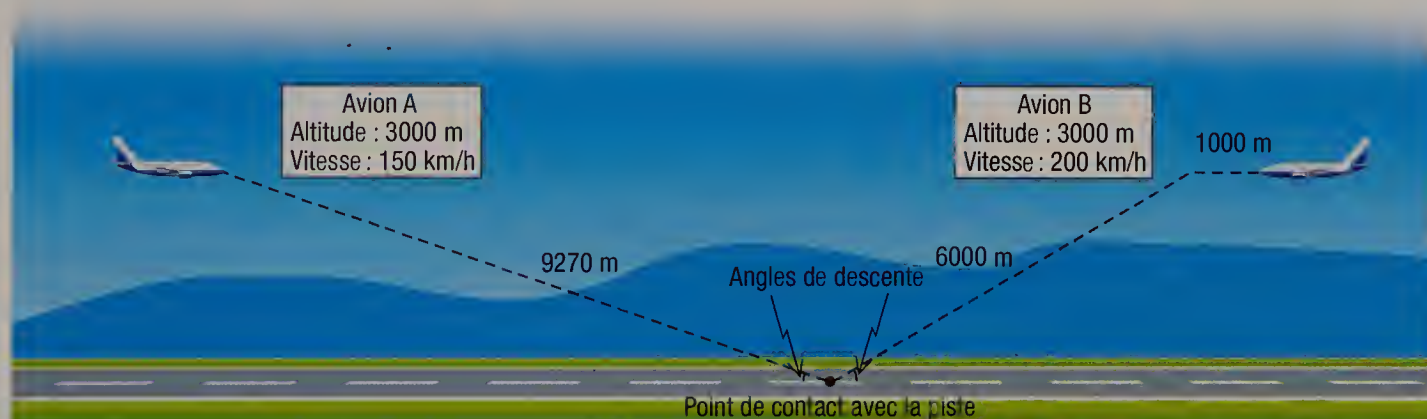
- 10** Afin de résoudre le triangle ci-dessous, une élève utilise la démarche suivante.



- ① $m \angle B = \arcsin \frac{4,6 \times \sin 30^\circ}{3}$, soit $\approx 50,06^\circ$.
- ② Puisque $180^\circ - 30^\circ - 50,06^\circ = 99,94^\circ$, alors $m \angle C \approx 99,94^\circ$.
- ③ $m \overline{AB} \approx \frac{3 \times \sin 99,94^\circ}{\sin 30^\circ}$, soit $\approx 5,91$ cm.

- a) Expliquez l'erreur que cette élève a commise.
- b) Résolvez à nouveau ce triangle en corrigeant cette erreur.

- 11** À 13 h 28, deux avions se faisant face se préparent à atterrir sur la même piste. Le schéma ci-dessous montre quelques données notées par le contrôleur aérien à ce moment.



- a) À 13 h 28, quelle distance sépare les deux avions ?
- b) Quelle est la mesure de l'angle de descente de chaque avion ?
- c) Au moment où l'avion B touchera le sol, quelle sera l'altitude de l'avion A ?

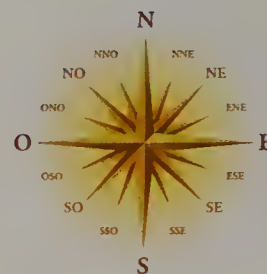
La plupart des pistes d'un aéroport servent à la fois à l'atterrissage et au décollage. Elles sont généralement orientées dans le sens des vents dominants.



12

Au cours d'un exercice d'orientation, Jacques et Mireille doivent se rendre chacun à une balise différente à partir du même point de départ. Voici des renseignements à ce sujet :

- La balise de Mireille est située à 2,5 km du point de départ en direction N.-O. et Mireille se déplace à une vitesse de 2 km/h.
- La balise de Jacques est située à 3,6 km du point de départ en direction S.-S.-O. et Jacques se déplace à une vitesse de 2,5 km/h.



- Quelle distance sépare Mireille et Jacques :
 - 1 h après le départ?
 - lorsque chacun a rejoint sa balise?
- Une fois que chacun est rendu à sa balise, Jacques doit rejoindre directement Mireille. Par rapport au nord, déterminez la mesure de l'angle qu'aura la trajectoire de Jacques.

13

Pour se rendre à Vancouver en avion à partir de Montréal, les voyageurs ont le choix entre les deux itinéraires suivants.

Itinéraire A

Trajet: Montréal – Vancouver

Coût: 5 ¢/km

Itinéraire B

Trajet: Montréal – Chicago – Vancouver

Coût: 4 ¢/km

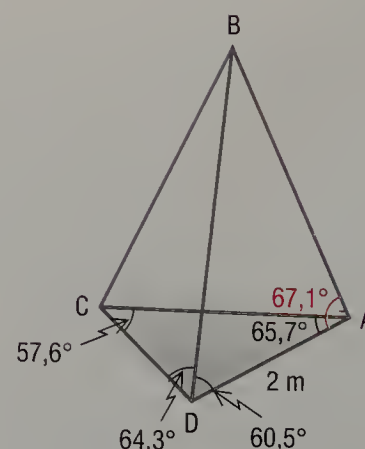


Déterminez l'itinéraire le moins coûteux pour les voyageurs.

14

La structure métallique illustrée ci-contre a la forme d'une pyramide à base triangulaire. Calculez :

- la longueur totale des tiges métalliques nécessaires à la fabrication de cette structure;
- la mesure de l'angle ACB;
- la mesure de l'angle CBA.



Cette section est en lien
avec la SAÉ 7.



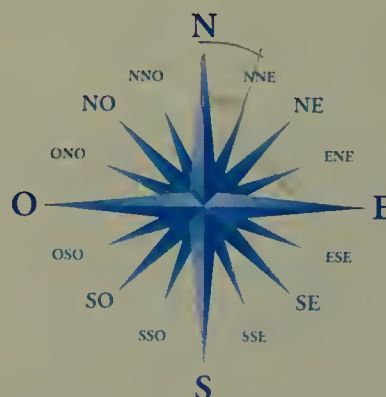
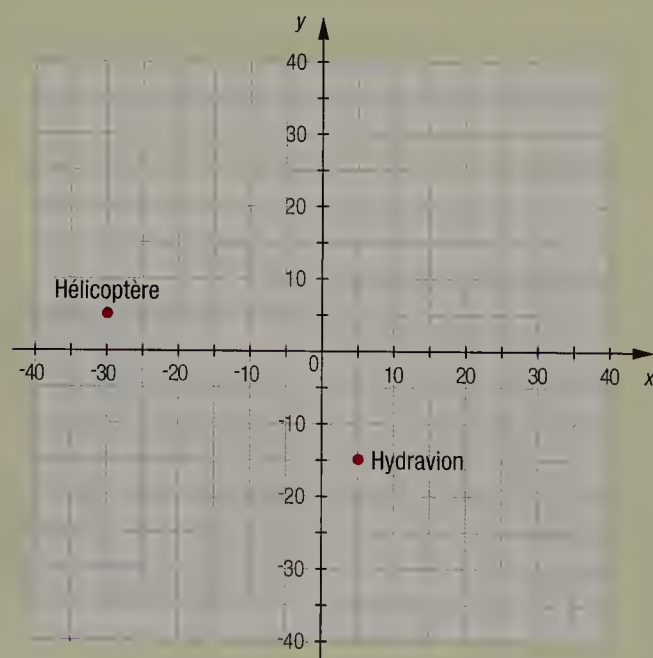
PROBLÈME

La bonne direction

Après s'être posé d'urgence en pleine mer, le pilote d'un hydravion lance le message radio suivant.



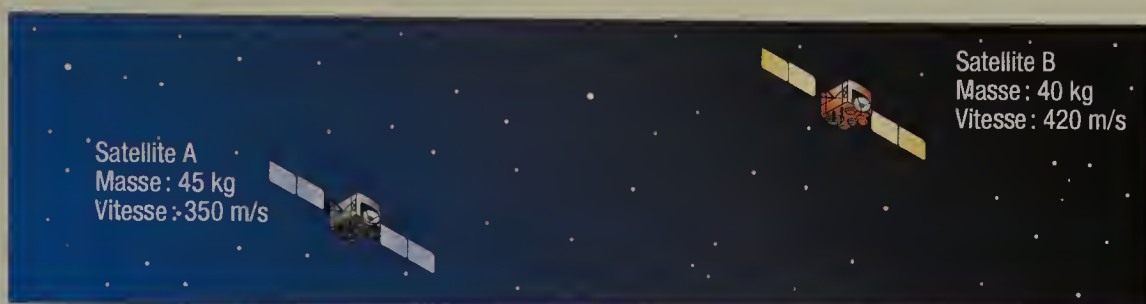
Un hélicoptère de secours décolle à 14 h 25 du poste de commandement des garde-côtes pour se rendre directement à l'endroit où l'hydravion s'est posé à 14 h 20. Les lieux de décollage de l'hydravion et de l'hélicoptère sont représentés ci-dessous. Les graduations du plan cartésien sont en kilomètres.



Donnez au pilote de l'hélicoptère des indications précises qui lui permettront de rejoindre l'hydravion au plus tard à 14 h 40.

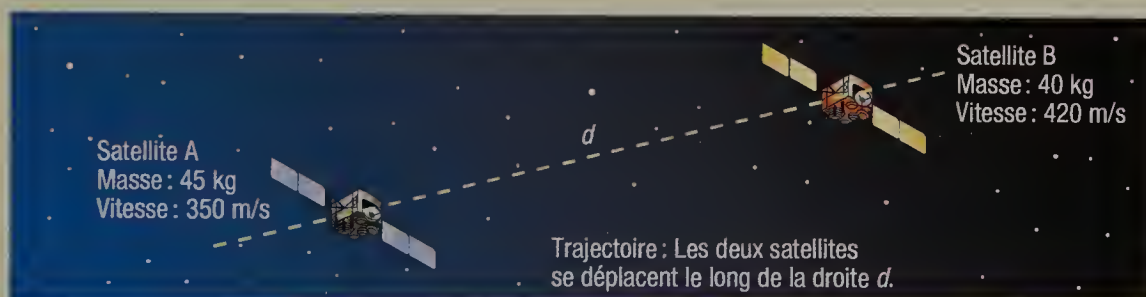
ACTIVITÉ 1 Collision possible!

Depuis le début de la conquête spatiale, le nombre de satellites en orbite autour de la Terre a considérablement augmenté. En conséquence, les risques de collisions entre des satellites ont également augmenté. Voici quelques renseignements concernant deux satellites :

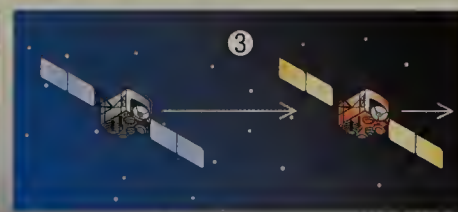


- a. Expliquez pourquoi ces renseignements sont insuffisants pour déterminer si ces deux satellites entreront en collision.

Voici un renseignement supplémentaire concernant ces deux satellites :



- b. 1) Expliquez pourquoi ces renseignements sont encore insuffisants pour déterminer si ces deux satellites entreront en collision.
- 2) Quels renseignements supplémentaires faut-il connaître pour déterminer si ces deux satellites entreront en collision ?
- c. Chaque paire de satellites illustrée ci-dessous se déplace le long d'une même droite et la vitesse de chaque satellite est représentée par une flèche dont la longueur est proportionnelle à la vitesse. Dans chaque cas, indiquez si les deux satellites entreront en collision et expliquez votre réponse.



Le 10 février 2009, un satellite commercial américain est entré en collision avec un satellite militaire russe, ce qui a créé des débris se déplaçant à très haute vitesse, risquant d'endommager d'autres satellites. C'était la première fois que deux satellites intacts entraient en collision.

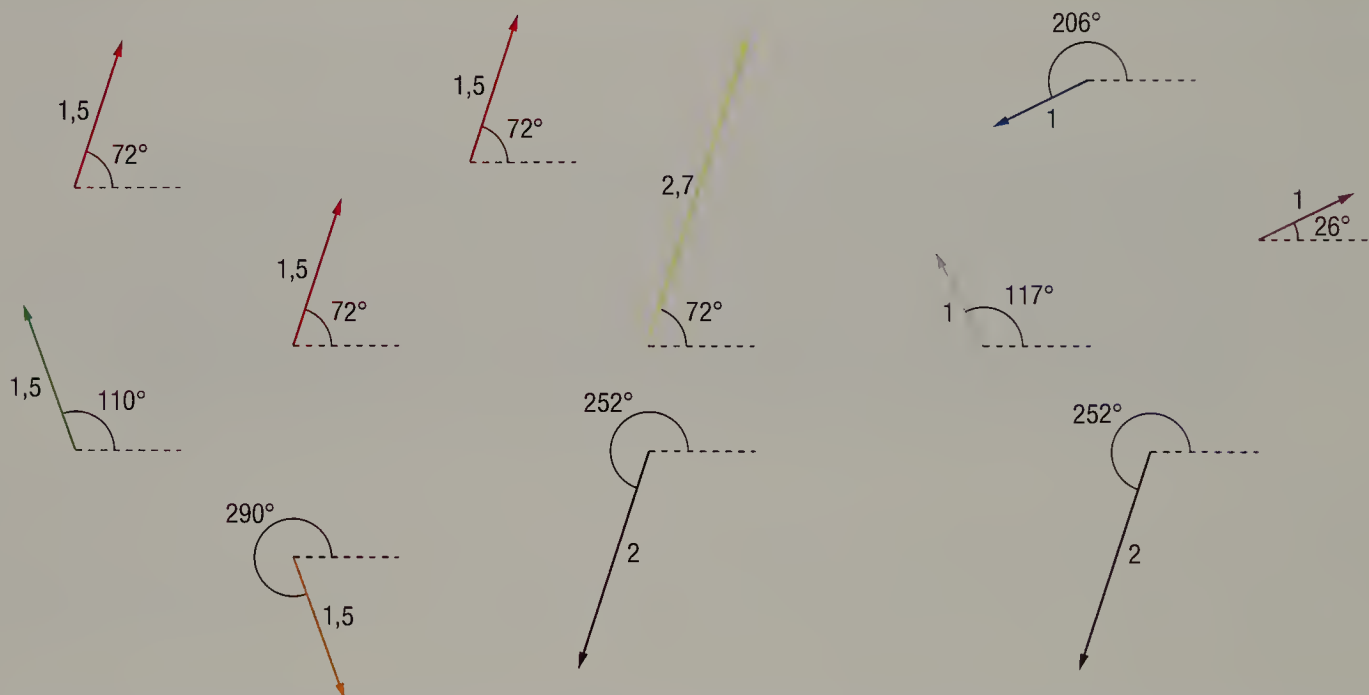
ACTIVITÉ 2 Des mesures fléchées

Alors que certaines mesures sont entièrement définies par un nombre, d'autres nécessitent que l'on précise en plus une orientation. Un vecteur est un objet mathématique qui permet à la fois d'indiquer une mesure et son orientation.

Giusto Bellavitis a été l'un des premiers mathématiciens à proposer une représentation géométrique des vecteurs.

De nos jours, un vecteur est généralement représenté à l'aide d'une flèche et d'une mesure d'angle.

Voici la représentation de quelques vecteurs :



Les énoncés ci-dessous se rapportent à ces vecteurs.

- Les vecteurs rouges sont équipollents.
- Le vecteur gris et le vecteur bleu ne sont pas équipollents.
- Le vecteur vert est l'opposé du vecteur orange.
- Le vecteur bleu est l'opposé du vecteur mauve.
- Le vecteur jaune n'est pas l'opposé d'un vecteur noir.
- Les vecteurs rouges et les vecteurs noirs sont colinéaires.

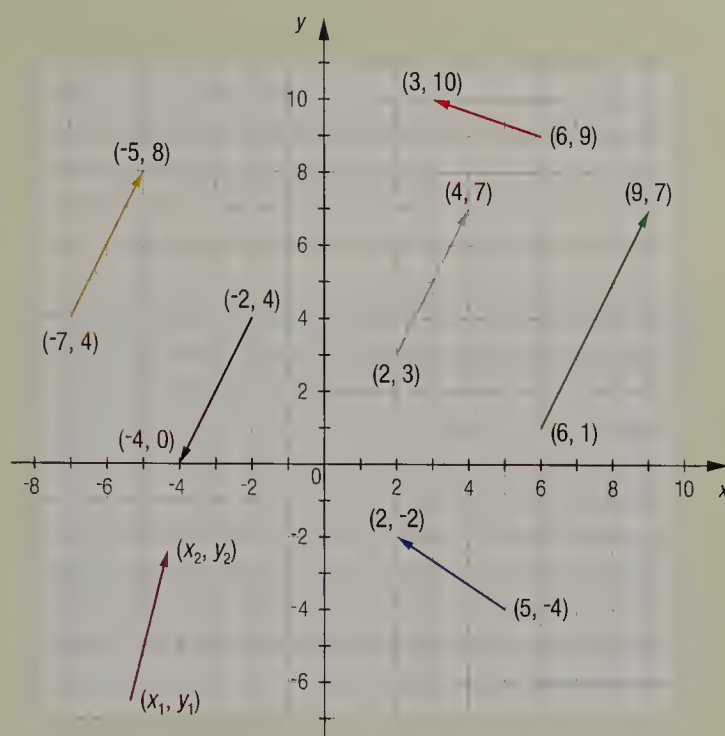
a. À partir de ces affirmations, expliquez ce que sont des vecteurs :

1) équipollents; 2) opposés; 3) colinéaires.

b. Combien y a-t-il de vecteurs différents représentés ci-dessus ?

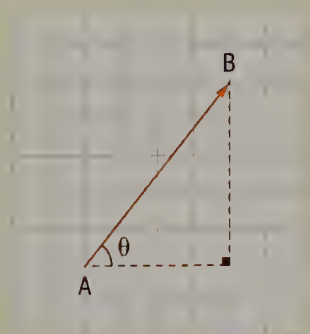
À l'origine, le mot « vecteur » était utilisé par les astronomes pour définir un segment orienté reliant une planète vers le foyer de son orbite. Il était alors question de *rayon vecteur*.

Il est aussi possible de représenter un vecteur dans un plan cartésien.



- c.** Parmi les vecteurs représentés ci-dessus, indiquez, à l'aide de leur couleur, deux vecteurs :
- 1) équipollents;
 - 2) opposés;
 - 3) colinéaires.
- d.** Il est possible de décrire un vecteur par un couple de nombres. Par exemple, le vecteur vert est décrit par le couple $(3, 6)$, et le vecteur bleu, par le couple $(-3, 2)$. Expliquez comment ces couples ont été obtenus.
- e.** Quel couple permet de définir :
- 1) le vecteur jaune?
 - 2) le vecteur gris?
 - 3) le vecteur noir?
 - 4) le vecteur mauve?

Voici un vecteur défini par le couple $(4, 5)$.



La lettre grecque θ , nommée *thêta*, est souvent utilisée pour désigner la mesure d'un angle.

- f.** Déterminez :
- 1) la distance entre l'origine A et l'extrémité B du vecteur;
 - 2) la mesure associée à θ .



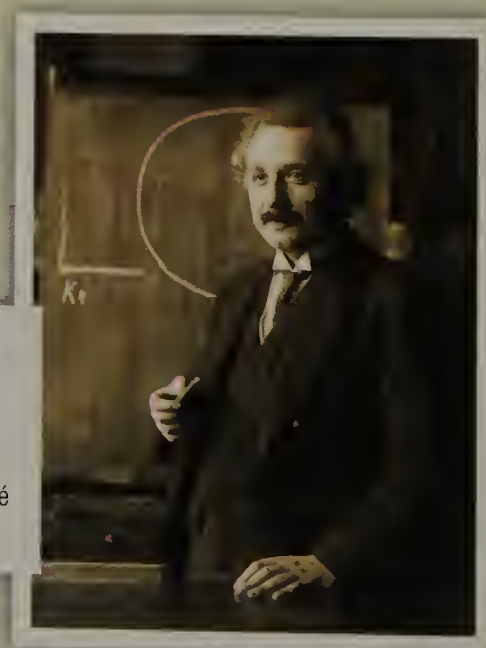
ACTIVITÉ 3 Illusion d'optique

L'illustration ci-dessous montre deux observateurs, Nelly et Frédérick, qui regardent la lumière d'un bateau se déplaçant dans l'obscurité du point A au point B. Les conditions d'observation font en sorte qu'ils ne peuvent pas discerner le déplacement réel du bateau représenté par le vecteur orange. Le vecteur vert correspond au déplacement perçu par Nelly.

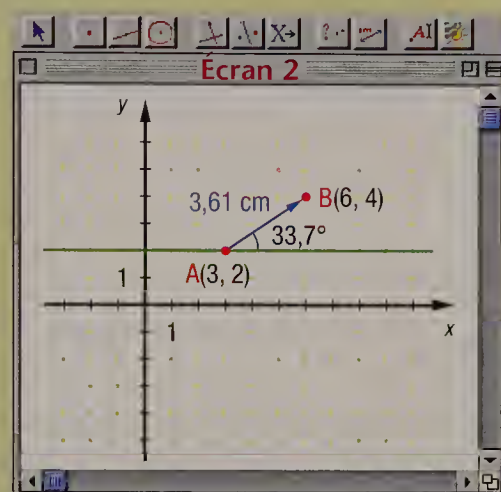
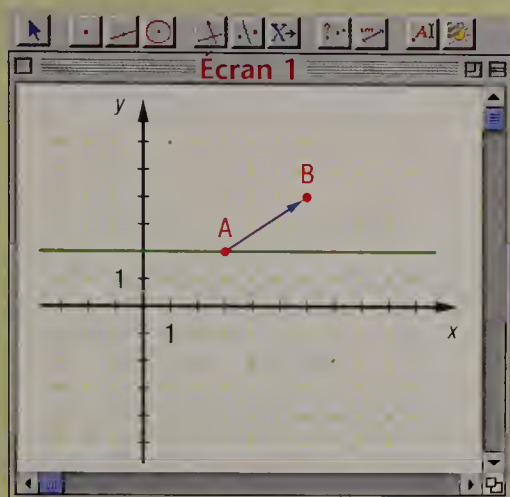


- Pourquoi est-il pertinent de représenter le déplacement du bateau à l'aide d'un vecteur ?
- Déterminez :
 - la mesure de l'angle BAC ;
 - la longueur du déplacement perçu par Nelly.
- Représentez par un vecteur le déplacement du bateau perçu par Frédérick.
 - Calculez la longueur de ce déplacement.

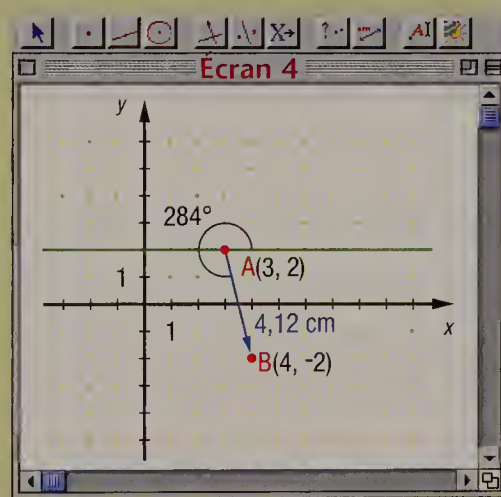
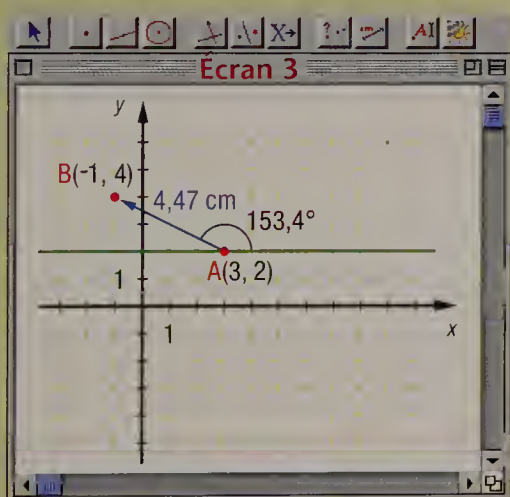
Le résultat obtenu lors de la prise de mesures de certaines quantités physiques, comme le déplacement ou la vitesse, peut varier selon la position et l'état de mouvement de la personne qui l'observe. Ce phénomène a inspiré à Albert Einstein sa célèbre phrase : « Tout est relatif. » De cette réalité découle la théorie de la relativité.



Un logiciel de géométrie dynamique permet de tracer un vecteur et de le manipuler par la suite. En utilisant principalement les outils MONTRER LES AXES, GRILLE, DROITE PARALLÈLE, VECTEUR, COORDONNÉES, LONGUEUR et MESURE D'ANGLE, il est possible de tracer un vecteur dans un plan cartésien, d'afficher sa longueur et de visualiser son orientation.



En déplaçant l'extrémité du vecteur, on observe certains changements quant à sa longueur et à son orientation.



- Qu'ont en commun les vecteurs des écrans 2 à 4?
- Pour chacun des écrans 2, 3 et 4, calculez :
 - (longueur du vecteur AB) $\times \cos A$;
 - (abscisse de B) – (abscisse de A).
- D'après les résultats obtenus en b, quelle conjecture pouvez-vous émettre?
- Pour chacun des écrans 2, 3 et 4, calculez :
 - (longueur du vecteur AB) $\times \sin A$;
 - (ordonnée de B) – (ordonnée de A).
- D'après les résultats obtenus en d, quelle conjecture pouvez-vous émettre?
- À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, représentez un vecteur de 5 cm de longueur dont l'orientation est de 145° .

GRANDEUR SCALAIRE ET GRANDEUR VECTORIELLE

Une **grandeur scalaire** est une grandeur entièrement définie par un nombre.

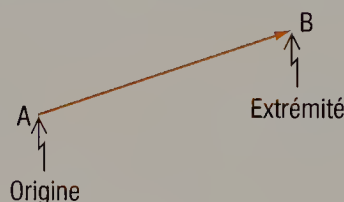
Une **grandeur vectorielle** est définie par un nombre et une orientation.

- Ex. : 1) Une masse, par exemple 4 kg, ou un prix, par exemple 3 \$, sont des grandeurs scalaires.
 2) Un déplacement, par exemple 3 km sur l'autoroute des Laurentides vers Saint-Sauveur, est une grandeur vectorielle.

VECTEUR

Un vecteur permet de définir simultanément une **grandeur**, une **direction** et un **sens**. La direction et le sens du vecteur constituent son **orientation**. Il peut être représenté graphiquement par un segment orienté ayant une origine et une extrémité.

Voici la représentation géométrique d'un vecteur AB :



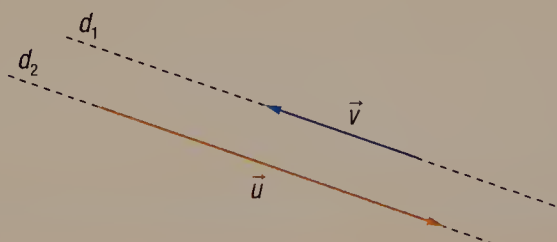
Un vecteur peut être désigné par :

- une lettre minuscule surmontée d'une flèche ;
- deux lettres majuscules ordonnées surmontées d'une flèche. La première lettre correspond à l'origine du vecteur et la seconde, à son extrémité.

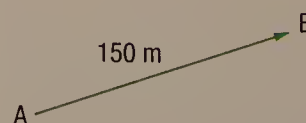
La **norme** du vecteur $\vec{v}$, notée $\|\vec{v}\|$, est un nombre réel qui caractérise la grandeur de ce vecteur. Il est à noter que :

- un vecteur dont la norme est 0 est appelé **vecteur nul** et est noté $\vec{0}$;
- un vecteur dont la norme est 1 est appelé **vecteur unitaire**.

Ex. : 1) Puisque $d_1 \parallel d_2$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction. Par contre, ils n'ont pas le même sens.



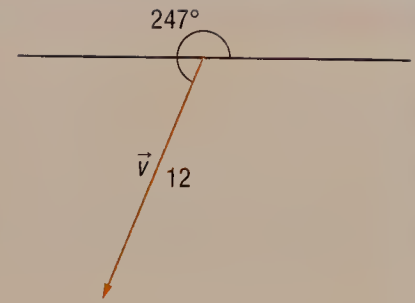
2) La norme de $\vec{AB}$, notée $\|\vec{AB}\|$, est 150 m.



Graphiquement :

- la norme du vecteur est associée à sa longueur;
- l'orientation du vecteur correspond à un angle formé par le vecteur et une droite horizontale passant par son origine. Il est mesuré dans le sens antihoraire par rapport à la partie de cette droite située à droite de l'origine du vecteur.

Ex. :

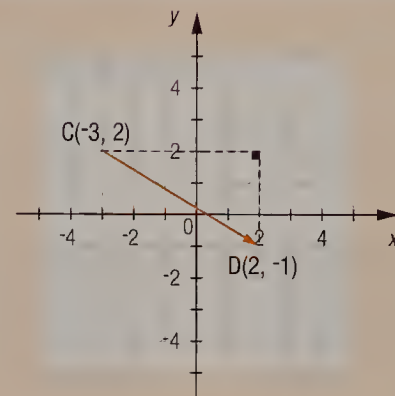


- $\|\vec{v}\| = 12$
- Orientation de $\vec{v}$: 247°

Dans un plan cartésien, un vecteur peut être représenté par une flèche d'origine (x_1, y_1) et d'extrémité (x_2, y_2) . Ce vecteur peut être décrit par un couple de nombres (a, b) , où :

- a est la **composante horizontale** du vecteur et $a = x_2 - x_1$;
- b est la **composante verticale** du vecteur et $b = y_2 - y_1$.

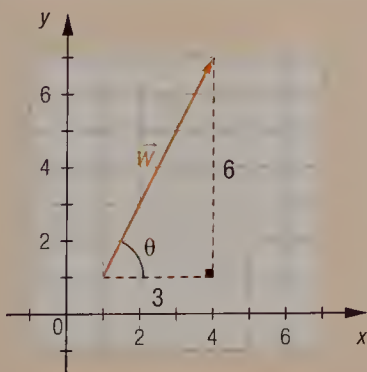
Ex. :



- Composante horizontale: $2 - (-3) = 5$
- Composante verticale: $-1 - 2 = -3$
- $\vec{CD} = (5, -3)$

Qu'un vecteur soit représenté ou non dans un repère cartésien, il est possible de déduire la norme et l'orientation de ce vecteur à partir de ses composantes, et vice versa.

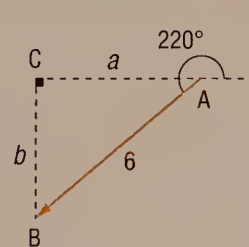
Ex. : 1)



D'après le graphique ci-dessus, $\vec{w} = (3, 6)$ et on a :

- $\|\vec{w}\| = \sqrt{3^2 + 6^2}$,
soit $\approx 6,71$
- $\theta = \arctan \frac{6}{3}$, soit $\approx 63,43^\circ$

2)



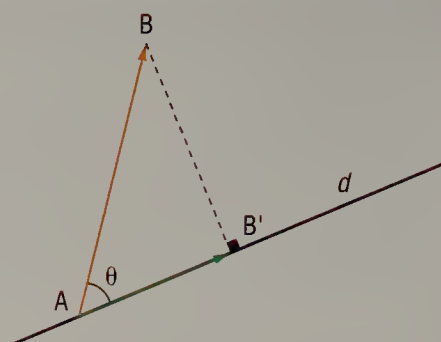
L'orientation du vecteur représenté ci-dessus permet de déduire que $a < 0$ et $b < 0$.
On a donc :

- $m\angle CAB = 220^\circ - 180^\circ = 40^\circ$
- $a = -(6 \times \cos 40^\circ)$, soit $\approx -4,6$
- $b = -(6 \times \sin 40^\circ)$, soit $\approx -3,86$

On en déduit que $\vec{AB} \approx (-4,6, -3,86)$.

PROJECTION D'UN VECTEUR

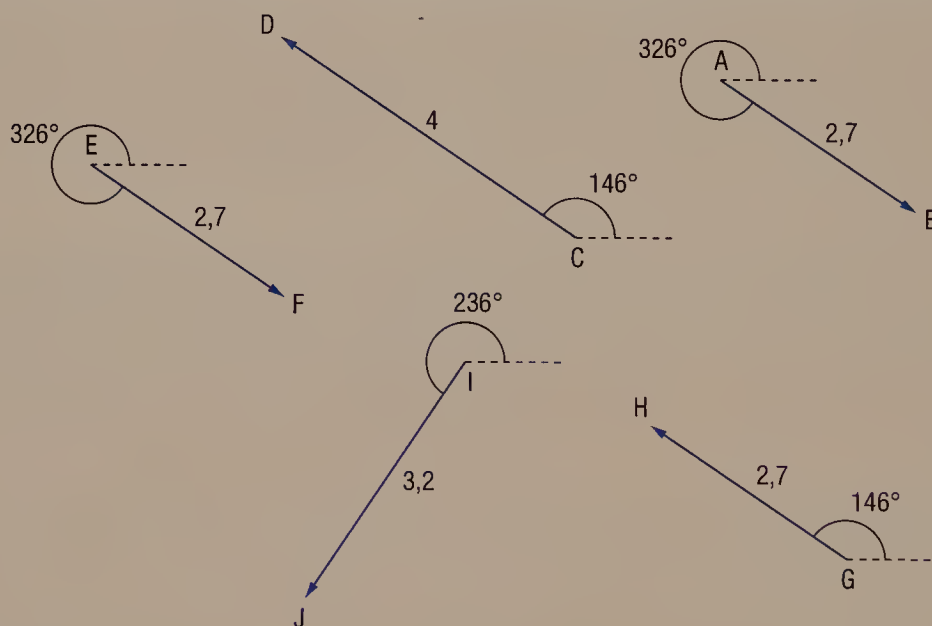
La projection d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur une droite d passant par A est le vecteur $\overrightarrow{AB'}$, où B' est le **projeté orthogonal** de B sur la droite d . On dit que $\overrightarrow{AB'}$ correspond à la projection orthogonale de $\overrightarrow{AB}$ sur la droite d .



RELATIONS ENTRE LES VECTEURS

- Deux vecteurs qui ont la même norme et la même orientation ou qui ont les mêmes composantes sont dits **équipollents**.
- Deux vecteurs de même norme, de même direction, mais de sens contraire sont dits **opposés**. Le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ est noté $-\overrightarrow{AB}$ et on a $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
- Deux vecteurs de même direction sont dits **colinéaires** ou **linéairement dépendants**.
- Deux vecteurs supportés par deux droites perpendiculaires sont dits **orthogonaux**.

Ex. :



Parmi les vecteurs illustrés ci-dessus, on a :

Vecteurs équipollents	Vecteurs opposés	Vecteurs colinéaires	Vecteurs orthogonaux
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GH}$ $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$	$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$ $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{IJ}$ $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{IJ}$ $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{IJ}$

1 Déterminez si le nombre qui se trouve dans chacun des énoncés suivants est associé à une grandeur scalaire ou à une grandeur vectorielle.

- Cet avion a parcouru 200 km en direction de Québec.
- Cet ordinateur a coûté 800 \$.
- Le vent souffle du sud-est à 30 km/h.
- Un objet métallique est attiré vers un aimant avec une force de 0,4 N.
- La température extérieure est de 25 °C.

2 Dans chaque cas, représentez graphiquement le vecteur en tenant compte de l'échelle indiquée.

a) $\|\vec{v}\| = 15 \text{ m/s}$
Orientation: 30°
Échelle: 1 cm $\hat{=}$ 3 m/s

b) $\|\vec{CD}\| = 7 \text{ km/h}$
Orientation: 300°
Échelle: 1 cm $\hat{=}$ 1 km/h

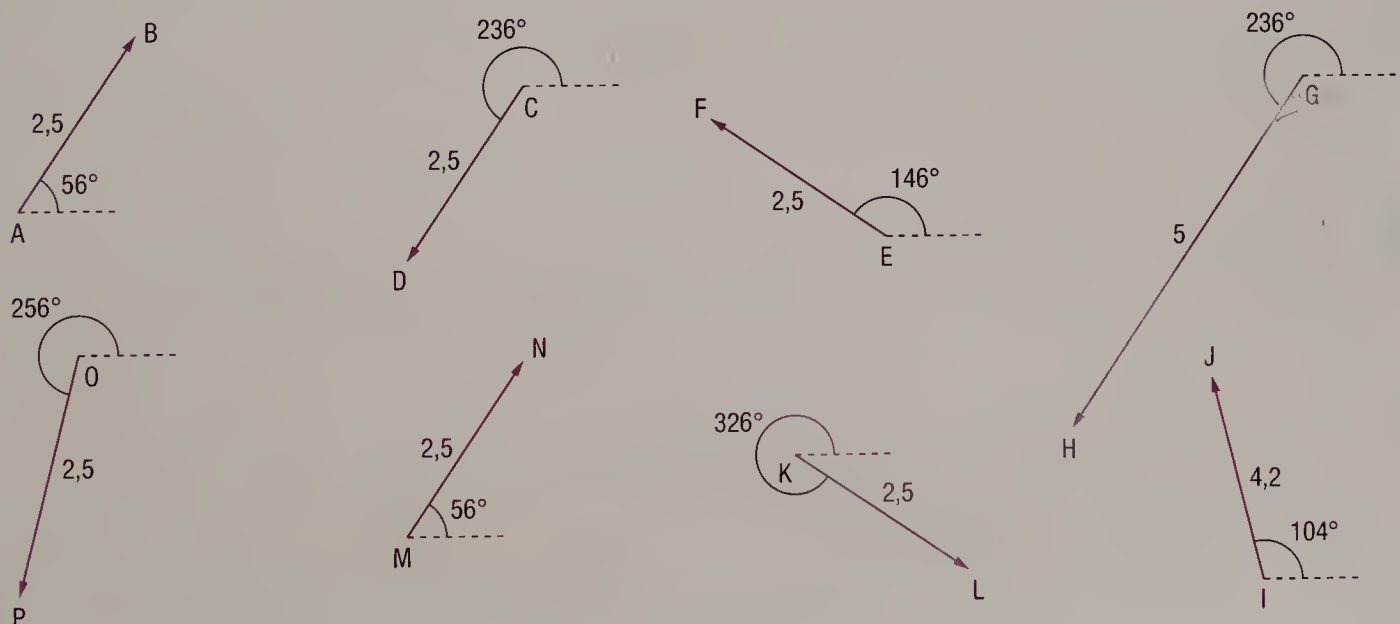
c) $\|\vec{AB}\| = 12 \text{ km}$
Orientation: 195°
Échelle: 1 cm $\hat{=}$ 4 km

d) $\|\vec{w}\| = 240 \text{ N}$
Orientation: 122°
Échelle: 1 cm $\hat{=}$ 40 N

e) $\|\vec{NM}\| = 0,5 \text{ mm}$
Orientation: 45°
Échelle: 1 cm $\hat{=}$ 0,1 mm

f) $\|\vec{f}\| = 4 \text{ kN}$
Orientation: 270°
Échelle: 1 cm $\hat{=}$ 0,5 kN

3 Voici quelques vecteurs:

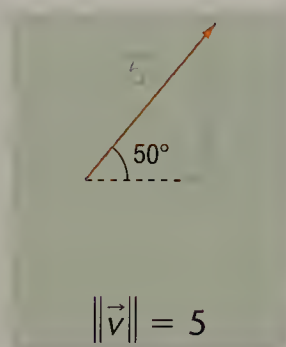


- Parmi tous ces vecteurs, nommez une paire de vecteurs:
 - équipollents;
 - orthogonaux.
- Déterminez tous les vecteurs colinéaires au vecteur GH.
- Indiquez deux paires de vecteurs opposés.

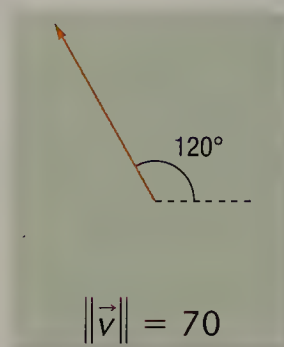
4

Dans chaque cas, déterminez les composantes du vecteur représenté.

a)



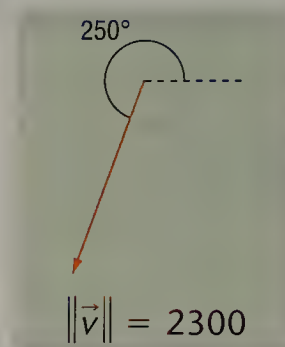
b)



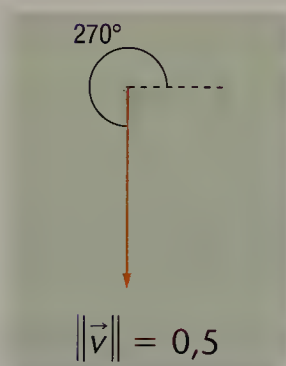
c)



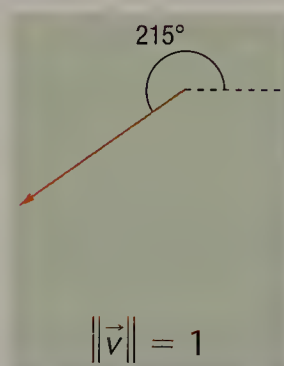
d)



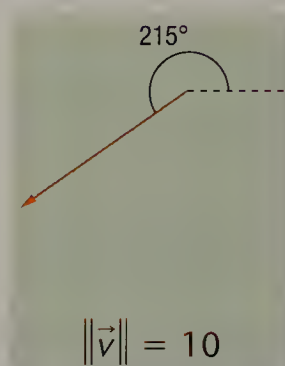
e)



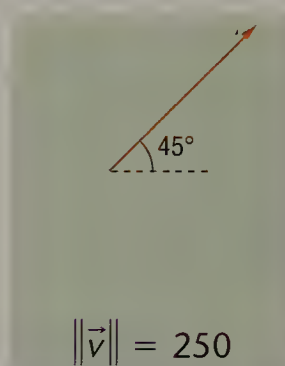
f)



g)



h)



5

Déterminez la norme et l'orientation de chacun des vecteurs suivants.

a) $\vec{v} = (1, 1)$

b) $\vec{w} = (3, 6)$

c) $\vec{u} = (10, 5)$

d) $\vec{s} = (-2, 12)$

e) $\vec{t} = (-4, -7)$

f) $\vec{m} = (1, 5, -9)$

g) $\vec{n} = (-0, 1, 1)$

h) $\vec{o} = (0, -6)$

i) $\vec{p} = (-3, 3)$

j) $\vec{e} = (100, -19)$

k) $\vec{c} = (-3, 0)$

l) $\vec{h} = (-8, -7)$

6

Si M est le point milieu du segment AB, quelle est la relation entre :

a) $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$?

b) $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MB}$?

c) $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$?

7

Déterminez les composantes d'un vecteur unitaire dont l'orientation est de :

a) 90°

b) 180°

c) 225°

d) 30°

e) 60°

8

Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont des vecteurs unitaires?

A $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

B $\vec{w} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

C $\vec{u} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{7}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

D $\vec{s} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

9

Les composantes du vecteur AB sont (8, -7) et celles du vecteur CD sont (-11, 15). Déterminez la norme et l'orientation de :

a) $\overrightarrow{BA}$

b) $-\overrightarrow{CD}$

10 Voici les composantes de sept vecteurs :

$$\vec{m} = (2, -3)$$

$$\vec{n} = (-6, 12)$$

$$\vec{t} = (2, -8)$$

$$\vec{u} = (-2, 3)$$

$$\vec{w} = (4, -6)$$

$$\vec{s} = (-1, 4)$$

$$\vec{v} = (-4, 6)$$

- Représentez ces vecteurs dans un même plan cartésien.
- Déterminez la norme et l'orientation de chaque vecteur.
- Parmi ces vecteurs, lesquels sont :
 - opposés?
 - colinéaires?
- Quelle conjecture pouvez-vous émettre quant aux composantes de deux vecteurs :
 - opposés?
 - colinéaires?

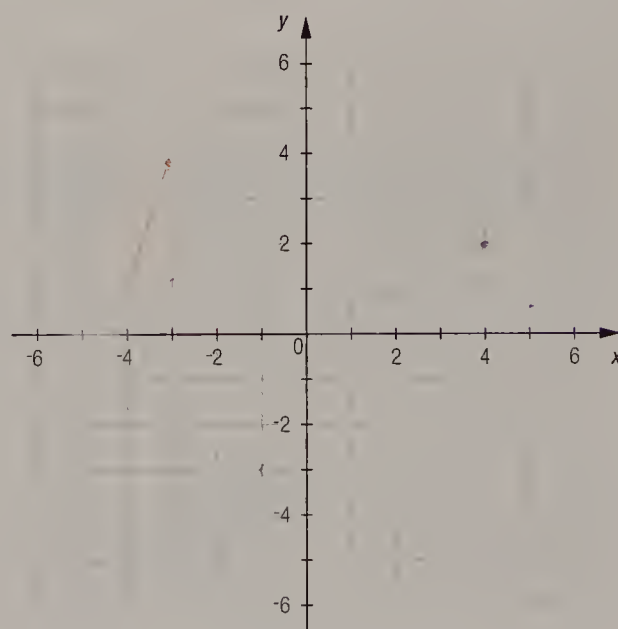
11 Les composantes du vecteur u sont (a, b) et celles du vecteur v sont $(-b, a)$.

- Déterminez l'expression algébrique qui correspond à la pente de la droite :
 - qui supporte le vecteur u ;
 - qui supporte le vecteur v .
- Comparez les résultats obtenus en a). Que remarquez-vous?
- Que peut-on dire de l'orientation du vecteur v par rapport à celle du vecteur u ? Expliquez votre réponse.



12 Dans le plan cartésien ci-contre, représentez :

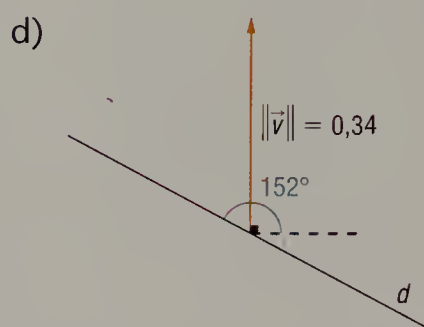
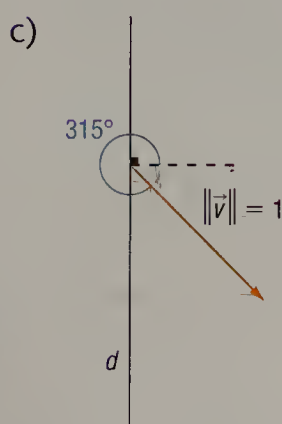
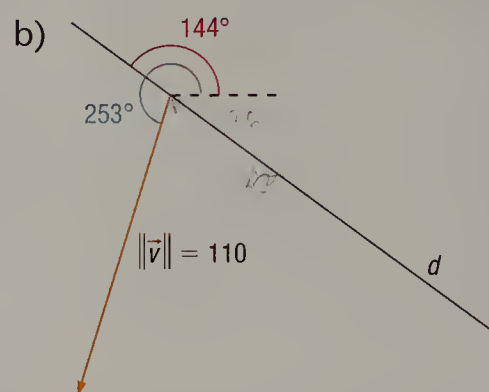
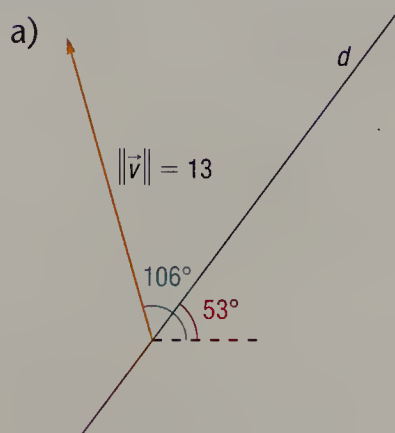
- un vecteur v qui est colinéaire au vecteur u et dont les coordonnées de l'origine sont $(4, 2)$;
- le vecteur w qui est équipollent au vecteur u et dont les coordonnées de l'origine sont $(2, 1)$;
- un vecteur p qui est orthogonal au vecteur u et dont les coordonnées de l'extrémité sont $(-2, -2)$;
- le vecteur q qui est équipollent au vecteur $-u$ et dont les coordonnées de l'origine sont $(0, 0)$;
- le vecteur o dont les composantes sont $(-2, 5)$ et dont l'origine est située à l'extrémité du vecteur q .



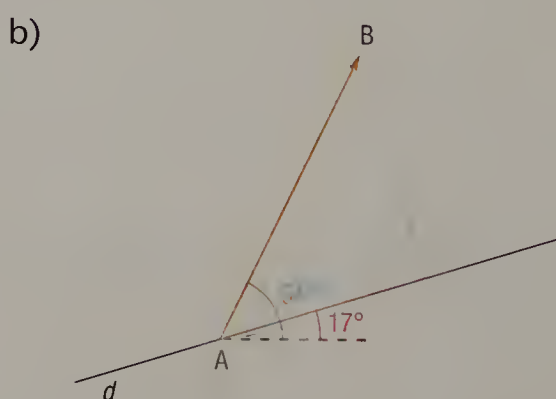
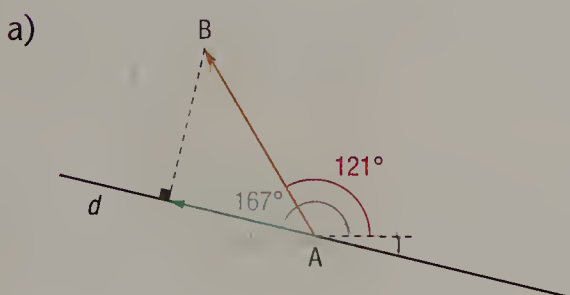
13 Les composantes d'un vecteur sont positives et entières. De plus, sa composante verticale correspond au double de sa composante horizontale.

- Quelle est l'orientation de ce vecteur?
- Démontrez que la norme de ce vecteur est un multiple de $\sqrt{5}$.
- Que peut-on dire des composantes d'un vecteur orthogonal à ce vecteur?

- 14** Dans chaque cas, calculez la norme du vecteur obtenu par la projection du vecteur $\vec{v}$ sur la droite d .



- 15** Dans chaque cas, déterminez les composantes de $\vec{AB}$ sachant que la norme du vecteur obtenu par la projection de $\vec{AB}$ sur d est de 10 unités.



- 16** Dans un plan cartésien, les composantes du vecteur $\vec{v}$ sont $(4, 6)$. Déterminez les composantes du vecteur obtenu par la projection de $\vec{v}$ sur une droite:

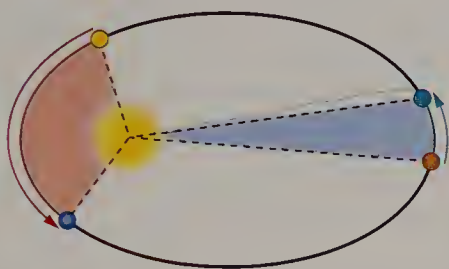
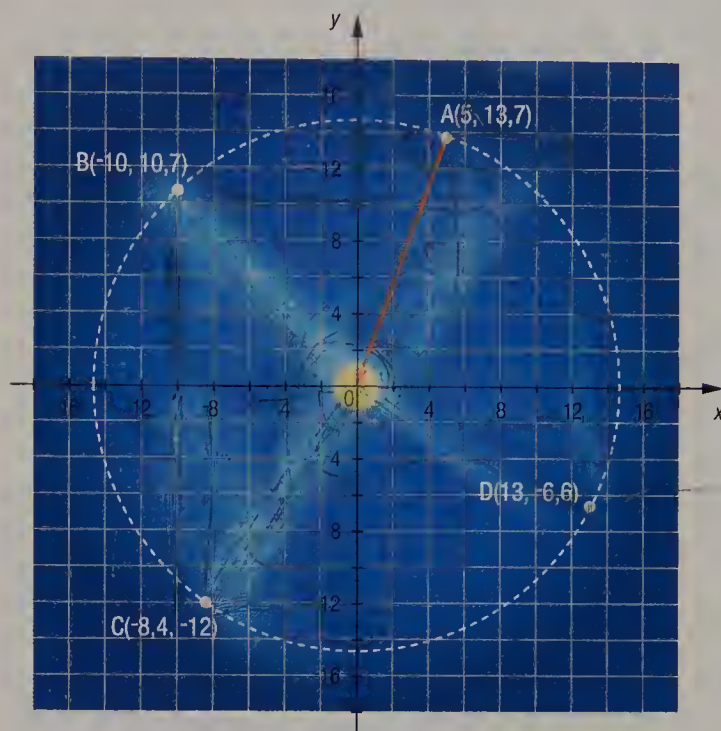
- dont l'orientation est de 30° ;
- dont la pente est de $\frac{2}{3}$;
- qui passe par les points $A(-1, 2)$ et $B(5, -1)$.

17 RAYON VECTEUR En astronomie, le rayon vecteur est le vecteur qui relie le centre d'une planète au centre de son soleil. Le graphique ci-contre illustre cette situation pour la planète Terre. Les graduations sont en millions de kilomètres.

a) Calculez la norme et l'orientation du rayon vecteur lorsque la Terre est située au point:

- | | |
|------|------|
| 1) A | 2) B |
| 3) C | 4) D |

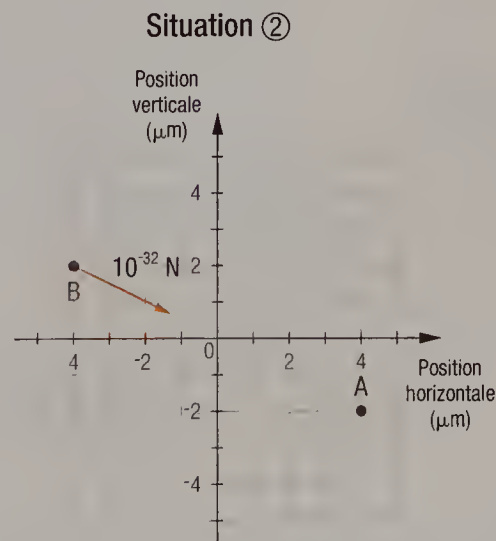
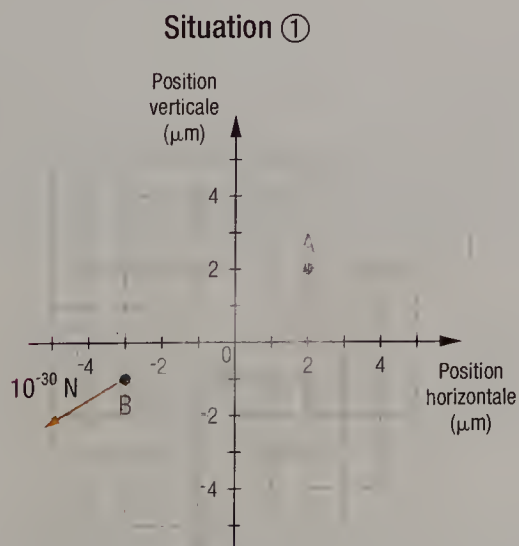
b) Quelles sont les coordonnées de la Terre lorsque le rayon vecteur a une orientation de 30° ?



L'une des lois de Kepler stipule que, pour un objet qui gravite autour d'un autre, le rayon vecteur balaye des aires égales en des temps égaux.

18 ACTION RÉACTION Le principe d'action réaction veut que toute particule A qui exerce une force sur une particule B subit de la part de la particule B une force d'intensité égale, de même direction, mais de sens contraire.

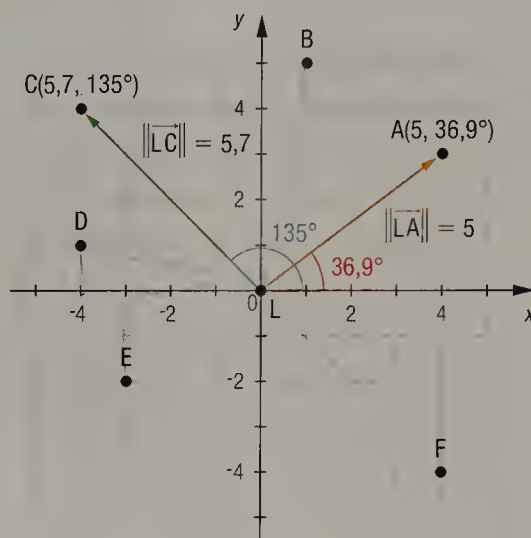
Les graphiques suivants illustrent le principe d'action réaction pour deux particules chargées électriquement. Les forces ainsi créées ont la même direction que la droite qui supporte les deux particules.



Pour chacun de ces graphiques, déterminez la norme et l'orientation de la force subie par la particule A.

19

COORDONNÉES POLAIRES Dans certains contextes, il est avantageux de transformer les coordonnées cartésiennes (x, y) d'un point P en coordonnées polaires (r, θ) , où r représente la norme du vecteur qui relie l'origine du plan cartésien au point P et θ , l'orientation de ce vecteur. Dans le graphique ci-dessous, les coordonnées des points A et C sont exprimées en coordonnées polaires.

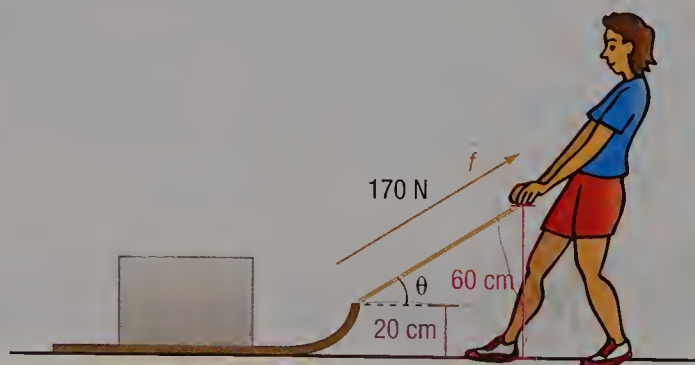


En sciences, on utilise souvent des coordonnées sphériques pour traiter des situations en lien avec le champ gravitationnel terrestre. Il existe aussi, en trois dimensions, des systèmes de coordonnées rectangulaires et cylindriques.

- Trouvez les coordonnées polaires des points B, D, E et F.
- Les coordonnées polaires du point H sont $(3, 145^\circ)$. Déterminez les coordonnées cartésiennes de ce point.

20

Une corde de 70 cm de long est attachée à l'extrémité d'un traîneau. Lorsqu'on le tire, l'orientation de la force exercée est identique à l'inclinaison de la corde. Seule la projection orthogonale de $\vec{f}$ sur une droite parallèle au sol engendre un déplacement horizontal du traîneau. Le schéma ci-dessous illustre cette situation pour une personne qui tire ce traîneau.



- Déterminez la force qui engendre un déplacement horizontal du traîneau.
- À quelle hauteur faut-il placer les mains pour que la force qui engendre le déplacement horizontal du traîneau soit égale à la force exercée sur la corde? Expliquez votre réponse.

SECTION 4.2

Les opérations sur les vecteurs

Cette section est en lien avec la SAÉ 7.

PROBLÈME La course d'orientation



Une course d'orientation est une activité qui met à profit les capacités des participants à utiliser une carte topographique et une boussole pour se repérer. Les participants doivent accéder le plus rapidement possible à des balises disposées à divers endroits dans une région et poinçonner une carte de contrôle à chaque balise. Sur une boussole, les angles sont mesurés en degrés dans le sens horaire par rapport au nord.

Lors d'une course d'orientation, Amélie reçoit les instructions suivantes.

Instructions pour se rendre à la balise A

À partir du point de départ, vous devez:

- 1) vous déplacer de 1500 m en direction S.-S.-O.;
- 2) vous diriger en direction N. sur 800 m;
- 3) bifurquer en direction N.-O. et avancer de 2000 m;
- 4) vous déplacer de 300 m en direction ouest.



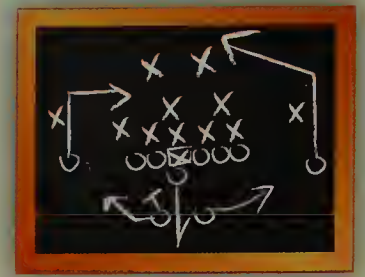
Le carré orange et blanc est le symbole international qui sert à marquer les balises d'une course d'orientation.

Pour gagner du temps, Amélie cherche un trajet qui lui permettrait d'atteindre directement la balise à partir du point de départ.

Déterminez la distance qu'Amélie doit parcourir et la mesure de l'angle qu'elle doit donner à sa boussole pour atteindre directement la balise A.

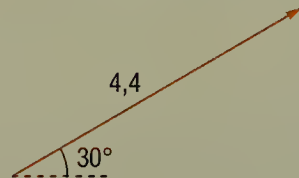
ACTIVITÉ 1 Le football

Au football, les déplacements de chacun des joueurs au cours d'un jeu sont prédéfinis. Il est possible de représenter ces jeux par des schémas semblables à celui illustré ci-contre.

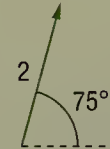


Les vecteurs ci-dessous représentent deux déplacements successifs (en dam) d'un receveur de passes.

Premier déplacement



Second déplacement



Trois personnes tentent de représenter le déplacement résultant du receveur de passes par un seul vecteur rose. Voici les trois schémas obtenus :

Schéma ①

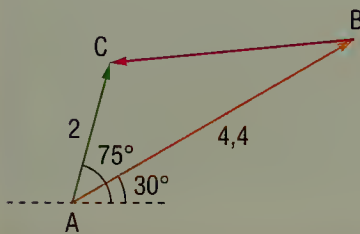


Schéma ②

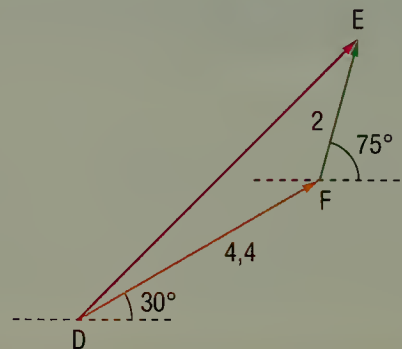
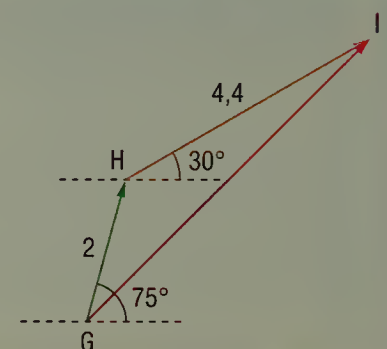


Schéma ③



a. Expliquez pourquoi :

- 1) le schéma ① ne représente pas le déplacement résultant du receveur de passes ;
- 2) le schéma ② représente le déplacement résultant du receveur de passes.

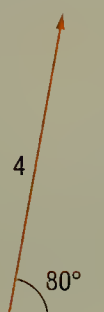
b. À partir du schéma ②, déterminez :

- 1) la mesure de l'angle DFE ;
- 2) la norme du vecteur DE ;
- 3) l'orientation du vecteur DE.

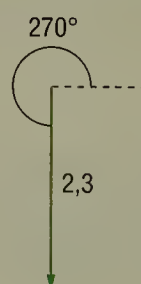
c. Démontrez que le déplacement résultant du schéma ③ est le même que celui du schéma ②.

d. Les vecteurs ci-dessous représentent trois déplacements successifs (en dam) d'un autre joueur. Représentez graphiquement le vecteur qui correspond au déplacement résultant de ce joueur.

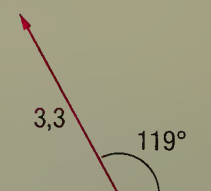
Premier déplacement



Deuxième déplacement



Troisième déplacement



ACTIVITÉ 2 La pyramide de Khéops

Certains historiens croient que les Égyptiens ont eu recours à un plan incliné dans le but de monter de gros blocs de pierre pour ériger la pyramide de Khéops.

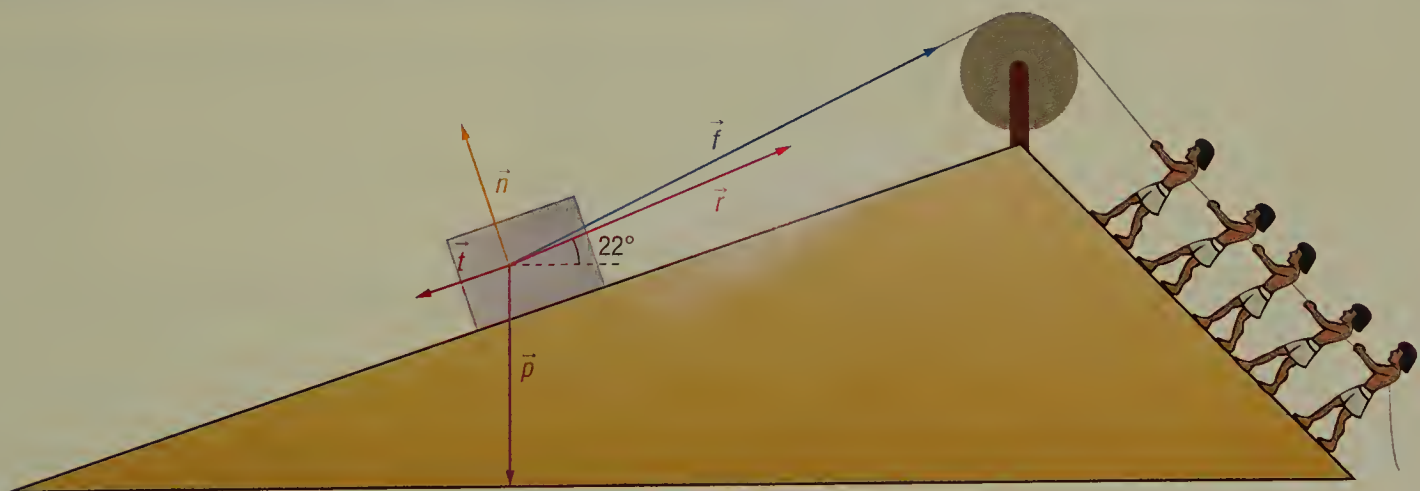
À l'époque de sa construction, la pyramide de Khéops s'élevait à une hauteur de 146 m. Plus de 2 millions de blocs de calcaire, d'un poids moyen de 2,5 tonnes chacun, ont été nécessaires pour ériger cette pyramide.



Le schéma ci-dessous fournit des renseignements concernant les forces (en kN) exercées sur un bloc de pierre. Sur ce schéma, le vecteur r représente la force résultante qui correspond à la somme de toutes les autres forces qui interviennent dans cette situation.

- Poids du bloc: $\vec{p} = (0, -2, 1)$
- Force normale: $\vec{n} = (-0,5, 1,4)$
- Force de frottement: $\vec{t} = (-0,9, -0,3)$
- Force appliquée par les travailleurs: $\vec{f} = (4,4, 2,2)$
- Force résultante: $\|\vec{r}\| \approx 3,2$

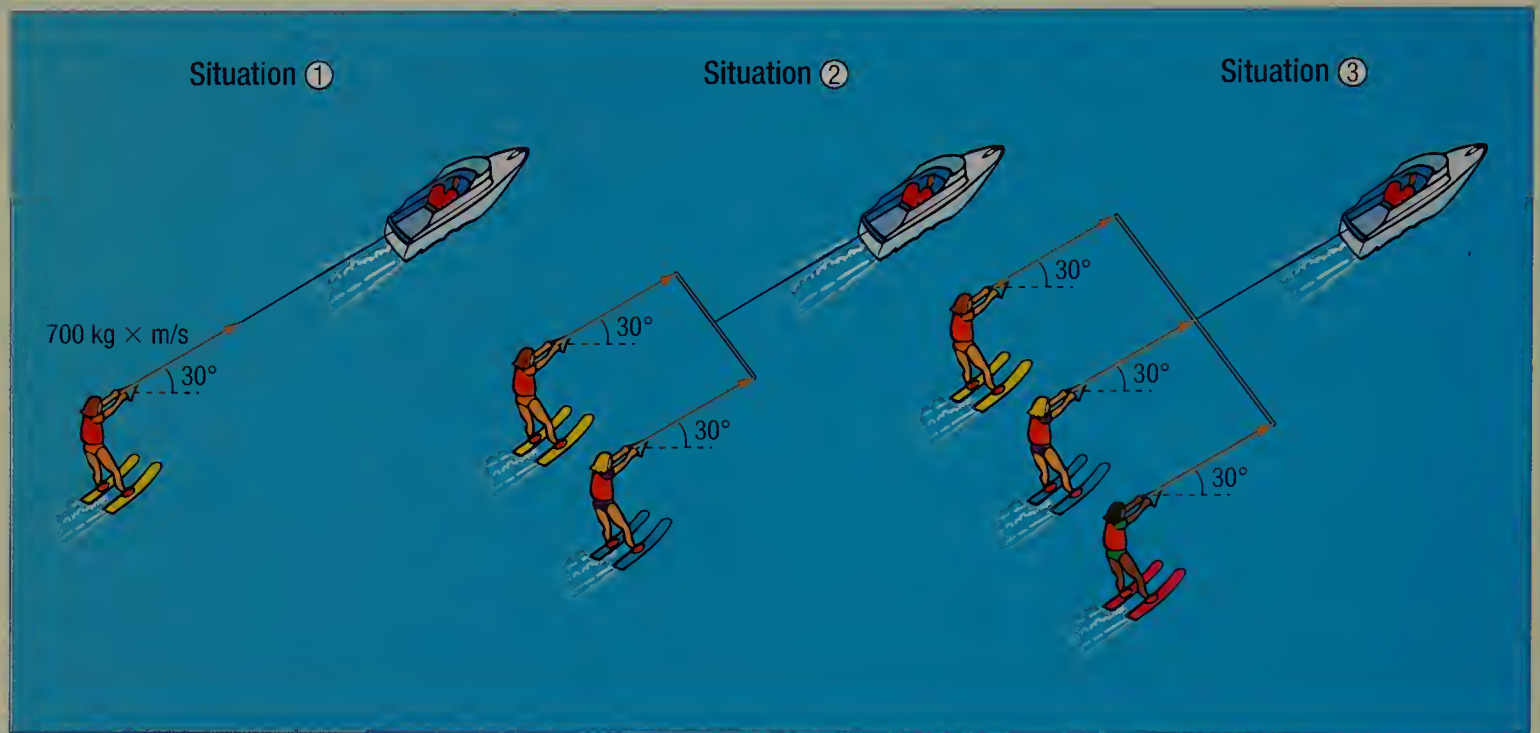
Lorsque deux objets sont placés l'un sur l'autre, la force normale est la force qu'exerce l'objet A sur l'objet B en réaction à la force exercée par l'objet B sur l'objet A. Sans cette force, les objets s'enfonceraient les uns dans les autres.



- Déterminez les composantes du vecteur r .
- Additionnez les composantes horizontales des vecteurs p , n , t et f .
 - Comparez la somme obtenue avec la composante horizontale du vecteur r . Que remarquez-vous?
- Additionnez les composantes verticales des vecteurs p , n , t et f .
 - Comparez la somme obtenue avec la composante verticale du vecteur r . Que remarquez-vous?
- Quelle conjecture pouvez-vous émettre quant aux composantes d'un vecteur résultant de l'addition de plusieurs vecteurs?

ACTIVITÉ 3 Le ski nautique

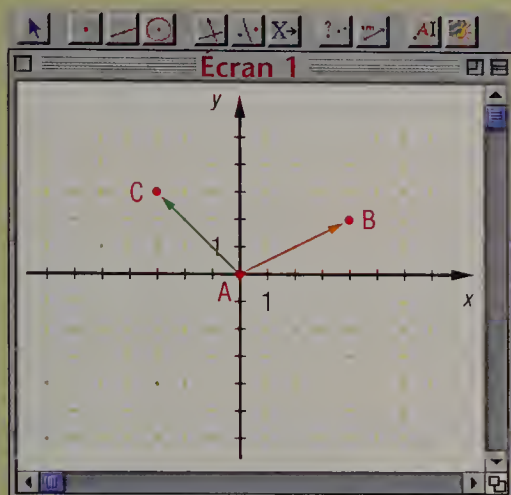
Lorsqu'une personne se déplace, elle possède une certaine quantité de mouvement (en $\text{kg} \times \text{m/s}$) liée à sa vitesse et à sa masse. Dans les schémas ci-dessous, la quantité de mouvement d'un skieur ou d'une skieuse est représentée par un vecteur orange. Tous les skieurs possèdent la même quantité de mouvement.



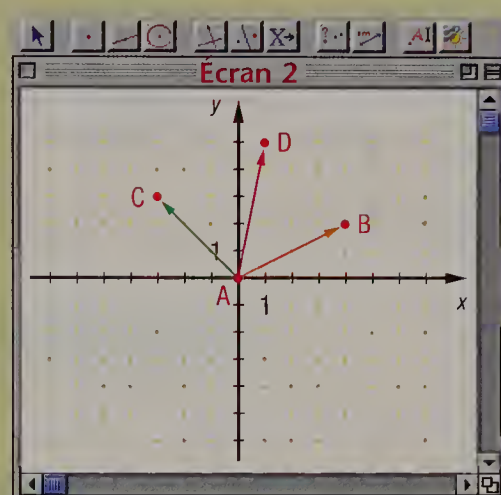
- a. Si la quantité de mouvement du skieur dans la situation ① correspond à $\vec{p}$:
 - 1) exprimez, sous la forme d'une somme, la quantité de mouvement totale des skieurs :
 - i) dans la situation ②;
 - ii) dans la situation ③.
 - 2) exprimez, sous la forme d'un produit, la quantité de mouvement totale des skieurs :
 - i) dans la situation ②;
 - ii) dans la situation ③.
 - 3) déterminez la norme et l'orientation du vecteur qui correspond à la quantité de mouvement totale des skieurs :
 - i) dans la situation ②;
 - ii) dans la situation ③.
- b. Lorsqu'un vecteur est multiplié par un scalaire strictement positif, quelle conjecture pouvez-vous émettre au sujet de :
 - 1) l'orientation du vecteur obtenu?
 - 2) la norme du vecteur obtenu?
- c. Déterminez les composantes du vecteur qui correspond à :
 - 1) la quantité de mouvement du skieur dans la situation ①;
 - 2) la quantité de mouvement totale des skieurs dans la situation ②;
 - 3) la quantité de mouvement totale des skieurs dans la situation ③.
- d. À l'aide des résultats obtenus en c, confirmez ou infirmez la conjecture suivante.

Multiplier un vecteur par un scalaire revient à multiplier chaque composante de ce vecteur par ce scalaire.

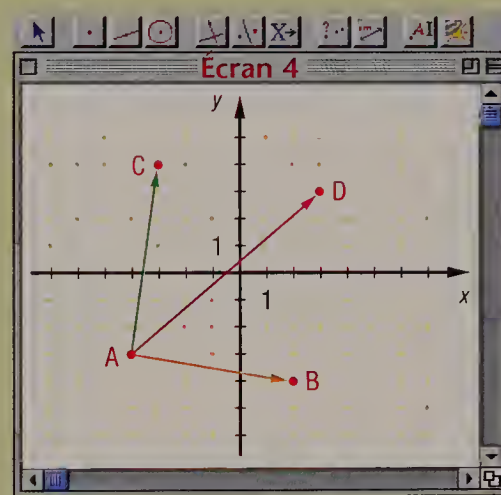
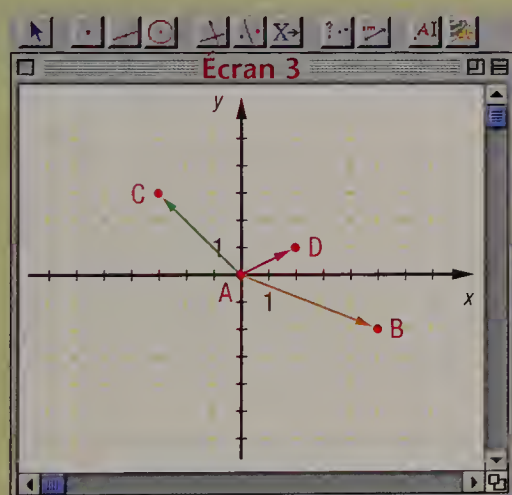
Un logiciel de géométrie dynamique permet d'effectuer des opérations sur des vecteurs. En utilisant principalement les outils MONTRER LES AXES, GRILLE, VECTEUR et SOMME VECTORIELLE, il est possible d'additionner des vecteurs.



L'outil SOMME VECTORIELLE permet d'additionner des vecteurs en sélectionnant les vecteurs à additionner et en spécifiant l'origine du vecteur résultant.



En déplaçant l'origine ou l'extrémité des vecteurs AB et AC, on observe certains changements liés aux composantes du vecteur AD.



- À l'écran 2, quelles sont les composantes du vecteur :
1) AB? 2) AC? 3) AD?
- À l'écran 3, quelles sont les composantes du vecteur :
1) AB? 2) AC? 3) AD?
- À la suite des résultats obtenus aux questions précédentes, quelle conjecture pouvez-vous émettre quant aux composantes du vecteur résultant de la somme de deux autres vecteurs?
- Vérifiez si cette conjecture s'applique aux vecteurs de l'écran 4.
- À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, représentez dans un même plan cartésien :
 - le vecteur AB qui commence à l'origine du plan cartésien et dont les composantes sont (3, 5);
 - le vecteur AC dont les composantes sont (-2, -4);
 - le vecteur AD résultant de la somme des vecteurs AB et AC;
 - le vecteur CE résultant de la somme des vecteurs AB et AD.

ADDITION ET SOUSTRACTION DE VECTEURS

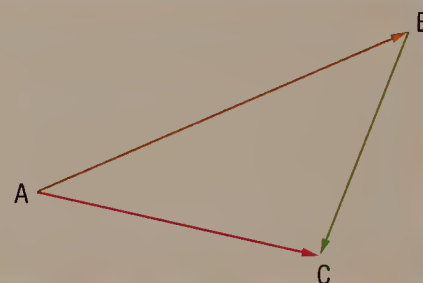
Il est possible d'additionner et de soustraire des vecteurs entre eux. Il en résulte un vecteur. Soustraire un vecteur revient à additionner le vecteur opposé.

La relation de Chasles

La relation de Chasles stipule que si A, B et C sont trois points du plan, alors :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Ex. :



Constructions géométriques

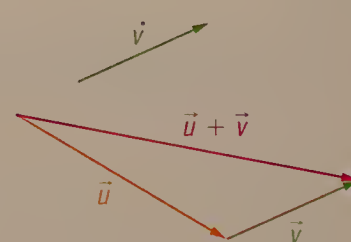
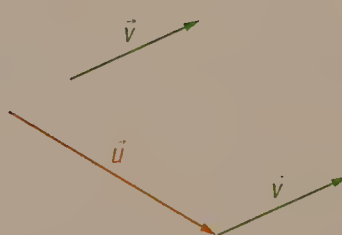
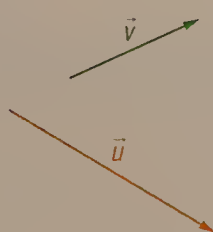
Lorsque des vecteurs sont représentés dans un plan, il est possible de déterminer géométriquement la somme de ces vecteurs en les plaçant bout à bout. Le vecteur résultant de la somme est alors défini par l'origine du premier vecteur et par l'extrémité du dernier vecteur.

Ex. :

1) On veut représenter $\vec{u} + \vec{v}$.

On reproduit le vecteur $\vec{v}$ de façon à ce que son origine coïncide avec l'extrémité du vecteur $\vec{u}$.

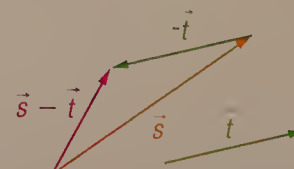
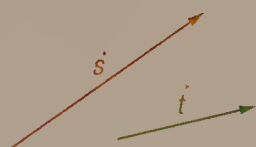
Le vecteur somme est défini par l'origine du vecteur $\vec{u}$ et l'extrémité du vecteur $\vec{v}$.



2) On veut représenter $\vec{s} - \vec{t}$.

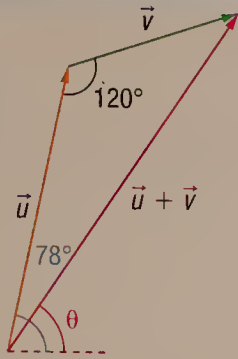
On représente le vecteur opposé au vecteur $\vec{t}$ de façon à ce que son origine coïncide avec l'extrémité du vecteur $\vec{s}$.

Le vecteur somme est défini par l'origine du vecteur $\vec{s}$ et l'extrémité du vecteur $-\vec{t}$.



Certaines relations métriques et trigonométriques dans les triangles permettent de déterminer la norme et l'orientation d'un vecteur somme.

Ex.:



Dans l'illustration ci-contre, $\|\vec{u}\| = 6$ et $\|\vec{v}\| = 4$.

- Par la loi des cosinus:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \cos 120^\circ}, \text{ soit } \approx 8,72.$$
- Par la loi des sinus:

$$\theta \approx 78^\circ - \arcsin \frac{4 \times \sin 120^\circ}{8,72}, \text{ soit } \approx 54,59^\circ.$$

Manipulations algébriques

Pour $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$, les relations suivantes permettent de calculer les composantes du vecteur résultant de la somme ou de la différence de ces deux vecteurs.

$$\vec{u} + \vec{v} = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$$

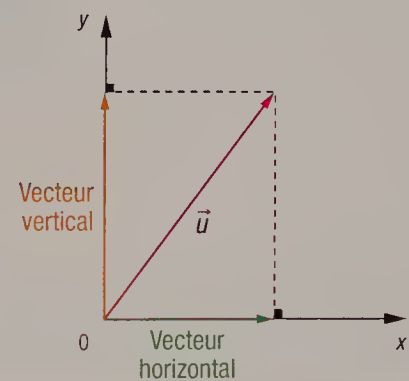
Ex.: Si $\vec{u} = (2, 3)$ et $\vec{v} = (-1, 5)$, alors:

- $\vec{u} + \vec{v} = (2, 3) + (-1, 5) = (2 + -1, 3 + 5) = (1, 8)$
- $\vec{u} - \vec{v} = (2, 3) - (-1, 5) = (2 - -1, 3 - 5) = (3, -2)$

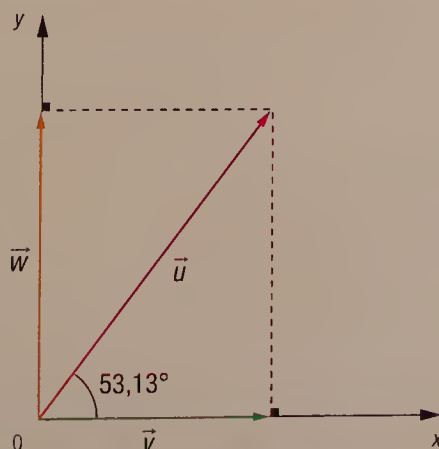
Décomposition de vecteurs dans le plan cartésien

Un vecteur u peut-être décomposé en une somme d'un vecteur horizontal et d'un vecteur vertical. Graphiquement, le vecteur horizontal et le vecteur vertical correspondent aux projections orthogonales du vecteur u sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

Décomposition du vecteur u



Ex.: Décomposition du vecteur u dont la norme est 5:



- $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont les projections de $\vec{u}$ sur les axes.
- $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$
- $\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cos 53,13^\circ = 5 \cos 53,13^\circ, \text{ soit } \approx 3.$
- $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \sin 53,13^\circ = 5 \sin 53,13^\circ, \text{ soit } \approx 4.$
- Puisque les normes des vecteurs v et w correspondent aux composantes de $\vec{u}$, on a $\vec{u} \approx (3, 4)$.

MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN SCALAIRE

Lorsqu'on additionne un vecteur à lui-même un certain nombre de fois, cela revient à multiplier ce vecteur par un scalaire.

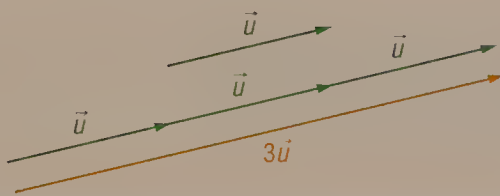
$$\underbrace{\vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \dots + \vec{u}}_{k \text{ fois}} = k\vec{u}$$

On convient que $1\vec{u} = \vec{u}$, $-1\vec{u} = -\vec{u}$, $0\vec{u} = \vec{0}$ et $k\vec{0} = \vec{0}$.

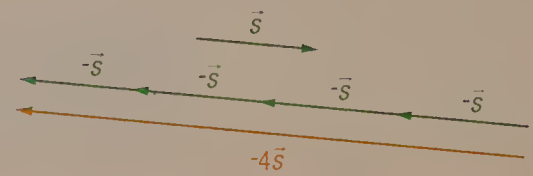
Constructions géométriques

Il est possible de représenter géométriquement la multiplication d'un vecteur par un scalaire en additionnant ce vecteur à lui-même autant de fois qu'il est nécessaire.

Ex.: 1) On veut représenter $3\vec{u}$:



2) On veut représenter $-4\vec{s}$:



Manipulations algébriques

Multiplier un vecteur par un scalaire revient à multiplier chacune des composantes de ce vecteur par ce scalaire.

$$\text{Si } \vec{u} = (a, b), \text{ alors } k\vec{u} = k(a, b) = (ka, kb).$$

$$\text{Ex.: Si } \vec{u} = (2, -4), \text{ alors } 4\vec{u} = (4 \times 2, 4 \times -4) = (8, -16).$$

PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS SUR LES VECTEURS

L'addition de vecteurs possède les propriétés suivantes.

Propriété	Énoncé
Commutativité	$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
Associativité	$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

La multiplication d'un vecteur par un scalaire possède les propriétés suivantes.

Propriété	Énoncé
Associativité	$(k_1 k_2)\vec{u} = k_1(k_2\vec{u})$
Distributivité sur l'addition de vecteurs	$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
Distributivité sur l'addition de scalaires	$(k_1 + k_2)\vec{u} = k_1\vec{u} + k_2\vec{u}$

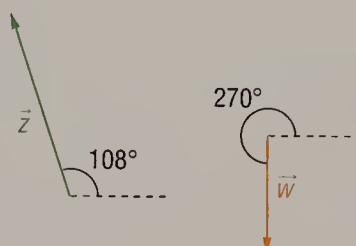


1 Dans chaque cas, représentez le vecteur résultant de la chaîne d'opérations indiquée.

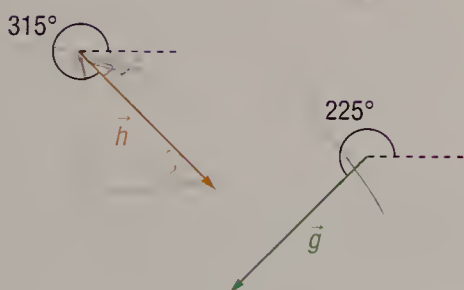
a) $\vec{u} + \vec{v}$



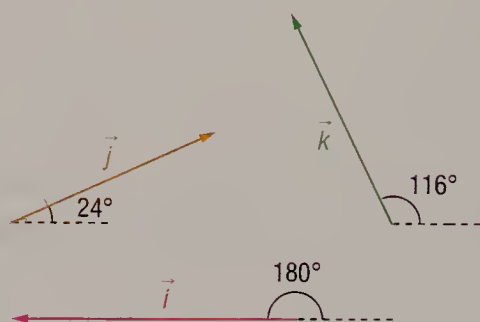
b) $\vec{w} + \vec{z}$



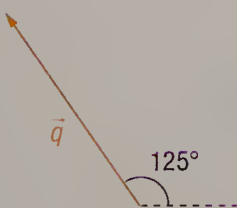
c) $\vec{g} - \vec{h}$



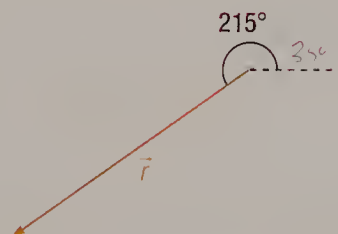
d) $\vec{i} + \vec{k} - \vec{j}$



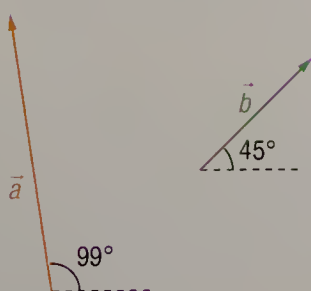
e) $3\vec{q}$



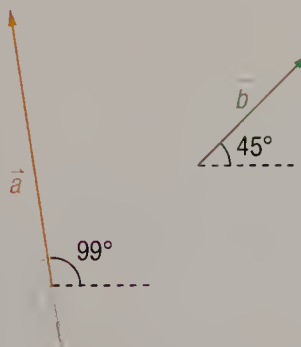
f) $-0,4\vec{r}$



g) $2(\vec{a} + \vec{b})$



h) $-0,5(\vec{a} - \vec{b})$



2 Dans chaque cas, déterminez le vecteur résultant.

a) $\vec{AB} + \vec{BC}$

b) $\vec{BC} - \vec{DC}$

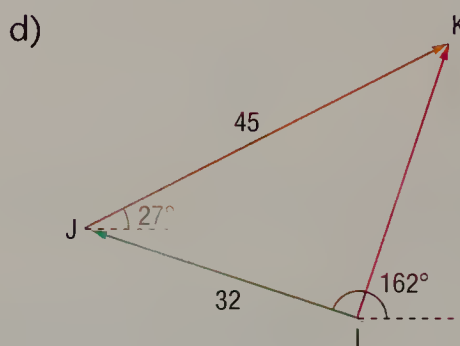
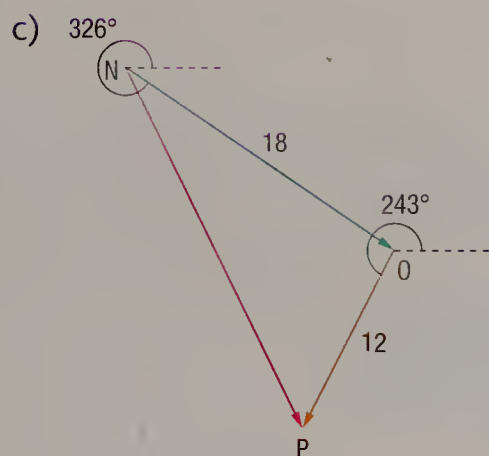
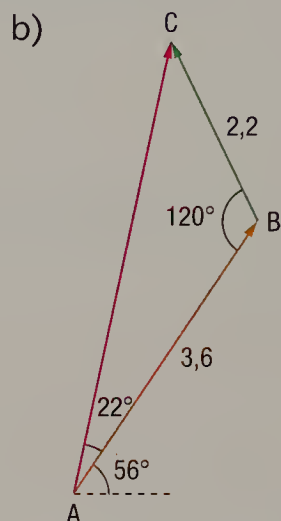
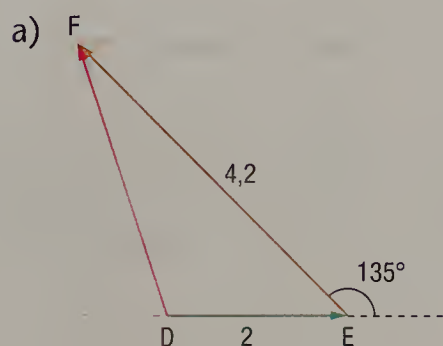
c) $-\vec{CA} + \vec{CB}$

d) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$

e) $\vec{AC} + \vec{DE} - \vec{DC}$

f) $\vec{AE} - \vec{CD} + \vec{ED} - \vec{BC}$

3 Dans chaque cas, déterminez la norme et l'orientation du vecteur somme représenté en rose.



4 Voici trois vecteurs :

$$\vec{u} = (2, 3)$$

$$\vec{v} = (-3, 5)$$

$$\vec{w} = (-1, -7)$$

Dans chaque cas, déterminez les composantes du vecteur résultant.

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{v} - \vec{w}$

c) $\vec{u} + \vec{w}$

d) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

e) $3\vec{u}$

f) $-2\vec{v}$

g) $5(\vec{w} - \vec{u})$

h) $2(-4\vec{w})$

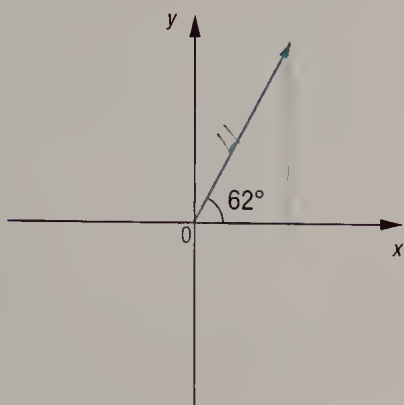
i) $-6(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$

**5**

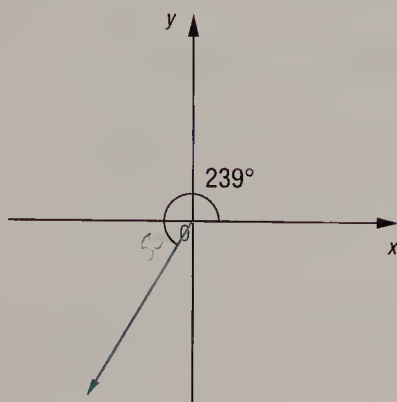
Dans chaque cas :

- 1) effectuez la décomposition du vecteur v ;
- 2) déterminez les composantes du vecteur v .

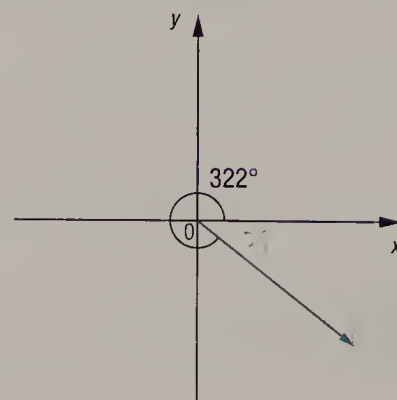
a) $\|\vec{v}\| = 4$



b) $\|\vec{v}\| = 75$



c) $\|\vec{v}\| = 0,18$

**6**Dans chaque cas, calculez les composantes du vecteur s .

a) $(2, -3) + \vec{s} = (-4, 7)$

b) $(-45, -32) - \vec{s} = (1, 1)$

c) $(3, 5) + (9, -2) + \vec{s} = (2, 6)$

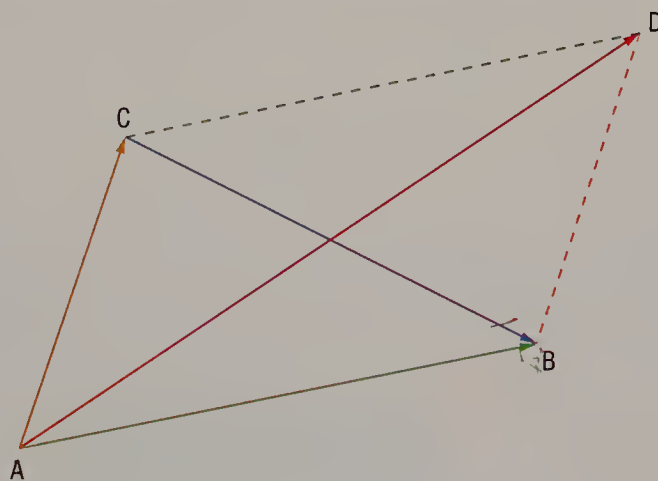
d) $(-11, 8) - (0, -12) = (-4, -1) - \vec{s}$

e) $-0,5\vec{s} = (4, 4) + (5, 5)$

f) $(a, b) + (c, d) + \vec{s} = (0, 0)$

**7**

La somme et la différence de deux vecteurs ayant la même origine peuvent être représentées par les diagonales du parallélogramme tracé à partir de ces vecteurs. Le schéma ci-dessous illustre cette situation pour l'addition et la soustraction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.



a) Justifiez chaque affirmation du raisonnement ci-dessous.

① $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$

② $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

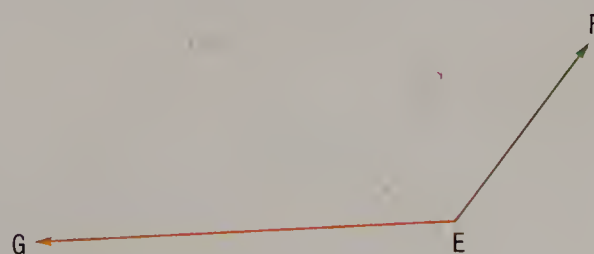
③ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

b) Démontrez que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

c) Sur le schéma ci-contre, représentez le vecteur qui correspond à :

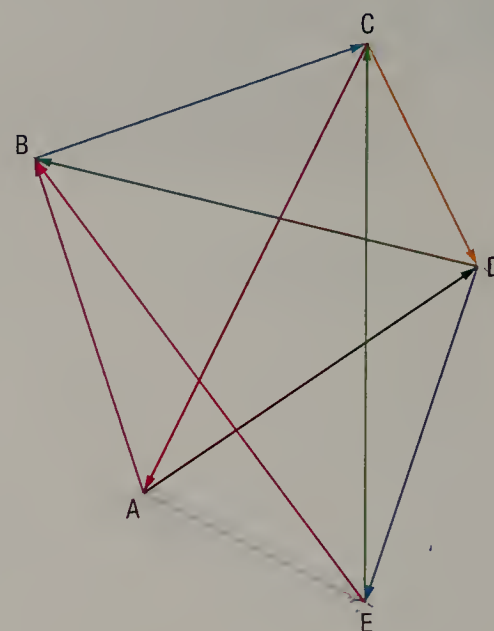
1) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}$

2) $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EG}$

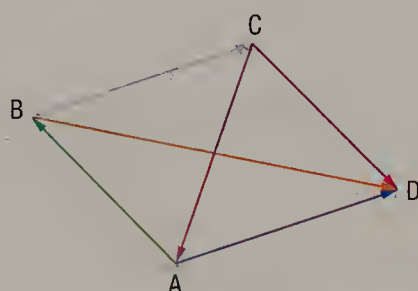


8 En utilisant uniquement les vecteurs représentés ci-contre, écrivez :

- une somme de deux vecteurs qui permet d'obtenir $\vec{DB}$;
- une différence de deux vecteurs qui permet d'obtenir $\vec{DB}$;
- une somme de trois vecteurs qui permet d'obtenir $-\vec{AE}$;
- une somme de vecteurs qui permet d'obtenir le vecteur nul.



9 Le quadrilatère ABCD ci-dessous est un parallélogramme.



Parmi les vecteurs représentés, quel est celui qui correspond à :

- $-(\vec{AB} + \vec{BC})$?
- $-\vec{AB} + \vec{BC}$?
- $\vec{AB} - \vec{BC}$?
- $\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AD}$?

10 a) Sachant qu'un vecteur de la forme $\vec{AA}$ correspond au vecteur nul, montrez que $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{v} = -\vec{AC}$.

b) Déterminez le vecteur $\vec{v}$ qui vérifie l'égalité :

- $\vec{BA} - \vec{BC} + \vec{v} = \vec{0}$
- $\vec{AB} - \vec{v} - \vec{CB} = \vec{0}$
- $-\vec{AB} + \vec{AC} - \vec{DC} + \vec{v} = \vec{0}$

11 Voici trois paires de vecteurs :

① $\vec{u} = (3, 2) \quad \vec{v} = 2\vec{u}$

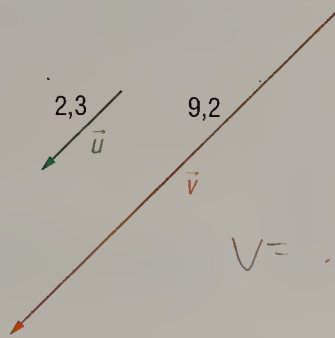
② $\vec{r} = (-1, 4) \quad \vec{p} = -3\vec{r}$

③ $\vec{s} = (-2, -5) \quad \vec{t} = 0,2\vec{s}$

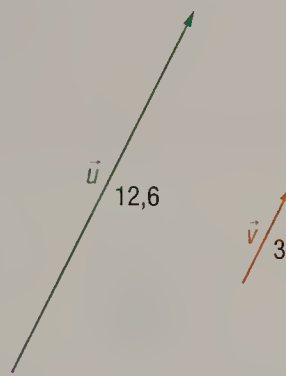
- Déterminez les composantes des vecteurs $\vec{v}$, $\vec{p}$ et $\vec{t}$.
- Déterminez la pente de la droite qui supporte :
 - $\vec{u}$
 - $\vec{v}$
 - $\vec{r}$
 - $\vec{p}$
 - $\vec{s}$
 - $\vec{t}$
- Quelle conjecture pouvez-vous établir concernant la direction de deux vecteurs dont l'un correspond au produit de l'autre par un scalaire? Expliquez votre réponse.
 - Confirmez ou infirmez cette conjecture en déterminant les expressions associées aux pentes des droites qui supportent les vecteurs $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = k\vec{u}$.

- 12** Sachant que les paires de vecteurs représentés ci-dessous sont colinéaires, exprimez le vecteur v sous la forme d'un produit du vecteur u par un scalaire.

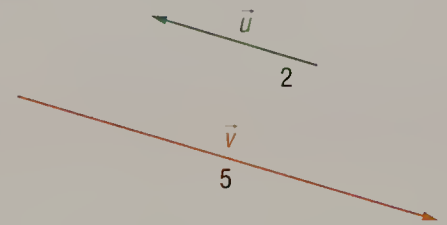
a)



b)

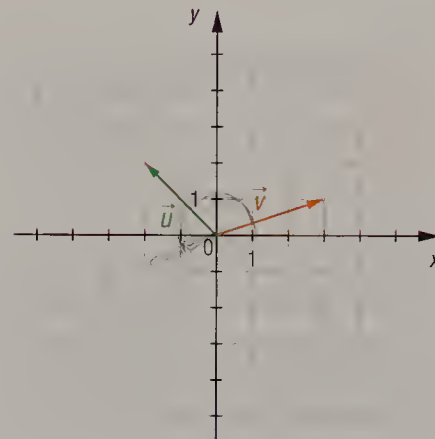


c)



- 13** Dans le plan cartésien ci-contre, représentez un vecteur qui correspond à :

- a) $3\vec{u}$ b) $-2\vec{v}$
c) $4\vec{v}$ d) $2(\vec{u} + \vec{v})$



- 14 COLLISION** Lorsque deux objets A et B entrent en collision, la quantité de mouvement totale $\vec{p}_{\text{totale}}$ (en $\text{kg} \times \text{m/s}$) est conservée s'il n'y a aucune perte d'énergie. Dans ce cas, on a :

$$\vec{p}_{\text{totale}} = \vec{p}_{A \text{ initiale}} + \vec{p}_{B \text{ initiale}} = \vec{p}_{A \text{ finale}} + \vec{p}_{B \text{ finale}}$$

Les schémas suivants fournissent des renseignements sur la collision entre les objets A et B.

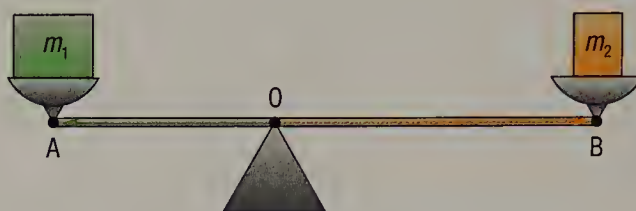


- a) Déterminez les composantes de $\vec{p}_{\text{totale}}$.
b) Déterminez les composantes de $\vec{p}_{B \text{ finale}}$.
c) La quantité de mouvement d'un objet est donnée par l'expression $\vec{p} = m\vec{v}$, où m représente la masse (en kg) de l'objet, et $\vec{v}$, sa vitesse (en m/s). Si l'objet B a une masse de 3 kg, trouvez la norme et l'orientation de sa vitesse finale.

15

BARYCENTRE Dans l'illustration ci-dessous, les masses m_1 et m_2 sont respectivement placées aux extrémités A et B d'un levier en équilibre. Le point O du levier qui permet d'atteindre cet équilibre est appelé barycentre. Lorsque l'équilibre est atteint, on a

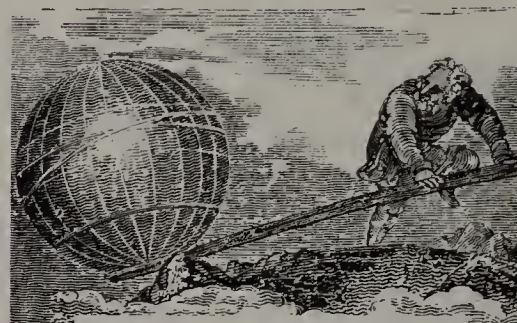
$$\overrightarrow{OA} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{AB}.$$



- a) Si, dans le schéma ci-dessus, $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 3 \text{ kg}$, la longueur du levier est de 3 m et que l'équilibre est atteint, quelle est :

- 1) l'orientation du vecteur OA ?
- 2) la norme du vecteur OA ?
- 3) la position du barycentre ?

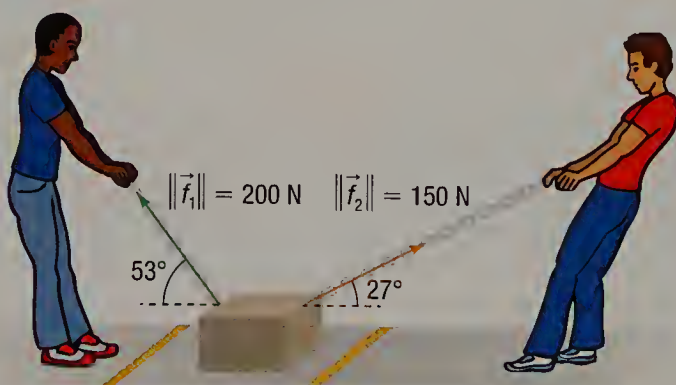
- b) Une masse de 1000 kg est placée à une extrémité d'un levier et le point d'appui est situé à 10 cm de cette masse. Quelle longueur doit avoir ce levier si une masse de 1 kg, située à l'autre extrémité, permet d'atteindre l'équilibre ?



Le levier est l'un des premiers mécanismes inventés pour démultiplier la force musculaire. Il a inspiré cette célèbre citation au savant grec Archimède : « Donnez-moi un appui et un levier et je soulèverai la Terre. »

16

Un jeu de force physique qui oppose deux personnes consiste à tirer simultanément un bloc de béton dans le but de l'amener jusqu'à une ligne donnée. Dès que la base du bloc touche cette ligne, le participant correspondant a gagné la partie. Seules les projections orthogonales des forces sur une droite parallèle au sol engendrent un mouvement horizontal du bloc. Le schéma ci-dessous illustre cette situation.



Le concept de force n'a été défini précisément qu'à la fin du XVII^e siècle par Isaac Newton. La difficulté de définir les forces vient du fait que celles-ci sont invisibles.

- a) Déterminez les composantes de la force qui correspond à la somme de $\vec{f}_1$ et de $\vec{f}_2$.
- b) Est-ce que le participant qui exerce la plus grande force gagnera la partie ? Expliquez votre réponse.
- c) Si l'orientation de chacune des forces reste la même tout au long de la partie, quelle force minimale devrait exercer le participant le moins efficace pour gagner cette partie ?

Cette section est en lien
avec la SAÉ 8.

**PROBLÈME** Le jeu vidéo

Dans un jeu vidéo, Karim doit accomplir la tâche décrite à l'écran ci-dessous afin de passer au niveau supérieur. Cet écran correspond à une reproduction à l'échelle 1 : 10 de l'écran sur lequel Karim joue.



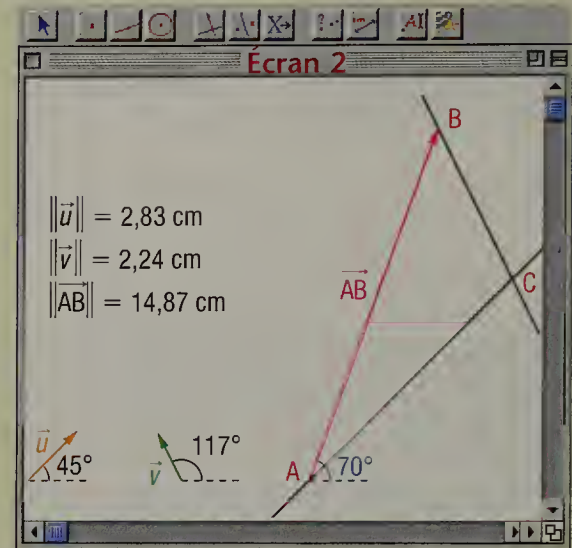
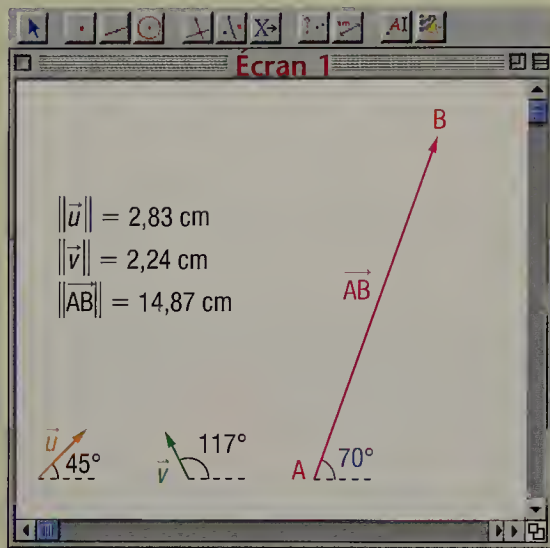
Voici les seuls déplacements possibles du personnage à l'écran :



Combien de fois Karim doit-il appuyer sur la touche **A** et la touche **B** pour accomplir cette tâche ?

ACTIVITÉ 1 La bonne combinaison

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a tracé à l'écran 1 les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{AB}$. On a ensuite tracé à l'écran 2 une droite parallèle à $\vec{u}$ passant par le point A et une droite parallèle à $\vec{v}$ passant par le point B.



- Quelle relation existe-t-il entre les vecteurs :
 - 1) $\vec{AC}$ et $\vec{u}$?
 - 2) $\vec{CB}$ et $\vec{v}$?
- Déterminez :
 - 1) la mesure de l'angle ACB;
 - 2) la mesure de l'angle ABC;
 - 3) la norme du vecteur AC;
 - 4) la norme du vecteur CB.
- Exprimez :
 - 1) le vecteur $\vec{AC}$ sous la forme d'un produit du vecteur $\vec{u}$ par un scalaire;
 - 2) le vecteur $\vec{CB}$ sous la forme d'un produit du vecteur $\vec{v}$ par un scalaire.

- Complétez l'étape ② de la démarche suivante.

$$\textcircled{1} \quad \vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{AB} = \text{■} \vec{u} + \text{■} \vec{v}$$

- Voici trois vecteurs :

$$\vec{EF} = (29, -4) \quad \vec{s} = (2, 3) \quad \vec{t} = (-3, 5)$$

En additionnant le produit de $\vec{s}$ par le scalaire k_1 au produit de $\vec{t}$ par le scalaire k_2 , on obtient $\vec{EF}$. On a donc $(29, -4) = k_1(2, 3) + k_2(-3, 5)$.

- 1) Complétez le système d'équations ci-contre.
- 2) Résolvez le système d'équations obtenu.
- 3) Complétez l'égalité suivante: $\vec{EF} = \text{■} \vec{s} + \text{■} \vec{t}$.

$$\begin{aligned} 29 &= \text{■} k_1 + \text{■} k_2 \\ -4 &= \text{■} k_1 + \text{■} k_2 \end{aligned}$$

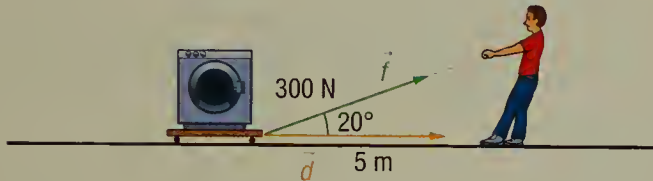
ACTIVITÉ 2 Au travail !

Le travail est une grandeur scalaire qui peut être obtenue en effectuant des calculs qui font intervenir des vecteurs.

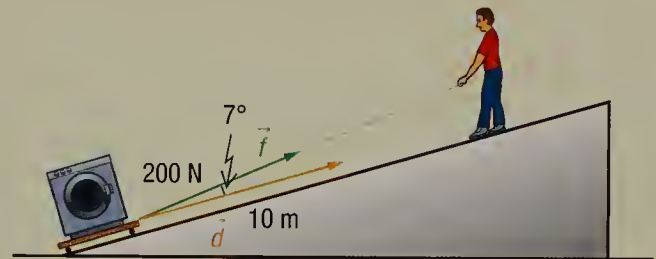
Lorsqu'une force $\vec{f}$ engendre le déplacement $\vec{d}$ d'un objet, le travail W (en J) effectué correspond au produit de la force (en N) exercée dans le sens du déplacement par la longueur (en m) du déplacement.

Voici deux situations qui illustrent le déplacement d'une laveuse lors d'un déménagement.

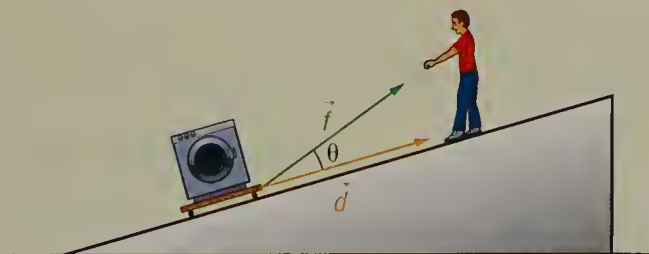
Situation ①



Situation ②



- a. Quelle est la force exercée dans le sens du déplacement:
- 1) dans la situation ①?
 - 2) dans la situation ②?
- b. Quel est le travail effectué:
- 1) dans la situation ①?
 - 2) dans la situation ②?
- c. Trouvez une formule qui permet de calculer le travail W engendré par le déplacement de la laveuse illustrée ci-dessous d'après la norme de $\vec{f}$, la norme de $\vec{d}$ et la mesure θ de l'angle formé par $\vec{f}$ et $\vec{d}$.

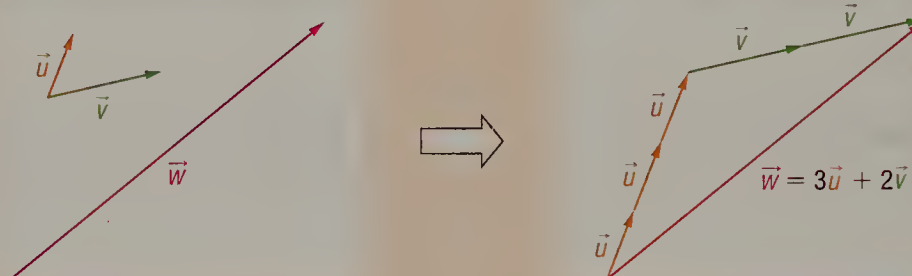


- d. Lors du déménagement d'une laveuse, une personne exerce une force de 250 N . Cette force effectue un travail de 1500 J . Quelle est la longueur du déplacement engendré si le vecteur force et le vecteur déplacement forment un angle de:
- 1) 0° ?
 - 2) 15° ?
 - 3) 45° ?
 - 4) 60° ?

COMBINAISON LINÉAIRE

Dans le plan, un vecteur est décomposable en une somme de deux autres vecteurs qui, eux-mêmes, peuvent être exprimés sous la forme d'un produit d'un vecteur par un scalaire. Ainsi, le vecteur w peut s'exprimer comme une **combinaison linéaire** des vecteurs u et v de la façon suivante : $\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$.

Ex.: 1) En mettant bout à bout un certain nombre de chacun des vecteurs u et v , il est possible d'obtenir le vecteur w sous la forme d'une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.



2) Pour $\vec{u} = (2, 5)$, $\vec{v} = (3, 4)$ et $\vec{w} = (16, 26)$, il est possible, en résolvant le système d'équations ci-dessous, de trouver deux nombres, k_1 et k_2 , tels que $\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$.

$$\begin{aligned} \text{Si } (16, 26) = k_1(2, 5) + k_2(3, 4), \text{ on a: } & \begin{aligned} 16 &= 2k_1 + 3k_2 \\ 26 &= 5k_1 + 4k_2 \end{aligned} \end{aligned}$$

On en déduit que $k_1 = 2$ et $k_2 = 4$, et donc $\vec{w} = 2\vec{u} + 4\vec{v}$.

PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

Le **produit scalaire** est une opération qui fait intervenir deux vecteurs dont le résultat est un scalaire. Le produit scalaire des vecteurs u et v se note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et se lit « $\vec{u}$ produit scalaire $\vec{v}$ ».

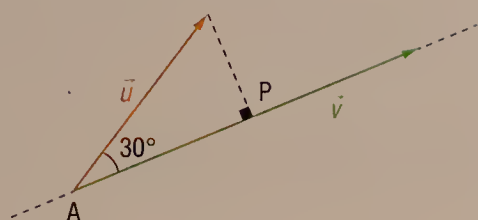
Constructions géométriques

Le nombre qui correspond au produit scalaire de deux vecteurs u et v est donné par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta, \text{ où } \theta \text{ correspond à la mesure de l'angle formé par } \vec{u} \text{ et } \vec{v}.$$

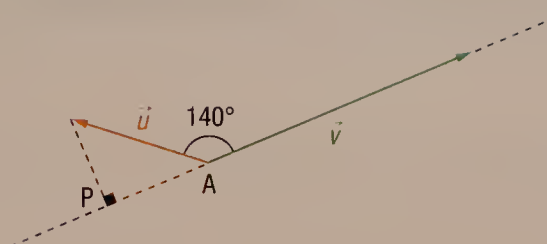


Ex.: 1) $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = 6,5$



$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos 30^\circ \\ &= 5 \times 6,5 \times \cos 30^\circ \\ &\approx 28,15\end{aligned}$$

2) $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 5$



$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos 140^\circ \\ &= 2 \times 5 \times \cos 140^\circ \\ &\approx -7,66\end{aligned}$$

Manipulations algébriques

Le nombre qui correspond au produit scalaire d'un vecteur u dont les composantes sont (a, b) et d'un vecteur v dont les composantes sont (c, d) est donné par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$$

Ex.: 1) $\vec{u} = (2, 3)$ et $\vec{v} = (4, 12)$

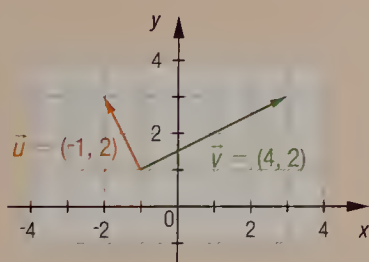
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 4 + 3 \times 12 = 44$$

2) $\vec{u} = (5, 1)$ et $\vec{v} = (-2, 7)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times -2 + 1 \times 7 = -3$$

Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul.

Ex. :



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, 2) \cdot (4, 2) = -1 \times 4 + 2 \times 2 = 0$$

Puisque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

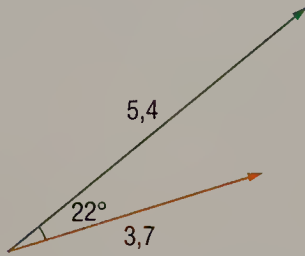
PROPRIÉTÉS DU PRODUIT SCALAIRE

Le produit scalaire de deux vecteurs possède les propriétés suivantes.

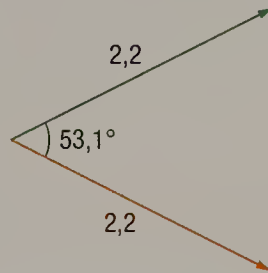
Propriété	Énoncé
Commutativité	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
Associativité des scalaires	$k_1 \vec{u} \cdot k_2 \vec{v} = k_1 k_2 (\vec{u} \cdot \vec{v})$
Distributivité sur une somme vectorielle	$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

1 Déterminez le produit scalaire de chaque paire de vecteurs illustrée ci-dessous.

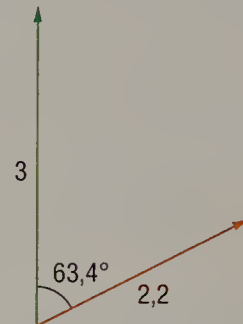
a)



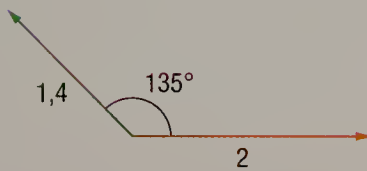
b)



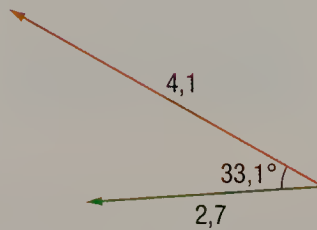
c)



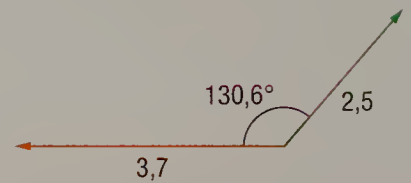
d)



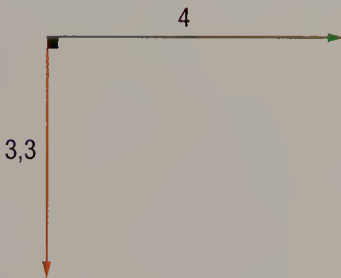
e)



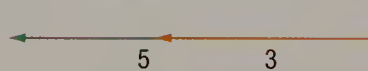
f)



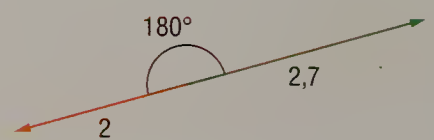
g)



h)



i)



2 Sachant que $\vec{u} = (-2, 7)$ et $\vec{v} = (1, 4)$, exprimez chacun des vecteurs ci-dessous sous la forme d'une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

a) $\vec{w} = (-1, 26)$

b) $\vec{s} = (4, 1)$

c) $\vec{t} = (-23, -82)$

d) $\vec{r} = (13, 43)$

e) $\vec{p} = (5, 5)$

f) $\vec{q} = (-6, -14)$

g) $\vec{m} = (-1, 3, 5, 5)$

h) $\vec{n} = (0, 0)$

3 Dans chaque cas, calculez le produit scalaire des deux vecteurs.

a) $\vec{u} = (-1, 4)$ et $\vec{v} = (5, 2)$.

b) $\vec{s} = (7, 3)$ et $\vec{t} = (2, 9)$.

c) $\vec{m} = (-2, 6, 4, 3)$ et $\vec{n} = (1, 1)$.

d) $\vec{r} = (43, 21)$ et $\vec{o} = (19, -24)$.

e) $\vec{p} = (0, 2, 0, 5)$ et $\vec{q} = (-30, 3)$.

f) $\vec{g} = (2, -25)$ et $\vec{h} = (25, -2)$.



4 Dans chaque cas, exprimez le vecteur $\vec{AB}$ sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{s}$ et $\vec{t}$.

a)



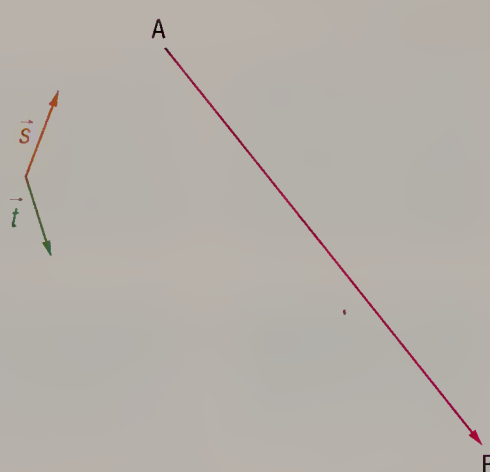
b)



c)



d)



5 Effectuez les calculs suivants pour $\vec{u} = (3, 4)$ et $\vec{v} = (-1, 5)$.

a) $2\vec{u} + 3\vec{v}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

c) $3\vec{u} \cdot 3\vec{v}$

d) $5\vec{u} - 3\vec{u}$

e) $2\vec{u} \cdot -\vec{v}$

f) $-11\vec{u} + 7\vec{v}$

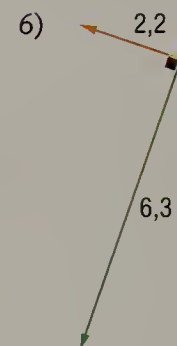
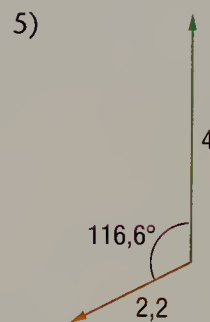
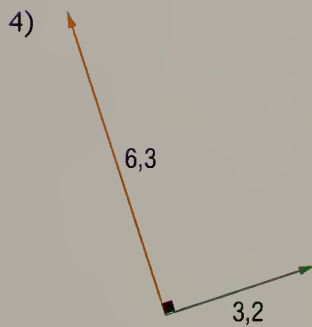
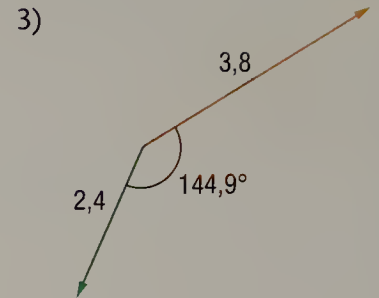
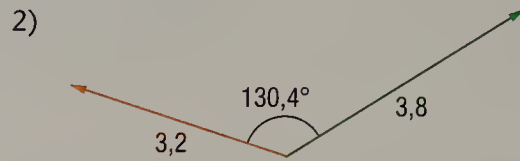
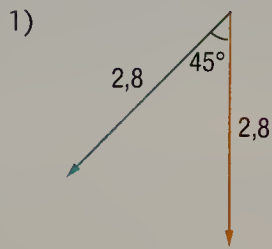
g) $\vec{u} + 3\vec{u} - 5\vec{v} + 2\vec{v}$

h) $\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot 3\vec{v}$

6 Déterminez l'expression algébrique qui correspond à la mesure de l'angle compris entre $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$.

7

a) Calculez le produit scalaire de chaque paire de vecteurs illustrée ci-dessous.



b) D'après les résultats obtenus en a), quelle conjecture pouvez-vous émettre quant au produit scalaire de deux vecteurs qui forment un angle obtus ?

c) Parmi les paires de vecteurs suivantes, lesquelles sont constituées de vecteurs orthogonaux ?

A

$(2, 3) \quad (-6, 9)$

B

$(-4, 2) \quad (8, -4)$

C

$(-11, -6) \quad \left(-1, -\frac{11}{6}\right)$

D

$(11, -32) \quad (-43, -13)$

E

$(25, 5) \quad (5, -25)$

F

$(-6, 7) \quad (-14, 12)$

G

$(-4, -9) \quad (2, -6)$

H

$(a, b) \quad (-2b, 2a)$

d) Déterminez les composantes d'un vecteur orthogonal au vecteur :

1) $(4, 6)$

2) $(-5, 2)$

3) $(-30, -8)$

8

Les équations des droites d_1 et d_2 sont respectivement $y = 2x + 5$ et $y = 3,5x - 2$.

a) Déterminez les composantes d'un vecteur situé sur :

1) la droite d_1 ;

2) la droite d_2 .

b) Calculez :

1) la norme de chaque vecteur donné en a) ;

2) le produit scalaire de ces vecteurs.

c) Quelle est la mesure de l'angle aigu formé par les droites d_1 et d_2 ?

9 Pour $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ et $\vec{w} = (e, f)$, démontrez algébriquement chacun des énoncés suivants.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

b) $k_1 \vec{u} \cdot k_2 \vec{v} = k_1 k_2 (\vec{u} \cdot \vec{v})$

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

d) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

10 **MODÈLE DE FISHBEIN** Avant de commercialiser un nouveau produit, les spécialistes du marketing tentent de déterminer quels sont les attributs de ce produit qui influencent le plus le choix des consommateurs. Voici les résultats d'un sondage :

Importance du design et de l'ergonomie d'une télécommande

Note attribuée au design (de 0 à 5)	Note attribuée à l'ergonomie (de 0 à 5)	Nombre de personnes ayant attribué ce couple de notes
1	3	2
4	2	3
4	1	4
5	3	4
3	5	1

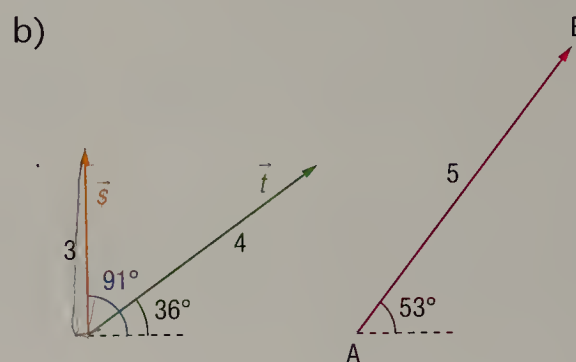
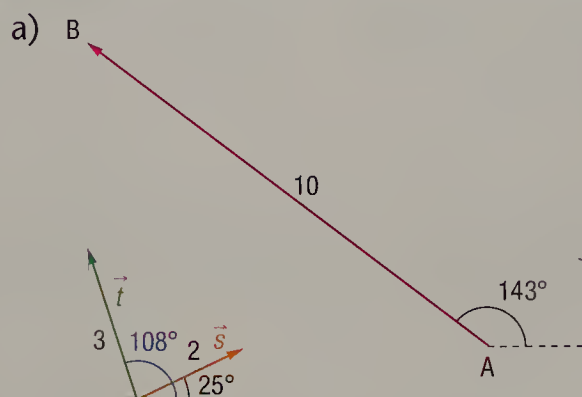
Le modèle de Fishbein permet de représenter ces résultats par des vecteurs. En associant chaque couple de notes à un vecteur, l'ensemble des résultats peut être représenté par une combinaison linéaire de tous ces vecteurs. Chaque vecteur est multiplié par un nombre qui correspond au nombre de personnes qui ont attribué ce couple de notes.

- Écrivez la combinaison linéaire qui représente l'ensemble des résultats du sondage.
- Tracez dans un plan cartésien le vecteur qui commence à l'origine du plan et qui représente l'ensemble des résultats du sondage.
- Du design ou de l'ergonomie, quel attribut de la télécommande influence le plus le choix des consommateurs? Expliquez votre réponse.
- Si le design et l'ergonomie avaient la même importance pour les consommateurs, quelle serait l'orientation du vecteur du modèle de Fishbein.



Bien que le calcul vectoriel a surtout été développé pour ses applications dans des domaines scientifiques, il est aussi utilisé dans certains contextes de sciences sociales, notamment en marketing.

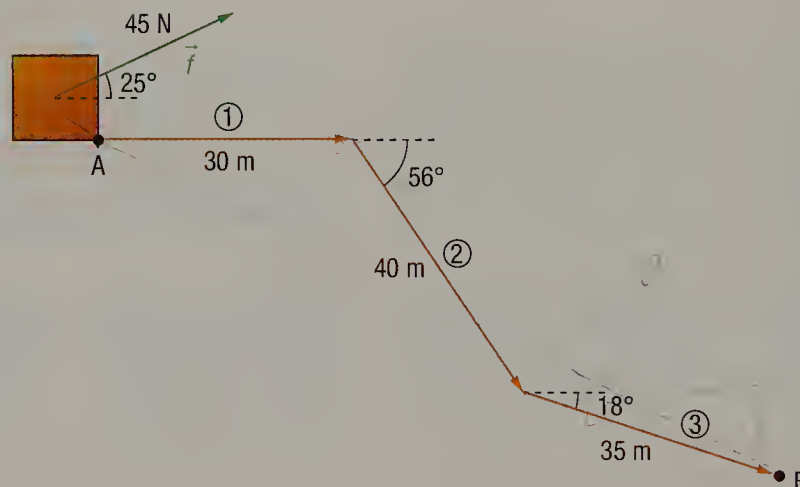
- 11** Dans chaque cas, déterminez la combinaison linéaire des vecteurs s et t qui permet d'obtenir le vecteur AB .



- 12** Sachant que le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est toujours nul, démontrez algébriquement que deux vecteurs orthogonaux sont supportés par des droites dont la pente de l'une correspond à l'opposé de l'inverse de l'autre.

- 13** Lorsqu'une force engendre le déplacement d'une masse, le travail W (en J) effectué par cette force correspond au produit scalaire du vecteur force (en N) et du vecteur déplacement (en m).

Le schéma ci-dessous illustre le parcours d'un objet soumis à une force $\vec{f}$ dont la norme et l'orientation sont constantes. Ce parcours commence au point A et se termine au point B.



- a) Quel est le travail effectué par la force pour franchir :
- 1) la partie ① du parcours ?
 - 2) la partie ② du parcours ?
 - 3) la partie ③ du parcours ?
 - 4) la totalité du parcours s'il correspond à la somme des travaux nécessaires pour franchir chaque partie du parcours ?
- b) À l'aide des propriétés du produit scalaire, montrez que la somme des travaux nécessaires pour franchir chaque partie du parcours correspond au produit scalaire du vecteur force et du vecteur AB.

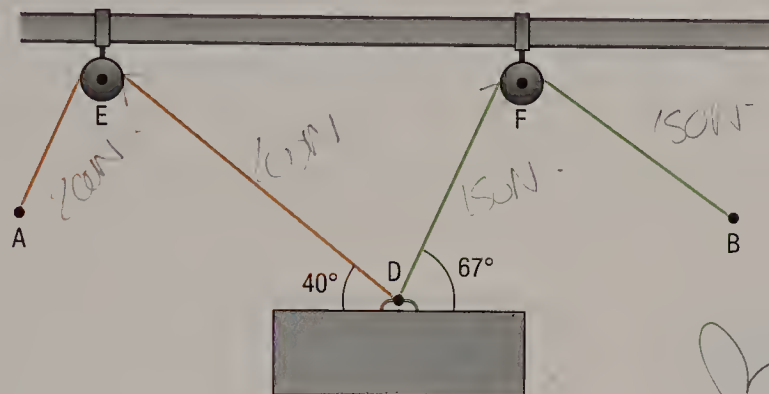
14 Voici deux vecteurs :

$$\vec{v} = (3, 5) \quad \vec{w} = (-2, 3)$$

Déterminez une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ qui permet d'obtenir un vecteur :

- a) orthogonal au vecteur $\vec{v}$; b) orthogonal au vecteur $\vec{w}$.

15 Sur un chantier de construction, un système de poulies relie un bloc de béton à deux cordes. Le schéma suivant illustre cette situation.



Dans cette situation :

- chaque ouvrier qui tire sur la corde à partir du point A engendre une force de 200 N au point D orientée selon $\overrightarrow{DE}$;
- chaque ouvrier qui tire sur la corde à partir du point B engendre une force de 150 N au point D orientée selon $\overrightarrow{DF}$;
- la force résultante correspond à la somme des forces exercées au point D.

- a) Cinq ouvriers tirent sur la corde à partir du point A et deux ouvriers tirent sur la corde à partir du point B. Déterminez la norme et l'orientation du vecteur associé à la force résultante.
- b) Combien d'ouvriers doivent tirer sur la corde à partir du point A et à partir du point B pour que la force résultante soit d'environ 2160 N et orientée à environ 112° ?

Un palan est un système de poulies qui permet de réduire la force nécessaire au déplacement d'une masse. On s'en sert, entre autres, pour soulever manuellement de lourdes charges et pour dresser les voiles d'un voilier.



Les débuts

La définition moderne du vecteur n'existe que depuis le xix^e siècle, même si certains mathématiciens et physiciens de l'Antiquité, dont Archimède, travaillaient déjà avec des grandeurs orientées telles que les déplacements et les vitesses. Au $xvii^e$ siècle, le terme *rayon vecteur* apparaît en astronomie et désigne le segment qui relie le centre d'une planète au centre de son étoile. Bien que le physicien belge Simon Stevin (1548-1620) utilise déjà des lettres surmontées de flèches pour représenter des forces, il faut attendre le xix^e siècle pour voir une formalisation des vecteurs.



Giusto Bellavitis
(1803-1880)

Les bipoints

En Italie, le professeur de géométrie Giusto Bellavitis travaille sur l'équipollence de segments en utilisant des couples de points, appelés bipoints, dont le premier point est appelé l'origine. Selon cette approche :

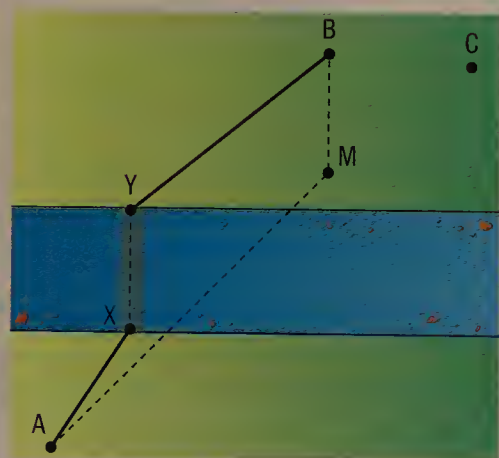
- le bipoint (A, B) est l'opposé du bipoint (B, A) ;
- les bipoints (A, B) et (C, D) sont équipollents si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme;
- deux bipoints équipollents représentent un même vecteur.

Les bipoints sont une préfiguration des vecteurs.

La figure ① illustre un problème tiré des travaux de Bellavitis dont voici l'énoncé.

A et B sont deux points séparés par une rivière que l'on doit traverser sur un pont XY perpendiculaire aux deux rives. Il faut déterminer la position de ce pont de manière à ce que la somme des distances AX , XY et YB soit minimale.

Figure ①



Solution

Le point M est placé de façon à ce que $(M, B) = (X, Y)$. Puisque la longueur de (X, Y) est constante, minimiser $(A, X) + (X, Y) + (Y, B)$ revient à minimiser $(A, X) + (Y, B)$. Pour ce faire, les points A, X et M doivent être alignés.

Démonstration

$$(A, X) + (X, Y) + (Y, B) = (A, X) + (X, \blacksquare) + (M, \blacksquare)$$

$$(A, X) + (X, Y) + (Y, B) = (A, X) + (X, M) + (X, Y)$$

$$(A, X) + (Y, B) = (A, X) + (\blacksquare, \blacksquare) = (A, M)$$

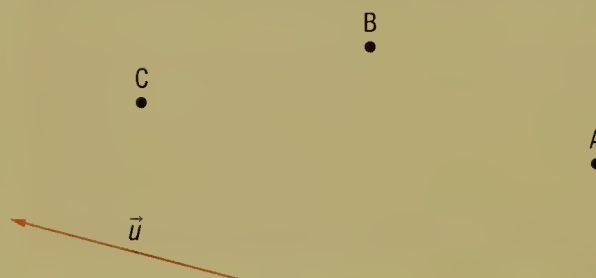
$$\text{et on en déduit que } (Y, B) = (\blacksquare, \blacksquare).$$

Puisque la ligne droite constitue le trajet le plus court entre les points A et M, le trajet $(A, X) + (X, M)$ est minimal si les points A, X et M sont alignés. Or, ce trajet est de la même longueur que $(A, X) + (\blacksquare, \blacksquare)$, car $(X, M) = (Y, B)$.

La relation de Chasles

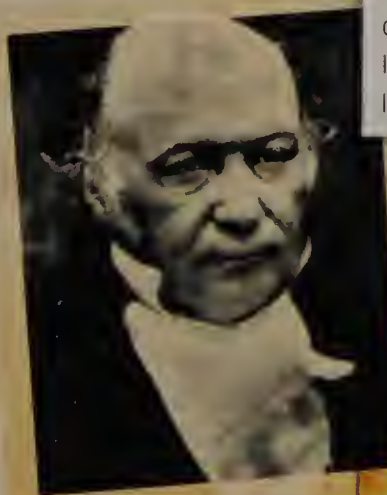
On attribue à Michel Chasles (1793-1880) la relation qui permet d'additionner des bipoints et, par extension, des vecteurs. Cette relation stipule que pour trois points A, B et C du plan, $(A, B) + (B, C) = (A, C)$.

Figure ②

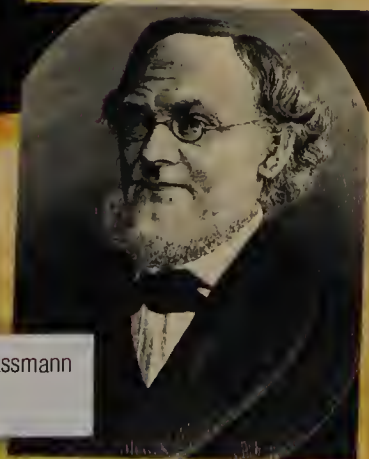


L'algèbre linéaire

Les liens entre l'algèbre et la géométrie explicités par la géométrie analytique incitent les mathématiciens à concevoir une approche algébrique des vecteurs. C'est ce qu'on appelle l'algèbre linéaire. Les travaux en algèbre du mathématicien allemand Hermann Günther Grassmann l'amènent à définir le produit scalaire et le produit vectoriel. Toutefois, c'est l'Irlandais William Rowan Hamilton qui introduit le terme *vecteur* et qui en développe l'aspect algébrique moderne.



Les outils développés par William Hamilton ont permis aux physiciens de décrire la théorie de la physique moderne : la mécanique quantique.



Hermann Günther Grassmann
(1809-1877)

1. Complétez la démonstration de Giusto Bellavitis en tenant compte de la figure ①.



2. Sur la figure ①, tracez le segment XY qui représente le pont qui permet de minimiser le trajet du point A au point C.



3. Sur la figure ②, placez :

- a) un point D tel que les bipoints (A, D) et (B, C) soient équipollents ;
- b) un point E tel que le bipoint (C, E) soit équipollent à la somme des bipoints (A, B) et (B, D) ;
- c) un point F tel que le bipoint (F, B) représente le vecteur u .

Le métier

Les aérodynamiciens sont des spécialistes qui étudient et analysent l'écoulement de l'air sur des objets tels que les avions, les voitures ou les bâtiments. La plupart du temps, les aérodynamiciens travaillent dans le domaine de l'aéronautique. Ils conçoivent et modifient la forme des avions afin d'en améliorer les performances et la solidité.

Les écuries de formule 1 font aussi appel à des aérodynamiciens pour la conception des voitures de course.

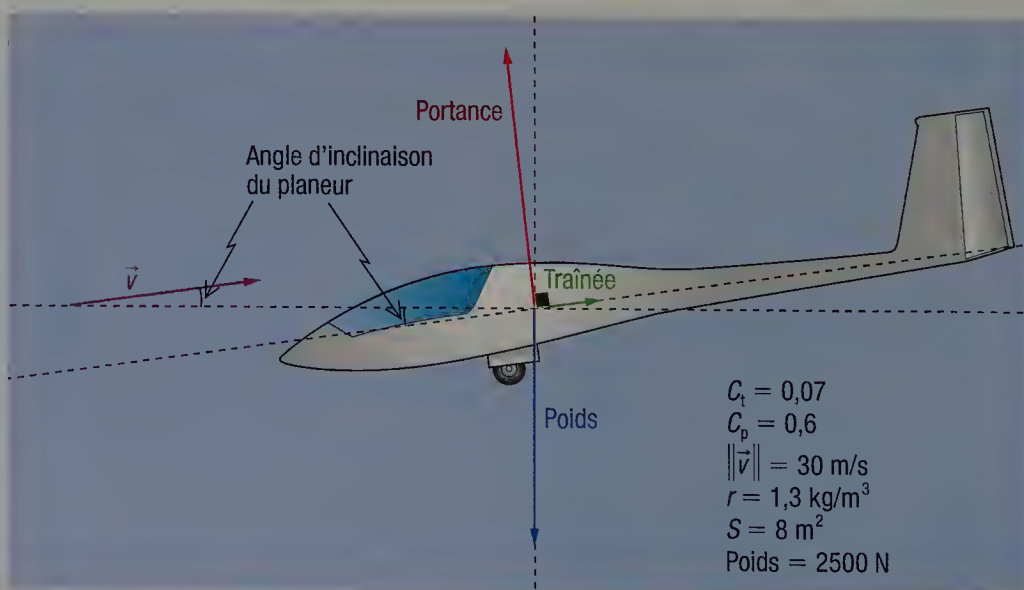


De la physique avant tout

Les aérodynamiciens doivent maîtriser la mécanique des fluides qui traite des forces engendrées par l'écoulement d'un fluide autour d'une surface. En aérodynamisme, ces forces dépendent de la vitesse d'écoulement $\vec{v}$ de l'air (en m/s), de la densité r de l'air (en kg/m³) et de la mesure S de la surface portante (en m²). Voici quelques renseignements sur ces forces :

- La **traînée** (en N) correspond à un vecteur colinéaire à la vitesse de l'écoulement de l'air.
Sa norme est donnée par $\frac{C_t \times r \times S \times \|\vec{v}\|^2}{2}$, où C_t est le coefficient de traînée.
- La **portance** (en N) correspond à un vecteur orthogonal à la vitesse de l'écoulement de l'air.
Sa norme est donnée par $\frac{C_p \times r \times S \times \|\vec{v}\|^2}{2}$, où C_p est le coefficient de portance.
- La **résultante aérodynamique** (en N) correspond à la somme vectorielle de la traînée et de la portance.

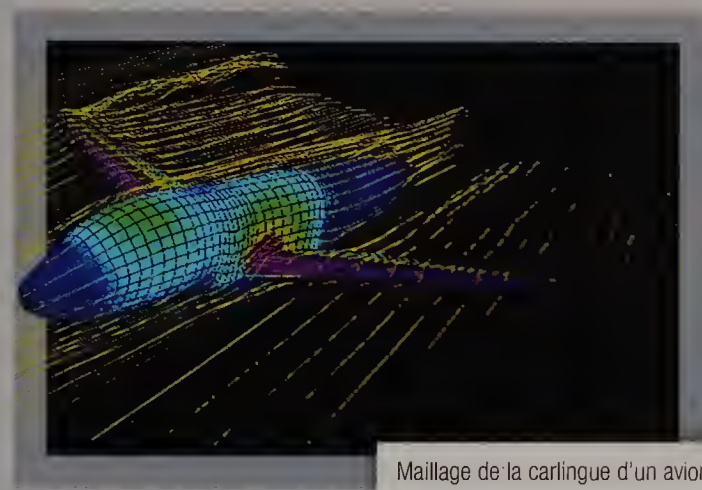
Le schéma ci-dessous montre les forces qui agissent sur un planeur en vol.



$C_t = 0,07$
 $C_p = 0,6$
 $\|\vec{v}\| = 30 \text{ m/s}$
 $r = 1,3 \text{ kg/m}^3$
 $S = 8 \text{ m}^2$
Poids = 2500 N

Le maillage

Lors de la conception d'un nouveau véhicule, par exemple une voiture ou un aéronef, les aérodynamiciens utilisent des ordinateurs pour en modéliser la surface. Ils procèdent ensuite au maillage de la surface, ce qui consiste à morceler cette surface et à analyser l'écoulement de l'air sur chacun des morceaux. Les aérodynamiciens déterminent ensuite si la modification de la forme de l'un de ceux-ci entraîne des conséquences positives ou négatives sur l'aérodynamisme de l'ensemble de la surface.



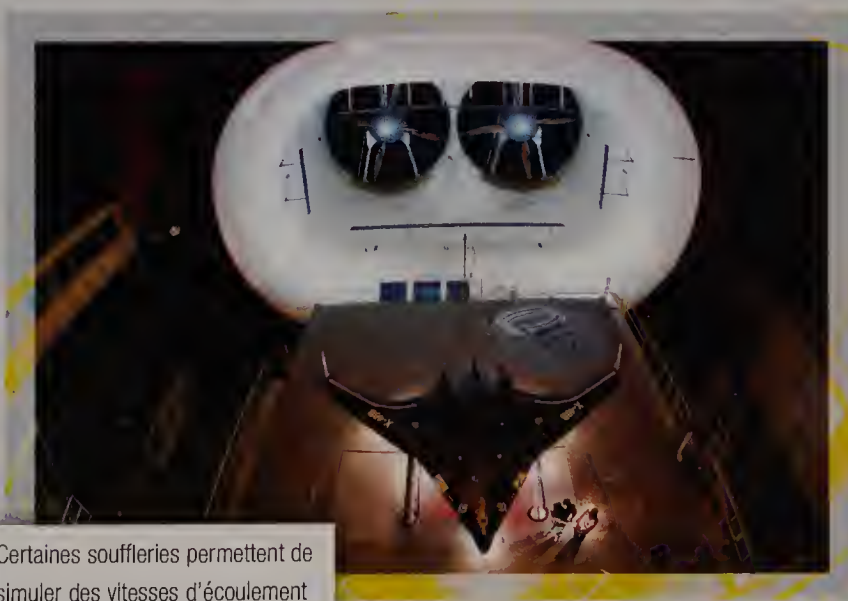
Maillage de la carlingue d'un avion

La phase expérimentale

Après avoir effectué des simulations par ordinateur, les aérodynamiciens procèdent à des tests en soufflerie sur des maquettes de l'objet à concevoir. Ils améliorent ensuite la forme de la surface. Lorsque la maquette répond aux exigences, les aérodynamiciens procèdent à des simulations avec un prototype de l'objet.



L'avènement des ordinateurs a permis aux aérodynamiciens de simuler numériquement l'écoulement de l'air autour de la carlingue d'un avion.



Certaines souffleries permettent de simuler des vitesses d'écoulement allant jusqu'à Mach 3.

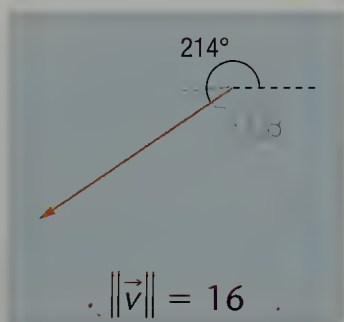
1. Calculez :
 - a) la traînée du planeur ;
 - b) la portance du planeur.

2. Déterminez la norme et l'orientation de la résultante aérodynamique du planeur si son angle d'inclinaison est de :
 - a) 5°
 - b) 10°

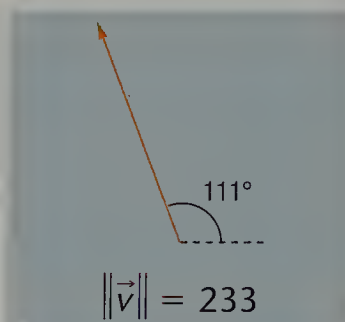
3. Quelle est l'orientation du vecteur correspondant à la somme du poids et de la résultante aérodynamique du planeur si son angle d'inclinaison est de :
 - a) 5° ?
 - b) 10° ?

1 Dans chaque cas, déterminez les composantes du vecteur v .

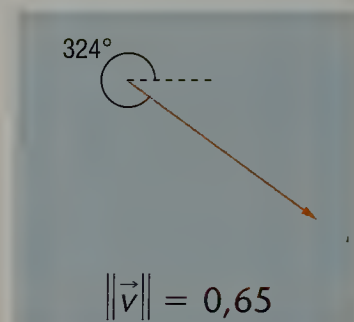
a)



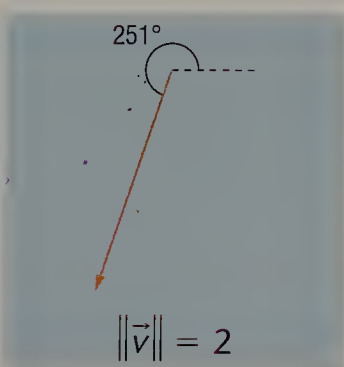
b)



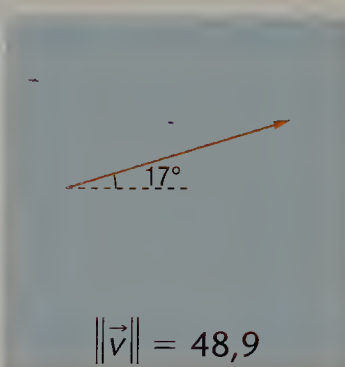
c)



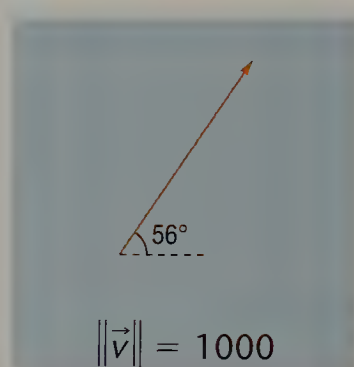
d)



e)



f)



2 Déterminez la norme et l'orientation de chacun des vecteurs suivants.

a) $\vec{v} = (10, 15)$

b) $\vec{w} = (-3, -9)$

c) $\vec{u} = (12, 12)$

d) $\vec{t} = (-103, 7, 28, 9)$

e) $\vec{m} = (-1, 1)$

f) $\vec{n} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

3 Dans chaque cas, déterminez le vecteur résultant.

a) $\vec{AD} + \vec{DB}$

b) $\vec{AB} - \vec{CB}$

c) $-\vec{CA} - \vec{BC}$

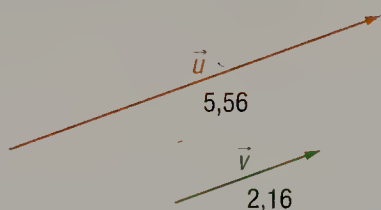
d) $\vec{BC} + \vec{AB} + \vec{CA}$

e) $\vec{CD} - (\vec{AB} + \vec{BD}) - \vec{CA}$

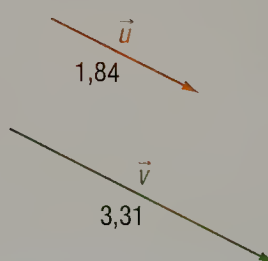
f) $-\vec{BA} + \vec{CD} - \vec{AB} + \vec{AC}$

4 Sachant que les paires de vecteurs ci-dessous sont colinéaires, exprimez le vecteur v sous la forme d'un produit du vecteur u par un scalaire.

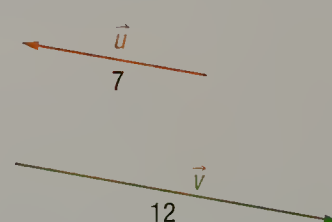
a)



b)



c)



d) $\vec{u} = (-3, 7)$

$\vec{v} = (30, -70)$

e) $\vec{u} = (43, 2, -2)$

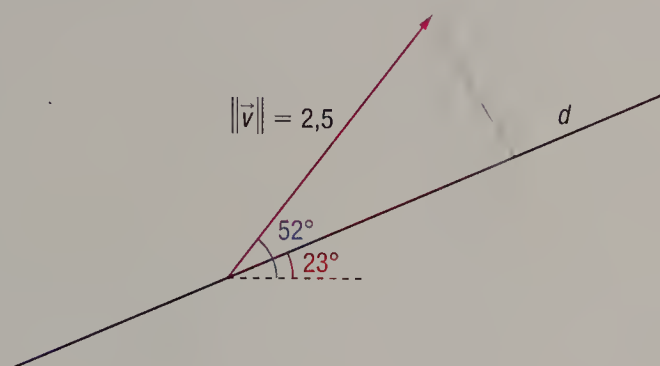
$\vec{v} = (32, 4, -1, 5)$

f) $\vec{u} = (a, b)$

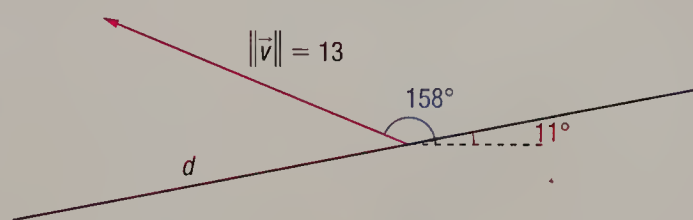
$\vec{v} = \left(\frac{a}{m+n}, \frac{b}{m+n}\right)$

5 Dans chaque cas, calculez la norme de la projection du vecteur v sur la droite d .

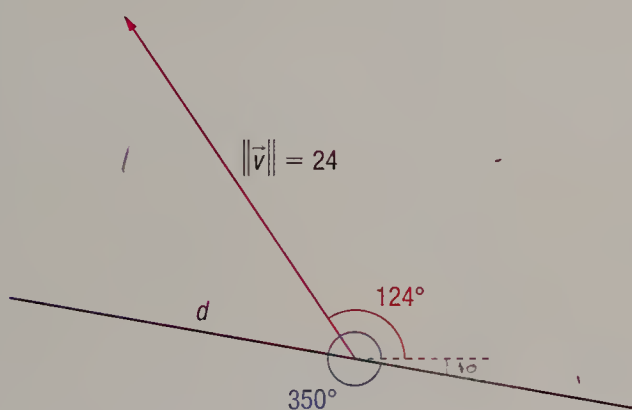
a)



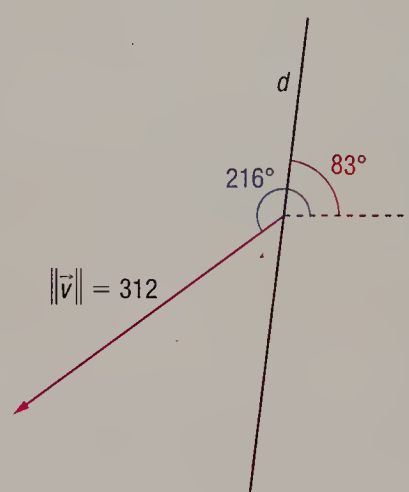
b)



c)



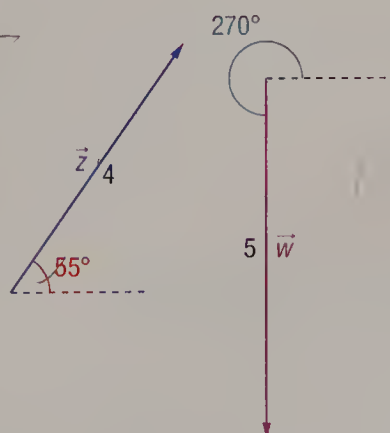
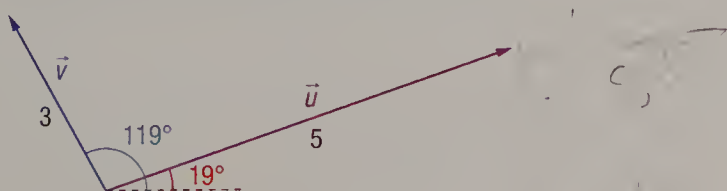
d)



6 Pour chaque chaîne d'opérations, déterminez la norme et l'orientation du vecteur résultant.

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{w} - \vec{z}$



c) $\vec{g} - \vec{h}$

$$\vec{g} = (4, 5) \quad \vec{h} = (-2, -9)$$

d) $\vec{i} + \vec{k} - \vec{j}$

$$\vec{i} = (0, 5) \quad \vec{k} = (-2, 13) \quad \vec{j} = (11, 1)$$

**7**

Dans le plan cartésien ci-dessous, représentez un vecteur dont l'origine est située à (0, 0) et qui correspond à :

a) $\vec{u} + \vec{v}$

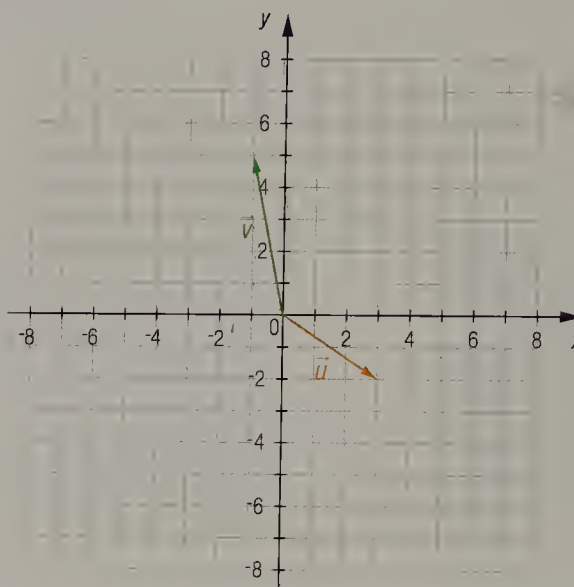
b) $\vec{u} - \vec{v}$

c) $2\vec{u}$

d) $-0,5\vec{v}$

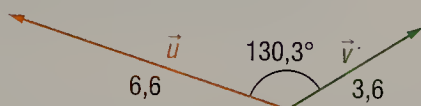
e) $-3\vec{u} - 2\vec{v}$

f) $\frac{(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}}{13}$

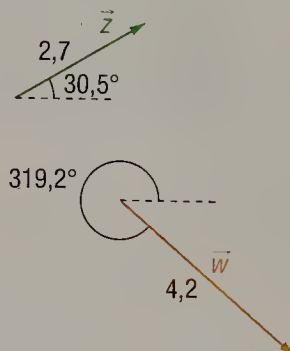
**8**

Déterminez le produit scalaire de chaque paire de vecteurs.

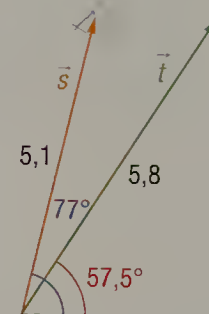
a)



b)



c)



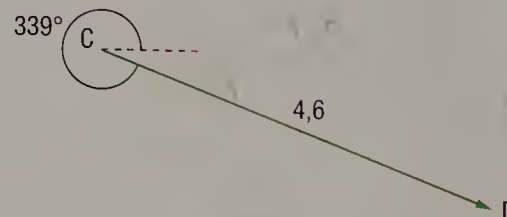
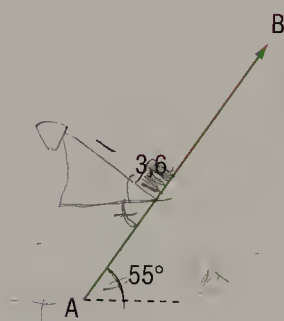
d) $\vec{k} = (12, 25)$
et
 $\vec{l} = (-7, -1)$

e) $\vec{n} = (0,8, 2,4)$
et
 $\vec{m} = (3,9, -11,2)$

f) $\vec{p} = (103, -57)$
et
 $\vec{q} = (-103, 57)$

9

Voici deux vecteurs :



Déterminez les composantes d'un vecteur u :

a) qui est unitaire et orthogonal au vecteur AB ;

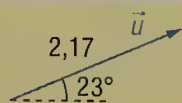
b) dont la norme est 6 et qui est opposé au vecteur AB ;

c) tel que $\vec{u} \cdot \vec{CD} = 15$ et qui forme un angle de 30° avec le vecteur CD.

10 Parmi les paires de vecteurs ci-dessous, déterminez lesquelles comportent des vecteurs :

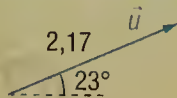
- a) colinéaires; b) orthogonaux; c) opposés; d) équipollents.

A



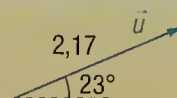
et $\vec{p} = (-2, -0,85)$

B



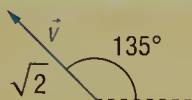
et $\vec{q} = (-4, 1,7)$

C



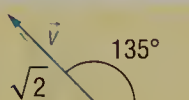
et $\vec{r} = (3,4, -8)$

D



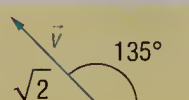
et $\vec{s} = (1, 1)$

E



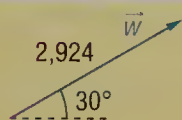
et $\vec{t} = (3, -3)$

F



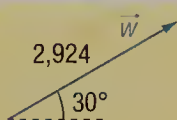
et $\vec{k} = (-1, -1)$

G



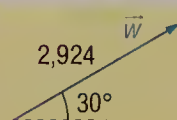
et $\vec{l} = (-4, 6)$

H



et $\vec{m} = (-2,53, -1,46)$

I



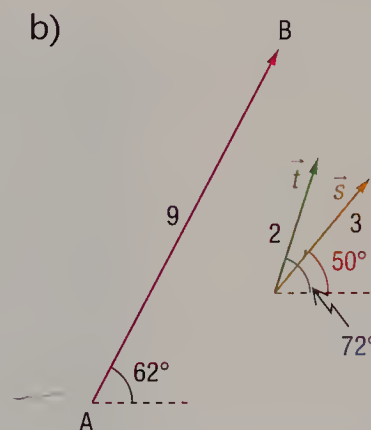
et $\vec{n} = (-1,46, 2,53)$

11 Dans chaque cas, écrivez le vecteur AB sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs s et t.

a)

Vecteur	Norme	Orientation
$\vec{s}$	32	45°
$\vec{t}$	9	112°
$\vec{AB}$	208	90°

b)



c)

$\vec{AB} = (35, -29)$

$\vec{s} = (12, 3)$ $\vec{t} = (0, -5)$

d)

$\vec{AB} = (0, 1)$

$\vec{s} = (0,5, 0)$ $\vec{t} = (3, 3)$

12 Dans chaque cas, déterminez la mesure de l'angle formé par les deux vecteurs.

a) $\vec{u} = (-3, 9)$ et $\vec{v} = (6, 6)$.

b) $\vec{w} = (5, 7)$ et $\vec{z} = (-17,5, 12,5)$.

c) $\vec{s} = (-25, 43)$ et $\vec{t} = (12, 18)$.

d) $\vec{k} = (1, 1)$ et $\vec{l} = (2, 2)$.

e) $\vec{n} = (-0,4, -3)$ et $\vec{m} = (0,1, -0,3)$.

f) $\vec{p} = (100, 10)$ et $\vec{q} = (10, 100)$.

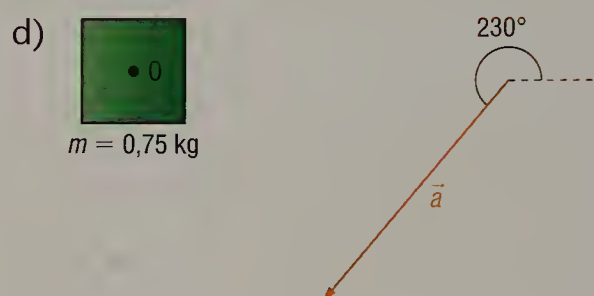
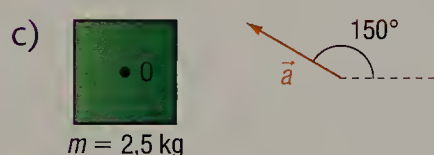
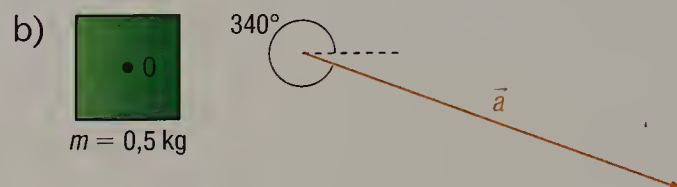
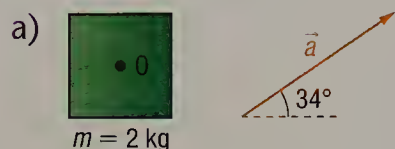
13

Les composantes de $\vec{v}$ sont (3, 7). Déterminez les composantes de $\vec{u}$ sachant que :

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ b) $2\vec{u} + 3\vec{v} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$ c) $6\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{0}$

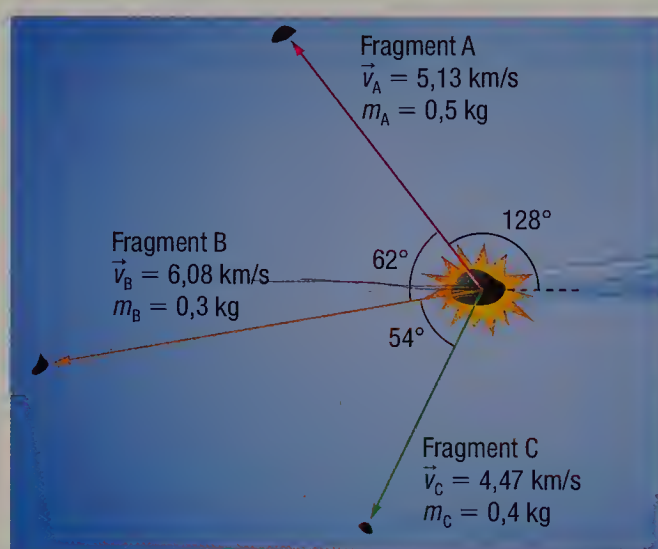
14

Lorsqu'une force $\vec{f}$ (en N) est appliquée sur un corps, il subit une accélération $\vec{a}$ (en m/s^2) selon la relation $\vec{f} = m\vec{a}$, où m est la masse (en kg) du corps. Dans chacun des schémas ci-dessous, on a représenté, en utilisant l'échelle $1 \text{ cm} \triangleq 1 \text{ m/s}^2$, l'accélération qu'on désire transmettre à un corps. Dans chaque cas, représentez, en utilisant l'échelle $1 \text{ cm} \triangleq 1 \text{ N}$, le vecteur $\vec{f}$ d'origine O qui produit cette accélération.



15

Lors de sa course dans l'espace, un astéroïde explose et se sépare en trois fragments. Le schéma ci-dessous, où $\vec{v}$ représente la vitesse et m représente la masse, illustre cette situation.



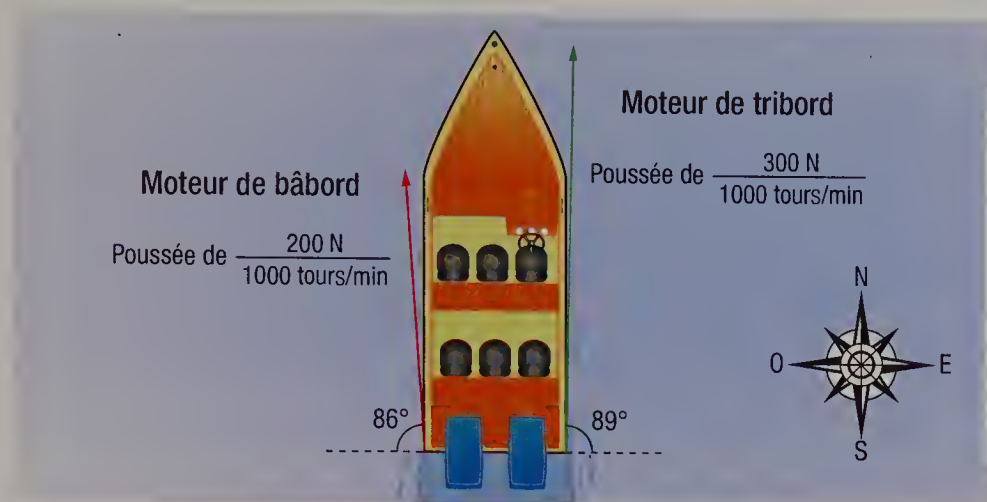
- a) Trois secondes après l'explosion, quelle distance sépare :
- 1) le fragment A du fragment B ?
 - 2) le fragment B du fragment C ?
 - 3) le fragment A du fragment C ?

Chaque jour, de 2000 à 3000 corps solides provenant de l'espace frappent l'atmosphère terrestre. Toutefois, la majorité d'entre eux se désintègrent dans l'atmosphère, de sorte qu'annuellement, environ 500 météorites, de la taille d'une balle de tennis, atteignent la surface du globe.

- b) La loi de la conservation de la quantité de mouvement permet d'affirmer que $m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B + m_C \vec{v}_C = m_{\text{astéroïde}} \vec{v}_{\text{astéroïde}}$. Déterminez la norme et l'orientation de la vitesse de l'astéroïde avant son explosion.

16

Un bateau est équipé de deux moteurs. La poussée exercée par chaque moteur a une orientation constante et une norme (en N) proportionnelle à la vitesse de rotation (en tours/min) de l'hélice. Le schéma ci-dessous illustre cette situation.



En navigation, les mots « bâbord » et « tribord » sont des termes d'origine néerlandaise qui représentent respectivement le côté gauche et le côté droit d'un bateau lorsqu'on se place dans son axe et qu'on regarde vers l'avant. En général, le côté bâbord d'un navire est indiqué par des feux de navigation rouges et le côté tribord, par des feux verts.

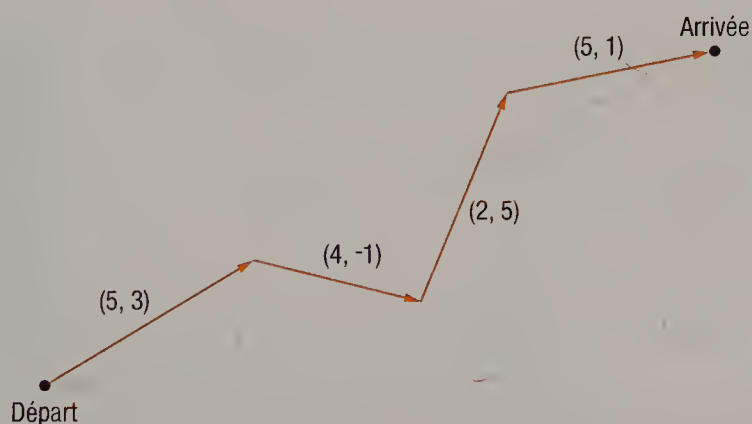
La poussée totale exercée sur le bateau correspond à la somme des poussées exercées par chaque moteur.

Déterminez à quelle vitesse l'hélice de chaque moteur tourne si les moteurs transmettent au bateau une poussée totale orientée vers le nord et dont la norme est :

- a) 2500 N b) 3250 N

17

Un randonneur parcourt le trajet représenté ci-dessous. Les composantes de chaque vecteur sont en kilomètres.



Une fois le parcours complété, le randonneur doit retourner en ligne droite au point de départ. Déterminez :

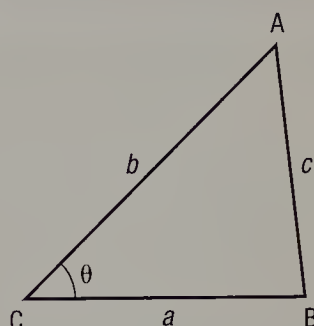
- a) l'orientation du vecteur associé à son trajet de retour ;
b) la distance qu'il aura à parcourir au retour.

Sentier du lac Pink, dans le parc de la Gatineau. Ce sentier de randonnée pédestre ceinture un des rares lacs méromictiques dans lesquels les couches d'eaux profondes ne se mélangent pas aux eaux de surface. Cette particularité a permis à une forme préhistorique de bactéries de survivre dans les profondeurs du lac Pink.

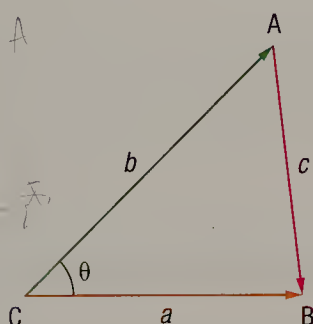
18

THÉORÈME D'AL-KASHI Le théorème d'al-Kashi énoncé ci-dessous permet de calculer la mesure d'un côté d'un triangle à partir des mesures des deux autres côtés de ce triangle et de celle de l'angle compris entre ces côtés.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$



En représentant chaque côté d'un triangle par un vecteur, il est possible de démontrer le théorème d'al-Kashi à l'aide du calcul vectoriel. La démarche ci-dessous présente cette démonstration.



- ① $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$
- ② $\vec{AB} \cdot \vec{AB} = (\vec{CB} - \vec{CA}) \cdot (\vec{CB} - \vec{CA})$
- ③ $\vec{AB} \cdot \vec{AB} = \vec{CB} \cdot \vec{CB} + \vec{CA} \cdot \vec{CA} - 2\vec{CB} \cdot \vec{CA}$
- ④ $\|\vec{AB}\|^2 = \text{ } + \text{ } - 2 \text{ }$
- ⑤ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$

- a) Démontrez algébriquement l'étape ① de cette démonstration.
- b) Dans cette démonstration, justifiez le passage :
 - 1) de l'étape ① à l'étape ② ;
 - 2) de l'étape ② à l'étape ③.
- c) Complétez l'étape ④ de cette démonstration.



Mausolée Gour-Émir, de Samarkand, qui abrite le tombeau de l'empereur Tamerlan. Al-Kashi (1380-1429), mathématicien et astronome perse, a enseigné à Samarkand, en Ouzbékistan, sur l'invitation du petit-fils de Tamerlan, astronome, lui aussi.

19

Voici trois vecteurs :

$$\vec{v} = (a, b)$$

$$\vec{w} = (c, d)$$

$$\vec{z} = k_1 \vec{v} + k_2 \vec{w}$$

Sachant que les composantes a , b , c et d sont non nulles, et que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires, démontrez algébriquement que $\vec{z}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires seulement si $k_2 = 0$.

20

Les coordonnées de trois points sont $A(-5, 2)$, $B(3, 4)$ et $C(x, y)$. Ces trois points sont alignés si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires. Quelles conditions les coordonnées x et y doivent-elles respecter pour que les points A , B et C soient alignés ?

21 Voici deux conjectures :

Conjecture ①

L'angle compris entre deux vecteurs dont les composantes sont (a, b) et (b, a) est obtus.

Conjecture ②

Le cosinus de l'angle compris entre deux vecteurs dont les composantes sont $(a, 2a)$ et $(2a, a)$ est $\frac{4}{5}$.

- a) Montrez à l'aide d'un contre-exemple que la conjecture ① est fausse. *ex: non*
b) Démontrez algébriquement que la conjecture ② est vraie.

22 NOMBRES COMPLEXES Un nombre complexe est un nombre qui permet de résoudre des équations dont les solutions font intervenir la racine carrée de nombres strictement négatifs. Ils s'expriment sous la forme $a + bi$, où $i = \sqrt{-1}$. Voici d'autres renseignements à ce sujet :

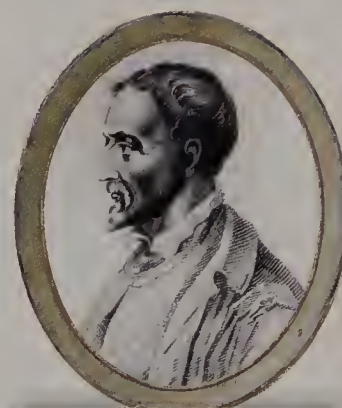
- Un nombre complexe $a + bi$ peut être représenté par un vecteur (a, b) , débutant à l'origine du plan cartésien.
- Un nombre complexe $a + bi$ peut s'exprimer sous la forme polaire (r, θ) , où r correspond à la norme du vecteur (a, b) et θ , à son orientation.

- a) Exprimez chacun des nombres complexes suivants sous la forme polaire.

- 1) $2 + 2i$ 2) $1 + 3i$
3) $6 - 5i$ 4) $7 + 0i$

- b) Exprimez chacun des nombres complexes suivants sous la forme $a + bi$.

- 1) $(4, 35^\circ)$ 2) $(7, 123^\circ)$ 3) $(\sqrt{2}, 225^\circ)$ 4) $(12, 150^\circ)$



Au XVI^e siècle, des mathématiciens italiens, dont Jérôme Cardan, introduisent l'usage des nombres complexes. À cette époque, les nombres complexes s'appelaient les « nombres impossibles ».

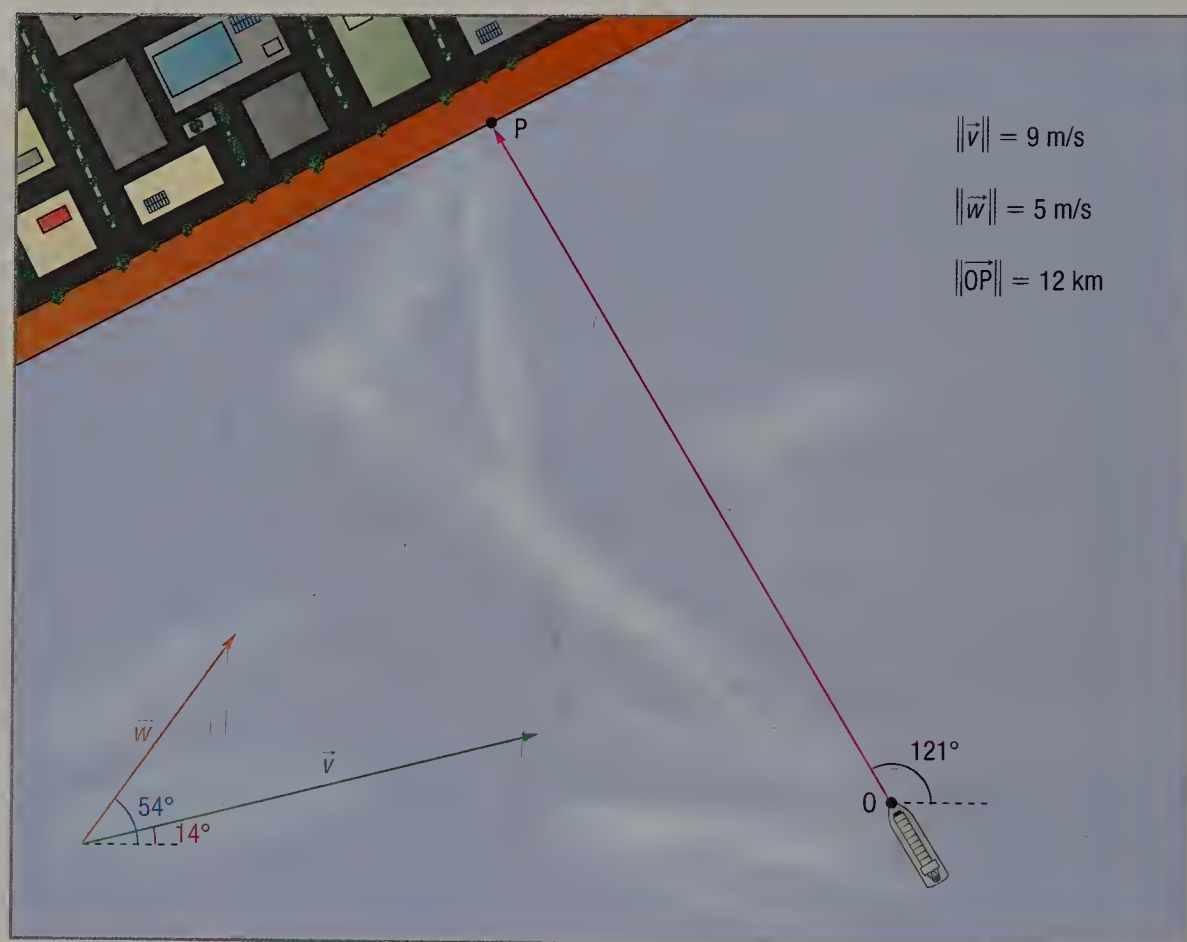


banque de problèmes



1

Un navire quitte le point O pour se rendre au point P. Afin de donner la bonne vitesse $\vec{n}$ à son navire, la pilote doit prendre en compte la vitesse $\vec{v}$ du vent et la vitesse $\vec{w}$ du courant marin. Le schéma ci-dessous illustre cette situation.



Sachant que la vitesse résultante du bateau correspond à la somme des vecteurs $\vec{n}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, déterminez la norme et l'orientation de la vitesse que la pilote doit donner à son navire pour se rendre au point P en 25 min. (1000 points)



2

Sachant que le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul, démontrez que les vecteurs unitaires $\vec{v}$ et $\vec{w}$ qui sont orthogonaux au vecteur $\vec{u} = (a, b)$, où $a \neq 0$ et $b \neq 0$, sont :

$$\vec{v} = \left(\frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \quad \vec{w} = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$



3

Si $\vec{AC} = \left(\frac{m}{m+n} \right) \vec{AB}$, montrez que le point C partage le segment AB selon le rapport $\frac{m}{n}$.

Mathieu doit remettre en devoir à son enseignante une démonstration sur les vecteurs. Puisqu'il éprouve des difficultés, il participe à un forum de discussion sur les mathématiques.

mathieu_r7 : Voici les données initiales de la démonstration : $\vec{v} = (a, b)$, $\vec{w} = (c, d)$ et $\vec{z} = k_1\vec{v} + k_2\vec{w}$. Je dois démontrer que $\vec{z}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux si $\frac{k_2}{k_1} = -\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}$.

~Einstein~ : Remplace $\vec{v}$ et $\vec{w}$ par leurs composantes dans l'expression qui définit $\vec{z}$, puis effectue algébriquement le produit scalaire des vecteurs w et z .

mathieu_r7 : J'obtiens une expression algébrique qui correspond au produit scalaire de $\vec{w}$ et de $\vec{z}$. Mais j'ai besoin d'une égalité... 😊 pas seulement d'une expression algébrique.

~Einstein~ : N'oublie pas que $\vec{w}$ et $\vec{z}$ sont orthogonaux. Leur produit scalaire est donc nul. De plus, en réorganisant les termes de cette égalité et en factorisant de façon appropriée, tu obtiendras un seul terme qui contient k_1 et un seul terme qui contient k_2 .

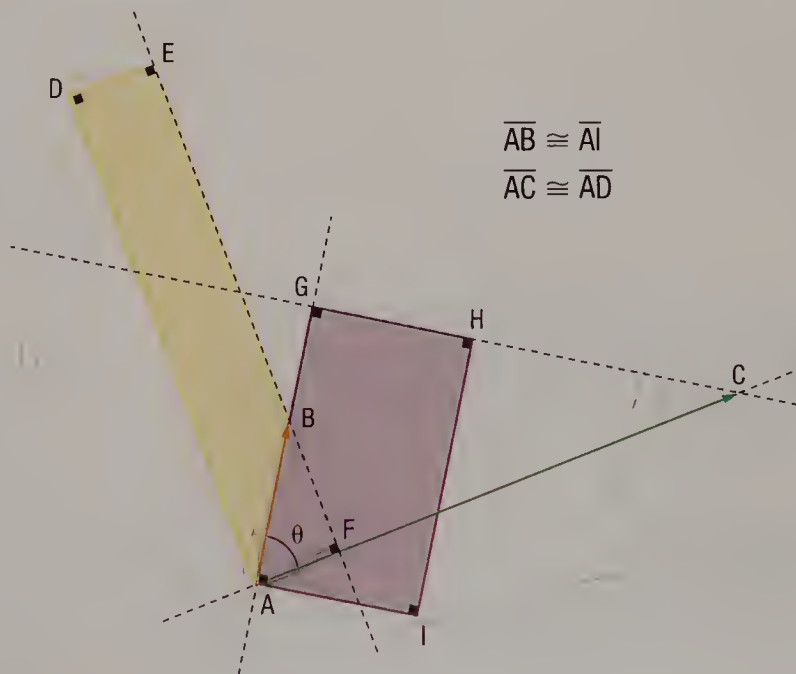
mathieu_r7 : J'obtiens maintenant une égalité qui contient a, b, c, d, k_1 et k_2 .

~Einstein~ : Après avoir divisé les deux membres de cette égalité par k_1 , il est possible d'isoler le rapport $\frac{k_2}{k_1}$. Ensuite, il ne reste plus qu'à vérifier que l'expression algébrique au numérateur correspond à $\vec{v} \cdot \vec{w}$ et celle au dénominateur, à $\|\vec{w}\|^2$. 😊

Produisez la démonstration que Mathieu doit remettre à son enseignante.

D'après la figure ci-contre, une élève a démontré que les quadrilatères ADEF et AGHI sont équivalents. Cependant, elle a perdu la feuille qui contenait ses explications. Elle se souvient seulement que sa démonstration faisait intervenir la commutativité du produit scalaire de vecteurs.

Expliquez à cette élève comment démontrer que les quadrilatères ADEF et AGHI sont équivalents.



Au début d'un exercice d'orientation, Johanne et Alfred sont positionnés de la façon suivante.



Par la suite, Johanne et Alfred se déplacent. À partir de sa position de départ, Johanne effectue un déplacement qui correspond à $\vec{v} = (-3, -2)$ suivi d'un déplacement de 5 km orienté à 330° .

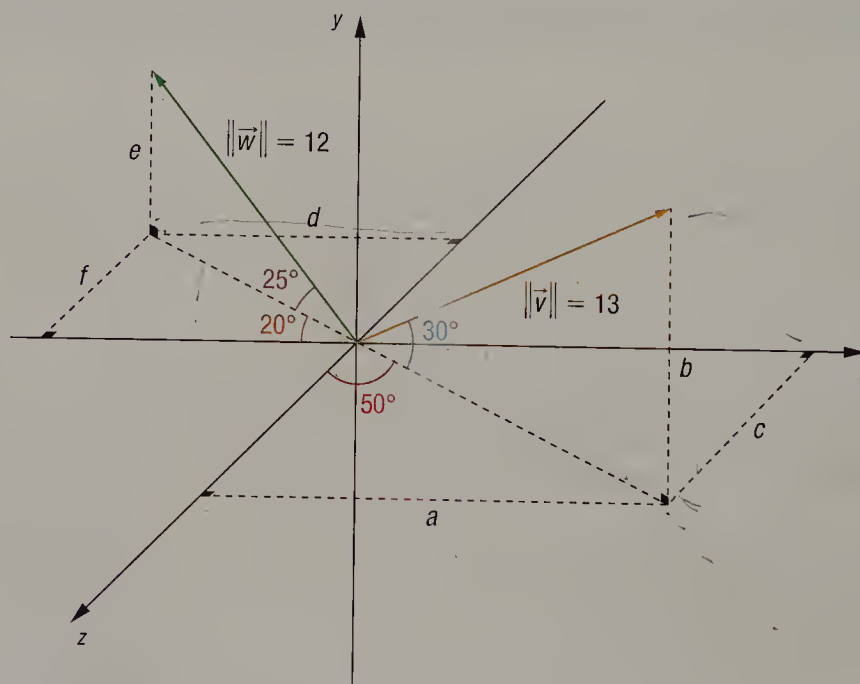
Le déplacement résultant de Johanne correspond à $\vec{u}$ et celui d'Alfred, à $-3\vec{u}$.

Une fois tous ces déplacements effectués, Johanne doit rejoindre Alfred en suivant un trajet rectiligne. Déterminez la norme et l'orientation du vecteur qui correspond à ce trajet.

Les vecteurs de l'espace possèdent trois composantes: une composante horizontale, une composante verticale et une composante de profondeur. Si $\vec{v} = (a, b, c)$ et $\vec{w} = (d, e, f)$ sont deux vecteurs de l'espace, leur produit scalaire s'effectue de la façon suivante.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (a, b, c) \cdot (d, e, f) = ad + be + cf$$

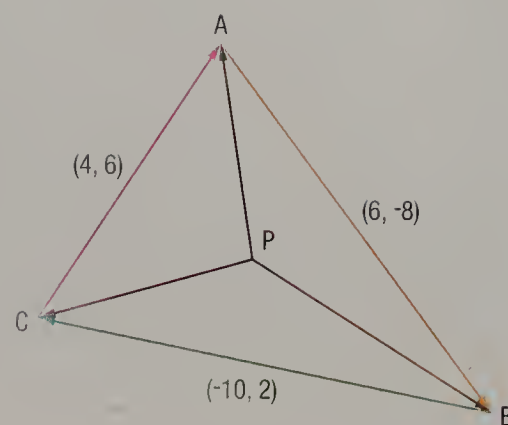
Voici la représentation de deux vecteurs de l'espace:



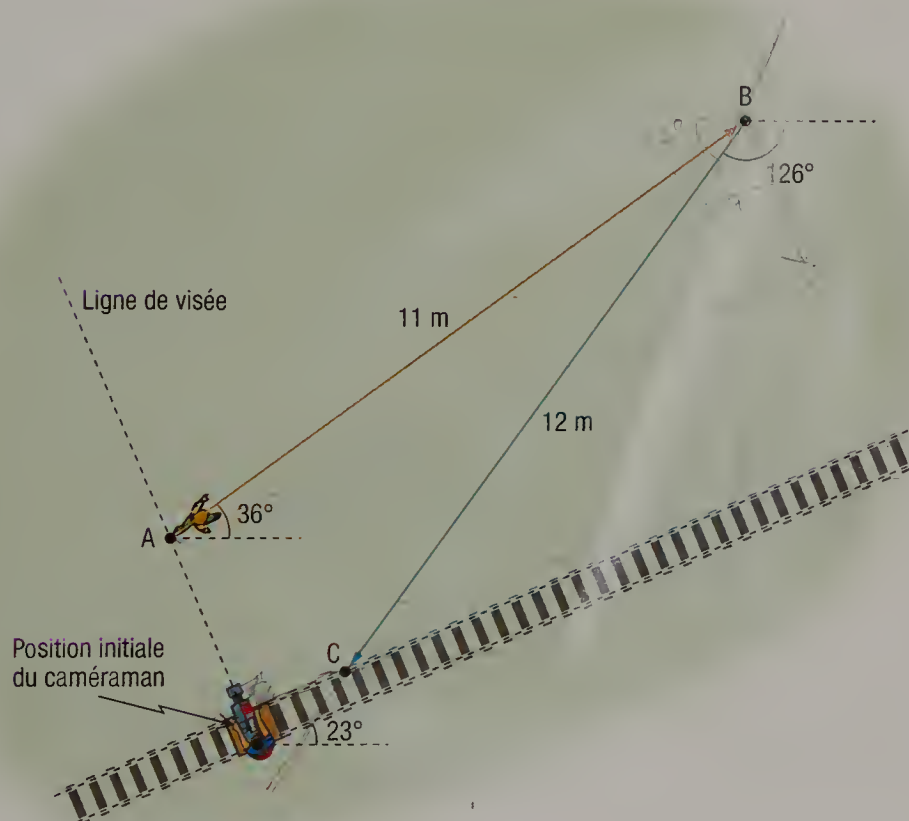
Calculez le produit scalaire de ces deux vecteurs.

CENTRE DE GRAVITÉ Le centre de gravité du triangle ABC illustré ci-contre correspond au point P. Ce point vérifie la relation $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$.

Déterminez la distance entre le centre de gravité de ce triangle et chacun de ses sommets.



Au cours du tournage d'une scène d'un film, un caméraman se déplace sur des rails afin de suivre les déplacements de l'actrice. Dans cette scène, la ligne de visée qui relie l'actrice à la caméra est toujours perpendiculaire au déplacement de la caméra. Le schéma ci-dessous fournit des renseignements sur le tournage de cette scène.



Scène

L'actrice court du point A au point B en 3 s, marque une pause de 15 s, puis court jusqu'au point C en 4 s.

Donnez au caméraman les instructions relatives à la vitesse et à la longueur des déplacements qu'il doit effectuer sur les rails pour filmer cette scène.

En cinématographie, on appelle travelling le déplacement de la caméra lors d'une prise de vue. En combinant un effet de zoom avec un travelling, on peut obtenir un travelling compensé dans lequel le sujet filmé semble immobile, tandis que l'arrière-plan semble s'éloigner ou se rapprocher.





Les fonctions trigonométriques

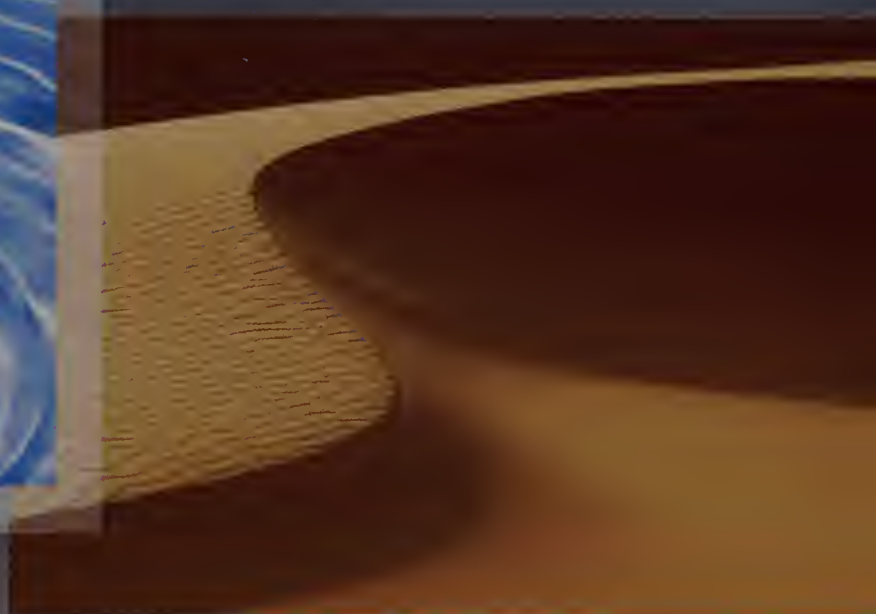
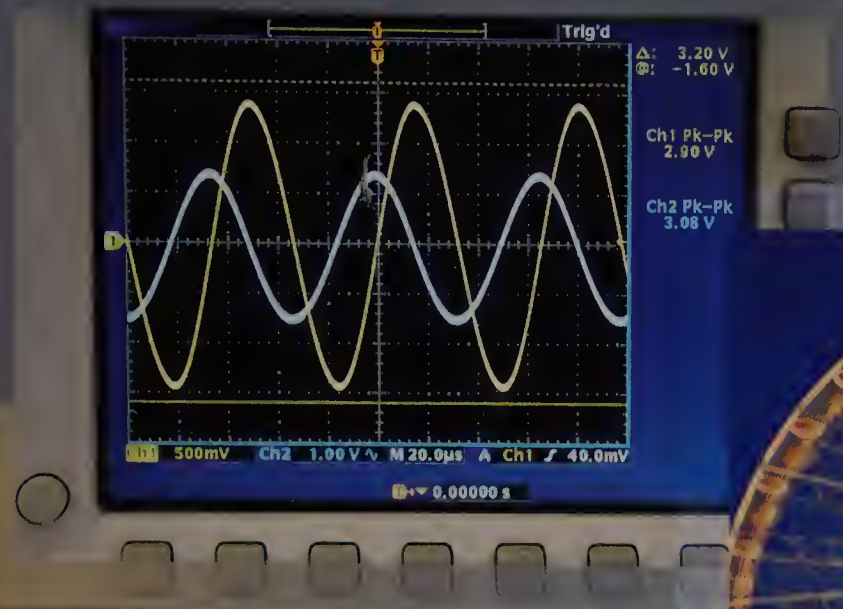
Comment passer d'une mesure d'angle en degrés à une mesure d'angle en radians ? À quel modèle mathématique les phénomènes ondulatoires tels que la propagation d'un son et le rayonnement électromagnétique peuvent-ils être associés ? Comment peut-on établir les hauteurs des marées plusieurs mois à l'avance ? Dans *Vision 5*, vous découvrirez le cercle trigonométrique et une nouvelle unité de mesure d'angle : le radian. Vous analyserez plusieurs situations qui peuvent être décrites à l'aide de fonctions trigonométriques et vous utiliserez la périodicité de ce type de fonction afin de résoudre des équations et des inéquations. Finalement, vous utiliserez des identités trigonométriques pour réduire des expressions.

Arithmétique et algèbre

- Fonctions sinus, cosinus et tangente
- Résolution d'équations et d'inéquations à une variable

Géométrie

- Cercle trigonométrique
- Identités trigonométriques
- Développement, réduction ou substitution d'expressions à l'aide d'identités trigonométriques



RÉPERTOIRE
DES SAE

Des machines pour
se simplifier la vie

Chronique du
passé

Les mathématiciens
indiens

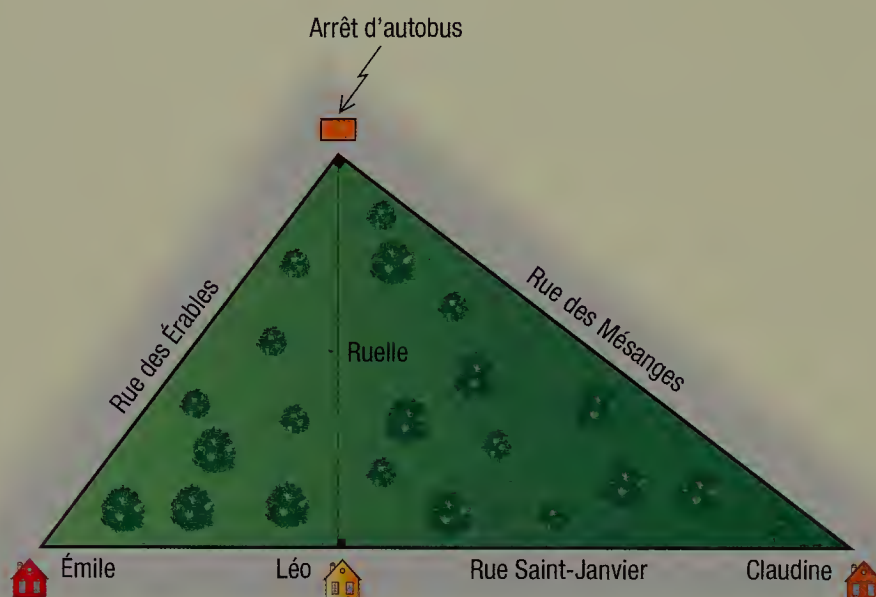
Le
monde
du travail

Les ingénieurs
opticiens

RÉACTIVATION 1 L'arrêt d'autobus

Émile, Léo et Claudine habitent la rue Saint-Janvier et prennent l'autobus à l'intersection des rues des Érables et des Mésanges.

Voici un plan du quartier où habitent ces trois personnes.



Pour se rendre à l'arrêt d'autobus, Émile doit parcourir 75 m sur la rue des Érables et Claudine doit parcourir 125 m sur la rue des Mésanges. Une ruelle relie le domicile de Léo à l'arrêt d'autobus.

Quelle distance doit parcourir :

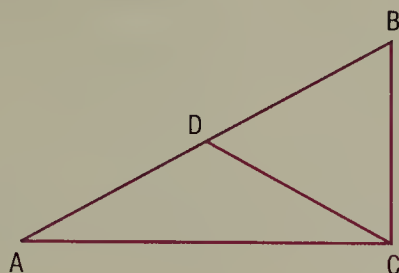
- Émile pour se rendre chez Claudine?
- Léo pour se rendre à l'arrêt d'autobus?
- Émile pour se rendre chez Léo?
- Léo pour se rendre chez Claudine?



Le réseau de la Société de transport de Montréal compte 196 lignes d'autobus. Les 1671 autobus du parc de véhicules de la STM parcourent près de 73 000 000 km/année.

RÉACTIVATION 2 D'une mesure à l'autre

Un enseignant d'éducation physique prépare un jeu pour ses élèves. Il délimite la surface de jeu en traçant des lignes blanches sur le gazon d'après le motif illustré ci-dessous.



Voici des renseignements concernant la surface de jeu :

- Le triangle ABC est rectangle en C.
- L'angle A mesure 30° .
- Le côté AB mesure 20 m.
- Le point D est situé au milieu du côté AB.

a. Déterminez :

- 1) $m\angle ACD$ 2) $m\angle BCD$ 3) $m\angle CBD$ 4) $m\angle BDC$

Pendant une partie, un joueur se trouve sur chacun des points A, B, C et D. Au coup de sifflet, tous les joueurs se déplacent vers un autre point. Le dernier joueur à atteindre le point vers lequel il se déplace est éliminé.

b. Calculez la distance que doit parcourir un joueur qui se déplace :

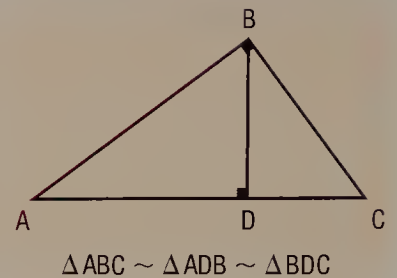
- 1) du point D au point A ;
- 2) du point A au point C ;
- 3) du point C au point D ;
- 4) du point B au point C.

On utilise habituellement de la poussière de marbre, de la peinture blanche ou de l'alumine calcinée broyée pour délimiter les zones de jeu sur une surface gazonnée.



RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

En abaissant la hauteur issue du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, on peut déterminer trois triangles rectangles semblables. À l'aide des mesures des côtés homologues des triangles ainsi formés, on peut établir des proportions et ainsi déduire certains énoncés géométriques.

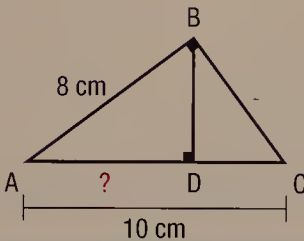


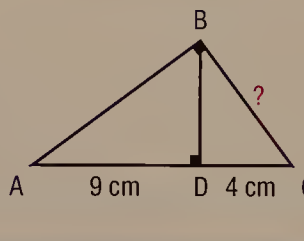
1. Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse entière, c'est-à-dire :

$$\frac{m \overline{AD}}{m \overline{AB}} = \frac{m \overline{AB}}{m \overline{AC}} \text{ ou } (m \overline{AB})^2 = m \overline{AD} \times m \overline{AC}$$

$$\frac{m \overline{CD}}{m \overline{BC}} = \frac{m \overline{BC}}{m \overline{AC}} \text{ ou } (m \overline{BC})^2 = m \overline{CD} \times m \overline{AC}$$

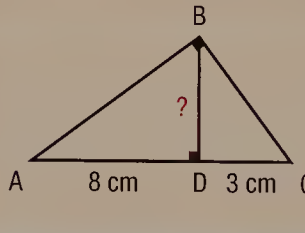
Ex. :

1)  $\frac{m \overline{AD}}{8} = \frac{8}{10}$
 $64 = 10 \times m \overline{AD}$
 $m \overline{AD} = 6,4 \text{ cm}$

2)  $\frac{4}{m \overline{BC}} = \frac{m \overline{BC}}{13}$
 $(m \overline{BC})^2 = 52$
 $m \overline{BC} = \sqrt{52} \text{ cm ou } \approx 7,21 \text{ cm}$

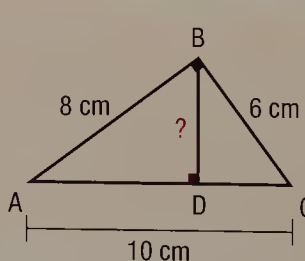
2. Dans un triangle rectangle, la mesure de la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse, c'est-à-dire :

$$\frac{m \overline{AD}}{m \overline{BD}} = \frac{m \overline{BD}}{m \overline{CD}} \text{ ou } (m \overline{BD})^2 = m \overline{AD} \times m \overline{CD}$$

Ex. :  $\frac{8}{m \overline{BD}} = \frac{m \overline{BD}}{3}$
 $(m \overline{BD})^2 = 24$
 $m \overline{BD} = \sqrt{24} \text{ cm ou } \approx 4,9 \text{ cm}$

3. Dans un triangle rectangle, le produit des mesures de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante égale le produit des mesures des côtés de l'angle droit, c'est-à-dire :

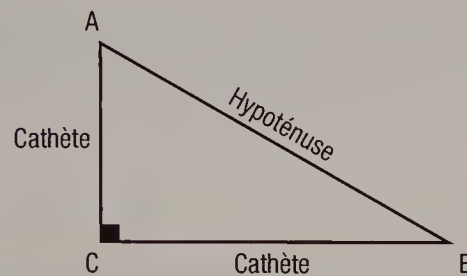
$$m \overline{AC} \times m \overline{BD} = m \overline{AB} \times m \overline{BC}$$

Ex. :  $10 \times m \overline{BD} = 8 \times 6$
 $m \overline{BD} = 4,8 \text{ cm}$

RELATION DE PYTHAGORE

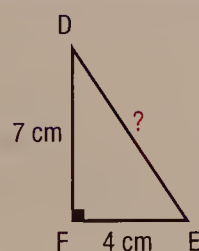
Dans un triangle rectangle :

- l'**hypoténuse** est le côté opposé à l'angle droit. C'est le plus long des trois côtés ;
- une **cathète** est un côté qui forme l'angle droit ;
- le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des cathètes.



$$\left(\begin{array}{c} \text{Mesure} \\ \text{de} \\ \text{l'hypoténuse} \end{array} \right)^2 = \left(\begin{array}{c} \text{mesure} \\ \text{d'une} \\ \text{cathète} \end{array} \right)^2 + \left(\begin{array}{c} \text{mesure} \\ \text{de l'autre} \\ \text{cathète} \end{array} \right)^2$$

Ex. : 1)



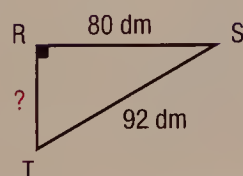
$$(m \overline{DE})^2 = (m \overline{DF})^2 + (m \overline{EF})^2$$

$$(m \overline{DE})^2 = 7^2 + 4^2$$

$$(m \overline{DE})^2 = 65$$

$$m \overline{DE} = \sqrt{65} \text{ cm ou } \approx 8,06 \text{ cm}$$

2)



$$(m \overline{ST})^2 = (m \overline{RS})^2 + (m \overline{RT})^2$$

$$92^2 = 80^2 + (m \overline{RT})^2$$

$$2064 = (m \overline{RT})^2$$

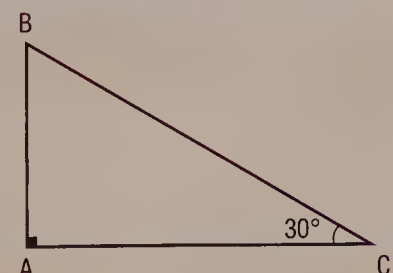
$$m \overline{RT} = \sqrt{2064} \text{ dm ou } \approx 45,43 \text{ dm}$$

RELATION FAISANT INTERVENIR UN ANGLE DE 30° DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Dans un triangle rectangle, la mesure du côté opposé à un angle de 30° est égale à la moitié de celle de l'hypoténuse.

Ex. : Dans le triangle rectangle ci-contre :

- si $m \overline{BC} = 10 \text{ cm}$, alors $m \overline{AB} = 5 \text{ cm}$;
- si $m \overline{AB} = 42 \text{ mm}$, alors $m \overline{BC} = 84 \text{ mm}$.

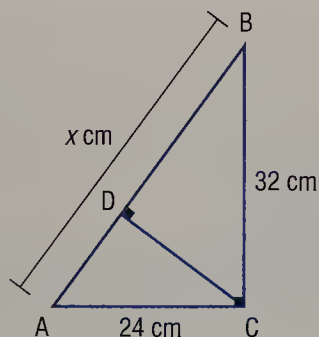


1

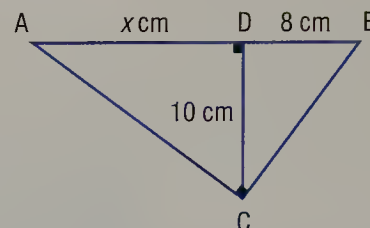
Pour chacune des figures ci-dessous :

- 1) déterminez la valeur associée à x ;
- 2) indiquez l'énoncé géométrique qui permet de faire ce calcul.

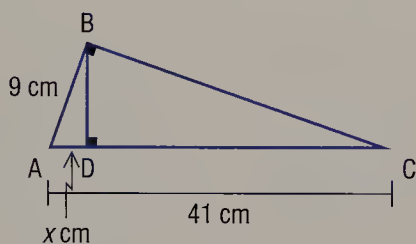
a)



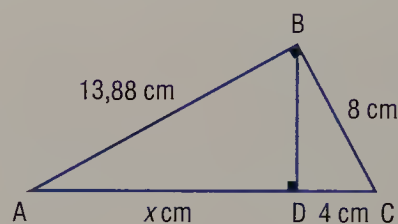
b)



c)



d)



2

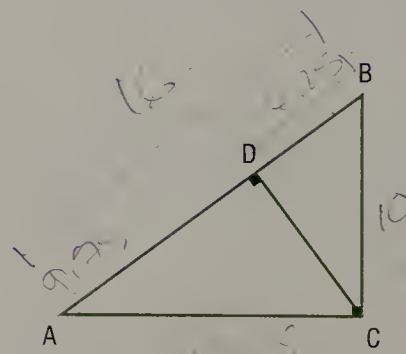
Dans le triangle ABC ci-contre, $m \overline{BC} = 10$ cm et $m \overline{AB} = 16$ cm.

Déterminez :

a) $m \overline{AC}$

b) $m \overline{CD}$

c) $m \overline{BD}$

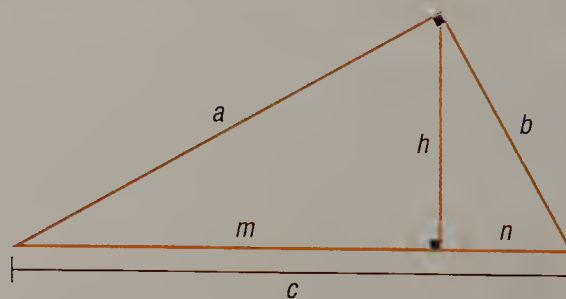


3

À l'aide de la figure suivante, complétez le tableau.

Mesures des segments

	a	b	c	m	n	h
a)	9	12				
b)				4		8
c)	10					6

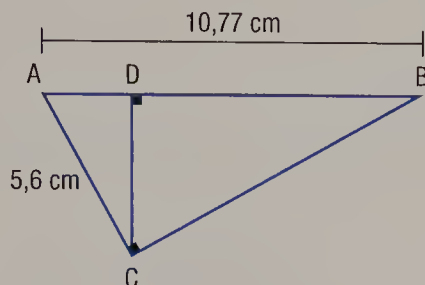


4

Calculez le périmètre d'un triangle rectangle dont la hauteur issue du sommet de l'angle droit partage l'hypoténuse en segments de 6 cm et de 4 cm.

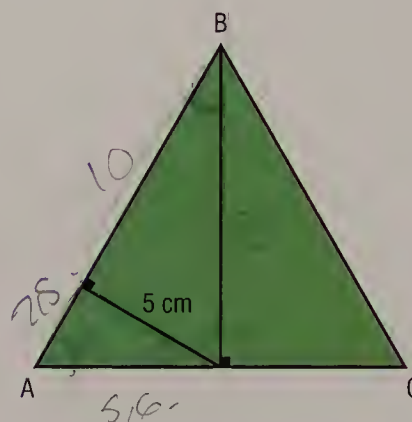
5

Dans le triangle rectangle ci-dessous, quelle est la mesure du segment AD ?



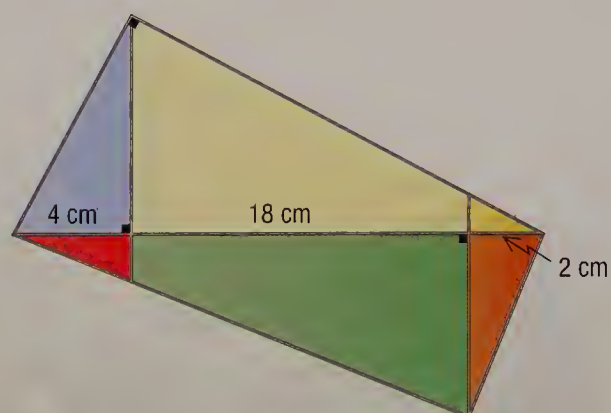
6

Calculez l'aire du triangle équilatéral ABC illustré ci-contre.



7

Un artisan est mandaté pour réparer le vitrail d'un bâtiment historique. L'illustration ci-dessous fournit des renseignements sur le vitrail qui doit être restauré.



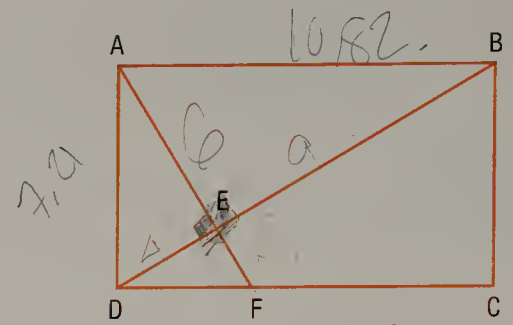
Sachant que les tarifs de l'artisan s'établissent à 1,25 \$/cm² de vitrail à réparer, déterminez les coûts de cette réparation.



Cette fenêtre, composée de trois panneaux de vitrail, qui représente un paysage sylvestre a été fabriquée en 1905 par Louis Comfort Tiffany. Les vitraux sont formés d'un assemblage de couches de verre de différentes couleurs, textures et épaisseurs, qui recréent, suivant la variation de lumière qui les traverse, l'aspect changeant d'une véritable forêt au cours d'une journée.

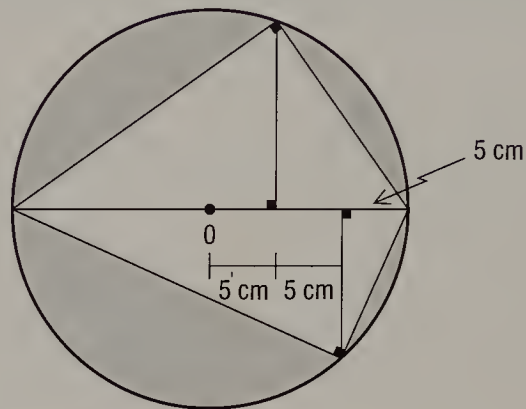
8

Dans le rectangle ABCD ci-contre, le segment AF est perpendiculaire à la diagonale BD. Le segment DE mesure 4 cm et le segment BE mesure 9 cm. Quelle est la mesure du segment EF?



9

Dans le disque de centre O ci-dessous, quelle est la mesure de la surface grise?

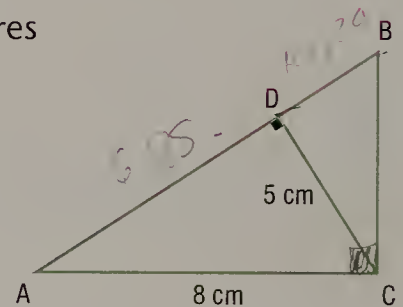


10

Le triangle ABC ci-contre est rectangle en C. Déterminez les mesures ci-dessous en indiquant l'énoncé géométrique sur lequel vous appuyez vos calculs.

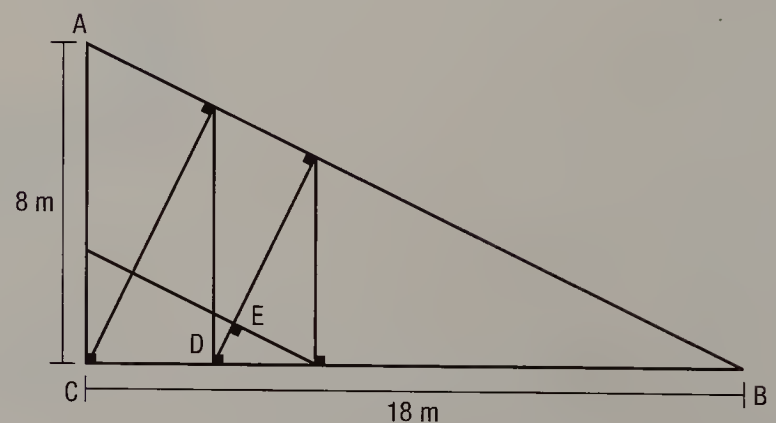
a) $m \overline{BD}$

b) $m \overline{CB}$



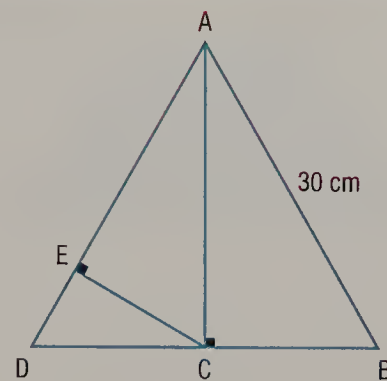
11

Le schéma ci-contre illustre une partie de la structure d'acier qui soutient un pont ferroviaire et dans laquelle la poutre DE doit être remplacée. Quelle est la longueur de la poutre à remplacer?



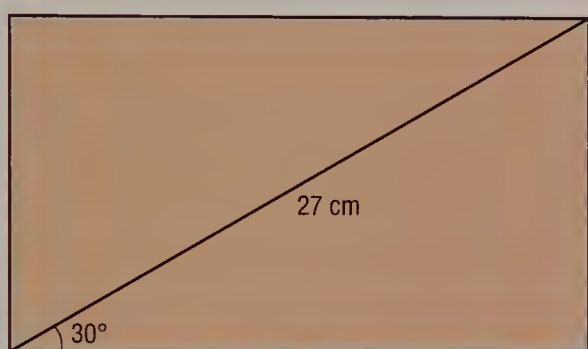
Pont qui enjambe le fleuve Zambèze et qui relie la Zambie au Zimbabwe, à proximité des chutes Victoria, en Afrique australe. Ce pont donne aussi accès au site commercial du plus haut saut à l'élastique du monde.

- 12** Dans le triangle équilatéral ABD ci-contre, déterminez la mesure du segment CE.

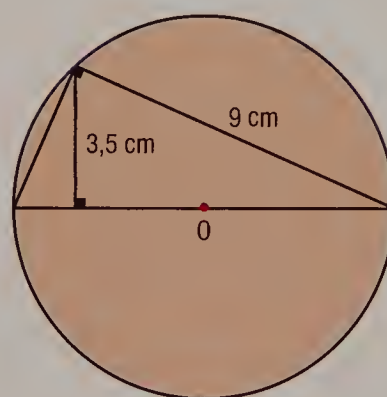


- 13** Calculez l'aire de chacune des figures suivantes.

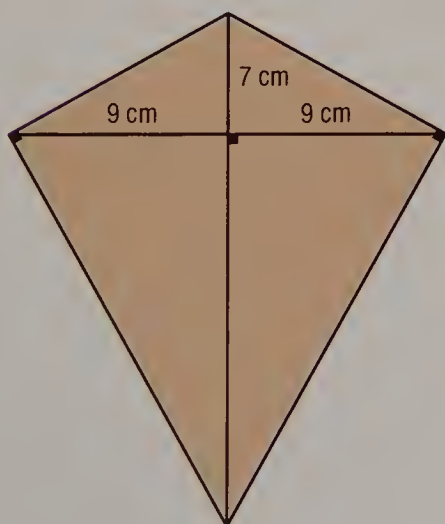
a) Rectangle



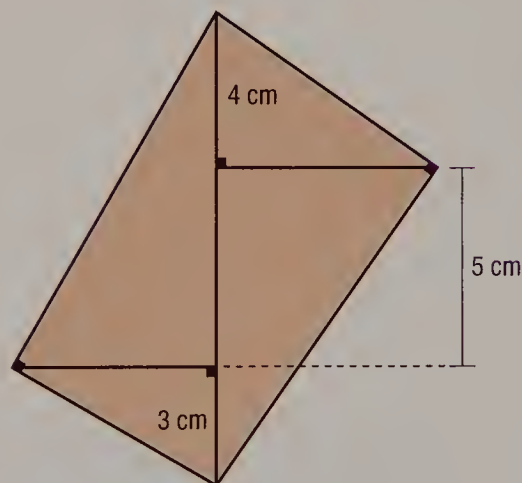
b) Cercle de centre O



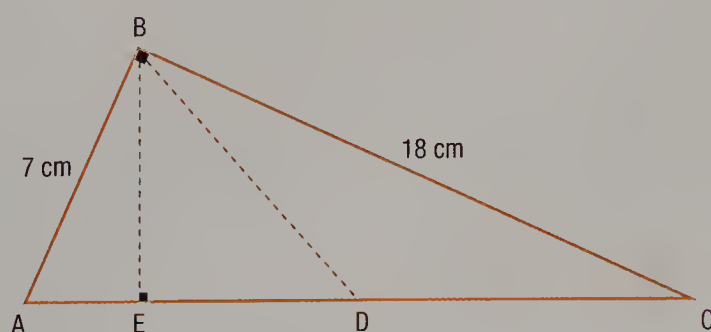
c) Cerf-volant



d) Quadrilatère



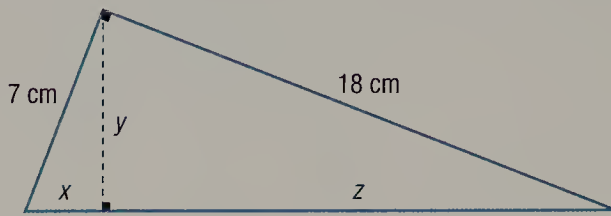
- 14** Dans le triangle rectangle ABC ci-contre, on trace la hauteur BE et la médiane BD. Quel est le périmètre du triangle BDE?



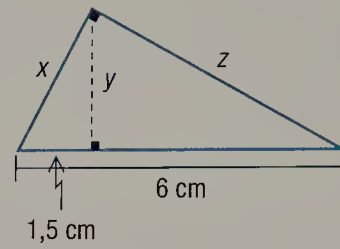
15

Dans chaque cas, déterminez les mesures associées à x , à y et à z .

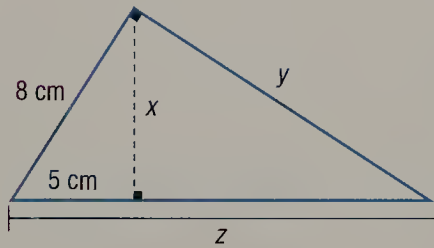
a)



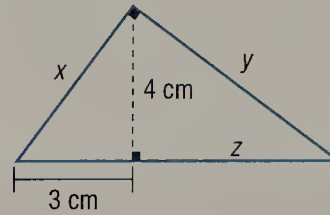
b)



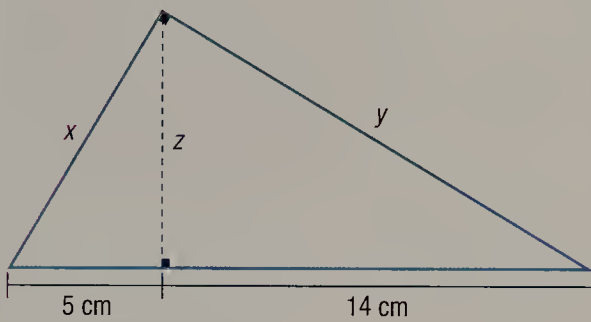
c)



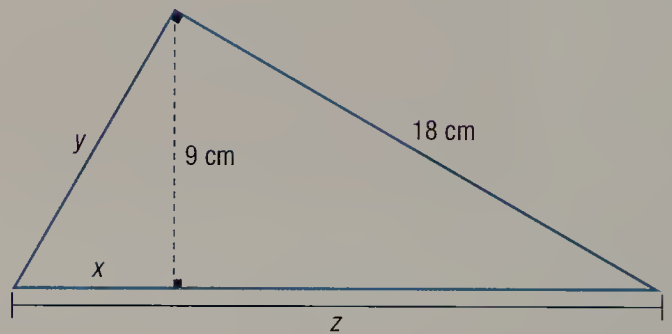
d)



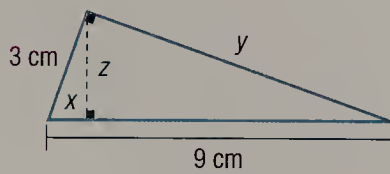
e)



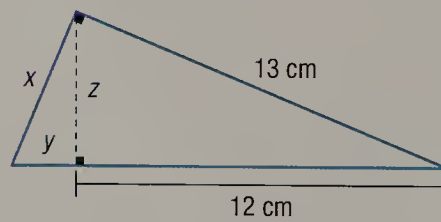
f)



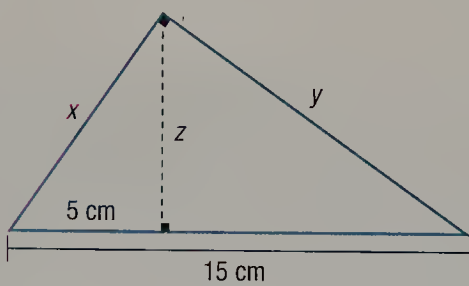
g)



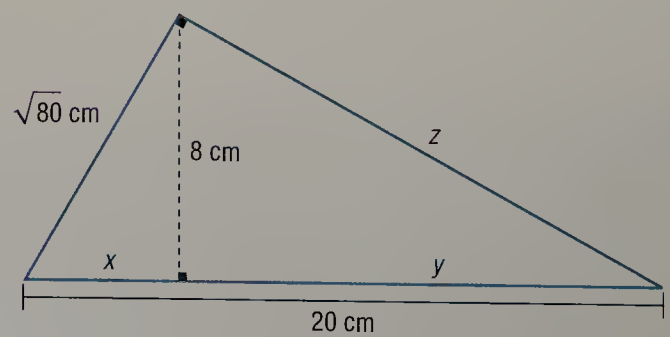
h)



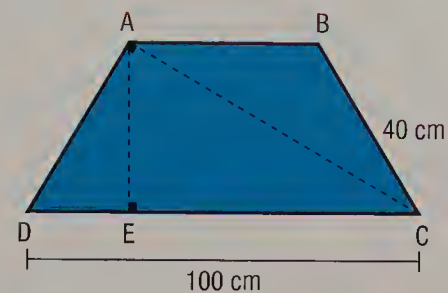
i)



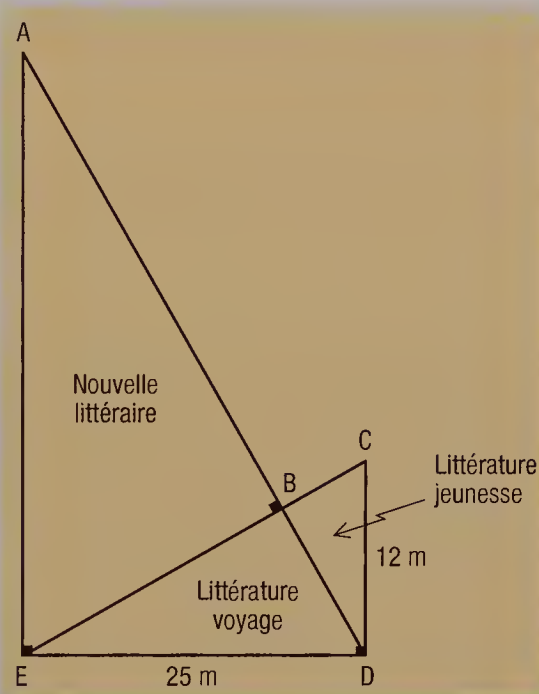
j)



- 16 Calculez l'aire du trapèze isocèle ABCD ci-contre.



- 17 Le plan ci-dessous montre la disposition des différentes sections d'un salon du livre. L'entrée principale est située au point A, une entrée de service est située au point C et des sorties de secours sont situées aux points D et E. Un kiosque d'information est installé au point B.



Quelle distance doit parcourir une personne qui se déplace :

- de l'entrée principale au kiosque d'information ?
- de l'entrée principale à la sortie de secours D ?
- du kiosque d'information à la sortie de secours D ?
- de l'entrée de service à la sortie de secours E ?

Le Salon du livre de Montréal est la plus grande foire du livre en Amérique. Cet événement annuel qui accueille près de 1000 exposants et plus de 120 000 visiteurs nécessite une planification méticuleuse.



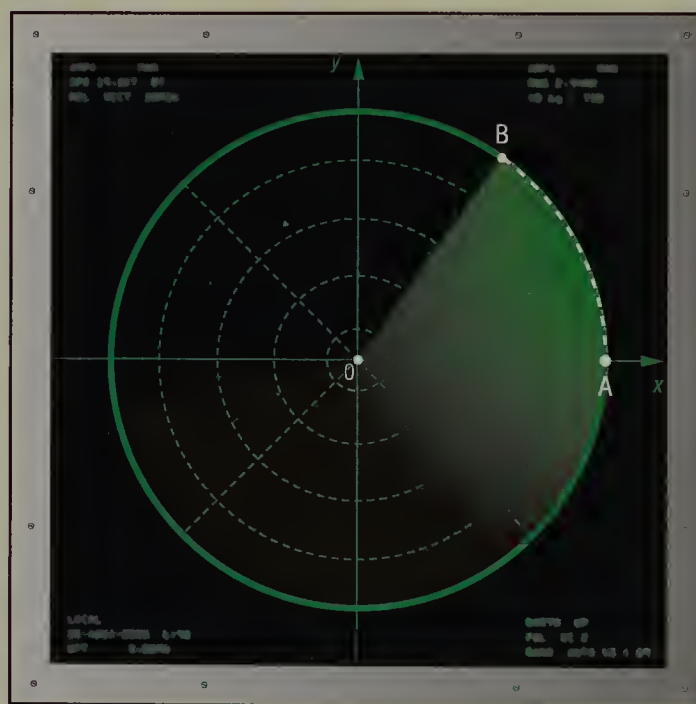
SECTION 5.1 Le cercle trigonométrique

Cette section est en lien avec les SAÉ 9 et 10.

PROBLÈME L'exercice de navigation

Lors d'un exercice de navigation, un officier suit le déplacement d'un navire en mer sur l'écran radar ci-dessous. Voici des renseignements à ce sujet:

- Les graduations de l'écran radar sont en kilomètres.
- Le radar est situé au centre de l'écran.
- Le navire se déplace du point A au point B sur un arc de cercle de 1 km de longueur.
- Tout au long de l'exercice, le navire se trouve à une distance de 1 km du radar.



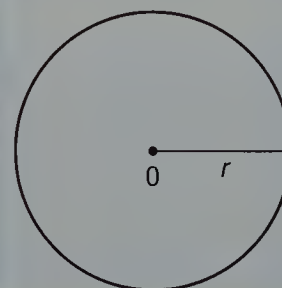
Quelles sont les coordonnées du navire au point B ?

Écran radar d'un navire approchant la côte néerlandaise, près de Rotterdam. La côte est représentée par la partie jaune, au bas de l'écran. Un faisceau hertzien balaye la région tout autour du navire représenté par le point au centre de l'écran. Un récepteur enregistre la réflexion des objets croisés par le faisceau tels que des rochers ou d'autres navires.

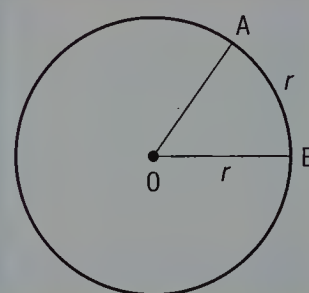
ACTIVITÉ 1 Une unité de mesure radieuse

Le terme *radian* a été utilisé pour la première fois en 1873 par James Thomson, professeur au Queen's College de Belfast, en Irlande. C'est en analysant différentes situations qui mettent à profit un cercle que Thomson a découvert cette unité de mesure d'angle.

- a. Dans le cercle ci-contre, lorsqu'un rayon effectue une rotation complète autour du centre O :
- 1) quelle est la mesure, en degrés, de l'angle au centre engendré par la rotation du rayon ?
 - 2) quelle est la distance parcourue par l'extrémité du rayon ?



- b. Dans l'illustration ci-contre :
- 1) combien de fois la longueur de l'arc AB est-elle comprise dans la circonférence du cercle de centre O ?
 - 2) quelle est la mesure, en degrés, de l'angle AOB ?

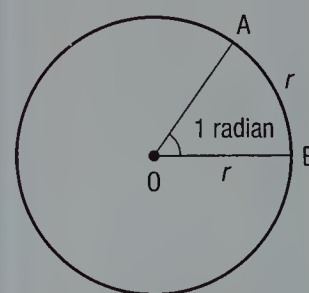


- c. L'illustration ci-contre montre un angle au centre dont la mesure est de 1 radian. Quelle est la particularité de la longueur de l'arc intercepté par cet angle ?

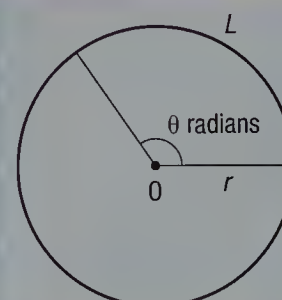
- d. Quelle est la mesure, en radians :
- 1) d'un angle plein ?
 - 2) d'un angle plat ?
 - 3) d'un angle droit ?
 - 4) d'un angle de n° ?

- e. Quelle est la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de :

- 1) 1 radian ?
- 2) 2 radians ?
- 3) 4,5 radians ?
- 4) 8,71 radians ?



- f. L'illustration ci-contre montre un angle au centre de θ radians qui intercepte un arc de L cm sur un cercle de r cm de rayon. Exprimez L en fonction de θ et de r .





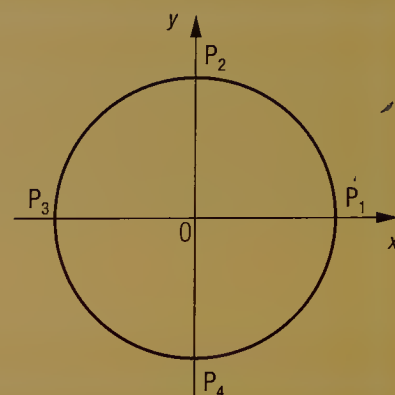
ACTIVITÉ 2 Des points remarquables

Les *Sulbasutras* sont un recueil de textes mathématiques indiens qui comprend de nombreuses notions de géométrie et d'architecture. La plus ancienne utilisation du sinus est documentée dans les *Sulbasutras*, rédigés il y a environ 2700 ans. On y trouve, entre autres, la valeur exacte du sinus d'un angle de 45° , soit $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On a représenté ci-contre un cercle centré à l'origine du plan cartésien et dont le rayon est de 1 unité.

a. Quelles sont les coordonnées du point :

- 1) P_1 ?
- 2) P_2 ?
- 3) P_3 ?
- 4) P_4 ?



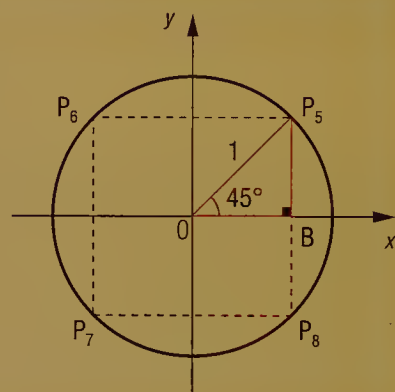
b. Dans l'illustration ci-contre, les points P_5 , P_6 , P_7 et P_8 sont symétriques par rapport aux axes.

- 1) De quel type est le triangle BOP_5 ?
- 2) Quelle est la mesure, en radians, de l'angle BOP_5 ?

c. Montrez que les coordonnées du point P_5 sont $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

d. D'après les coordonnées du point P_5 , déduisez celles du point :

- 1) P_6
- 2) P_7
- 3) P_8



e. Dans l'illustration ci-contre, les points P_9 , P_{10} , P_{11} et P_{12} sont symétriques par rapport aux axes.

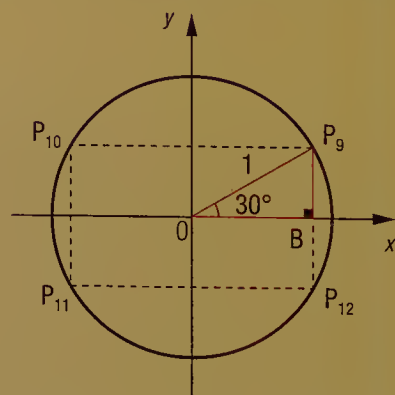
- 1) De quel type est le triangle BOP_9 ?
- 2) Quelle est la mesure, en radians, de l'angle BOP_9 ?

f. 1) Quel énoncé géométrique permet d'affirmer que l'ordonnée du point P_9 est $\frac{1}{2}$?

- 2) Montrez que l'abscisse du point P_9 est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

g. D'après les coordonnées du point P_9 , déduisez celles du point :

- 1) P_{10}
- 2) P_{11}
- 3) P_{12}



h. Dans l'illustration ci-contre, les points P_{13} , P_{14} , P_{15} et P_{16} sont symétriques par rapport aux axes.

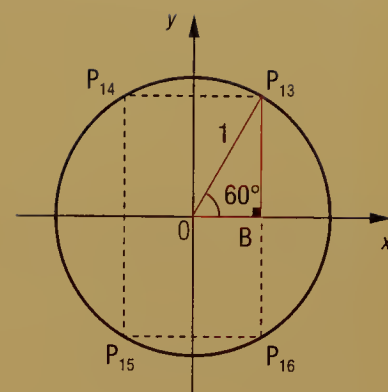
- 1) De quel type est le triangle BOP_{13} ?
- 2) Quelle est la mesure, en radians, de l'angle BOP_{13} ?

i. 1) Quel énoncé géométrique permet d'affirmer que l'abscisse du point P_{13} est $\frac{1}{2}$?

- 2) Montrez que l'ordonnée du point P_{13} est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

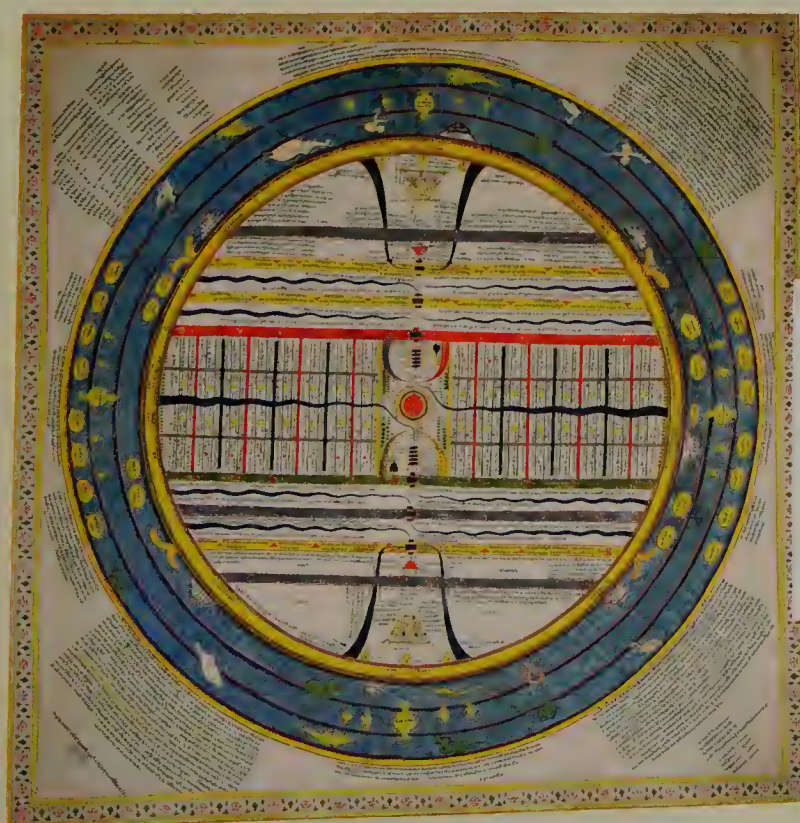
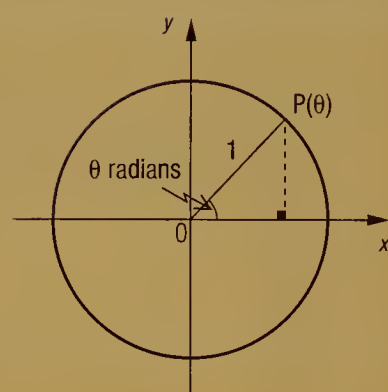
j. D'après les coordonnées du point P_{13} , déduisez celles du point:

- 1) P_{14}
- 2) P_{15}
- 3) P_{16}



k. Dans l'illustration ci-contre, quel rapport trigonométrique de l'angle mesurant θ radians permet de déterminer:

- 1) l'abscisse du point P?
- 2) l'ordonnée du point P?



Les *Sulbasutras* ont été rédigés en sanskrit, la langue sacrée et la langue littéraire de l'Inde ancienne, la civilisation brahmanique. *Sulba* fait référence aux cordes utilisées pour effectuer des mesures et *sutras* signifie « ensemble de règles ». Ci-contre, un document en sanskrit représentant le diagramme de l'Univers de la cosmologie hindoue.

ACTIVITÉ 3 La torréfaction

Avant d'être utilisés, certains aliments doivent être torréfiés, c'est-à-dire qu'ils doivent être grillés afin de réduire leur taux d'humidité et de développer leur arôme. C'est le cas notamment de certaines noix, des fèves de cacao et des grains de café. La torréfaction se fait dans un appareil généralement cylindrique, appelé torréfacteur. Cet appareil est muni d'un ou de plusieurs agitateurs qui permettent de torréfier uniformément les grains de café sans les brûler.

Voici des renseignements concernant le torréfacteur illustré ci-dessous :

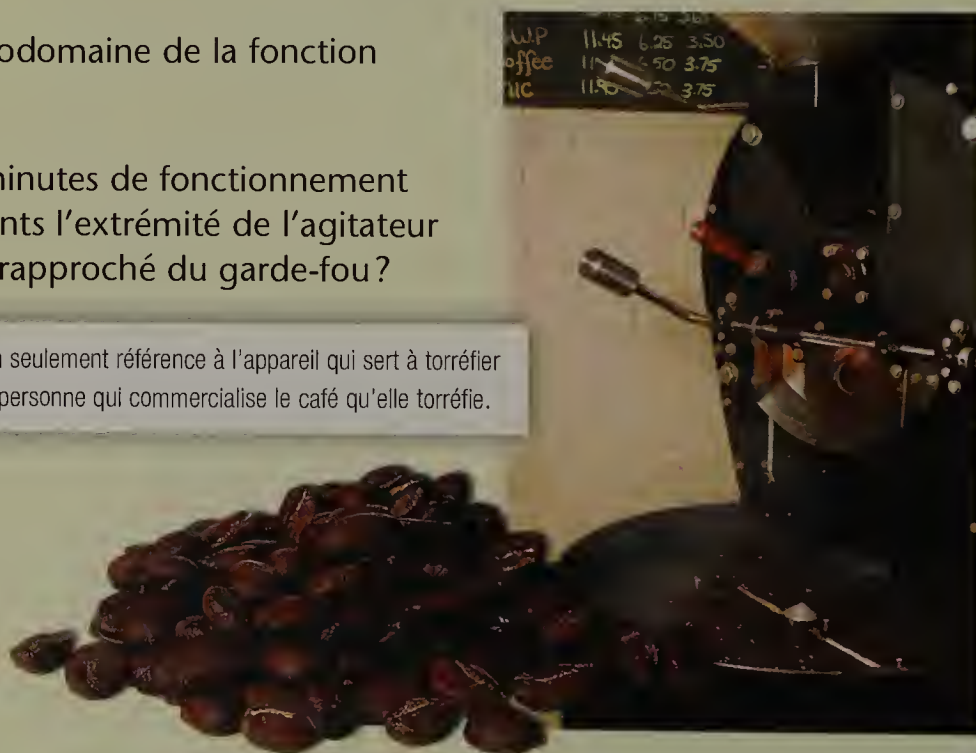
- Le diamètre de la cuve circulaire est de 1,8 m.
- L'agitateur, représenté par le segment AB, tourne dans le sens antihoraire et prend 10 s pour faire un tour complet.
- Un garde-fou est installé à 50 cm du bord de la cuve afin d'éviter les brûlures.
- Au moment d'être mis en marche, l'extrémité de l'agitateur est située au point le plus rapproché du garde-fou.

Vue de dessus d'un torréfacteur

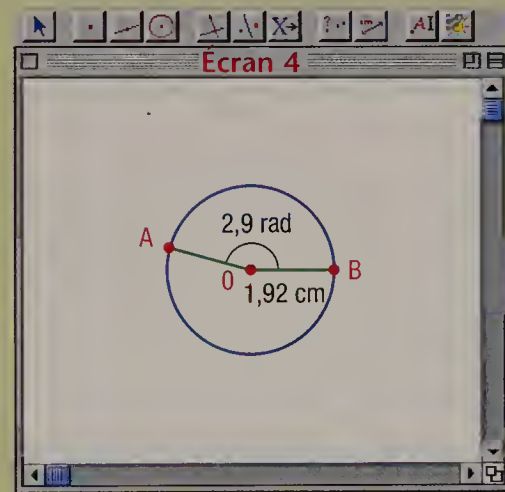
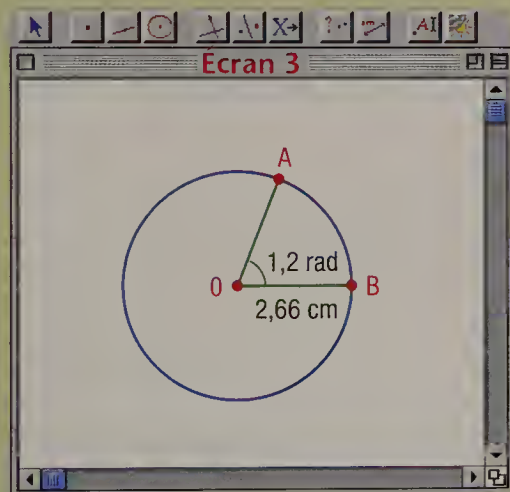
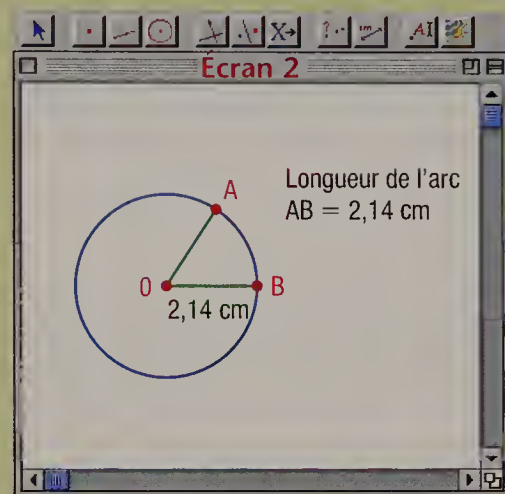
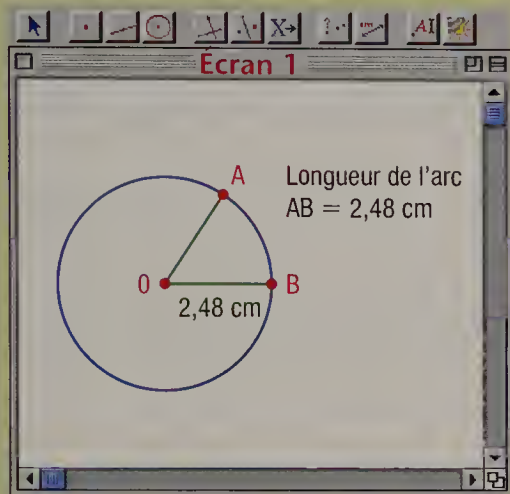


- Représentez graphiquement la fonction qui permet de déterminer la distance (en cm) qui sépare l'extrémité de l'agitateur du garde-fou en fonction du temps (en s) pendant la première minute de fonctionnement du torréfacteur.
- Déterminez le domaine et le codomaine de la fonction associée à cette situation.
- Au cours des trois premières minutes de fonctionnement du torréfacteur, à quels moments l'extrémité de l'agitateur est-elle située au point le plus rapproché du garde-fou ?

Le terme *torréfacteur* fait non seulement référence à l'appareil qui sert à torréfier les aliments, mais aussi à la personne qui commercialise le café qu'elle torréfie.



Un logiciel de géométrie dynamique permet de calculer certaines mesures en lien avec le cercle. En utilisant principalement les outils CERCLE, SEGMENT, MESURE D'ANGLE et DISTANCE ET LONGUEUR, il est possible de construire un cercle et de déterminer des mesures d'angles et des mesures d'arcs.

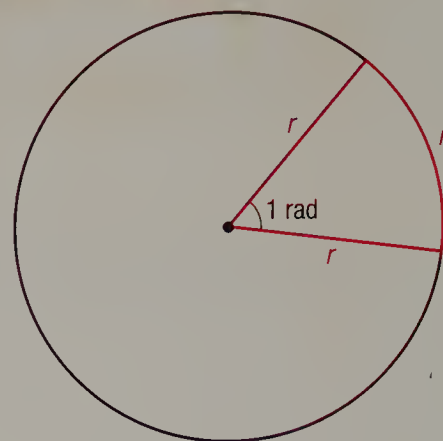


- a. Déterminez, pour chacun des écrans 1 et 2, la mesure de l'angle AOB :
 - 1) en radians;
 - 2) en degrés.
- b. Dans un cercle, que pouvez-vous dire de la mesure, en radians, d'un angle au centre qui intercepte un arc dont la longueur correspond au rayon du cercle?
- c. Déterminez, pour chacun des écrans 3 et 4 :
 - 1) la mesure, en degrés, de l'angle AOB;
 - 2) la longueur de l'arc AB.
- d.
 - 1) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construisez un cercle de 3 cm de rayon et qui a un angle au centre dont la mesure est de 2,25 rad.
 - 2) Déterminez la longueur de l'arc intercepté par cet angle au centre.

RADIAN

Tout comme le degré, le **radian**, noté rad, est une unité de mesure d'angle. Dans un cercle, un radian est la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc dont la longueur correspond au rayon du cercle.

Lorsque l'unité de mesure d'un angle n'est pas mentionnée, on considère qu'elle est donnée en radians. Un angle plein mesure 2π rad, soit $\approx 6,28$ rad.



Il est possible de passer d'une mesure d'angle, en radians, à une mesure d'angle, en degrés, et vice versa, à l'aide de l'équivalence suivante.

$$\frac{n^\circ}{360^\circ} = \frac{\theta \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}}$$

Ex.: 1) La mesure, en degrés, d'un angle de 5 rad est:

$$\frac{n^\circ}{360^\circ} = \frac{5 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} \Rightarrow n = \frac{5 \times 360}{2\pi} = \frac{1800}{2\pi} = \left(\frac{900}{\pi}\right)^\circ, \text{ soit } \approx 286,48^\circ.$$

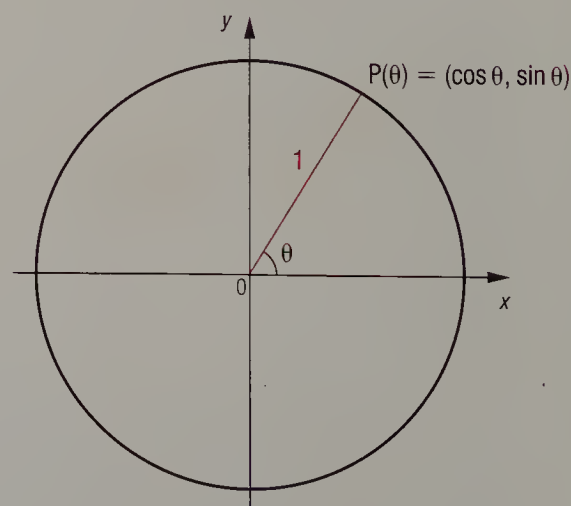
2) La mesure, en radians, d'un angle de 40° est:

$$\frac{40^\circ}{360^\circ} = \frac{\theta \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} \Rightarrow \theta = \frac{40 \times 2\pi}{360} = \frac{80\pi}{360} = \frac{2\pi}{9} \text{ rad, soit } \approx 0,7 \text{ rad.}$$

CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

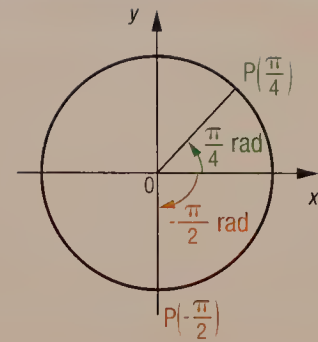
Le **cercle trigonométrique** est un cercle centré à l'origine du plan cartésien dont le rayon est de 1 unité. Dans le cercle trigonométrique:

- lorsqu'on applique une rotation autour de l'origine de la partie positive de l'axe des abscisses, l'angle de rotation correspond à un angle trigonométrique;
- un angle trigonométrique peut être positif (sens de rotation antihoraire) ou négatif (sens de rotation horaire);
- les coordonnées d'un point trigonométrique $P(\theta)$ sont $(\cos \theta, \sin \theta)$, où θ correspond à la mesure de l'angle trigonométrique exprimée en radians.

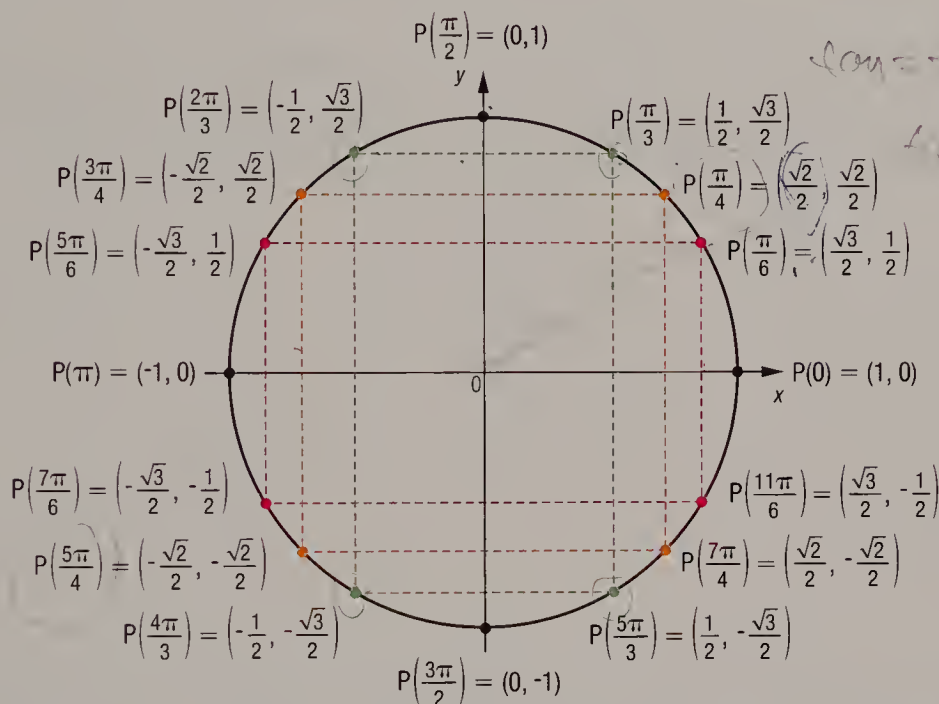


Ex.: Dans le cercle ci-contre:

- les coordonnées du point trigonométrique $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$ sont $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,
puisque $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- les coordonnées du point trigonométrique $P\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ sont $(0, -1)$,
puisque $\cos-\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin-\frac{\pi}{2} = -1$.

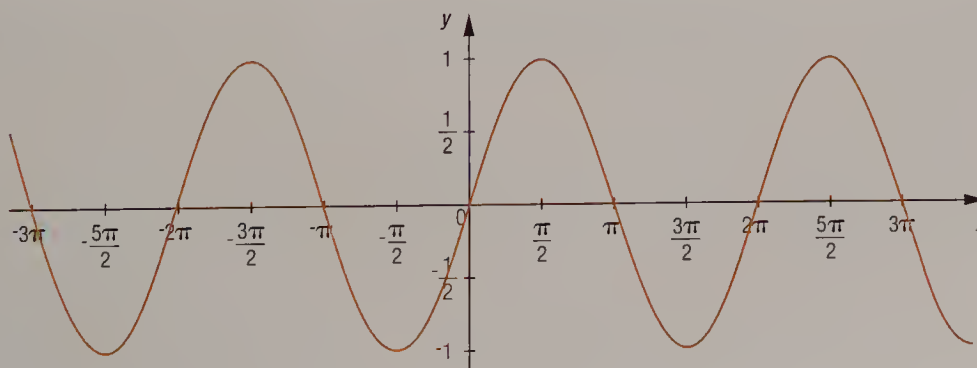


Voici les principaux points trigonométriques ainsi que leurs coordonnées.

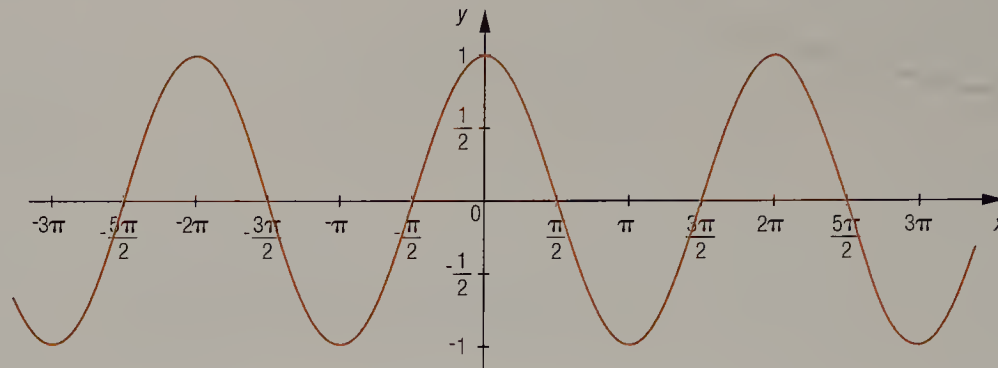


Du cercle trigonométrique, il est possible de déduire que:

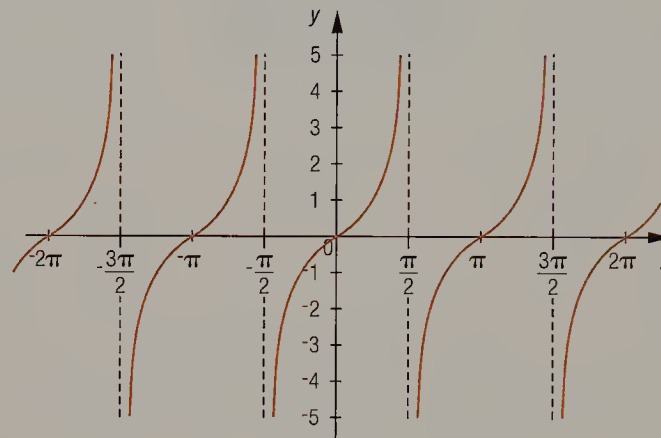
- la règle de la fonction f qui permet de calculer l'ordonnée d'un point trigonométrique en fonction de la mesure x (en rad) de l'angle trigonométrique est $f(x) = \sin x$. Voici la représentation graphique de cette fonction:



- la règle de la fonction f qui permet de calculer l'abscisse d'un point trigonométrique en fonction de la mesure x (en rad) de l'angle trigonométrique est $f(x) = \cos x$. Voici la représentation graphique de cette fonction :



- la règle de la fonction f qui permet de calculer le rapport de l'ordonnée d'un point trigonométrique à son abscisse en fonction de la mesure x (en rad) de l'angle trigonométrique est $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$. Voici la représentation graphique de cette fonction :

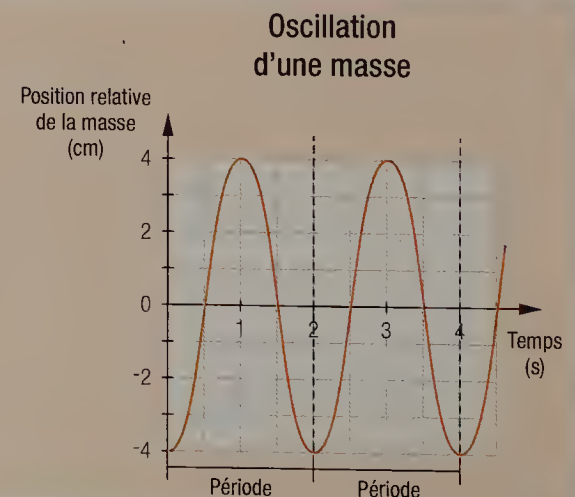


FONCTION PÉRIODIQUE

- Une fonction est dite périodique lorsque sa représentation graphique est constituée d'un « motif » qui se répète.
- L'écart entre les abscisses situées aux extrémités de ce « motif » correspond à la période de la fonction.
- Les fonctions sinus, cosinus et tangente sont des fonctions périodiques.

Ex. : Le comportement d'une masse suspendue à un ressort qui oscille verticalement sans friction peut être modélisé par une fonction périodique.

D'après ce graphique, on déduit que la masse revient à sa position initiale toutes les 2 s. La période de la fonction est donc de 2 s.



1 Exprimez chacune des mesures suivantes en radians.

- a) 350° b) 5° c) 140° d) 10°
e) 25° f) 70° g) -10° h) -110°

2 Exprimez chacune des mesures suivantes en degrés.

- a) $\frac{\pi}{6}$ rad b) $\frac{5\pi}{12}$ rad c) $\frac{3\pi}{20}$ rad d) 3π rad
e) 7 rad f) $-\frac{\pi}{5}$ rad g) -2 rad h) $0,75$ rad

3 Indiquez dans quel quadrant du plan cartésien se situe chacun des points trigonométriques suivants.

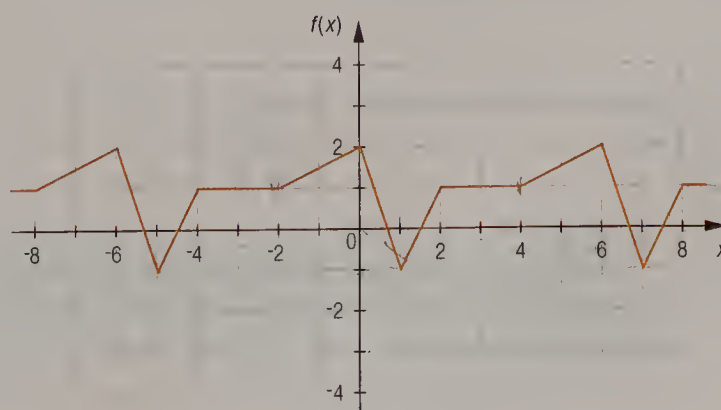
- a) $P\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ b) $P\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ c) $P\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ d) $P\left(\frac{7\pi}{3}\right)$
e) $P(4)$ f) $P(-2)$ g) $P(10)$ h) $P(90)$

4 Déterminez la valeur exacte de chacune des expressions suivantes.

- a) $\tan 0$ b) $\tan \frac{\pi}{6}$ c) $\tan \frac{\pi}{4}$ d) $\tan \frac{\pi}{3}$
e) $\tan \frac{\pi}{2}$ f) $\tan \frac{2\pi}{3}$ g) $\tan \frac{3\pi}{4}$ h) $\tan \frac{5\pi}{6}$
i) $\tan \frac{3\pi}{2}$ j) $\tan \frac{5\pi}{3}$ k) $\tan \frac{7\pi}{4}$ l) $\tan \frac{11\pi}{6}$

5 Voici la représentation graphique d'une fonction périodique.

- a) Quelle est la période de cette fonction?
b) Déterminez le codomaine de cette fonction.
c) Déterminez:
1) $f(-3)$
2) $f(12)$
3) $f(-20)$



6

Associez chacune des descriptions de la colonne de gauche à une représentation de la colonne de droite.

A

Ensemble des points trigonométriques $P(\theta)$ tels que $\sin \theta \geq 0$.

B

Ensemble des points trigonométriques $P(\theta)$ tels que $\cos \theta \leq 0$.

C

Ensemble des points trigonométriques $P(\theta)$ tels que $\sin \theta = \cos \theta$.

D

Ensemble des points trigonométriques $P(\theta)$ tels que $\sin \theta \geq \cos \theta$.

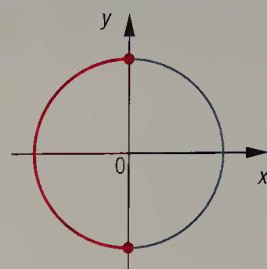
E

Ensemble des points trigonométriques $P(\theta)$ tels que $\tan \theta \geq 0$.

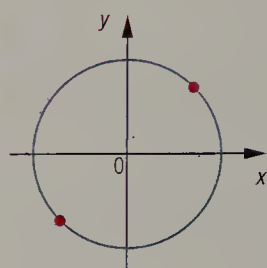
F

Ensemble des points trigonométriques $P(\theta)$ tels que $\tan \theta$ est non définie.

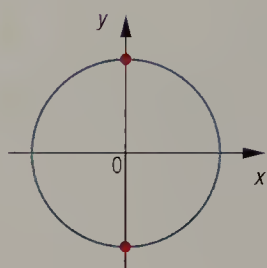
1



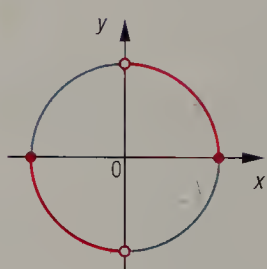
2



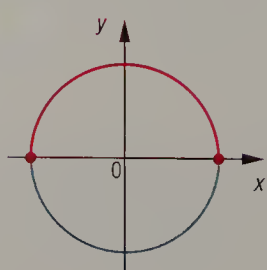
3



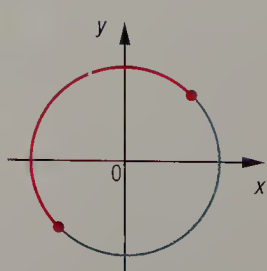
4



5



6

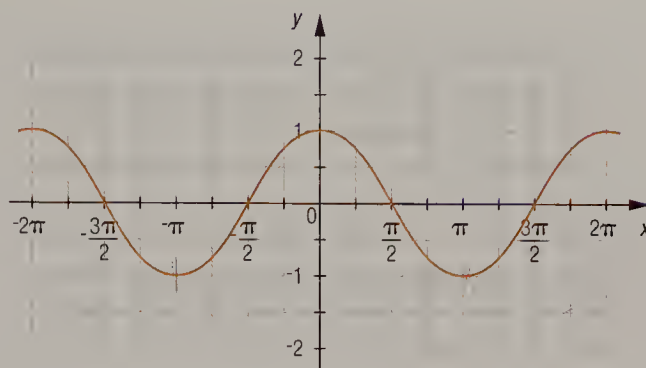
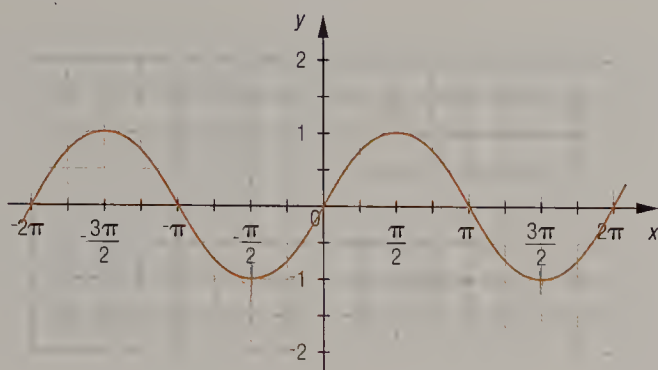


7 Pour chacune des fonctions périodiques représentées ci-dessous, déterminez:

- 1) le maximum; 2) le minimum; 3) la période.

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = \cos x$



8 Dans chaque cas, donnez la mesure, en radians, de l'angle au centre engendré par la rotation du rayon d'un cercle s'il effectue:

- a) 1 tour complet dans le sens antihoraire; b) $\frac{1}{4}$ tour dans le sens horaire;
c) $\frac{3}{2}$ tour dans le sens horaire; d) $\frac{2}{3}$ tour dans le sens antihoraire;
e) $\frac{1}{12}$ tour dans le sens antihoraire; f) $\frac{5}{8}$ tour dans le sens horaire;
g) $\frac{5}{4}$ tour dans le sens horaire; h) $\frac{3}{7}$ tour dans le sens antihoraire.

9 Un angle au centre de θ rad intercepte sur un cercle de r cm de rayon un arc d'une longueur de L cm. Complétez le tableau suivant.

L	r	θ
	6	$\frac{\pi}{5}$
3		1,8
16	4	
	18	2,1
9		4,56
1	9	

$$L = r \cdot \theta$$

10 Existe-t-il une fonction périodique dont la réciproque est aussi une fonction? Expliquez votre réponse.

11 Sachant que $P(\theta) = (a, b)$, déterminez les coordonnées de chacun des points trigonométriques suivants.

- a) $P(\theta + \pi)$ b) $P(\theta - \pi)$ c) $P\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$
d) $P\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ e) $P\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right)$ f) $P\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)$

12 Pour chacun des points trigonométriques ci-dessous, déterminez :

- 1) dans quel quadrant du plan cartésien il se trouve ;
- 2) à quelle mesure d'angle de l'intervalle $[0, 2\pi]$ il est associé.

- a) $P\left(\frac{171\pi}{4}\right)$ b) $P\left(-\frac{293\pi}{2}\right)$ c) $P\left(\frac{218\pi}{3}\right)$
d) $P\left(-\frac{821\pi}{2}\right)$ e) $P\left(\frac{625\pi}{6}\right)$ f) $P\left(-\frac{175\pi}{3}\right)$

13 Pour chaque point trigonométrique P , déterminez toutes les valeurs possibles pour la coordonnée manquante.

- a) $P\left(\square, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $P\left(\square, -\frac{1}{2}\right)$ c) $P(0, \square)$
d) $P\left(\square, \frac{3}{5}\right)$ e) $P\left(-\frac{5}{6}, \square\right)$ f) $P\left(\frac{2}{3}, \square\right)$

14 Expliquez pourquoi la tangente d'un angle de $\frac{3\pi}{2}$ rad n'est pas définie.

15 Parmi les points trigonométriques suivants, associez ceux dont les coordonnées sont les mêmes.

A $P\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

B $P\left(\frac{101\pi}{6}\right)$

C $P\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

D $P\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

E $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$

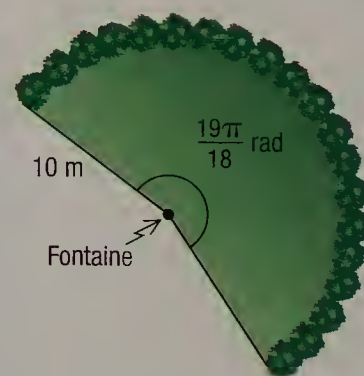
F $P\left(\frac{20\pi}{3}\right)$

G $P\left(-\frac{67\pi}{3}\right)$

H $P\left(-\frac{107\pi}{6}\right)$

16 L'aménagement paysager illustré ci-contre est tel que chaque cèdre qui compose la haie est situé à égale distance de la fontaine.

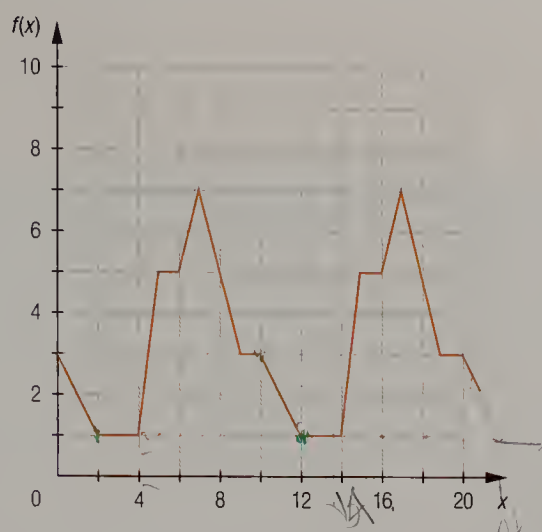
- a) Quelle est la longueur de cette haie ?
- b) Combien coûte l'aménagement de cette haie si un cèdre coûte 4,50 \$ et qu'on plante un cèdre tous les 30 cm ?



Le conifère que l'on nomme *cèdre* au Québec et que l'on utilise pour former des haies hautes et fournies est appelé *thuya* dans le reste de la francophonie. Le thuya est un conifère proche du genévrier, alors que le *cèdre véritable* est un grand conifère d'Asie et d'Afrique qui appartient à la famille des pins.

17

Voici la représentation graphique d'une fonction périodique.



- Quelle est la période de cette fonction?
- Déterminez:
 - $f(13)$
 - $f(24)$
 - $f(41)$

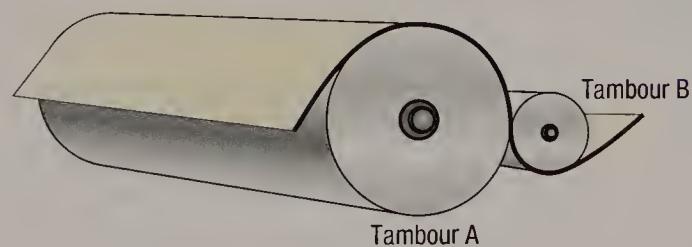
18

STATION SPATIALE INTERNATIONALE L'altitude moyenne de la Station spatiale internationale (SSI) est de 347 km alors que le rayon moyen de la Terre est de 6371 km.

- Quel est le rayon moyen de l'orbite de la SSI?
- La SSI effectue un tour complet de son orbite en 91 min. À quelle vitesse se déplace la SSI:
 - en radians par seconde?
 - en mètres par seconde?
 - en kilomètres à l'heure?

19

Dans une papetière, la rotation du tambour A entraîne la rotation du tambour B. L'illustration ci-contre montre ces deux tambours en forme de cylindre circulaire droit. Le tambour A tourne à une vitesse de 3,2 rad/s. Quelle est la vitesse de rotation du tambour B si son rayon équivaut aux deux tiers de celui du tambour A?



Le Canada figure parmi les cinq plus grands producteurs de papier du monde, avec les États-Unis, la Chine, le Japon et l'Allemagne.

20

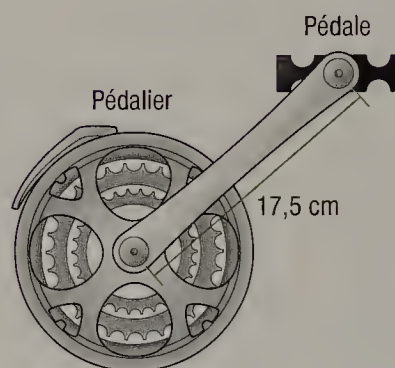
Comme le montre l'illustration ci-dessous, une sonde spatiale quitte l'orbite circulaire de centre O_1 au point A et se déplace en ligne droite jusqu'au point D. Elle se déplace ensuite du point D au point C sur l'orbite circulaire de centre O_2 , puis revient en ligne droite jusqu'au point E. Quelle est la distance parcourue par la sonde spatiale ?



21

Quelle est la longueur de l'arc engendré par la rotation du pédalier illustré ci-dessous lorsque celui-ci tourne de :

- a) 1,5 rad ?
- b) 4 rad ?
- c) 6 rad ?



22

TORE DE STANFORD Le tore de Stanford est un design d'habitat proposé pour créer un environnement de gravité artificielle pour une éventuelle colonisation de l'espace. La règle $R = 9,81 \left(\frac{30}{\pi v} \right)^2$ permet de calculer le rayon R (en m) d'un tore de Stanford en fonction de sa vitesse de rotation v (en nombre de tours/min) pour que le tore puisse produire une gravité artificielle équivalente à la gravité terrestre. Quel est le rayon minimal d'un tore de Stanford si sa vitesse de rotation est inférieure à 12 rad/min ?

Illustration de l'intérieur d'un tore de Stanford

Cette section est en lien
avec la SAÉ 9.

PROBLÈME Les courants de marée

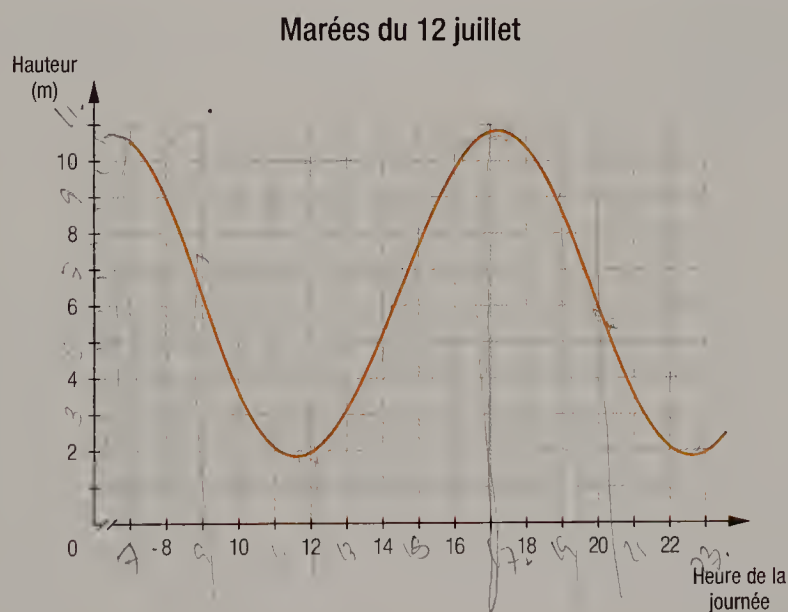
Un courant de marée est un déplacement horizontal de l'eau provoqué par l'action des marées. À marée montante, le courant de marée se déplace vers la côte, tandis qu'à marée descendante le courant de marée se déplace vers le large.

Une personne qui navigue en voilier doit tenir compte des courants de marée avant de quitter un quai ou une marina. Un courant de marée qui se déplace vers la côte peut nuire à la sortie du voilier, tandis qu'un courant de marée qui se déplace vers le large est avantageux.

La table de valeurs et le graphique ci-dessous fournissent des renseignements sur les marées du 12 juillet dans une région donnée.

Marées du 12 juillet

Heure	Hauteur (m)
7:10	10,1
8:05	8,6
9:00	6,35
9:55	4,1
10:50	2,6
11:45	1,85
12:40	2,6
13:35	4,1
14:30	6,35
15:25	8,6
16:20	10,1
17:15	10,85



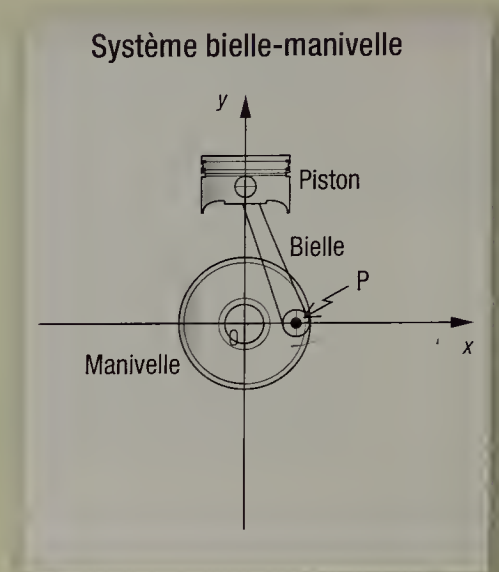
À quels moments pendant la journée du 19 juillet, est-il préférable pour un voilier de quitter le quai ?

ACTIVITÉ 1 Le système bielle-manivelle

Le système bielle-manivelle est un mécanisme développé au xv^e siècle qui permet de transformer un mouvement rectiligne en un mouvement de rotation et vice versa.

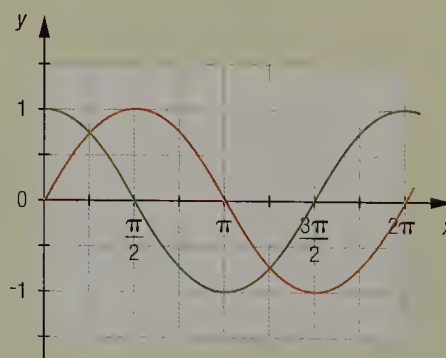
L'illustration ci-contre montre un système bielle-manivelle qui a les caractéristiques suivantes.

- Le centre de la manivelle correspond à l'origine du plan cartésien.
- Le point d'attache P qui relie la bielle à la manivelle est situé à 1 dm du centre de la manivelle.
- Lorsque le système est au repos, le point d'attache P est situé sur la partie positive de l'axe des abscisses.
- Lorsque le système se met en marche, la manivelle tourne dans le sens antihoraire.



- a. Quel est l'angle de rotation (en rad) engendré lorsque la manivelle effectue :
- 1) 1 tour complet?
 - 2) $\frac{1}{2}$ tour?
 - 3) $\frac{1}{4}$ tour?
 - 4) $\frac{1}{8}$ tour?
- b. Lorsque le système se met en marche, quelles sont les coordonnées du point d'attache P si la manivelle tourne de :
- 1) $\frac{\pi}{6}$ rad?
 - 2) $\frac{\pi}{4}$ rad?
 - 3) $\frac{\pi}{2}$ rad?
 - 4) $\frac{2\pi}{3}$ rad?
 - 5) π rad?
 - 6) $\frac{7\pi}{6}$ rad?
 - 7) $\frac{3\pi}{2}$ rad?
 - 8) 2π rad?
- c. Quelle est la règle de la fonction qui permet de calculer :
- 1) l'ordonnée du point d'attache P en fonction de l'angle de rotation de la manivelle?
 - 2) l'abscisse du point d'attache P en fonction de l'angle de rotation de la manivelle?

Dans le graphique suivant, la courbe en orange représente l'ordonnée du point d'attache P en fonction de l'angle de rotation de la manivelle et celle en vert, l'abscisse du point d'attache P en fonction de l'angle de rotation de la manivelle.

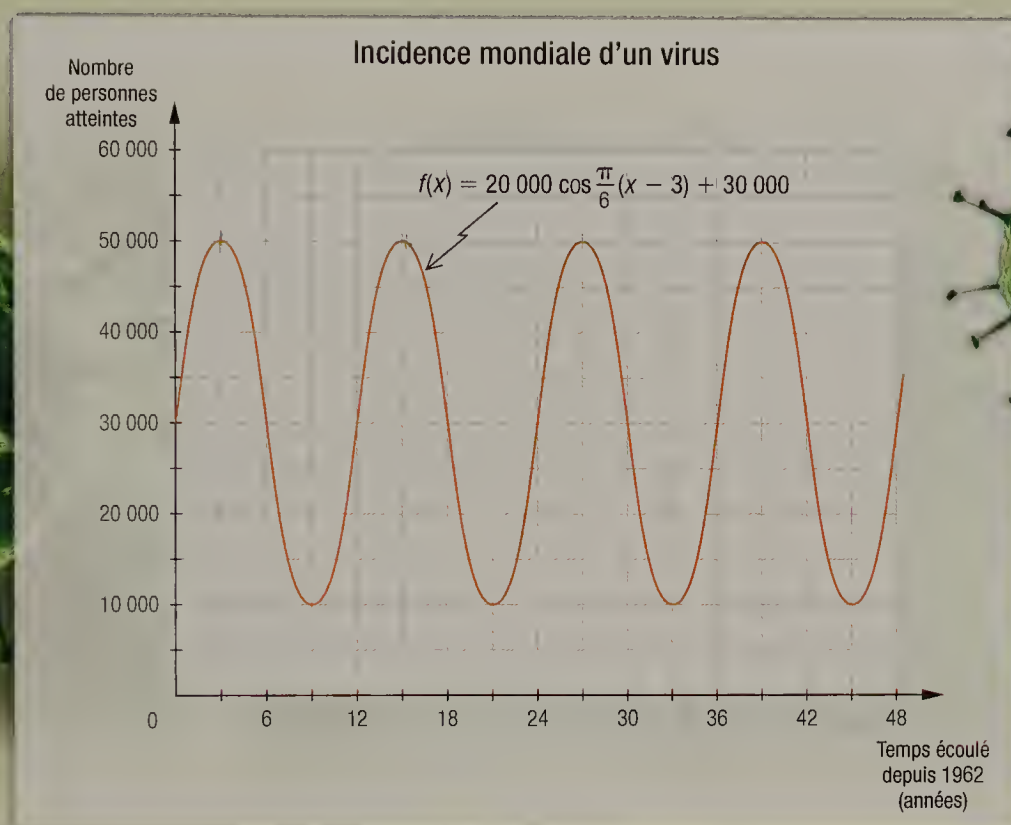


- d. Indiquez une transformation géométrique qui permet d'associer les courbes de ces deux fonctions.

ACTIVITÉ 2 Les épidémies

Pendant la première moitié du xx^e siècle, la poliomyélite a fait plusieurs milliers de victimes partout dans le monde. En Amérique du Nord, des épidémies de poliomyélite revenaient de façon cyclique tous les 15 ans jusqu'à ce que la vaccination fasse son apparition et mette fin à ce processus.

Le graphique ci-dessous montre le nombre de personnes atteintes par un certain virus depuis 1962.



a. Quel est le nombre :

- 1) maximal de personnes atteintes par ce virus ?
- 2) minimal de personnes atteintes par ce virus ?
- 3) moyen de personnes atteintes par ce virus ?

b. Il y a une épidémie lorsque 50 000 personnes sont touchées par le virus. Combien de temps sépare deux épidémies consécutives ?



Le microbiologiste Jonas Edward Salk (1914-1995) administrant à une fillette le vaccin antipoliomyélite qu'il a développé. En 1955, le vaccin de Salk a été distribué mondialement. Employé conjointement avec le vaccin développé par le microbiologiste Sabin en 1957, il a entraîné une diminution radicale de l'incidence de la poliomyélite vers la fin des années 1960.

Un virologue affirme que la règle de la fonction associée à cette situation est de la forme $f(x) = a \cos b(x - h) + k$.

c. Dans la règle $f(x) = 20\,000 \cos \frac{\pi}{6}(x - 3) + 30\,000$, déterminez la valeur du paramètre:

- 1) a 2) b 3) h 4) k

d. Que pouvez-vous observer en comparant:

- 1) la valeur de l'expression $\frac{\text{maximum de } f - \text{minimum de } f}{2}$ avec celle du paramètre a?
- 2) la valeur de l'expression $\frac{2\pi}{\text{période de } f}$ avec celle du paramètre b?
- 3) les coordonnées du point $(h, k + a)$ avec la représentation graphique de cette fonction?

Un second virologue affirme que le nombre de personnes atteintes peut aussi se calculer à l'aide de la règle $g(x) = 20\,000 \sin \frac{\pi}{6}x + 30\,000$, où x représente le temps écoulé depuis 1962.

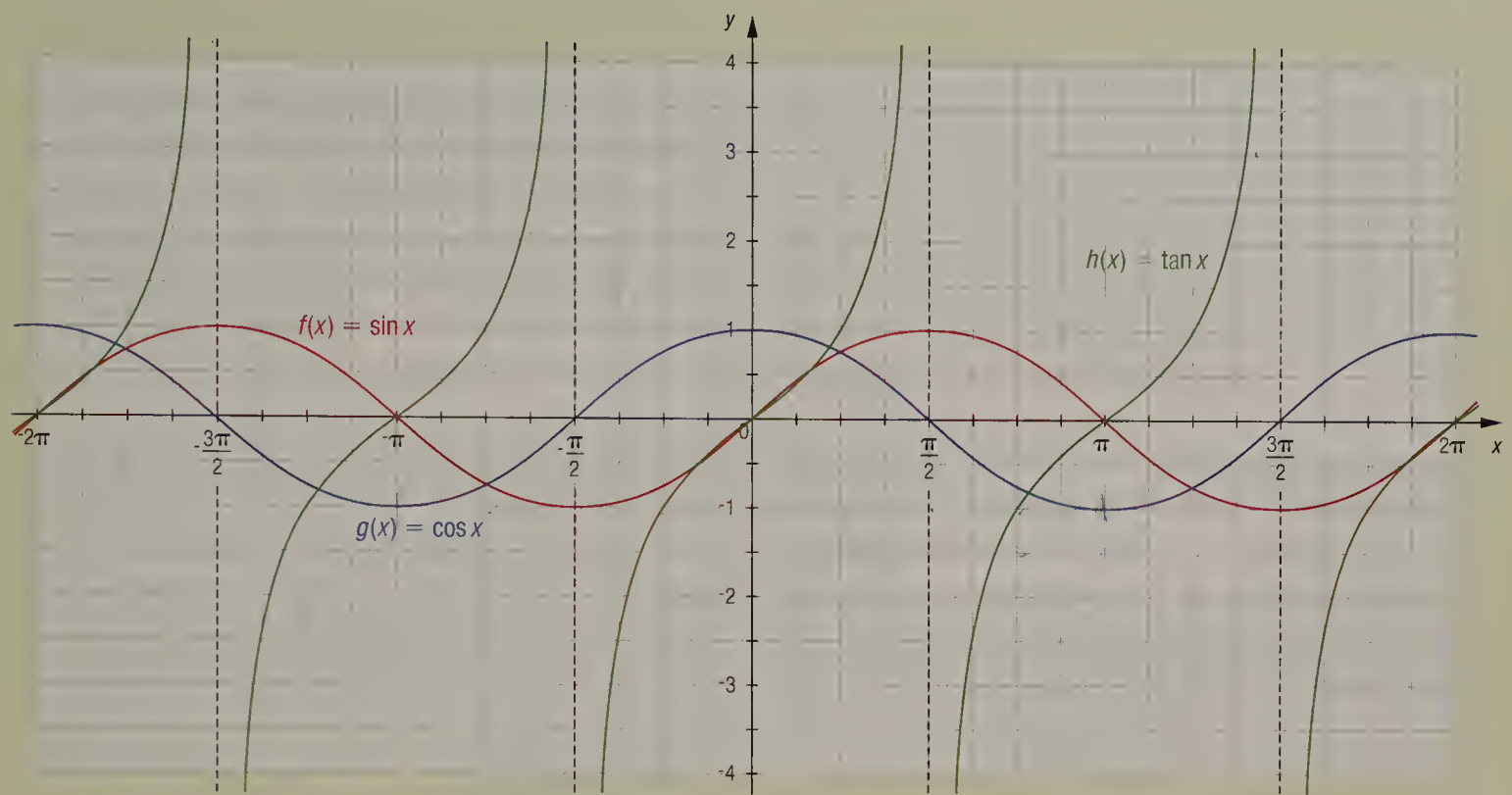
e. Quelle différence y a-t-il entre les règles proposées par les deux virologues?

f. Qu'observez-vous en comparant la valeur des paramètres a, b, h et k du point (h, k) associés à la fonction f avec celle des paramètres a, b, h et k associés à la fonction g ?



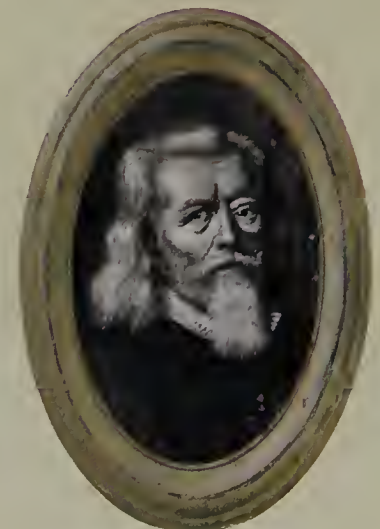
ACTIVITÉ 3 Comparer pour comparer

Le graphique suivant montre les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente de base.



- a. Que pouvez-vous observer en comparant les zéros de la fonction sinus à ceux de la fonction :
 - 1) cosinus?
 - 2) tangente?
- b. Les zéros de la fonction tangente sont associés à quelle propriété de la fonction :
 - 1) sinus?
 - 2) cosinus?
- c. Que pouvez-vous observer en comparant :
 - 1) le domaine de la fonction tangente aux zéros de la fonction cosinus?
 - 2) la période de la fonction tangente à celle de la fonction cosinus?
- d. À l'aide de cinq différentes valeurs de x , vérifiez que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
- e. Sur quelle propriété de la fonction cosinus peut-on se baser pour établir les équations des asymptotes de la fonction tangente?

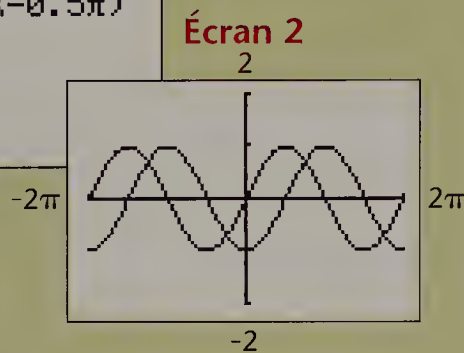
Thomas Fincke (1561-1656) est un mathématicien danois. Dans son ouvrage *Geometria rotundi*, il traite des fonctions trigonométriques. Il est le premier à avoir utilisé le mot *tangente*.



Une calculatrice graphique permet de comparer les règles et les courbes de plusieurs fonctions. Voici une exploration qui permet d'observer les effets des paramètres h et k dans la représentation graphique d'une fonction dont la règle s'écrit sous la forme $f(x) = a \sin b(x - h) + k$.

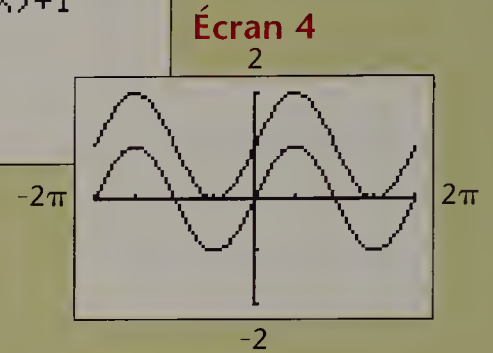
Écran 1

```
Graph1 Graph2 Graph3
Y1=sin(X)
Y2=sin(X-0.5π)
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=
```



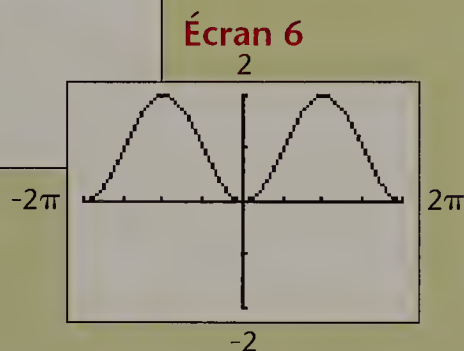
Écran 3

```
Graph1 Graph2 Graph3
Y1=sin(X)
Y2=sin(X)+1
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=
```



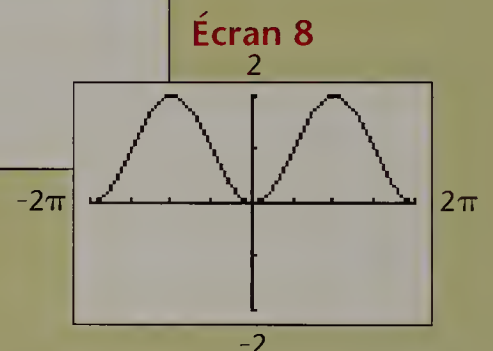
Écran 5

```
Graph1 Graph2 Graph3
Y1=sin(X-2.5π)+
1
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```



Écran 7

```
Graph1 Graph2 Graph3
Y1=sin(X-0.5π)+
1
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```



- Quel paramètre est modifié :
 - à l'écran 1 ?
 - à l'écran 3 ?
- Qu'est-ce qui distingue les deux courbes :
 - à l'écran 2 ?
 - à l'écran 4 ?
- Que pouvez-vous observer en comparant :
 - les paramètres h et k de la règle de l'écran 5 aux paramètres h et k de la règle de l'écran 7 ?
 - la courbe de l'écran 6 à celle de l'écran 8 ?
- À l'aide d'une calculatrice graphique :
 - affichez la courbe associée à chacune des fonctions ci-contre ;
 - décrivez ce qui distingue les deux courbes ;
 - établisiez la règle d'une fonction sinus dont la représentation graphique est la même que celle associée à Y_2 .

```
Graph1 Graph2 Graph3
Y1=cos(X)+1
Y2=cos(X+π)-3
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=
```

$$\frac{2\pi}{b} = P \quad 2\pi = bP$$

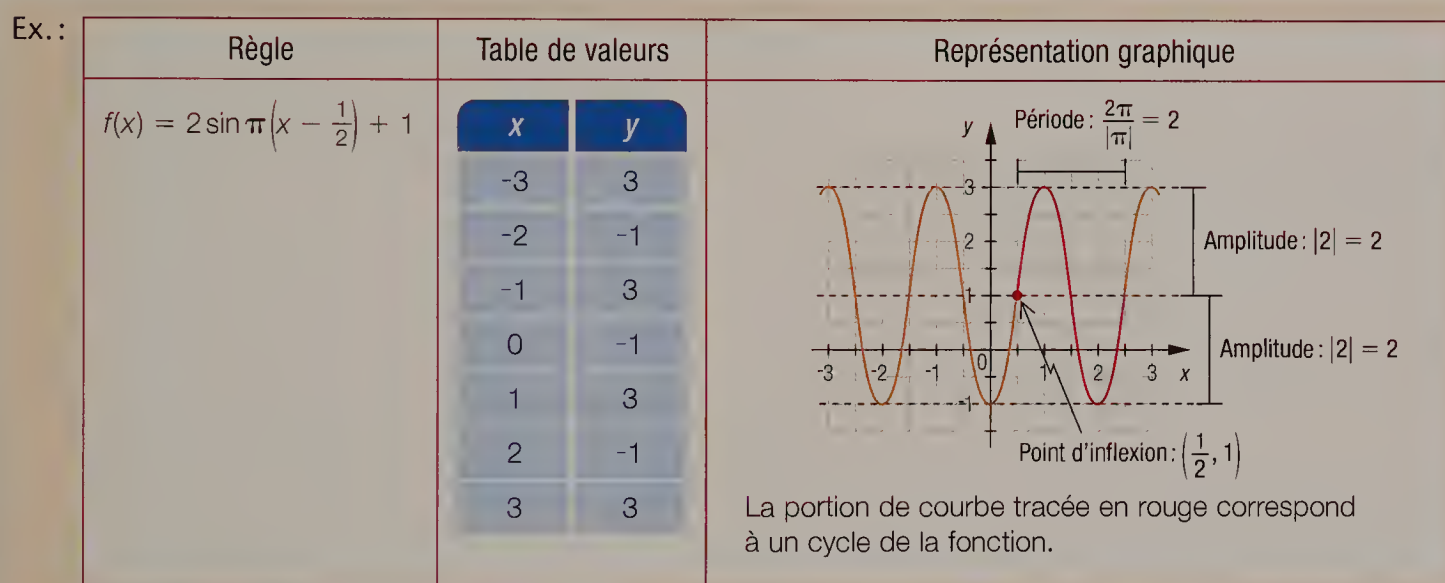
FONCTION SINUSOÏDALE

Une **fonction sinusoïdale** est une fonction périodique dont la règle peut s'écrire sous la forme $f(x) = a \sin b(x - h) + k$ ou $f(x) = a \cos b(x - h) + k$, où $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Pour une fonction sinusoïdale :

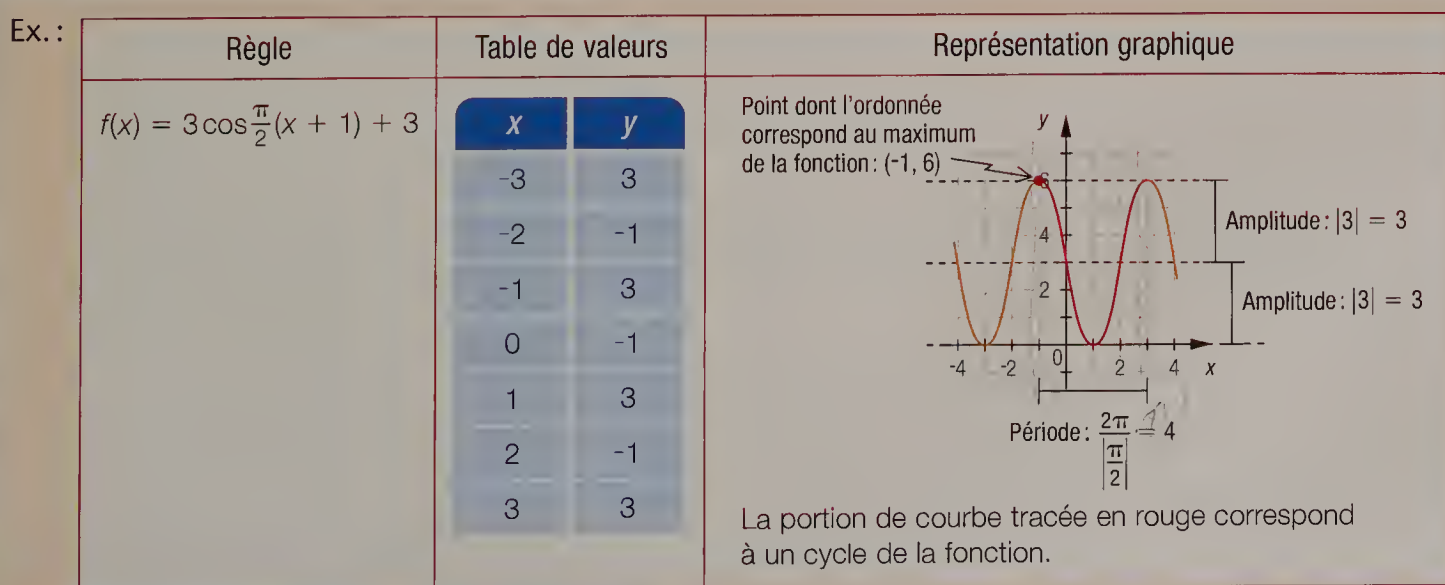
- l'amplitude A est déterminée par $\frac{\max f - \min f}{2}$ et correspond à la valeur absolue du paramètre a ;
- la période p est déterminée par $\frac{2\pi}{|b|}$;
- un cycle correspond graphiquement à la plus petite portion de la courbe associée au motif qui est répété.

Lorsque la courbe d'une fonction est continue, le point qui fait la transition entre une partie de la courbe qui monte (descend) de plus en plus rapidement et une autre partie de la courbe qui monte (descend) de moins en moins rapidement, ou vice versa, correspond à un **point d'inflexion**.

Dans la représentation graphique d'une fonction sinus dont la règle s'écrit $f(x) = a \sin b(x - h) + k$, (h, k) sont les coordonnées d'un point d'inflexion de la courbe.

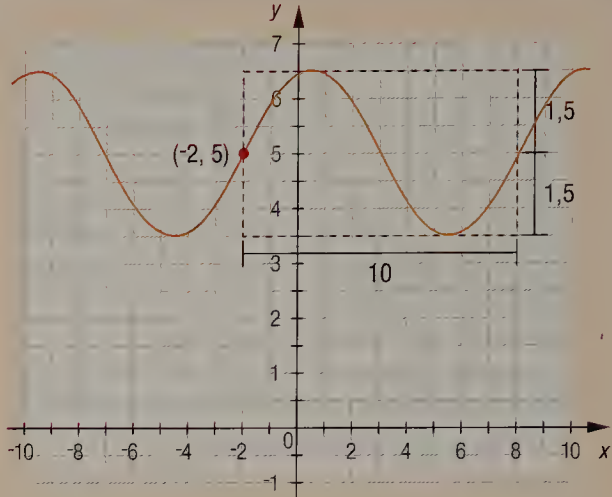


Dans la représentation graphique d'une fonction cosinus dont la règle s'écrit $f(x) = a \cos b(x - h) + k$, $(h, k \pm a)$ sont les coordonnées d'un point associé à un extremum de la fonction.



RECHERCHE DE LA RÈGLE D'UNE FONCTION SINUSOÏDALE

Il est possible de déterminer la règle d'une fonction sinusoidale, qui s'écrit $f(x) = a \sin b(x - h) + k$ ou $f(x) = a \cos b(x - h) + k$, de la façon suivante.

1. Identifier un cycle de la fonction dont le point de départ est associé aux paramètres h et k, et délimiter ce cycle à l'aide d'un rectangle dont la base correspond à la période p et la hauteur, au double de l'amplitude A.	Ex. :  En considérant que la règle recherchée est celle d'une fonction sinus, les coordonnées du point de départ du cycle identifié sont $(-2, 5)$, la période est de 10 et l'amplitude est de 1,5.	
2. Dédire la valeur des paramètres a et b selon le cycle identifié.	$A = 1,5$ $ a = 1,5$ $a = \pm 1,5$ D'après le cycle identifié, on déduit que $a = 1,5$.	$p = \frac{2\pi}{ b }$ $10 = \frac{2\pi}{ b }$ $b = \pm \frac{\pi}{5}$ D'après le cycle identifié, on déduit que $b = \frac{\pi}{5}$.
3. Déterminer la valeur des paramètres h et k.	Puisque les coordonnées du point de départ du cycle identifié sont $(-2, 5)$, la valeur de h est -2 et celle de k est 5.	
4. Écrire la règle de la fonction obtenue.	$f(x) = 1,5 \sin \frac{\pi}{5}(x + 2) + 5$ On note que la règle de cette fonction pourrait aussi s'écrire $f(x) = 1,5 \cos \frac{\pi}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 5$.	

FONCTION TANGENTE

La **fonction tangente** est une fonction périodique dont la règle peut s'écrire sous la forme $f(x) = a \tan b(x - h) + k$, où $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Dans la représentation graphique d'une fonction tangente :

- toutes les asymptotes verticales sont situées à égale distance les unes des autres;
- la distance entre deux asymptotes verticales consécutives correspond à la période p de la fonction et est déterminée par $\frac{\pi}{|b|}$;
- (h, k) sont les coordonnées d'un point d'inflexion de la courbe.

Ex. :

Règle	Table de valeurs	Représentation graphique												
$f(x) = 0,7 \tan \frac{\pi}{2}(x + 0,25) + 4$	<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-1</td><td>$\approx 2,3$</td></tr><tr><td>0</td><td>$\approx 4,3$</td></tr><tr><td>1</td><td>$\approx 2,3$</td></tr><tr><td>2</td><td>$\approx 4,3$</td></tr><tr><td>3</td><td>$\approx 2,3$</td></tr></table>	x	y	-1	$\approx 2,3$	0	$\approx 4,3$	1	$\approx 2,3$	2	$\approx 4,3$	3	$\approx 2,3$	Période: $\frac{\pi}{ \frac{\pi}{2} } = 2$ Point d'inflexion: (-0,25, 4)
x	y													
-1	$\approx 2,3$													
0	$\approx 4,3$													
1	$\approx 2,3$													
2	$\approx 4,3$													
3	$\approx 2,3$													

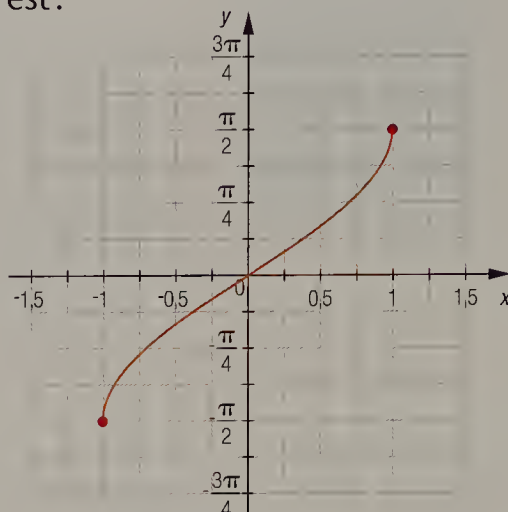
RECHERCHE DE LA RÈGLE D'UNE FONCTION TANGENTE

Il est possible de déterminer la règle d'une fonction tangente, qui s'écrit $f(x) = a \tan b(x - h) + k$, de la façon suivante.

1. Trouver les coordonnées d'un point d'inflexion et d'un autre point de la courbe.	Ex. : Les coordonnées d'un point d'inflexion de la courbe sont (1, 3) et la courbe passe par le point (-2, 4).
2. À l'aide du graphique, déduire la valeur du paramètre b.	Puisque la période de cette fonction est de 4, on a : $p = \frac{\pi}{ b } \Rightarrow 4 = \frac{\pi}{ b } \Rightarrow b = \pm \frac{\pi}{4}$ D'après l'allure de la courbe, on déduit que $b = \frac{\pi}{4}$.
3. Substituer les coordonnées du point d'inflexion à h et à k, les coordonnées de l'autre point de la courbe à x et à f(x), ainsi que la valeur du paramètre b dans la règle $f(x) = a \tan b(x - h) + k$.	$4 = a \tan \frac{\pi}{4}(-2 - 1) + 3$
4. Résoudre l'équation obtenue afin de déterminer la valeur du paramètre a.	$4 = a \tan \frac{\pi}{4}(-2 - 1) + 3$ $1 = a \tan \frac{3\pi}{4}$ $1 = a \times 1$ $a = 1$
5. Écrire la règle de la fonction obtenue.	$f(x) = \tan \frac{\pi}{4}(x - 1) + 3$

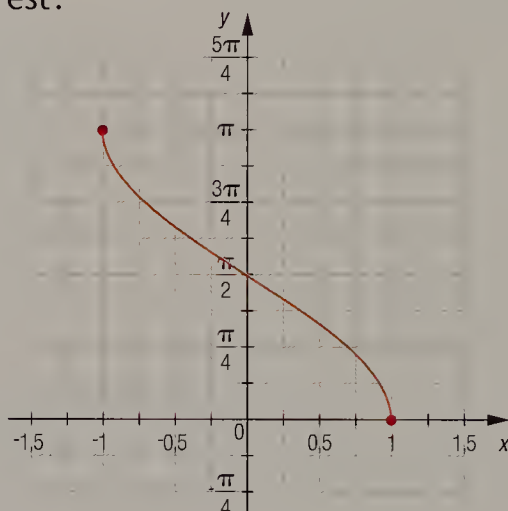
FONCTION ARC SINUS

La réciproque de la fonction sinus de base correspond à la fonction arc sinus, dont la règle s'écrit $f(x) = \arcsin x$ ou $f(x) = \sin^{-1} x$. Son domaine est $[-1, 1]$, son codomaine, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et sa représentation graphique est :



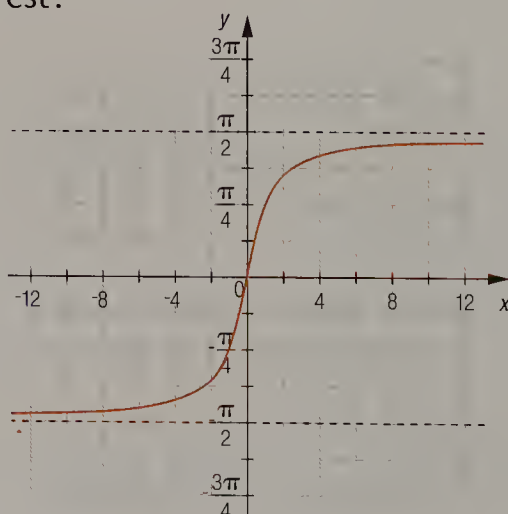
FONCTION ARC COSINUS

La réciproque de la fonction cosinus de base correspond à la fonction arc cosinus, dont la règle s'écrit $f(x) = \arccos x$ ou $f(x) = \cos^{-1} x$. Son domaine est $[-1, 1]$, son codomaine, $[0, \pi]$, et sa représentation graphique est :



FONCTION ARC TANGENTE

La réciproque de la fonction tangente de base correspond à la fonction arc tangente, dont la règle s'écrit $f(x) = \arctan x$ ou $f(x) = \tan^{-1} x$. Son domaine est $\mathbb{R}$, son codomaine, $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et sa représentation graphique est :



1 Complétez le tableau suivant.

	Règle	Amplitude	Période	Maximum	Minimum
a)	$f(x) = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$				
b)	$f(x) = 1,5 \cos \pi(x + 3) - 5$				
c)	$f(x) = -3 \sin 3,5\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 6$				
d)	$f(x) = 6 \cos \frac{\pi}{5}(x - 8) + 7$				
e)	$f(x) = 10 \sin 0,5\left(x + \frac{\pi}{8}\right) - 4$				

2 Calculez la valeur de chacune des expressions suivantes.

- | | | |
|---------------------------------|-----------------|----------------------------------|
| a) $\arcsin 0$ | b) $\arctan -1$ | c) $\arcsin 0,5$ |
| d) $\arccos -1$ | e) $\arctan 0$ | f) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| g) $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$ | h) $\arccos 0$ | i) $\arccos -\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

3 Représentez graphiquement chacune des fonctions suivantes.

- | | |
|--|--|
| a) $f(x) = -\sin 2\pi x + 3$ | b) $f(x) = 2 \tan x - 2$ |
| c) $f(x) = 7,5 \cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 0,5$ | d) $f(x) = -0,75 \sin 0,5(x - \pi) + 1,25$ |
| e) $f(x) = \tan \frac{\pi}{6}(x - 2) - 5$ | f) $f(x) = 21 \cos \frac{\pi}{4}(x + 2)$ |

4 Les règles des fonctions f , g et h sont:

$$f(x) = 2 \sin 2(x - 3) + 8$$

$$g(x) = 3 \sin(2x - 6) - 3$$

$$h(x) = -\sin 2(x - 3) + 2$$

- a) Quelle est la période de la fonction qui correspond à:
- | | | |
|------------|------------|------------|
| 1) $f + g$ | 2) $f - h$ | 3) $g + h$ |
|------------|------------|------------|
- b) Quels sont les extremums de la fonction qui correspond à:
- | | | |
|------------|------------|------------|
| 1) $f + g$ | 2) $f + h$ | 3) $g - h$ |
|------------|------------|------------|
- c) Établissez la règle d'une fonction i telle que $f(x) + i(x) = 0$.

5

Associez chacune des règles de la colonne de gauche à une représentation graphique de la colonne de droite.

A

$$f(x) = \sin 0,5 \left(x + \frac{\pi}{2} \right) - 2$$

B

$$f(x) = -\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + 2$$

C

$$f(x) = 2 \tan \pi(x + 1) - 1$$

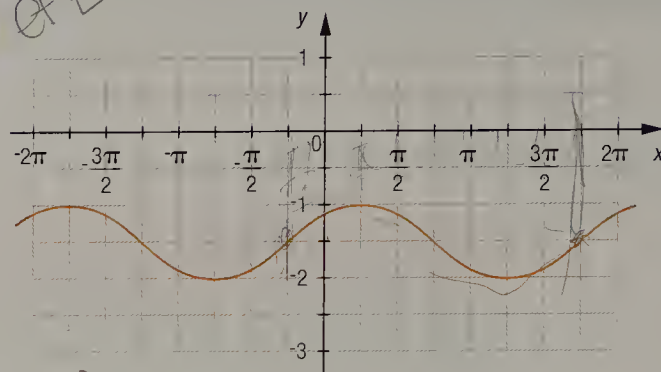
D

$$f(x) = -2 \tan \frac{\pi}{2}(x - 2) + 1$$

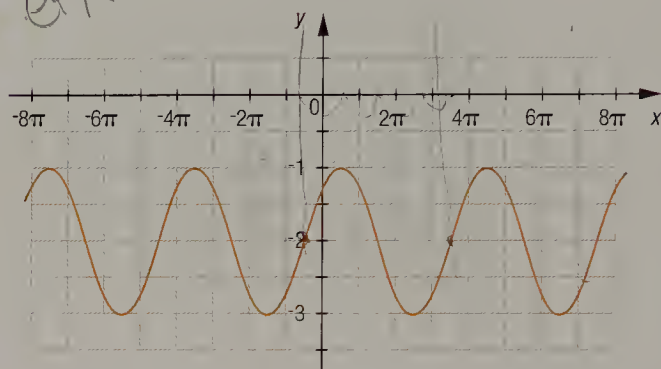
E

$$f(x) = 0,5 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - 1,5$$

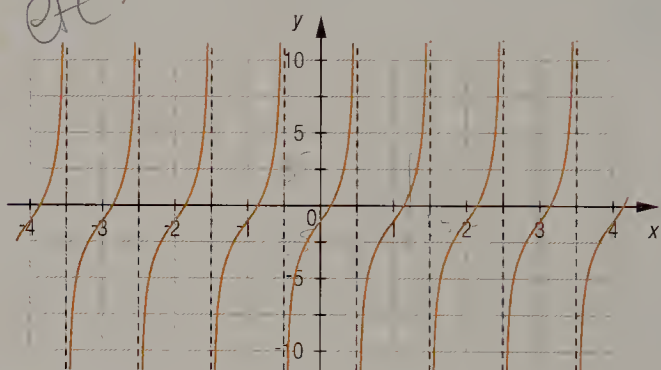
1



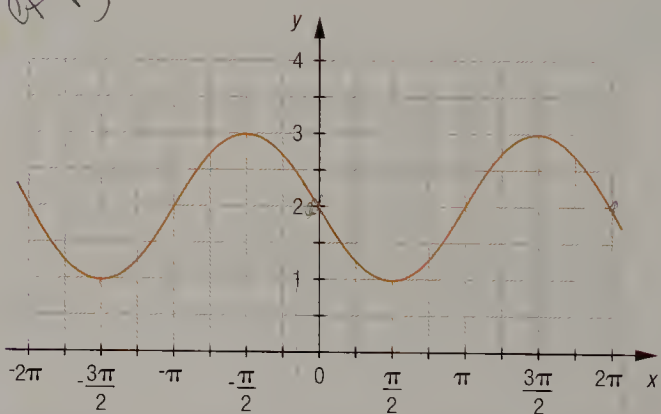
2



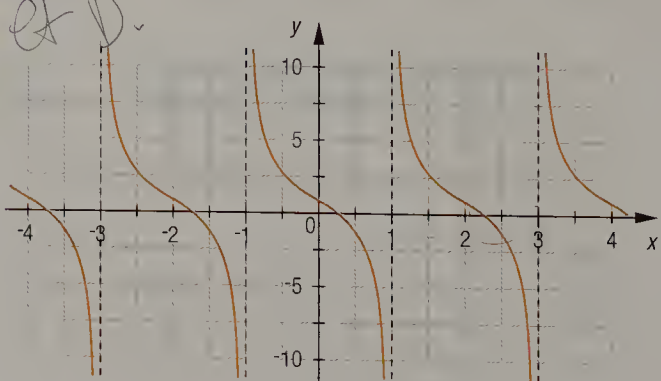
3



4



5



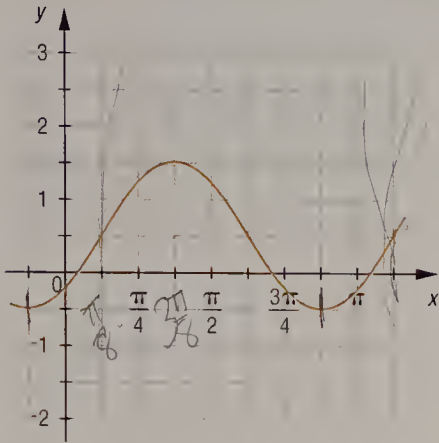
6

Établissez la règle de chacune des fonctions sinusoidales suivantes sachant qu'elle est de la forme :

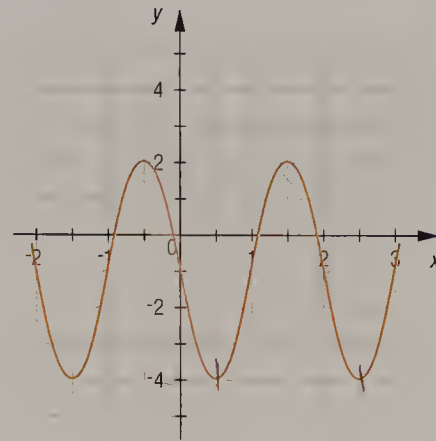
1) $f(x) = a \sin b(x - h) + k$;

2) $f(x) = a \cos b(x - h) + k$.

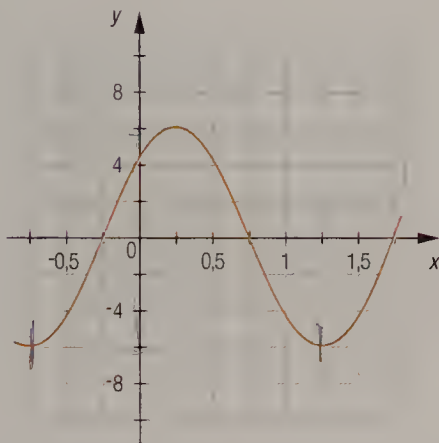
a)



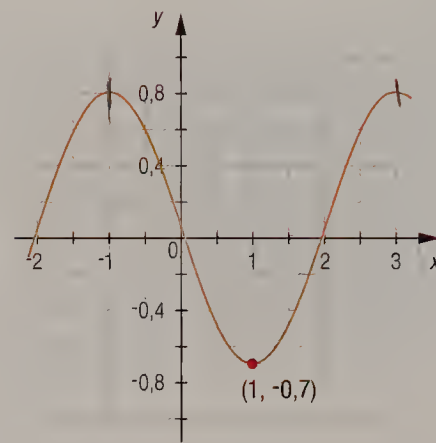
b)



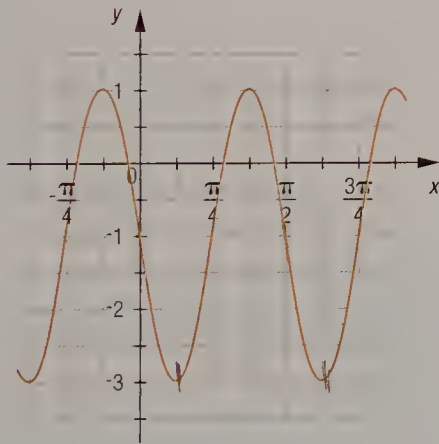
c)



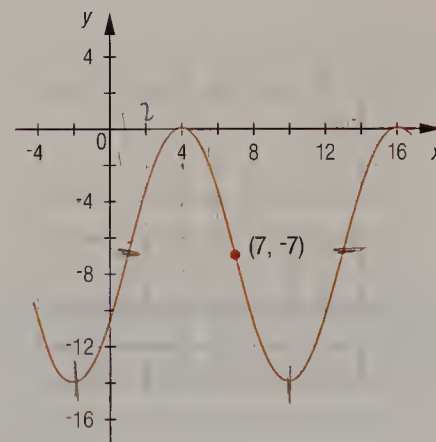
d)



e)



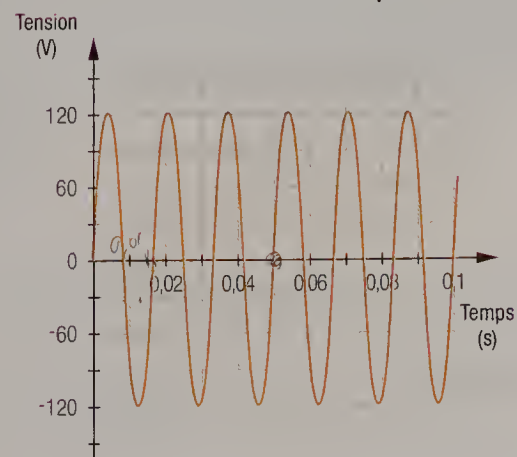
f)



7

Le graphique ci-contre représente la tension T d'un courant alternatif selon le temps x . Établissez la règle qui permet de calculer la tension d'un courant en fonction du temps.

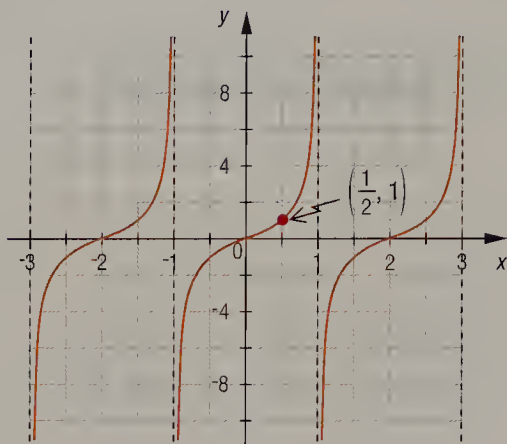
Tension d'un courant
en fonction du temps



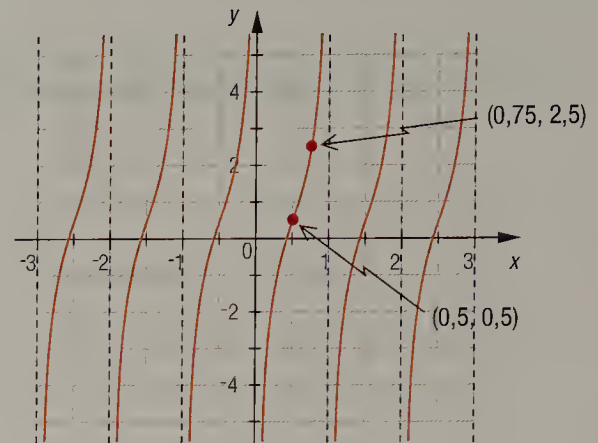
8

Établissez la règle de chacune des fonctions tangente suivantes.

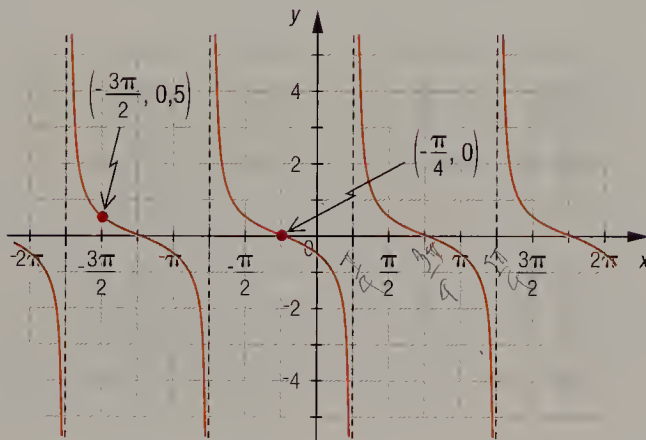
a)



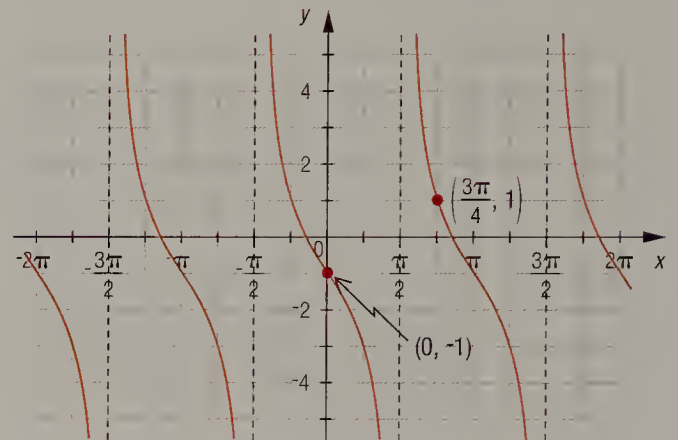
b)



c)



d)



9

AUBE NAUTIQUE L'aube nautique est le moment à partir duquel il y a juste assez de lumière pour distinguer des objets et l'horizon.

Le tableau suivant indique l'heure de l'aube nautique d'une région à différents moments de l'année.

Aube nautique d'une région

Date	Heure	Date	Heure
21 décembre	6 h 20	21 juin	2 h 38
21 janvier	6 h	21 juillet	2 h 51
21 février	5 h 24	21 août	3 h 33
21 mars	4 h 30	21 septembre	4 h 30
21 avril	3 h 33	21 octobre	5 h 24
21 mai	2 h 51	21 novembre	6 h

Au moment de l'aube nautique, le soleil se trouve à 12° au-dessous de l'horizon.

- a) Représentez graphiquement l'heure de l'aube nautique de cette région selon le temps écoulé (en mois) depuis le 21 décembre.
- b) Établissez la règle de la fonction associée à cette situation.

10 Les règles des fonctions f et g sont $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \sin(x - \pi)$.

a) 1) Complétez la table de valeurs suivante.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$f(x)$											
$g(x)$											
$f(x) + g(x)$											

2) Que remarquez-vous?

b) La règle de la fonction h est $h(x) = \cos x$. Établissez la règle d'une fonction i telle que $h(x) + i(x) = 0$.

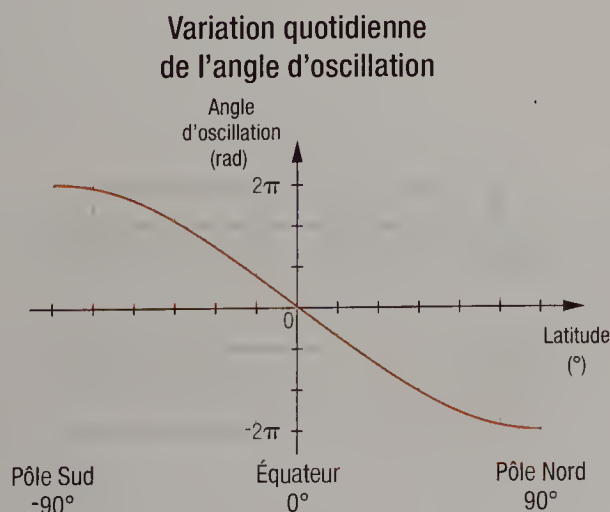
11 Une bouée munie d'une cloche flotte à la surface de l'océan. La hauteur relative h (en m) de la bouée varie selon la règle $h(x) = 0,5 \cos \frac{2\pi}{5}(x - 2) + 2,5$, où x représente le temps (en s). La cloche sonne chaque fois que la bouée se trouve sur la crête d'une vague. Combien de fois par minute entend-on la cloche sonner?



La bouée à sifflet, comme la bouée à cloche, émet un signal sonore lorsqu'un mouvement de la nappe d'eau est détecté.

12 **PENDULE DE FOUCAULT** Un pendule de Foucault, du nom du physicien français Léon Foucault (1819-1868), est un pendule de grande dimension dont l'oscillation montre les effets de la rotation de la Terre.

Le graphique ci-dessous correspond à une fonction sinus et montre la variation quotidienne de l'angle d'oscillation du pendule en fonction de la latitude. Les seuls endroits sur la planète où le pendule de Foucault revient à sa position de départ chaque jour sont les pôles et l'équateur.



Quelle est la variation quotidienne de l'angle d'oscillation d'un pendule de Foucault situé dans la ville de Québec dont la latitude est de $46,81^\circ$?

13 TACHES SOLAIRES Le nombre de taches solaires qui sont observées sur la surface du Soleil en une journée varie selon un modèle périodique. Voici quelques renseignements à ce sujet:

- Le nombre maximal de taches solaires observées en une journée est 90.
- Le nombre minimal de taches solaires observées en une journée est 0.
- Le nombre maximal de taches solaires observées en une journée atteint son maximum tous les 11 ans.
- Au début des observations, on ne voit aucune tache solaire.



Une tache solaire est une région sur la surface du Soleil où la température est réduite.

Établissez la règle d'une fonction sinusoïdale qui permet de calculer le nombre de taches solaires observées en une journée en fonction du temps (en années).

14 La roue à aubes d'un bateau a un diamètre de 4,4 m et tourne à une vitesse de 10 tours/min dans le sens antihoraire. Son centre est situé à 1,1 m au-dessus de la surface de l'eau. L'une des pales de la roue à aubes est brisée. Au moment de mettre la roue en marche, l'extrémité de la pale brisée se trouve à 2,2 m au-dessus de la surface de l'eau.

- Représentez graphiquement la fonction qui permet de déterminer la hauteur (en m) de l'extrémité de la pale brisée par rapport à la surface de l'eau selon le temps (en s) sur l'intervalle $[0, 30]$ s.
- Déterminez la règle de la fonction représentée en a).

Les premiers bateaux à propulsion mécanique utilisaient la roue à aubes. On trouve encore quelques bateaux à aubes qui effectuent des croisières touristiques sur le fleuve Mississippi.



Cette section est en lien
avec la SAÉ 9.

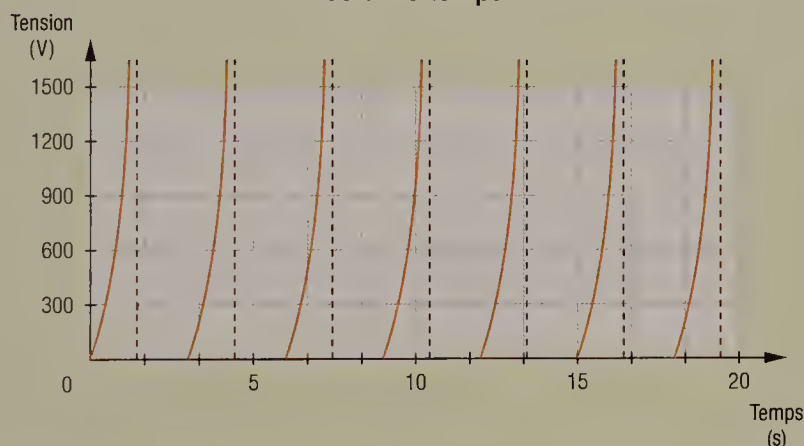
**PROBLÈME** Flash !

Lorsque la lumière ambiante n'est pas suffisante pour prendre une photo, les photographes utilisent un flash. Dans la plupart des modèles, cet appareil est composé d'une lampe-éclair au xénon alimentée par un dispositif électronique.

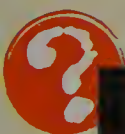
Selon le modèle, un flash fonctionne à l'aide d'une ou de plusieurs piles électriques de 1,5 V. Un dispositif électronique emmagasine l'énergie des piles et transforme la tension électrique afin de fournir les 250 à 5000 V nécessaires à l'allumage de la lampe-éclair qui s'illumine pendant environ un millième de seconde.

Voici des renseignements sur un dispositif électronique qui alimente une lampe-éclair selon le temps.

Tension d'une lampe-éclair
selon le temps



- La règle de la fonction qui correspond à cette situation est $T = \frac{1000\sqrt{3}}{3} \tan \frac{\pi}{3} x$, où T représente la tension aux bornes du dispositif électronique et x , le temps.
- Lorsque la tension atteint 1000 V, la lampe-éclair s'illumine.



À quels moments, au cours de la première minute, le flash s'allume-t-il?



ACTIVITÉ 1 Risque de gel

À la fin de l'été, les jardiniers et les cultivateurs redoutent les risques de gel qui peuvent compromettre la récolte de certains fruits et légumes. Alors que certaines plantes potagères résistent bien au gel, d'autres peuvent être complètement détruites par des températures inférieures au point de congélation.

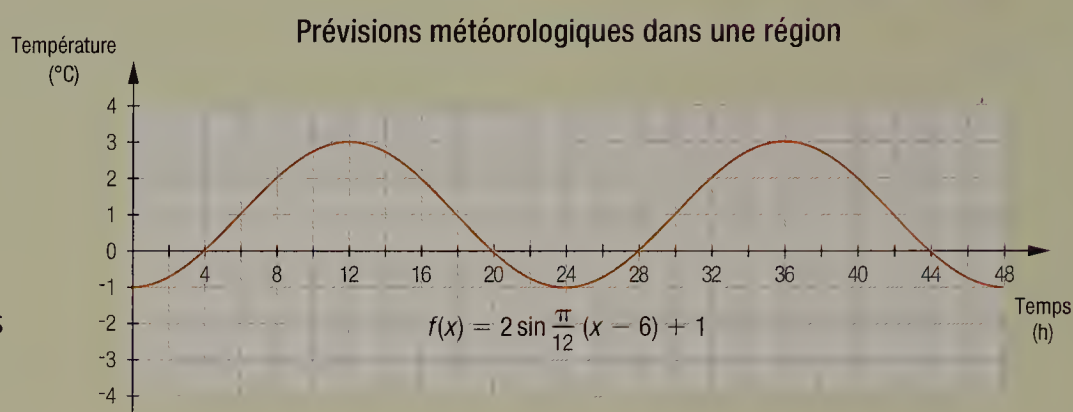
La représentation graphique ci-dessous montre les prévisions météorologiques dans une région pour les 48 prochaines heures.



- a. Au cours de cette période, quelle sera la température :

- 1) maximale ?
- 2) minimale ?

- b. Dans les 48 prochaines heures, à quels moments la température sera-t-elle de 1°C ?



- c. Dans cette situation, que permet de déterminer la résolution de l'équation $2 \sin \frac{\pi}{12} (x - 6) + 1 = 2$?

- d. Dans le cercle trigonométrique, quelles sont les deux valeurs possibles de θ sur $[0, 2\pi[$ pour lesquelles $\sin \theta = \frac{1}{2}$?

- e. Voici une démarche qui permet de résoudre l'équation $2 \sin \frac{\pi}{12} (x - 6) + 1 = 2$.

$$\textcircled{1} \quad 2 \sin \frac{\pi}{12} (x - 6) + 1 = 2$$

$$\textcircled{2} \quad \sin \frac{\pi}{12} (x - 6) = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\pi}{12} (x - 6) = \arcsin \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{\pi}{12} (x - 6) = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{12} (x - 6) = \frac{5\pi}{6}$$

$$\textcircled{5} \quad x - 6 = 2 \quad \quad \quad x - 6 = 10$$

$$\textcircled{6} \quad x_1 = 8 \quad \quad \quad x_2 = 16$$

- 1) Expliquez comment passer d'une étape à l'autre de cette démarche.
- 2) Dans le contexte, que représentent les valeurs trouvées à l'étape $\textcircled{6}$?

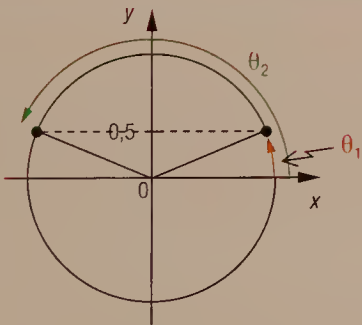
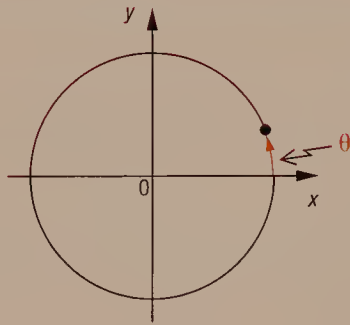
- f. 1) Quelle est la période p de la fonction f ?
- 2) Dans le contexte, que permettent de déterminer les expressions $x_1 + p$ et $x_2 + p$?

Le plant de tomates est particulièrement fragile au gel. Selon les spécialistes, il est recommandé de couvrir les plants lorsque la température est inférieure ou égale à 2°C .

- g. 1) Traduisez cette situation par une inéquation.
- 2) En tenant compte des solutions trouvées en e et en f, déterminez les intervalles de temps durant lesquels il faudra couvrir les plants.

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION TRIGONOMÉTRIQUE À UNE VARIABLE

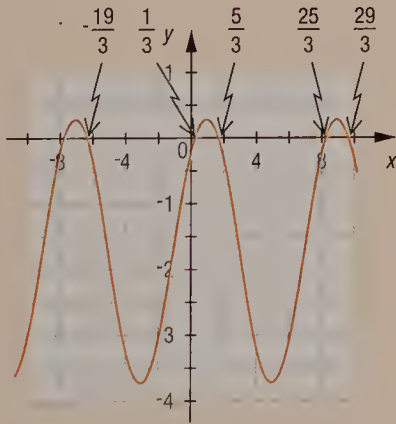
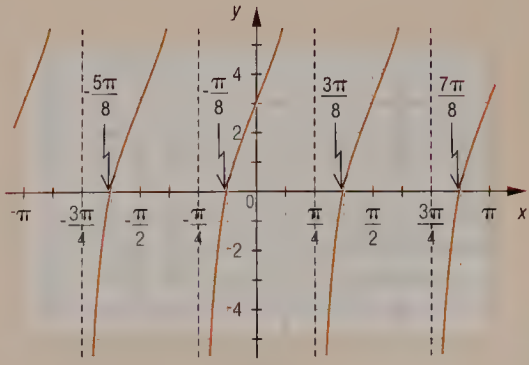
Il est possible de résoudre une équation trigonométrique à une variable, c'est-à-dire une équation sinus, une équation cosinus ou une équation tangente, de la façon suivante.

	Ex.: 1) Résoudre: $2 \sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 5 = 6$	2) Déterminer les zéros de la fonction: $f(x) = \sqrt{3} \tan \pi x - 1$
1.	Obtenir une équation dans laquelle l'argument du sinus, du cosinus ou de la tangente est isolé.	
	$2 \sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 5 = 6$ $2 \sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ $\sin 3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ $3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \arcsin \frac{1}{2}$	$\sqrt{3} \tan \pi x - 1 = 0$ $\sqrt{3} \tan \pi x = 1$ $\tan \pi x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\pi x = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$
2.	Pour une équation sinusoïdale, déterminer la ou les deux valeurs de θ sur $[0, 2\pi[$ qui vérifient l'équation.	Pour une équation tangente, déterminer la valeur de θ sur $[0, \pi]$ qui vérifie l'équation.
	 $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ $\theta_2 = \pi - \theta_1 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$	 $\theta = \frac{\pi}{6}$
3.	Former deux équations à partir des valeurs trouvées.	Former une équation à partir de la valeur trouvée.
	$3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$ $3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{6}$	$\pi x = \frac{\pi}{6}$

4.	Afin de tenir compte de la périodicité, additionner $2n\pi$, où $n \in \mathbb{Z}$, au membre formé d'un terme constant pour une équation sinusoïdale.	Afin de tenir compte de la périodicité, additionner $n\pi$, où $n \in \mathbb{Z}$, au membre formé d'un terme constant pour une équation tangente.
	$3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ $3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$	$\pi x = \frac{\pi}{6} + n\pi$
5.	Résoudre la ou les équations formées.	
	$3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{18} + \frac{2n\pi}{3}$ $x = \frac{11\pi}{36} + \frac{2n\pi}{3}$ $3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ $x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{18} + \frac{2n\pi}{3}$ $x = \frac{19\pi}{36} + \frac{2n\pi}{3}$	$\pi x = \frac{\pi}{6} + n\pi$ $x = \frac{1}{6} + n$
6.	Écrire l'ensemble-solution.	
	De façon générale, pour $n \in \mathbb{Z}$, les solutions sont: $x = \frac{11\pi}{36} + \frac{2n\pi}{3}$ $x = \frac{19\pi}{36} + \frac{2n\pi}{3}$ L'ensemble-solution est: $\left\{ \dots, \frac{13\pi}{36}, \frac{5\pi}{36}, \frac{11\pi}{36}, \frac{19\pi}{36}, \frac{35\pi}{36}, \frac{43\pi}{36}, \dots \right\}$	De façon générale, pour $n \in \mathbb{Z}$, les zéros sont: $x = \frac{1}{6} + n$ L'ensemble-solution est: $\left\{ \dots, -\frac{11}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{13}{6}, \dots \right\}$

RÉSOLUTION D'UNE INÉQUATION TRIGONOMÉTRIQUE À UNE VARIABLE

Il est possible de résoudre une inéquation trigonométrique à une variable, c'est-à-dire une inéquation sinus, une inéquation cosinus ou une inéquation tangente, de la façon suivante.

	Ex.: 1) Résoudre: $2 \cos \frac{\pi}{4}(x - 1) - \sqrt{3} < 0$	2) Déterminer sur quels intervalles la fonction $f(x) = 3 \tan 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$ est positive.
1. Substituer un symbole d'égalité au symbole d'inégalité de l'inéquation.	$2 \cos \frac{\pi}{4}(x - 1) - \sqrt{3} = 0$	$3 \tan 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3 = 0$
2. Résoudre l'équation.	$2 \cos \frac{\pi}{4}(x - 1) - \sqrt{3} = 0$ $\frac{\pi}{4}(x - 1) = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ Pour $n \in \mathbb{Z}$: $\frac{\pi}{4}(x - 1) = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ $x = \frac{5}{3} + 8n$ $\frac{\pi}{4}(x - 1) = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi$ $x = \frac{25}{3} + 8n$	$3 \tan 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3 = 0$ $2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \arctan -1$ Pour $n \in \mathbb{Z}$: $2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} + n\pi$ $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$
3. Dédire l'ensemble-solution à l'aide du symbole d'inégalité de l'inéquation.	Puisque les équations obtenues sont $x = \frac{5}{3} + 8n$ et $x = \frac{25}{3} + 8n$, on a:  L'ensemble-solution est: $\dots \cup \left] -\frac{19}{3}, \frac{1}{3} \right[\cup \left] \frac{5}{3}, \frac{25}{3} \right[\cup \left] \frac{29}{3}, \frac{49}{3} \right[\cup \dots$	Puisque l'équation obtenue est $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$, on a:  L'ensemble-solution est: $\dots \cup \left[-\frac{5\pi}{8}, -\frac{\pi}{4} \right[\cup \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4} \right[\cup \left[\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{4} \right[\cup \dots$

1 Déterminez l'ensemble-solution de chacune des équations trigonométriques ci-dessous.

- a) $2 \sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ si $x \in [-3\pi, 3\pi]$ b) $\sqrt{2} \cos \pi(x + 0,25) = 1$ si $x \in [0, 4]$
 c) $2 \tan \frac{\pi}{5} x = -2$ si $x \in [-10, 10]$ d) $4 \cos x = 2$ si $x \in [0, 4\pi]$
 e) $3 \sin \frac{\pi}{6}(x + 5) - 7 = 0$ si $x \in [0, 48]$ f) $\sqrt{3} \tan 3\pi\left(x + \frac{1}{6}\right) = 1$ si $x \in [0, 5]$

2 Résolvez chacune des équations suivantes.

- a) $\sqrt{2} \cos\left(\frac{x + \pi}{8}\right) + 5 = 4$ b) $2 \sin \frac{\pi}{2}(x - 1) + 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$
 c) $3 \tan \frac{\pi}{4}(x + 1) - \sqrt{3} = 0$ d) $2 \cos \frac{x}{2} + 4\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
 e) $4 \sin 2\left(x - \frac{\pi}{7}\right) = -2$ f) $\sqrt{3} \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 3$

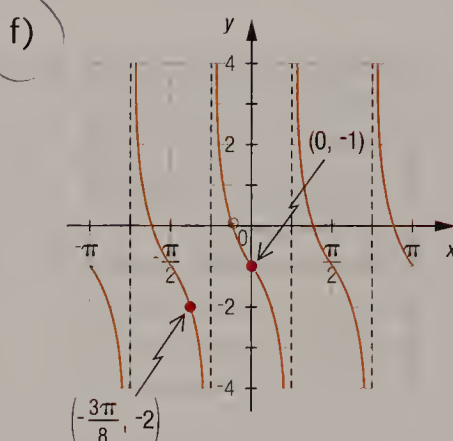
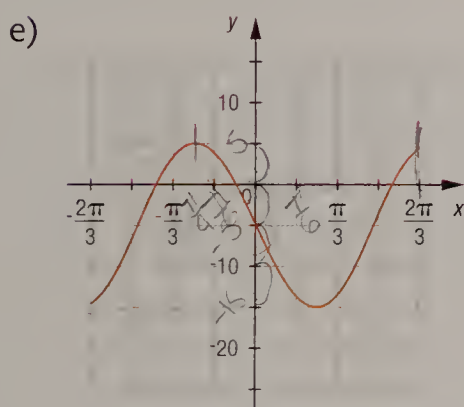
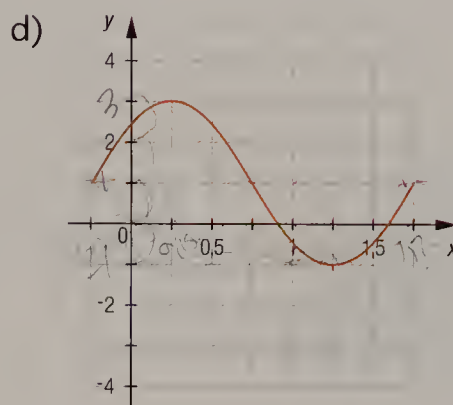
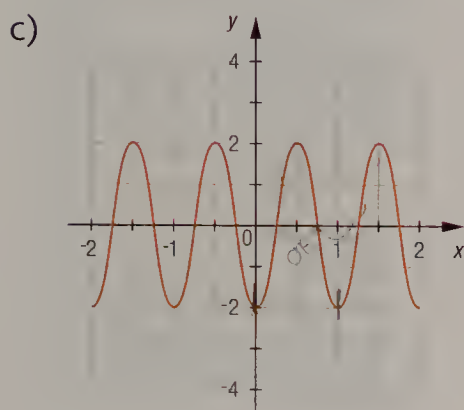
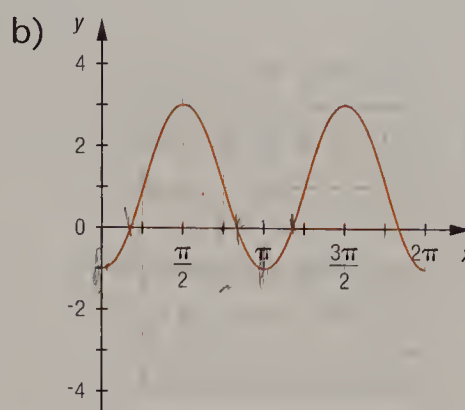
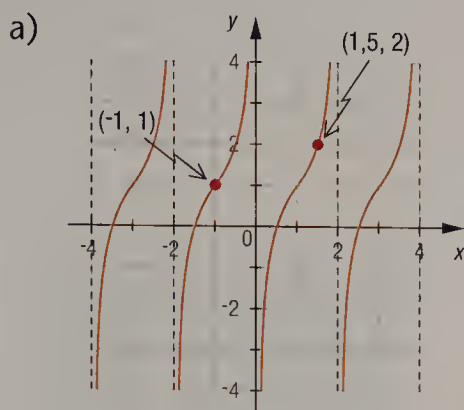
3 Déterminez le signe de chacune des fonctions suivantes.

- a) $f(x) = \sin 2x + 0,5$ si $x \in [-2\pi, 2\pi]$
 b) $f(x) = \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ si $x \in [-\pi, 3\pi]$
 c) $f(x) = 3 \tan x + 3$ si $x \in [-3\pi, 3\pi]$
 d) $f(x) = 3 \cos 1,5\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 6$ si $x \in [-3\pi, 3\pi]$
 e) $f(x) = 7,5 \sin \pi(x + 0,5) - 7,5$ si $x \in [-3, 3]$
 f) $f(x) = \tan \pi(x + 0,5) - 1$ si $x \in [0, 4]$

4 Résolvez chacune des équations suivantes.

- a) $4(\cos x)^2 = 1$ b) $(\sin x)^2 - 1 = 0$
 c) $6(\tan x)^2 = 18$ d) $(\cos x)^2 = \frac{1}{2}$ *corrige 9*
 e) $4(\sin x)^2 - 3 = 0$ f) $9(\tan x)^2 + 9 = 12$ *6*

5 Déterminez, sur l'intervalle représenté, les zéros de chacune des fonctions suivantes.



6 Si $x \in [0, 2\pi]$, déterminez les valeurs de x qui vérifient chacune des équations suivantes.

a) $\sin x = \cos x$

b) $\tan x = \sin x$

c) $\cos x \sin x = 0$

d) $\cos x \tan x = 0$

e) $\sin x \tan x = 0$

f) $(\sin x)^2 = 1$

g) $\sin x = \sin \frac{47\pi}{3}$

h) $\cos x = \cos \frac{31\pi}{2}$

i) $\tan x = \tan \frac{127\pi}{3}$

7 Déterminez l'ensemble-solution de chacune des inéquations trigonométriques suivantes.

a) $4 \sin 4x - 3 > -5$ si $x \in [-\pi, \pi]$

b) $16 \cos 2\left(x - \frac{\pi}{16}\right) - 7 \leq -7$ si $x \in [-2\pi, \pi]$

c) $8 \tan\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2 > 10$ si $x \in [0, 2\pi]$

d) $-3 \cos \pi(x - 0,5) + 5 \leq 8$ si $x \in [0, 4]$

e) $6 \sin(x + \pi) - 3\sqrt{3} < 0$ si $x \in [-3\pi, 3\pi]$

f) $8 - 2 \tan x > 8$ si $x \in [-\pi, \pi]$

$\pi - x$

$-2 + \frac{1}{2}(x) + 8$

8 Résolvez chacune des inéquations suivantes.

a) $\cos 8x + 3,5 > 3$

b) $4 \sin 3\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2 \leq 2$

c) $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 9 > 10$

d) $-\sin \frac{\pi}{2}(x - 1) + 9 \leq 8$

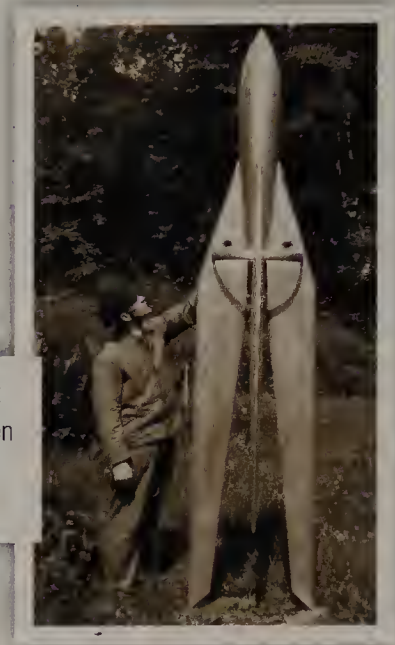
e) $8 \cos 3(x + \pi) + 4\sqrt{2} < 0$

f) $\tan x > \sqrt{3}$

9

Durant son ascension, l'altitude A (en m) d'une fusée varie selon la règle $A = 1000 \tan \frac{\pi}{60} x$, où x correspond au temps écoulé (en s) depuis le lancement. À 1000 m. d'altitude, le moteur de la fusée s'éteint et un parachute se déploie, permettant ainsi à la fusée de redescendre lentement. À quel moment le parachute se déploie-t-il ?

On a déjà tenté d'utiliser des fusées pour acheminer le courrier. Toutefois, les coûts élevés et les nombreux échecs ont fait en sorte que la fusée postale n'a pas été retenue comme moyen de transport du courrier. Ci-contre, Reinhold Tiling (1893-1933), un scientifique allemand qui a lancé avec succès, en 1931, une fusée postale.



10

À l'endroit où se trouve Léonie, le niveau d'eau N (en m) d'une piscine à vagues varie selon la règle $N = 0,5 \cos 2\pi x + 2$, où x représente le temps (en s). On sait que Léonie maintient toujours sa tête hors de l'eau et que ses pieds touchent le fond de la piscine lorsque le niveau d'eau est inférieur ou égal à 1,75 m. Si Léonie passe 10 min dans la piscine en restant au même endroit, pendant combien de temps ses pieds touchent-ils le fond ?

11

Les règles des fonctions f , g et h sont $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ et $h(x) = \tan x$. Pour quelles valeurs de x :

a) $f(x) > g(x)$?

b) $h(x) > f(x)$?

12

Le chas d'une aiguille à coudre est le trou au travers duquel passe le fil. La règle $H = 10 \cos 10\pi x + 5$ permet de calculer la hauteur H (en mm) du chas de l'aiguille d'une machine à coudre en fonction du temps x (en s). Le chas de l'aiguille traverse la pièce de tissu lorsque $H = 0$ mm. Combien de fois, pendant les 10 premières secondes, le chas de l'aiguille traverse-t-il le tissu ?

Le chas de l'aiguille permet au fil à coudre de traverser le tissu en même temps que l'aiguille. Les artefacts les plus anciens d'aiguilles à coudre remontent à environ 18 000 av. J.-C. et ont été trouvés dans la région de Bourgogne, en France. Ces aiguilles, faites d'arêtes de poisson ou de morceaux d'os, étaient déjà percées d'un chas à mi-longueur.

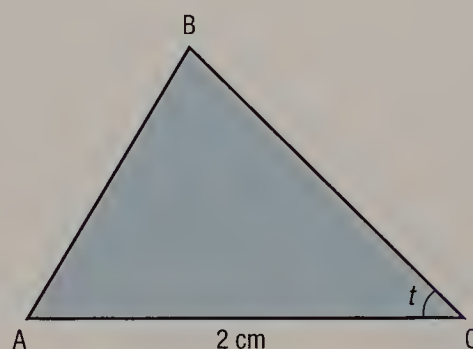


13 Une personne s'entraîne à la corde à sauter. La hauteur H (en cm) du milieu de la corde par rapport au sol varie selon la règle $H = 150 \sin \frac{8\pi}{3}x + 152,5$, où x représente le temps (en s). Les pieds de cette personne ne touchent pas le sol lorsque la hauteur de la corde est de 22,6 cm ou moins. Si la durée d'un entraînement est de 5 min :

- combien de fois cette personne saute-t-elle au cours de cet entraînement ?
- pendant combien de temps ses pieds ne touchent-ils pas le sol au cours de cet entraînement ?

14 Il est possible de calculer l'aire A (en cm^2) du triangle ABC illustré ci-dessous à l'aide de la règle $A = \tan t$, où t correspond à la mesure (en rad) de l'angle C.

- Quelle est l'aire du triangle si l'angle C mesure :
 - $\frac{\pi}{12}$ rad ?
 - 20° ?
- Quelle est la mesure de l'angle C si l'aire du triangle est de :
 - $\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$?
 - 1 cm^2 ?



15 L'intensité I (en A) du courant d'un circuit électrique peut être calculée à l'aide de la règle $I = 20 \sin 20\pi(x - 0,05) + 20$, où x représente le temps (en s).

- Pendant la première minute, combien de fois l'intensité du courant est-elle :
 - minimale ?
 - de 10 A ?
 - de 30 A ?
- Pendant la première minute, à quels moments l'intensité du courant est-elle :
 - de 10 A ?
 - de 20 A ?
 - maximale ?

On modifie le circuit de telle sorte que l'intensité du courant varie selon la règle $I = 10 \sin 5\pi(x - 0,05) + 10$.

- Pendant la première minute suivant cette modification, combien de fois l'intensité du courant est-elle :
 - de 5 A ?
 - de 15 A ?
 - maximale ?
- Pendant la première minute suivant cette modification, à quels moments l'intensité du courant est-elle :
 - minimale ?
 - de 5 A ?
 - de 10 A ?

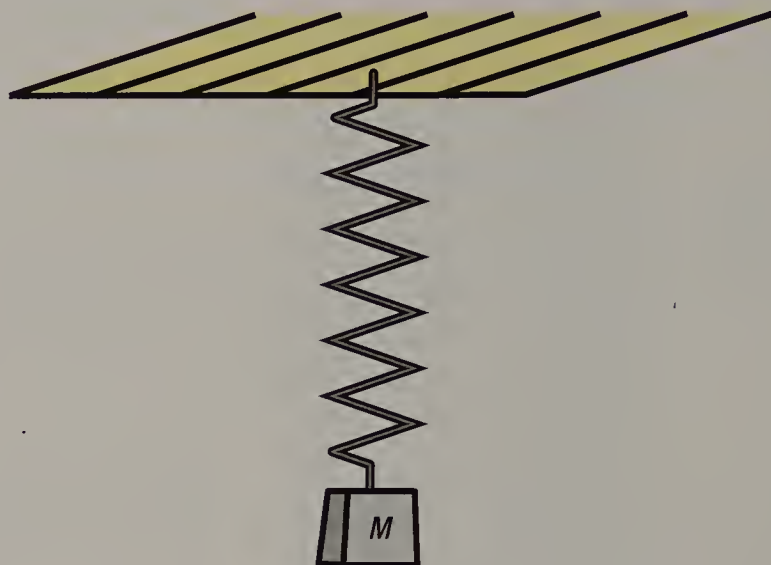


On utilise un multimètre pour mesurer différentes grandeurs liées à un courant électrique, tels le voltage, l'intensité et la résistance électrique.

16

Une masse est suspendue à un ressort comme l'illustre le schéma ci-dessous. On donne un mouvement à cette masse de telle sorte que sa hauteur H (en cm), mesurée par rapport à un point de référence, varie selon la règle $H = 5 \cos 6\pi \left(x - \frac{1}{6}\right)$, où x représente le temps (en s). On interrompt ce mouvement 5 s après l'avoir initié.

- Quelle est la hauteur de la masse au moment où :
 - l'on initie le mouvement ?
 - le mouvement est interrompu ?
- À quels moments la masse atteint-elle :
 - sa hauteur maximale ?
 - sa hauteur minimale ?
 - la moitié de la hauteur maximale ?
 - la moitié de la hauteur minimale ?
 - la hauteur correspondant au point de référence ?



17

Joseph affirme que les équations $y = \sin x$ et $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ sont équivalentes. A-t-il raison ? Expliquez votre réponse.

18

La hauteur h (en m) de la ligne de flottaison d'un voilier ancré en mer est donnée par la règle $h = 2 \sin \frac{\pi}{3} x + 16$, où x est le temps (en s). À certains moments, la hauteur des vagues de part et d'autre du voilier excède le sommet du mât. Pendant combien de temps au cours d'une minute le voilier se trouve-t-il dans cette situation si le sommet du mât est situé à 3 m au-dessus de la surface de l'eau ?



19

Les règles des fonctions f et g sont $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$.

- Représentez dans un même plan cartésien les fonctions f et g ainsi que la fonction qui correspond à $f + g$.
- Établissez la règle de la fonction $f + g$:
 - sous la forme $y = a \sin b(x - h) + k$;
 - sous la forme $y = a \cos b(x - h) + k$.
- Déterminez les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = g(x)$.
 - À quelle propriété de la fonction $f + g$ ces valeurs sont-elles associées?
- Déterminez les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = f(x) + g(x)$.
 - À quelle propriété de la fonction f ces valeurs sont-elles associées?
- Déterminez les valeurs de x pour lesquelles $g(x) = f(x) + g(x)$.
 - À quelle propriété de la fonction g ces valeurs sont-elles associées?

20

Un aérateur à gazon est un appareil mécanique muni de lames cylindriques qui permettent d'extraire des petites carottes de terre du sol améliorant ainsi la capacité du sol à subvenir aux besoins de la pelouse. Sur l'appareil ci-contre, la distance d (en cm) entre l'extrémité d'une lame cylindrique et la surface du sol varie selon la règle $d = -3,5 \sin \frac{\pi}{3}x + 1,5$, où x représente la distance horizontale (en cm) parcourue par l'appareil.



- Quelle est la profondeur des trous d'aération faits par cette lame?
- Quelle est la distance entre deux trous d'aération consécutifs faits par cette lame?

21

La température ambiante T (en $^{\circ}\text{C}$) dans une pièce équipée d'un thermostat ordinaire varie selon la règle $T = 2 \cos \frac{\pi}{10}x + 20$, où x représente le temps (en min).

- Quelle est la température moyenne dans cette pièce?
- Une personne est inconfortable si l'écart entre la température ambiante et la température moyenne est supérieur ou égal à 1°C . Dans une journée, pendant combien de temps une personne est-elle inconfortable dans cette pièce?

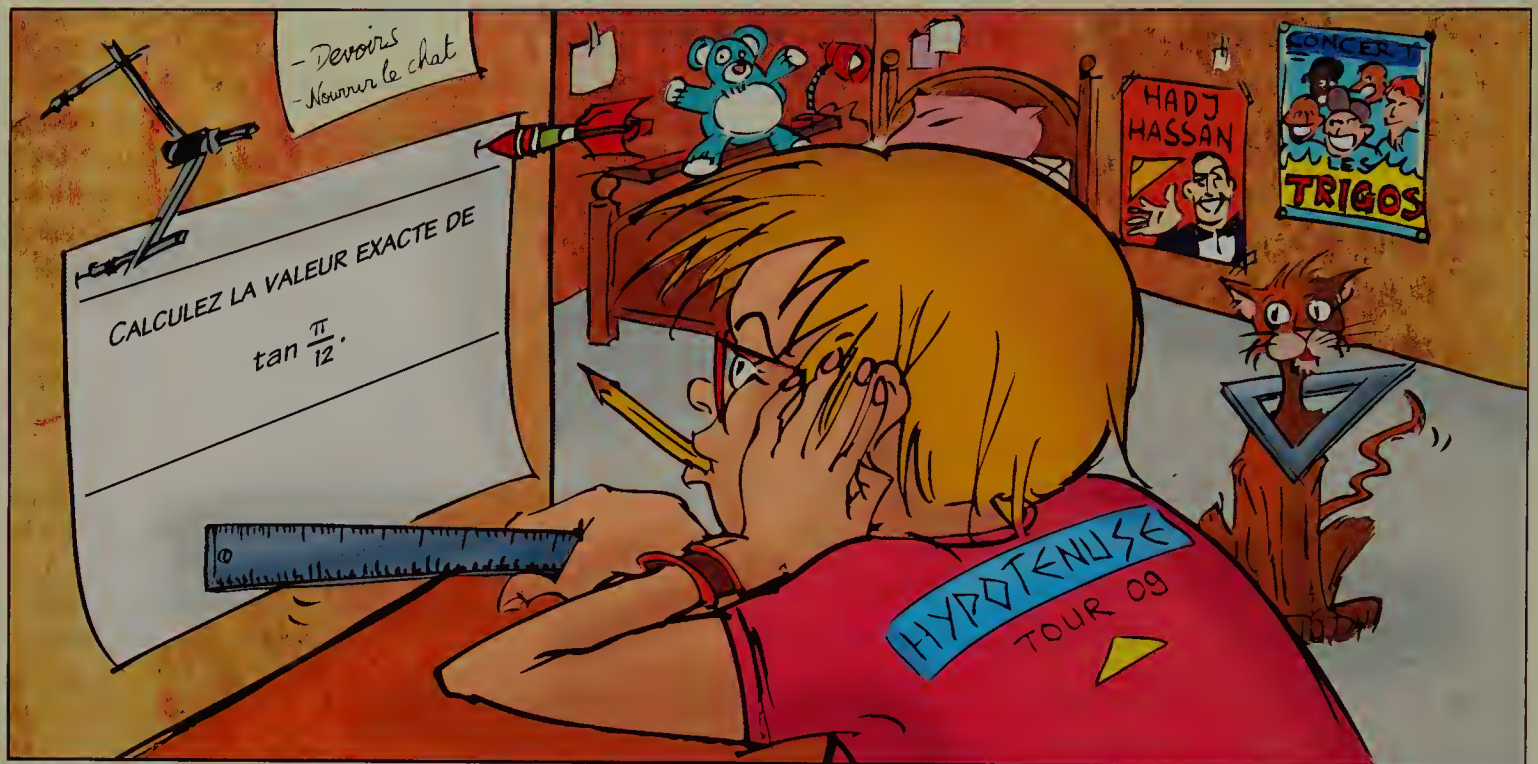
On remplace le thermostat ordinaire par un thermostat électronique qui fait en sorte que la température ambiante dans cette pièce varie selon la règle $T = 0,5 \sin \frac{2\pi}{5}x + 20$.

- Quelle est la température moyenne dans cette pièce?
- Dans une journée, pendant combien de temps une personne est-elle confortable dans cette pièce?

SECTION 5.4 Les identités trigonométriques

Cette section est en lien avec la SAÉ 10.

PROBLÈME Une opinion divisée



PUISQUE $\frac{\pi}{12}$ EST LA MOITIÉ DE $\frac{\pi}{6}$, JE N'AI QU'À DÉTERMINER LA VALEUR EXACTE DE $\tan \frac{\pi}{6}$ ET DIVISER CETTE VALEUR PAR 2 !



Que pensez-vous de la stratégie proposée par cet élève?

ACTIVITÉ 1 Une sculpture pythagoricienne

L'illustration ci-dessous montre une sculpture constituée de poutres d'acier dont une en forme d'arc qui est supportée par un cercle de centre A dont le rayon mesure 1 m.



- a.** À quel rapport trigonométrique de l'angle CAE correspond la longueur de la poutre d'acier :
- 1) AE?
 - 2) CE?
- b.** À l'aide de rapports trigonométriques, établissez une équation qui met en relation les trois côtés du triangle rectangle ACE.
- c.** Quel énoncé géométrique permet d'affirmer que :
- 1) $\triangle ACE \sim \triangle CDE$?
 - 2) $\triangle ABC \sim \triangle ACD$?
 - 3) $\triangle ACD \sim \triangle ACE$?
 - 4) $\triangle ABD \sim \triangle ACE$?

Voici le début d'une démarche qui permet de déterminer la longueur de la poutre CD.

$$\frac{m \overline{AE}}{m \overline{CE}} = \frac{m \overline{AC}}{m \overline{CD}}$$

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{m \overline{CD}}$$

- d.** À quel rapport trigonométrique de l'angle CAE correspond la longueur de la poutre CD?

- e.** Voici le début d'une démarche qui permet de déterminer la longueur de la poutre BC.

$$\frac{m \overline{BC}}{m \overline{AC}} = \frac{m \overline{AC}}{m \overline{CD}}$$

$$\frac{m \overline{BC}}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

- 1) Complétez la proportion ci-dessus.
- 2) Exprimez la longueur de la poutre BC en fonction de θ .
- 3) Comparez cette expression à celle obtenue en **d**. Que remarquez-vous?

- f.** Voici le début d'une démarche qui permet de déterminer la longueur de la poutre AD.

$$\frac{m \overline{AD}}{m \overline{AC}} = \frac{m \overline{AC}}{m \overline{AE}}$$

$$\frac{m \overline{AD}}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

- 1) Complétez la proportion ci-dessus.
- 2) Exprimez la longueur de la poutre AD en fonction de θ .
- 3) Comparez cette expression à celle obtenue en **a** 1). Que remarquez-vous?

- g.** À l'aide de rapports trigonométriques, établissez une équation qui met en relation les trois côtés du triangle rectangle ACD.

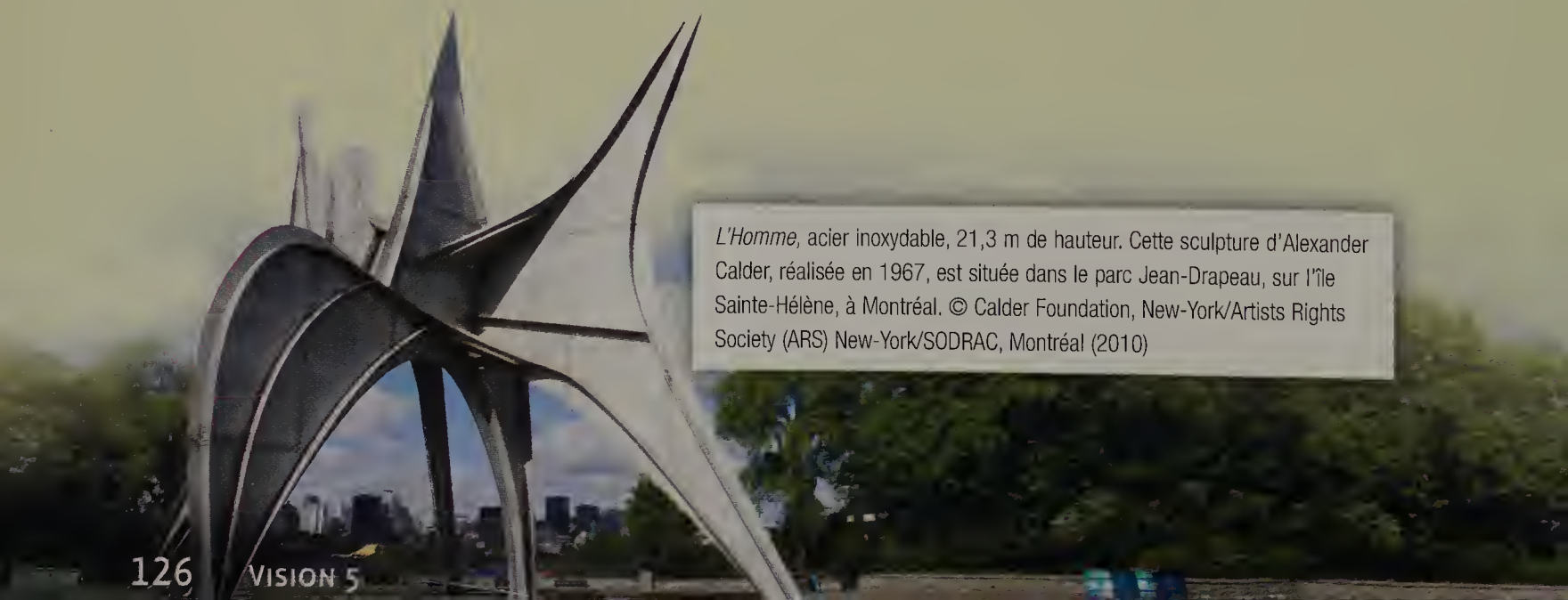
- h.** Voici le début d'une démarche qui permet de déterminer la longueur de la poutre AB.

$$\frac{m \overline{CE}}{m \overline{AC}} = \frac{m \overline{AC}}{m \overline{AB}}$$

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{m \overline{AB}}$$

- 1) Complétez la proportion ci-dessus.
- 2) Exprimez la longueur de la poutre AB en fonction de θ .
- 3) Comparez cette expression à celle obtenue en **a** 2). Que remarquez-vous?

- i.** À l'aide de rapports trigonométriques, établissez une équation qui met en relation les trois côtés du triangle rectangle ABC.



L'Homme, acier inoxydable, 21,3 m de hauteur. Cette sculpture d'Alexander Calder, réalisée en 1967, est située dans le parc Jean-Drapeau, sur l'île Sainte-Hélène, à Montréal. © Calder Foundation, New-York/Artists Rights Society (ARS) New-York/SODRAC, Montréal (2010)

ACTIVITÉ 2 Des identités pythagoriciennes

Les travaux de l'astronome et mathématicien d'origine persane Muhammad Aboûl-Wafâ portent principalement sur la trigonométrie. Au cours de ses travaux, il utilise, entre autres, des formules qui permettent de déterminer le sinus, le cosinus et la tangente d'une somme ou d'une différence de deux angles.



Muhammad Aboûl-Wafâ (940-998) s'est aussi intéressé à l'algèbre. Il a traduit du grec l'*Arithmétique* de Diophante.

a. 1) Dans chaque cas, vérifiez si l'égalité est vraie ou fausse.

i) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}$

ii) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} - \cos\pi$

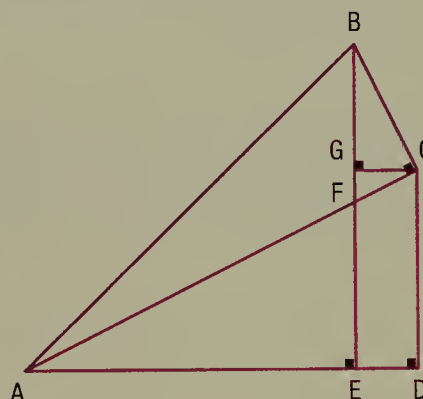
iii) $\tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{6} + \tan\frac{\pi}{3}$

iv) $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\pi - \sin\frac{\pi}{3}$

2) D'après les résultats obtenus, quelle conjecture pouvez-vous émettre?

b. Justifiez chacune des étapes de la démarche suivante qui permet d'établir que les triangles ACD et BCG illustrés ci-dessous sont semblables.

- ① $\angle ACD \cong \angle BFC$
- ② $\angle CAD \cong \angle CBF$
- ③ $\angle ADC \cong \angle BGC$
- ④ $\triangle ACD \sim \triangle BCG$



c. La démonstration suivante mène à une formule qui permet de calculer le sinus de la somme des mesures des angles CAD et BAC.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad \sin(\text{CAD} + \text{BAC}) &= \frac{m \overline{BE}}{m \overline{AB}} \\
 \textcircled{2} \quad &= \frac{m \overline{CD} + m \overline{BG}}{m \overline{AB}} \\
 \textcircled{3} \quad &= \frac{m \overline{CD}}{m \overline{AB}} + \frac{m \overline{BG}}{m \overline{AB}} \\
 \textcircled{4} \quad &= \frac{m \overline{CD}}{m \overline{AB}} \times \frac{m \overline{AC}}{m \overline{AC}} + \frac{m \overline{BG}}{m \overline{AB}} \times \frac{m \overline{BC}}{m \overline{BC}} \\
 \textcircled{5} \quad &= \frac{m \overline{CD}}{m \overline{AC}} \times \frac{m \overline{AC}}{m \overline{AB}} + \frac{m \overline{BG}}{m \overline{BC}} \times \frac{m \overline{BC}}{m \overline{AB}} \\
 \textcircled{6} \quad &= \sin \text{CAD} \times \cos \text{BAC} + \cos \text{CBG} \times \sin \text{BAC} \\
 \textcircled{7} \quad &= \sin \text{CAD} \times \cos \text{BAC} + \cos \text{CAD} \times \sin \text{BAC}
 \end{aligned}$$

Expliquez comment passer d'une étape à l'autre de cette démonstration.

- d. La démonstration suivante mène à une formule qui permet de calculer le cosinus de la somme des mesures des angles CAD et BAC.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad \cos(\text{CAD} + \text{BAC}) &= \frac{m \overline{AE}}{m \overline{AB}} \\
 \textcircled{2} \quad &= \frac{m \overline{AD} - m \overline{CG}}{m \overline{AB}} \\
 \textcircled{3} \quad &= \frac{m \overline{AD}}{m \overline{AB}} - \frac{m \overline{CG}}{m \overline{AB}} \\
 \textcircled{4} \quad &= \frac{m \overline{AD}}{m \overline{AB}} \times \frac{m \overline{AC}}{m \overline{AC}} - \frac{m \overline{CG}}{m \overline{AB}} \times \frac{m \overline{BC}}{m \overline{BC}} \\
 \textcircled{5} \quad &= \frac{m \overline{AD}}{m \overline{AC}} \times \frac{m \overline{AC}}{m \overline{AB}} - \frac{m \overline{CG}}{m \overline{BC}} \times \frac{m \overline{BC}}{m \overline{AB}} \\
 \textcircled{6} \quad &= \cos \text{CAD} \times \cos \text{BAC} - \sin \text{CBG} \times \sin \text{BAC} \\
 \textcircled{7} \quad &= \cos \text{CAD} \times \cos \text{BAC} - \sin \text{CAD} \times \sin \text{BAC}
 \end{aligned}$$

Expliquez comment passer d'une étape à l'autre de cette démonstration.

- e. Voici le début d'une démonstration qui mène à une formule permettant de calculer la tangente de la somme des mesures de deux angles a et b .

$$\begin{aligned}
 \tan(a + b) &= \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} \\
 &= \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\
 &= \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b} \cdot \frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\
 &= \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \cdot \frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b}
 \end{aligned}$$

- 1) Complétez cette démonstration qui permet d'établir que $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
- 2) Montrez que $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.



IDENTITÉS TRIGONOMÉTRIQUES

Une **identité trigonométrique** est une équation trigonométrique qui est toujours vraie, quelles que soient les valeurs des variables.

Certaines identités découlent des trois principaux rapports trigonométriques. La **cosécante**, la **sécante** et la **cotangente** d'un angle correspondent respectivement à l'inverse multiplicatif du sinus, du cosinus et de la tangente de cet angle.

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \text{ où } \sin x \neq 0$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ où } \cos x \neq 0$$

$$\cotan x = \frac{1}{\tan x} \text{ où } \tan x \neq 0$$

À partir de ces identités trigonométriques, on peut déduire les identités pythagoriciennes suivantes.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

Ces identités permettent, entre autres, de résoudre des équations trigonométriques, de réduire des expressions trigonométriques et de démontrer d'autres identités.

Ex.: 1) Résoudre: $2 \cos x \sin x + 1 = 0$ si $x \in [0, 2\pi[$.

$$2 \cos x \sin x + 1 = 0$$

$$2 \cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0, \text{ puisque } \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

$$\sin^2 x + 2 \cos x \sin x + \cos^2 x = 0, \text{ par commutativité de l'addition;}$$

$$(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x) = 0, \text{ par factorisation.}$$

L'équation $2 \cos x \sin x + 1 = 0$ est donc équivalente à l'équation $\sin x + \cos x = 0$.

On doit déterminer, sur le cercle trigonométrique, les points dont la somme de l'abscisse et de l'ordonnée est 0. Les valeurs recherchées sont $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$.

2) Démontrer que $\frac{1}{\sec^2 x} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} = 1$.

$$\frac{1}{\sec^2 x} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} = 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \text{ puisque } \sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ et } \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x};$$

$$1 = 1, \text{ puisque } \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

FORMULES D'UNE SOMME OU D'UNE DIFFÉRENCE DE DEUX ANGLES

Certaines formules permettent de déterminer le sinus, le cosinus et la tangente d'une somme ou d'une différence de deux angles.

Sinus de la somme de deux angles

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

Sinus de la différence de deux angles

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Cosinus de la somme de deux angles

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Cosinus de la différence de deux angles

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Tangente de la somme de deux angles

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\text{où } 1 - \tan a \tan b \neq 0$$

Tangente de la différence de deux angles

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\text{où } 1 + \tan a \tan b \neq 0$$

Ex. :

- 1) Déterminer la valeur exacte de $\cos \frac{11\pi}{12}$.

Puisque $\cos \frac{11\pi}{12} = \cos \left(\frac{8\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$, on a :

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) &= \cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

- 2) Déterminer la valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{12}$.

Puisque $\tan \frac{\pi}{12} = \tan \left(\frac{2\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right)$, on a :

$$\begin{aligned} \tan \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\tan \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - 1}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)(1)} \\ &= \frac{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}} \\ &= \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3} - 2 \end{aligned}$$

1 Réduisez chacune des expressions suivantes.

- | | |
|--|--------------------------|
| a) $1 - \sin^2 x$ | b) $1 - \cos^2 x$ |
| c) $(1 - \cos^2 x) \cot^2 x$ | d) $\sec^2 x - \tan^2 x$ |
| e) $\operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x$ | f) $\sec^2 x - 1$ |
| g) $\cot^2 x \sec x \sin x$ | h) $\sin^2 x \sec^2 x$ |

2 Si $\cos x = \frac{1}{8}$ et $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, déterminez la valeur de:

- | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-----------------------------|
| a) $\sin x$ | b) $\tan x$ | c) $\sec x$ | d) $\operatorname{cosec} x$ |
|-------------|-------------|-------------|-----------------------------|

3 Si $\sin x = -\frac{13}{40}$ et $x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, déterminez la valeur de:

- | | | | |
|-------------|-------------|-----------------------------|-------------|
| a) $\cos x$ | b) $\sec x$ | c) $\operatorname{cosec} x$ | d) $\cot x$ |
|-------------|-------------|-----------------------------|-------------|

4 Si $\sec x = -3$ et $x \in [0, \pi]$, déterminez la valeur de:

- | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| a) $\sin x$ | b) $\cos x$ | c) $\tan x$ | d) $\cot x$ |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
- Handwritten notes: "négatif" (negative) under (c), "valeur" (value) with an arrow pointing to (d).*

5 Si $\tan x = \frac{3}{4}$ et $x \in [\pi, 2\pi]$, déterminez la valeur de:

- | | | | |
|-------------|-------------|-----------------------------|-------------|
| a) $\sin x$ | b) $\cos x$ | c) $\operatorname{cosec} x$ | d) $\cot x$ |
|-------------|-------------|-----------------------------|-------------|

6 Si $\operatorname{cosec} x = \frac{5}{3}$ et $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, déterminez la valeur de:

- | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| a) $\sin x$ | b) $\tan x$ | c) $\sec x$ | d) $\cot x$ |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
- Handwritten notes: "valeur" (value) with an arrow pointing to (d).*

7 Si $x \in [-3\pi, 3\pi]$, déterminez les valeurs de x qui vérifient chacune des équations suivantes.

- | | |
|---------------------------------|--|
| a) $\sin x = \cos^2 x + 1$ | b) $1 = 2\sin^2 x + \cos x$ |
| c) $\tan^2 x + 3\sec x + 3 = 0$ | d) $\cot^2 x = 1 - \operatorname{cosec} x$ |
| e) $5\cos x + 7 = \sin^2 x$ | f) $1 + \sin x = 2\cos^2 x$ |

8 Réduisez chacune des expressions suivantes.

a) $\frac{1 + \tan^2 x}{\sec^2 x}$

c) $\frac{\cot x}{\tan x \cos^2 x}$

e) $\tan x \operatorname{cosec} x$

b) $\tan^2 x - \tan^2 x \sin^2 x$

d) $\sec^2 x - \tan^2 x - \cos^2 x$

f) $\sin x \cos x \tan x + \sin x \cos x \cot x$

9 Démontrez que $\frac{\cos^2 x - \cos^4 x}{\sin^2 x - \sin^4 x} = 1$.

10 Déterminez la valeur exacte de:

a) $\sin \frac{7\pi}{12}$

b) $\tan \frac{23\pi}{12}$

c) $\sec -\frac{\pi}{12}$

d) $\cos -\frac{17\pi}{12}$

e) $\cot \frac{5\pi}{12}$

f) $\operatorname{cosec} \frac{19\pi}{12}$

11 Démontrez chacune des identités trigonométriques suivantes.

a) $\sin^2 x = 1 - \cot^2 x \sin^2 x$

b) $\sin x \cot x = \cos x$

c) $\frac{\cot x - \tan x}{\cot x + \tan x} = 2 \cos^2 x - 1$

d) $\tan x (\sin x + \cot x \cos x) = \sec x$

e) $(1 - \sin^2 x)(1 + \cot^2 x) = \cot^2 x$

f) $\sin^2 x \cot^2 x \sec x = \cos x$

g) $\cos x \sqrt{\sec^2 x - 1} = \sin x$

h) $\tan^2 x + \cos^2 x - 1 = \sin^2 x \tan^2 x$

12 À l'aide de $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $-\sin x$, $-\cos x$ et $-\tan x$, complétez les équivalences suivantes.

a) $\sin -x =$

b) $\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) =$

c) $\sin (\pi - x) =$

d) $\cos -x =$

e) $\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) =$

f) $\cos (\pi - x) =$

g) $\tan -x =$

h) $\tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right) =$

i) $\tan (\pi - x) =$

- 13** Les démonstrations suivantes mènent chacune à une formule qui permet de calculer respectivement le sinus et le cosinus d'un demi-angle. Expliquez, pour chacune, comment il est possible de passer d'une étape à l'autre.

Démonstration 1

$$\sin \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos b}{2}}$$

$$\textcircled{1} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\textcircled{2} \cos 2a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a$$

$$\textcircled{3} \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\textcircled{4} 2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$$

$$\textcircled{5} \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\textcircled{6} \sin a = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$$

$$\textcircled{7} \sin \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\left(\frac{b}{2}\right)}{2}}$$

$$\textcircled{8} \sin \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos b}{2}}$$

Démonstration 2

$$\cos \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos b}{2}}$$

$$\textcircled{1} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\textcircled{2} \cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$$

$$\textcircled{3} \cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

$$\textcircled{4} 2\cos^2 a = \cos 2a + 1$$

$$\textcircled{5} \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\textcircled{6} \cos a = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$$

$$\textcircled{7} \cos \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\left(\frac{b}{2}\right)}{2}}$$

$$\textcircled{8} \cos \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos b}{2}}$$

- 14** Démontrez chacune des identités trigonométriques suivantes.

$$\text{a) } (\operatorname{cosec} x - \cot x)^2 = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\text{b) } \frac{\sec x}{\cos x} - \frac{\tan x}{\cot x} = 1$$

$$\text{c) } \frac{1 + \tan^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} = \tan^2 x$$

$$\text{d) } \frac{(2 \sin x \cos x - 1)(2 \sin x \cos x + 1)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = 4 \sin^2 x - \sec^2 x$$

$$\text{e) } \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$$

$$\text{f) } \sec^2 x (1 - \sin^2 x \cos^2 x - \cos^4 x) = \tan^2 x$$

$$\text{g) } \tan^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x \tan^2 x$$

$$\text{h) } \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}$$

Barthélémy Pitiscus (1561-1613), mathématicien allemand, a introduit le mot « trigonométrie » (mesure des trois angles) dans son traité *Trigonometriae libri quinque*, en 1595.

15

Démontrez que :

a) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

b) $\sin 4x = 4 \sin x \cos^3 x - 4 \sin^3 x \cos x$

c) $\sin 6x = 2 \sin 3x \cos 3x$

16

Déterminez la valeur exacte des expressions ci-dessous à l'aide des identités suivantes.

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

a) $\sin \frac{\pi}{8}$

b) $\cos \frac{\pi}{24}$

c) $\tan \frac{5\pi}{8}$

d) $\tan \frac{15\pi}{8}$

e) $\sin \frac{\pi}{16}$

f) $\tan \frac{\pi}{12}$

g) $\cos \frac{7\pi}{16}$

h) $\cos \frac{21\pi}{8}$

i) $\sin \frac{\pi}{8}$

j) $\cos \frac{\pi}{12}$

k) $\tan \frac{5\pi}{24}$

l) $\sin \frac{17\pi}{12}$

17

Démontrez que :

a) $\cos(1000\pi - x) = \cos x$

b) $\tan(x + 51\pi) = \tan x$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

d) $\tan(211\pi - x) = -\tan x$

e) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$

f) $\sin(x - 101\pi) = -\sin x$



Claude Ptolémée (v. 90-v. 168) est l'auteur de l'*Almageste*, un ouvrage en 13 livres dans lequel il fait la synthèse des connaissances en astronomie de son époque. Les tables trigonométriques qui se trouvent dans le livre I, portant sur les fondements mathématiques, ont servi jusqu'à la fin du Moyen-Âge. Certaines identités trigonométriques usuelles, telles que celles du sinus d'une somme et d'une différence de deux angles, découlent d'un théorème de Ptolémée paru dans l'*Almageste*.

18

Démontrez chacune des identités trigonométriques suivantes.

a) $\frac{\cot x}{\operatorname{cosec} x - \sin x} = \sec x$

b) $\frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} + \sin^2 x + \cos^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

c) $\frac{\sin x \sec x}{\operatorname{cosec} x \sqrt{1 - \sin^2 x}} = \tan^2 x$

d) $\cos^2 x \tan^2 x + \cos^2 x = 1$

e) $\frac{\cos^2 x \tan x}{\cot x} = \sin^2 x$

f) $\sin^2 x \cot^2 x + \sin^2 x = 1$

g) $\frac{\sin x}{\sec x} \operatorname{cosec} x = \cos x$

h) $(1 - \cos^2 x) \cot^2 x = \cos^2 x$

19

Si $\cos a = -\frac{1}{2}$, $a \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et que $\cos b = \frac{4}{5}$, $b \in [0, \pi]$, déterminez la valeur de:

a) $\tan(a - b)$

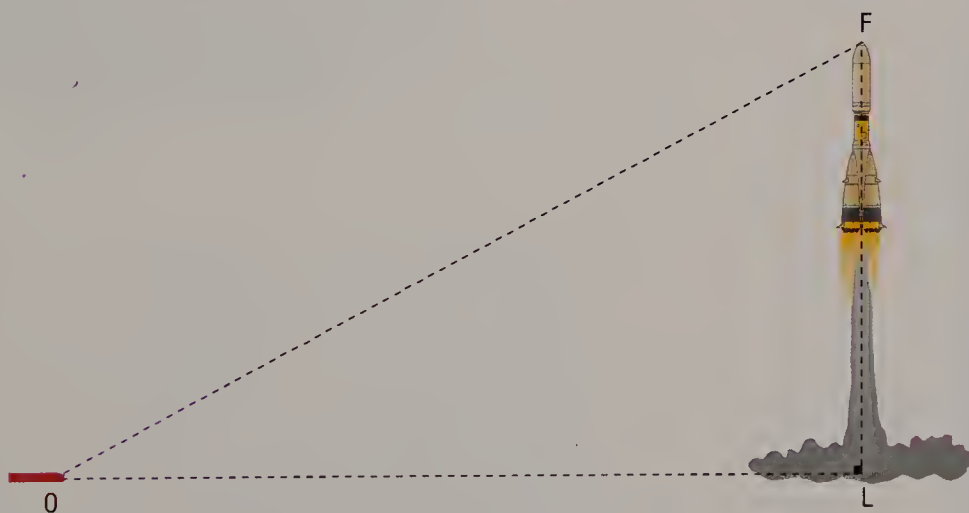
b) $\sin(a + b)$

c) $\cos(b - a)$

d) $\tan 2a$

20

Lors du lancement d'une fusée expérimentale, un observateur se trouve au point O, situé à 1 km du site de lancement L. L'observateur suit la trajectoire verticale de la fusée à l'aide d'un appareil de visée qui mesure l'angle d'élévation O de la fusée par rapport au sol.



Montrez que lorsque la mesure de l'angle d'élévation O double, l'altitude de la fusée ne double pas nécessairement.



La fusée V2, mise au point par Wernher von Braun, est le premier objet fabriqué par l'être humain à atteindre l'espace. Le premier lancement réussi a eu lieu en Allemagne au mois d'octobre 1942. Le motif en damier permettait l'analyse du mouvement de la fusée au cours du lancement.

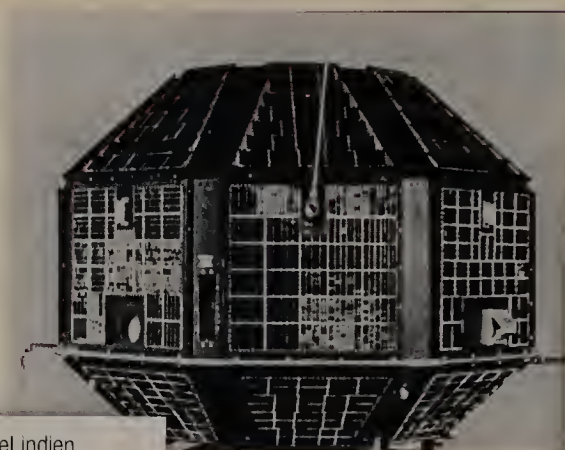
Les Siddhantas

Les ouvrages les plus importants en trigonométrie, connus sous le nom de *Siddhantas*, ont été écrits par des mathématiciens indiens aux IV^e et V^e siècles. Dans ces ouvrages, on définit le sinus, le cosinus, le sinus verse et l'arc sinus. Le sinus verse d'un angle x , noté versin x , correspond à l'expression $1 - \cos x$ ou à l'expression $2 \sin^2 \frac{x}{2}$. On y trouve également les premières utilisations de la tangente et de la sécante.

Âryabhata

Âryabhata naît en 476 dans le grand royaume d'Ashmaka et décède en 550. Il est le premier des grands astronomes de l'Inde et on le considère comme le plus grand mathématicien indien.

Les travaux d'Âryabhata portent, entre autres, sur la rédaction d'une table de sinus et sur la résolution de problèmes de trigonométrie. Il est le premier à mentionner que π est un nombre irrationnel.



Le premier satellite artificiel indien, lancé en 1975, porte le nom d'Âryabhata.

Varahamihira

L'astronome et mathématicien Varahamihira naît en 505 et décède en 587. Considéré à son époque comme l'un des neuf joyaux de la cour du roi, il est l'auteur de *Pancasiddhantika*, ou *Les cinq canons astronomiques*, qui constitue un traité de mathématique astronomique résumant cinq traités indiens maintenant disparus. Il est aussi l'auteur du *Brihat-Samhita*, une œuvre encyclopédique qui traite de sujets aussi divers que l'astronomie, le mouvement des planètes, la culture maraîchère et la fabrication des parfums. Dans ses ouvrages, Varahamihira utilise, entre autres, les identités :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Bhaskara I

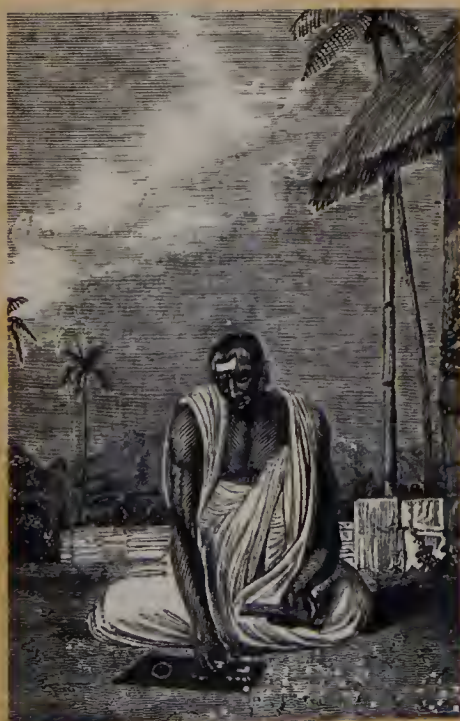
Au VII^e siècle, l'astronome Bhaskara I invente la formule ci-dessous qui permet de calculer approximativement le sinus d'un angle aigu sans avoir recours aux tables de sinus.

$$\sin x \approx \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)}, \text{ où } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Brahmagupta

Le mathématicien et astronome Brahmagupta naît dans la cité de Bhinmal en 598. Après avoir réalisé de nombreux travaux en astronomie et en mathématiques, particulièrement en trigonométrie, il décède en 668. Dans un de ses nombreux ouvrages, il établit que :

$$1 - \sin^2 x = \cos^2 x = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$



1. Déterminez la valeur exacte de :
 - a) $\sin \frac{\pi}{6}$
 - b) $\sin \frac{2\pi}{3}$
 - c) $\sin -\frac{\pi}{4}$
2. À l'aide de l'identité $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, montrez que $\sin a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$.
3. À l'aide de la formule de Bhaskara I, déterminez approximativement la valeur de :
 - a) $\sin \frac{\pi}{6}$
 - b) $\sin \frac{\pi}{4}$
 - c) $\sin \frac{\pi}{3}$
4. À l'aide de l'identité $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, montrez que $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.



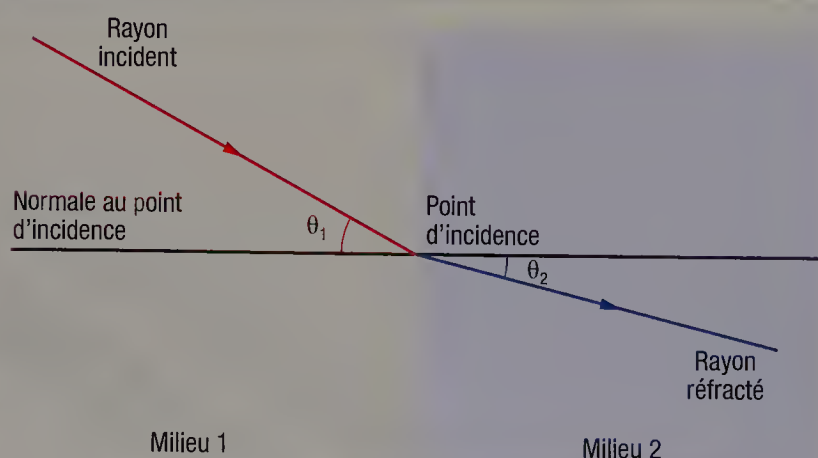
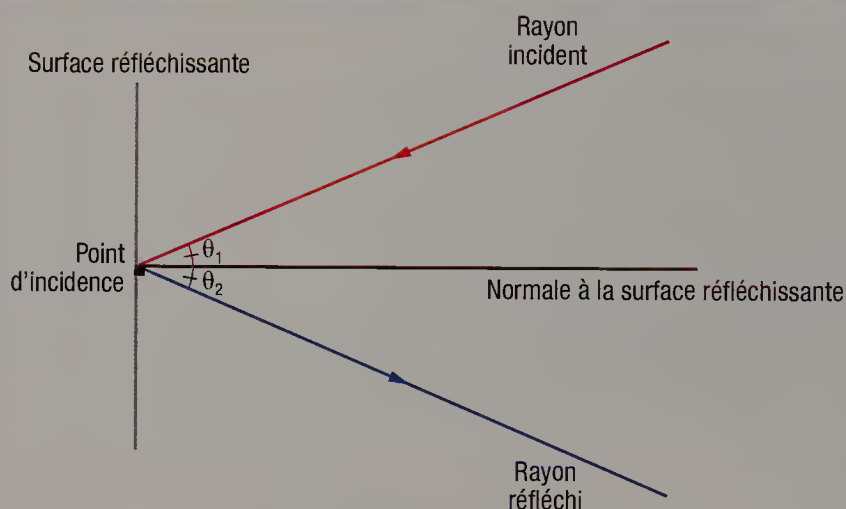
Les ingénieurs opticiens conçoivent des instruments d'optique tels que des microscopes et des télescopes, ainsi que leurs composants comme des lentilles ou tout autre appareil qui utilise les propriétés de la lumière.

Les disques optiques numériques (CD et DVD), les lasers et les fibres optiques ont été conçus par des ingénieurs opticiens.

Réflexion

La réflexion est un phénomène par lequel un rayon lumineux frappant une surface retourne dans le milieu d'où il provient.

Sur l'illustration ci-contre, θ_1 correspond à la mesure de l'angle d'incidence et θ_2 , à la mesure de l'angle de réflexion.



L'indice de réfraction n d'un milieu correspond au rapport de la vitesse c de la lumière dans le vide à la vitesse V de la lumière dans ce milieu : $n = \frac{c}{V}$.

Réfraction

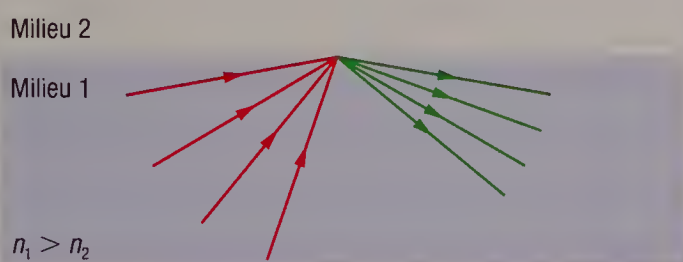
La réfraction est un phénomène caractérisé par le changement de direction d'un rayon lumineux lorsque sa vitesse change en passant d'un milieu à un autre.

Sur l'illustration ci-contre, θ_1 correspond à la mesure de l'angle d'incidence et θ_2 , à la mesure de l'angle de réfraction.

Lorsque ce phénomène se produit, $n_1 \times \sin \theta_1 = n_2 \times \sin \theta_2$, où n_1 et n_2 sont respectivement les indices de réfraction des milieux 1 et 2.

Réflexion totale

Lorsque la lumière passe du milieu 1 au milieu 2, il est possible que les rayons ne soient plus réfractés, mais réfléchis. Ce phénomène se produit lorsque l'angle de réfraction est obtus. C'est cette propriété qui est exploitée dans la conception des fibres optiques. L'angle d'incidence est alors appelé angle critique et sa mesure se calcule à l'aide de l'expression $\arcsin \frac{n_2}{n_1}$, où n_1 et n_2 sont respectivement les indices de réfraction des milieux 1 et 2, et $n_1 > n_2$.



Une fibre optique est un filament, en verre ou en plastique, de forme cylindrique. Elle est généralement constituée d'une zone centrale, appelée cœur, entourée d'une gaine optique.



1. Complétez le tableau suivant.

Indice de réfraction du milieu 1 (n_1)	Indice de réfraction du milieu 2 (n_2)	Mesure de l'angle d'incidence (rad)	Mesure de l'angle de réfraction (rad)
1,46	1,001	$\frac{\pi}{18}$	
2,01	1,02		$\frac{\pi}{12}$
3,26		$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{14}$
	1	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{18}$

2. a) Pour la réflexion totale, montrez que la valeur de l'angle critique correspond à $\arcsin \frac{n_2}{n_1}$.

b) Montrez que $\arcsin \frac{n_2}{n_1}$ n'est valide que si $n_1 > n_2$.

3. Déterminez la mesure de l'angle critique d'incidence de chacun des matériaux suivants si elle est calculée par rapport à l'air, dont l'indice de réfraction est de 1,000 293.

- Le pyrex, dont l'indice de réfraction est de 1,47.
- Le polycarbonate, dont l'indice de réfraction est de 1,585.
- Le verre, dont l'indice de réfraction est de 1,61.
- Le diamant, dont l'indice de réfraction est de 2,419.

1 Complétez chacune des égalités suivantes.

a) $30^\circ = \text{■} \text{ rad}$

b) $\frac{35\pi}{18} \text{ rad} = \text{■}^\circ$

c) $75^\circ = \text{■} \text{ rad}$

d) $27^\circ = \text{■} \text{ rad}$

e) $-\frac{5\pi}{8} \text{ rad} = \text{■}^\circ$

f) $270^\circ = \text{■} \text{ rad}$

g) $-36^\circ = \text{■} \text{ rad}$

h) $\frac{8\pi}{5} \text{ rad} = \text{■}^\circ$

i) $-78^\circ = \text{■} \text{ rad}$

2 Déterminez le quadrant dans lequel est situé chacun des points trigonométriques suivants.

a) $P\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

b) $P\left(\frac{8\pi}{7}\right)$

c) $P\left(-\frac{15\pi}{14}\right)$

d) $P\left(\frac{8\pi}{17}\right)$

e) $P(-7)$

f) $P(5)$

g) $P(1)$

h) $P(3)$

3 Pour chacune des fonctions trigonométriques suivantes, déterminez:

1) le domaine;

2) le codomaine;

3) la période.

a) $f(x) = 3 \sin \frac{\pi}{5}(x - 2) + 4$

b) $f(x) = \tan x + 1$

c) $f(x) = -2 \sin 3(x + \pi) - 5$

d) $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}(x + 1) + 18$

e) $f(x) = -7 \cos 2x + 1$

f) $f(x) = -2 \tan 3\pi(x - 2) + 8$

4 Démontrez chacune des identités suivantes.

a) $\frac{(\sin x \cot x)^2}{1 + \sin x} = 1 - \sin x$

b) $1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$

c) $\tan x + \cot x = \sec x \operatorname{cosec} x$

d) $(\tan x - \cot x) \sin x \cos x = \sin^2 x - \cos^2 x$

e) $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$

f) $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = 2 \sec x$

g) $(1 + \tan x)^2 + (1 - \tan x)^2 = 2 \sec^2 x$

h) $\frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \times \frac{1 + \cot^2 x}{\cot^2 x} = \sin^2 x \sec^2 x$

5

Dans chaque cas, déterminez les zéros de la fonction.

a) $f(x) = 4 \sin \frac{\pi}{2}(x - 1) + 2$

b) $f(x) = \cos \frac{\pi}{8}(x + 2)$

c) $f(x) = 3 \tan \frac{\pi}{6}x$

d) $f(x) = -6 \cos 3\pi x - 3$

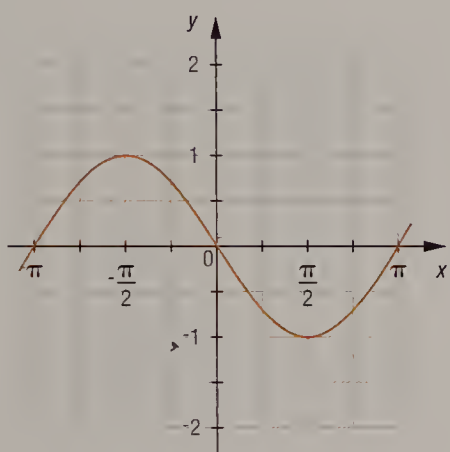
e) $f(x) = \tan(x - 1) - 1$

f) $f(x) = 9 \sin 2\left(x - \frac{\pi}{16}\right) - 9$

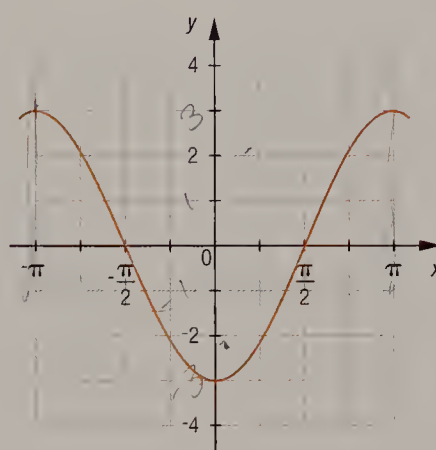
6

Établissez la règle de chacune des fonctions sinusoïdales suivantes.

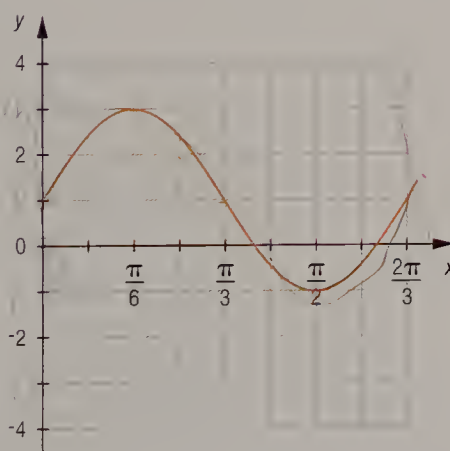
a)



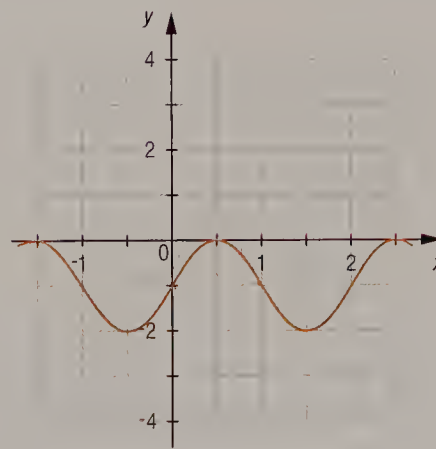
b)



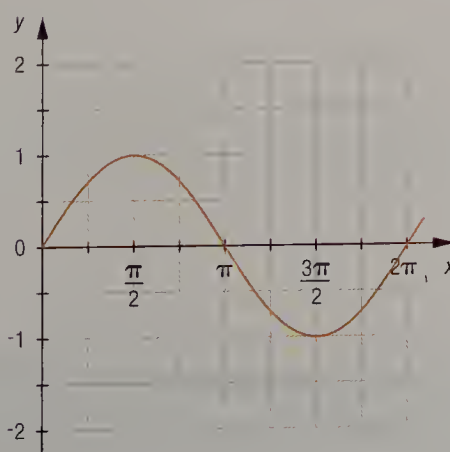
c)



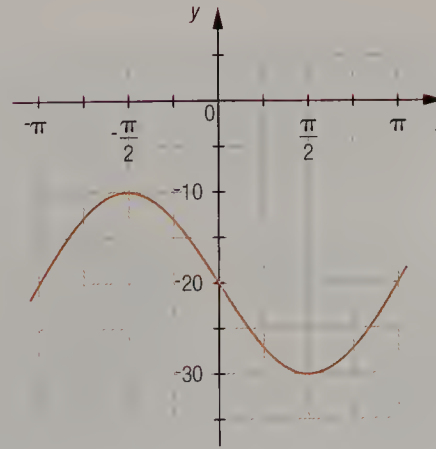
d)



e)



f)



7Résolvez chacune des équations suivantes sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

a) $3 \sin \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{2}{3} \right) + 6 = -6$

b) $8 \cos 3(x - \pi) + 4 = 0$

c) $-7 \tan \frac{1}{5} (x + 5\pi) = 7$

d) $0,5 \sin \frac{2\pi}{3} (x - 1) + 1 = 0$

e) $2 \cos 2 \left(x - \frac{\pi}{8} \right) = \sqrt{3}$

f) $2 \tan 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 2 = 2$

8

Résolvez chacune des inéquations suivantes.

a) $3\sqrt{2} \sin \frac{x}{5} + 7 > 10$

b) $\sin(x - 0,5) + \sqrt{3} \leq 0$

c) $2 \tan \frac{\pi}{4} (x - 1) + 2 < 0$

d) $-2 \cos x + 2\sqrt{2} \geq \sqrt{2}$

e) $5 \cos 3 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) > -2,5$

f) $2 \tan 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 2\sqrt{3}$

9Si $\cos x = \frac{12}{13}$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, déterminez la valeur de :

a) $\sin x$

b) $\sec x$

c) $\tan x$

d) $\operatorname{cosec} x$

e) $\cot x$

10Si $\tan x = \sqrt{3}$ et $x \in [\pi, 2\pi]$, déterminez la valeur de :

a) $\cos x$

b) $\cot x$

c) $\operatorname{cosec} x$

d) $\sin x$

e) $\sec x$

11

Déterminez la valeur de chacune des expressions suivantes.

a) $\sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

b) $\arcsin \left(\sin \frac{2\pi}{3} \right)$

c) $\tan(\arcsin 1)$

d) $\cos \left(\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

e) $\arccos \left(\cos -\frac{\pi}{2} \right)$

f) $\arctan \left(\tan \frac{3\pi}{4} \right)$

12

Une personne roule à vélo à une vitesse constante. La hauteur h (en cm) de l'extrémité de la valve de la chambre à air de la roue avant par rapport au sol est déterminée par la règle $h = 14 \sin 15(t - 15) + 18$, où t correspond au temps (en s). Combien de temps prend cette roue pour faire un tour complet ?

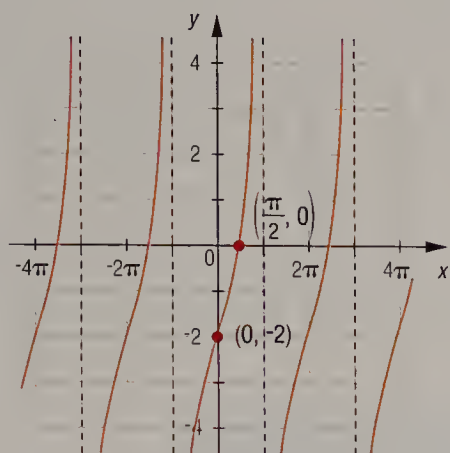


John Boyd Dunlop (1840-1921) a inventé en 1888 le pneu à air avec valve. En 1891, Édouard Michelin (1859-1940) a créé le premier pneumatique démontable avec une chambre à air.

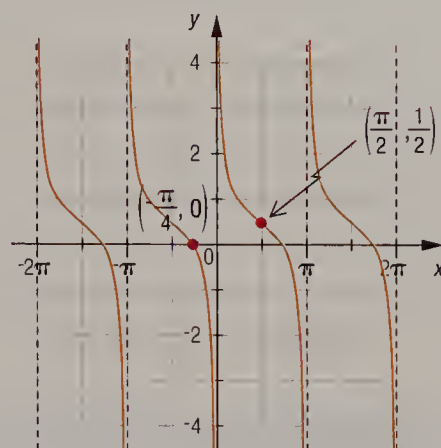
13

Établissez la règle de chacune des fonctions tangentes suivantes.

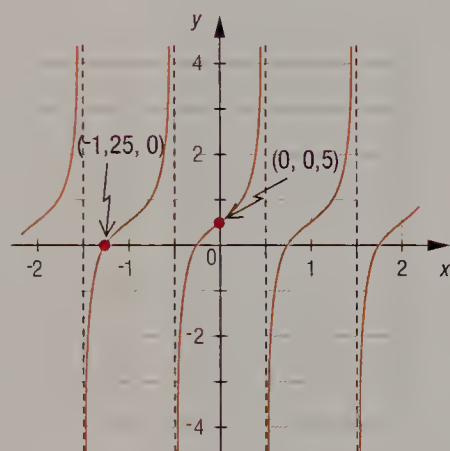
a)



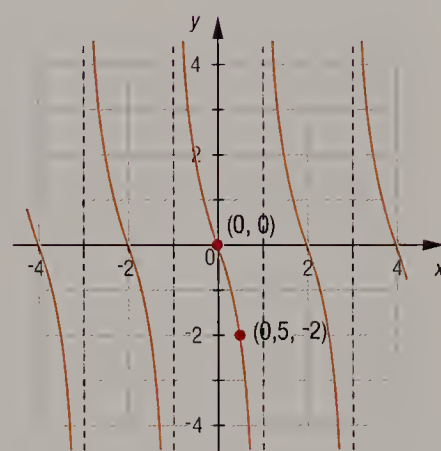
b)



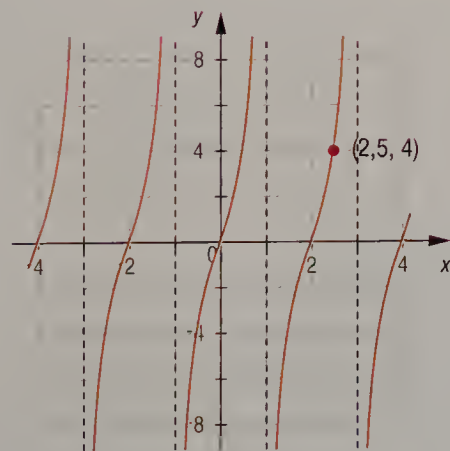
c)



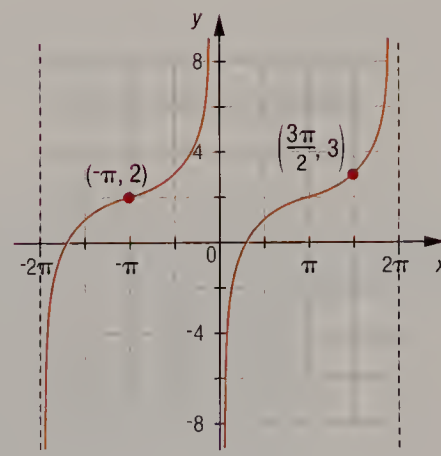
d)



e)



f)



14

Si $x \in [0, 2\pi[$, déterminez les valeurs de x qui vérifient chacune des équations suivantes.

a) $4 \cos x = -2$

b) $4 \cos^3 x - \cos x = 0$

c) $\tan^2 x - \sec x = 1$

d) $2 \cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

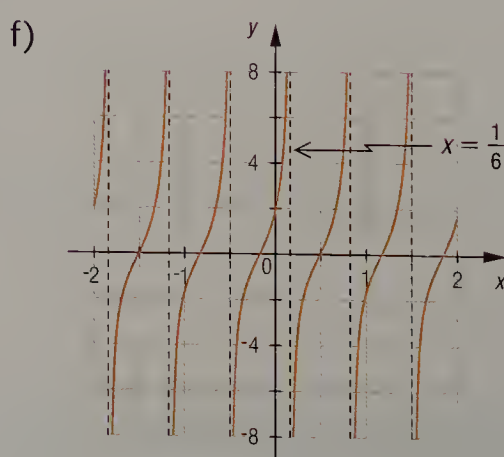
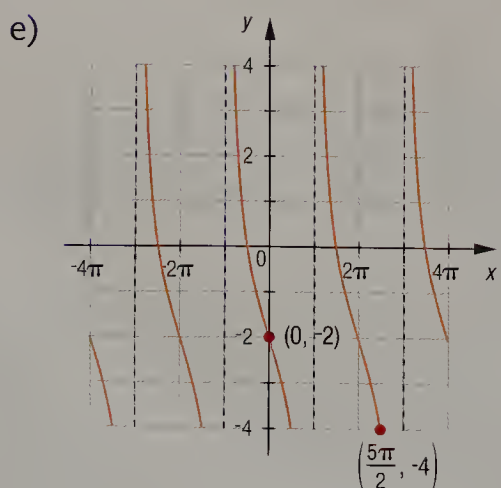
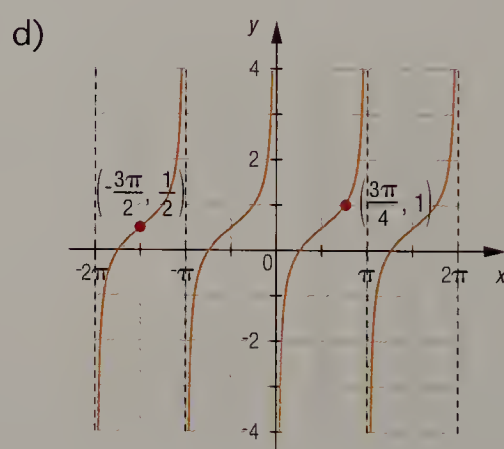
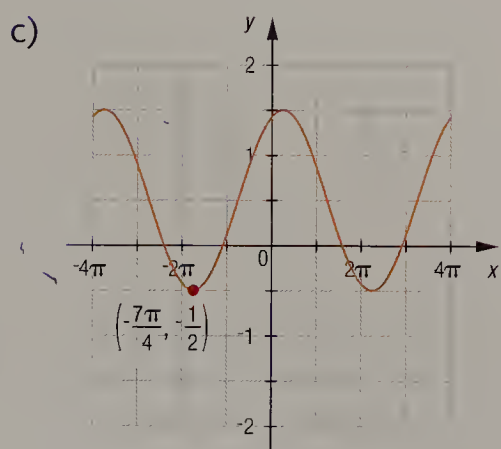
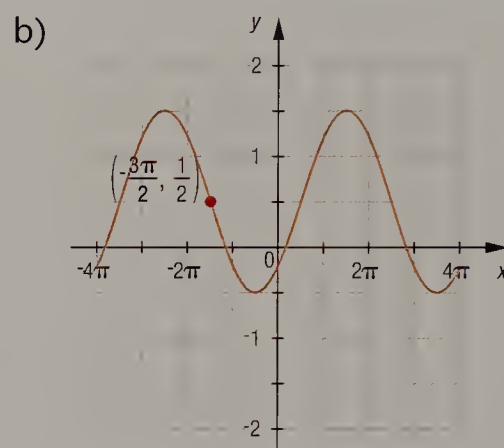
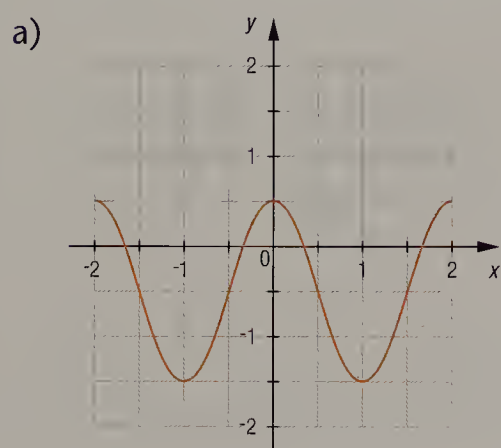
e) $\cos^2 x - 2 \sin x = 2$

f) $2 \tan^2 x + \sec^2 x = 10$

- 15** Déterminez la valeur de chacune des expressions trigonométriques suivantes sachant que $\cos a = \frac{3}{7}$, où $a \in [0, \pi]$ et que $\sin b = \frac{\sqrt{7}}{4}$, où $b \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

- | | | |
|-----------------------------|------------------|-----------------------------|
| a) $\sin a$ | b) $\tan a$ | c) $\sec a$ |
| d) $\operatorname{cosec} a$ | e) $\cot a$ | f) $\cos b$ |
| g) $\tan b$ | h) $\sec b$ | i) $\operatorname{cosec} b$ |
| j) $\cot b$ | k) $\sin(a + b)$ | l) $\cos(a - b)$ |

- 16** Déterminez le signe de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle représenté.



17 Résolvez chacune des équations suivantes.

a) $\sin 2x = -\sin x$

b) $2\cos^2 x = 1$

c) $2\sin^2 x - \cos x = 0$

d) $\tan x - \cot x = 2$

e) $\tan x - \cot x = 0$

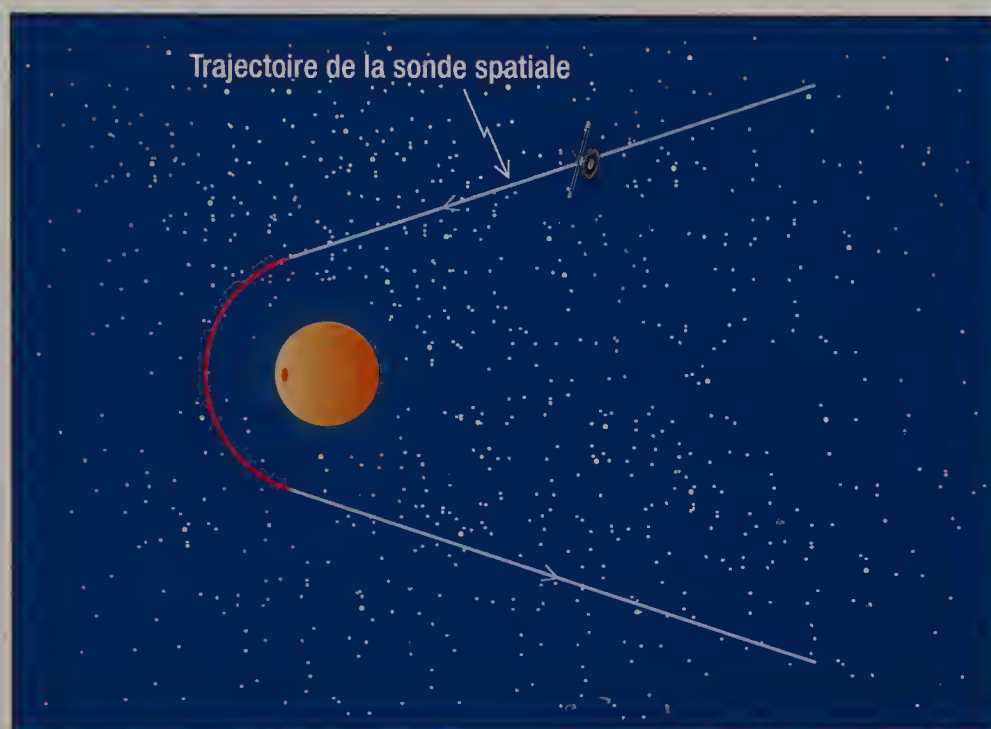
f) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$

g) $4\sin x = 3\operatorname{cosec} x$

h) $\tan^2 x = 2\sec x$

i) $4\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0$

18 **FRONDE GRAVITATIONNELLE** Lorsqu'une sonde spatiale passe près d'un corps céleste, l'attraction gravitationnelle fait en sorte que la sonde est déviée et, dans certains cas, accélérée. On nomme cet effet fronde gravitationnelle ou gravidévation.



Une sonde spatiale passe près d'un corps céleste dont le rayon est de 1500 km et décrit un arc de cercle d'une longueur de 3450 km autour de ce corps céleste. Une distance de 20 km sépare alors la sonde spatiale du corps céleste. Quelle est la mesure, en radians, de l'arc de cercle décrit par la sonde?

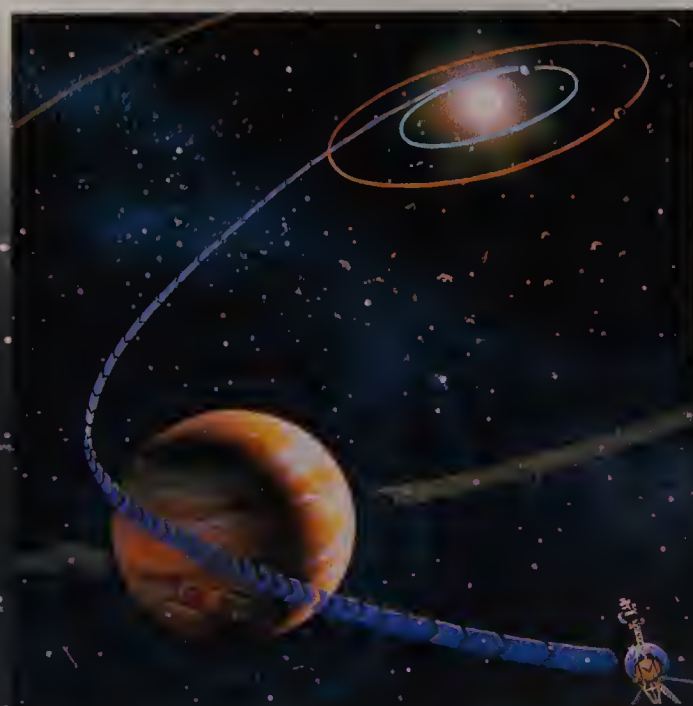


Illustration de la sonde spatiale *Voyager 2* accélérant vers Saturne après son passage dans le voisinage de Jupiter, au mois de mars 1979, par effet de fronde gravitationnelle.

19 Voici certains renseignements concernant une fonction sinusoïdale.

- Établissez une règle pour cette fonction.
- Déterminez, sur l'intervalle $[0, 6]$:
 - les valeurs de la variable indépendante pour lesquelles la fonction atteint le maximum;
 - les zéros de la fonction.

- Maximum: 4,5
- Minimum: -1,5
- Valeur initiale: -1,5
- Période: 2

20 Lors de la production d'un film documentaire sur la formation de la Terre, on utilise un ordinateur pour simuler une pluie de météorites qui dure 15 s.

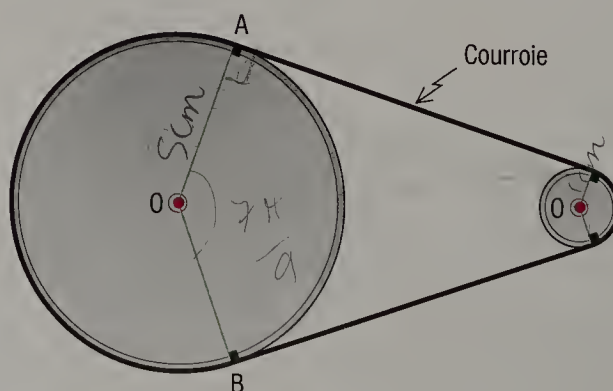
La règle $h = -\tan\frac{\pi}{2}\left(t - \frac{1}{4}\right) + 1$ permet de calculer la hauteur h (en m) d'une météorite en fonction du temps t (en s) écoulé depuis le début de la simulation. Une explosion se produit lorsqu'une météorite touche le sol. À quels moments, pendant la simulation, y a-t-il une explosion?



On croit que la Terre s'est formée il y a environ 4,6 milliards d'années par l'accumulation de matières provenant de l'espace.

21 SATURATION La saturation d'un appareil électronique se produit lorsque l'amplitude du signal mesuré est supérieure à la capacité de l'appareil. La capacité maximale d'un appareil électronique est de 12,99 mV. La tension T (en mV) d'un signal mesuré par cet appareil varie selon la règle $T = 15 \cos 20\pi x$, où x représente le temps (en s). À quels moments sur l'intervalle $[0, 1]$ s l'appareil est-il saturé?

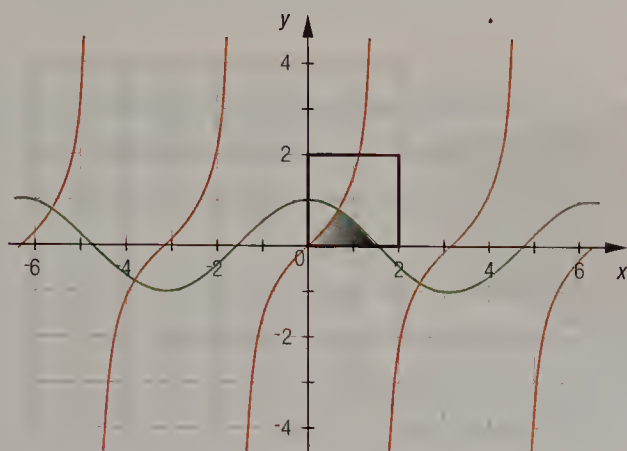
22 L'illustration ci-dessous montre deux poulies reliées entre elles par une courroie d'entraînement. Le rayon de la grande poulie mesure 5 cm et celui de la petite, 1 cm. Si l'angle AOB mesure $\frac{7\pi}{9}$ rad, quelle est la longueur de la courroie?



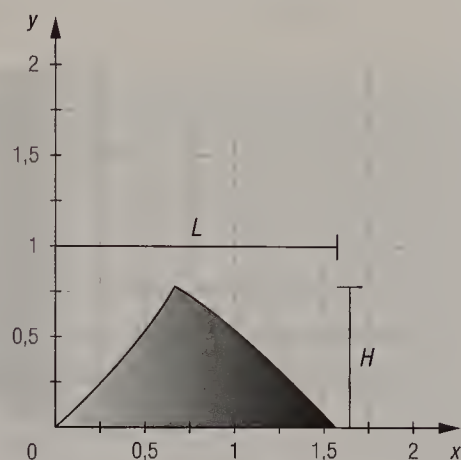
23

Une lame de métal est découpée au laser par une machine programmée à l'aide de fonctions trigonométriques. La courbe d'équation $y = \tan x$ permet de réaliser la première coupe, tandis que la courbe d'équation $y = \cos x$ permet de réaliser la seconde coupe. Le résultat est illustré dans le graphique ci-dessous où les graduations sont en millimètres.

Courbes servant au découpage



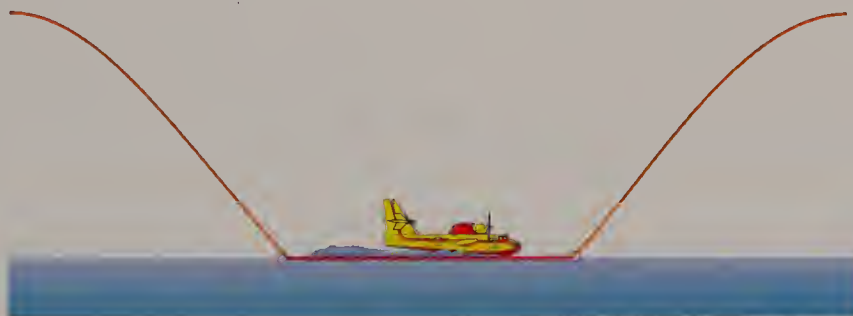
Plan de coupe



Quelle est la longueur L et la hauteur H de la lame ?

24

L'illustration ci-dessous montre la trajectoire d'un avion bombardier d'eau qui s'approvisionne dans un lac.



La règle $h = 250 \cos \frac{\pi t}{15} + 125$ permet de calculer la hauteur h (en m) de l'avion par rapport à la surface de l'eau lors de cette manœuvre selon le temps t (en s). Combien de temps prend l'avion pour remplir ses réservoirs d'eau ?

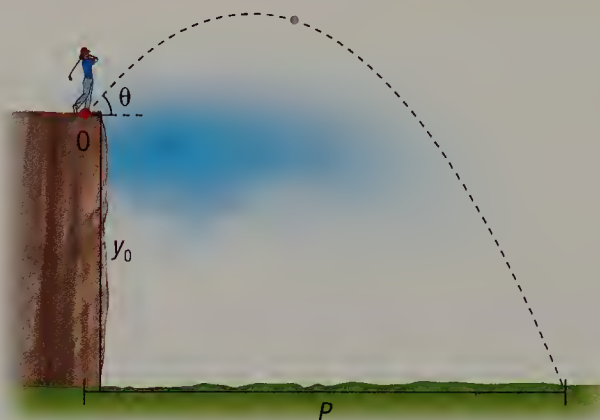


On utilise des avions bombardiers d'eau pour lutter contre les feux de forêt. Certains de ces avions peuvent transporter plus de 6000 L d'eau.

PORTÉE Si l'on néglige tout frottement, la portée P (en m) d'un projectile est déterminée par la formule

$$P = \frac{v \cos \theta}{g} (v \sin \theta + \sqrt{(v \sin \theta)^2 + 2gy_0}) \text{ où:}$$

- v correspond à la vitesse initiale (en m/s) du projectile;
- g correspond à la constante gravitationnelle, soit $9,81 \text{ m/s}^2$;
- θ correspond à la mesure (en rad) de l'angle de projection par rapport à l'horizontale;
- y_0 correspond à l'écart entre la hauteur initiale du projectile et sa hauteur lors de l'impact avec le sol.



- Si un golfeur frappe une balle à une vitesse initiale de 45 m/s selon un angle de projection de $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$, quelle est la portée de sa balle si sa hauteur initiale est de :
 - 10 m au-dessus du point d'impact avec le sol ?
 - 5 m au-dessous du point d'impact avec le sol ?
- Si l'écart entre la hauteur initiale du projectile et sa hauteur lors de l'impact avec le sol est nul, montrez que sa portée peut être déterminée par $P = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$.
- On frappe une balle de golf selon un angle de projection de $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$. À quelle vitesse doit-on frapper cette balle pour que sa portée soit de 200 m ?
- On frappe une balle de golf à une vitesse de 50 m/s . Selon quel angle de projection doit-on frapper cette balle pour que sa portée soit de 150 m ?
- Sur la Lune, la constante gravitationnelle est de $1,62 \text{ m/s}^2$. On frappe une balle sur la Lune à une vitesse de 40 m/s selon un angle de projection de $\frac{\pi}{5} \text{ rad}$. À quelle vitesse doit-on frapper cette balle sur la Terre pour atteindre la même portée ?

Lors de la mission lunaire *Apollo 14*, en 1971, l'astronaute américain Alan B. Shepard a frappé quelques balles sur la Lune avec un bâton de golf et des balles qu'il avait emportées avec lui.



RELATION PRÉDATEUR ET PROIE Dans un écosystème, une diminution du nombre de proies entraîne une diminution du nombre de prédateurs. Lorsque les prédateurs sont moins nombreux, le nombre de proies se met à augmenter, ce qui entraîne une augmentation du nombre de prédateurs, et ainsi de suite.

Voici des renseignements sur l'évolution du nombre de chevreuils et du nombre de coyotes d'un écosystème depuis l'année 2000.

Population de chevreuils

- En 2000, la population de chevreuils atteint son plus bas niveau, soit 180 bêtes.
- En 2004, la population de chevreuils atteint son plus haut niveau, soit 240 bêtes.
- En 2008, la population de chevreuils atteint de nouveau sa valeur minimale.
- La population de chevreuils varie en fonction du temps (en années) selon une fonction sinusoïdale.

Population de coyotes

- En 2001, la population de coyotes atteint son plus bas niveau, soit 16 bêtes.
- En 2005, la population de coyotes atteint son plus haut niveau, soit 24 bêtes.
- En 2009, la population de coyotes atteint de nouveau sa valeur minimale.
- La population de coyotes varie en fonction du temps (en années) selon une fonction sinusoïdale.

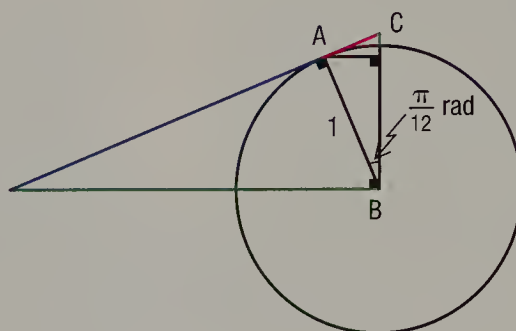
- Déterminez la règle qui permet de calculer :
 - la population de chevreuils selon le temps écoulé depuis l'année 2000 ;
 - la population de coyotes selon le temps écoulé depuis l'année 2000.
- Si la tendance se maintient, quelle sera la population :
 - de chevreuils en 2021 ?
 - de coyotes en 2027 ?
- Si la tendance se maintient, à quels moments, de 2008 à 2030 :
 - la population de chevreuils est-elle supérieure à 225 bêtes ?
 - la population de coyotes est-elle inférieure ou égale à 24 bêtes ?

Le coyote est un carnassier, mais il mange à peu près de tout, des insectes aux mammifères. Il adapte ses techniques de chasse à la taille de sa proie et aux sources de nourriture disponible.



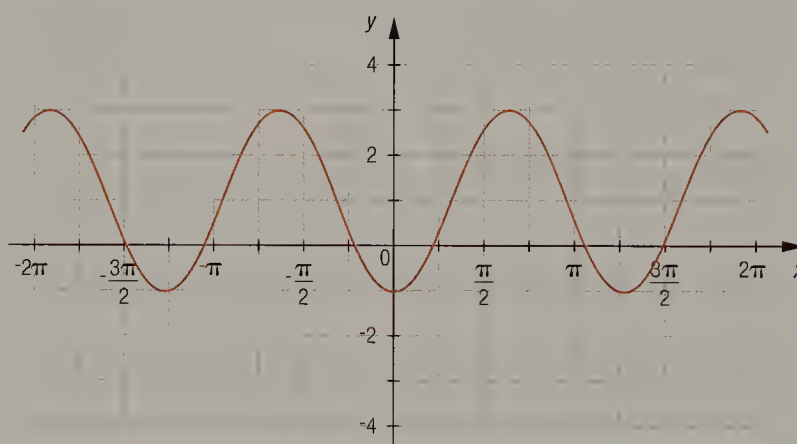
1

Dans le cercle de centre B illustré ci-dessous, que peut-on dire de la mesure du segment AC si la mesure de l'angle ABC double ?



2

Voici la représentation graphique de la fonction f dont la règle est $f(x) = 2\sin\frac{\pi}{2}(x - 1) + 1$.



Nelly-Anne affirme qu'il est impossible d'établir la règle d'une fonction g dans laquelle la valeur du paramètre h est 0 et dont la représentation graphique est la même que celle de la fonction f . Confirmez ou réfutez l'affirmation de Nelly-Anne.

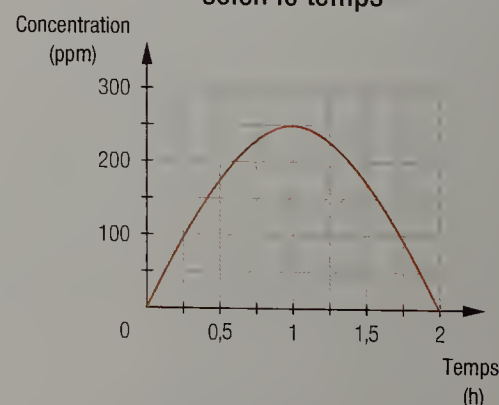


3

Voici la représentation graphique d'une fonction dont la règle est $C = 250\sin\frac{\pi}{2}x$. Cette règle permet de calculer la concentration C d'un médicament dans le sang d'un patient selon le temps x écoulé depuis la prise du médicament.

L'exposition totale à ce médicament correspond à l'aire de la région comprise entre la courbe illustrée ci-contre et l'axe des abscisses. Proposez une démarche qui permet de déterminer l'exposition totale à ce médicament.

Concentration d'un médicament selon le temps

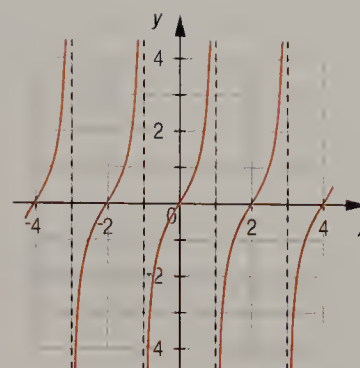


4

Voici la représentation graphique de la fonction f dont la règle est

$$f(x) = \tan \frac{\pi}{2} x.$$

Parmi les trois affirmations suivantes, choisissez celle qui est la plus juste en expliquant pourquoi les deux autres devraient être rejetées.



- A** Il n'est pas nécessaire de limiter le domaine de cette fonction pour que sa réciproque soit une fonction.
- B** On doit limiter le domaine de cette fonction à l'intervalle compris entre deux asymptotes pour que sa réciproque soit une fonction.
- C** On doit limiter le domaine de cette fonction à $] -1, 1[$ pour que sa réciproque soit une fonction.

5

Dans un sentier de randonnée qui longe la mer, les randonneurs doivent tenir compte des marées pour pouvoir effectuer certains passages en toute sécurité. Chacune des règles suivantes permet de calculer la hauteur H (en m) de la marée selon le temps x (en h) écoulé depuis le début de la semaine.

Semaine	Règle
Du 1 ^{er} juillet au 7 juillet	$H = 1,5 \sin \frac{4\pi}{23} x + 2$
Du 8 juillet au 14 juillet	$H = 1,55 \sin \frac{8\pi}{47} (x - 4,5) + 2$
Du 15 juillet au 21 juillet	$H = 1,6 \sin \frac{4\pi}{23} (x - 1) + 2$
Du 22 juillet au 28 juillet	$H = 1,55 \sin \frac{8\pi}{45} (x - 5,5) + 2$

Plusieurs passages le long de la mer sont dangereux lorsque la hauteur de la marée est supérieure ou égale à 3 m.

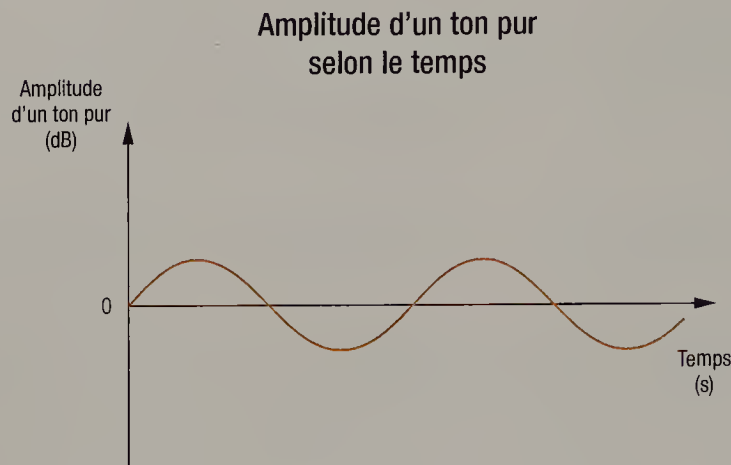
Rédigez une table de marées à l'intention des randonneurs en y indiquant les périodes pendant lesquelles les passages le long de la mer sont déconseillés.



Le secteur du sentier de la Côte-Ouest est un sentier de randonnée de 75 km longeant le littoral occidental de l'île de Vancouver qui fait partie de la réserve de parc national du Canada Pacific Rim.

**6**

L'amplitude y d'un ton pur peut être calculée à l'aide d'une règle de la forme $y = a \sin bx$, où x est le temps. La représentation graphique suivante montre l'amplitude d'un ton pur selon le temps.

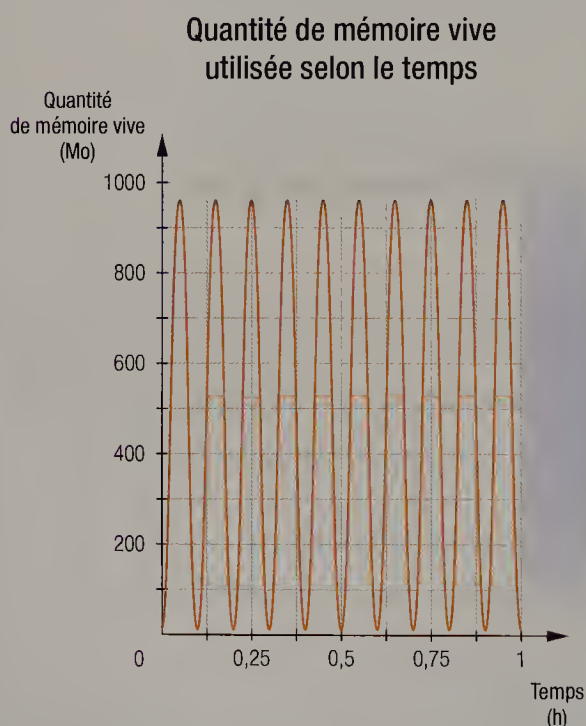


Lorsqu'un ton sonore apparaît comme une sinusoïde, on qualifie celui-ci de ton pur.

Les tons purs sont perceptibles par l'oreille humaine lorsque leur fréquence se situe entre 20 cycles/s et 20 000 cycles/s. Quelles sont les valeurs possibles du paramètre b pour que la fonction soit celle d'un ton pur perceptible par l'oreille humaine ?

**7**

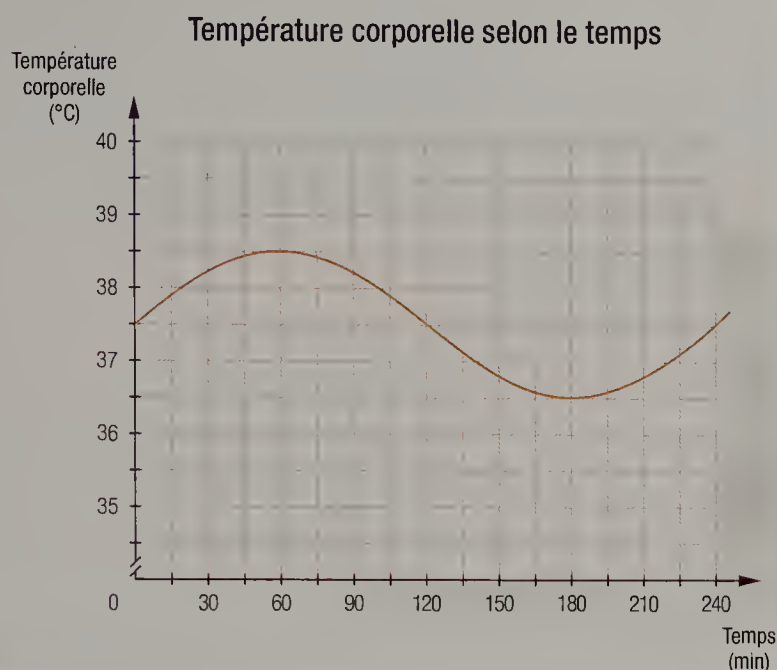
La représentation graphique suivante montre la quantité de mémoire vive utilisée par un ordinateur selon le temps au cours d'une mise à jour dont la durée est de 1 h.



Le minimum et le maximum de la fonction associée à cette situation sont respectivement de 10 Mo et de 960 Mo.

Le disque dur de l'ordinateur risque de planter si la quantité de mémoire vive est supérieure à 725 Mo. À quels moments durant la période de mise à jour cet ordinateur risque-t-il de planter ?

La courbe ci-dessous indique la température corporelle T d'une personne selon le temps x écoulé depuis la prise d'un antipyrétique.

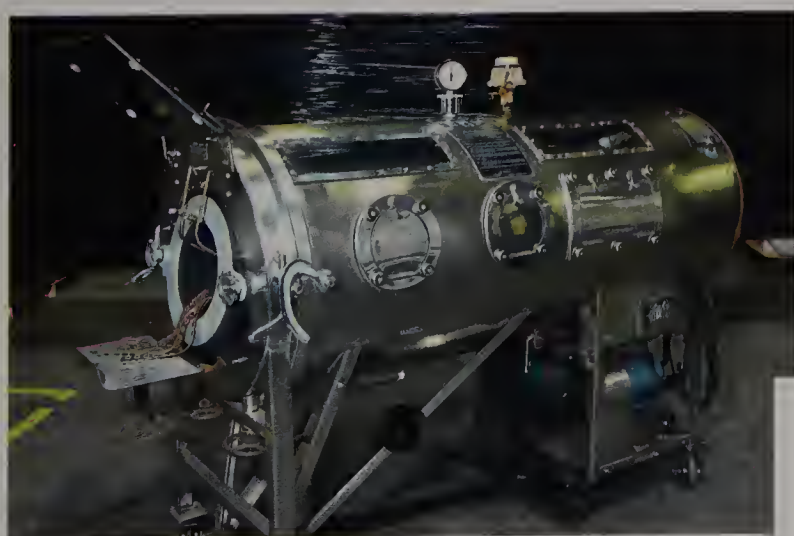


Un antipyrétique est un médicament ayant pour propriétés de prévenir, de réduire ou de faire disparaître la fièvre.

Une personne est fiévreuse lorsque sa température corporelle est supérieure ou égale à 38 °C. Si la tendance se maintient, à quels moments durant les 24 prochaines heures cette personne aura-t-elle de la fièvre ?

Dans le domaine médical, le respirateur artificiel est un appareil d'assistance respiratoire qui permet une ventilation artificielle des poumons d'un patient. Lorsque la pression de l'appareil est inférieure à la pression atmosphérique ambiante, les poumons du patient se remplissent d'air et se vident lorsque la pression de l'appareil est plus grande que la pression atmosphérique ambiante.

La règle $P = \sin 12\pi x + k$ permet de déterminer la pression P (en kPa) de l'appareil selon le temps x (en min). Dans un court rapport, expliquez aux utilisateurs de l'appareil pourquoi le paramètre k correspond à la pression atmosphérique ambiante.



Un poumon d'acier est un ventilateur externe dans lequel le malade est enfermé jusqu'au cou. Son invention par deux médecins du Harvard Medical School a permis de sauver la vie à des milliers de malades atteints de paralysie respiratoire consécutive à la poliomyélite.

VISION 6

Les coniques

Quelle équation décrit la courbure du miroir d'un télescope spatial ? Comment établir la trajectoire elliptique de la comète de Halley ? Comment trouver les coordonnées des points d'impact possibles entre deux corps célestes ? Quel type de fer permet d'atteindre un vert de golf en un seul coup ? Dans *Vision 6*, vous étudierez plusieurs situations associées à des coniques et déterminerez certains éléments propres à ces coniques. Vous mobiliserez certains concepts liés à la géométrie pour établir l'équation d'une conique et vous représenterez graphiquement la région intérieure ou extérieure qui lui est associée. Vous déterminerez également les coordonnées de points d'intersection entre une droite et une conique ou entre une parabole et une autre conique.

Arithmétique et algèbre

Géométrie

- Conique : cercle, ellipse et hyperbole centrés à l'origine
- Conique : parabole translatée
- Recherche de l'équation
- Région intérieure ou extérieure
- Détermination de coordonnées de points d'intersection entre une droite et une conique
- Détermination de coordonnées de points d'intersection entre une parabole et une autre conique



RÉPERTOIRE
DES SAÉ

Le contrôle
du stress

Chronique du

passé

Germinal
Pierre Dandelin

Le
monde
du travail

Les acousticiens

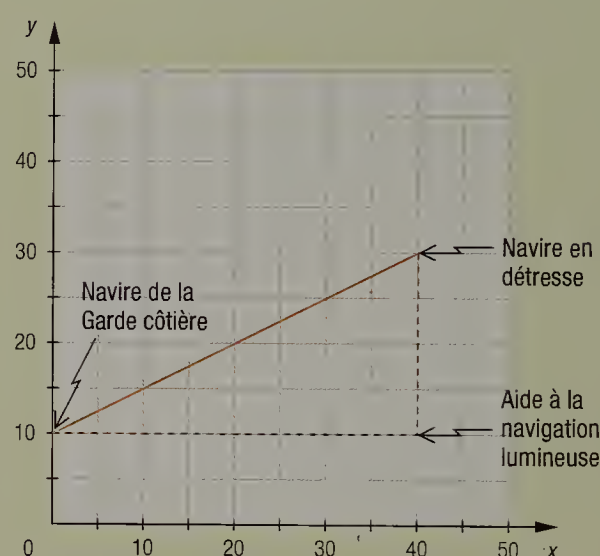
RÉACTIVATION 1 Le sauvetage en mer

La Garde côtière canadienne patrouille le long des côtes du Canada qui s'étendent sur 243 000 km. Les garde-côtes assurent la sécurité du territoire, effectuent l'entretien des aides à la navigation lumineuses et réalisent des opérations de sauvetage en mer. Lors d'un appel d'urgence, ils doivent localiser sur un plan l'emplacement du navire en détresse et déterminer le plus court trajet pour se rendre sur les lieux.

À la suite d'un appel, un navire de la Garde côtière se déplace vers un navire en détresse selon le trajet illustré ci-contre. Les graduations de ce plan sont en kilomètres.

- Quelles sont les coordonnées :
 - du navire de la Garde côtière?
 - du navire en détresse?
 - de l'aide à la navigation lumineuse?
- De quel type est le triangle formé par les deux navires et l'aide à la navigation lumineuse?
- Déterminez la distance :
 - entre le navire de la Garde côtière et l'aide à la navigation lumineuse;
 - entre le navire en détresse et l'aide à la navigation lumineuse;
 - parcourue par le navire de la Garde côtière lors de cet appel de détresse.
- Quelle est la pente de la droite qui correspond à la trajectoire du navire de la Garde côtière?
- Établissez l'équation de la droite qui correspond à la trajectoire du navire de la Garde côtière :
 - sous la forme fonctionnelle;
 - sous la forme générale.

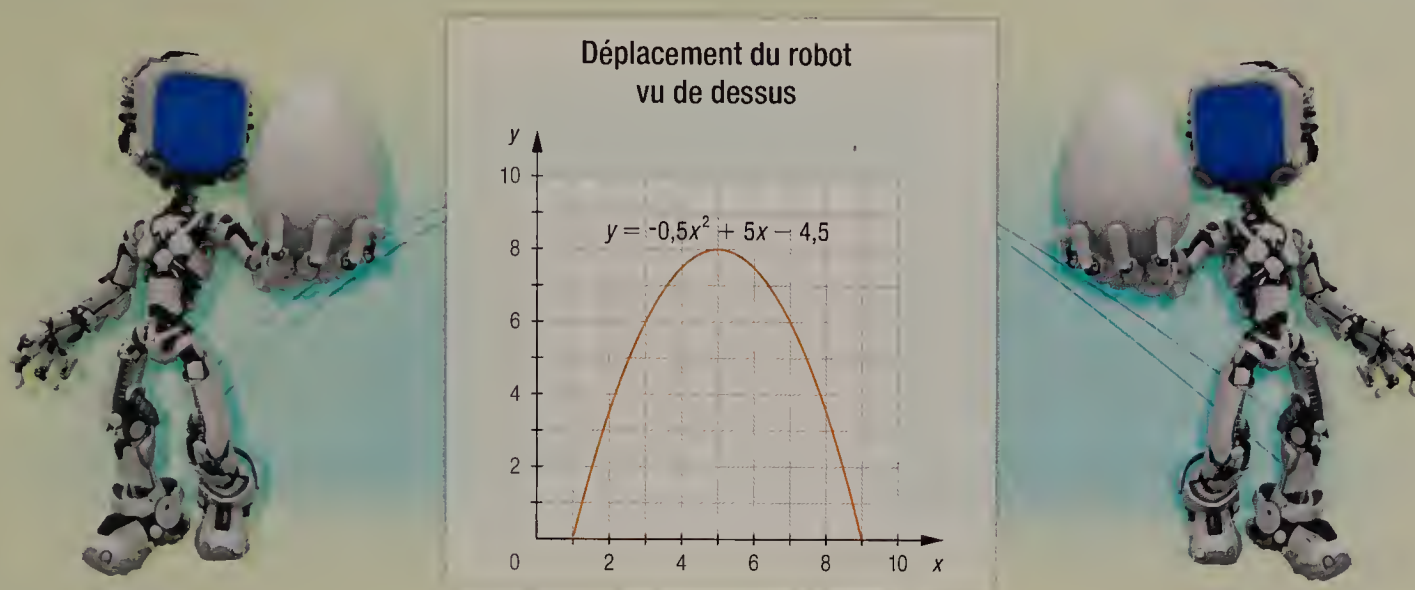
Sauvetage en mer



Cap Percé, navire de recherches et de sauvetage. La Garde côtière canadienne gère et exploite une flotte de 114 bâtiments avec l'aide d'un effectif de près de 2400 marins.

RÉACTIVATION 2 Les concours scientifiques

Qu'il s'agisse de faire avancer un bolide à l'aide d'un élastique ou de parcourir une certaine distance à bord d'une voiture qui fonctionne à l'énergie solaire, l'ingéniosité des inventeurs est mise à l'épreuve lors des concours scientifiques. Dans le cadre d'un de ces concours, les participants doivent inventer une catapulte automatisée qui permet de projeter un œuf sur un robot téléguidé en déplacement. Le déplacement de ce robot est illustré dans le plan cartésien ci-dessous, où les graduations sont en mètres.



Voici les équations des trajectoires, vues de dessus, de l'œuf projeté par la catapulte de trois équipes participantes.

Équipe 1

$$y = 0,5x + 2,5$$

Équipe 2

$$y = 2x$$

Équipe 3

$$y = -0,2x + 10$$

- a. Représentez dans un même plan cartésien le déplacement du robot téléguidé et la trajectoire de l'œuf lancé par chacune des équipes. Que remarquez-vous ?

Le début de la démarche ci-dessous permet de déterminer les coordonnées des points d'impact possibles entre le robot téléguidé et l'œuf projeté par la catapulte de l'équipe 1.

$$\begin{aligned} y &= -0,5x^2 + 5x - 4,5 \\ y &= 0,5x + 2,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & -0,5x^2 + 5x - 4,5 = 0,5x + 2,5 \\ \textcircled{2} \quad & -0,5x^2 + 4,5x - 7 = 0 \end{aligned}$$

- b. Quelle méthode de résolution a-t-on utilisée pour résoudre ce système d'équations ?
- c. 1) Quel type d'équation trouve-t-on à l'étape ② ?
2) Déterminez les valeurs qui satisfont cette équation.
- d. Quelles sont les coordonnées du ou des points d'impact possibles entre le robot téléguidé et l'œuf projeté par la catapulte de l'équipe 1 ?
- e. Déterminez, s'il ou ils existent, le ou les points d'impact possibles entre le robot téléguidé et l'œuf projeté par la catapulte :
- 1) de l'équipe 2;
 - 2) de l'équipe 3.

PENTE D'UN SEGMENT

La pente d'un segment dont les extrémités sont $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ est un nombre qui caractérise son inclinaison. Elle correspond au rapport de l'accroissement des ordonnées à celui des abscisses. On peut calculer la pente du segment reliant ces deux points à l'aide de la formule suivante.

$$\text{Pente de } \overline{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ex.: On détermine la pente du segment AB dont les extrémités sont $A(1, 6)$ et $B(-7, 12)$ en effectuant les calculs suivants.

$$\text{Pente de } \overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{12 - 6}{-7 - 1} = -\frac{3}{4}$$

DISTANCE ENTRE DEUX POINTS

La distance entre un point A et un point B correspond à la longueur du segment reliant ces deux points. Cette longueur s'exprime par un nombre positif.

On peut calculer la distance d entre un point $A(x_1, y_1)$ et un point $B(x_2, y_2)$ à l'aide de la formule suivante.

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ex.: On détermine la distance entre le point $A(3, 4)$ et le point $B(-2, 6)$ en effectuant les calculs suivants.

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{29} \text{ u ou } \approx 5,39 \text{ u}$$

La valeur absolue d'un nombre réel permet de considérer ce nombre sans tenir compte de son signe. On exprime la valeur absolue d'un nombre en le plaçant entre deux traits verticaux. Par exemple, $|3| = 3$ et $|-3| = 3$.

ÉQUATION D'UNE DROITE

Il existe plusieurs façons d'écrire l'équation d'une droite. En voici deux:

Type d'équation	Équation	Lien entre les paramètres	Caractéristique
Fonctionnelle	$y = ax + b$	Pente: a Ordonnée à l'origine: b Abscisse à l'origine: $-\frac{b}{a}$	Peut être utilisée pour décrire toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
Générale	$Ax + By + C = 0$	Pente: $-\frac{A}{B}$ Ordonnée à l'origine: $-\frac{C}{B}$ Abscisse à l'origine: $-\frac{C}{A}$	Peut être utilisée pour décrire toute droite.

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Différentes stratégies permettent de résoudre une équation du second degré à une variable de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où $a \neq 0$.

Factorisation

	Ex.: Résoudre: $x^2 + 4x - 4 = 1$
1. Obtenir une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.	$x^2 + 4x - 4 = 1$ $x^2 + 4x - 5 = 0$
2. Factoriser le polynôme $ax^2 + bx + c$.	$x^2 + 4x - 5 = 0$ $(x - 1)(x + 5) = 0$
3. Appliquer la loi du produit nul, c'est-à-dire: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ si et seulement si $(x - x_1) = 0$ ou $(x - x_2) = 0$.	$(x - 1)(x + 5) = 0$ si et seulement si $(x - 1) = 0$ ou $(x + 5) = 0$.
4. Résoudre les équations obtenues.	$x = 1$ et $x = -5$.

Formule quadratique

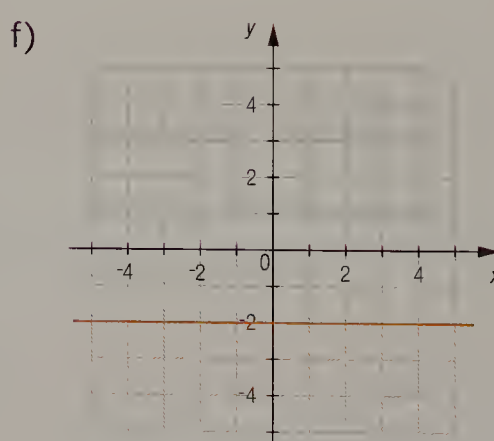
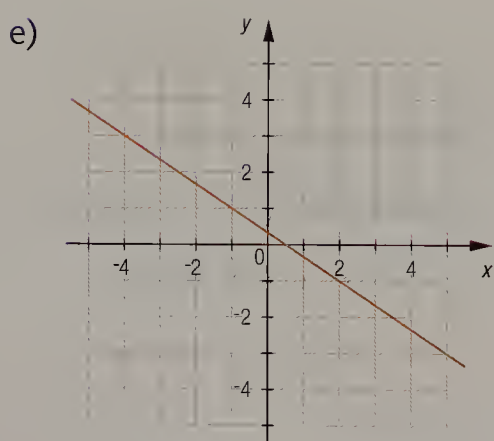
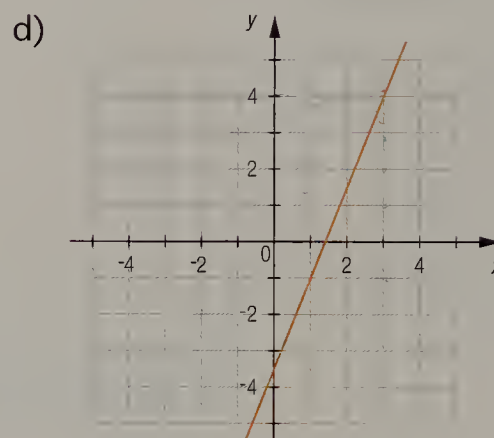
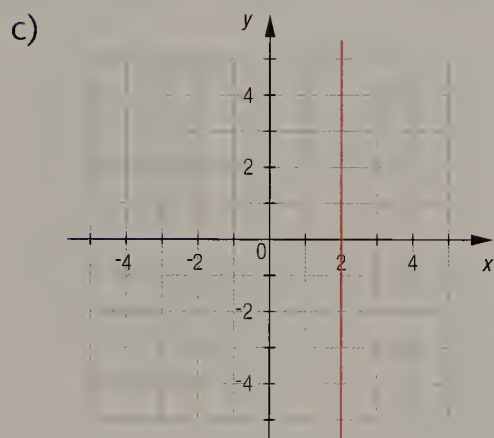
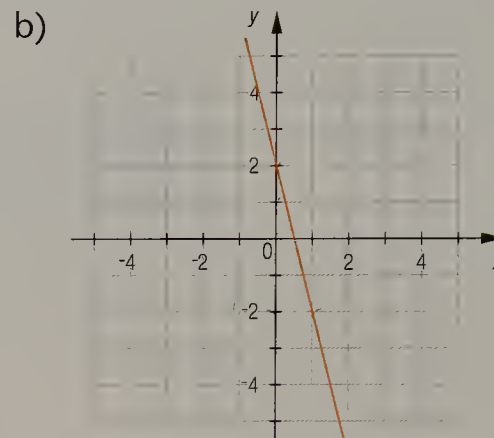
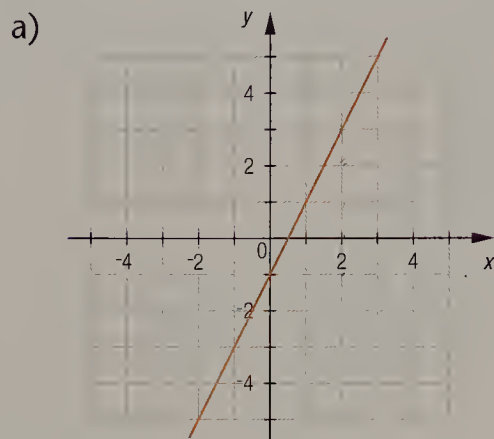
	Ex.: Résoudre: $x^2 - 3x - 8 = 2$
1. Obtenir une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.	$x^2 - 3x - 8 = 2$ $x^2 - 3x - 10 = 0$
2. Trouver les solutions en remplaçant a , b et c par leur valeur respective dans la formule quadratique $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.	Sachant que $a = 1$, $b = -3$ et $c = -10$, on a: $x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times -10}}{2 \times 1}$ $x = \frac{3 \pm 7}{2}$ $x = 5 \text{ et } x = -2.$

SYSTÈME D'ÉQUATIONS À DEUX VARIABLES, L'UNE DU 1^{er} DEGRÉ ET L'AUTRE DU 2^e DEGRÉ

Différentes stratégies permettent de résoudre algébriquement un système d'équations du second degré à deux variables, dont les méthodes de comparaison, de substitution et de réduction.

Ex.:			
1) Résoudre le système $y = 3x^2 - 24x + 44$ $y = 3x - 10$ à l'aide de la méthode de comparaison.		2) Résoudre le système $y^2 - 4x = -4$ $y = x - 4$ à l'aide de la méthode de substitution.	
$3x^2 - 24x + 44 = 3x - 10$ $3x^2 - 27x + 54 = 0$ $x = 3$ et $x = 6$.		$(x - 4)^2 - 4x = -4$ $x^2 - 12x + 20 = 0$ $x = 2$ et $x = 10$.	
$y = 3(3) - 10$ $y = -1$	$y = 3(6) - 10$ $y = 8$	$y = 2 - 4$ $y = -2$	$y = 10 - 4$ $y = 6$
Les solutions sont donc (3, -1) et (6, 8).		Les solutions sont donc (2, -2) et (10, 6).	

1 Déterminez l'équation de chacune des droites suivantes.



2 Résolvez chacune des équations suivantes.

a) $3x^2 - 18x + 8 = 0$

c) $-2x^2 - 6x + 20 = 0$

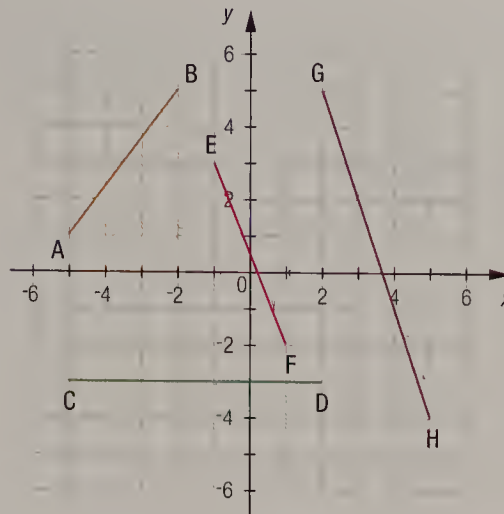
e) $5x - 3 = 4x^2 - x - 12$

b) $-0,5x^2 + 72 = 0$

d) $2x^2 + 20x - 4 = 0$

f) $-10x + 35 = -3x^2 + 20x - 40$

3 Déterminez la longueur de chacun des segments ci-dessous.



4 À l'aide des points dont les coordonnées sont indiquées ci-contre, déterminez :

- a) $m \overline{AB}$ b) $m \overline{BC}$ c) $m \overline{AD}$
 d) $m \overline{AE}$ e) $m \overline{CF}$ f) $m \overline{BF}$

A(4, 1)	B(0, -2)
C(-10, -2)	D(-8, -4)
E(-9, 4)	F(-6, 0)

5 Complétez le tableau suivant.

Équation de la droite	Pente	Abscisse à l'origine	Ordonnée à l'origine
$y = -25x - 75$			
	3		-8
$y = 12$			
		80	60
$x = -5$			
		Aucune	-2
		-2	Aucune

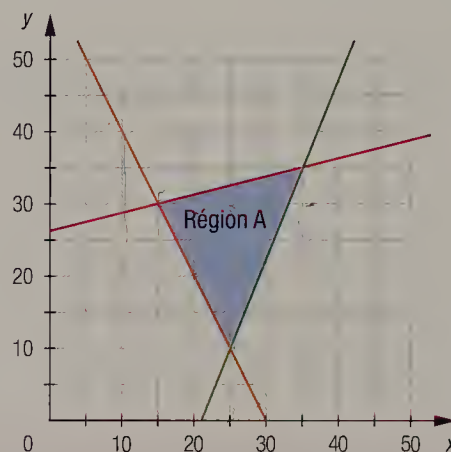
6 Déterminez le nombre de solutions de chacun des systèmes d'équations ci-dessous.

- a) $y = -10x^2 - 40x - 10$
 $y = -20$ b) $y = -16x^2 + 12$
 $y = -52$
 c) $y = 2x^2 - 10x + 2$
 $y = 4x - 12$ d) $y = 2x^2 + 20x - 4$
 $-12x + 5y - 48 = 0$
 e) $y = 3x^2 - 12x + 24$
 $-9x + y = -18$ f) $y = -2x^2 + 5x - 12,5$
 $y = -5x + 5$
 g) $y = -0,75x^2 - 0,5x - 1,25$
 $4x + 1 = 0$ h) $y = -x^2 + 7x - 36$
 $y = -5x + 18$
 i) $y = x^2 - 4x - 96$
 $y = -100$ j) $y = 5x^2 - 38x + 60$
 $y = 2x - 20$

7 Établissez l'équation de la droite :

- a) dont la pente est 5 et l'ordonnée à l'origine est 2;
- b) dont la pente est -4 et qui passe par le point P(6, -12);
- c) dont la pente est $\frac{2}{3}$ et qui passe par le point S(-9, -11);
- d) qui passe par les points A(3, 6) et B(-3, -6);
- e) dont l'abscisse à l'origine est 8 et l'ordonnée à l'origine est 10;
- f) dont la pente est $\frac{5}{4}$ et l'abscisse à l'origine est $\frac{18}{5}$.

8 Établissez l'équation de chacune des droites qui délimitent la région A.



9 Résolvez chacun des systèmes d'équations suivants.

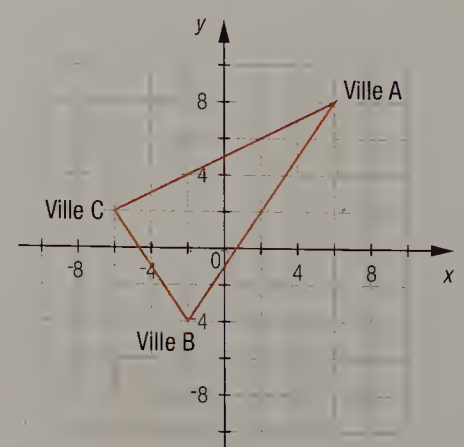
- | | | |
|---|---|---|
| a) $y = x^2 - 5x + 1$
$y = 2x - 6$ | b) $y = 2x^2 + 8x + 2$
$y = -4$ | c) $y = -3x^2 - 2x - 5$
$x = -1$ |
| d) $y = 4x^2 - 10x + 25$
$y = 10x - 10$ | e) $y = -x^2 + 4x - 8$
$0 = -3x - y + 6$ | f) $y = 0,25x^2 + 2,5x - 0,5$
$-3x + 10y = 12$ |
| g) $y = -0,16x^2 + 0,64x + 15,36$
$y = 16$ | h) $y = 4x^2 - 3$
$y = 13$ | i) $y = -2x^2 + 14x - 72$
$-36 = -10x - y$ |

10 Les coordonnées du point A sont (3, 5). Déterminez les coordonnées d'un point situé à une distance de 15 unités du point A si la pente du segment qui relie ces deux points est $\frac{3}{4}$.

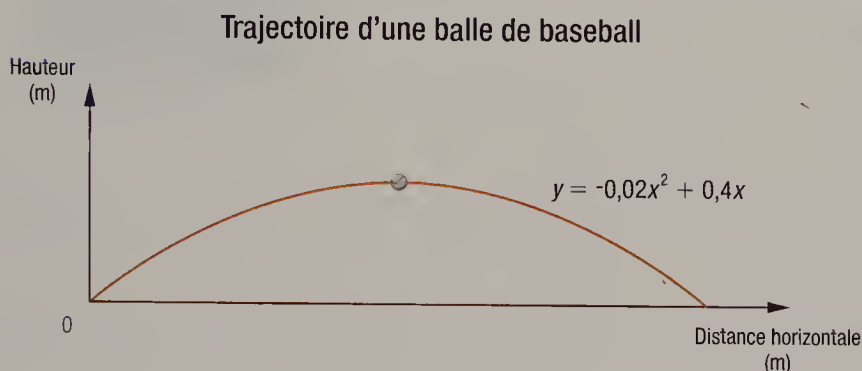
11 Dans le plan cartésien ci-contre, on a représenté les routes qui relient les villes A, B et C. Les graduations sont en kilomètres. Déterminez la longueur de la route qui sépare :

- a) les villes A et B;
- b) les villes A et C;
- c) les villes B et C.

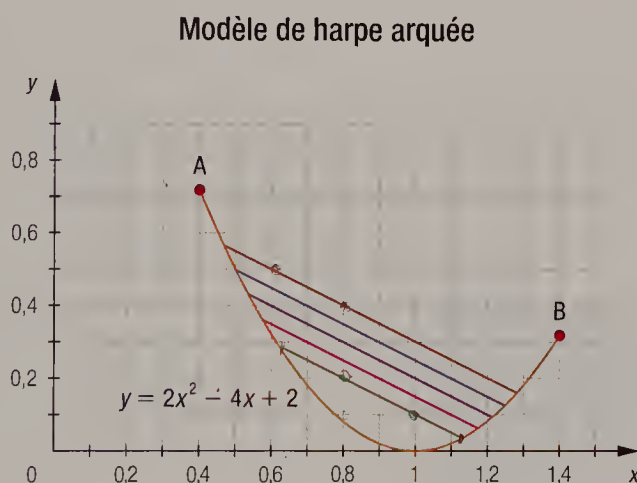
Routes reliant les villes A, B et C



- 12** Un appareil, situé à l'origine du plan cartésien ci-dessous, lance une balle de baseball vers un frappeur selon la trajectoire illustrée. Lorsqu'elle retombe, le frappeur frappe la balle quand elle se trouve à 75 cm au-dessus du sol. Déterminez la distance horizontale parcourue par la balle entre le moment où elle est lancée et le moment où elle est frappée.

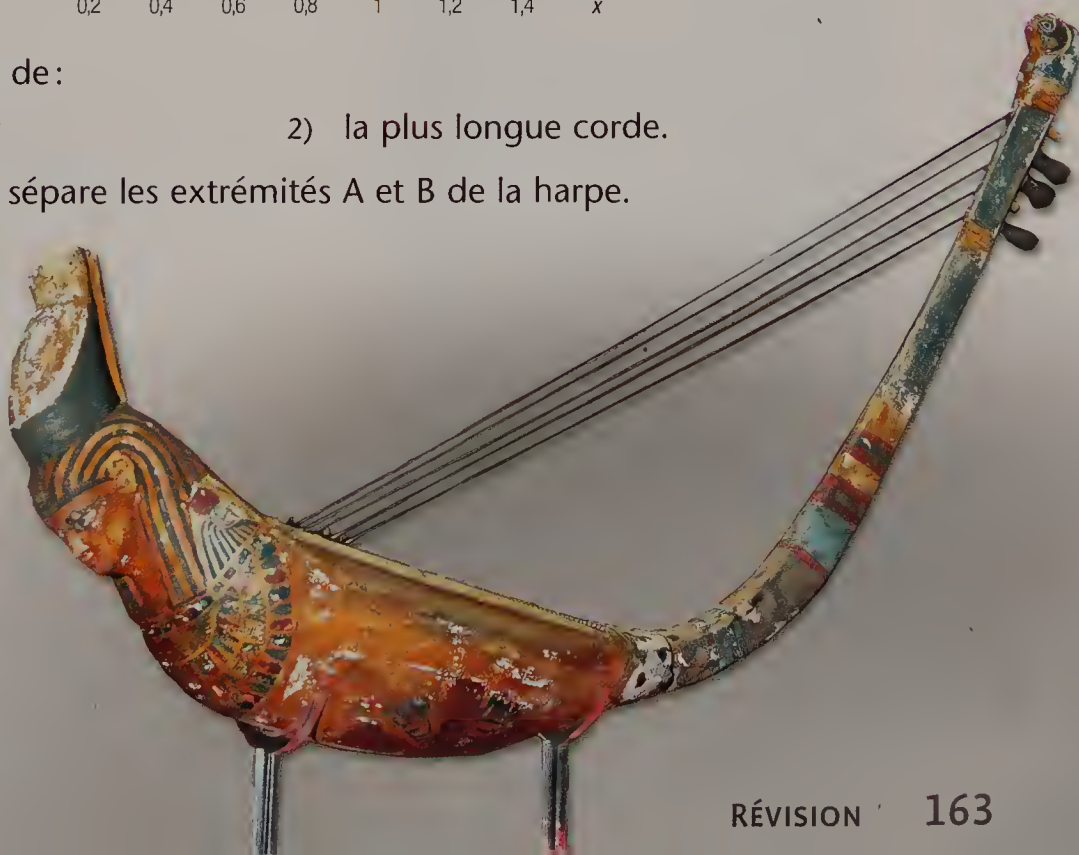


- 13 HARPE ARQUÉE** La harpe arquée est un instrument de musique à cordes pincées que les Égyptiens utilisaient il y a plus de 4000 ans. Elle est formée de plusieurs cordes attachées à un support parabolique. On a représenté dans le plan cartésien ci-dessous un modèle de harpe arquée. Les graduations sont en mètres.



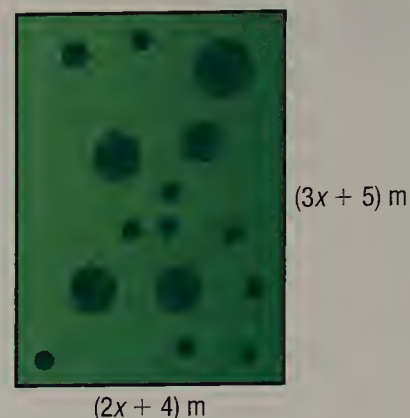
- a) Déterminez la longueur de :
- 1) la plus petite corde;
 - 2) la plus longue corde.
- b) Calculez la distance qui sépare les extrémités A et B de la harpe.

Harpe arquée datant du xv^e s. av. J.-C. retrouvée à Thèbes, en Égypte. La harpe arquée est la forme la plus ancienne de harpe. Le musicien ou la musicienne en jouait à genoux en pinçant les cordes avec les doigts des deux mains.



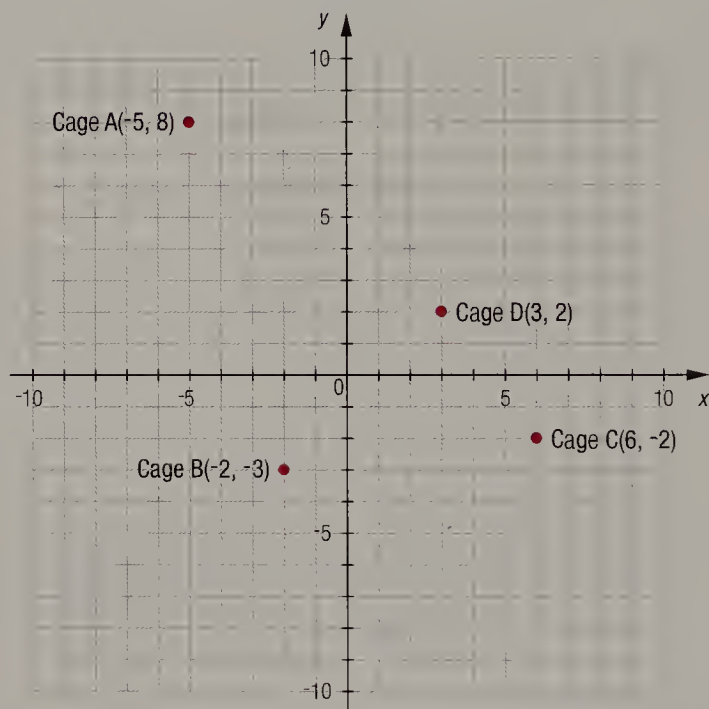
14 On a illustré ci-contre un terrain rectangulaire.

- a) Déterminez une expression algébrique qui correspond :
- 1) au périmètre du terrain ;
 - 2) à l'aire du terrain.
- b) Déterminez les dimensions de ce terrain si :
- 1) son périmètre est de 48 m ;
 - 2) son aire est de 315 m².



15 Lors d'une étude sur une population de homards, on a déposé quatre cages au fond de l'océan. On a indiqué la position de chacune des cages dans le plan cartésien ci-dessous où les graduations sont en kilomètres. Pour faciliter leurs déplacements au moment de récupérer les cages, les chercheurs utilisent la pente du segment qui relie deux cages consécutives et la distance qui les sépare. Les chercheurs récupèrent, dans l'ordre, la cage A, la cage B, la cage C et, finalement, la cage D.

Positions des cages à homards



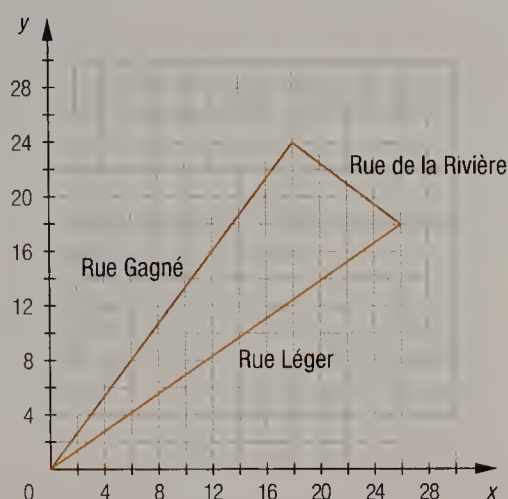
- a) Donnez les indications qui aideront les chercheurs à se déplacer d'une cage à une autre.
- b) Ces indications sont-elles suffisantes pour se déplacer d'une cage à une autre? Expliquez votre réponse.

Les biologistes recueillent des données sur les caractéristiques physiques des homards telles que la longueur du céphalothorax, la position de la pince broyeuse, la présence d'œufs sous les femelles et leur stade d'évolution et l'état de la carapace. Ces données permettent de connaître l'état de santé général de la population de homards et d'évaluer les stocks exploitables.



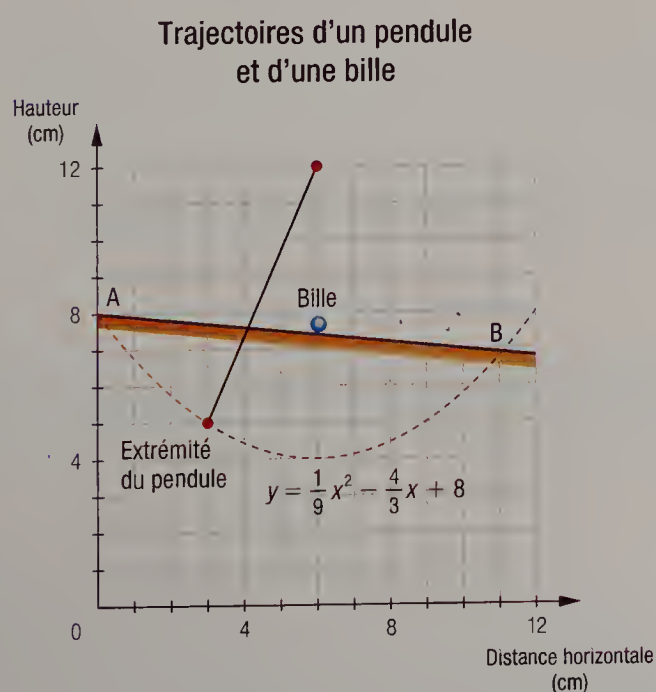
- 16** On a représenté dans le plan cartésien ci-dessous le trajet parcouru par une personne à la course à pied. Les graduations sont en hectomètres.

Trajet effectué lors d'une course à pied

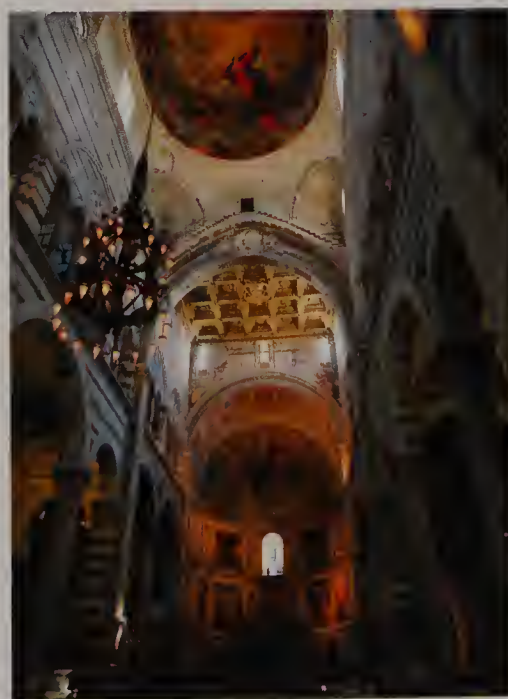


- a) Calculez la pente du segment qui correspond à :
- 1) la rue Gagné;
 - 2) la rue de la Rivière.
- b) Que peut-on dire de la position de la rue Gagné et de la rue de la Rivière l'une par rapport à l'autre ?

- 17** Pour tester la conformité d'un pendule, on laisse descendre une bille sur une rampe inclinée en même temps que le pendule effectue son mouvement. La trajectoire de la bille et celle de l'extrémité du pendule sont représentées dans le plan cartésien ci-dessous. Au départ, la bille et l'extrémité du pendule se situent au point A. Un pendule est conforme si la bille et l'extrémité du pendule arrivent en même temps au point B.



Déterminez la vitesse de la bille si l'extrémité d'un pendule conforme prend 2 s à atteindre le point B.



C'est en observant les oscillations d'une lampe suspendue à une voûte de la cathédrale de Pise que Galilée a l'idée de mesurer le temps à l'aide d'un pendule simple. Il observe que même si l'amplitude des oscillations diminue, la durée de chaque mouvement d'aller-retour reste la même.

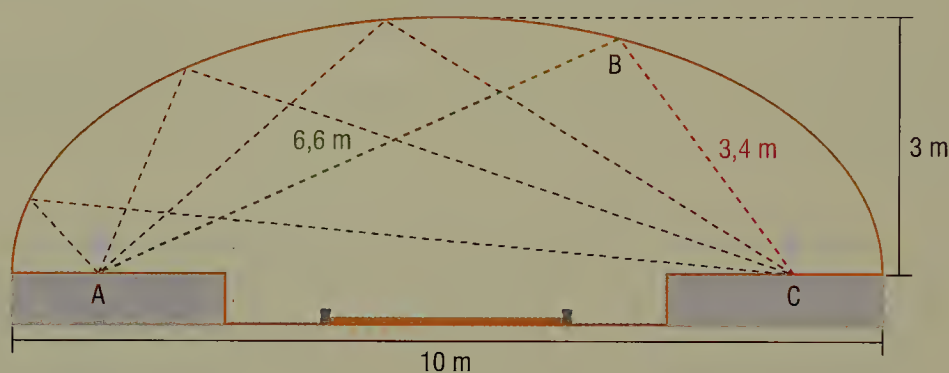
Cette section est en lien
avec la SAÉ 11.

PROBLÈME La station Solferino

L'architecture de la station Solferino du métro de Paris est particulière. L'installation de carreaux de céramique sur les parois de la station permet à une personne située sur un quai de communiquer sans difficulté avec une autre personne qui se trouve en face d'elle sur l'autre quai.

Voici une coupe transversale d'une station de métro semblable à la station Solferino qui montre différentes façons dont le son est transmis entre les personnes A et C.

Coupe transversale d'une station de métro



Afin que ce phénomène se produise, l'ensemble des conditions ci-dessous est nécessaire.

- La distance parcourue par le son entre les personnes A et C est constante.
- La position de chacune des personnes A et C est fixe.
- Les personnes A et C sont situées à la même distance de l'axe de symétrie de la coupe transversale de la station.



Quelle est la distance entre les personnes A et C ?

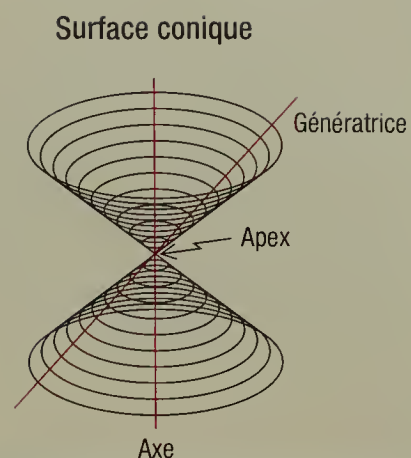
Près de 4 000 000 de personnes utilisent quotidiennement le métro de Paris afin de se déplacer entre les 300 stations qui le composent. Ci-contre, une vue intérieure de la station Solferino.



ACTIVITÉ 1 Les sections coniques

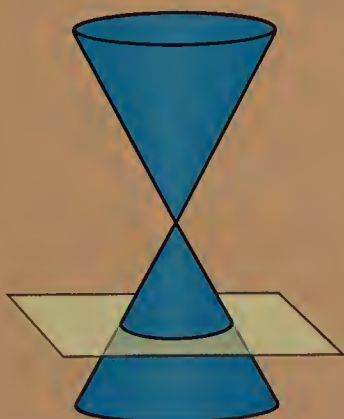
Apollonius de Perga, né en Turquie, est reconnu pour ses travaux portant sur les sections coniques. Il a montré qu'une surface conique est engendrée par une droite, appelée génératrice, qui se déplace de façon circulaire autour d'un axe en passant par un point fixe, appelé l'apex.

Dans ses travaux, il a observé qu'une conique est définie par l'intersection d'un plan et d'une surface conique. Selon l'inclinaison du plan, il est possible de générer différentes coniques comme le montrent les situations suivantes.



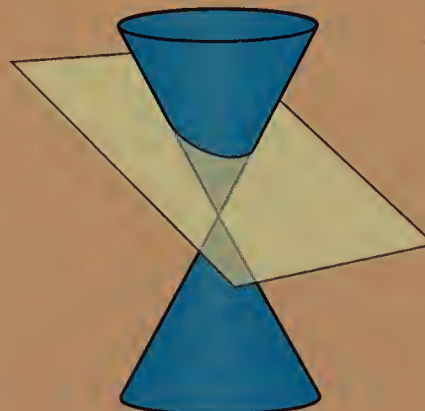
Situation ①

Le plan ne passe pas par l'apex et est parallèle aux bases de la surface conique.



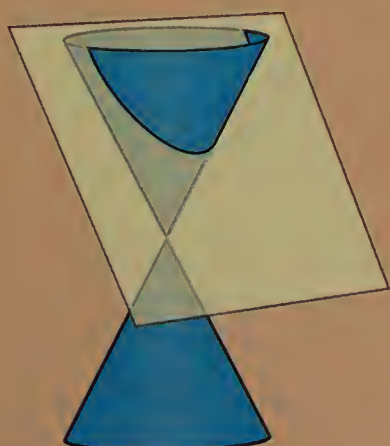
Situation ②

Le plan ne passe pas par l'apex et n'est pas parallèle aux bases de la surface conique.



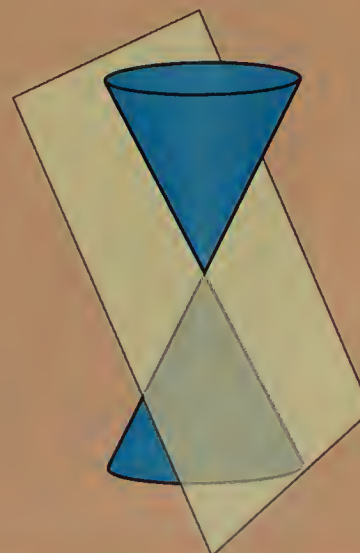
Situation ③

Le plan ne passe pas par l'apex et est sécant à l'un des deux cônes.



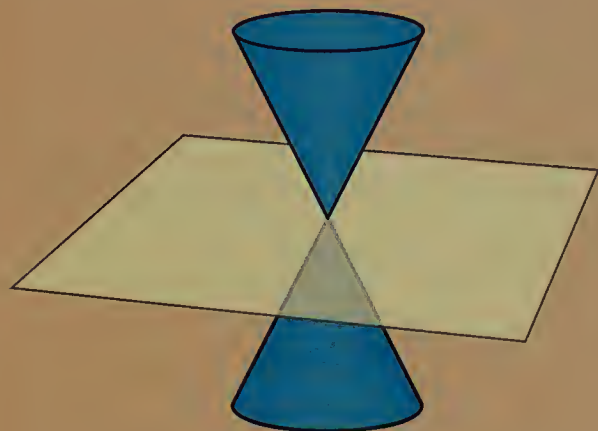
Situation ④

Le plan passe par l'apex et est parallèle à une génératrice.



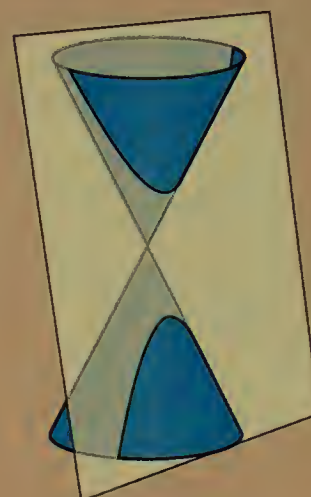
Situation ⑤

Le plan passe par l'apex et est parallèle aux bases de la surface conique.



Situation ⑥

Le plan ne passe pas par l'apex et est sécant aux deux cônes.



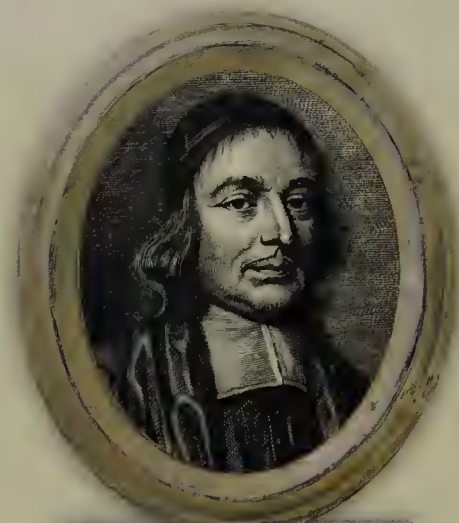
- a. Pour chacune des six situations précédentes, représentez la conique définie par l'intersection du plan et de la surface conique.
- b. À quoi correspond la conique définie à :
 - 1) la situation ④ ? 2) la situation ⑤ ?
- c. Que pouvez-vous dire en comparant :
 - 1) la conique définie à la situation ② à celle définie à la situation ③ ?
 - 2) la conique définie à la situation ③ à celle définie à la situation ⑥ ?



Ce serait à la suggestion d'Archimède qu'Apollonius de Perga (v. 262 av. J.-C.-v. 190 av. J.-C.) a introduit les termes *ellipse* et *hyperbole*, empruntés aux pythagoriciens, pour désigner ces courbes. Les nombreuses découvertes en mathématiques qu'a faites Apollonius de Perga lui ont valu d'être appelé le « grand géomètre » par ses contemporains.

ACTIVITÉ 2 Une représentation cartésienne

John Wallis est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de son époque. Ses travaux sur la géométrie l'amènent à écrire, en 1655, le traité *Tractatus de sectionibus conicis* dans lequel il définit certaines courbes particulières à l'aide d'équations du second degré.



John Wallis (1616-1703) était également prêtre, philosophe et médecin. En plus de ses nombreuses publications en mathématiques, John Wallis a publié le premier ouvrage de phonétique anglaise. Il est considéré comme un précurseur dans le domaine de l'orthophonie et de la rééducation des sourds-muets.

- a. Voici les coordonnées de quelques points qui appartiennent à une courbe.

A(-50, 0)

B(-14, 48)

C(0, 50)

D(30, 40)

E(50, 0)

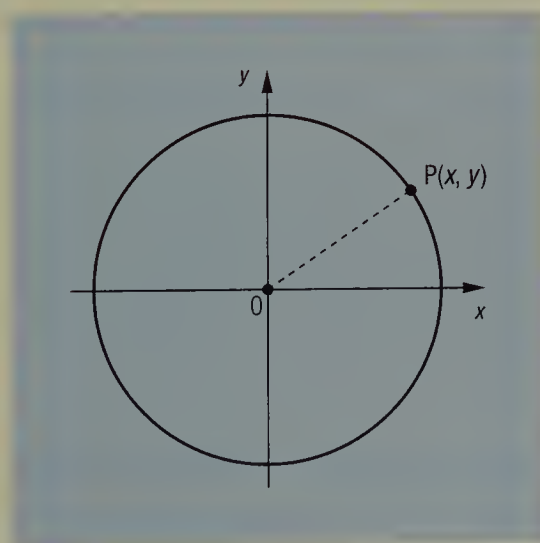
F(48, -14)

G(0, -50)

H(-40, -30)

- 1) Déterminez la distance qui sépare chacun de ces points de l'origine du plan cartésien.
- 2) Que remarquez-vous?
- 3) À quelle courbe peut-on associer l'ensemble de ces points?

On a représenté ci-dessous un cercle de centre O ainsi qu'un point P situé sur ce cercle.



- b. D'après l'illustration, à quoi correspond le segment OP?
- c. 1) Écrivez l'expression qui correspond à $d(O, P)$.
2) Montrez que l'équation du cercle est $x^2 + y^2 = r^2$, où r est le rayon du cercle.
- d. Établissez l'équation de la courbe dont les points sont donnés en a.

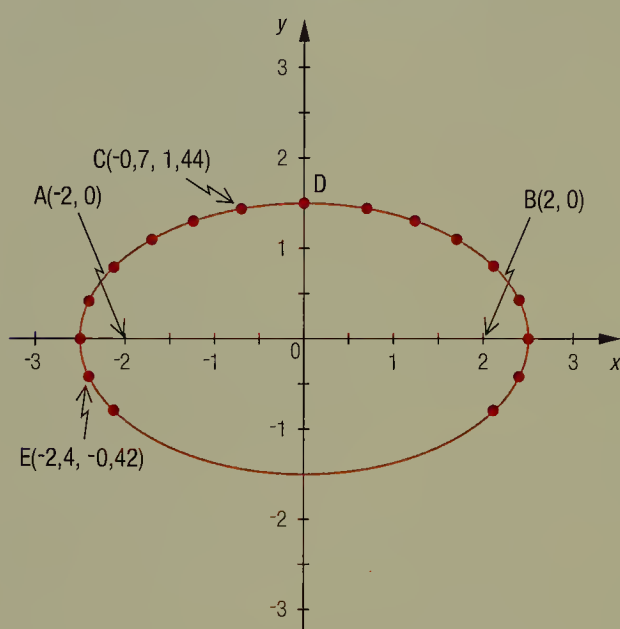


ACTIVITÉ 3 Le cadran solaire analemmatique

Un cadran solaire analemmatique est fabriqué sur le sol à partir de pierres et de dalles de ciment. Pour lire l'heure, une personne doit se tenir debout sur une dalle de ciment au centre du cadran solaire près d'une ligne qui correspond à la date du jour. L'ombre projetée de la personne pointe alors l'heure du jour.

On a représenté ce type de cadran, vu de dessus, dans un plan cartésien où les graduations sont en mètres.

Cadran solaire analemmatique



Le Sidewalk Sundial du Centre des sciences Flandrau de l'Université de l'Arizona, à Tucson, en Arizona, est un cadran solaire analemmatique. La date du jour se trouve sur la ligne au centre du cadran qui a la forme d'un analemme, une courbe en forme de huit qui indique la déclinaison du Soleil au long d'une année.

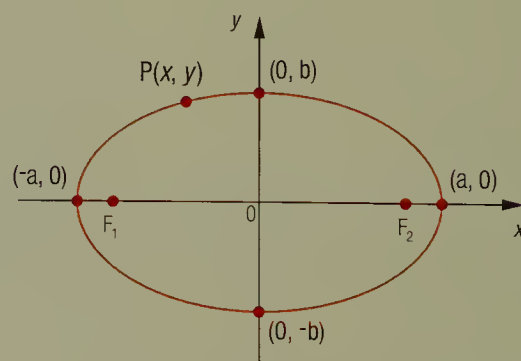
a. Calculez :

- 1) $d(A, C) + d(C, B)$ 2) $d(A, D) + d(D, B)$ 3) $d(A, E) + d(E, B)$

b. Quelle conjecture pouvez-vous émettre quant à la somme des distances entre un point du pourtour du cadran et les points A et B ?

Dans le plan cartésien ci-contre, on a représenté une ellipse centrée à l'origine et dont la distance entre les deux sommets situés sur l'axe des abscisses est de $2a$. On sait que peu importe l'emplacement du point P sur la courbe :

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a, \text{ où } F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont les foyers de l'ellipse.}$$

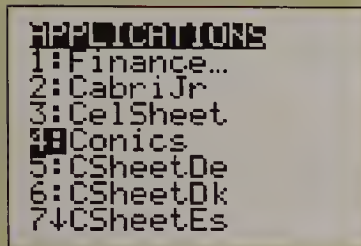


À partir de cette relation, il est possible de montrer que l'équation de cette ellipse est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

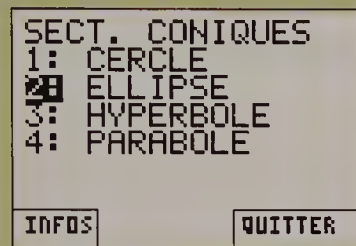
- c.** 1) Établissez l'équation du pourtour du cadran solaire analemmatique.
2) Montrez que les points C, D et E vérifient cette équation.

Une calculatrice graphique permet d'afficher des coniques. Voici une exploration qui permet d'observer les effets de certains paramètres dans la représentation graphique d'une ellipse.

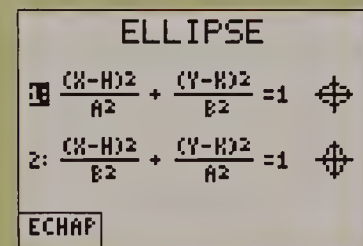
Écran 1



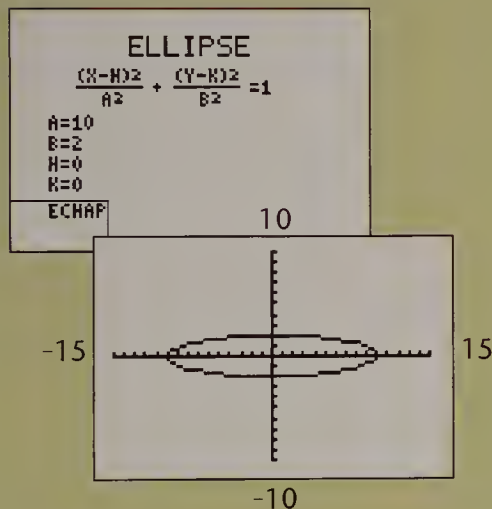
Écran 2



Écran 3



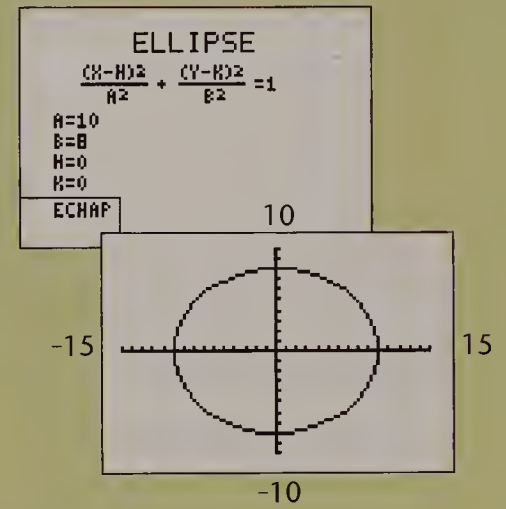
Écrans 4 et 5



Écrans 6 et 7



Écrans 8 et 9



- Déterminez les coordonnées des sommets de l'ellipse à :
 - l'écran 5;
 - l'écran 7;
 - l'écran 9.
- Calculez l'écart entre les paramètres A et B à :
 - l'écran 4;
 - l'écran 6;
 - l'écran 8.
- En comparant les réponses obtenues en b avec la forme des ellipses des écrans 5, 7 et 9, quelle conjecture pouvez-vous émettre?
- D'après les écrans 4 à 9, à quoi correspondent les valeurs 2A et 2B dans la représentation graphique d'une ellipse?
- À l'aide d'une calculatrice graphique, affichez l'ellipse dont l'équation est :

$$1) \frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{169} = 1 \quad 2) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{144} = 1 \quad 3) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$$

CONIQUE

Une conique est une courbe définie par l'intersection d'un plan et d'une surface conique.

CERCLE

Un cercle est une courbe dont tous les points sont situés à égale distance d'un même point appelé centre. L'équation d'un cercle centré à l'origine s'écrit sous la forme $x^2 + y^2 = r^2$, où r est le rayon du cercle.

Ex. :

Équation	Table de valeurs	Représentation graphique																		
$x^2 + y^2 = 4^2$	<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>4</td><td>0</td></tr><tr><td>3,2</td><td>2,4</td></tr><tr><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>-3,2</td><td>2,4</td></tr><tr><td>-4</td><td>0</td></tr><tr><td>-3,2</td><td>-2,4</td></tr><tr><td>0</td><td>-4</td></tr><tr><td>3,2</td><td>-2,4</td></tr></table>	x	y	4	0	3,2	2,4	0	4	-3,2	2,4	-4	0	-3,2	-2,4	0	-4	3,2	-2,4	Le graphique montre un cercle tracé sur un repère cartésien. L'axe des x et des y sont gradués de -4 à 4. Le cercle est centré à l'origine (0,0), ce qui est noté 'Centre' avec une flèche. Un rayon est représenté par une ligne pointillée rouge allant de l'origine à la point (4,0), noté 'Rayon' avec une flèche. Le cercle passe par les points (4,0), (0,4), (-4,0) et (0,-4).
x	y																			
4	0																			
3,2	2,4																			
0	4																			
-3,2	2,4																			
-4	0																			
-3,2	-2,4																			
0	-4																			
3,2	-2,4																			

RECHERCHE DE L'ÉQUATION D'UN CERCLE

Il est possible de déterminer l'équation d'un cercle, qui s'écrit $x^2 + y^2 = r^2$, de la façon suivante.

1. Trouver les coordonnées d'un point du cercle.	Ex. : La courbe passe par le point $(-3, 4)$.
2. Substituer les coordonnées du point à x et à y dans l'équation $x^2 + y^2 = r^2$.	$(-3)^2 + 4^2 = r^2$
3. Résoudre l'équation formée afin de déterminer le rayon du cercle.	$9 + 16 = r^2$ $r^2 = 25$ $r = \pm 5$ On déduit que le rayon est 5.
4. Écrire l'équation du cercle.	$x^2 + y^2 = 25$

ELLIPSE

Une ellipse est une courbe où la somme des distances entre tout point de la courbe et deux points fixes, appelés foyers, est constante. Dans la représentation graphique d'une ellipse dont l'équation s'écrit sous la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

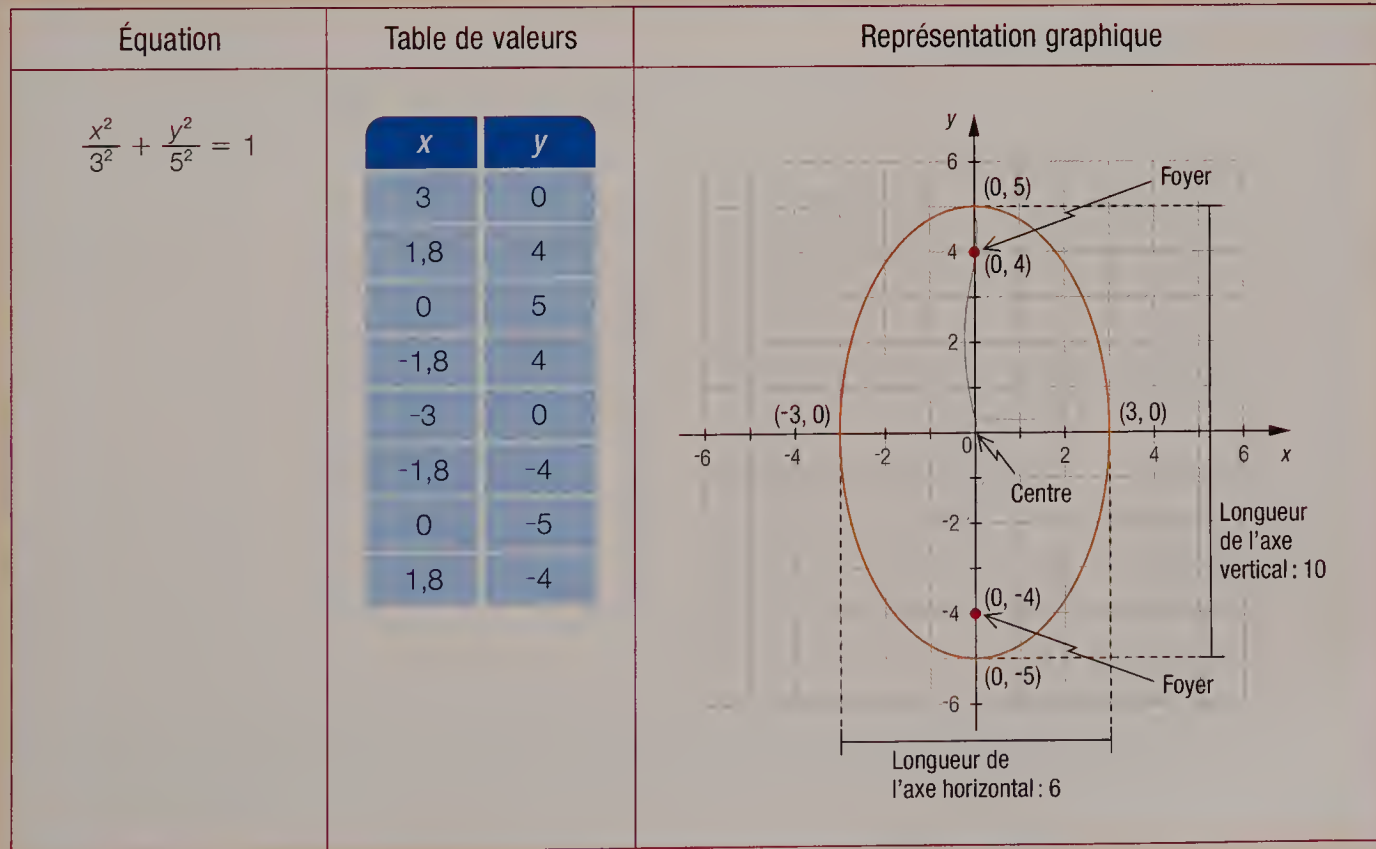
- les coordonnées du centre sont (0, 0);
- la longueur de l'axe horizontal correspond à $2|a|$;
- la longueur de l'axe vertical correspond à $2|b|$;
- les foyers sont situés sur le plus grand des deux axes;
- la relation entre la valeur du paramètre a , celle du paramètre b et la distance c , qui sépare le centre de l'ellipse de chacun des deux foyers, est donnée par :

$$a^2 = b^2 + c^2, \text{ si } a > b$$

$$b^2 = a^2 + c^2, \text{ si } a < b$$

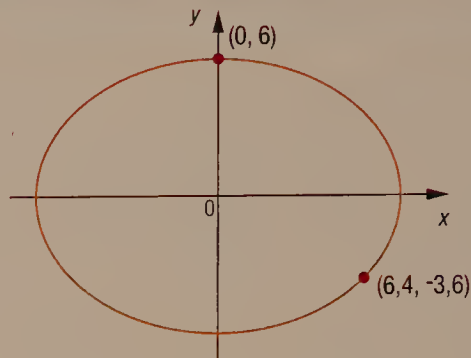
- les coordonnées des sommets sont $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ et $(0, -b)$.

Ex. :

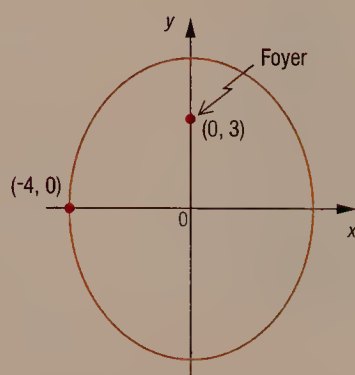


RECHERCHE DE L'ÉQUATION D'UNE ELLIPSE

Il est possible de déterminer l'équation d'une ellipse, qui s'écrit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, de la façon suivante.

1. Déduire certains renseignements concernant les paramètres a et b.	Ex. :  Puisque les coordonnées de l'un des sommets et d'un point de la courbe sont respectivement (0, 6) et (6, 4), on peut déduire que b = 6 et on a : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{6,4^2}{a^2} + \frac{(-3,6)^2}{36} = 1$ $\frac{6,4^2}{a^2} = \frac{16}{25}$ $a^2 = 64$
2. Écrire l'équation de l'ellipse.	$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$

Ex. : On veut déterminer l'équation de l'ellipse ci-dessous.



Puisque les coordonnées de l'un des sommets et de l'un des foyers sont respectivement (-4, 0) et (0, 3), on peut déduire que a = 4 et que c = 3, et on a :

$$b^2 = a^2 - c^2$$

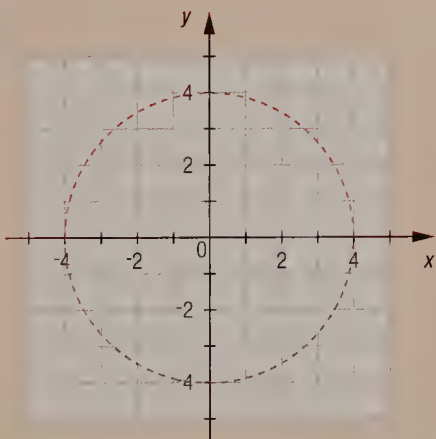
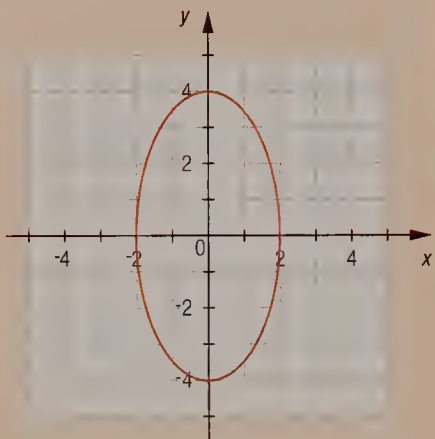
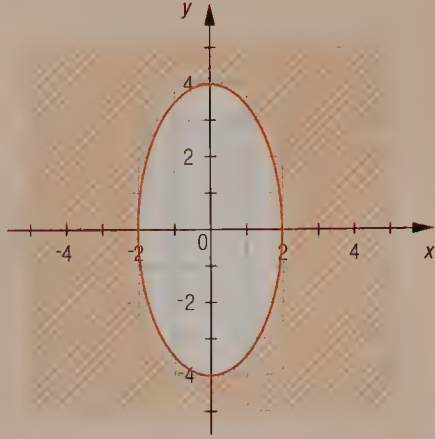
$$b^2 = (-4)^2 - 3^2$$

$$b^2 = 7$$

L'équation de l'ellipse est $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

RÉGION INTÉRIEURE OU EXTÉRIEURE À UN CERCLE OU À UNE ELLIPSE

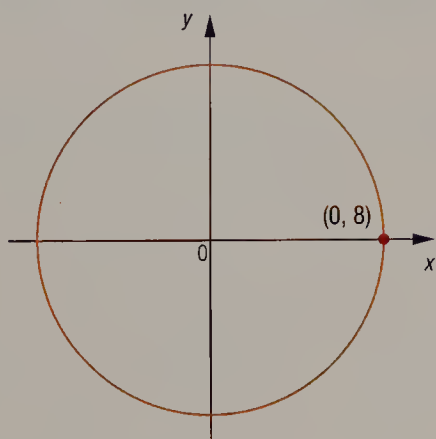
Pour représenter graphiquement la région intérieure ou extérieure à un cercle ou à une ellipse, on peut procéder de la façon suivante.

	Ex. : 1) On désire représenter graphiquement la région qui correspond à l'inéquation $x^2 + y^2 - 16 < 0$.	2) On désire représenter graphiquement la région qui correspond à l'inéquation $20x^2 + 5y^2 \geq 80$.
1. Écrire l'inéquation dans laquelle l'un des membres est $x^2 + y^2$ pour un cercle ou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ pour une ellipse.	$x^2 + y^2 - 16 < 0$ $x^2 + y^2 < 16$	$20x^2 + 5y^2 \geq 80$ $\frac{20x^2}{80} + \frac{5y^2}{80} \geq \frac{80}{80}$ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \geq 1$
2. Tracer la courbe frontière d'équation $x^2 + y^2 = r^2$ ou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en un trait plein ou en pointillé selon que l'équation fait partie ou non de l'inéquation.	 L'équation de la courbe frontière est $x^2 + y^2 = 16$.	 L'équation de la courbe frontière est $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.
3. Colorier ou hachurer la région intérieure de la courbe si le symbole est $<$ ou $\leq$ et la région extérieure de la courbe si le symbole est $>$ ou $\geq$.		

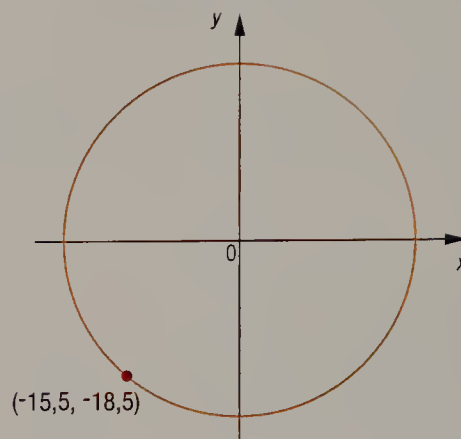
1

Établissez l'équation de chacun des cercles illustrés ci-dessous.

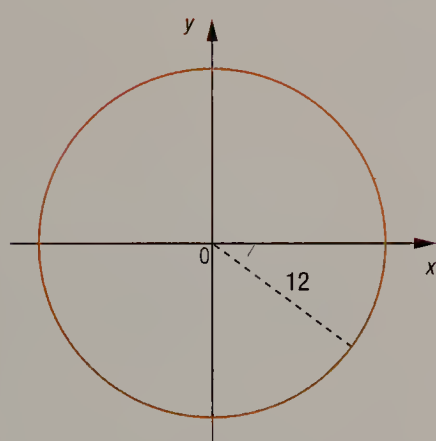
a)



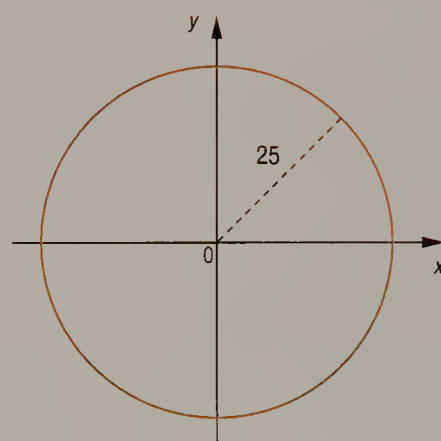
b)



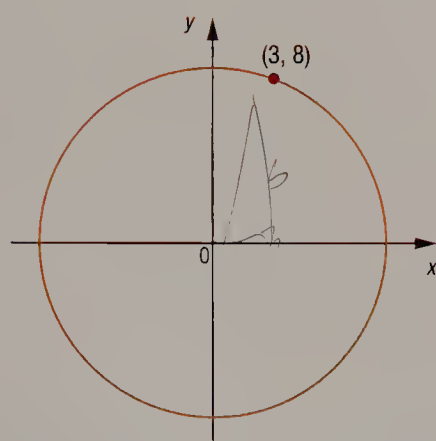
c)



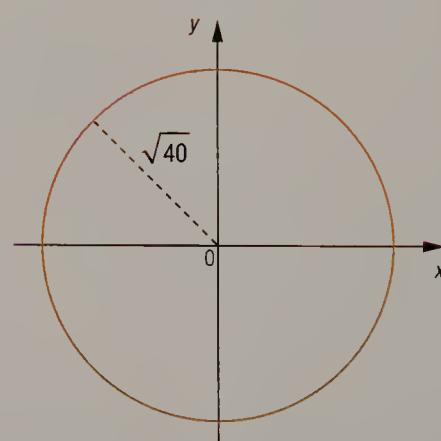
d)



e)



f)



2

Dans chaque cas, déterminez le rayon du cercle.

a) $x^2 + y^2 = 49$

b) $x^2 + y^2 = 225$

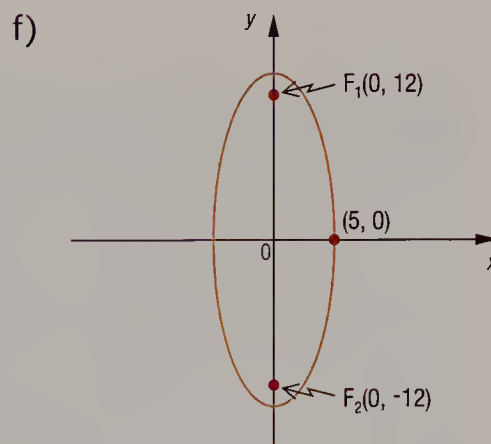
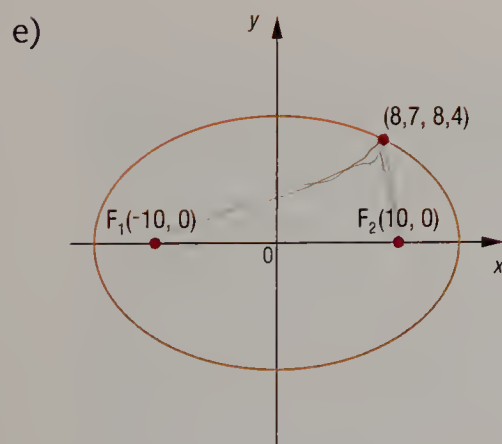
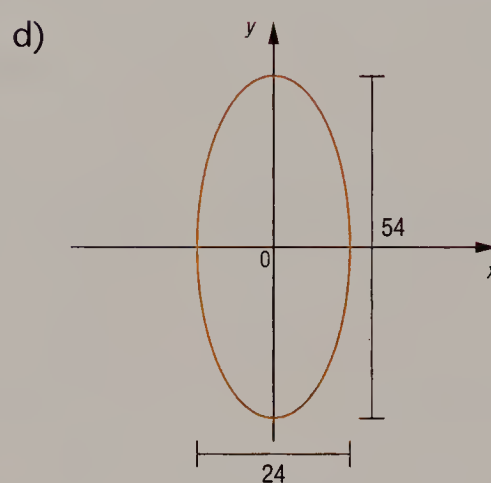
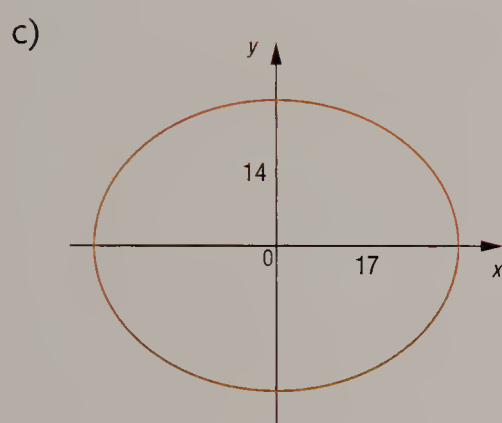
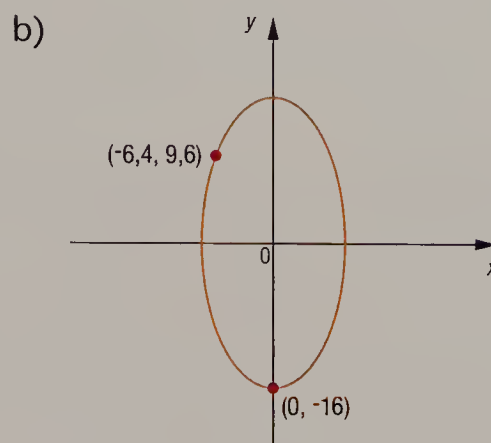
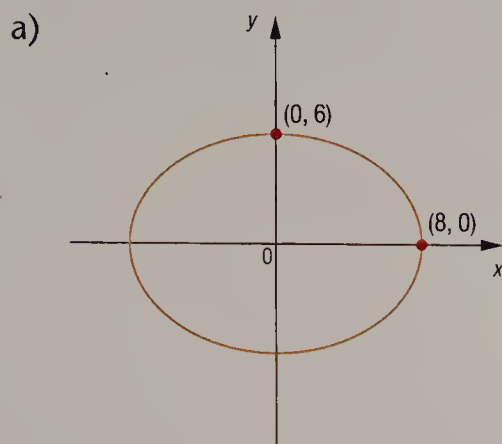
c) $x^2 + y^2 = 30,25$

d) $x^2 + y^2 = 196$

e) $x^2 + y^2 = 28,09$

f) $x^2 + y^2 = 5$

3 Établissez l'équation de chacune des ellipses illustrées ci-dessous, dont les foyers correspondent aux points F_1 et F_2 .



4 Dans chaque cas, déterminez les coordonnées:

- 1) des sommets de l'ellipse; 2) des foyers de l'ellipse.

a) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$

b) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$

c) $\frac{x^2}{72,25} + \frac{y^2}{56,25} = 1$

d) $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{841} = 1$

e) $\frac{x^2}{900} + \frac{y^2}{324} = 1$

f) $\frac{x^2}{156,25} + \frac{y^2}{12,25} = 1$

5

Établissez l'équation du cercle centré à l'origine du plan cartésien :

- a) passant par le point (0, -4); b) passant par le point (12, 20);
 c) dont le rayon est de 13 unités; d) dont le diamètre est de 20 unités.

6

Établissez l'équation de l'ellipse centrée à l'origine du plan cartésien :

- a) passant par les points (0, -5) et (4, 0);
 b) passant par les points (6,5, 0) et (0, -9,5);
 c) passant par le point (0, 8) et dont les coordonnées d'un foyer sont (15, 0);
 d) dont le plus grand axe, horizontal, mesure 40 unités et le plus petit axe, vertical, mesure 30 unités;
 e) passant par le point (-84, -87) et dont les coordonnées d'un foyer sont (0, -100).

7

Représentez graphiquement la région associée à chaque inéquation.

- a) $x^2 + y^2 \geq 225$ b) $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{36} < 1$ c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \geq 1$
 d) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{36} > 1$ e) $x^2 + y^2 < 400$ f) $\frac{x^2}{42,25} + \frac{y^2}{110,25} \leq 1$

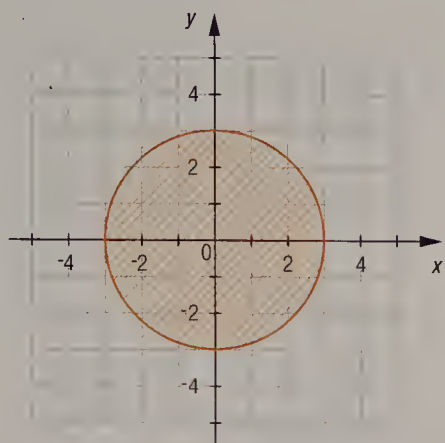
8

Complétez le tableau suivant.

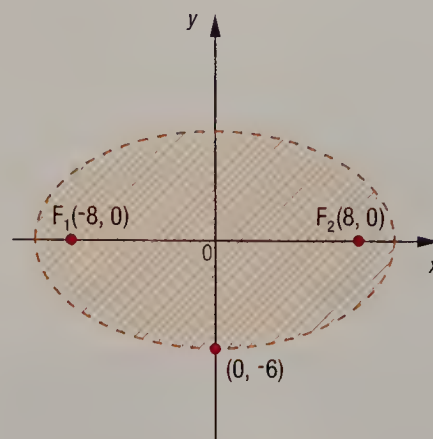
Équation de l'ellipse	Coordonnées des sommets	Longueur du plus grand axe	Longueur du plus petit axe	Coordonnées des foyers
$\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{841} = 1$	■	■	■	■
■	(0, 15) (9, 0) (0, -15) (-9, 0)	■	■	■
■	■	26 u	■	(12, 0) (-12, 0)
■	■	■	20 u	(0, 10,5) (0, -10,5)
■	■	146 u	96 u	■

9 Établissez l'inéquation associée à chacune des représentations graphiques ci-dessous sachant que les foyers correspondent aux points F_1 et F_2 .

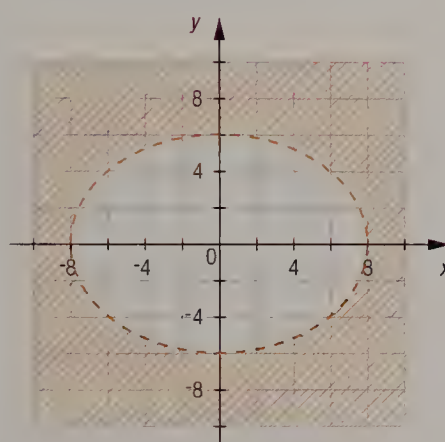
a)



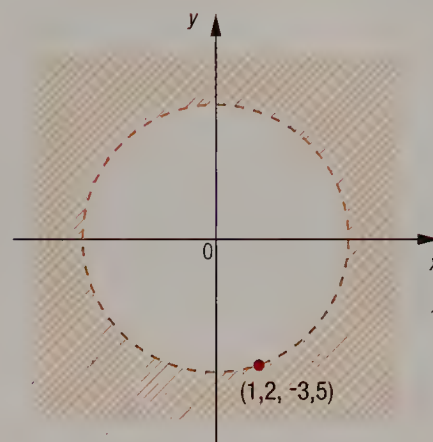
b)



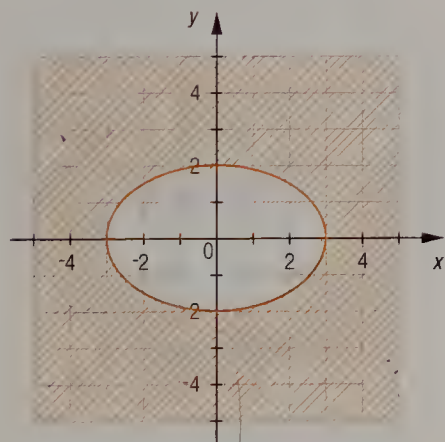
c)



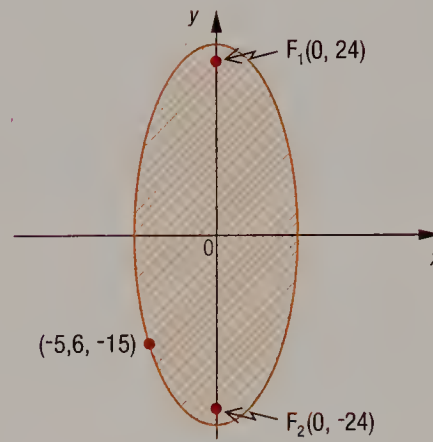
d)



e)



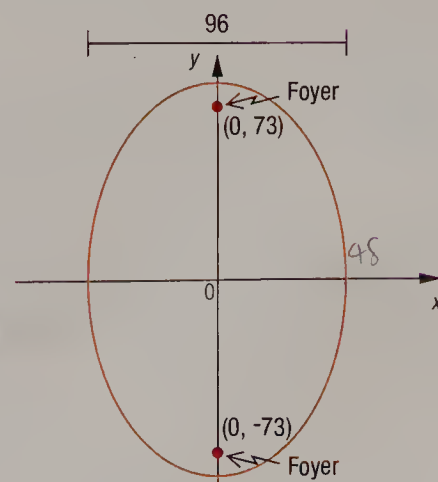
f)



10

Il est possible d'approximer le périmètre P d'une ellipse à l'aide de la formule $P \approx \pi[3(a + b) - \sqrt{(a + 3b)(3a + b)}]$ et d'en calculer l'aire A à l'aide de la formule $A = \pi ab$, où a correspond à la demi-mesure du plus petit axe et b , à la demi-mesure du plus grand axe.

- Approximez le périmètre de l'ellipse illustrée ci-contre.
- Calculez l'aire de l'ellipse.



11

LA COMÈTE DE HALLEY La trajectoire elliptique de la comète de Halley fait qu'elle passe près de l'orbite terrestre tous les 76 ans. Le prochain passage de la comète près de l'orbite terrestre est prévu en 2062. Le plus grand axe de l'ellipse qui correspond à sa trajectoire est horizontal et mesure 35,8 unités astronomiques et le plus petit axe, qui est vertical, mesure 34,6 unités astronomiques.

Une unité astronomique correspond à environ 150 millions de kilomètres.

- Représentez dans un plan cartésien la trajectoire de la comète à l'aide d'une ellipse centrée à l'origine.
- Déterminez les coordonnées possibles des foyers de cette ellipse.

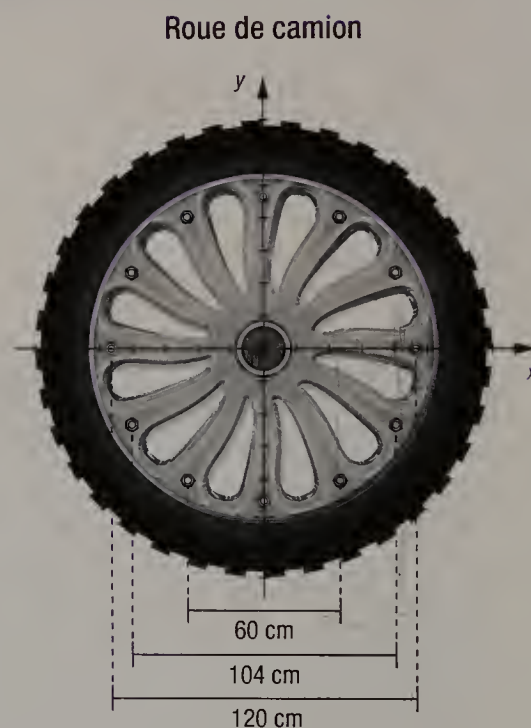


La sonde *Giotto* de l'Agence spatiale européenne, lancée en 1985, s'est approchée à 600 km de la comète de Halley et l'a photographiée. On sait maintenant que le noyau de la comète a la forme d'une cacahuète de 16 km de long.

12

On a illustré, ci-contre, la jante d'une roue de camion dans un plan cartésien afin de programmer la machine-outil qui sera utilisée pour visser les boulons sur la jante.

- Déterminez l'équation du cercle qui passe par l'ensemble des boulons.
- Déterminez les coordonnées de chaque boulon sachant qu'ils sont équidistants l'un de l'autre.

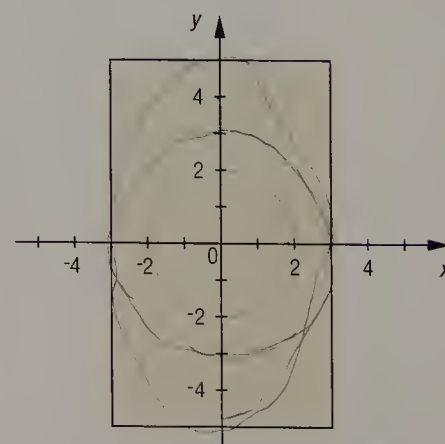


13

On a représenté dans un plan cartésien la toile rectangulaire sur laquelle un artiste désire peindre. Les graduations sont en décimètres.

Établissez l'équation :

- du plus grand cercle qu'il est possible de tracer sur cette toile ;
- de la plus grande ellipse qu'il est possible de tracer sur cette toile.

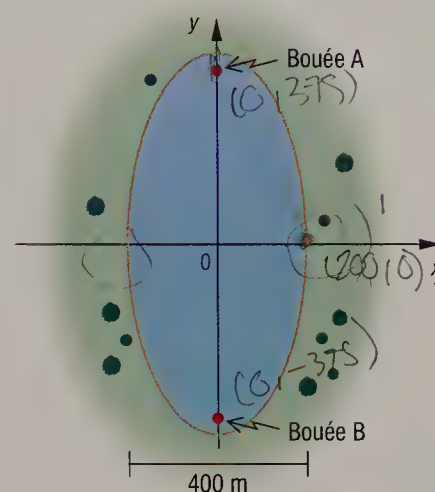


14

Lors d'une course de kayaks en eau calme, les participants doivent contourner les deux bouées représentées sur le schéma ci-contre. Le lac est de forme elliptique et les bouées correspondent aux foyers de l'ellipse. La distance entre les deux bouées est de 750 m.

- Établissez l'inéquation qui correspond à la surface du lac.
- Déterminez la distance minimale qui sépare chaque bouée de la rive.
- Un entraîneur se positionne sur un des sommets du plus petit axe de l'ellipse. Déterminez la distance qui le sépare de chacune des bouées.

Lac d'une compétition de kayak



15

Voici les procédures concernant l'installation de deux piscines.

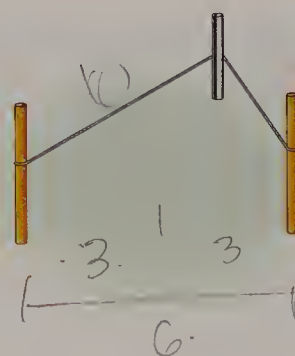
Piscine A

- On plante un poteau.
- On attache une corde de 4 m de long au poteau.
- On attache l'autre extrémité de la corde à une tige d'acier.
- On tend la corde au maximum et on trace, sur le sol, le pourtour de la piscine en déplaçant la tige d'acier autour du poteau.
- On installe la piscine à l'endroit ainsi déterminé.



Piscine B

- On plante deux poteaux distants de 6 m l'un de l'autre.
- On attache chaque extrémité d'une corde de 10 m aux deux poteaux.
- On tend la corde au maximum à l'aide d'une tige d'acier et on trace, sur le sol, le pourtour de la piscine en déplaçant la tige d'acier autour des deux poteaux.
- On installe la piscine à l'endroit ainsi déterminé.

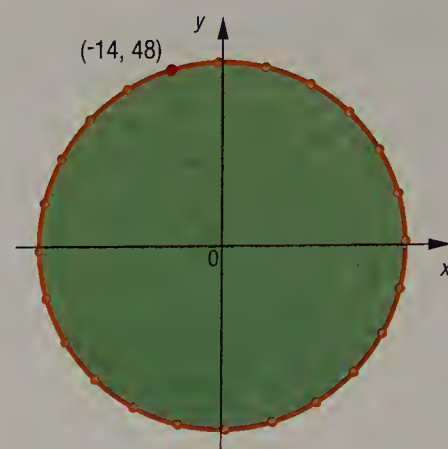


- Quelle est la forme de chacune des piscines?
- À chaque piscine, on superpose un plan cartésien de façon que le centre de chacune coïncide avec l'origine du plan. Déterminez l'équation qui correspond au pourtour de chaque piscine.
- Déterminez la largeur maximale de:
 - la piscine A;
 - la piscine B.

16

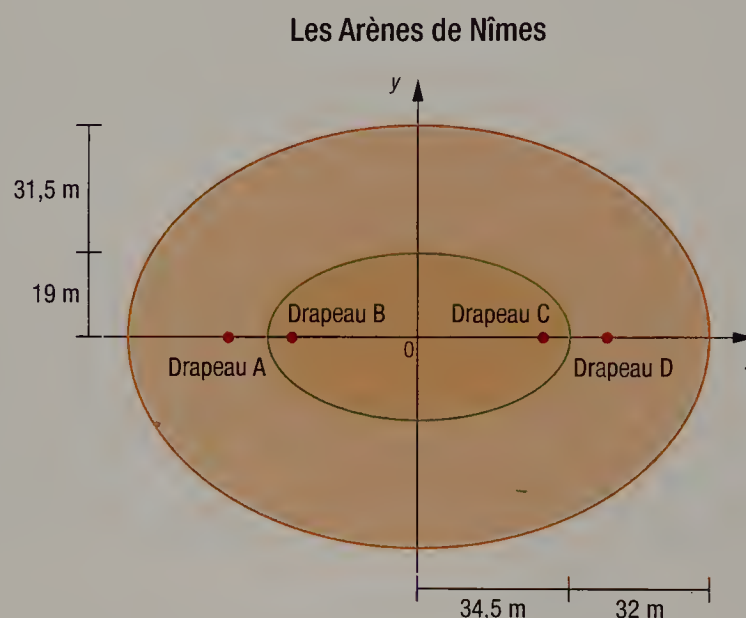
Pour évaluer les coûts d'un projet, on a représenté dans le plan cartésien ci-contre un terrain qui doit être entièrement gazonné et clôturé. Les graduations sont en mètres.

- Établissez l'inéquation qui correspond à la surface de ce terrain.
- Quel est le coût total :
 - de la clôture, si elle coûte 12 \$/m ?
 - du gazonnement, si la pelouse coûte 8 \$/m² ?



17

ARÈNES DE NÎMES Les Arènes de Nîmes sont un amphithéâtre romain de forme elliptique construit au 1^{er} siècle et capable d'accueillir 24 000 personnes. Cet endroit était un lieu de divertissement où l'on présentait des combats de gladiateurs, des courses de chevaux ou des spectacles de chasse. On a représenté dans le plan cartésien ci-dessous la vue de dessus des Arènes de Nîmes.



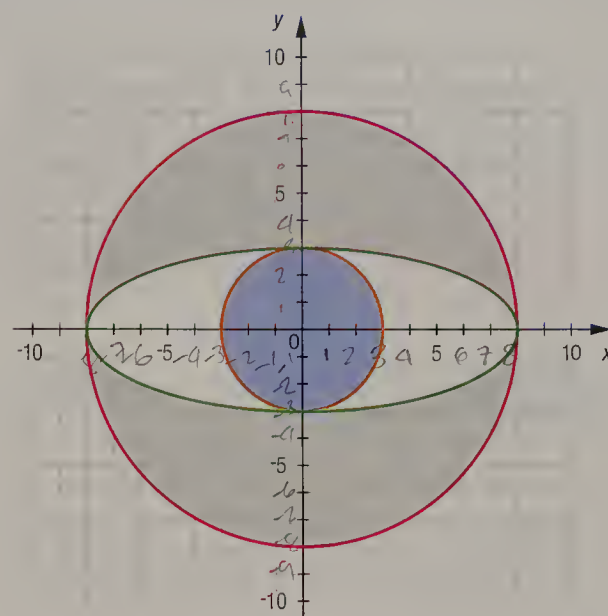
- Déterminez l'équation de chacune des ellipses.
- Sur chacun des foyers des ellipses, on installe un drapeau. Quelles sont les coordonnées de chacun des drapeaux ?
- Déterminez la distance entre les drapeaux :
 - A et B ;
 - B et C ;
 - A et D.

Les Arènes de Nîmes constituent l'amphithéâtre le mieux conservé du monde romain. Il a été construit à l'aide de grandes pierres de calcaire. De l'extérieur, il présente deux niveaux de 60 arcades. L'intérieur est constitué de 34 rangs de gradins et d'un système de couloirs et de galeries qui permettait au public d'évacuer l'édifice en quelques minutes.



18 Le logo d'un opticien est représenté dans le plan cartésien ci-contre dont les graduations sont en centimètres.

- Déterminez les équations de chacune des trois courbes qui forment ce logo.
- Établissez l'inéquation qui correspond à la région bleue du logo.
- Exprimez, sous la forme d'un système d'inéquations, la région :
 - blanche;
 - grise.



19 Pour créer une pièce de monnaie souvenir, une machine déforme une pièce de monnaie circulaire en une pièce de monnaie elliptique. On a représenté dans le plan cartésien ci-dessous la pièce de monnaie avant sa déformation. Les graduations sont en millimètres.



À la suite de la déformation :

- le plus grand axe de la pièce elliptique, qui est horizontal, est 1,8 fois plus grand que le diamètre de la pièce circulaire;
- le plus petit axe de la pièce elliptique, qui est vertical, est 1,25 fois plus petit que le diamètre de la pièce circulaire.

- Représentez dans un plan cartésien le pourtour de la pièce de monnaie elliptique, centrée à l'origine.
- Déterminez l'équation associée au pourtour de cette pièce.
- Pour calibrer la machine, on doit connaître les coordonnées des foyers de l'ellipse représentée en a). Quelles sont ces coordonnées?

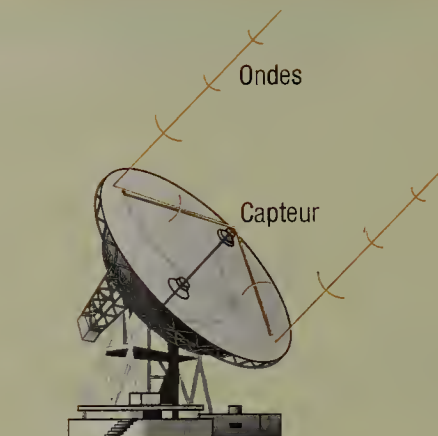
On trouve des machines qui pressent les pièces de monnaie dans divers sites touristiques, tels des musées, des jardins zoologiques, des parcs d'attractions. Dans les pays où la loi interdit de détruire la monnaie nationale, les propriétaires de ces machines proposent aux clients d'aplatir des jetons ou des pièces de monnaie de pays étrangers.



Cette section est en lien
avec la SAÉ 11.

PROBLÈME Le radiotélescope

Un radiotélescope est un instrument utilisé en astronomie qui permet de détecter les ondes radioélectriques émises par les astres. Sa forme parabolique permet de capter les ondes, puis de les réfléchir en un point appelé capteur. Par la suite, les ondes sont envoyées à un récepteur qui les transforme afin de reproduire une image à haute résolution de l'astre.

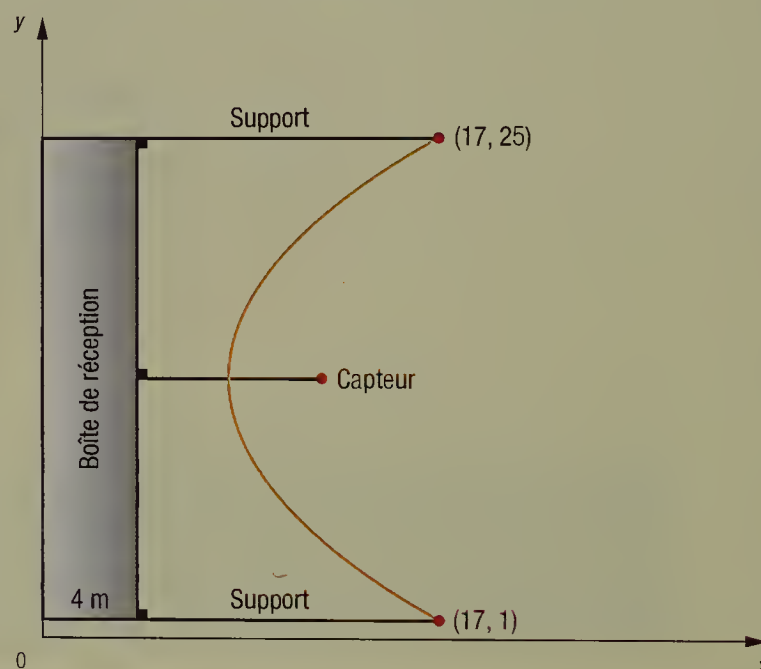


Dans le plan cartésien ci-dessous, on a représenté une coupe transversale d'un radiotélescope. Les graduations sont en mètres.

Voici des renseignements qui concernent ce radiotélescope.

- Le capteur est situé sur l'axe de symétrie de la parabole.
- La distance de chacun des points de la parabole à la boîte de réception est égale à la distance de ce point au capteur.

Coupe transversale d'un radiotélescope



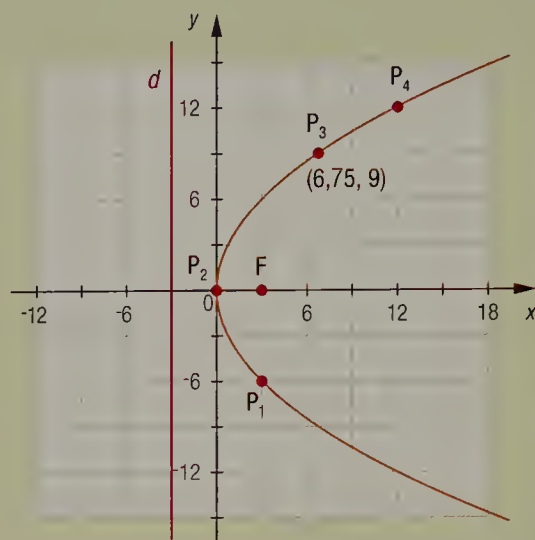
Quelles sont les coordonnées du capteur?

Le Very Large Array est un radiotélescope formé de 27 antennes paraboliques identiques de 25 m de diamètre chacune.



ACTIVITÉ 2 Une définition originale

Les mathématiciens de l'Antiquité se sont intéressés à certaines propriétés d'une courbe appelée parabole. Voici la représentation graphique de cette courbe.



Archimède (287 av. J.-C.-212 av. J.-C.) a consacré un traité entier à l'étude de la quadrature de la parabole, définie comme le calcul de l'aire de la surface délimitée par une parabole et une droite.

- Déterminez la distance qui sépare la droite d du point:
1) P_1 2) P_2 3) P_3 4) P_4
- Déterminez la distance qui sépare le point F du point:
1) P_1 2) P_2 3) P_3 4) P_4
- Comparez les résultats obtenus en **a** et en **b**.
Que remarquez-vous?
- Sachant que la droite d est la directrice de la parabole et que le point F est son foyer, énoncez une propriété qui caractérise cette parabole.

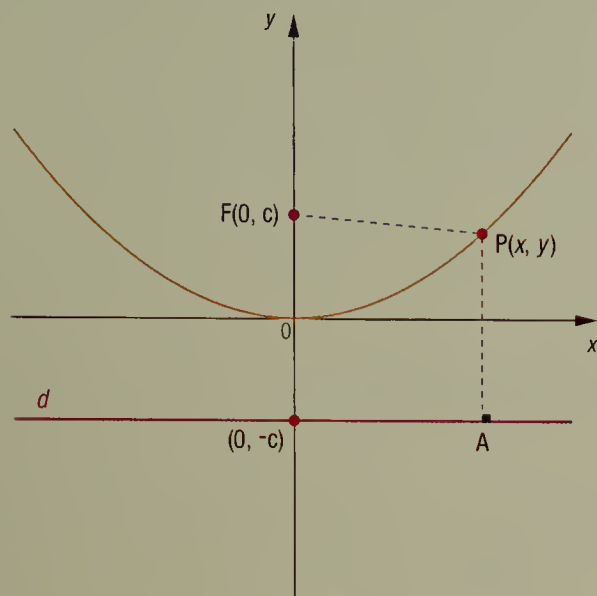
L'équation de la parabole illustrée ci-dessus est de la forme $y^2 = 4cx$. La démarche suivante permet de déterminer la valeur de c .

- ① $y^2 = 4cx$
- ② $9^2 = 4c \times 6,75$
- ③ $81 = 27c$
- ④ $c = 3$

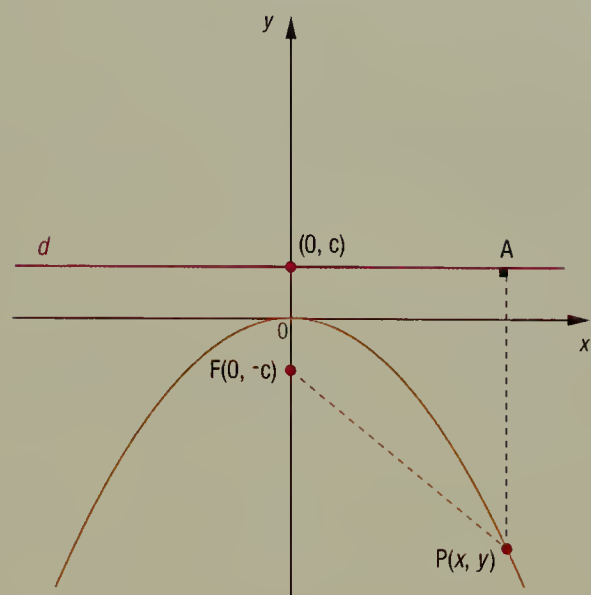
- Expliquez comment passer d'une étape à l'autre de cette démarche.
- Que remarquez-vous en comparant la valeur de c avec la distance qui sépare le sommet de la parabole:
1) du foyer? 2) de la directrice?

On a représenté ci-dessous différentes paraboles.

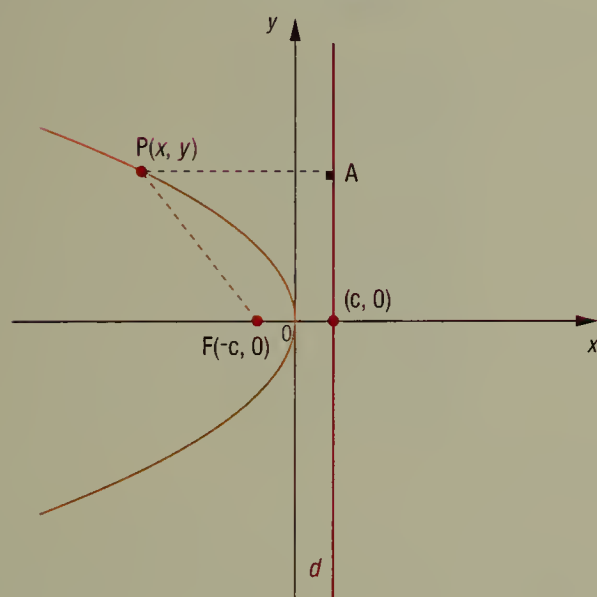
Situation ①



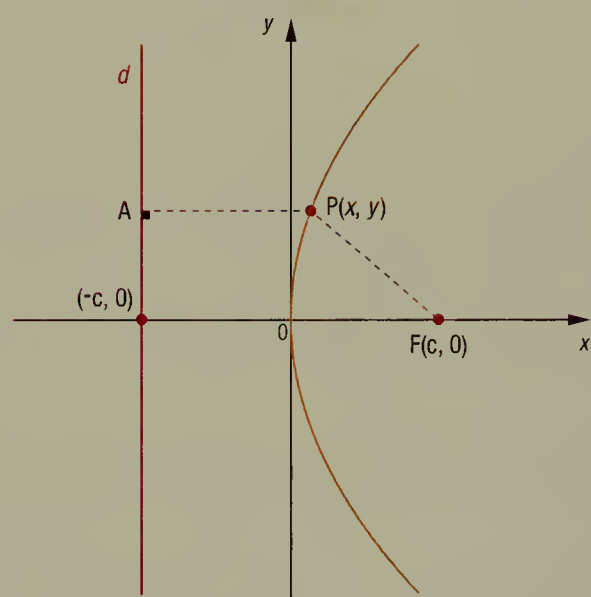
Situation ②



Situation ③



Situation ④



g. Déterminez les coordonnées du point A :

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) dans la situation ① ; | 2) dans la situation ② ; |
| 3) dans la situation ③ ; | 4) dans la situation ④ . |

Dans chaque cas, peu importe l'emplacement du point P sur la courbe, on a :

$$d(P, d) = d(P, F)$$

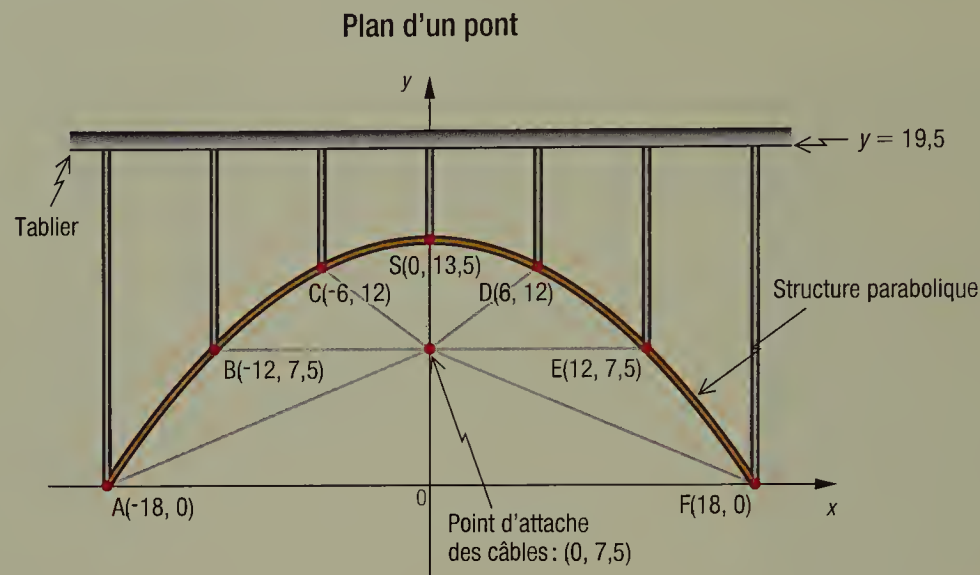
h. À partir de cette relation, établissez l'équation de la parabole :

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) dans la situation ① ; | 2) dans la situation ② ; |
| 3) dans la situation ③ ; | 4) dans la situation ④ . |

ACTIVITÉ 3 La conception d'un pont

Lors de la conception d'un pont, les ingénieurs évaluent la force de traction, la force de flexion et la force de compression qui sont exercées sur la structure afin de déterminer sa forme. Les structures paraboliques sont souvent privilégiées puisqu'elles permettent de répartir efficacement ces forces sur l'ensemble de la structure lorsque des usagers circulent sur le pont.

En vue de la construction d'un pont, on a représenté dans le plan cartésien ci-dessous la coupe transversale de ce pont. Les graduations sont en mètres.



- a. Quelle distance sépare le tablier du pont du point :
1) A? 2) S? 3) E? 4) F?
- b. Quelle distance sépare le point d'attache des câbles du point :
1) A? 2) S? 3) E? 4) F?
- c. Que remarquez-vous en comparant les réponses obtenues en a et en b?

Des ingénieurs affirment que l'équation associée à la structure parabolique du pont, qui s'écrit sous la forme $(x - h)^2 = 4c(y - k)$, est $x^2 = -24(y - 13,5)$.

- d. 1) D'après cette affirmation, quelle est la valeur de :
i) h? ii) k? iii) c?
2) Quelle relation peut-on établir entre ces valeurs et la courbe qui représente la structure parabolique du pont?
- e. Montrez que les points A, S, E et F vérifient l'équation $x^2 = -24(y - 13,5)$.

Le pont Pierre-Laporte d'une longueur de 1041 m, qui relie la rive sud de Québec à la ville de Québec, a été nommé ainsi en l'honneur de l'avocat, journaliste et homme politique québécois Pierre Laporte.

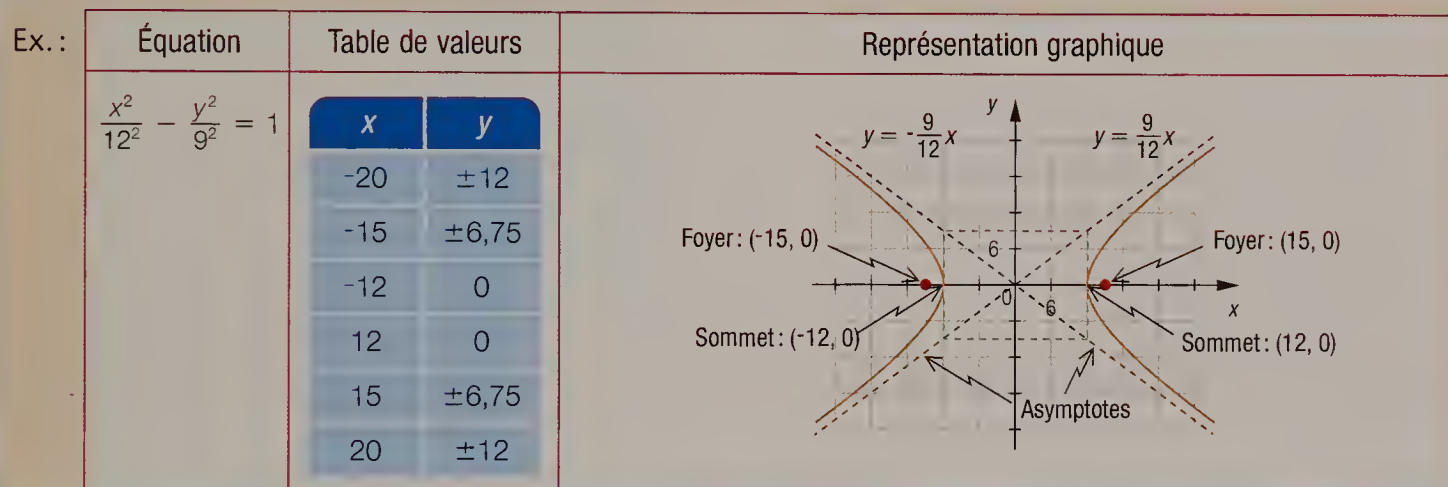
HYPERBOLE

Une hyperbole est une courbe où la valeur absolue de la différence des distances de tout point de la courbe à deux points fixes, appelés foyers, est constante. Dans la représentation graphique d'une hyperbole dont l'équation s'écrit sous la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$:

- les coordonnées du centre sont $(0, 0)$;
- les droites d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ constituent les asymptotes de la courbe;
- la relation entre la valeur du paramètre a , celle du paramètre b et la distance c , qui sépare le centre de l'hyperbole de l'un des foyers, est donnée par $c^2 = a^2 + b^2$.

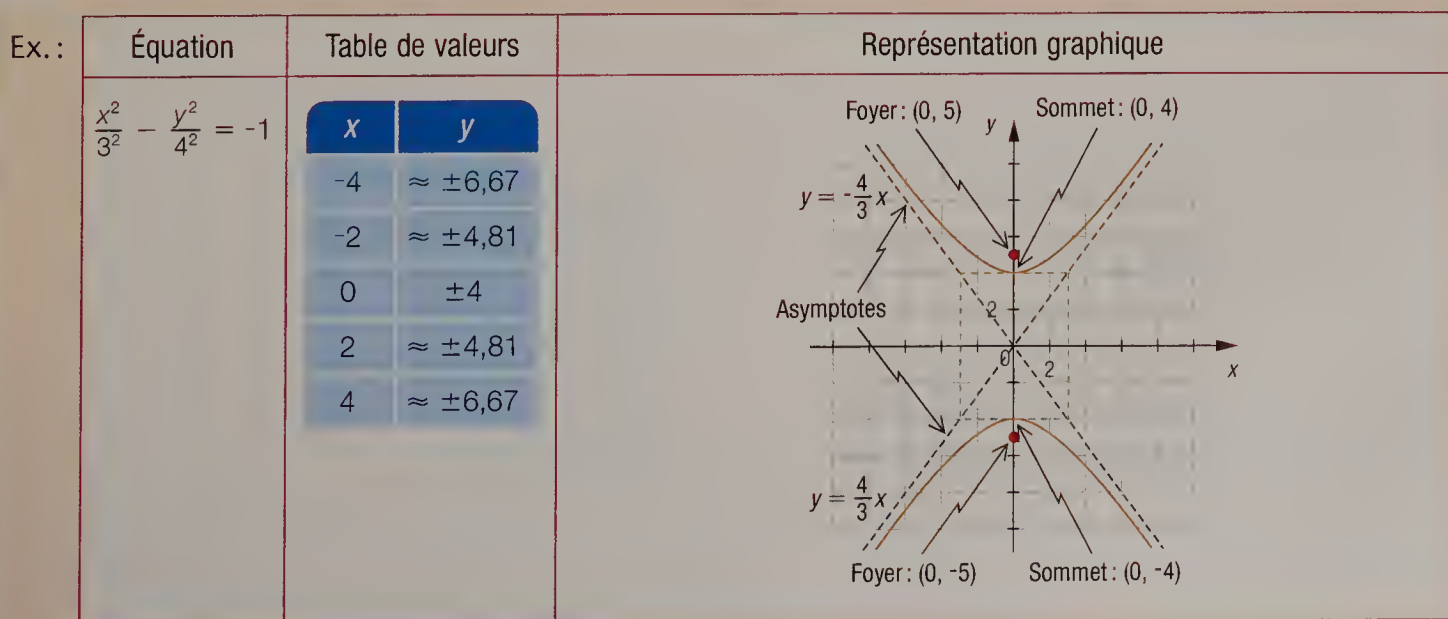
Dans la représentation graphique d'une hyperbole dont l'équation s'écrit sous la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

- les coordonnées des sommets sont $(a, 0)$ et $(-a, 0)$;
- les foyers sont situés sur l'axe des abscisses et leurs coordonnées sont $(c, 0)$ et $(-c, 0)$.



Dans la représentation graphique d'une hyperbole dont l'équation s'écrit sous la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$:

- les coordonnées des sommets sont $(0, b)$ et $(0, -b)$;
- les foyers sont situés sur l'axe des ordonnées et leurs coordonnées sont $(0, c)$ et $(0, -c)$.

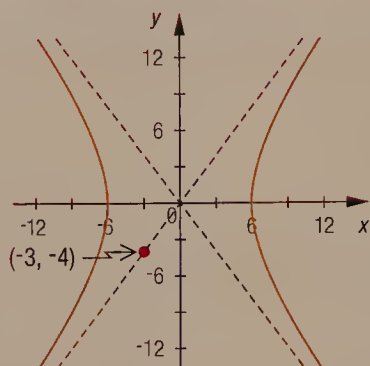


RECHERCHE DE L'ÉQUATION D'UNE HYPERBOLE

Il est possible de déterminer l'équation d'une hyperbole, qui s'écrit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, de la façon suivante.

1. Déduire certains renseignements concernant les paramètres a et b .
2. Écrire l'équation de l'hyperbole.

Ex.: 1)



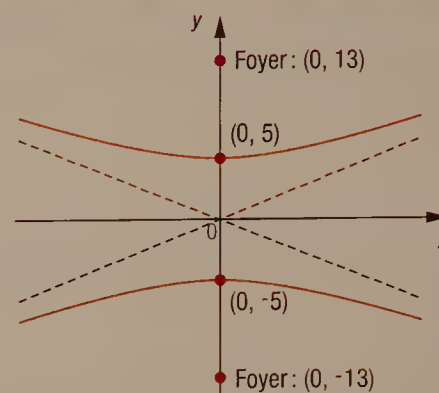
D'après l'orientation de la courbe, l'équation de l'hyperbole est de la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Puisque les coordonnées d'un point d'une asymptote et celles du centre de l'hyperbole sont respectivement $(-3, -4)$ et $(0, 0)$, l'équation d'une des asymptotes est $y = \frac{4}{3}x$.

De plus, puisque les coordonnées des sommets de l'hyperbole sont $(-6, 0)$ et $(6, 0)$, on déduit que $a = 6$ et $b = 8$.

L'équation de l'hyperbole est $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

2)



D'après l'orientation de la courbe, l'équation de l'hyperbole est de la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

Puisque les coordonnées d'un sommet et celles d'un foyer sont respectivement $(0, 5)$ et $(0, 13)$, on déduit que $b = 5$ et $c = 13$.

$$\begin{aligned} \text{On a donc: } c^2 &= a^2 + b^2 \\ 13^2 &= a^2 + 5^2 \\ a^2 &= 144 \end{aligned}$$

L'équation de l'hyperbole est $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = -1$.

RÉGION INTÉRIEURE OU EXTÉRIEURE À UNE HYPERBOLE

Pour représenter graphiquement la région associée à une hyperbole, on peut procéder de la façon suivante.

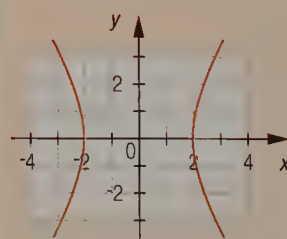
1. Écrire l'inéquation dans laquelle l'un des membres est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

2. Tracer la courbe frontière d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ d'un trait plein ou en pointillé selon que l'équation fait partie ou non de l'inéquation.

3. Colorier ou hachurer la région qui correspond à l'ensemble-solution.

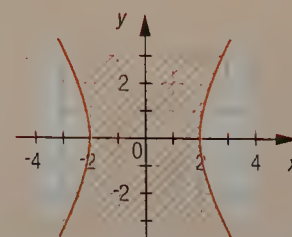
Ex.: On désire représenter graphiquement la région qui correspond à l'inéquation $9x^2 - 4y^2 \leq 36$.

$$\begin{aligned} \frac{9x^2}{36} - \frac{4y^2}{36} &\leq \frac{36}{36} \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} &\leq 1 \end{aligned}$$



L'équation de la courbe frontière est $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Dans le plan cartésien, les couples de nombres situés entre les deux branches de l'hyperbole vérifient l'inéquation.



PARABOLE

Une parabole est une courbe dont tous les points sont situés à égale distance d'une droite fixe, appelée directrice, et d'un point fixe, appelé foyer. Dans la représentation graphique d'une parabole dont l'équation s'écrit sous la forme $(x - h)^2 = 4c(y - k)$ ou $(y - k)^2 = 4c(x - h)$, où $c \neq 0$:

- les coordonnées du sommet sont (h, k) ;
- la distance entre le foyer et la directrice est déterminée par $2|c|$.

Dans la représentation graphique d'une parabole dont l'équation s'écrit sous la forme $(x - h)^2 = 4c(y - k)$:

- l'équation de l'axe de symétrie de la parabole est $x = h$;
- les coordonnées du foyer sont $(h, k + c)$;
- l'équation de la directrice est $y = k - c$;
- la parabole est ouverte vers le haut si $c > 0$ et ouverte vers le bas si $c < 0$.

Ex. :	Équation	Table de valeurs	Représentation graphique												
	$(x - 1)^2 = 2(y + 3)$	<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-1</td><td>-1</td></tr><tr><td>0</td><td>-2,5</td></tr><tr><td>1</td><td>-3</td></tr><tr><td>2</td><td>-2,5</td></tr><tr><td>3</td><td>-1</td></tr></table>	x	y	-1	-1	0	-2,5	1	-3	2	-2,5	3	-1	The graph shows a parabola opening upwards on a Cartesian coordinate system. The x-axis ranges from -2 to 3, and the y-axis ranges from -4 to -1. A vertical dashed line at $x = 1$ is labeled "Axe de symétrie". A horizontal solid line at $y = -3,5$ is labeled "Directrice". The vertex of the parabola is marked with a red dot at $(1, -3)$ and labeled "Sommet: (1, -3)". The focus is marked with a red dot at $(1, -2,5)$ and labeled "Foyer: (1, -2,5)". The parabola passes through the points $(-1, -1)$, $(0, -2,5)$, $(1, -3)$, $(2, -2,5)$, and $(3, -1)$.
x	y														
-1	-1														
0	-2,5														
1	-3														
2	-2,5														
3	-1														

Dans la représentation graphique d'une parabole dont l'équation s'écrit sous la forme $(y - k)^2 = 4c(x - h)$:

- l'équation de l'axe de symétrie de la parabole est $y = k$;
- les coordonnées du foyer sont $(h + c, k)$;
- l'équation de la directrice est $x = h - c$;
- la parabole est ouverte vers la gauche si $c < 0$ et ouverte vers la droite si $c > 0$.

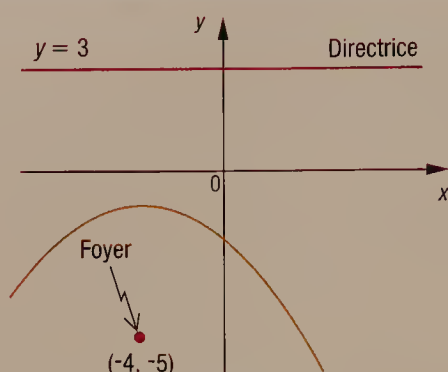
Ex. :	Équation	Table de valeurs	Représentation graphique												
	$(y + 2)^2 = -8(x - 1)$	<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-1</td><td>2</td></tr><tr><td>-1</td><td>-6</td></tr><tr><td>0,5</td><td>0</td></tr><tr><td>0,5</td><td>-4</td></tr><tr><td>1</td><td>-2</td></tr></table>	x	y	-1	2	-1	-6	0,5	0	0,5	-4	1	-2	Directrice $x = 3$ Axe de symétrie $y = -2$ Foyer : $(-1, -2)$ Sommet : $(1, -2)$
x	y														
-1	2														
-1	-6														
0,5	0														
0,5	-4														
1	-2														

RECHERCHE DE L'ÉQUATION D'UNE PARABOLE

Il est possible de déterminer l'équation d'une parabole, qui s'écrit $(x - h)^2 = 4c(y - k)$ ou $(y - k)^2 = 4c(x - h)$, de la façon suivante.

1. Dédire certains renseignements concernant les paramètres c , h et k .
2. Écrire l'équation de la parabole.

Ex.: 1)

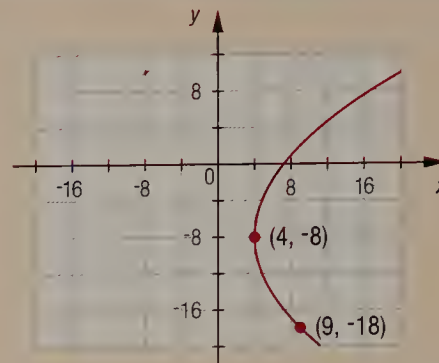


D'après l'orientation de la courbe, l'équation de la parabole est de la forme $(x - h)^2 = 4c(y - k)$ et $c < 0$.

Puisque les coordonnées du foyer sont $(-4, -5)$ et que l'équation de la directrice est $y = 3$, on peut déduire que les coordonnées du sommet sont $(-4, -1)$ et que la valeur du paramètre c est -4 .

L'équation de la parabole est $(x + 4)^2 = -16(y + 1)$.

2)



D'après l'orientation de la courbe, l'équation de la parabole est de la forme $(y - k)^2 = 4c(x - h)$ et $c > 0$.

Puisque les coordonnées d'un des points de la courbe sont $(9, -18)$ et que les coordonnées du sommet sont $(4, -8)$, on a:

$$\begin{aligned}(y - k)^2 &= 4c(x - h) \\ (-18 + 8)^2 &= 4c(9 - 4) \\ 100 &= 20c \\ c &= 5\end{aligned}$$

L'équation de la parabole est $(y + 8)^2 = 20(x - 4)$.

RÉGION INTÉRIEURE OU EXTÉRIEURE À UNE PARABOLE

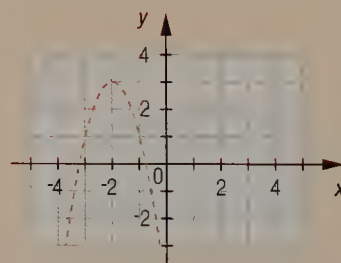
Pour représenter graphiquement la région associée à une parabole, on peut procéder de la façon suivante.

Ex.: On désire représenter graphiquement la région qui correspond à l'inéquation $(x + 2)^2 < -0,5(y - 3)$.

1. Écrire l'inéquation dans laquelle l'un des membres est $(x - h)^2$ ou $(y - k)^2$.

$$(x + 2)^2 < -0,5(y - 3)$$

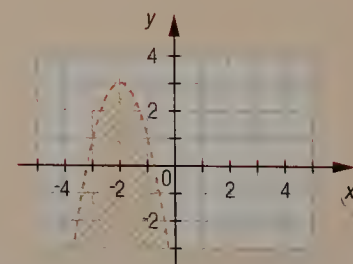
2. Tracer la courbe frontière d'équation $(x - h)^2 = 4c(y - k)$ ou $(y - k)^2 = 4c(x - h)$ d'un trait plein ou en pointillé selon que l'équation fait partie ou non de l'inéquation.



L'équation de la courbe frontière est $(x + 2)^2 = -0,5(y - 3)$.

3. Colorier ou hachurer la région qui correspond à l'ensemble-solution.

Dans le plan cartésien, les couples de nombres situés sous la courbe vérifient l'inéquation.



1 Dans chaque cas, déterminez :

- 1) les coordonnées du foyer de la parabole; 2) l'équation de la directrice.

- a) $y^2 = -8x$ b) $x^2 = 2y$ c) $(y + 3)^2 = 13(x - 5)$
 d) $(x - 12)^2 = -25y$ e) $(y - 14)^2 = 52(x + 8)$ f) $x^2 = 12,4(y + 5,2)$

2 Établissez l'équation de la parabole :

- a) centrée à l'origine dont les coordonnées du foyer sont $(-5, 0)$;
 b) centrée à l'origine dont l'équation de la directrice est $y = 20$;
 c) dont les coordonnées du sommet sont $(-3, 8)$, qui passe par le point $(7, 6)$ et dont l'équation de l'axe de symétrie est $y = 8$;
 d) dont les coordonnées du sommet sont $(5, -10)$, l'équation de l'axe de symétrie est $x = 5$ et la distance entre le foyer et la directrice est de 16 unités;
 e) dont l'équation de l'axe de symétrie est $y = 12$, les coordonnées du foyer sont $(3, 12)$ et l'équation de la directrice est $x = 15$.

3 Dans chaque cas, déterminez les coordonnées :

- 1) des sommets de l'hyperbole; 2) des foyers de l'hyperbole.

- a) $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1$ b) $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{324} = 1$ c) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = -1$
 d) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{56,25} = 1$ e) $\frac{x^2}{20,25} - \frac{y^2}{400} = -1$ f) $\frac{x^2}{3600} - \frac{y^2}{121} = -1$

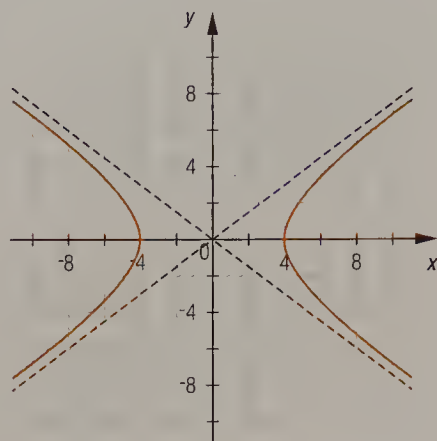
4 Établissez l'équation de l'hyperbole centrée à l'origine du plan cartésien :

- a) dont les coordonnées des sommets sont $(10, 0)$ et $(-10, 0)$, et dont les coordonnées des foyers sont $(26, 0)$ et $(-26, 0)$;
 b) qui passe par le point $(0, 8)$ et dont les coordonnées d'un foyer sont $(0, -17)$;
 c) qui passe par les points $(21, 0)$ et $(-32, 23)$;
 d) dont la distance entre les foyers, qui sont situés sur l'axe des ordonnées, est de 20,5 unités et la distance entre les deux sommets est de 20 unités;
 e) dont les coordonnées d'un sommet sont $(0, 28)$ et l'équation d'une des asymptotes est $y = -\frac{7}{24}x$.

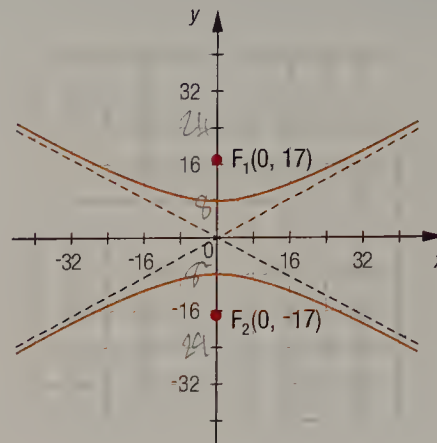
5

Établissez l'équation de chacune des hyperboles illustrées ci-dessous, où F est un foyer et S, un sommet.

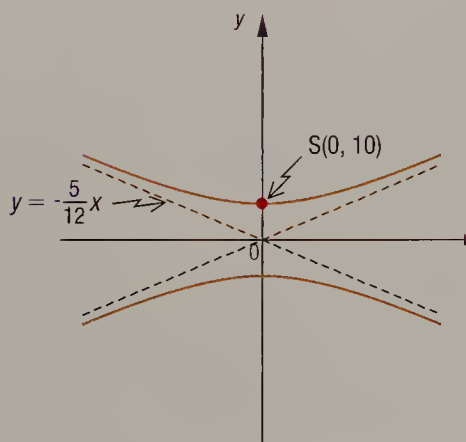
a)



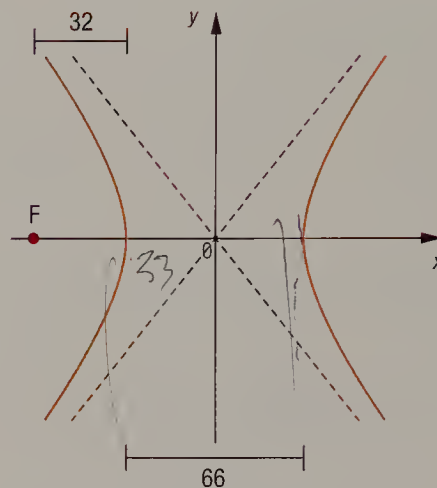
b)



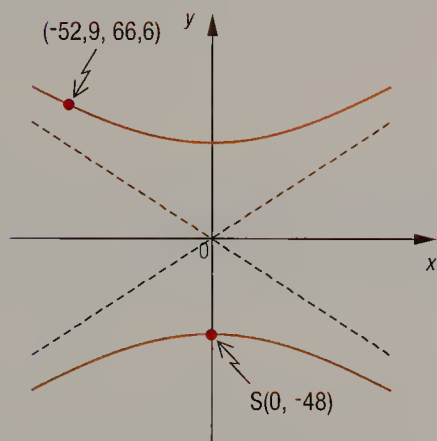
c)



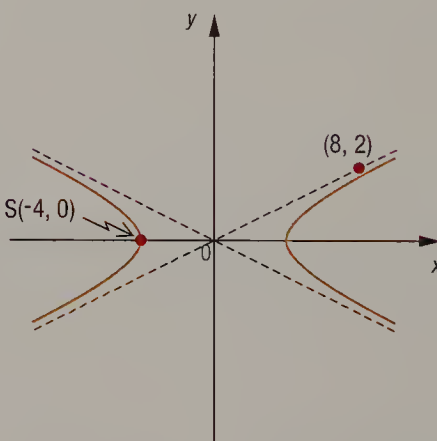
d)



e)



f)



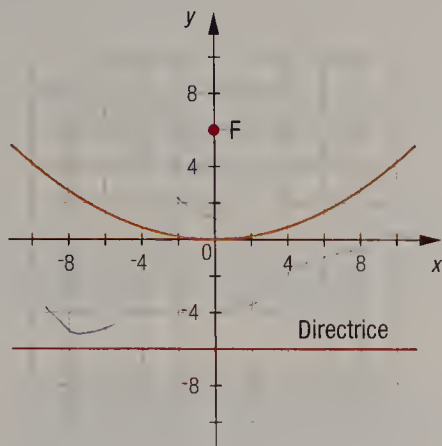
6

Complétez le tableau suivant.

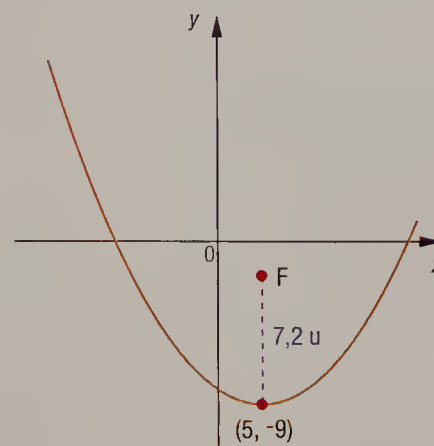
Équation de la parabole	Coordonnées du sommet	Coordonnées du foyer	Équation de la directrice	Distance du foyer à la directrice
$(y - 8)^2 = -44(x + 2)$				
$(x + 13)^2 = 2(y - 10)$				
	(10, -12)		$y = -6$	
	(2, -2)	(2, -8,5)		
	(14, 8)		$x = 22$	
	(2, -2)	(4,7, -2)		

7 Établissez l'équation de chacune des paraboles illustrées ci-dessous, où F est le foyer et S, le sommet.

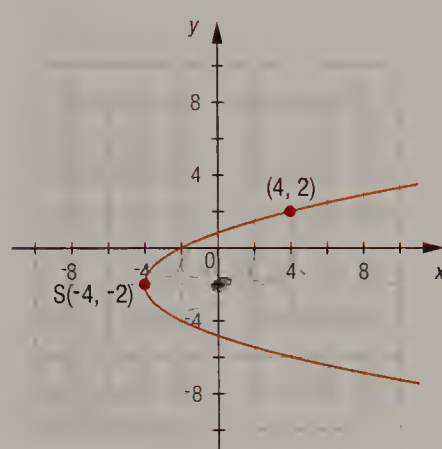
a)



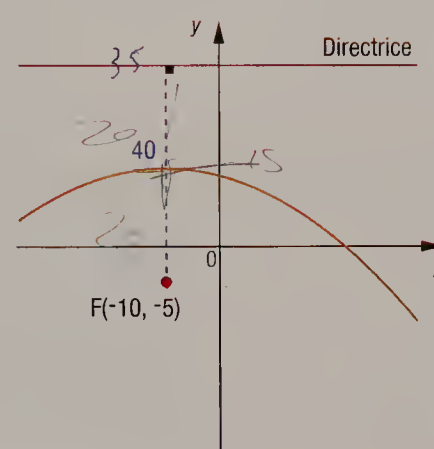
b)



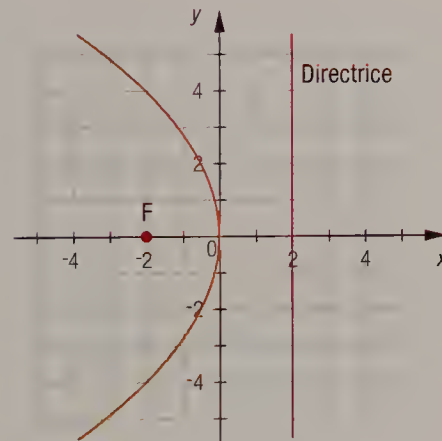
c)



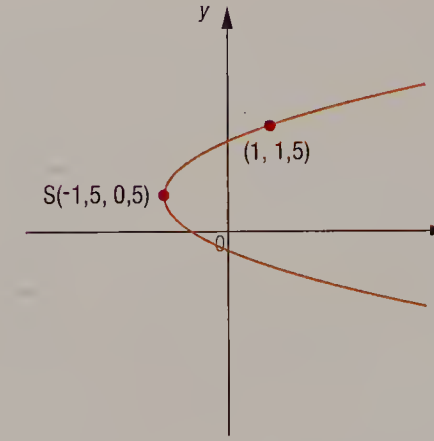
d)



e)



f)



8 Complétez le tableau suivant.

Équation de l'hyperbole	Coordonnées des sommets	Coordonnées des foyers	Équation des asymptotes
$\frac{x^2}{5929} - \frac{y^2}{1296} = 1$	■	■	■
■	(0, 18) (0, -18)	■	$y = -\frac{9}{40}x$ $y = \frac{9}{40}x$
■	(0, 72) (0, -72)	(0, 97) (0, -97)	■
$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{992,25} = -1$	■	■	■
■	(1,5, 0) (-1,5, 0)	(2,5, 0) (-2,5, 0)	■

9

Représentez graphiquement la région associée à chaque inéquation.

a) $(x + 4)^2 \geq -36(y - 8)$

b) $\frac{x^2}{1225} - \frac{y^2}{144} > -1$

c) $-28(x - 2) \geq (y + 5)^2$

d) $1 \geq \frac{x^2}{1600} - \frac{y^2}{1764}$

e) $0 < 22x + 44 - y^2$

f) $0 \leq \frac{x^2}{506,25} - \frac{y^2}{196} - 1$

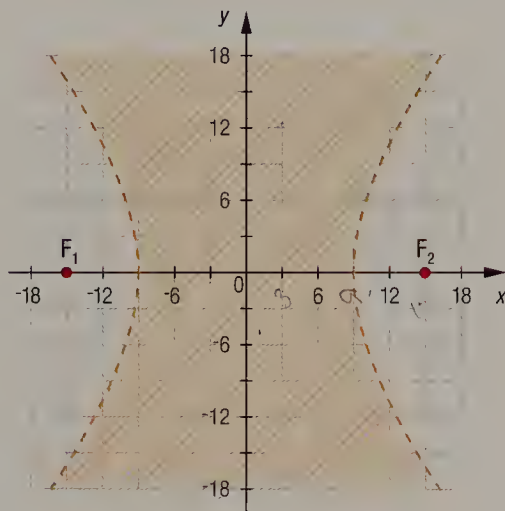
10

Expliquez pourquoi il existe une infinité d'hyperboles dont l'équation d'une des deux asymptotes est $y = -\frac{40}{9}x$ et dont l'équation de la droite qui passe par ses sommets est $x = 0$.

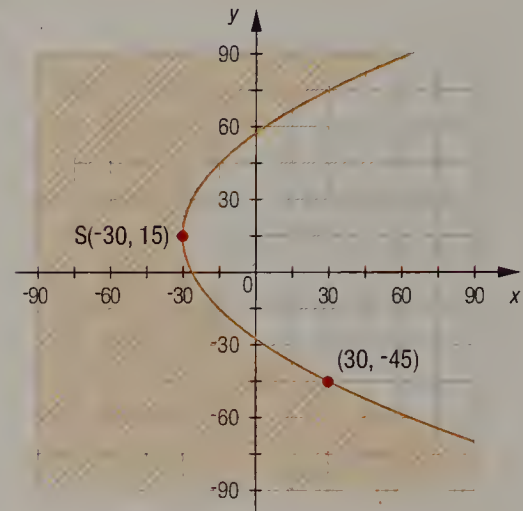
11

Établissez l'inéquation associée à chacune des représentations graphiques ci-dessous, où F est un foyer et S, un sommet.

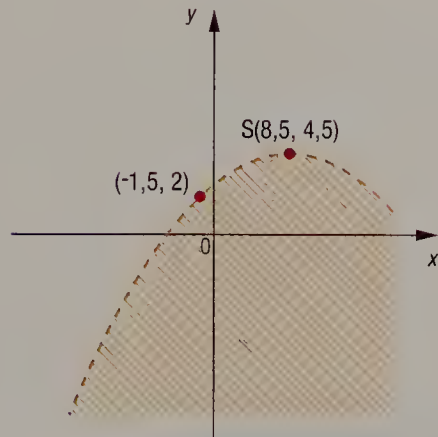
a)



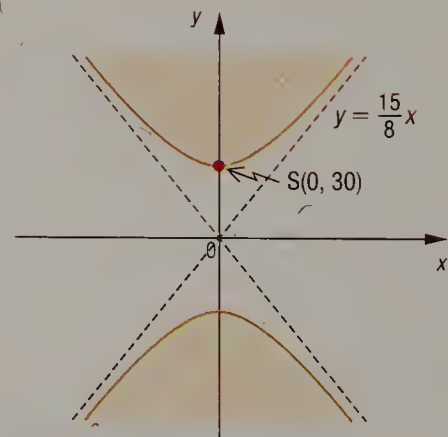
b)



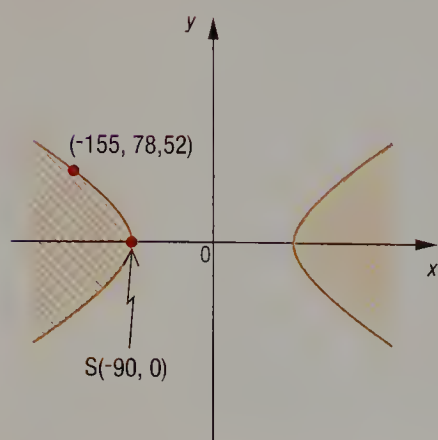
c)



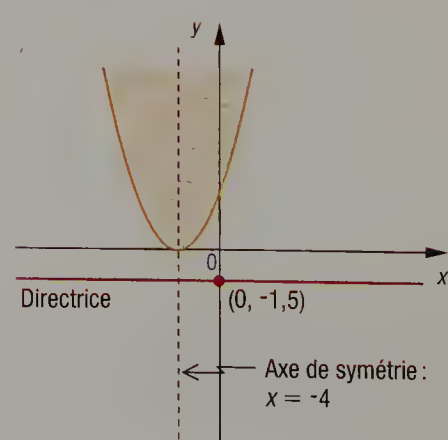
d)



e)



f)

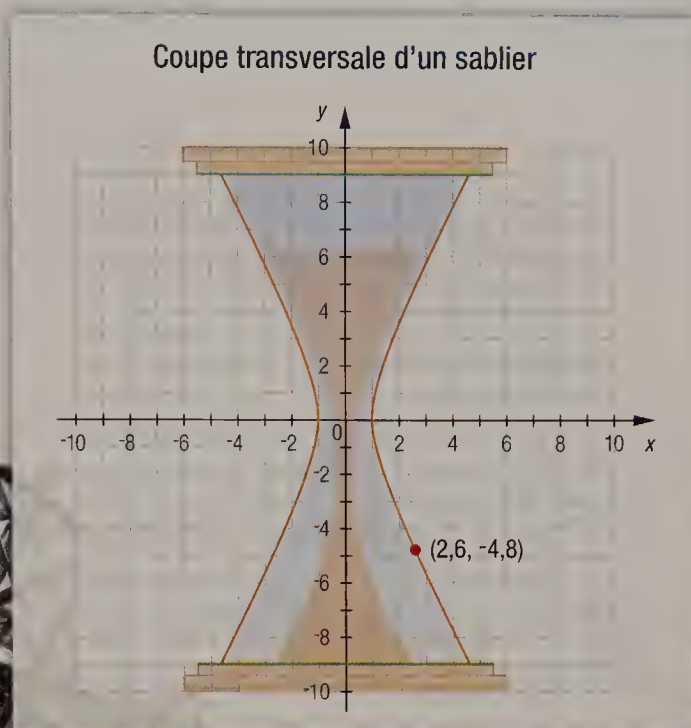
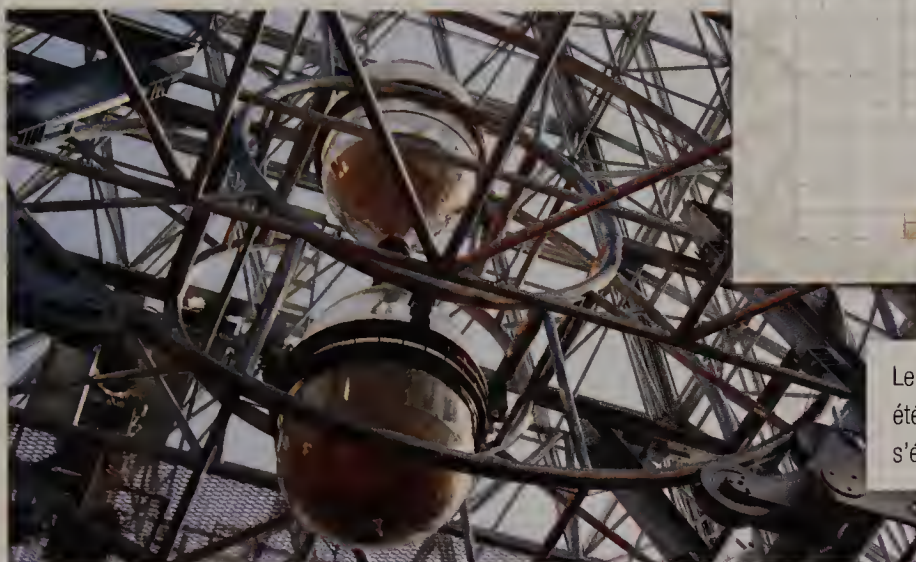


12 On a représenté dans le plan cartésien ci-contre la coupe transversale d'un sablier de forme hyperbolique. Les graduations sont en centimètres.

a) Établissez l'équation :

- 1) de l'hyperbole associée à ce sablier ;
- 2) de chacune des asymptotes.

b) Déterminez les coordonnées des foyers de l'hyperbole.



Le sablier du Sand Museum, au Japon, a été conçu de façon à ce que son contenu s'écoule entièrement en un an.

13 Un horticulteur aménage un jardin de fleurs sur un terrain carré de 20 m de côté. La surface à aménager correspond à la région délimitée par l'inéquation $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} \geq -1$.

- a) Représentez graphiquement la région associée à ce jardin de fleurs.
- b) Déterminez la largeur minimale du jardin de fleurs.
- c) L'horticulteur aimerait installer sur ce terrain deux fontaines qui coïncident avec les foyers de l'hyperbole. Est-ce possible? Expliquez votre réponse.

14 Des scientifiques ont modélisé la trajectoire parabolique d'une comète à l'aide de l'équation $(y - 8)^2 = 10(x - 5)$, où x et y correspondent à des distances en milliards de kilomètres.

- a) Déterminez les coordonnées du Soleil sachant qu'il est situé au foyer de la parabole.
- b) Représentez dans un plan cartésien la trajectoire de cette comète.
- c) Sachant qu'un satellite se déplace sur la directrice, déterminez la distance minimale qui sépare la trajectoire de la comète et celle du satellite.

L'Union astronomique internationale est l'organisme qui a la responsabilité de nommer les comètes. Par exemple, la comète Hale-Bopp C/1995 O1 a été découverte, par Alan Hale et Thomas Bopp, le 23 juillet 1995. La lettre O signifie qu'elle a été découverte dans la seconde quinzaine du mois de juillet.

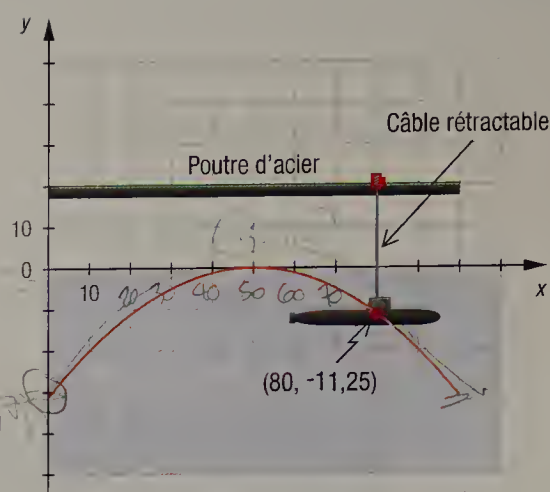
15

Dans un parc d'attractions, on propose aux visiteurs de plonger sous l'eau dans un sous-marin relié à un câble rétractable contrôlé par un moteur qui se déplace sur une poutre d'acier située au-dessus de la surface de l'eau. On a représenté la trajectoire parabolique du sous-marin dans le plan cartésien ci-contre où les graduations sont en mètres.

Déterminez :

- l'équation de la parabole associée à la trajectoire du sous-marin ;
- la profondeur maximale atteinte par le sous-marin.

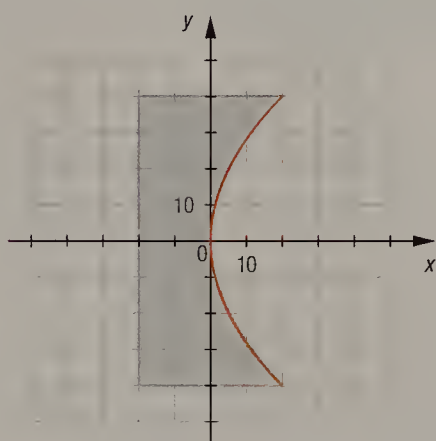
Trajectoire du sous-marin



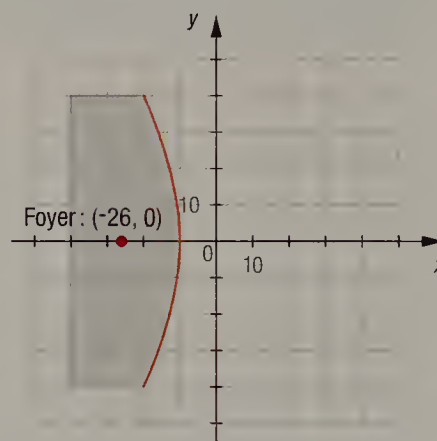
16

PROGRAMME SOFIA La NASA s'est jointe à un consortium pour la fabrication d'un télescope d'un poids de 20 tonnes et d'un diamètre de 2,5 m qui est installé dans un Boeing 747. L'avion est conçu pour voler jusqu'à une altitude de 14 km afin de permettre l'observation de l'espace et la prise d'images précises. On a représenté dans les plans cartésiens ci-dessous la coupe transversale de deux miroirs utilisés dans la fabrication de certains télescopes. Les graduations sont en centimètres.

Miroir parabolique concave



Miroir hyperbolique convexe



Établissez l'équation de :

- la parabole associée au miroir parabolique concave ;
- l'hyperbole centrée à l'origine dont l'une des branches est associée au miroir hyperbolique convexe.



SOFIA est l'acronyme du projet *Stratospheric Observatory for Infrared Astronomy* (Observatoire stratosphérique pour l'astronomie infrarouge). L'astronomie infrarouge permet de visualiser des ondes émises par des astres dits « froids », ce que ne permet pas l'astronomie optique.

Cette section est en lien
avec la SAÉ 12.

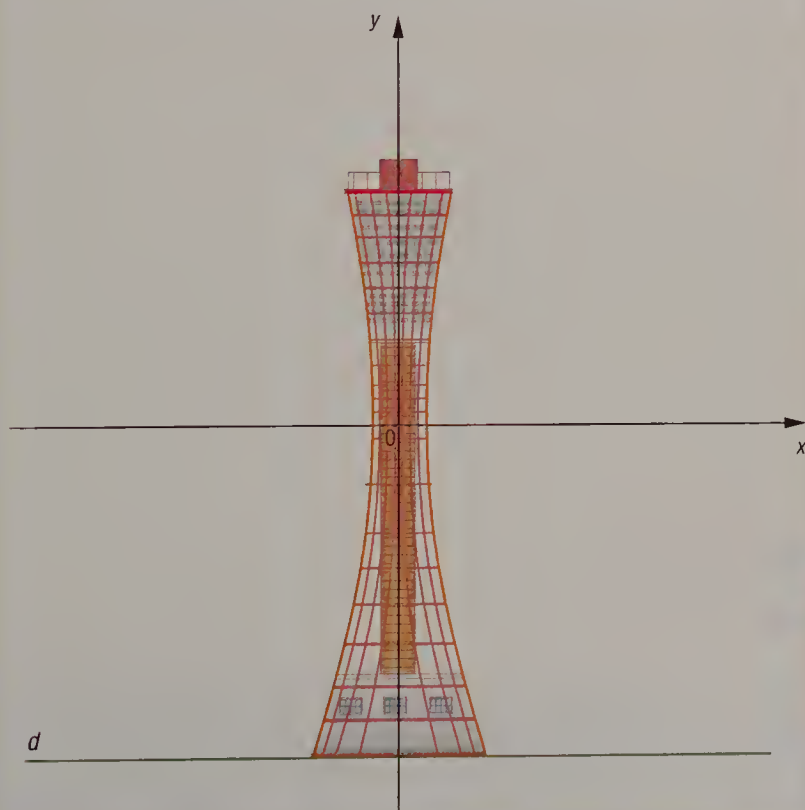
PROBLÈME La tour du port de Kōbe

Érigée en 1963, la tour du port de Kōbe, au Japon, offre aux visiteurs une vue exceptionnelle de la ville. Sa structure de 108 m de hauteur, inspirée d'un instrument de musique traditionnel japonais, a une forme hyperboloïde.

Voici une coupe transversale de cette tour dans un plan cartésien dans lequel les graduations sont en mètres. Dans cette représentation :

- l'équation de l'une des asymptotes de l'hyperbole est $y = 5x$;
- la distance entre les sommets de l'hyperbole est de 10 m;
- l'équation de la droite d est $y = -63$.

Coupe transversale de la tour du port de Kōbe



Au sommet de la tour, on trouve
un observatoire vitré de cinq étages
qui permet aux visiteurs de contempler
un panorama à 360°.



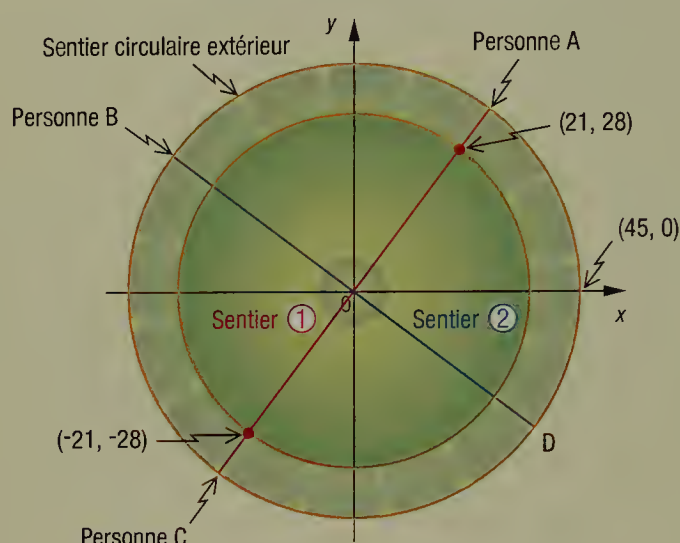
Quel est le diamètre de la base circulaire de la tour?

ACTIVITÉ 1 Le Jardin botanique de Padoue

Le Jardin botanique de Padoue, créé en 1545, est la propriété de l'Université de Padoue, en Italie. Il est le premier jardin universitaire au monde où les plantes médicinales sont cultivées et étudiées afin que les étudiants puissent les reconnaître au cours de leur pratique médicale.

On a superposé un plan cartésien à une représentation d'une partie de ce jardin. Les graduations sont en mètres.

Vue de dessus d'une partie du jardin



- Établissez l'équation :
 - du cercle qui correspond au sentier circulaire extérieur ;
 - de la droite qui correspond au sentier ①.
- Quelle équation à une variable obtient-on en remplaçant la variable y par l'expression $\frac{4x}{3}$ dans l'équation qui correspond au sentier circulaire extérieur ?
- Résolvez l'équation du second degré obtenue en **b** et indiquez ce que représentent les solutions par rapport au contexte.
- Déterminez les coordonnées du point où se trouve :
 - la personne A ;
 - la personne C.
- Sachant que l'équation de la droite associée au sentier ② est $y = -\frac{3x}{4}$, déterminez les coordonnées du point où se trouve la personne B.

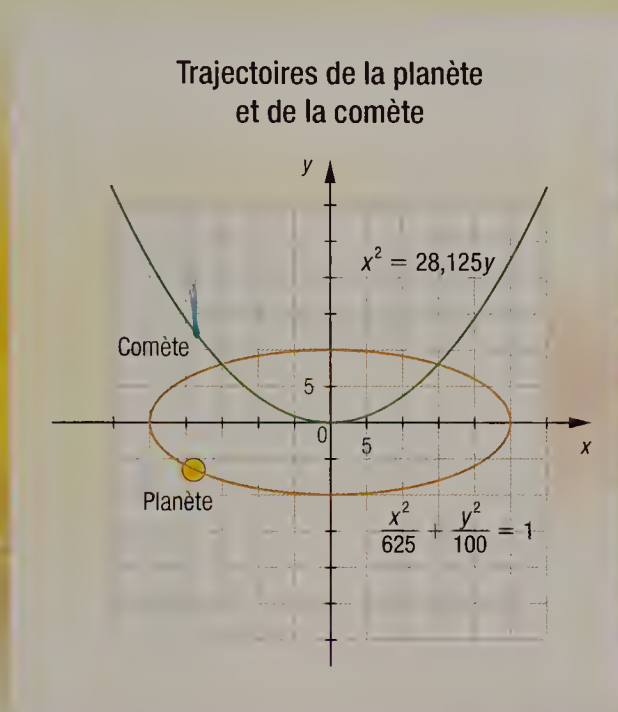
Le Jardin botanique de Padoue est inscrit sur la liste du patrimoine mondial de l'UNESCO depuis 1997. Ce jardin, à l'origine de tous les jardins botaniques du monde, est maintenant considéré comme un bien culturel ayant une valeur universelle exceptionnelle.



ACTIVITÉ 2 Collision astrale

En juillet 1994, la comète Shoemaker-Levy 9 entre en collision avec la planète Jupiter. Les astronomes évaluent que ce genre de collision arrive une fois tous les 100 ans sur Jupiter. Pour la Terre, ils évaluent que cela peut se produire tous les 10 000 à 100 000 ans.

Afin d'évaluer l'emplacement possible du point d'impact entre une comète et une planète, des planétologues ont représenté leur trajectoire respective dans le plan cartésien ci-dessous où les graduations sont en milliards de kilomètres.



L'énergie dégagée par la collision de la comète correspond à l'énergie dégagée par plusieurs explosions atomiques.

- a. Évaluez graphiquement les coordonnées de chacun des points d'impact possibles.
- b. Voici le début d'une démarche qui permet de déterminer les coordonnées de chacun des points d'impact possibles.

$$\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{100} = 1$$

$$x^2 = 28,125y$$

- ① $x^2 = 625 - 6,25y^2$
 $x^2 = 28,125y$
- ② $625 - 6,25y^2 = 28,125y$
- ③ $6,25y^2 + 28,125y - 625 = 0$
- ④ $y = 8$ et $y = -12,5$

- 1) Expliquez comment passer d'une étape à l'autre de cette démarche.
- 2) Dans cette situation, l'ordonnée d'un des points d'impact possibles peut-elle être -12,5? Expliquez votre réponse.
- 3) Déterminez les coordonnées de chacun des points d'impact possibles.

Une calculatrice graphique permet d'afficher dans un même plan cartésien les courbes de plusieurs coniques. Voici une exploration qui permet de déterminer les points d'intersection entre différentes courbes.

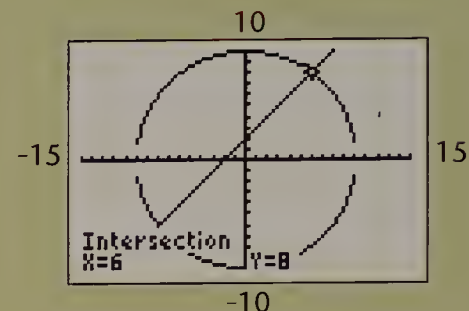
Écran 1

```
Graph1 Graph2 Graph3
Y1=√(100-X²)
Y2=-√(100-X²)
Y3=X+2
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=
```

Écran 2

```
CALCULE
1:valeur
2:zéro
3:minimum
4:maximum
5:intersect
6:dy/dx
7:∫f(x)dx
```

Écran 3



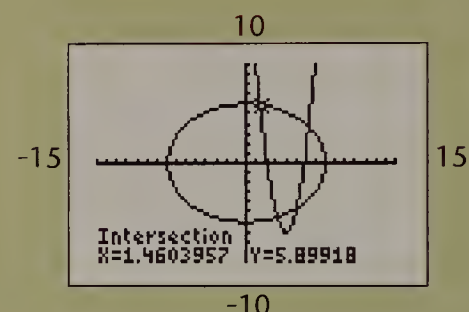
Écran 4

```
Graph1 Graph2 Graph3
Y1=√((1-X²/64)*36)
Y2=-√((1-X²/64)*36)
Y3=2(X-4)²-7
Y4=
Y5=
```

Écran 5

```
CALCULE
1:valeur
2:zéro
3:minimum
4:maximum
5:intersect
6:dy/dx
7:∫f(x)dx
```

Écran 6



- En observant l'écran 3, déterminez le nombre de points d'intersection possibles entre une droite et un cercle.
- En observant l'écran 6, déterminez le nombre de points d'intersection possibles entre une parabole et une ellipse.
- À l'aide d'une calculatrice graphique, déterminez les coordonnées de chacun des points d'intersection entre les deux courbes illustrées :
 - à l'écran 3;
 - à l'écran 6.
- Dans chaque cas, déterminez les coordonnées des points d'intersection entre les deux courbes à l'aide d'une calculatrice graphique.

1) $x^2 + y^2 = 64$

$y = -2x - 3$

2) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = -1$

$(x - 5)^2 = 0,5y$

3) $(y + 5)^2 = 8(x + 7)$

$y = -2x - 3$

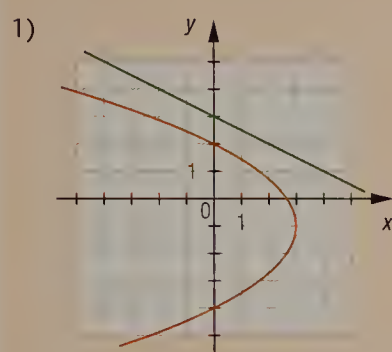
POINTS D'INTERSECTION ENTRE UNE DROITE ET UNE CONIQUE OU ENTRE UNE PARABOLE ET UNE AUTRE CONIQUE

Différentes stratégies permettent de déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection entre une droite et une conique ou entre une parabole et une autre conique.

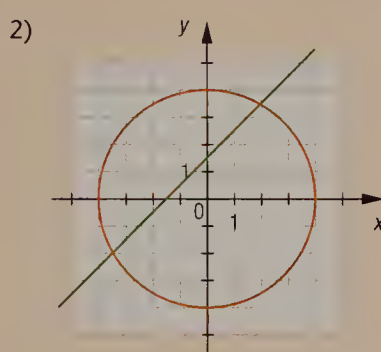
Représentation graphique

En représentant deux courbes dans un même plan cartésien, il est possible de déterminer le nombre de points d'intersection entre ces courbes et d'approximer les coordonnées des points d'intersection.

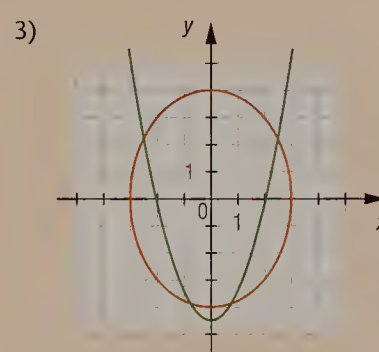
Ex.:



Il n'y a aucun point d'intersection entre ces deux courbes.



Il y a deux points d'intersection entre ces deux courbes, soit $(\approx -3,5, -2)$ et $(2, \approx 3,5)$.



Il y a quatre points d'intersection entre ces deux courbes, soit $(\approx -2,5, \approx 2,25)$, $(\approx -0,75, \approx -3,9)$, $(\approx 0,75, \approx -3,9)$ et $(\approx 2,5, \approx 2,25)$.

Méthode algébrique

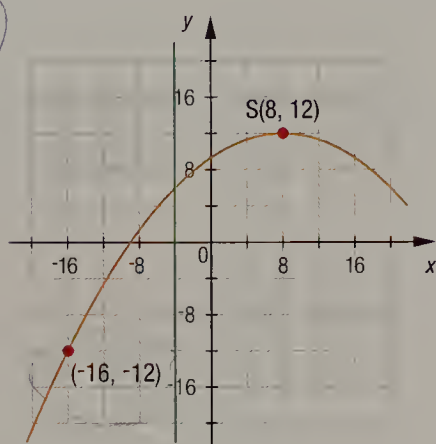
Les méthodes de comparaison, de substitution et de réduction permettent de déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection, s'il ou ils existent, entre une droite et une conique ou entre une parabole et une autre conique.

Ex.: 1) Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre la droite d'équation $y = -12x + 40$ et la parabole d'équation $y = 4(x - 4)^2$.		2) Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre la parabole d'équation $y^2 = 2x + 12$ et l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{64} = 1$.	
$-12x + 40 = 4(x - 4)^2$ $-12x + 40 = 4x^2 - 32x + 64$ $-4x^2 + 20x - 24 = 0$ $x = 2 \text{ et } x = 3$		$\frac{x^2}{36} + \frac{2x + 12}{64} = 1$ $16x^2 + 18x + 108 = 576$ $16x^2 + 18x - 468 = 0$ $x = -6 \text{ et } x = 4,875$	
$y = -12(2) + 40$ $y = 16$	$y = -12(3) + 40$ $y = 4$	$y = \pm\sqrt{2(-6) + 12}$ $y = 0$	$y = \pm\sqrt{2(4,875) + 12}$ $y = \pm\sqrt{21,75}$ $y \approx 4,66 \text{ et } y \approx -4,66$
Les points d'intersection sont $(2, 16)$ et $(3, 4)$.		Les points d'intersection sont $(-6, 0)$, $(4,875, \approx -4,66)$ et $(4,875, \approx 4,66)$.	

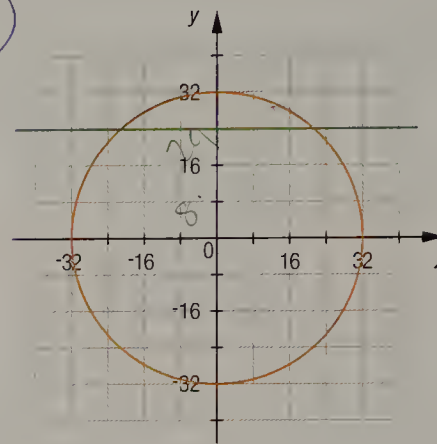
1

Dans chaque cas, déterminez les coordonnées du ou des points d'intersection entre la droite verte et la conique, où F est un foyer et S, un sommet.

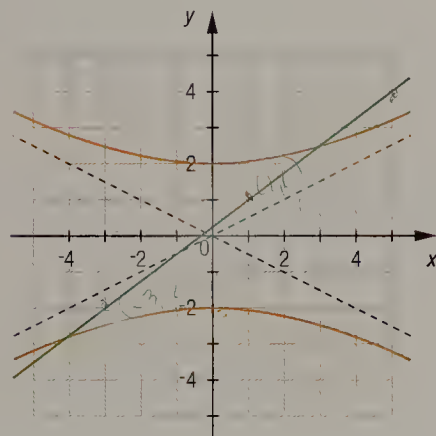
a)



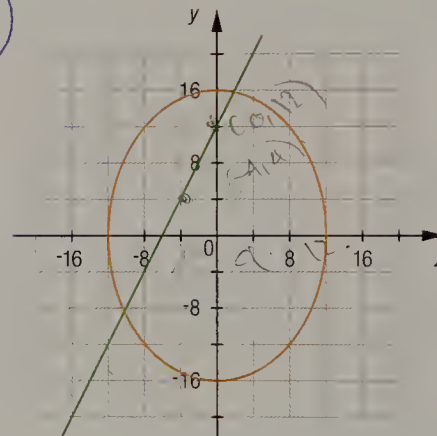
b)



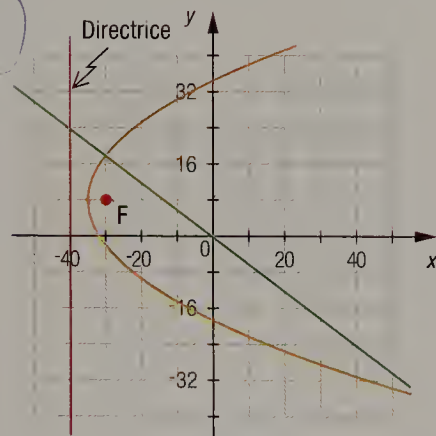
c)



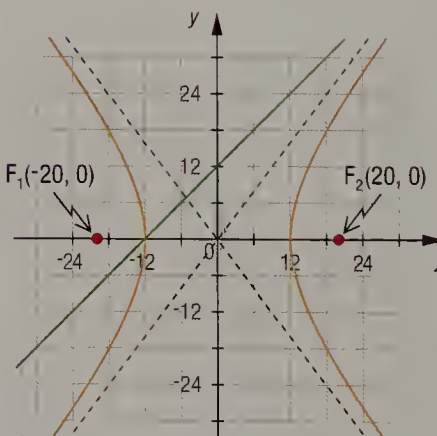
d)



e)



f)



2 Dans chaque cas, déterminez les coordonnées du ou des points d'intersection entre la parabole et la conique définies par les équations données.

a) $x^2 + y^2 = 289$

$$x^2 = \frac{225}{8}y$$

b) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$

$$y^2 = -1,25(x - 5)$$

c) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = -1$

$$x^2 = \frac{25}{24}(y + 24)$$

d) $x^2 + y^2 = 36$

$$y^2 = 48(x - 3,12)$$

e) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

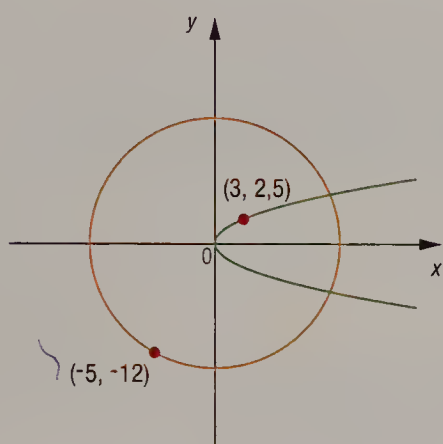
$$x^2 = -0,5(y - 40)$$

f) $\frac{x^2}{1156} + \frac{y^2}{256} = 1$

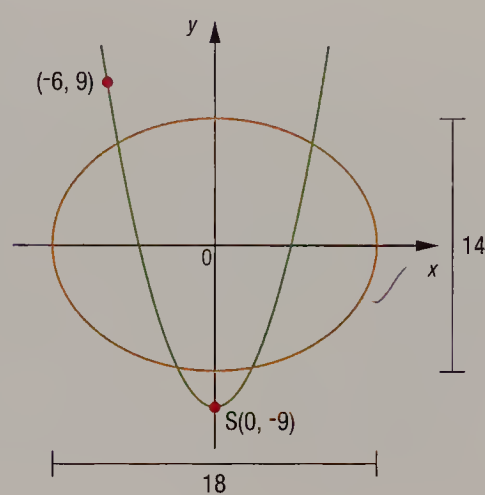
$$y^2 = 12(x - 34)$$

3 Dans chaque cas, déterminez les coordonnées du ou des points d'intersection entre la parabole et la conique, où F est un foyer et S, un sommet.

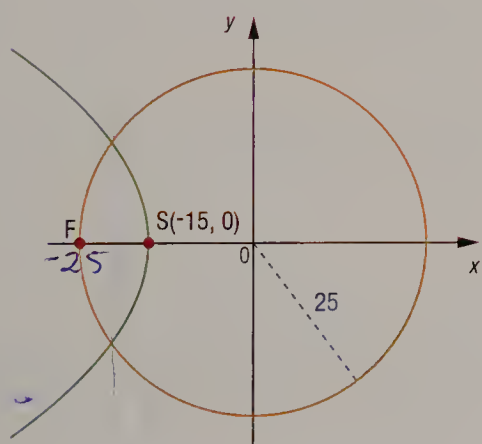
a)



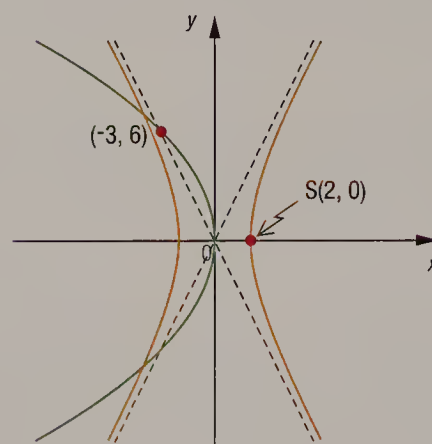
b)



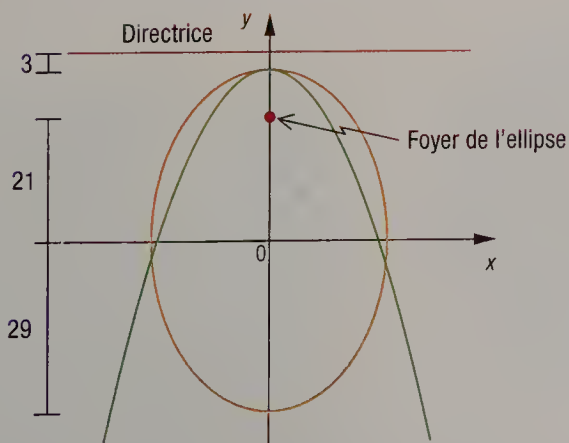
c)



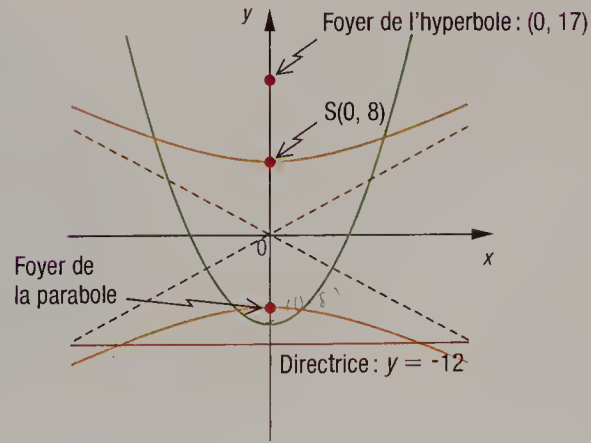
d)



e)



f)



4

Dans chaque cas, déterminez les coordonnées du ou des points d'intersection entre la droite et la conique définies par les équations données.

a) $x^2 = -0,1(y + 8,5)$
 $x = 0,4$

b) $(x - 3)^2 = -8(y - 2)$
 $y = -22,5$

c) $x^2 + y^2 = 676$
 $y = -10$

d) $\frac{x^2}{576} + \frac{y^2}{625} = 1$
 $y = \frac{25}{32}x$

e) $x^2 + y^2 = 2500$
 $y = x - 10$

f) $(y + 5)^2 = -6(x - 4)$
 $y = -x - 13$

g) $\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{3600} = -1$
 $y = 8x - 10$

h) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$
 $y = -0,5x - 4$

i) $\frac{x^2}{1296} - \frac{y^2}{225} = 1$
 $y = \frac{5}{24}x + \frac{15}{2}$

5

Dans chaque cas, déterminez le nombre de points d'intersection entre les courbes définies par les équations données.

a) $(y - 4)^2 = -8(x + 3)$
 $x = 2$

b) $x^2 + y^2 = 144$
 $2y - 8x = 16$

c) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{225} = 1$
 $y^2 = 16x + 128$

d) $x^2 + y^2 = 400$
 $y = 0,75x - 25$

e) $x^2 - \frac{y^2}{20} = -1$
 $y^2 = 2(x + 18)$

f) $x^2 = 20(y + 4)$
 $x^2 + y^2 = 72,25$

6

Montrez graphiquement que le nombre de points d'intersection entre un cercle et une parabole peut être :

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

7

Déterminez les coordonnées des points d'intersection de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{64} = 1$ et de la courbe d'équation :

a) $y = 6$

b) $y = -0,5x - 1,3$

c) $x^2 = 16(y + 8)$

8

On construit un pont au-dessus d'un lac de forme elliptique. Pour établir certaines données relatives à ce chantier, on a représenté cette situation dans le plan cartésien ci-dessous où les graduations sont en décimètres.

a) Établissez l'équation :

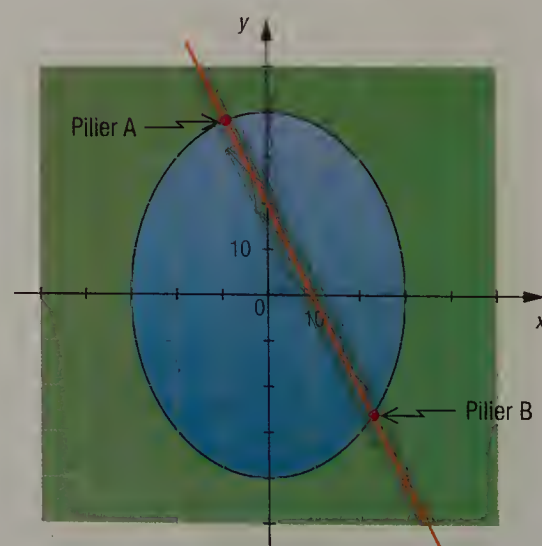
- 1) de la droite qui passe par le centre du pont;
- 2) de l'ellipse associée au pourtour du lac.

b) Déterminez les coordonnées :

- 1) du pilier A;
- 2) du pilier B.

c) Quelle distance sépare les deux piliers du pont?

Pont au-dessus d'un lac



9 Voici des renseignements concernant le plan de vol de deux avions:

Avion A

- Sa trajectoire vue de dessus est définie par l'équation $y = 0,25x + 1000$.
- Altitude de vol: 10 000 m

Avion B

- Sa trajectoire vue de dessus est définie par l'équation $(x - 2000)^2 = -1600(y - 2500)$.
- Altitude de vol: 12 000 m

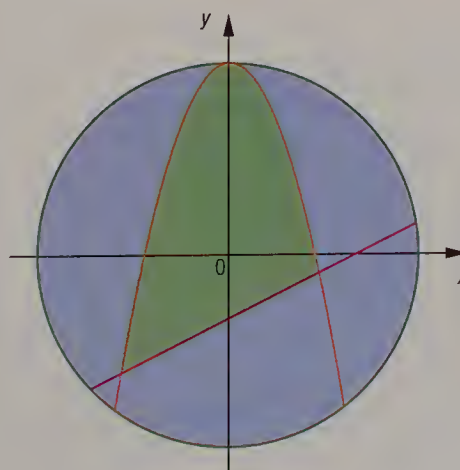
- Représentez cette situation dans un plan cartésien.
- À certains moments, l'avion **B** passe exactement au-dessus de l'avion **A**. Quelles sont les coordonnées des points où se produit cette situation?

L'équipe de démonstration aérienne des Snowbirds comprend plus de 80 membres actifs des Forces canadiennes, dont 11 pilotes. Cet escadron présente environ 65 spectacles de prouesses aériennes par année.

10 Dans chaque cas, évaluez graphiquement les coordonnées des points d'intersection des deux coniques définies par les équations données.

- $(x - 5)^2 = 4(y + 10)$
 $x^2 + y^2 = 400$
- $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
 $(y + 1)^2 = -0,4(x - 8)$
- $(x + 6)^2 = -12(y + 2)$
 $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{100} = 1$

11 Le logo illustré ci-dessous est composé d'un cercle d'équation $x^2 + y^2 = 14\,400$, d'une droite d'équation $y = 0,5x - 40$ et d'une parabole d'équation $x^2 = -24(y - 120)$. Les graduations du plan cartésien sont en centimètres.



Déterminez les coordonnées des points d'intersection entre:

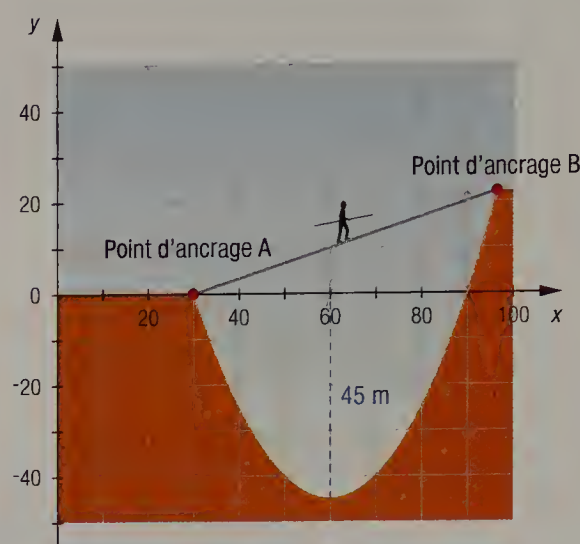
- la droite et le cercle;
- la droite et la parabole;
- la parabole et le cercle.

12

Dans le plan cartésien ci-dessous, on a représenté une vue de côté d'un canyon et d'un fil de fer sur lequel un funambule effectue une traversée.

- Établissez l'équation de :
 - la droite correspondant au fil de fer;
 - la courbe correspondant au canyon.
- Déterminez les coordonnées du point d'ancrage :
 - A
 - B
- Déterminez la distance parcourue par le funambule sur le fil de fer.
- Pour suivre l'exploit du funambule, on suspend une caméra au-dessous du fil de fer de manière qu'elle soit située au foyer de la parabole. Quelles sont les coordonnées de l'emplacement de la caméra?

Vue de côté de la traversée d'un canyon



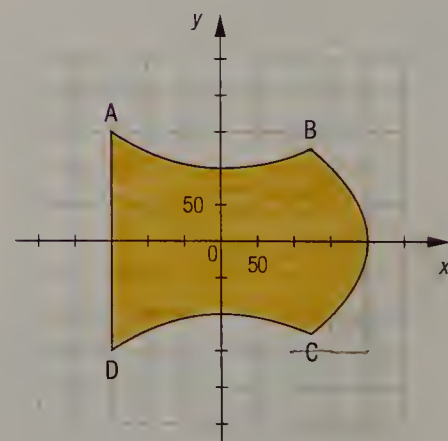
Le 13 juillet 2009, dans le Vieux-Québec, Ramon Kevink Jr franchit les 230 m qui séparent l'édifice Price du château Frontenac sur un fil de fer tendu à une hauteur de 50 m.

13

Lors de la conception d'un meuble, un ébéniste représente certaines pièces dans un plan cartésien avant de les fabriquer. Le graphique ci-contre représente le dessus d'une table. Les graduations sont en centimètres. Le pourtour de la table est délimité par des courbes dont les équations sont :

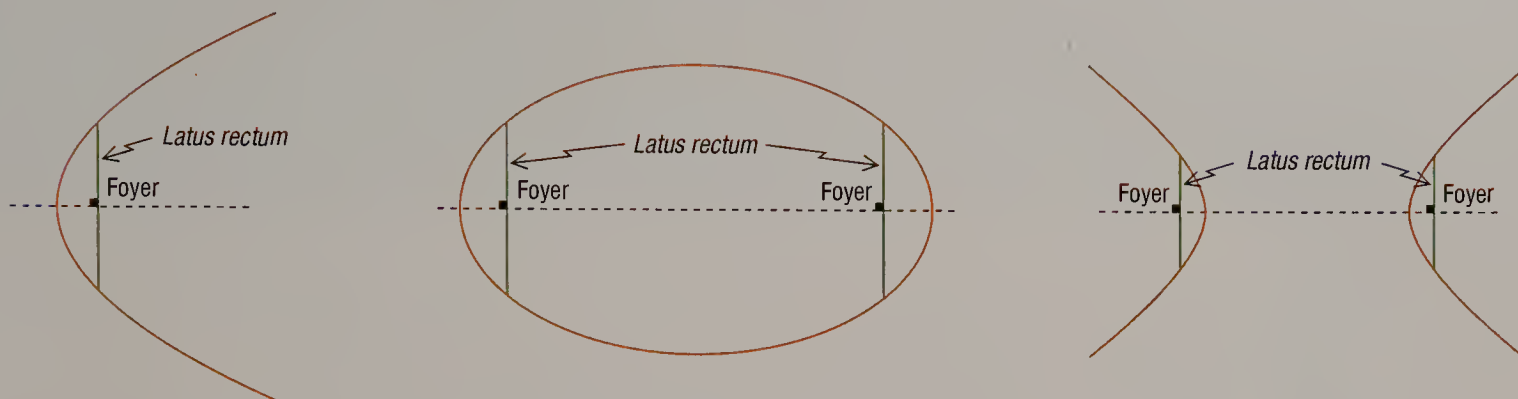
- $\frac{x^2}{22\,500} - \frac{y^2}{10\,000} = -1$
- $y^2 = -200(x - 200)$
- $x = -150$

Dessus d'une table



- Déterminez les coordonnées :
 - du point A;
 - du point B;
 - du point C;
 - du point D.
- Déterminez les dimensions minimales d'une pièce de bois rectangulaire dans laquelle on peut découper ce dessus de table.

- 14** **LATUS RECTUM** Le *latus rectum* est un segment qui passe par le foyer ou l'un des foyers d'une conique comme le montrent les illustrations ci-dessous.



Dans chaque cas, calculez la longueur du *latus rectum* de chacune des coniques correspondant aux équations suivantes.

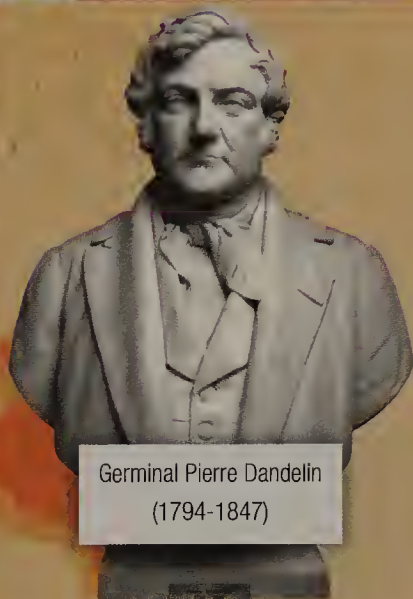
a) $(x - 20)^2 = -16(y - 25)$ b) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ c) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = -1$

- 15** **ZONE D'ATERRISSAGE** Le pourtour de la zone d'atterrissage possible d'une sonde spatiale est de forme elliptique. Les scientifiques ont représenté cette situation dans un plan cartésien afin d'assurer le bon déroulement de la mission de cette sonde. Voici des renseignements qu'ils ont recueillis.

- L'équation de l'ellipse qui correspond au pourtour de la zone d'atterrissage est $\frac{x^2}{40\,000} + \frac{y^2}{400} = 1$.
- L'équation de la droite qui correspond à la trajectoire de la sonde est $y = 0,05x + 5$.
- La sonde s'est posée exactement sur le pourtour de la zone d'atterrissage.

Déterminez les coordonnées des points d'atterrissage possibles de la sonde.

Malgré une étude approfondie du relief de la surface martienne, la sonde *Viking 1* s'est posée à quelques mètres d'un rocher mesurant 3 m de largeur sur 1 m de hauteur. Selon les études préalables, le site ne devait pas contenir de roches de plus de 15 cm de hauteur. Cette mauvaise évaluation du sol aurait pu compromettre la mission.



Germinal Pierre Dandelin
(1794-1847)

Sa vie

Germinal Pierre Dandelin est un mathématicien belge qui a principalement travaillé en géométrie. Au lycée, à l'âge de 19 ans, il termine ses études et remporte le premier prix de mathématiques spéciales. Ses travaux lui permettent de démontrer plusieurs propriétés des coniques. À l'âge de 22 ans, ses connaissances sur les coniques l'amènent à participer à la construction de deux télescopes dans la ville de Namur. En 1825, malgré son jeune âge, il est élu à l'Académie royale des sciences de Bruxelles.

En 1813, il interrompt temporairement sa carrière de mathématicien et s'engage dans l'armée napoléonienne. Après la défaite de Napoléon, il poursuit une carrière militaire comme ingénieur et comme professeur. En 1835, alors qu'il sert dans l'armée belge, il participe à la fortification des environs des villes de Namur, de Liège et de Bruxelles.

An Incident at the Battle of Waterloo in 1815, huile sur canevas, œuvre de Thomas Jones Barker (1815-1882). La bataille de Waterloo, qui a eu lieu le 18 juin 1815, a été la dernière à laquelle Napoléon Bonaparte a pris part. Défait par les Anglais et les Prussiens, il a abdiqué quelques jours plus tard.



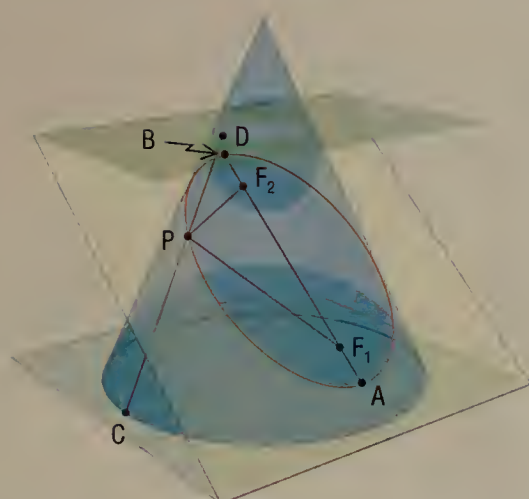
Les sphères de Dandelin

En 1822, Dandelin définit les coniques à l'aide de sphères, appelées aujourd'hui sphères de Dandelin, qui sont tangentes à la fois à une surface conique et à un plan. Son approche consiste à définir les coniques à l'aide de leurs foyers et de leur directrice.

Comme le montrent les figures ① et ②, si une ellipse ou une hyperbole est définie par l'intersection d'un plan et d'une surface conique, alors :

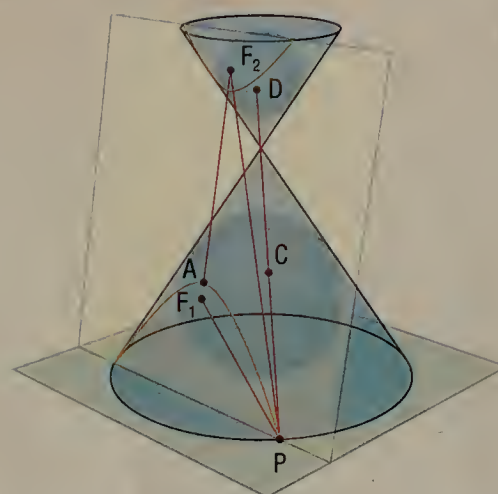
- il existe deux sphères qui sont à la fois tangentes au cône et au plan ;
- les points de tangence des deux sphères et du plan correspondent aux foyers F_1 et F_2 de la conique ;
- $m \overline{CP} = m \overline{PF_1}$ et $m \overline{DP} = m \overline{PF_2}$.

Figure ①



$$m \overline{PF_1} + m \overline{PF_2} = m \overline{CD}$$

Figure ②

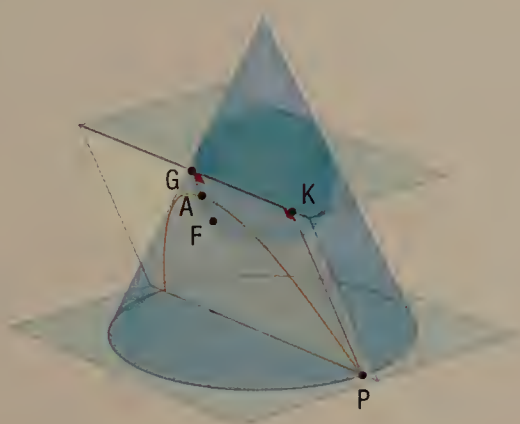


$$m \overline{PF_2} - m \overline{PF_1} = m \overline{CD}$$

Comme le montre la figure ③, si une parabole est définie par l'intersection d'un plan et d'une surface conique, alors :

- il existe une sphère à la fois tangente au cône et au plan ;
- le point de tangence de la sphère et du plan correspond au foyer F de la parabole ;
- la droite qui passe par les points G et K correspond à la directrice de la parabole.

Figure ③



1. Dans la figure ①, $m \overline{PD} = 29,6$ cm, $m \overline{PC} = 10,4$ cm et $m \overline{AF_1} = 4$ cm.

Déterminez la mesure du plus grand axe et celle du plus petit axe de l'ellipse.

2. Dans la figure ②, $m \overline{PC} = 8,8$ cm, $m \overline{PD} = 32,8$ cm et $m \overline{AF_1} = 1$ cm.

Déterminez la distance entre les deux foyers de l'hyperbole.

3. Dans la figure ③, $m \overline{GK} = 60$ cm et $m \overline{PK} = 87$ cm.

Déterminez la distance entre le foyer et le sommet de la parabole.

La profession

Dans le cadre de leur travail, les acousticiens proposent des solutions qui permettent de diminuer ou d'éliminer la pollution sonore. Ils participent à l'élaboration des plans d'aménagement urbain afin d'atténuer les bruits ambiants causés notamment par les avions, les trains ou les automobiles. Dans les usines, les acousticiens modifient parfois l'environnement de travail des ouvriers afin de maintenir le bruit à un niveau acceptable. Ils travaillent également à améliorer la propagation du son dans des salles de spectacles ou sur des scènes extérieures.



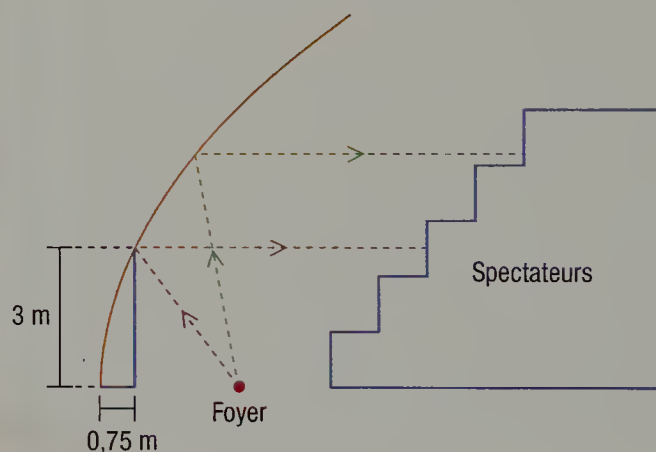
Acousticiens testant les propriétés acoustiques sur un modèle de salle de concert dans une chambre anéchoïque. Comme les parois de ces chambres d'essais ne réfléchissent pas les ondes sonores, il est possible de procéder à des mesures acoustiques sans interférences.

L'architecture acoustique

Dès la conception d'une salle de spectacle ou d'un auditorium, les acousticiens travaillent en équipe avec les ingénieurs et les architectes pour maximiser la qualité sonore et minimiser l'écho. Les ondes sonores se réfléchissent différemment selon qu'elles se répercutent sur une paroi parabolique, elliptique ou hyperbolique. Les schémas ci-contre représentent les trajectoires des ondes sonores dans deux salles de spectacles.

Les Romains ont tenu compte des propriétés de répercussion du son lorsqu'ils ont construit des amphithéâtres de forme elliptique.

Salle de spectacle ①
Paroi parabolique



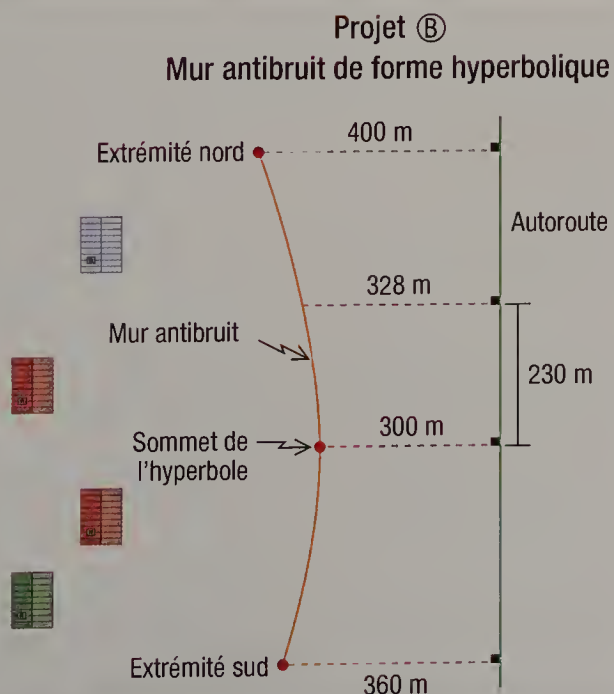
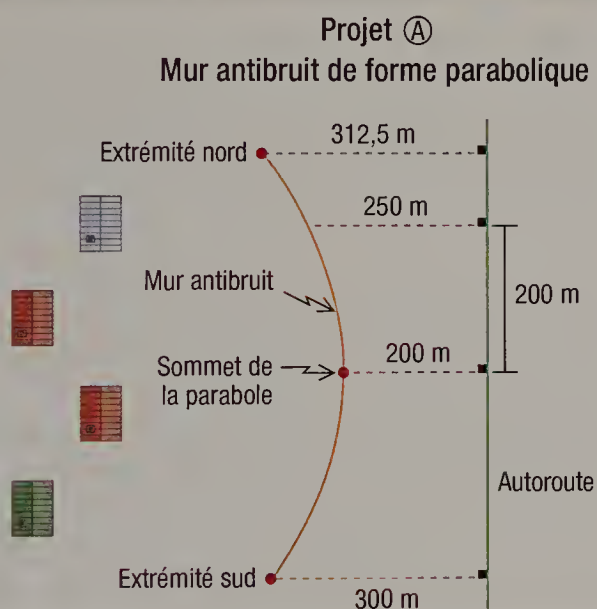
Salle de spectacle ②
Paroi elliptique



L'installation de murs antibruit permet d'atténuer les inconvénients liés à la circulation urbaine.

La pollution sonore

Lors de la réalisation de certains projets d'aménagement urbain, les acousticiens sont appelés à évaluer le niveau sonore environnant et à proposer des solutions qui permettent de diminuer ou d'éliminer les inconvénients dus à une exposition prolongée au bruit. Afin de contrôler la pollution sonore, les acousticiens suggèrent parfois d'ériger un mur antibruit, par exemple le long d'une autoroute. On a représenté ci-dessous deux projets à l'étude dans lesquels une acousticienne propose l'installation de murs antibruit.



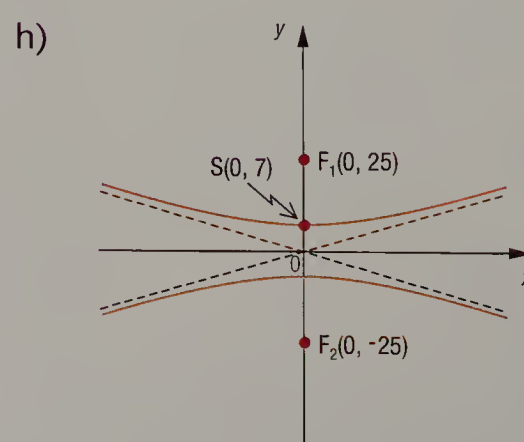
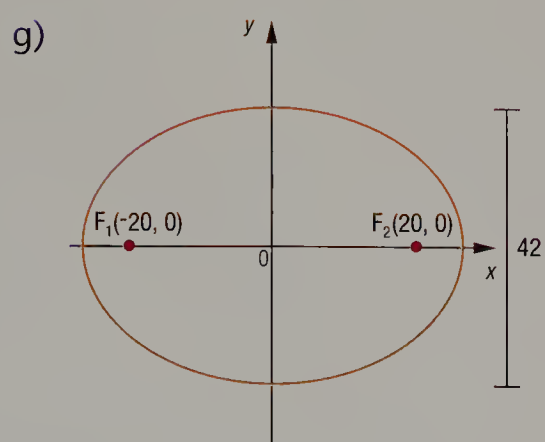
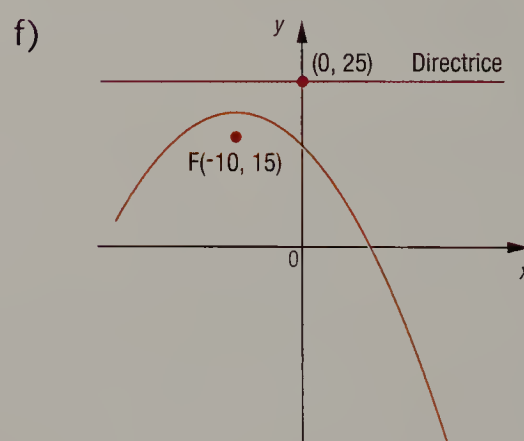
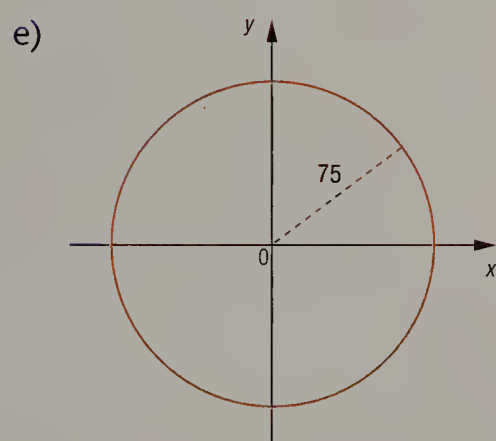
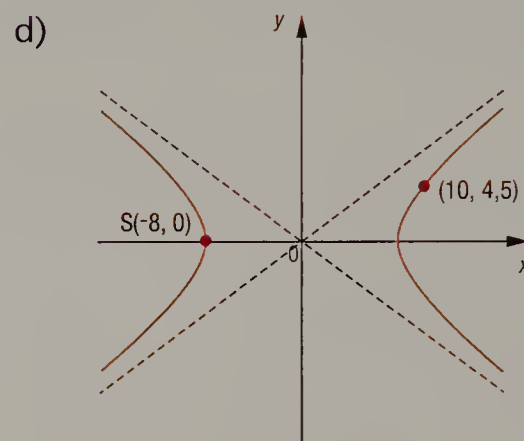
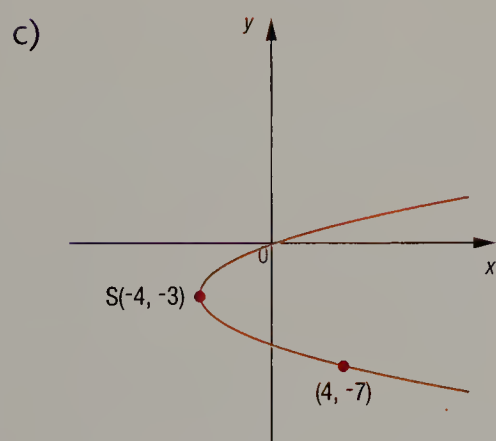
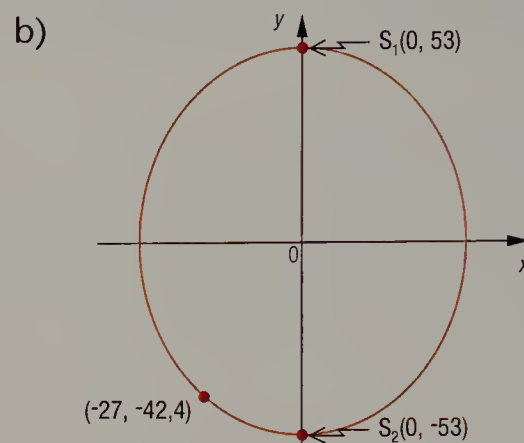
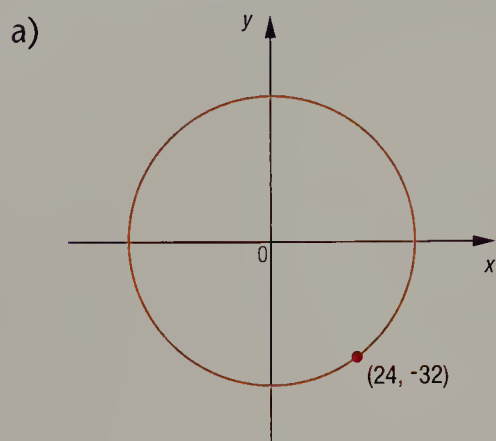
1.

- Selon vous, où devrait-on installer les enceintes acoustiques dans chacune des salles de spectacles pour optimiser la qualité du son ?
- 1) Déterminez la distance minimale qui sépare le foyer de la parabole de la paroi dans la salle de spectacle ①.
2) Sachant que la spectatrice représentée dans la salle de spectacle ② se trouve à l'un des foyers de l'ellipse, déterminez la distance qui la sépare de l'autre foyer.

2.

- Sachant que dans le projet ①, l'autoroute correspond à la directrice de la parabole, déterminez la distance qui sépare l'extrémité nord de l'extrémité sud.
- Sachant que dans le projet ②, l'autoroute passe par le sommet d'une des branches de l'hyperbole, déterminez la distance qui sépare l'extrémité nord de l'extrémité sud.

1 Établissez l'équation de chaque conique illustrée ci-dessous, où F est un foyer et S, un sommet.



2 Dans chaque cas :

- 1) identifiez la conique définie par l'équation donnée;
- 2) si cela s'applique, déterminez:
 - i) les coordonnées du ou des sommets;
 - ii) les coordonnées du ou des foyers;
 - iii) l'équation de chacune des asymptotes.

a) $(x - 20)^2 = y - 10$ b) $\frac{x^2}{12,25} + \frac{y^2}{156,25} = 1$ c) $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{1296} = -1$

d) $(y + 9)^2 = -96(x + 2)$ e) $\frac{x^2}{506,25} - \frac{y^2}{196} = 1$ f) $\frac{x^2}{3721} + \frac{y^2}{121} = 1$

3 Dans chaque cas, établissez l'équation de la conique d'après les renseignements donnés.

- a) Cercle centré à l'origine passant par le point $(-10, -24)$.
- b) Ellipse centrée à l'origine dont le plus grand axe, vertical, mesure 66 unités et le plus petit axe, horizontal, mesure 48 unités.
- c) Ellipse centrée à l'origine qui passe par le point $(-20, 0)$ et dont les coordonnées d'un des foyers sont $(0, -29)$.
- d) Parabole dont l'équation de la directrice est $x = -5$ et dont les coordonnées du foyer sont $(-1, 8)$.
- e) Parabole qui passe par le point $(-6, 23)$ et dont les coordonnées du sommet sont $(12, -4)$ et l'équation de l'axe de symétrie est $x = 12$.
- f) Hyperbole centrée à l'origine dont l'équation d'une des asymptotes est $y = \frac{35}{12}x$ et les coordonnées d'un des foyers sont $(0, -74)$.
- g) Hyperbole centrée à l'origine qui passe par le point $(-14, 0)$ et dont les coordonnées d'un des foyers sont $(26,5, 0)$.

4 Dans chaque cas, déterminez les coordonnées du ou des foyers.

a) $\frac{x^2}{1369} + \frac{y^2}{144} = 1$ b) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = -1$ c) $(y + 4)^2 = -12(x - 5)$

d) $(x + 3)^2 = -2y$ e) $\frac{x^2}{56,25} + \frac{y^2}{72,25} = 1$ f) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

5 Représentez graphiquement chaque inéquation.

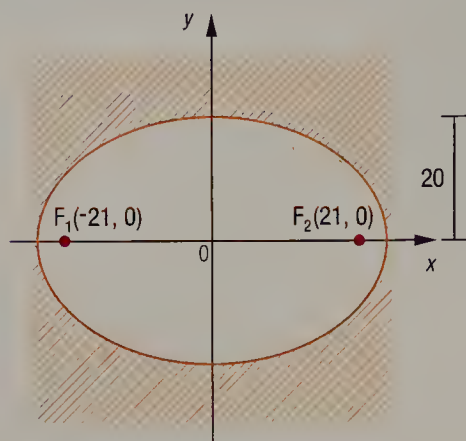
a) $x^2 + y^2 \geq 225$ b) $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{36} < 1$ c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \geq 1$

d) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} \leq 1$ e) $(y - 4)^2 < 0,5(x + 8)$ f) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} \leq -1$

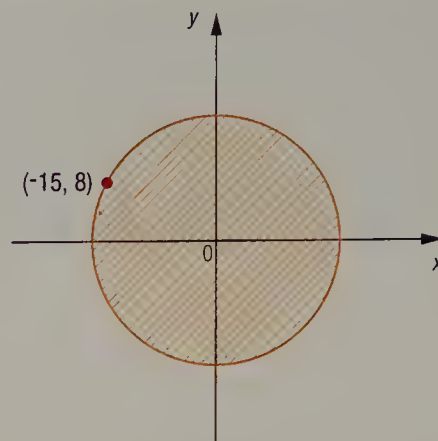
6

Établissez l'inéquation associée à chacune des représentations graphiques ci-dessous, où F est un foyer et S, un sommet.

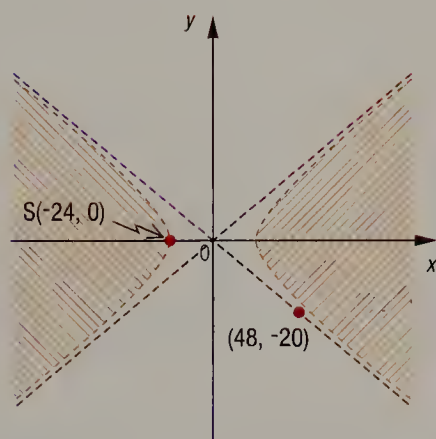
a)



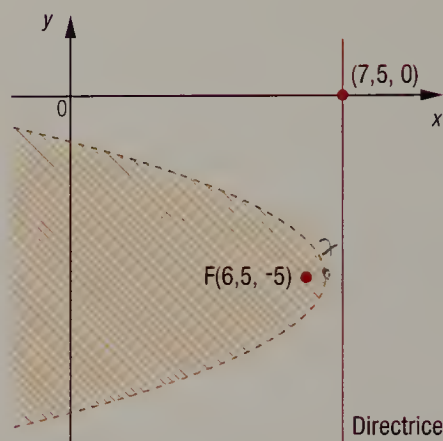
b)



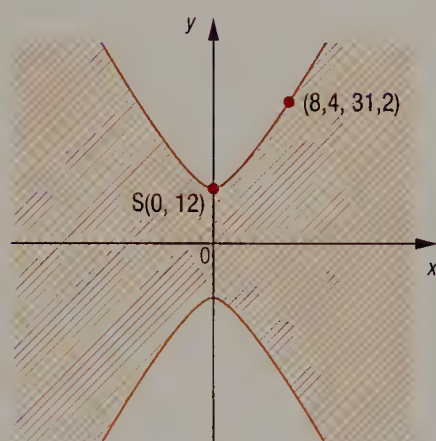
c)



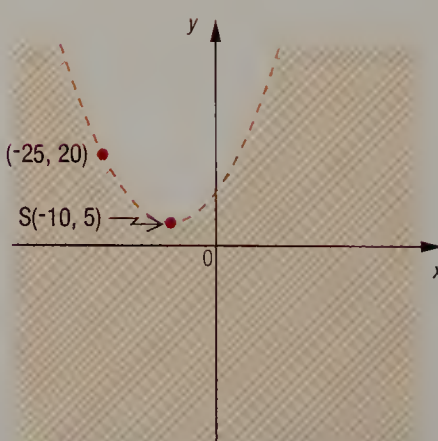
d)



e)



f)



7

Dans chaque cas, évaluez graphiquement les coordonnées des points d'intersection des deux coniques définies par les équations suivantes.

a) $(y + 3)^2 = 4(x + 12)$

b) $(x - 2)^2 = 6(y - 3)$

c) $\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{64} = 1$

$$\frac{x^2}{2,25} - \frac{y^2}{4} = -1$$

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$(y - 6)^2 = -4(x - 4)$$

8 Complétez le tableau suivant.

Équation de la conique	Coordonnées du ou des sommets	Coordonnées du ou des foyers
$\frac{x^2}{6724} + \frac{y^2}{324} = 1$		
$(y - 12)^2 = -9(x + 4)$		
$\frac{x^2}{256} - \frac{y^2}{3969} = -1$		
$(x + 9)^2 = 0,5(y + 5)$		
$\frac{x^2}{196} - \frac{y^2}{506,25} = 1$		

9 Dans chaque cas, représentez graphiquement l'ensemble-solution du système d'inéquations.

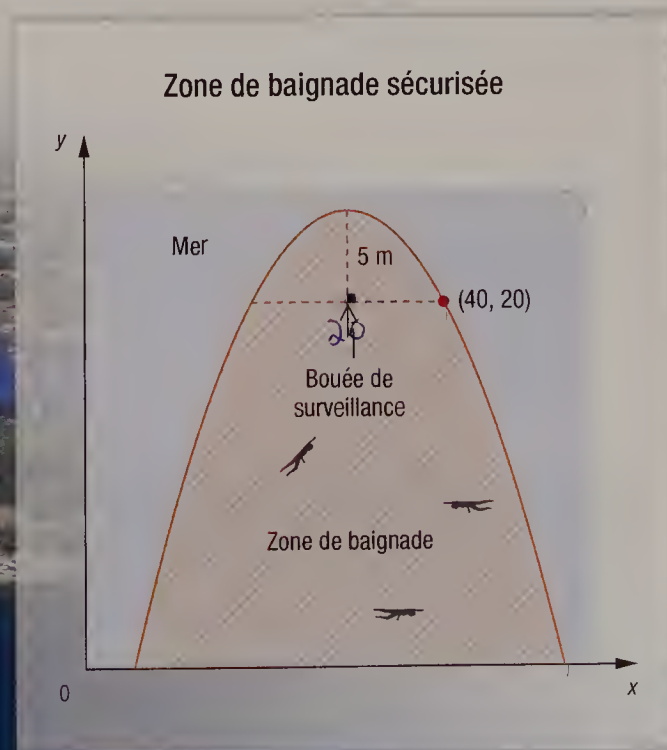
a) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{225} \leq 1$
 $y^2 \leq x + 4$

b) $x^2 \leq 12(y + 15)$
 $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{49} > -1$

c) $x^2 + y^2 < 169$
 $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} > 1$

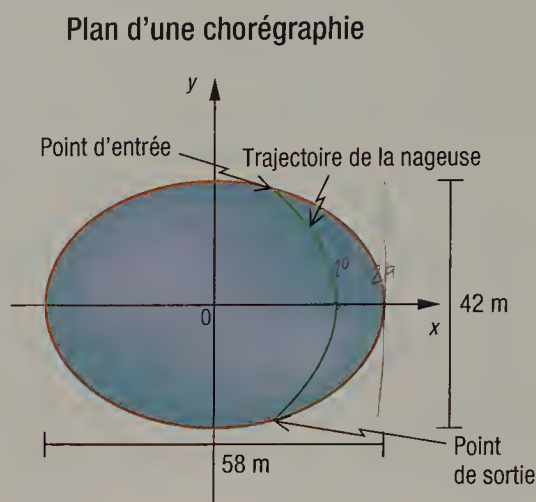
10 Des filets sont parfois installés en mer pour empêcher les requins de s'approcher des côtes. On a représenté dans un plan cartésien une zone de baignade sécurisée par un filet déployé en forme de parabole. Sachant que la bouée de surveillance est ancrée au foyer de la parabole, déterminez l'inéquation associée à la zone de baignade sécurisée.

Vue aérienne de la plage de Shark Bay, à Sydney, en Australie, et de son filet de protection contre les requins.



11

Une chorégraphe prépare un spectacle de nage synchronisée. Pour faciliter la préparation du spectacle, elle a représenté la piscine de forme elliptique, ainsi que la trajectoire parabolique d'une nageuse, dans le plan cartésien ci-dessous où les graduations sont en mètres.



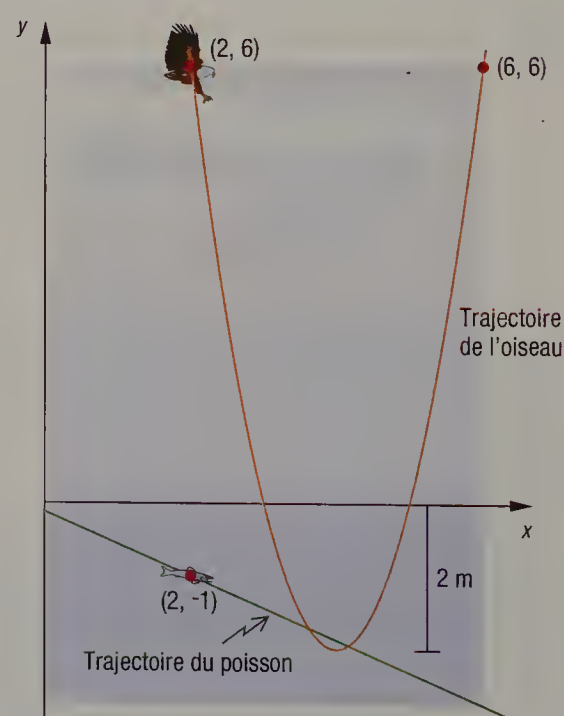
- a) Établissez l'équation de la parabole associée à la trajectoire de la nageuse sachant qu'elle passe par l'un des foyers de l'ellipse et que sa directrice passe par l'un des sommets de l'ellipse.
- b) Déterminez les coordonnées :
 - 1) du point d'entrée de la nageuse;
 - 2) du point de sortie de la nageuse.

12

Du haut des airs, un oiseau aperçoit un poisson et plonge afin de le capturer. On a représenté cette situation dans le plan cartésien ci-contre où les graduations sont en mètres.

- a) Établissez l'équation de :
 - 1) la parabole qui représente la trajectoire de l'oiseau;
 - 2) la droite associée à la trajectoire du poisson sachant qu'elle passe par le foyer de la parabole.
- b) Déterminez les coordonnées des points où l'oiseau pourrait capturer le poisson.

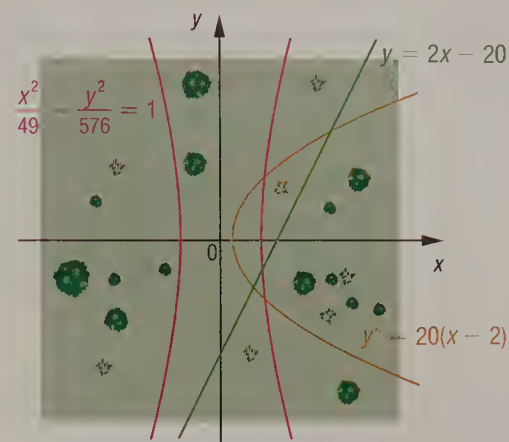
Trajectoires de l'oiseau et du poisson



L'aigle pêcheur est le seul oiseau de proie au monde qui se nourrit uniquement de poissons vivants.

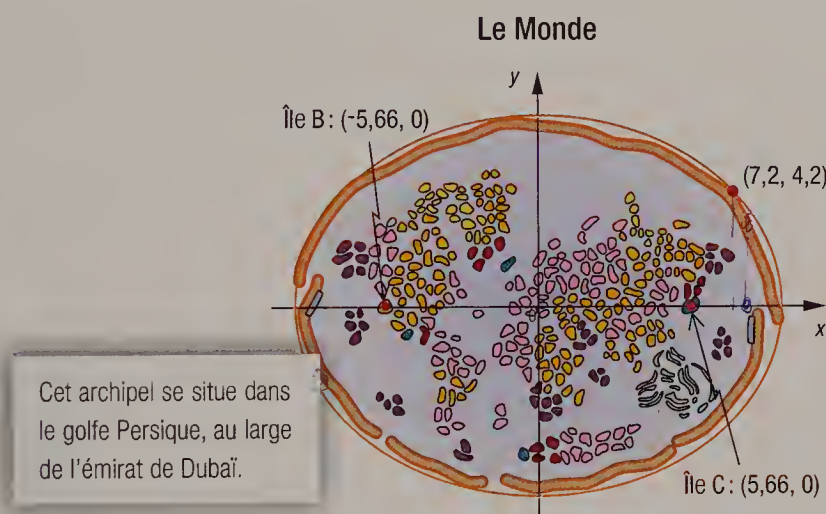
13

On a illustré, dans le plan cartésien ci-contre, différents sentiers d'hébertisme. Déterminez les coordonnées des points où les sentiers se croisent.



14

LE MONDE DE DUBAÏ En 2003, les Émirats arabes unis ont commencé la construction d'un projet d'envergure : Le Monde. Il s'agit d'un archipel de 300 îles artificielles, qui représente la carte du monde. Autour des îles, une barrière de pierres en forme d'ellipse est érigée afin de les protéger des vagues. En représentant cet archipel dans un plan cartésien, dans lequel les graduations sont en kilomètres, on constate que les îles B et C sont situées aux foyers de l'ellipse.



- Établissez l'inéquation qui correspond à la région associée à cet archipel.
- Déterminez la longueur du grand axe et celle du petit axe de l'ellipse.
- Un avion, dont la trajectoire correspond à la droite d'équation $y = -0,4x - 1$, survole l'archipel afin de prendre des photos des îles. Déterminez la distance parcourue par l'avion au-dessus de l'archipel.

15

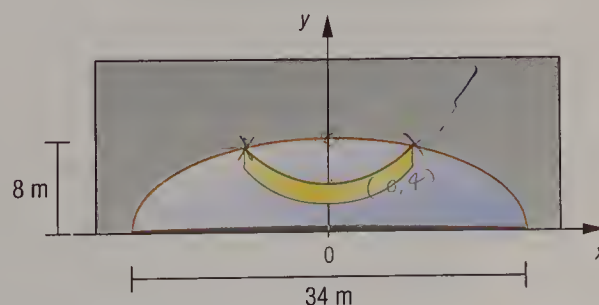
Une banderole, installée au-dessous d'un viaduc ayant la forme d'une demi-ellipse, prend la forme d'une parabole. La hauteur maximale du viaduc est de 8 m et la largeur de sa base est de 34 m.

Dans le plan cartésien ci-contre :

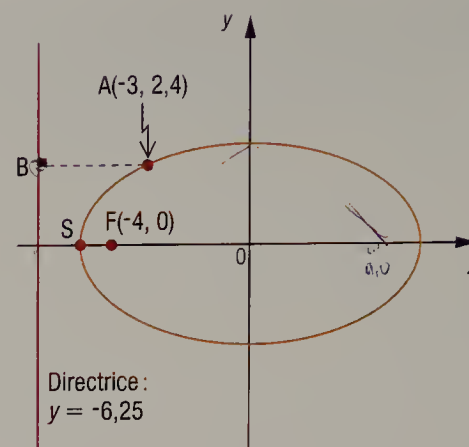
- l'axe des abscisses est superposé à la directrice de la parabole verte ;
- les coordonnées du foyer de la parabole verte et celles d'un des sommets de l'ellipse sont les mêmes.

Déterminez les coordonnées des deux points d'ancrage de la banderole.

Installation d'une banderole



- 16 EXCENTRICITÉ D'UNE ELLIPSE** L'excentricité est un rapport qui permet de déterminer l'allongement d'une ellipse. Plus l'excentricité d'une ellipse se rapproche de zéro, plus la courbe tend vers un cercle. L'excentricité de l'ellipse illustrée dans le plan cartésien ci-contre correspond au rapport $\frac{m \overline{FA}}{m \overline{AB}}$.



- Déterminez:
 - l'excentricité de cette ellipse;
 - les coordonnées du sommet S de l'ellipse.
- Calculez la valeur du rapport $\frac{\text{distance de l'origine au foyer F}}{\text{distance de l'origine au sommet S}}$. Que remarquez-vous?
- D'après les résultats obtenus en b), quelle est l'excentricité d'une ellipse dont l'équation est $\frac{x^2}{576} + \frac{y^2}{625} = 1$?

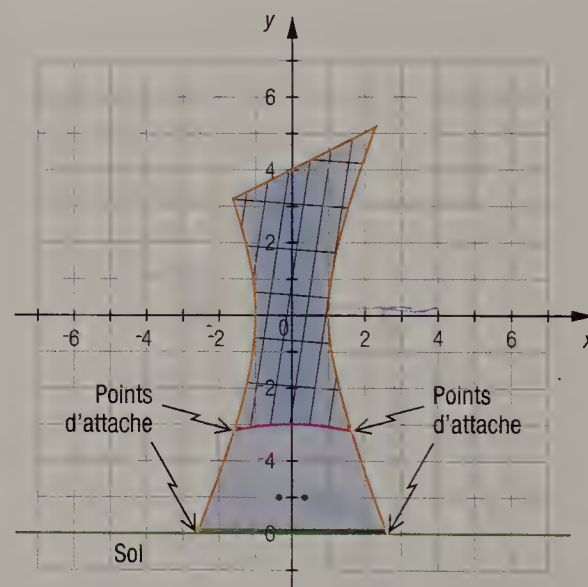
- 17 CROOKED HOUSE** Certains architectes utilisent des coniques pour créer des immeubles. Dans le plan cartésien ci-contre où les graduations sont en mètres, on a représenté la façade d'un immeuble. On constate que:

- les murs ont la forme d'une hyperbole dont l'équation d'une des asymptotes est $y = 2,5x$;
- le haut des portes prend la forme d'une parabole dont la directrice passe par les foyers de l'hyperbole.

Déterminez:

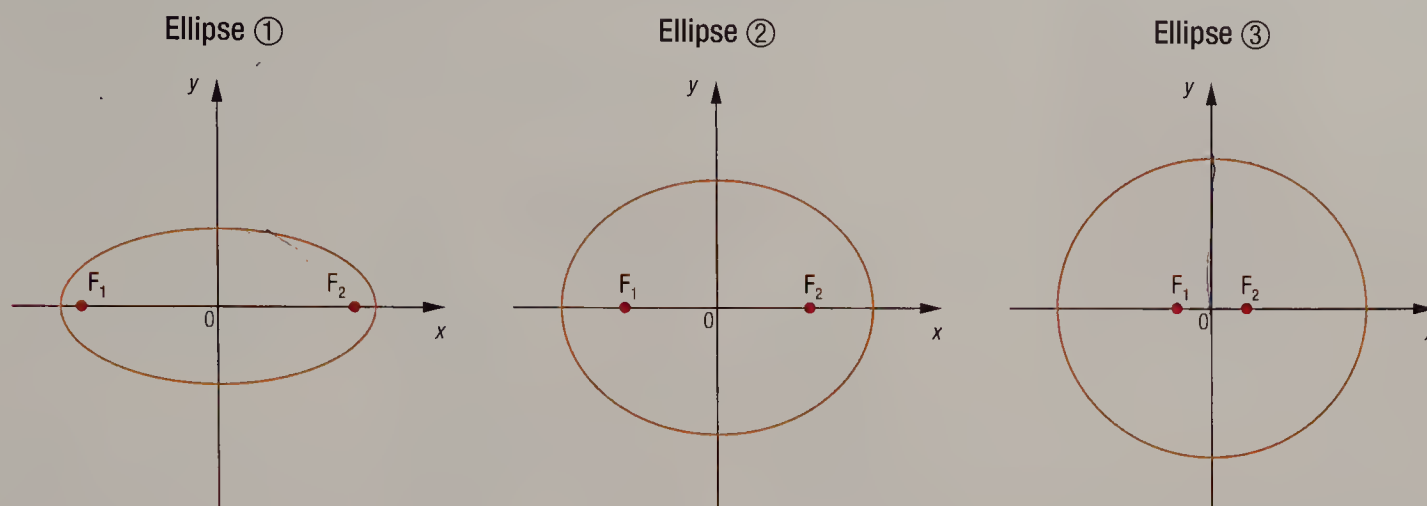
- la hauteur maximale de l'immeuble;
- les coordonnées de chacun des points d'attache des portes.

Façade d'un immeuble



Cet immeuble à l'architecture tordue, la Crooked House, est situé à Sopot, près de Gdansk, en Pologne. Construit en 2003, il abrite des commerces au rez-de-chaussée et des bureaux à l'étage.

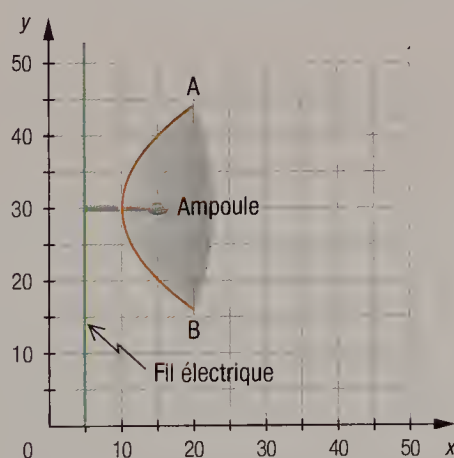
- 18** On a représenté ci-dessous trois ellipses centrées à l'origine du plan cartésien et leurs foyers respectifs F_1 et F_2 .



En observant ces trois ellipses, Joseph affirme qu'un cercle centré à l'origine du plan cartésien est une ellipse dont les foyers sont superposés au centre du cercle. A-t-il raison? Expliquez votre réponse.

- 19** Dans le plan cartésien ci-dessous, où les graduations sont en centimètres, on a représenté la vue de dessus d'un phare d'automobile parabolique.

Vue de dessus d'un phare d'automobile



Le fil électrique qui sert à alimenter l'ampoule correspond à la directrice de la parabole associée à cette situation. Déterminez le diamètre de ce phare d'automobile, soit la distance qui sépare les points A et B.

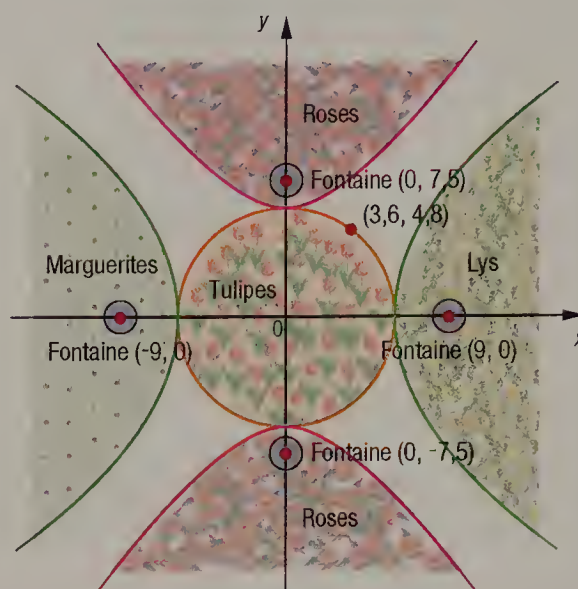


Les phares d'automobiles permettent de produire deux types d'éclairage différents, les feux de croisement ou les feux de route, selon que les rayons lumineux sont renvoyés par la seule partie supérieure du réflecteur ou par toute la surface de ce dernier.

20

Les paysagistes représentent parfois certaines de leurs créations dans un plan cartésien avant de les réaliser sur le terrain. Le graphique ci-dessous représente un aménagement paysager. Les graduations sont en mètres.

Aménagement paysager



Voici des renseignements concernant cet aménagement :

- La région où sont plantées les tulipes est définie par un cercle centré à l'origine.
- La région où sont plantées les roses est associée à une hyperbole.
- La région où sont plantés les lys est définie par une parabole.
- La région où sont plantées les marguerites est définie par une parabole.
- Des fontaines sont installées aux foyers de l'hyperbole et au foyer de chacune des paraboles.

Déterminez l'inéquation qui correspond à la région dans laquelle sont plantés :

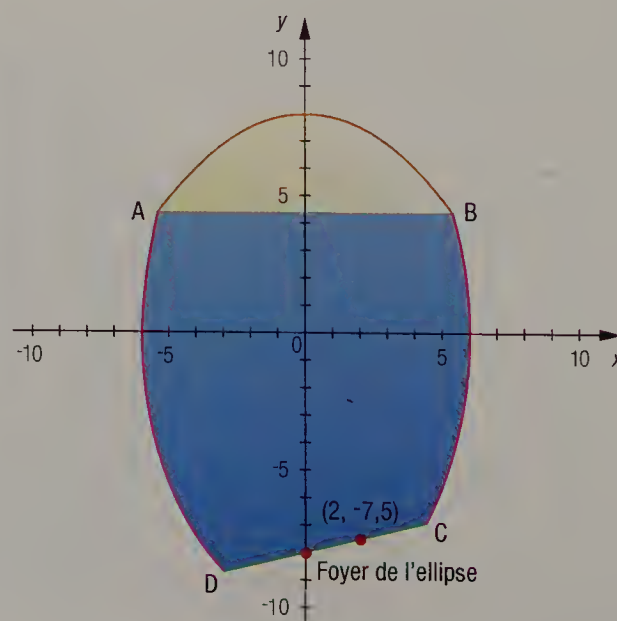
- | | |
|------------------|---------------------|
| a) les tulipes ; | b) les roses ; |
| c) les lys ; | d) les marguerites. |

21

Voici des renseignements concernant le flacon de parfum illustré dans le plan cartésien ci-contre.

- La base DC est un segment.
- Les côtés AD et BC du flacon sont superposés à une ellipse.
- Le dessus du bouchon AB est superposé à une parabole dont la directrice passe par le sommet de l'ellipse.

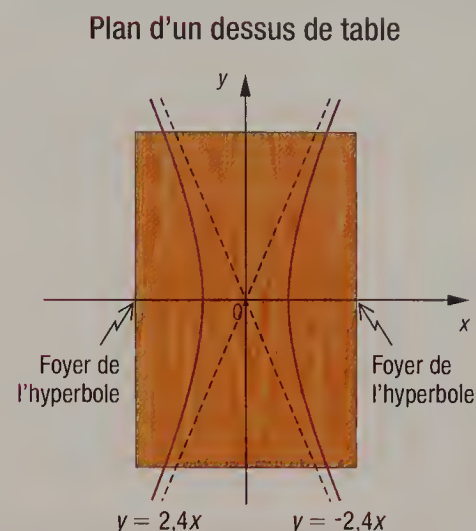
Flacon de parfum



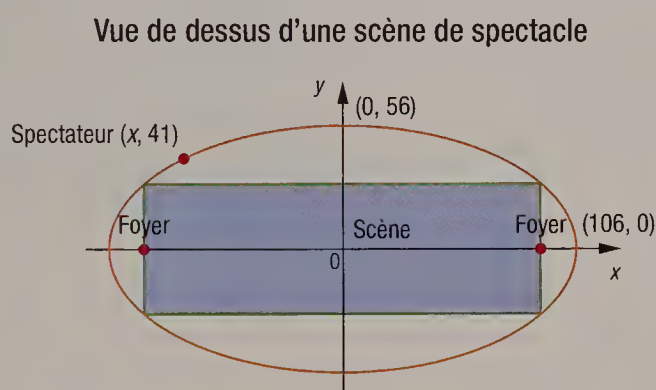
Déterminez les coordonnées des points A, B, C et D.

22 Dans le plan cartésien ci-contre, on a représenté la pièce de bois de 6,5 m sur 10 m dans laquelle sera découpé un dessus de table de forme hyperbolique. Les graduations sont en mètres.

- Établissez l'équation de l'hyperbole associée à ce dessus de table.
- Déterminez, pour ce dessus de table :
 - sa largeur minimale;
 - sa largeur maximale.



23 Pour la tenue d'un spectacle, on doit installer, en suivant une forme elliptique, des clôtures de sécurité autour d'une scène rectangulaire. Des techniciens ont représenté cette situation dans le plan cartésien ci-dessous. D'après leurs calculs, deux côtés de la scène passeront par les foyers de l'ellipse formée par les clôtures. Les graduations sont en mètres.



- Quelles sont les coordonnées des points qui correspondent aux quatre coins de la scène?
- Déterminez la distance qui sépare le spectateur d'un chanteur si celui-ci se trouve sur la scène à l'origine du plan cartésien.

24 **PANNEAUX DE SIGNALISATION** Il existe certaines normes à respecter lors de la fabrication des panneaux de signalisation. Pour concevoir l'un de ceux-ci, les graphistes superposent le centre du panneau illustré ci-dessous à l'origine d'un plan cartésien.



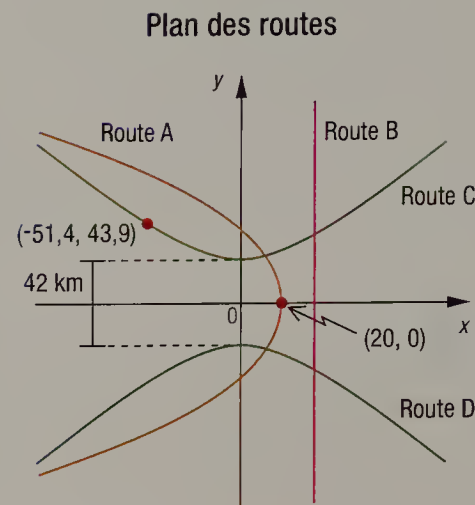
- Établissez l'équation :
 - du cercle extérieur associé à la couronne rouge;
 - du cercle intérieur associé à la couronne rouge.
- Sachant que l'équation de la droite passant par les points A et B est $y = -x + 30$, déterminez les coordonnées des points d'intersection entre cette droite et le cercle intérieur associé à la couronne rouge.



1

Un entrepreneur prépare un devis pour la réparation d'une portion de la route B située entre la route C et la route D illustrées dans le plan cartésien ci-contre, où les graduations sont en kilomètres. Il dispose des renseignements suivants.

- Les routes C et D sont décrites par une hyperbole.
- La route A est décrite par une parabole qui passe par les foyers de l'hyperbole.
- La route B correspond à la directrice de la parabole.



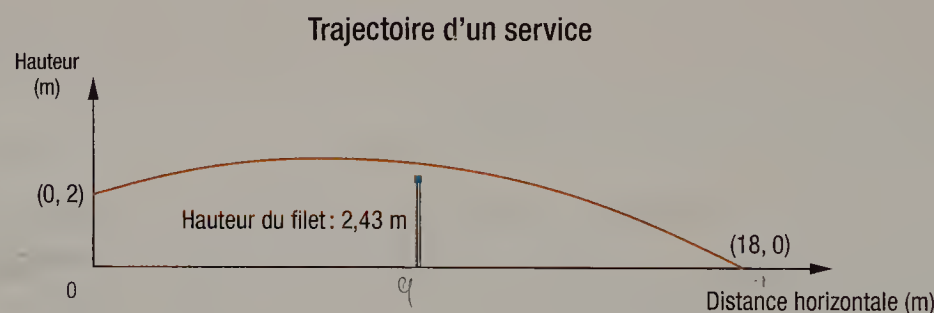
Les réparations qui doivent être effectuées sur cette portion de route coûtent en moyenne 100 000 \$/km. Les fonds alloués pour la réparation de cette route sont de 7 000 000 \$.

Produisez une soumission pour cet entrepreneur en lui indiquant si les fonds alloués sont suffisants.



2

En préparation d'un tournoi de volley-ball, un entraîneur analyse le service de ses joueuses. Voici des renseignements qui concernent la trajectoire parabolique d'un service pratiqué par une joueuse.



Le terrain mesure 18 m de longueur et le filet est situé au milieu du terrain. La hauteur maximale atteinte par le ballon lors de ce service est de 3 m. L'entraîneur évalue que, pour que ce service soit en jeu, le ballon doit passer au plus à 40 cm au-dessus du filet. A-t-il bien évalué la situation? Expliquez votre réponse.



3

Une météorite s'écrase dans une région désertique. Des scientifiques veulent récupérer des fragments de cette météorite afin d'en étudier la composition. Dans un plan cartésien, la zone de recherche correspond à la région commune aux ensembles-solutions des inéquations suivantes.

Zone A	Zone B	Zone C	Zone D
$x^2 + y^2 \geq 25$	$-4(y - 4) \leq (x - 6)^2$	$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} \geq -1$	$y - x \geq -5$

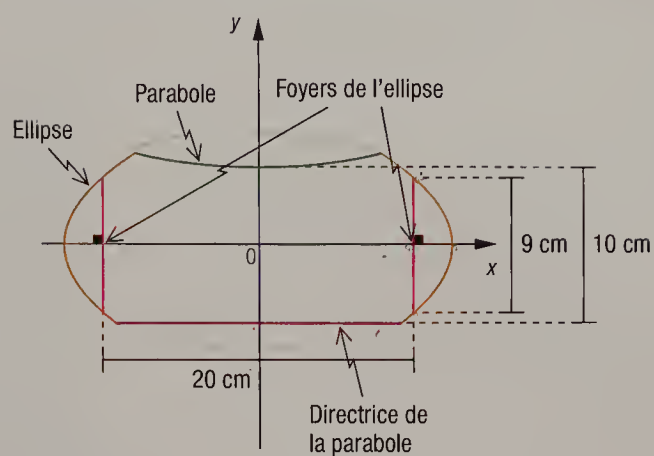
Pour faciliter le travail de l'équipe de recherche, représentez la zone de recherche en indiquant les coordonnées des points d'intersection entre chaque courbe frontière.

La conception d'un volant d'automobile de course exige un travail minutieux. Les concepteurs doivent y intégrer les éléments d'un tableau de bord tout en conservant une ergonomie adaptée au pilotage. On a représenté dans le plan cartésien ci-contre le modèle d'un volant dont le pourtour est défini par certaines coniques.

Déterminez:

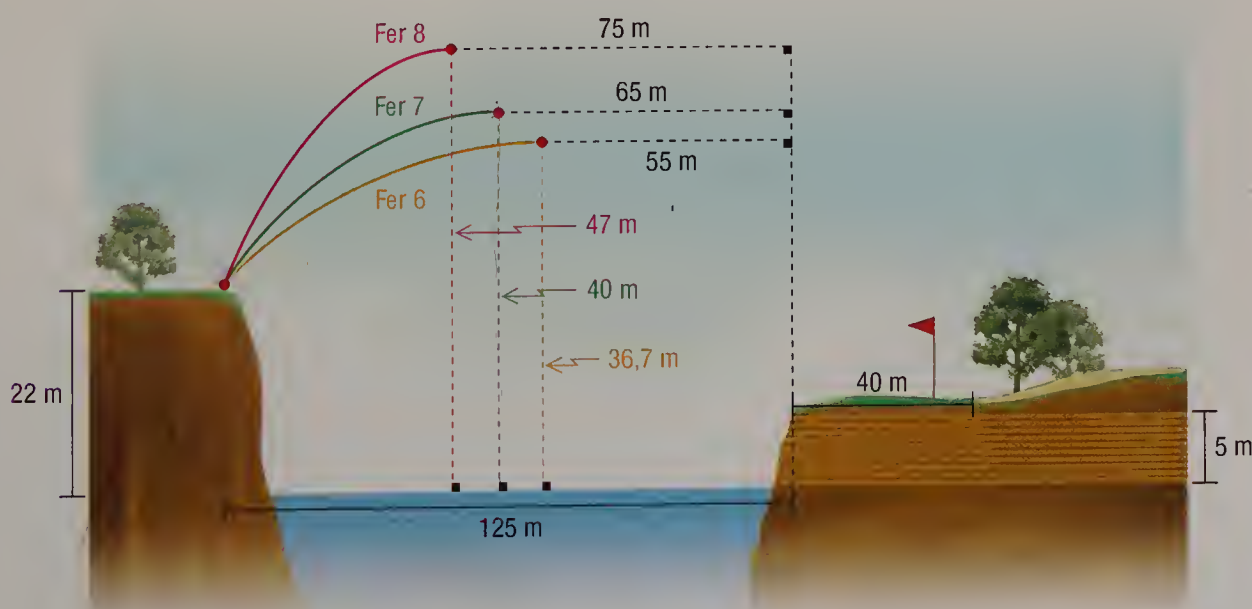
- l'équation de la parabole et celle de l'ellipse;
- les coordonnées du sommet de la parabole et celles des sommets de l'ellipse.

Modèle d'un volant d'automobile



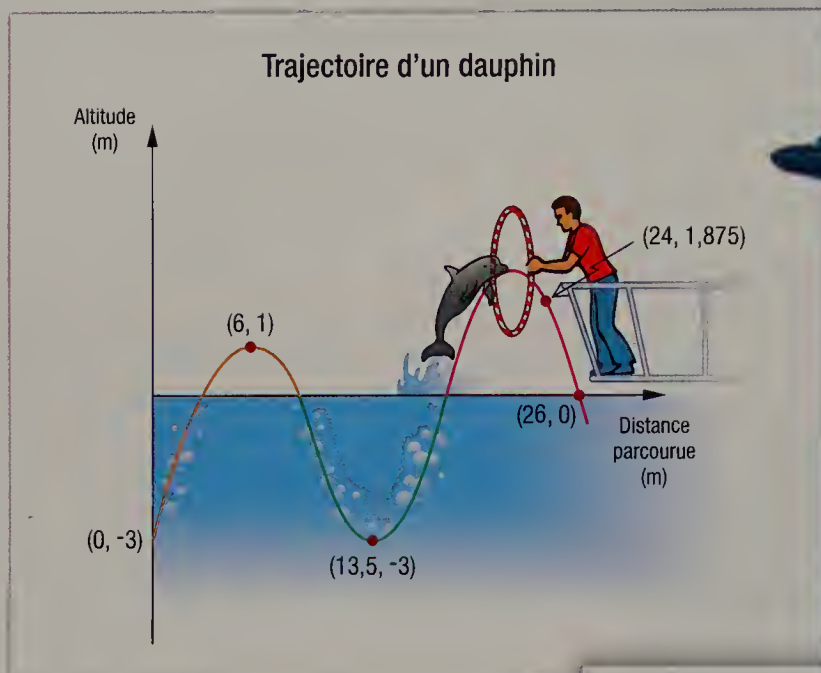
Le volant d'une automobile de formule 1 fournit des données au pilote afin qu'il puisse maximiser la performance de la voiture.

Au golf, l'analyse assistée par ordinateur permet d'étudier, entre autres, l'élan d'un golfeur ou d'une golfeuse, ou la trajectoire d'une balle d'après le type de bâton utilisé. Le schéma ci-dessous montre, pour trois types de fers, une partie de la trajectoire parabolique suivie par une balle de golf. Les mesures indiquées en rose, en vert et en orange correspondent aux hauteurs maximales atteintes par la balle.



Après avoir analysé chacune des trajectoires, recommandez le type de fer qui permettrait d'atteindre le vert en un seul coup.

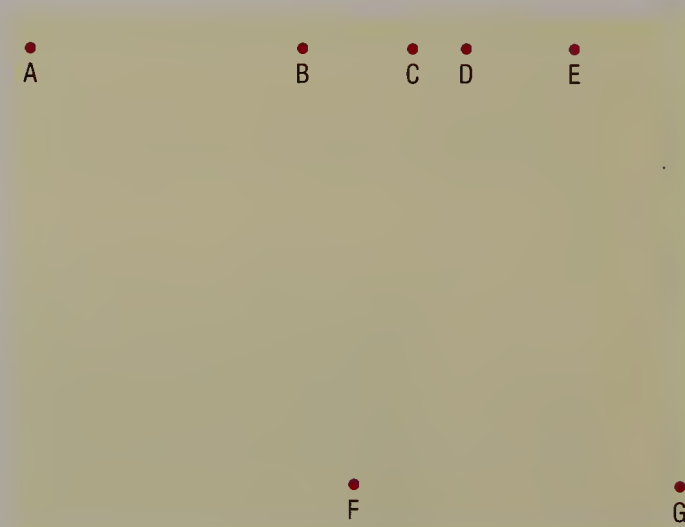
Dans un spectacle aquatique, un dauphin doit se propulser hors de l'eau et passer au centre du cerceau qui est illustré ci-dessous. Quelles sont les coordonnées du point correspondant au centre du cerceau ?



Au moyen de sons émis à diverses fréquences, les grands dauphins sont en mesure de percevoir les obstacles et de chercher de la nourriture. Ils émettent des « clics » qui rebondissent sur les objets ou sur leurs proies. L'écho est capté par leur mâchoire inférieure pour ensuite être transféré à leur oreille interne.

Voici une démarche qui permet de tracer une conique à l'aide d'un compas et du schéma ci-contre.

- Tracez un cercle de centre G dont le rayon correspond à $m \overline{AC}$ et un cercle de centre F dont le rayon correspond à $m \overline{CE}$. Indiquez le ou les points d'intersection entre ces deux cercles.
- Tracez un cercle de centre F dont le rayon correspond à $m \overline{AB}$ et un cercle de centre G dont le rayon correspond à $m \overline{BE}$. Indiquez le ou les points d'intersection entre ces deux cercles.
- Tracez un cercle de centre F dont le rayon correspond à $m \overline{AD}$ et un cercle de centre G dont le rayon correspond à $m \overline{DE}$. Indiquez le ou les points d'intersection entre ces deux cercles.
- Tracez un cercle de centre G dont le rayon correspond à $m \overline{AD}$ et un cercle de centre F dont le rayon correspond à $m \overline{DE}$.

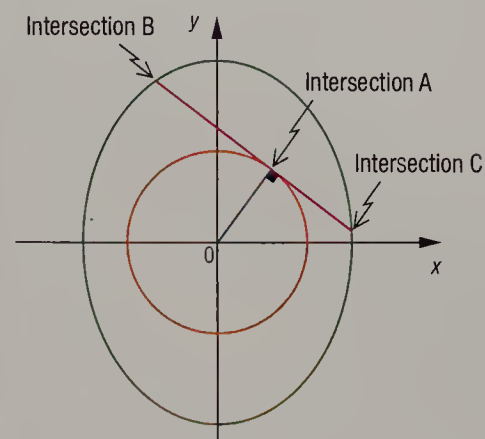


Nommez la conique qu'il est possible de tracer à partir de cette démarche et déterminez ses principales caractéristiques.

Voici des renseignements qui concernent les pistes de ski de fond représentées ci-dessous.

- La piste orange correspond à un cercle de 1000 m de rayon.
- La piste verte est elliptique. Son grand axe est 2 fois plus grand que le diamètre de la piste orange et son petit axe, 1,5 fois plus grand que le diamètre de la piste orange.
- L'équation de la droite associée à la piste bleue est $y = \frac{4}{3}x$.

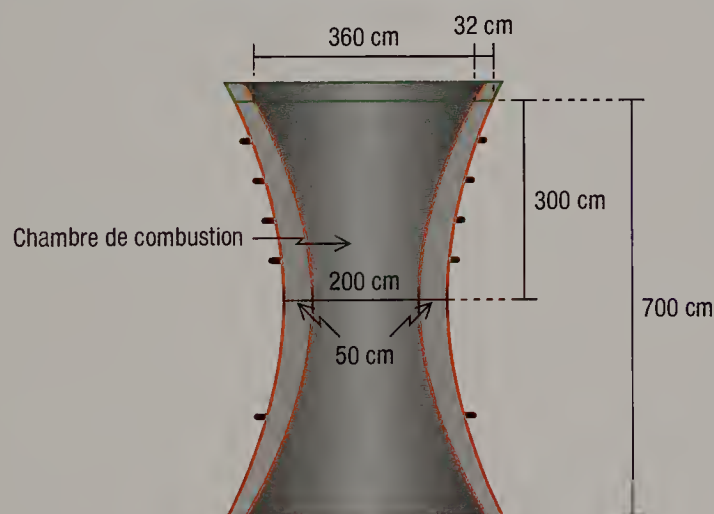
Pistes de ski de fond



Déterminez les coordonnées des points associés aux intersections A, B et C.

TUYÈRE En astronautique, une tuyère est un conduit, placé à la sortie du propulseur d'une fusée, qui permet de transformer l'énergie des gaz de combustion en énergie cinétique. Le schéma suivant représente une coupe transversale d'une tuyère dont les parois latérales intérieure et extérieure sont hyperboliques.

Coupe transversale d'une tuyère



Selon le fabricant, le diamètre de la base de cette tuyère est inférieur à 5,2 m. Confirmez ou réfutez cette affirmation.



Les cinq tuyères d'une fusée Saturn V exposée au Centre spatial John F. Kennedy, en Floride

ALBUM

TABLE DES MATIÈRES

Technologies	230
Calculatrice graphique	230
Tableur	232
Logiciel de géométrie dynamique	234
 Savoirs	236
Notations et symboles	236
Le système international d'unités (SI)	239
Énoncés de géométrie	240
Repères	246

Divers types de calculs

Il est possible d'effectuer des calculs scientifiques et d'évaluer numériquement des expressions algébriques et des expressions logiques.

Calculs scientifiques

```

sqrt(27)          3
pi*5^2           78.53981634
sin(60)          .8660254038
    
```

Expressions logiques

```

1/3=0.3          0
sqrt(216)=6      1
6^2+7^2>8^2      1
    
```

Expressions algébriques

```

5+X              5
-2+Y             -2
5X-2Y^2          17
    
```

Probabilités

1. Menu probabilités.

```

MATH NUM CPX 123
1:NbrAléat
2:Arrangement
3:Combinaison
4:!
5:entAléat(
6:normAléat(
7:BinAléat(
    
```

- Ce menu permet, entre autres, de simuler des expériences aléatoires. Le cinquième choix permet de générer une série de nombres entiers aléatoirement. Syntaxe: entAléat (valeur minimale, valeur maximale, nombre de répétitions).

2. Calculs et résultats.

```

entAléat(0,1,5)
(1 0 1 0 0)
entAléat(1,6,7)
(6 2 5 6 2 3 1)
    
```

- Le premier exemple simule cinq lancers d'une pièce de monnaie où 0 représente pile et 1 représente face. Le second exemple simule sept lancers d'un dé à six faces.

Affichage d'une table de valeurs

1. Éditer les règles.

```

Graph1 Graph2 Graph3
Y1=2^X
Y2=0.5X^2
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=
    
```

- Cet écran permet d'éditer les règles d'une ou de plusieurs fonctions où Y est la variable dépendante et X, la variable indépendante.

2. Définir l'affichage.

```

DEFINIR TABLE
DébTbl=0
Pas=1
Valeurs:Auto Dem
Calculs:Auto Dem
    
```

- Cet écran permet de définir l'affichage d'une table de valeurs en y indiquant la valeur de départ de X et le pas de variation en X.

3. Afficher la table de valeurs.

X	Y1	Y2
0	1	0
1	2	.5
2	4	2
3	8	4.5
4	16	8
5	32	12.5
6	64	18

X=0

- Cet écran permet d'afficher la table de valeurs des règles définies à l'écran d'édition des fonctions.

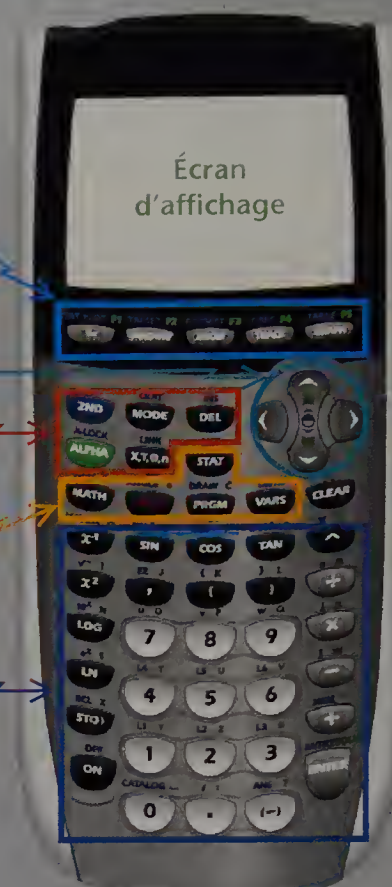
Touches graphiques

Touches de déplacement du curseur

Touches d'édition

Touches de menus

Touches de calcul scientifique



Affichage d'un graphique

1. Éditer les règles.

```
Graph1 Graph2 Graph3
Y1=0.5X+1
Y2=4X-3
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=
```

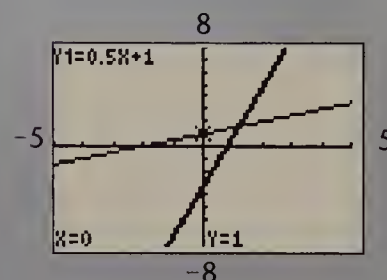
- Au besoin, il est possible de modifier l'aspect (trait normal, gras ou pointillé, par exemple) d'une courbe associée à une règle.

2. Définir l'affichage.

```
FENETRE
Xmin=-5
Xmax=5
Xgrad=1
Ymin=-8
Ymax=8
Ygrad=1
Xres=1
```

- Cet écran permet de définir l'affichage de l'écran graphique en délimitant la portion du plan cartésien désirée: Xgrad correspond au pas de graduation de l'axe des abscisses et Ygrad à celui des ordonnées.

3. Afficher le graphique.



- Cet écran permet d'afficher le graphique des règles définies à l'écran d'édition des fonctions. Au besoin, il est possible de déplacer le curseur le long des courbes tout en visualisant ses coordonnées.

Affichage d'un nuage de points et calculs statistiques

1. Entrée des données.

L1	L2	L3	3
1	5		
2	4		
3	2		
4	1		
5	0		
6	-1		
7	-2		
8	-3		
9	-4		
10	-5		

L3(1)=

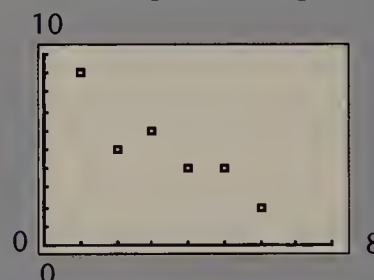
- Cet écran permet d'entrer les données d'une distribution. Pour une distribution à deux caractères, l'entrée des données se fait sur deux colonnes.

2. Choix du diagramme.

```
Graph1 Graph2 Graph3
Aff NAff
Type: [ ] [ ] [ ] [ ]
ListeX:L1
ListeY:L2
Marque: [ ] +
```

- Cet écran permet de choisir le type de diagramme statistique.
 - [] : nuage de points
 - [] : diagramme à ligne brisée
 - [] : histogramme
 - [] : diagramme de quartiles

3. Affichage du diagramme.



- Cet écran permet d'afficher le nuage de points.

4. Calculs statistiques.

```
EDIT [ ] TESTS
1:Stats 1-Var
2:Stats 2-Var
3:Med-Med
4:RegLin(ax+b)
5:RegQuad
6:RegCubique
7:RegQuatre
```

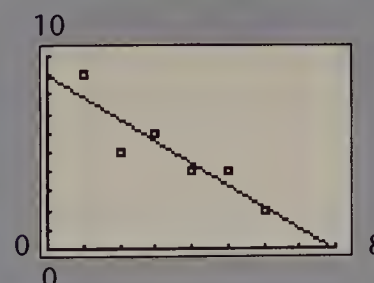
- Ce menu permet d'accéder à différents calculs statistiques dont celui de l'équation de la droite de régression.

5. Régression et corrélation.

```
RegLin(ax+b) L1,
L2,Y1
RegLin
y=ax+b
a=-1.142857143
b=9
r^2=.8163265306
r=-.9035079029
```

- Ces deux écrans permettent d'obtenir l'équation de la droite de régression et le coefficient de corrélation linéaire.

6. Affichage de la droite.



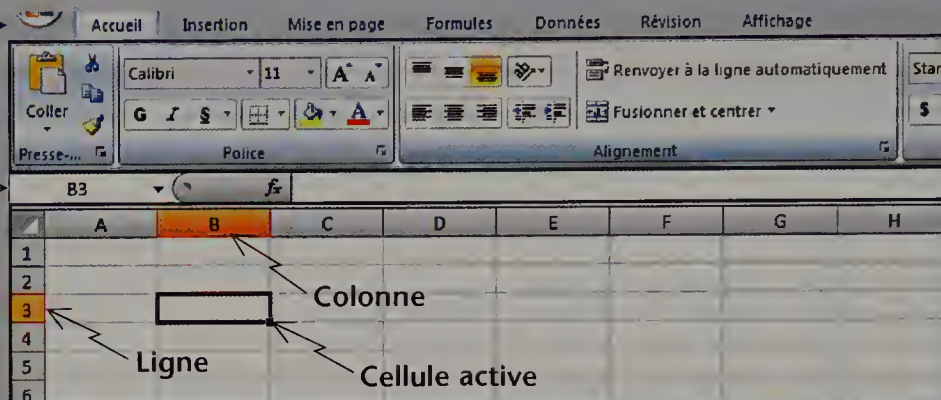
- La droite de régression peut être affichée à même le nuage de points.

Un tableur est aussi appelé un chiffrier électronique. Ce type de logiciel permet d'effectuer des calculs sur des nombres entrés dans des cellules. On utilise principalement le tableur pour réaliser des calculs de façon automatique sur un grand nombre de données, construire des tableaux et tracer des graphiques.

Interface du tableur

Barre de gestion des fichiers et des paramètres du logiciel

Adresse de la cellule active



Barre d'outils

Barre de formules

Feuille de calcul

Colonne
Ligne
Cellule active

Qu'est-ce qu'une cellule ?

Une cellule est l'intersection d'une colonne et d'une ligne. Une colonne est désignée par une lettre majuscule et une ligne est désignée par un nombre. Ainsi, la première cellule en haut à gauche est nommée A1.

Entrée de nombres, de texte et de formules dans les cellules

On peut entrer un nombre, un texte ou une formule dans une cellule après avoir cliqué dessus. L'utilisation d'une formule permet de faire des calculs à partir de nombres déjà entrés dans des cellules. Pour entrer une formule dans une cellule, il suffit de la sélectionner, puis de commencer la saisie par le symbole « = ».

Ex. :

La colonne A contient des données avec lesquelles on désire effectuer des calculs.

Dans un tableur, certaines fonctions sont prédéfinies pour calculer la somme, le minimum, le maximum, le mode, la médiane, la moyenne et l'écart moyen d'un ensemble de données.

	A	B	C	
1	Résultats			
2	27,4	Nombre de données	17	→ =NB(A2:A18)
3	30,15			
4	15	Somme	527	→ =SOMME(A2:A18)
5	33,8			
6	12,3	Minimum	12,3	→ =MIN(A2:A18)
7	52,6			
8	28,75	Maximum	52,6	→ =MAX(A2:A18)
9	38,25			
10	21,8	Mode	33,8	→ =MODE(A2:A18)
11	35			
12	29,5	Médiane	30,15	→ =MEDIANE(A2:A18)
13	27,55			
14	33,8	Moyenne	31	→ =MOYENNE(A2:A18) ou =C4/C2
15	15			
16	33,8	Écart moyen	8,417647059	→ =ECART.MOYEN(A2:A18)
17	50			
18	42,3			

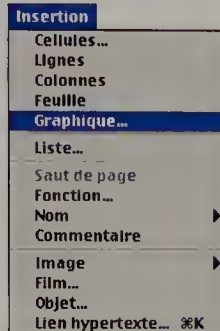
Comment tracer un graphique

Voici une procédure qui permet de construire un graphique à l'aide d'un tableur :

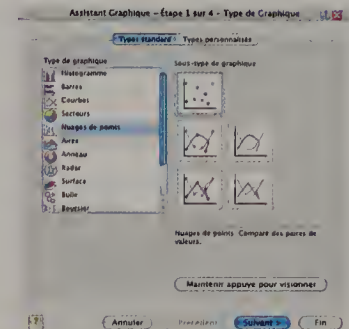
- 1) Sélection de la plage de données

	A	B
1	Longueur du fémur (cm)	Taille d'une personne (cm)
2	36	144
3	37	146
4	40	153
5	42	158
6	43,5	162
7	45	165
8	46,5	168
9	46,8	169
10	47	170
11	47,5	171

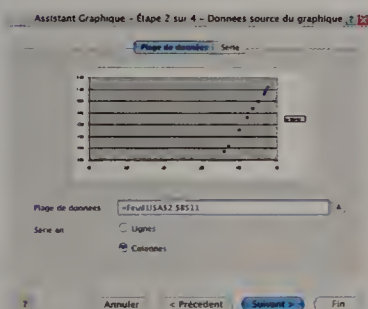
- 2) Sélection de l'assistant graphique



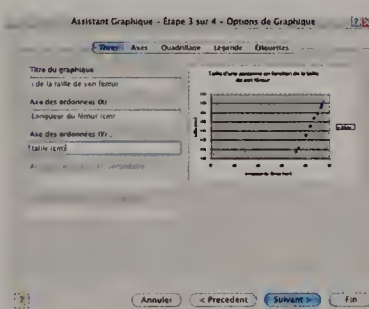
- 3) Choix du type de graphique



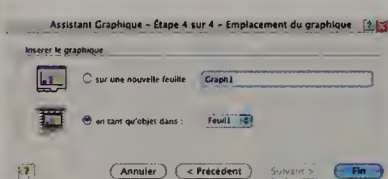
- 4) Confirmation des données pour le graphique



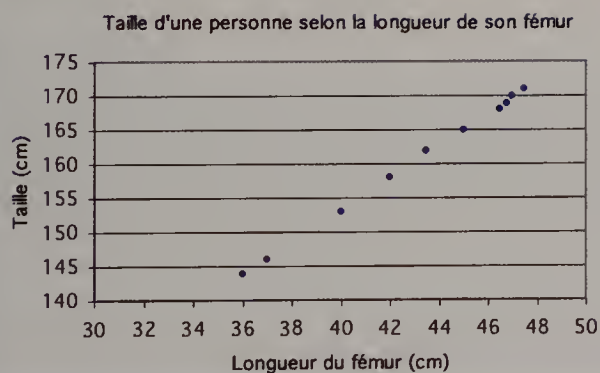
- 5) Choix des options du graphique



- 6) Choix de l'emplacement du graphique



- 7) Tracé du graphique



Après avoir tracé le graphique, on peut en modifier les différents éléments en double-cliquant sur l'élément que l'on veut modifier : titre, échelle, légende, quadrillage, tracé du graphique, etc.

Voici différents types de graphiques que l'on peut construire à l'aide du tableur :

Diagramme à bandes verticales

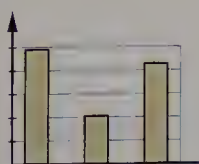


Diagramme à bandes horizontales

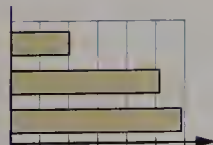


Diagramme à ligne brisée

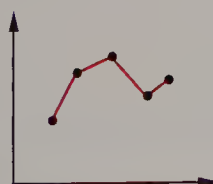
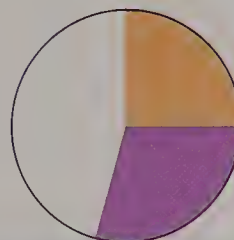


Diagramme circulaire



Nuage de points

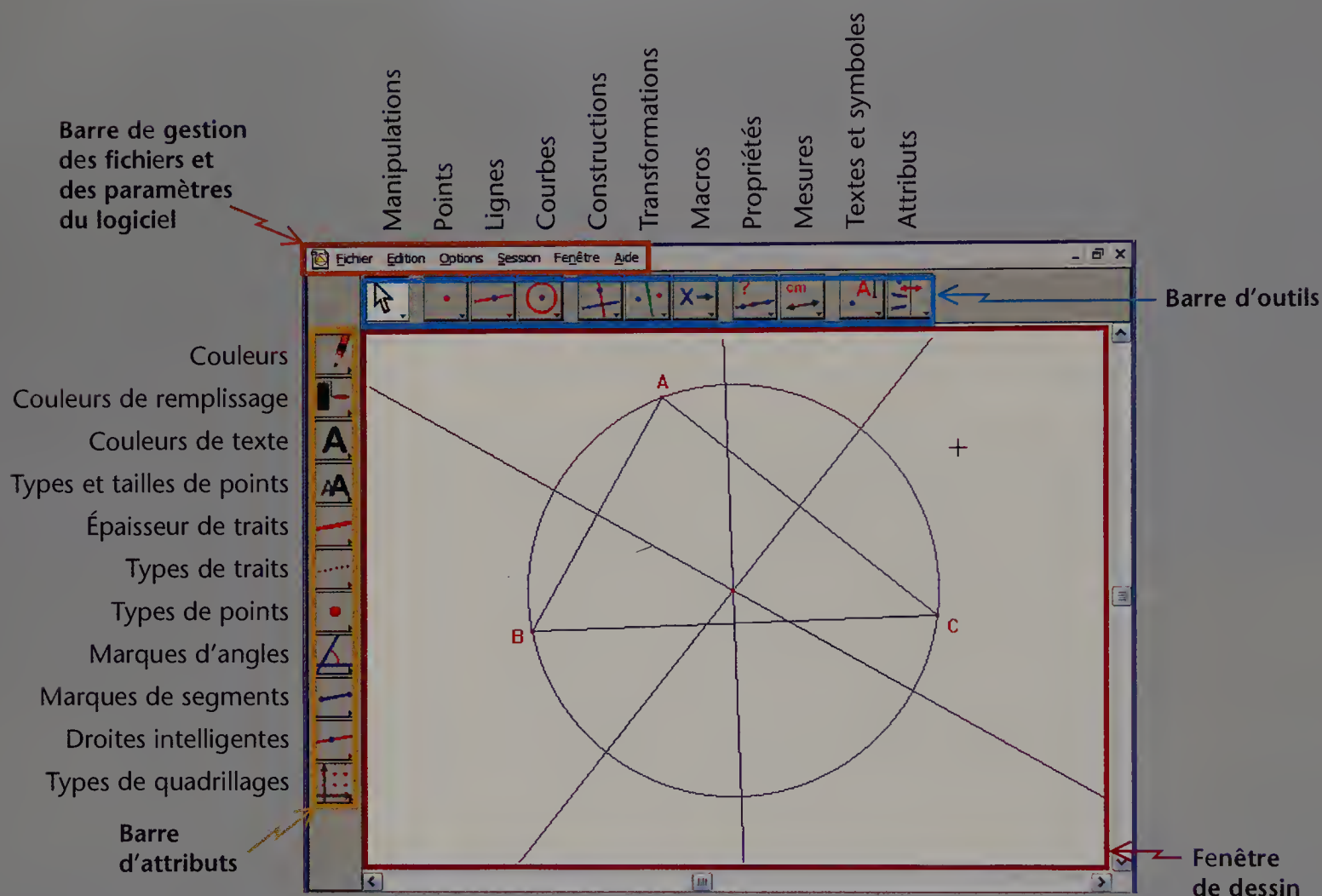


Logiciel de géométrie dynamique

TECHNOLOGIES

Un logiciel de géométrie dynamique permet de tracer et de déplacer différents objets dans un espace de travail. L'aspect dynamique de ce type de logiciel permet d'explorer et de vérifier des propriétés géométriques, et de valider des constructions.

L'espace de travail et les outils

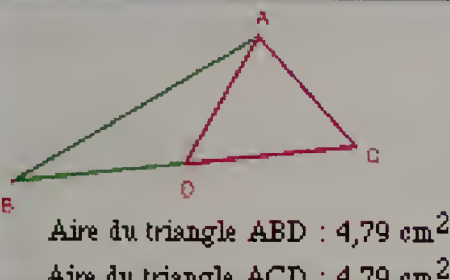


L'aspect des curseurs et leur signification

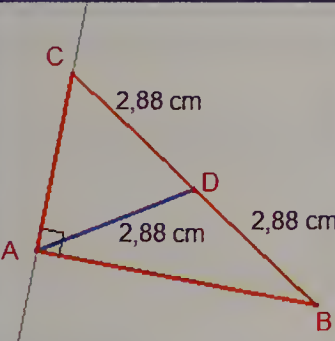
	Curseur lors du déplacement dans la fenêtre de dessin.
	Curseur pour désigner un objet.
	Curseur apparaissant lorsqu'il y a plusieurs objets.
	Curseur permettant le tracé des objets.
	Curseur désignant le déplacement possible d'un objet.
	Curseur permettant de travailler dans la barre de gestion des fichiers et dans la barre d'outils.
	Curseur apparaissant lorsqu'on veut remplir un objet d'une couleur.
	Curseur apparaissant lorsqu'on change l'attribut de l'objet sélectionné.

Des explorations géométriques

- 1) Une médiane divise un triangle en deux autres triangles. Afin d'explorer les particularités de ces deux triangles, on effectue la construction ci-dessous. Pour vérifier si les triangles ABD et ACD ont la même aire, on peut calculer l'aire de chacun des triangles. En déplaçant les points A, B et C, on remarque que l'aire des deux triangles est toujours la même.

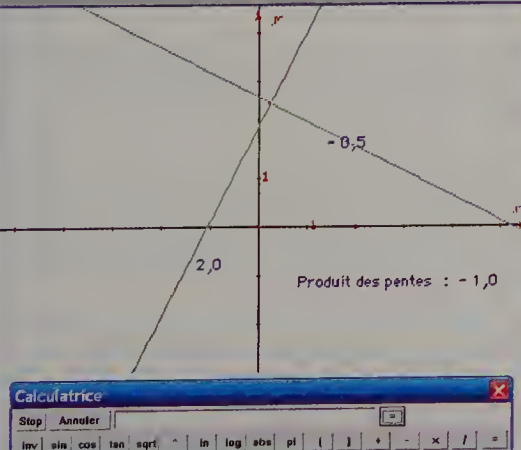
 Aire du triangle ABD : 4,79 cm² Aire du triangle ACD : 4,79 cm²		1. Construire un triangle ABC.
		2. Afficher le point milieu D du côté BC.
		3. Construire les triangles ABD et ACD.
		4. Afficher l'aire des triangles ABD et ACD.

- 2) Dans un triangle rectangle, afin de connaître la relation qui existe entre la position du milieu de l'hypoténuse par rapport aux trois sommets du triangle, on effectue la construction ci-dessous. En déplaçant les points A, B et C, on remarque que le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équidistant des trois sommets.

		1. Construire un segment AB.
		2. Construire la droite perpendiculaire au segment AB passant par le point A et un point C sur cette droite.
		3. Construire le triangle ABC et afficher le point milieu D du côté BC.
		4. Construire le segment AD et afficher la longueur des segments AD, BD et CD.

Une exploration graphique

Afin de connaître le lien qui existe entre les pentes de deux droites perpendiculaires dans le plan cartésien, on effectue la construction ci-dessous. En affichant le produit des pentes et en modifiant l'inclinaison d'une des droites, on peut observer une particularité numérique : le produit des pentes de deux droites perpendiculaires est -1.

 Produit des pentes : -1,0		1. Afficher les axes.
		2. Construire une droite et afficher sa pente.
		3. Construire une droite perpendiculaire à la première droite et afficher sa pente.
		4. Calculer le produit des pentes.

Notations et symboles

SAVOIRS

Notation et symbole	Signification
{ }	Accolades. Utilisées pour énumérer les éléments faisant partie d'un ensemble.
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres naturels
$\mathbb{Z}$	Ensemble des nombres entiers
$\mathbb{Q}$	Ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{Q}'$	Ensemble des nombres irrationnels
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\cup$	Union d'ensembles
$\cap$	Intersection d'ensembles
Ω	Se lit « oméga ». L'univers des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
$\emptyset$ ou { }	Ensemble vide
=	... est égal à...
$\neq$	... n'est pas égal à... ou ... est différent de...
$\approx$	... est approximativement égal à... ou ... est à peu près égal à...
<	... est inférieur à...
>	... est supérieur à...
$\leq$	... est inférieur ou égal à...
$\geq$	... est supérieur ou égal à...
$[a, b]$	Intervalle incluant a et b
$[a, b[$	Intervalle incluant a et excluant b
$]a, b]$	Intervalle excluant a et incluant b
$]a, b[$	Intervalle excluant a et b
∞	Infini
(a, b)	Couple de valeurs a et b
$f(x)$	f de x ou image de x par la fonction f
f^{-1}	Réciproque de la fonction f
$f \circ g$	Se lit « f rond g ». Composée de la fonction g suivie de la fonction f .
()	Parenthèses. Indiquent les opérations à effectuer en premier.
$-a$	Opposé du nombre a

Notation et symbole	Signification
$\frac{1}{a}$ ou a^{-1}	Inverse de a
a^2	La deuxième puissance de a ou a au carré
a^3	La troisième puissance de a ou a au cube
$\sqrt{a}$	Radical a ou racine carrée de a
$\sqrt[3]{a}$	Racine cubique de a
$ a $	Valeur absolue de a
%	Pourcentage
$a : b$	Rapport de a à b
π	Se lit «pi» et $\pi \approx 3,1416$
$\overline{AB}$	Segment AB
$m \overline{AB}$	Mesure du segment AB
$\angle$	Angle
$m \angle$	Mesure d'un angle
$\widehat{AB}$	Arc de cercle AB
$m \widehat{AB}$	Mesure de l'arc de cercle AB
//	... est parallèle à...
$\perp$	... est perpendiculaire à...
	Désigne un angle droit dans une figure géométrique plane.
$\triangle$	Triangle
$\cong$	... est isométrique à...
$\sim$	... est semblable à...
$\triangleq$	... correspond à...
$P(E)$	Probabilité de l'événement E
$P(A B)$	Probabilité que l'événement B se produise sachant que l'événement A s'est déjà produit.
A'	Se lit «A complément». Événement complémentaire à l'événement A.
Méd	Médiane d'une distribution
Q_1, Q_2, Q_3	Premier quartile, deuxième quartile et troisième quartile d'une distribution
Δx	Se lit «delta x». Variation ou accroissement en x .

Notation et symbole	Signification
$d(A, B)$	Distance entre les points A et B
$^{\circ}$	Degré
rad	Radian
$\sin A$	Sinus de l'angle A
$\cos A$	Cosinus de l'angle A
$\tan A$	Tangente de l'angle A
$\arcsin x$	Arc sinus de x
$\arccos x$	Arc cosinus de x
$\arctan x$	Arc tangente de x
$\sec A$	Sécante de l'angle A
$\operatorname{cosec} A$	Cosécante de l'angle A
$\cotan A$	Cotangente de l'angle A
$[a]$	Partie entière de a
$\log_c a$	Logarithme de a dans la base c
$\log a$	Logarithme de a dans la base 10
$\ln a$	Logarithme de a dans la base e
$a!$	Factorielle de a
t	Translation
r	Rotation
s	Réflexion
h	Homothétie
$\vec{a}$	Vecteur a
$\ \vec{a}\ $	Norme du vecteur a
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Produit scalaire du vecteur a et du vecteur b

Unités de base

Mesure	Unité	Symbole
longueur	mètre	m
masse	kilogramme	kg
temps, durée	seconde	s
courant électrique	ampère	A
température	kelvin	K
quantité de matière	mole	mol
intensité lumineuse	candela	cd

Unités dont l'usage est accepté dans le SI

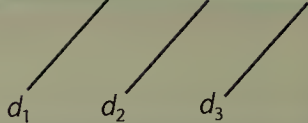
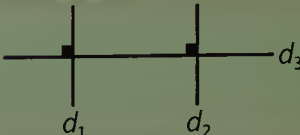
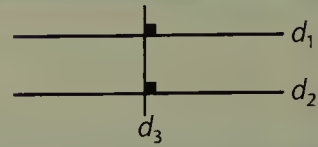
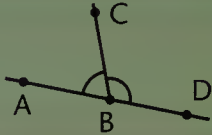
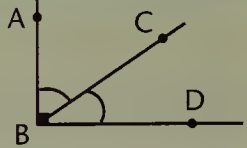
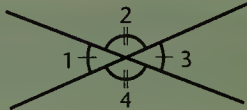
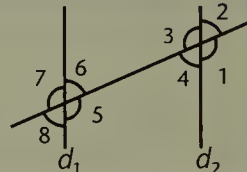
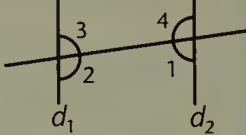
Mesure	Unité	Symbole
aire ou superficie	mètre carré hectare	m ² ha
angle plan	degré	°
différence de potentiel électrique	volt	V
énergie, travail	joule wattheure	J Wh
force	newton	N
fréquence	hertz	Hz
masse	tonne	t
pression	pascal millimètre de mercure	Pa mm Hg
puissance	watt	W
résistance électrique	ohm	Ω
température	degré Celsius	°C
temps	minute heure jour	min h d
vitesse	mètre par seconde kilomètre par heure	m/s km/h
volume	mètre cube litre	m ³ L

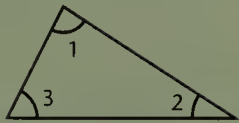
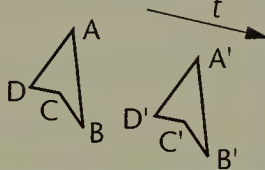
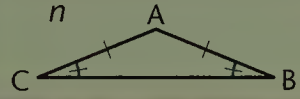
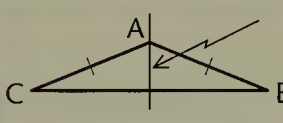
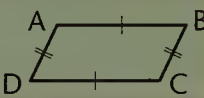
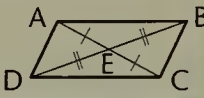
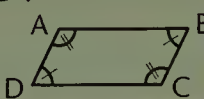
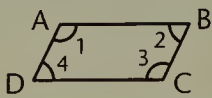
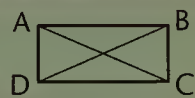
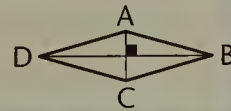
Préfixes SI

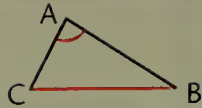
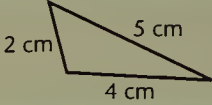
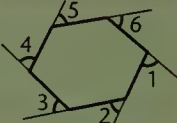
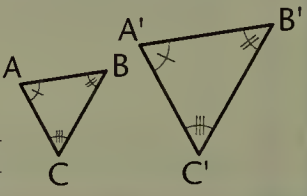
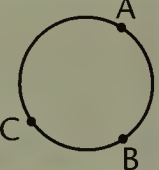
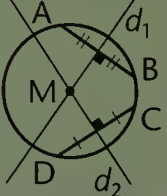
Facteur par lequel l'unité est multipliée	Nom	Symbole	Facteur par lequel l'unité est multipliée	Nom	Symbole
10 ¹	déca	da	10 ⁻¹	déci	d
10 ²	hecto	h	10 ⁻²	centi	c
10 ³	kilo	k	10 ⁻³	milli	m
10 ⁶	méga	M	10 ⁻⁶	micro	μ
10 ⁹	giga	G	10 ⁻⁹	nano	n

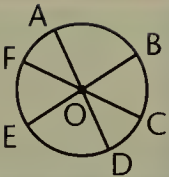
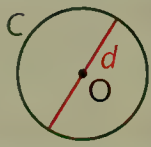
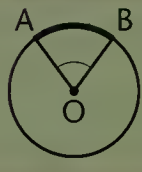
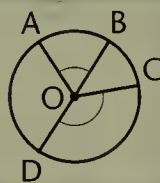
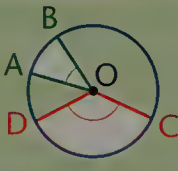
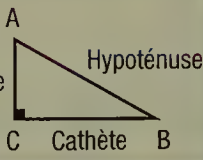
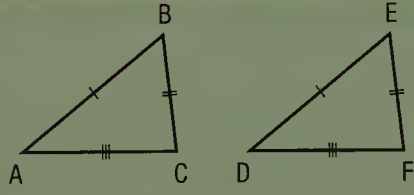
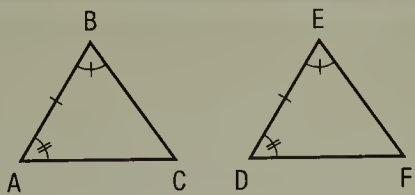
Énoncés de géométrie

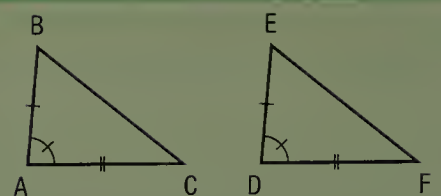
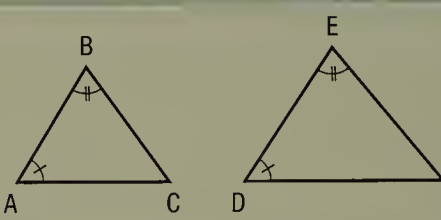
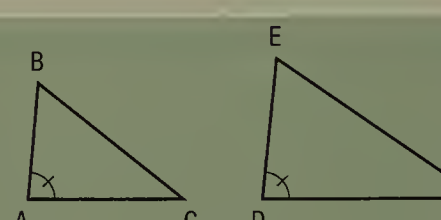
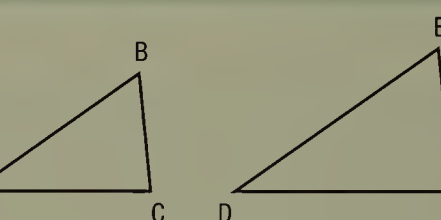
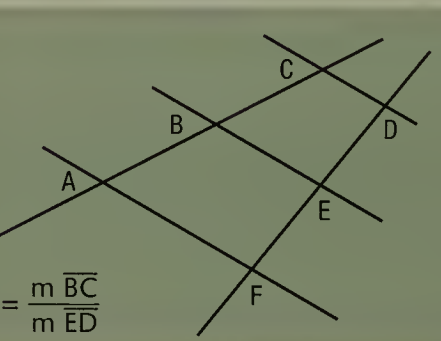
SAVOIRS

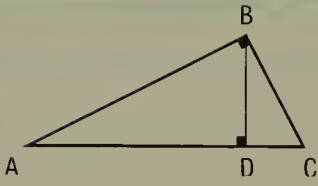
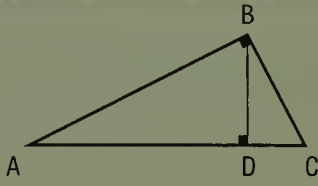
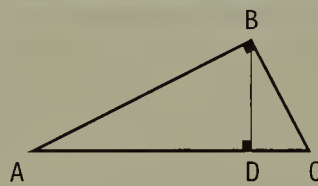
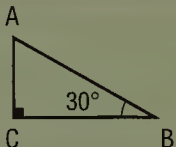
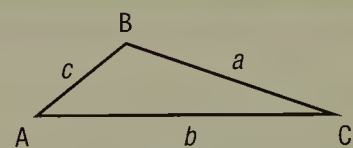
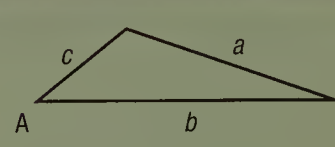
Énoncé	Exemple
1. Si deux droites sont parallèles à une troisième, alors elles sont aussi parallèles entre elles.	Si $d_1 \parallel d_2$ et $d_2 \parallel d_3$, alors $d_1 \parallel d_3$. 
2. Si deux droites sont perpendiculaires à une troisième, alors elles sont parallèles.	Si $d_1 \perp d_3$ et $d_2 \perp d_3$, alors $d_1 \parallel d_2$. 
3. Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une d'elles est perpendiculaire à l'autre.	Si $d_1 \parallel d_2$ et $d_3 \perp d_2$, alors $d_3 \perp d_1$. 
4. Des angles adjacents dont les côtés extérieurs sont en ligne droite sont supplémentaires.	Les points A, B et D sont alignés. $\angle ABC$ et $\angle CBD$ sont adjacents et supplémentaires. 
5. Des angles adjacents dont les côtés extérieurs sont perpendiculaires sont complémentaires.	$\overline{AB} \perp \overline{BD}$ $\angle ABC$ et $\angle CBD$ sont adjacents et complémentaires. 
6. Les angles opposés par le sommet sont isométriques.	$\angle 1 \cong \angle 3$ $\angle 2 \cong \angle 4$ 
7. Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants sont respectivement isométriques.	Si $d_1 \parallel d_2$, alors les angles 1, 3, 5 et 7 sont isométriques, et les angles 2, 4, 6 et 8 sont isométriques. 
8. Dans le cas d'une droite coupant deux droites, si deux angles correspondants (ou alternes-internes, ou encore alternes-externes) sont isométriques, alors ils sont formés par des droites parallèles coupées par une sécante.	Dans la figure de l'énoncé 7, si les angles 1, 3, 5 et 7 sont isométriques et les angles 2, 4, 6 et 8 sont isométriques, alors $d_1 \parallel d_2$.
9. Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les paires d'angles internes situées du même côté de la sécante sont supplémentaires.	Si $d_1 \parallel d_2$, alors $m \angle 1 + m \angle 2 = 180^\circ$ et $m \angle 3 + m \angle 4 = 180^\circ$. 

	Énoncé	Exemple
10.	La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est 180° .	$m \angle 1 + m \angle 2 + m \angle 3 = 180^\circ$ 
11.	Les éléments homologues de figures planes ou de solides isométriques ont la même mesure.	$\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$, $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$, $\angle D \cong \angle D'$ 
12.	Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés isométriques sont isométriques.	Dans un triangle isocèle ABC : $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ $\angle C \cong \angle B$ 
13.	L'axe de symétrie d'un triangle isocèle supporte une médiane, une médiatrice, une bissectrice et une hauteur de ce triangle.	 Axe de symétrie du triangle ABC Médiane issue du sommet A Médiatrice du côté BC Bissectrice de l'angle A Hauteur issue du sommet A
14.	Les côtés opposés d'un parallélogramme sont isométriques.	Dans un parallélogramme ABCD : $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ et $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ 
15.	Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.	Dans un parallélogramme ABCD : $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ et $\overline{DE} \cong \overline{EB}$ 
16.	Les angles opposés d'un parallélogramme sont isométriques.	Dans un parallélogramme ABCD : $\angle A \cong \angle C$ et $\angle B \cong \angle D$ 
17.	Dans un parallélogramme, la somme des mesures de deux angles consécutifs est 180° .	Dans un parallélogramme ABCD : $m \angle 1 + m \angle 2 = 180^\circ$ $m \angle 2 + m \angle 3 = 180^\circ$ $m \angle 3 + m \angle 4 = 180^\circ$ $m \angle 4 + m \angle 1 = 180^\circ$ 
18.	Les diagonales d'un rectangle sont isométriques.	Dans un rectangle ABCD : $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ 
19.	Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.	Dans un losange ABCD : $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 
20.	La mesure d'un angle extérieur d'un triangle est égale à la somme des mesures des angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents.	$m \angle 3 = m \angle 1 + m \angle 2$ 

Énoncé	Exemple
21. Dans un triangle, au plus grand angle est opposé le plus grand côté.	Dans le triangle ABC, le plus grand angle est A, donc le plus grand côté est BC. 
22. Dans un triangle, au plus petit angle est opposé le plus petit côté.	Dans le triangle ABC, le plus petit angle est B, donc le plus petit côté est AC. 
23. La somme des mesures de deux côtés d'un triangle est toujours supérieure à la mesure du troisième côté.	$2 + 5 > 4$ $2 + 4 > 5$ $4 + 5 > 2$ 
24. La somme des mesures des angles intérieurs d'un quadrilatère est 360° .	$m \angle 1 + m \angle 2 + m \angle 3 + m \angle 4 = 360^\circ$ 
25. La somme des mesures des angles intérieurs d'un polygone à n côtés est $n \times 180^\circ - 360^\circ$ ou $(n - 2) \times 180^\circ$.	$n \times 180^\circ - 360^\circ$ ou $(n - 2) \times 180^\circ$  
26. La somme des mesures des angles extérieurs d'un polygone convexe est 360° .	$m \angle 1 + m \angle 2 + m \angle 3 + m \angle 4 + m \angle 5 + m \angle 6 = 360^\circ$ 
27. Les angles homologues des figures planes ou des solides semblables sont isométriques et les mesures des côtés homologues sont proportionnelles.	Le triangle ABC est semblable au triangle A'B'C' : $\angle A \cong \angle A'$ $\angle B \cong \angle B'$ $\angle C \cong \angle C'$ $\frac{m \overline{A'B'}}{m \overline{AB}} = \frac{m \overline{B'C'}}{m \overline{BC}} = \frac{m \overline{A'C'}}{m \overline{AC}}$ 
28. Dans des figures planes semblables, le rapport entre les aires est égal au carré du rapport de similitude.	Dans les figures de l'énoncé 27, $\frac{m \overline{A'B'}}{m \overline{AB}} = \frac{m \overline{B'C'}}{m \overline{BC}} = \frac{m \overline{A'C'}}{m \overline{AC}} = k$ $\frac{\text{aire du triangle A'B'C'}}{\text{aire du triangle ABC}} = k^2$ Rapport de similitude
29. Trois points non alignés déterminent un et un seul cercle.	Il existe un seul cercle passant par les points A, B et C. 
30. Toutes les médiatrices des cordes d'un cercle se rencontrent au centre de ce cercle.	d_1 et d_2 sont respectivement les médiatrices des cordes AB et CD. Le point d'intersection M de ces médiatrices correspond au centre du cercle. 

Énoncé	Exemple
31. Tous les diamètres d'un cercle sont isométriques.	$\overline{AD}$, $\overline{BE}$ et $\overline{CF}$ sont des diamètres du cercle de centre O. $\overline{AD} \cong \overline{BE} \cong \overline{CF}$ 
32. Dans un cercle, la mesure du rayon est égale à la demi-mesure du diamètre.	$\overline{AB}$ est un diamètre du cercle de centre O. $m \overline{OA} = \frac{1}{2} m \overline{AB}$ 
33. Dans un cercle, le rapport de la circonférence au diamètre est une constante que l'on note π .	$\frac{C}{d} = \pi$ 
34. Dans un cercle, l'angle au centre a la même mesure en degrés que celle de l'arc compris entre ses côtés.	Dans le cercle de centre O, $m \angle AOB = m \widehat{AB}$ exprimées en degrés. 
35. Dans un cercle, le rapport des mesures de deux angles au centre est égal au rapport des mesures des arcs interceptés entre leurs côtés.	$\frac{m \angle AOB}{m \angle COD} = \frac{m \widehat{AB}}{m \widehat{CD}}$ 
36. Dans un disque, le rapport des aires de deux secteurs est égal au rapport des mesures des angles au centre de ces secteurs.	$\frac{\text{aire du secteur AOB}}{\text{aire du secteur COD}} = \frac{m \angle AOB}{m \angle COD}$ 
37. Dans un triangle rectangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des cathètes.	$(m \overline{AB})^2 = (m \overline{AC})^2 + (m \overline{BC})^2$ 
38. Deux triangles qui ont leurs côtés homologues isométriques sont isométriques (CCC).	 $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ Donc $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
39. Deux triangles qui ont un côté isométrique compris entre des angles homologues isométriques sont isométriques (ACA).	 $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle B \cong \angle E$ Donc $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Énoncé	Exemple
40. Deux triangles qui ont un angle isométrique compris entre des côtés homologues isométriques sont isométriques (CAC).	 $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ Donc $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
41. Deux triangles qui ont deux angles homologues isométriques sont semblables (AA).	 $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ Donc $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
42. Deux triangles qui ont un angle isométrique compris entre des côtés homologues de longueurs proportionnelles sont semblables (CAC).	 $\frac{m \overline{AB}}{m \overline{DE}} = \frac{m \overline{AC}}{m \overline{DF}}$ et $\angle A \cong \angle D$. Donc $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
43. Deux triangles dont les mesures des côtés homologues sont proportionnelles sont semblables (CCC).	 $\frac{m \overline{AB}}{m \overline{DE}} = \frac{m \overline{AC}}{m \overline{DF}} = \frac{m \overline{BC}}{m \overline{EF}}$ Donc $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
44. Des sécantes coupées par des parallèles sont partagées en segments de longueurs proportionnelles.	 $\frac{m \overline{AB}}{m \overline{FE}} = \frac{m \overline{BC}}{m \overline{ED}}$

Énoncé	Exemple
45. Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse entière.	 $\frac{m \overline{AD}}{m \overline{AB}} = \frac{m \overline{AB}}{m \overline{AC}} \text{ ou } (m \overline{AB})^2 = m \overline{AD} \times m \overline{AC}$ $\frac{m \overline{CD}}{m \overline{BC}} = \frac{m \overline{BC}}{m \overline{AC}} \text{ ou } (m \overline{BC})^2 = m \overline{CD} \times m \overline{AC}$
46. Dans un triangle rectangle, la mesure de la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.	 $\frac{m \overline{AD}}{m \overline{BD}} = \frac{m \overline{BD}}{m \overline{CD}} \text{ ou } (m \overline{BD})^2 = m \overline{AD} \times m \overline{CD}$
47. Dans un triangle rectangle, le produit des mesures de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante égale le produit des mesures des côtés de l'angle droit.	 $m \overline{AC} \times m \overline{BD} = m \overline{AB} \times m \overline{BC}$
48. Dans un triangle rectangle, la mesure du côté opposé à un angle de 30° est égale à la moitié de celle de l'hypoténuse.	$m \overline{AC} = \frac{m \overline{AB}}{2}$ 
49. Les mesures des côtés d'un triangle sont proportionnelles au sinus des angles opposés à ces côtés.	 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
50. Le carré de la longueur d'un côté d'un triangle quelconque est égal à la somme des carrés des longueurs des autres côtés, moins le double du produit des longueurs des autres côtés par le cosinus de l'angle compris entre ces deux côtés.	 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

A

Abscisse

Nombre qui correspond à la première coordonnée d'un point dans un plan cartésien.

Ex. : L'abscisse du point (5, -2) est 5.

Abscisse à l'origine

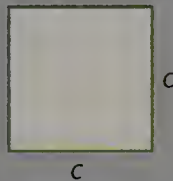
Dans un plan cartésien, abscisse d'un point d'intersection d'une courbe et de l'axe des abscisses.

Aire

Mesure d'une surface délimitée par une figure. On exprime l'aire d'une figure en unités carrées.

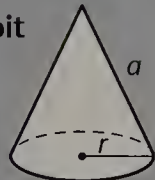
Aire d'un carré

$$A_{\text{carré}} = c \times c = c^2$$



Aire d'un cône circulaire droit

$$A_{\text{cône circulaire droit}} = \pi r^2 + \pi r a$$



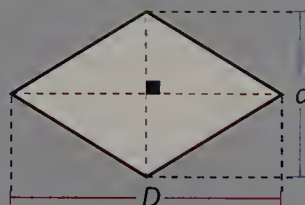
Aire d'un disque

$$A_{\text{disque}} = \pi r^2$$



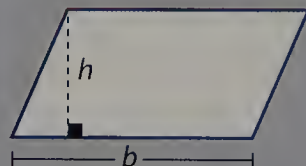
Aire d'un losange

$$A_{\text{losange}} = \frac{D \times d}{2}$$



Aire d'un parallélogramme

$$A_{\text{parallélogramme}} = b \times h$$

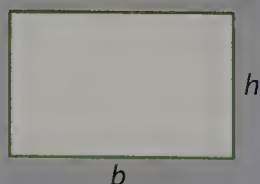


Aire d'un polygone régulier

$$A_{\text{polygone régulier}} = \frac{(\text{périmètre du polygone}) \times (\text{apothème})}{2}$$

Aire d'un rectangle

$$A_{\text{rectangle}} = b \times h$$



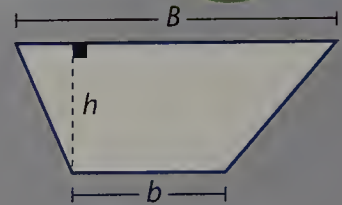
Aire d'un secteur

$$\frac{\text{mesure de l'angle au centre du secteur}}{360^\circ} = \frac{\text{aire du secteur}}{\pi r^2}$$



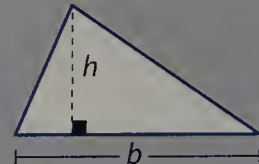
Aire d'un trapèze

$$A_{\text{trapèze}} = \frac{(B + b) \times h}{2}$$



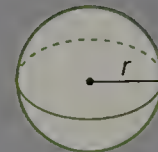
Aire d'un triangle

$$A_{\text{triangle}} = \frac{b \times h}{2}$$



Aire d'une sphère

$$A_{\text{sphère}} = 4\pi r^2$$



Amplitude, p. 103

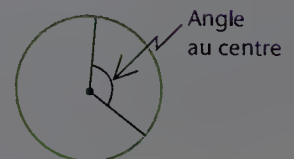
Angle

Classification des angles selon leur mesure

Nom	Mesure	Représentation
Nul	0°	
Aigu	Entre 0° et 90°	
Droit	90°	
Obtus	Entre 90° et 180°	
Plat	180°	
Rentrant	Entre 180° et 360°	
Plein	360°	

Angle au centre

Angle formé de deux rayons dans un cercle. Le sommet de l'angle correspond au centre du cercle.



Angles

alternes-externes, p. 240 (énoncés 7, 8)

alternes-internes, p. 240 (énoncés 7, 8)

complémentaires, p. 240 (énoncé 5)

correspondants, p. 240 (énoncé 8)

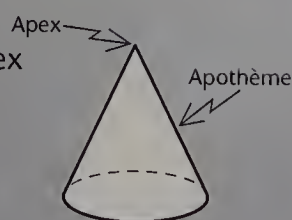
opposés par le sommet, p. 240 (énoncé 6)

supplémentaires, p. 240 (énoncés 4, 9)

Apothème d'un cône circulaire droit

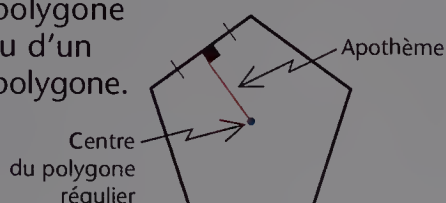
Segment ou mesure d'un segment reliant l'apex au pourtour de la base.

Ex. :

**Apothème d'un polygone régulier**

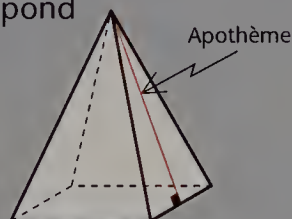
Segment perpendiculaire ou mesure du segment perpendiculaire mené du centre d'un polygone régulier au milieu d'un des côtés de ce polygone.

Ex. :

**Apothème d'une pyramide régulière**

Segment abaissé perpendiculairement de l'apex sur un des côtés du polygone formant la base de cette pyramide. Il correspond à la hauteur du triangle formant une face latérale.

Ex. :



Arc cosinus, p. 6, 7

Arc de cercle

Portion de cercle délimitée par deux points.

Arc sinus, p. 6, 7

Arc tangente, p. 6, 7

Arête

Ligne d'intersection entre deux faces d'un solide.

Asymptote

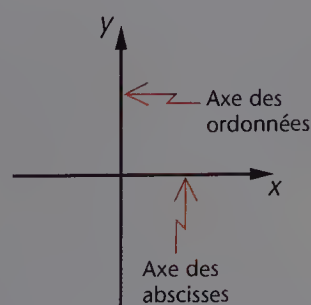
Droite de laquelle une courbe se rapproche de plus en plus sans jamais y toucher.

Axe des abscisses (axe des x)

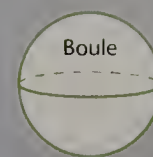
Droite graduée qui permet de déterminer l'abscisse d'un point dans un plan cartésien.

Axe des ordonnées (axe des y)

Droite graduée qui permet de déterminer l'ordonnée d'un point dans un plan cartésien.

**B****Boule**

Portion d'espace limitée par une sphère.

**C****Capacité**

Volume de la matière liquide, ou pouvant se manipuler comme un liquide, qu'un solide ou un récipient peut contenir.

Cathète, p. 75

Cercle, p. 172, 175

Cercle trigonométrique, p. 88, 89

Circonférence

Longueur ou périmètre d'un cercle. Dans un cercle dont la circonférence est C , le diamètre est d et le rayon est r : $C = \pi d$ et $C = 2\pi r$.

Codomaine d'une fonction

Ensemble des valeurs que prend la variable dépendante.

Coefficient d'un terme

Facteur précédant la ou les variables d'un terme.

Ex. : Dans l'expression algébrique $x + 6xy - 4,7y$, 1, 6 et -4,7 sont les coefficients du premier, du deuxième et du troisième terme.

Combinaison linéaire, p. 46

Composante d'un vecteur, p. 21

Cône circulaire droit

Solide constitué de deux faces : un disque et un secteur. Le disque correspond à la base et le secteur, à la face latérale.



Conique, p. 172, 203, 210, 211

Coordonnées d'un point

Chacun des deux nombres décrivant la position d'un point dans un plan cartésien.

Cosécante d'un angle, p. 129

Cosinus d'un angle, p. 6

Cotangente d'un angle, p. 129

Cycle, p. 103

Cylindre circulaire droit

Solide constitué de trois faces : deux disques isométriques et un rectangle. Les disques correspondent aux bases et le rectangle, à la face latérale.



D

Décomposition d'un vecteur dans le plan cartésien, p. 35

Degré d'un monôme

Somme des exposants des variables qui composent le monôme.

Ex. : 1) Le degré du monôme 9 est 0.
2) Le degré du monôme $-7xy$ est 2.
3) Le degré du monôme $15a^2$ est 2.

Degré d'un polynôme à une variable

Plus grand exposant affecté à la variable du polynôme.

Ex. : Le degré du polynôme $7x^3 + x^2 + 4$ est 3.

Direction d'un vecteur, p. 20

Directrice, p. 191

Distance entre deux points, p. 158

Domaine d'une fonction

Ensemble des valeurs que prend la variable indépendante.

E

Ellipse, p. 173, 174, 175

Équation

Énoncé mathématique comportant une ou des variables et une relation d'égalité.

Ex. : $4x - 8 = 4$

Équation d'une droite, p. 158

Équations équivalentes

Équations ayant les mêmes solutions.

Ex. : $2x = 10$ et $3x = 15$ sont des équations équivalentes, car 5 est la solution de chacune de ces équations.

Exponentiation

Opération qui consiste à affecter une base d'un exposant

Ex. : Dans 5^8 , la base est 5 et l'exposant est 8.

F

Face

Surface plane ou courbe délimitée par des arêtes.

Factorisation

Écriture sous la forme d'un produit de facteurs.

Ex. : La factorisation de $6a^2 + 15a$ correspond à $3a(2a + 5)$.

Figure image

Figure obtenue par une transformation géométrique appliquée à une figure initiale.

Figure initiale

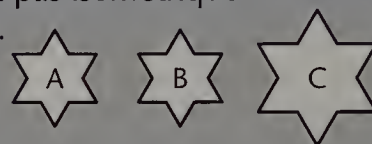
Figure à laquelle on applique une transformation géométrique.

Figures isométriques

Figures ayant la même forme et les mêmes dimensions.

Ex. : Les figures A et B sont isométriques.

La figure C n'est pas isométrique aux deux autres.



Figures semblables

Deux figures sont semblables si l'une est un agrandissement, une réduction ou la reproduction exacte de l'autre.

Fonction

Relation entre deux variables où à chaque valeur de la variable indépendante est associée au plus une valeur de la variable dépendante.

Fonction

arc cosinus, p. 106

arc sinus, p. 106

arc tangente, p. 106

Fonction cosinus, p. 90, 103, 104

Fonction définie par parties

Fonction composée de plusieurs fonctions définies selon différents intervalles du domaine.

Fonction de variation directe

Fonction dont la règle s'écrit $f(x) = ax$.

Fonction de variation inverse

Fonction dont la règle s'écrit $f(x) = \frac{a}{x}$.

Fonction de variation nulle

Fonction dont la règle s'écrit $f(x) = a$.

Fonction de variation partielle

Fonction dont la règle s'écrit $f(x) = ax + b$.

Fonction en escalier

Fonction qui est constante sur certains intervalles et qui varie subitement à certaines valeurs de la variable indépendante, appelées «valeurs critiques».

Fonction exponentielle

Fonction dont la règle s'écrit, sous la forme canonique, $f(x) = ac^x + k$.

Fonction logarithmique

Fonction dont la règle s'écrit, sous la forme canonique, $f(x) = \log_c b(x - h)$.

Fonction partie entière

Fonction en escalier dont la règle s'écrit, sous la forme canonique, $f(x) = a[b(x - h)] + k$.

Fonction périodique, p. 90**Fonction polynomiale**

Fonction dont la règle s'écrit à l'aide d'un polynôme. Ex. : $f(x) = 3x^2 + 7$

Fonction polynomiale de degré 0

Fonction dont la règle s'écrit à l'aide d'un polynôme de degré 0. Ex. : $f(x) = -5$

Fonction polynomiale de degré 1

Fonction dont la règle s'écrit à l'aide d'un polynôme de degré 1.
Ex. : $f(x) = 7,1x + 195$

Fonction polynomiale de degré 2

Fonction dont la règle s'écrit, sous la forme canonique, $f(x) = a(x - h)^2 + k$ et, sous la forme générale, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Fonction quadratique

Synonyme de « fonction polynomiale de degré 2 ».

Fonction racine carrée

Fonction dont la règle s'écrit, sous la forme canonique, $f(x) = a\sqrt{\pm(x - h)} + k$.

Fonction rationnelle

Fonction dont la règle s'écrit, sous la forme canonique, $f(x) = \frac{a}{x - h} + k$ et, sous la forme générale, $f(x) = \frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}$.

Fonction sinus, p. 89, 90, 103, 104**Fonction sinusoïdale**, p. 103, 104**Fonction tangente**, p. 90, 104, 105**Fonction valeur absolue**

Fonction dont la règle s'écrit, sous la forme canonique, $f(x) = a|x - h| + k$.

Foyer

d'une ellipse, p. 173

d'une hyperbole, p. 189

d'une parabole, p. 191

G**Grandeur**

d'un vecteur, p. 20

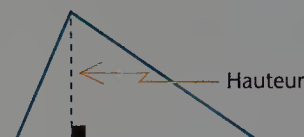
scalaire, p. 20

vectorielle, p. 20

H**Hauteur d'un triangle**

Segment ou longueur du segment abaissé perpendiculairement d'un sommet sur le côté opposé ou son prolongement.

Ex. :

**Hyperbole**, p. 189, 190**Hypoténuse**, p. 75**I****Identité trigonométrique**, p. 129**Inégalité**

Énoncé mathématique qui permet la comparaison entre deux expressions numériques à l'aide d'un symbole d'inégalité.

Ex. : 1) $4 < 4,2$

2) $-10 \leq -5$

Inéquation

Énoncé mathématique comportant une ou des variables et un symbole d'inégalité.

Ex. : 1) $4a > 100$

2) $a - 17 \geq 58 - b$

Intervalle

Ensemble de nombres compris entre deux nombres appelés bornes.

Ex. : L'intervalle des nombres réels allant de -2 inclus à 9 exclu est $[-2, 9[$.

L**Loi**

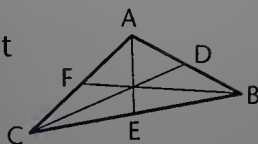
des cosinus, p. 7

des sinus, p. 7

M**Médiane d'un triangle**

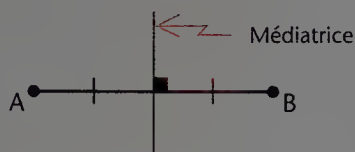
Segment reliant un sommet au milieu du côté opposé.

Ex. : Les segments AE, BF et CD sont les médianes du triangle ABC.

**Médiatrice**

Droite perpendiculaire à un segment en son milieu. La médiatrice est aussi un axe de symétrie d'un segment.

Ex. :

**Mise en évidence simple**

Écriture qui permet de mettre en évidence un facteur qui est commun à plusieurs autres.

Ex. : $8a^2 - 44a = 4a(2a - 11)$

Monôme

Expression algébrique formée d'un seul terme.

Ex. : 9 , $-5x^2$ et $4xy$ sont des monômes.

N**Nombre entier**

Nombre appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Nombre irrationnel

Nombre qui ne peut pas s'exprimer comme un quotient d'entiers et dont le développement décimal est infini et non périodique.

Nombre naturel

Nombre appartenant à l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Nombre rationnel

Nombre qui peut être écrit sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des nombres entiers, et b est différent de 0. Sous la forme décimale, le développement est fini ou infini et périodique.

Nombre réel

Nombre qui appartient à l'ensemble des nombres rationnels ou à l'ensemble des nombres irrationnels.

Norme d'un vecteur, p. 20**Notation scientifique**

Notation qui facilite la lecture et l'écriture des très grands et des très petits nombres.

Ex. : 1) $56\,000\,000 = 5,6 \times 10^7$
2) $0,000\,000\,008 = 8 \times 10^{-9}$

O**Ordonnée**

Nombre qui correspond à la seconde coordonnée d'un point dans le plan cartésien.

Ex. : L'ordonnée du point $(5, -2)$ est -2 .

Ordonnée à l'origine

Dans un plan cartésien, ordonnée d'un point d'intersection d'une courbe et de l'axe des ordonnées.

Orientation d'un vecteur, p. 20**Origine d'un plan cartésien**

Point d'intersection des deux axes d'un plan cartésien. Les coordonnées de l'origine sont $(0, 0)$.

P**Parabole, p. 191****Pente, p. 158****Périmètre**

Longueur de la ligne fermée qui correspond à la frontière d'une figure plane. Le périmètre s'exprime en unités de longueur.

Période, p. 90, 103**Plan cartésien**

Plan muni d'un système de repérage formé de deux droites graduées qui se coupent perpendiculairement.

Point d'inflexion, p. 103**Polyèdre**

Solide limité par des faces planes qui sont des polygones.

Ex. :

**Polygone**

Figure plane formée par une ligne brisée.

Polygones

Nombre de côtés	Nom du polygone
3	Triangle
4	Quadrilatère
5	Pentagone
6	Hexagone
7	Heptagone
8	Octogone
9	Ennéagone
10	Décagone
11	Hendécagone
12	Dodécagone

Polygone régulier

Polygone dont tous les côtés sont isométriques et dont tous les angles sont isométriques.

Polynôme

Expression algébrique comportant un ou plusieurs termes.

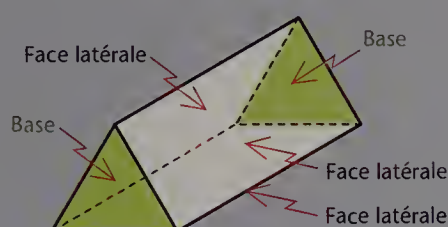
Ex. : $x^3 + 4x^2 - 18$

Prisme

Polyèdre ayant deux faces isométriques et parallèles appelées bases.

Les parallélogrammes qui relient ces deux bases sont appelés faces latérales.

Ex. : Prisme à base triangulaire.

**Prisme droit**

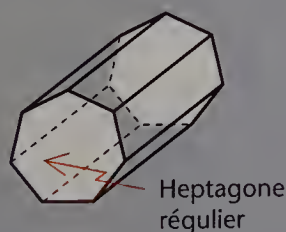
Prisme dont les faces latérales sont des rectangles.

Ex. : Prisme droit à base trapézoïdale.

**Prisme régulier**

Prisme droit dont la base est un polygone régulier.

Ex. : Prisme régulier à base heptagonale.



Produit scalaire, p. 46

Projection

d'un vecteur, p. 22

orthogonale, p. 22

Proportion

Égalité entre deux rapports ou deux taux.

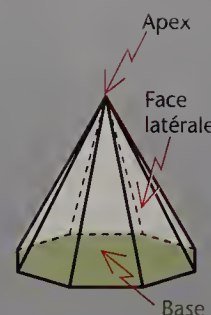
Ex. : 1) $3 : 11 = 12 : 44$

$$2) \frac{7}{5} = \frac{14}{10}$$

Pyramide

Polyèdre constitué d'une seule base ayant la forme d'un polygone et dont les faces latérales sont des triangles ayant un sommet commun appelé l'apex.

Ex. : Pyramide à base octogonale.

**Pyramide droite**

Pyramide dont le segment abaissé depuis l'apex, perpendiculairement à la base, arrive au centre du polygone formant cette base.

Ex. : Pyramide droite à base rectangulaire.

**Pyramide régulière**

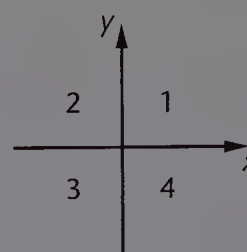
Pyramide droite dont la base est un polygone régulier.

Ex. : Pyramide régulière à base hexagonale.

**Q****Quadrant**

Chacune des quatre régions délimitées par les axes d'un plan cartésien. Les quadrants sont numérotés de 1 à 4.

Ex. :

**R****Racine carrée**

L'opération inverse de celle qui consiste à élever un nombre positif au carré est appelée l'extraction de la racine carrée. Le symbole de cette opération est $\sqrt{\quad}$.

Ex. : La racine carrée de 25, notée $\sqrt{25}$, est 5.

Radical Radicande

Racine cubique

L'opération inverse de celle qui consiste à élever un nombre au cube est appelée l'extraction de la racine cubique. Le symbole de cette opération est $\sqrt[3]{\quad}$.

Ex. : 1) $\sqrt[3]{125} = 5$

2) $\sqrt[3]{-8} = -2$

Radian, p. 88

Rapport

Mode de comparaison entre deux quantités ou deux grandeurs de même nature exprimées dans les mêmes unités et qui fait intervenir la notion de division.

Rapport trigonométrique, p. 6

Réflexion

Transformation géométrique qui permet d'associer, à toute figure initiale, une figure image par rapport à une droite donnée appelée l'axe de réflexion.

Règle

Équation qui traduit une régularité entre des variables.

Règles de transformation des équations

Règles qui permettent d'obtenir des équations équivalentes. On conserve la ou les solutions d'une équation :

- en additionnant ou en soustrayant le même nombre aux deux membres de l'équation ;
- en multipliant ou en divisant les deux membres de l'équation par un même nombre différent de 0.

Règles de transformation des inéquations

Règles qui permettent d'obtenir des inéquations équivalentes.

- Additionner ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inéquation conserve le sens de cette inéquation.
- Multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un même nombre strictement positif conserve le sens de cette inéquation.
- Multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un même nombre strictement négatif inverse le sens de cette inéquation.

Relation

de Chasles, p. 34

de Pythagore, p. 75

Relations métriques, p. 74

Résolution

d'une équation du second degré, p. 159

d'une équation trigonométrique, p. 115, 116

d'une inéquation trigonométrique, p. 117

S

Sécante d'un angle, p. 129

Secteur

Portion de disque délimitée par deux rayons.



Sens d'un vecteur, p. 20

Sinus d'un angle, p. 6

Solide

Portion d'espace limitée par une surface fermée.
Ex. :



Sommet

d'une ellipse, p. 173

d'une hyperbole, p. 189

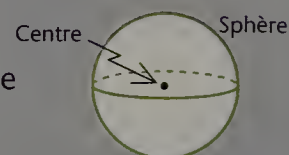
d'une parabole, p. 191

Sommet d'un solide

Point commun à au moins deux arêtes d'un solide.

Sphère

Surface dont tous les points sont situés à égale distance d'un point appelé centre.



Superficie

Synonyme d'« aire ».

Système d'équations du second degré, p. 159

T

Tangente d'un angle, p. 6

Taux

Mode de comparaison entre deux quantités ou deux grandeurs, généralement de nature différente, exprimées à l'aide d'unités différentes et qui fait intervenir la notion de division.

Taux de variation

Dans une relation entre deux variables, comparaison entre deux variations qui se correspondent.

$$\text{Taux de variation} = \frac{\text{variation de la variable dépendante}}{\text{variation correspondante de la variable indépendante}}$$

Terme algébrique

Un terme peut être composé uniquement d'un nombre ou d'un produit de nombres et de variables.

Ex. : 9, x et $3xy^2$ sont des termes.

Termes semblables

Termes composés des mêmes variables affectées des mêmes exposants ou termes constants.

Ex. : 1) $8ax^2$ et ax^2 sont des termes semblables.
2) 8 et 17 sont des termes semblables.

Translation

Transformation géométrique qui permet d'associer, à toute figure initiale, une figure image selon une direction, un sens et une longueur donnés.

Triangles

isométriques, p. 243, 244 (énoncés 38, 39, 40)
semblables, p. 244 (énoncés 41, 42, 43)

Trigonométrie, p. 6**U****Unités d'aire**

Le mètre carré est l'unité d'aire de base du SI.

$\div 100$	$\div 100$	$\div 100$	$\div 100$	$\div 100$	$\div 100$	
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
$\times 100$	$\times 100$	$\times 100$	$\times 100$	$\times 100$	$\times 100$	$\times 100$

Unités de capacité

Le litre est l'unité de capacité de base.

$\div 10$	$\div 10$	$\div 10$	$\div 10$	$\div 10$	$\div 10$	
kL	hL	daL	L	dL	cL	mL
$\times 10$	$\times 10$	$\times 10$	$\times 10$	$\times 10$	$\times 10$	$\times 10$

Unités de longueur

Le mètre est l'unité de longueur de base du SI.

$\div 10$	$\div 10$	$\div 10$	$\div 10$	$\div 10$	$\div 10$	
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
$\times 10$	$\times 10$	$\times 10$	$\times 10$	$\times 10$	$\times 10$	$\times 10$

Unités de volume

Le mètre cube est l'unité de volume de base du SI.

$\div 1000$	$\div 1000$	$\div 1000$	$\div 1000$	$\div 1000$	$\div 1000$	
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
$\times 1000$	$\times 1000$	$\times 1000$	$\times 1000$	$\times 1000$	$\times 1000$	$\times 1000$

V**Valeur initiale d'une fonction**

Valeur de la variable dépendante lorsque celle de la variable indépendante est zéro.

Variable

Symbole qui peut prendre différentes valeurs. Les symboles utilisés sont généralement des lettres.

Variable dépendante

Dans une relation entre deux variables, la variation de la variable dépendante réagit à la variation de l'autre variable.

Variable indépendante

Dans une relation entre deux variables, la variation de la variable indépendante entraîne la variation de l'autre variable.

Vecteur, p. 20**Vecteur**

nul, p. 20

unitaire, p. 20

Vecteurs

colinéaires, p. 22

équipollents, p. 22

opposés, p. 22

orthogonaux, p. 22

Volume

Mesure de l'espace occupé par un solide. On exprime le volume d'un solide en unités cubes.

Volume d'un cône circulaire droit

$$V_{\text{cône}} = \frac{(\text{aire de la base}) \times (\text{hauteur})}{3}$$

Volume d'un cylindre circulaire droit

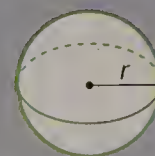
$$V_{\text{cylindre circulaire droit}} = (\text{aire de la base}) \times (\text{hauteur})$$

Volume d'un prisme droit

$$V_{\text{prisme droit}} = (\text{aire de la base}) \times (\text{hauteur})$$

Volume d'une boule

$$V_{\text{boule}} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

**Volume d'une pyramide droite**

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{(\text{aire de la base}) \times (\text{hauteur})}{3}$$

Z**Zéro d'une fonction**

Valeur de la variable indépendante lorsque celle de la variable dépendante est zéro.

Crédits photographiques

H Haut B Bas G Gauche D Droite M Milieu FP Fond de page

Couverture

© Fedorov Oleksiy/Shutterstock

Vision 4

3 HG © iStockphoto 3 HD © Jacques Honvault/Look At Sciences/SPL/Publiphoto 3 MG © Tischenko Irina/Shutterstock 3 MD © iStockphoto 4 MD © Rowena /Shutterstock 5 BG © Steve Percival/SPL/Publiphoto 10 HD © Perry Mastrovito/Image source/Cpimages 10 HD © Dreamstime 11 BM © photos.com 13 BD © iStockphoto 13 BD © Ilin Sergey/Shutterstock 15 BG © Eric Long/NASM/Smithsonian Institution 16 HD Fondo Archivio storico del Senato della Repubblica 18 BD Ferdinand Schmutzer/ÖNB/Wien, photo 5103991 29 HM © AFP/Getty Images 29 HM © Claude Essertel/Keystone Press 29 BD © iStockphoto 31 HD © Shutterstock 42 MD © The Print Collector/Alamy 51 BM © iStockphoto 53 BD © iStockphoto 54 MG Fondo Archivio storico del Senato della Repubblica 55 BG Hulton Archive/Getty Images 55 BM Domaine public 56 HD © Caren Firouz/Reuters/Corbis 57 HD © James King-Holmes/SPL/Publiphoto 57 MG © Chris Sattlberger/SPL/Publiphoto 57 MD Gracieuseté de la NASA 62 BD © Dreamstime 63 B © John Czenke/Shutterstock 64 MD © Therin-Weise/Peter Arnold Inc. 65 MD Hulton Archive/Getty images/iStockphoto 69 BD © Dean Conger/Corbis

Vision 5

71 HG © enemimages/Alamy 71 HD © Nikonft/Shutterstock 71 MG © Shutterstock 71 MD © Vladimir Wrangel/Shutterstock 72 BD © Esther Ste-Croix 72 BD © Iakov Kalinin/Shutterstock 73 B © Peter Teller/Getty images 77 M *A Wooded Landscape in Three Panels* de Louis C. Tiffany, circa 1905, Musée des Beaux-Arts de Houston, photo, Dennis Cox/Alamy 78 B © Danielle Robichaud/Shutterstock 81 B © Charles-Henri Debeur/Keystone Press 82 B © David Parker/SPL/ Publiphoto 85 BG © The Art Archive/British Library 86 BD © photos.com 94 BG © tamzinm/Shutterstock 95 BD © Jacques Boissinot/La Presse canadienne 96 B Gracieuseté de la NASA/illustration de Don Davis 97 B © Mana Photo/Shutterstock 99 M © Sebastian Kaulitzki/Shutterstock 99 BG National Library of Medicine/SPL/Publiphoto 101 BD The Royal Library, Copenhagen 110 BD © Michael Melford/National Geographic/Gettyimages 111 MD © Chad McDermott/Shutterstock 112 HD Gracieuseté de la NASA/Goddard Space Flight Center Scientific Visualization Studio 112 BD © Dreamstime 113 B © argus/Shutterstock 114 HD © iStockphoto 120 HD © Detlev Van Ravenswaay/SPL/Publiphoto 120 BD © Zholobov Vadim/Shutterstock 121 BG © Four Oaks/Shutterstock 126 B *L'Homme* d'Alexander Calder, 1967 © Calder Foundation, New-York/Artists Rights Society (ARS) New-York/SODRAC, Montreal (2010), photo © Niels van Kampenhout/Alamy 127 HD © Art Directors & TRIP/Alamy 134 BG © SPL/Publiphoto 135 BD © Detlev Van Ravenswaay/SPL/Publiphoto 136 FP © photos.com 136 MD Gracieuseté de la NASA/Goddard Space Flight Center/ISRO 137 BG From Cave Painting to the internet/historyofscience.com 137 FP © photos.com 138 HG © ExaMedia Photography/Shutterstock 139 HD © hoskari/Shutterstock 139 MD © mmgeminini/Shutterstock 142 B © Péter Gudella/Shutterstock 145 B © David A. Hardy/SPL/Publiphoto 146 M © Lynette Cook/SPL/Publiphoto 147 B © Slavko Sereda/Shutterstock 148 BD © Time & Life Pictures/Getty Images 149 B © Joanne Wells/DanitaDelimont.com 151 B © J. McCulloch/Parcs Canada 152 BD © Chepko Danil Vitalevich/Shutterstock 153 HD © Magone/Shutterstock 153 BG © CDC/SPL/Publiphoto

Vision 6

155 HG © Robert Francis/Robert Harding World Imagery/Corbis **155 HD** © Jeffrey Newman/NASA/ESA **155 MG** © Harper/Shutterstock **155 MD** © Martin D. Vonka/Shutterstock **156 B** Pêches et Océans Canada/F. Servant **157 H** © higyou/Shutterstock **163 HD** Gracieuseté de Trend Sports & Heater Sports **163 BD** © Lebrecht Music and Arts Photo Library/Alamy **164 BD** © Photos.com **165 BD** © Andrew Duke/Alamy **166 BD** clic-souris/Wikimédia **169 HD** © Bettmann/Corbis **170 HD** Frank Zullo/Photo Researchers/Publiphoto **180 MG** European Space Agency **182 BD** © Pascal Parrot/Sygma/Corbis **183 M** © Dreamstime **183 BD** Gracieuseté de Press-A-Penny **184 B** © NRAO/AUI/NSF **186 MD** *Archimède*, huile sur canevas, de Giuseppe Nogari/Musée Pouchkine, Moscou/The Bridgeman Art Library **188 BD** © Oasis photographie **197 M** © David Kawabata **197 BD** © Dan Schechter/SPL/Publiphoto **198 BG** Gracieuseté de la NASA **198 BD** Gracieuseté de la NASA/Dryden Flight Research Center Collection **199 BD** © Martin Mette/Shutterstock **200 B** © MARKA/Alamy **201 MD** Gracieuseté de la NASA/Marshall Space Flight Center Collection **207 M** © Gary Blakeley/Shutterstock **208 M** © Lise Breton **209 BD** Gracieuseté de la NASA **210 HG** © Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, 255. Photo Luc Schrobiltgen **210 MD** Private Collection/The Bridgeman Art Library/Getty Images **210 HD** Volker Steger/SPL/Publiphoto **210 BG** © iStockphoto **213 HD** © carroteater/Shutterstock **217 B** © David Messent/Maxx Images **218 BG** © iStockphoto **220 BG** © Tibor Bogнар/Alamy **221 BG** © Olaru Radian-Alexandru/Shutterstock **225 M** © martin lauricella/Alamy **226 HD** © Hiroshi Sato/Shutterstock **227 B** © iStockphoto

VISIONS

Conçue dans l'esprit du *Programme de formation de l'école québécoise*, la collection *Visions*, séquence *Sciences naturelles*, propose une démarche claire, souple et complète pour l'apprentissage de la mathématique au cours de la 3^e année du 2^e cycle du secondaire.

Visions, c'est une collection qui :

- offre un choix de situations d'apprentissage et d'évaluation développées selon des contextes propres à la séquence et près de la réalité des élèves. Ces situations favorisent le développement des compétences disciplinaires et transversales de même que la construction des savoirs ;
- propose des résumés théoriques d'une grande rigueur soutenus par des exemples facilitants ;
- offre des rubriques qui illustrent l'utilité de la mathématique en traitant d'éléments historiques, technologiques et du monde du travail ;
- suggère de nombreux problèmes et exercices de consolidation des apprentissages ;
- répond aux besoins de réactivation des élèves avec la section Révision ;
- propose à la fin de chaque *Vision* une banque de problèmes qui privilégient chacun la résolution, le raisonnement ou la communication ;
- contient un album en deux parties – technologies et savoirs – pour outiller les élèves durant leurs apprentissages ;
- favorise l'utilisation des TIC en classe ;
- fournit de nombreux moyens et outils d'évaluation.

Les composantes de la collection *Visions*

- Manuel de l'élève, volume 1
- Manuel de l'élève, volume 2
- Guide d'enseignement



CODE DE PRODUIT : 210949

ISBN 978-2-7617-2809-6



9 782761 728096

KN-709-248