GILLES **CHARRON** ■ PIERRE **PARENT**

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

5e édition



CHENELIÈRE ÉDUCATION

Animations 3D GeoGebra

L'algèbre linéaire et la géométrie vectorielle au fil du temps

Antiquité (3000 av. J.-C. au V^e siècle)	• **Mésopotamie et Égypte** Résolution de systèmes d'équations linéaires (2000-1600 av. J.-C.) • **Chine** Résolution de systèmes d'équations linéaires avec des tableaux de nombres (200-100 av. J.-C.)
Moyen Âge (VI^e au XV^e siècle)	• **Monde arabo-musulman** Développement de l'algèbre et de la trigonométrie • **Europe** Prise de contact des Européens avec la numération et l'algèbre du monde arabo-musulman
Révolution scientifique (XVI^e au XVIII^e siècle)	• **Jérôme Cardan** Découverte des nombres complexes (1545) • **Simon Stevin** Parallélogramme de forces (1586) • **Albert Girard** Acceptation des racines complexes d'une équation polynomiale (1626) • **René Descartes** Désignation de certaines racines d'« imaginaires » (1637) • **Gottfried Wilhelm Leibniz** et **Seki Kowa** Description de ce qui s'appellera plus tard la règle de Cramer (1683) • **Gabriel Cramer** Règle de Cramer (1750)
Révolution industrielle (XIX^e siècle)	• **Carl Friedrich Gauss** Algorithme de résolution de systèmes d'équations linéaires (1801), termes « déterminant » (1801) et « nombres complexes » (1832) • **Jean-Robert Argand** Représentation géométrique des nombres complexes (1806) • **Augustin-Louis Cauchy** Une première théorie des déterminants (1815) • **Joseph Fourier** Programmation linéaire, sans le nom (vers 1820) • **Hermann Günther Grassmann** Espace géométrique à plus de trois dimensions, indépendance linéaire, produit scalaire et vectoriel (1830-1844) • **William Rowan Hamilton** Quaternions (nombres hypercomplexes de dimension 4) (1843) • **Arthur Cayley** et **James Joseph Sylvester** Théorie des matrices (1844-1850) et terme « matrice » (1850) • **Ferdinand Georg Frobenius** Lien général établi entre la résolution de systèmes d'équations, l'algèbre linéaire naissante et la théorie des matrices (1872) • **James Clerk Maxwell** Utilisation des quaternions pour établir sa théorie de l'électromagnétisme (1873) • **Josiah Willard Gibbs** et **Oliver Heaviside** Unification des approches de Grassmann et de Hamilton vers la vision moderne du calcul vectoriel (1880)
Époque contemporaine (XX^e siècle à aujourd'hui)	• **Andreï Markov** Chaîne de Markov (1907) • Reformulation de nombreuses théories mathématiques en utilisant le langage de l'algèbre linéaire (après 1920) • Développement des ordinateurs (après 1945) • **George Bernard Dantzig** Optimisation de la « programmation » du ravitaillement pendant la Deuxième Guerre mondiale et algorithme du simplexe (1947) • **Albert William Tucker** Utilisation de la dualité (1950) • **Tjalling Charles Koopmans** Création de l'expression « programmation linéaire » (1948) • **Wassily Leontief** Analyse entrée-sortie (1948-1973)

GILLES **CHARRON** ■ PIERRE **PARENT**

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

5e édition

RÉVISION SCIENTIFIQUE DE L'OUVRAGE

Serge Fontaine
Cégep Saint-Jean-sur-Richelieu

Luc Morin
Cégep de Trois-Rivières

Eric Tessier Gobeil
Collège de Maisonneuve

Achetez en ligne ou en librairie
En tout temps, simple et rapide!
www.cheneliere.ca

CHENELIÈRE ÉDUCATION

Algèbre linéaire et géométrie vectorielle
5e édition

Gilles Charron et Pierre Parent

© 2018 **TC Média Livres Inc.**
© 2011 Chenelière Éducation inc.
© 2005, 1999 Groupe Beauchemin, Éditeur Ltée
© 1992 Éditions Études Vivantes

Conception éditoriale : Sophie Gagnon et Catherine Pérusse
Édition : Marie Victoire Martin et Jean-Philippe Michaud
Coordination et révision linguistique : Jean-Philippe Michaud
Correction d'épreuves : Katie Delisle
Conception graphique : Josée Bégin
Adaptation de la conception graphique originale : Pige communication
Impression : TC Imprimeries Transcontinental

Des marques de commerce sont mentionnées ou illustrées dans cet ouvrage. L'Éditeur tient à préciser qu'il n'a reçu aucun revenu ni avantage conséquemment à la présence de ces marques. Celles-ci sont reproduites à la demande de l'auteur en vue d'appuyer le propos pédagogique ou scientifique de l'ouvrage.

Le matériel complémentaire mis en ligne dans notre site Web est réservé aux résidants du Canada, et ce, à des fins d'enseignement uniquement.

L'achat en ligne est réservé aux résidants du Canada.

Catalogage avant publication
de Bibliothèque et Archives nationales du Québec
et Bibliothèque et Archives Canada

Charron, Gilles, 1949 mars 26-, auteur

Algèbre linéaire et géométrie vectorielle/Gilles Charron et Pierre Parent.

5e édition.

Comprend un index.
Public cible : Pour les étudiants du niveau collégial.

ISBN 978-2-7650-5348-4

1. Algèbre linéaire. 2. Algèbre linéaire – Problèmes et exercices.
I. Parent, Pierre, 1944-, auteur. II. Titre.

QA184.2.C43 2018 512'.5 C2018-940110-9

CHENELIÈRE ÉDUCATION

5800, rue Saint-Denis, bureau 900
Montréal (Québec) H2S 3L5 Canada
Téléphone : 514 273-1066
Télécopieur : 514 276-0324 ou 1 800 814-0324
info@cheneliere.ca

TOUS DROITS RÉSERVÉS.
Toute reproduction du présent ouvrage, en totalité ou en partie, par tous les moyens présentement connus ou à être découverts, est interdite sans l'autorisation préalable de TC Média Livres Inc.
Toute utilisation non expressément autorisée constitue une contrefaçon pouvant donner lieu à une poursuite en justice contre l'individu ou l'établissement qui effectue la reproduction non autorisée.

ISBN 978-2-7650-5348-4

Dépôt légal : 2e trimestre 2018
Bibliothèque et Archives nationales du Québec
Bibliothèque et Archives Canada

Imprimé au Canada

1 2 3 4 5 ITIB 22 21 20 19 18

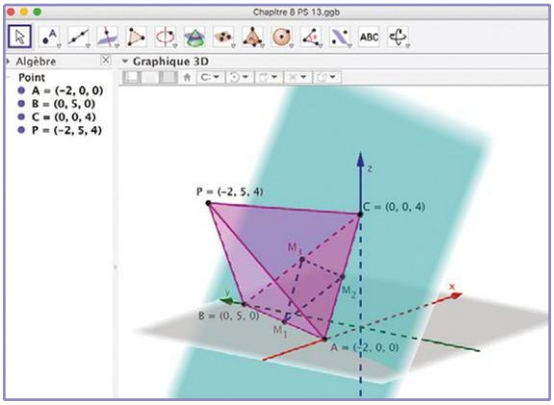
Gouvernement du Québec – Programme de crédit d'impôt pour l'édition de livres – Gestion SODEC.

Ce projet est financé en partie par le gouvernement du Canada | Canada

Entrez dans l'univers

Animations 3D GeoGebra

PLUS DE 65 ANIMATIONS GeoGebra !



Une sélection de problèmes à visualiser en 3D sont disponibles pour l'étudiant et l'enseignant. Afin de modifier les points de vue et de faciliter la compréhension des notions, des rotations peuvent être effectuées sur les objets représentés. Les fichiers, qui sont dynamiques, permettent aussi de changer les données de départ.

LISTE DES EXERCICES AVEC UNE ANIMATION GeoGebra

Chapitre 4

Exercices 4.5
- nº 13 ..... p. 236

Exercices récapitulatifs
- nº 21 a) ..... p. 240
- nº 30 a) et f) ..... p. 242
- nº 31 a) et b) ..... p. 242

Problèmes de synthèse
- nº 21 a), b) et c) ..... p. 245
- nº 25 ..... p. 246

Chapitre 5

Exercices 5.1
- nº 7 a) et d) ..... p. 255

Exercices 5.2
- nº 7 a) i) et a) iii) ..... p. 263

Exercices 5.4
- nº 4 a) ..... p. 288
- nº 5 a), b) i) et b) ii) ..... p. 288

Problèmes de synthèse
- nº 1 d), e), f) et g) ..... p. 294

Chapitre 6

Exercices 6.1
- nº 2 d) et e) ..... p. 317
- nº 5 d) ..... p. 318
- nº 9 b) et d) ..... p. 318

Exercices 6.2
- nº 1 a) ..... p. 331

Exercices 6.3
- nº 2 a) et b) ..... p. 338
- nº 3 a) ..... p. 338

Problèmes de synthèse
- nº 4 d) ..... p. 344
- nº 6 c) ..... p. 344

Chapitre 8

Exercices 8.1
- nº 6 a) ..... p. 403
- nº 7 a), c) i) et e) ..... p. 403

Exercices 8.2
- nº 2 a) ..... p. 412

Exercices 8.3
- nº 1 a) ..... p. 421
- nº 2 a) ..... p. 421
- nº 3 a) ..... p. 421
- nº 6 a) ..... p. 421
- nº 7 b), c) et d) ..... p. 421

Exercices récapitulatifs
- nº 4 ..... p. 423

Problèmes de synthèse
- nº 3 ..... p. 425
- nº 8 ..... p. 426
- nº 13 ..... p. 427
- nº 19 ..... p. 428
- nº 20 ..... p. 428

Chapitre 9

Exercices 9.2
- nº 4 a) et c) ..... p. 454
- nº 8 c) ..... p. 455
- nº 12 a) et b) ..... p. 455

Exercices 9.3
- nº 1 a) ..... p. 465
- nº 2 b) ..... p. 465
- nº 3 a) ..... p. 465
- nº 5 b) ..... p. 465
- nº 7 a) i) ..... p. 465
- nº 8 a) ..... p. 465
- nº 9 a), b) et c) ..... p. 465

Exercices récapitulatifs
- nº 5 a) ..... p. 467
- nº 15 a) ..... p. 469

Problèmes de synthèse
- nº 10 a) ..... p. 472
- nº 24 ..... p. 474

Caractéristiques du manuel

La démarche proposée dans cette collection est simple, va droit au but et évite les longues explications. Les auteurs énoncent d'abord les définitions et les théorèmes pour ensuite démontrer ces concepts dans des exemples. En outre, ils offrent des exercices nombreux et variés afin de mettre l'accent sur la compréhension des notions à l'étude.

Nouveautés dans cette édition

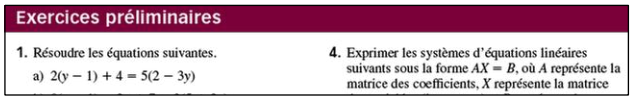
- Exercices de compréhension dans le corps des chapitres
- Identification des différents types d'application par des pictogrammes
- Problèmes intégrateurs faisant appel à plusieurs notions
- Annexe sur les méthodes de preuve
- Regroupement des vecteurs géométriques et algébriques dans le même chapitre
- Nouvelles sections dans l'ouvrage :
  - sur les applications des matrices (ex. : chaîne de Markov) ;
  - sur l'application des matrices inverses (ex. : modèle de Leontief) ;
  - sur l'étude de sections coniques à l'aide de déterminants ;
  - sur la droite de régression ;
  - sur la résolution de problèmes d'optimisation par la méthode duale.

Grande variété d'exercices

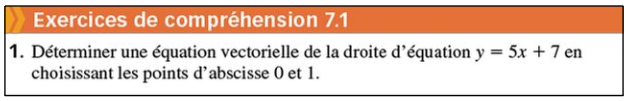
Ce manuel propose de nombreuses catégories d'exercices avec une gradation des niveaux de difficulté. Un corrigé de l'ensemble des exercices se trouve à la fin du manuel. La majorité des réponses aux exercices récapitulatifs et aux problèmes de synthèse sont également fournies.

Corrigé à la fin du manuel

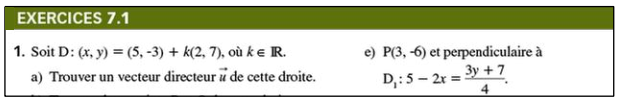
En début de chapitre



Dans le corps du chapitre



Après chacune des sections



En fin de chapitre



Solutions accessibles sur *i+* pour l'enseignant

En fin de manuel

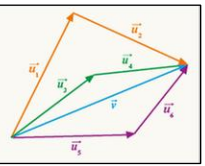


Utilisation pédagogique de la couleur

La couleur met en relief les aspects importants de la matière et guide l'étudiant dans son cheminement.

Exemple 1 La figure ci-contre nous permet de constater que :

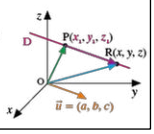
$$\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$
$$\vec{v} = \vec{u}_3 + \vec{u}_4$$
$$\vec{v} = \vec{u}_5 + \vec{u}_6$$



En utilisant certaines propriétés des vecteurs, déterminons une équation vectorielle de la droite D passant par le point $P(x_1, y_1, z_1)$ donné et ayant $\vec{u} = (a, b, c)$ comme vecteur directeur.

Soit $R(x, y, z)$, un point quelconque de D. Ainsi,

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} \quad \text{(loi de Chasles)}$$
$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t\vec{u}, \text{ où } t \in \mathbb{R} \quad (\text{car } \overrightarrow{PR} /\!/ \vec{u})$$
$$(x - 0, y - 0, z - 0) = (x_1 - 0, y_1 - 0, z_1 - 0) + t(a, b, c)$$
$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$



Exercices et problèmes appliqués aux domaines d'étude

Des pictogrammes permettent de repérer facilement le domaine d'application de l'exercice. La **Liste des applications**, en début de manuel, permet de les retrouver facilement.

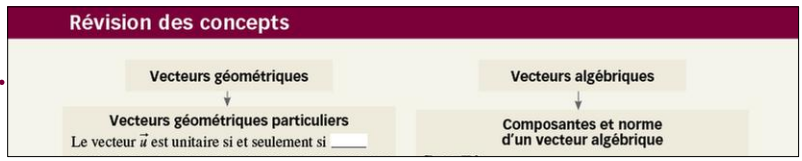
Administration
Biologie
Chimie
Géométrie
Physique
Sciences humaines

Ce pictogramme identifie les exercices qui nécessitent un outil technologique, tel que Maple.

Outil technologique

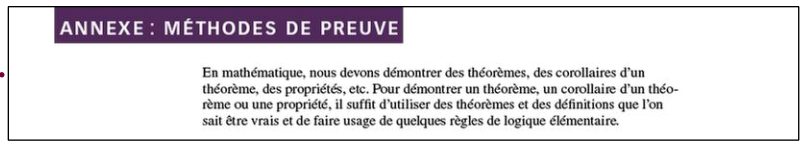
Révision des concepts

L'étudiant s'assure qu'il a bien compris les concepts à l'étude en remplissant le résumé des notions importantes du chapitre.

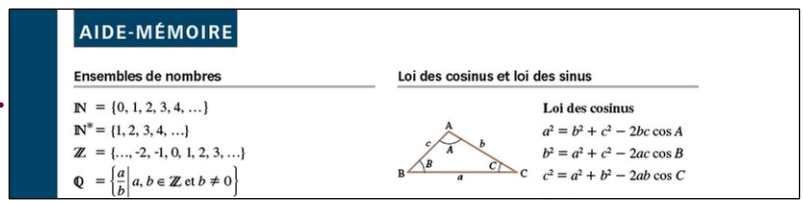


Outils pratiques en fin de manuel

Nouveauté – L'annexe présente diverses méthodes pour élaborer la preuve d'un théorème.



L'aide-mémoire regroupe les notions clés abordées dans le manuel.



Liste des applications

Applications en sciences humaines

Administration

Chapitre 1

- Salaires : exercices 1.1, nº 8, p. 13
- Économie : exercices 1.3, nº 17, p. 38, nº 18, p. 39
- Vente et profit : exercices 1.3, nº 19, p. 39
- Parts de marché : exercices 1.4, nº 9, p. 51
- Production quotidienne : exercices récapitulatifs, nº 1, p. 53
- Gestion de l'approvisionnement : exercices récapitulatifs, nº 13, p. 54
- Alimentation : exercices récapitulatifs, nº 14, p. 55
- Achat et vente : exercices récapitulatifs, nº 15, p. 55
- Publicité : problèmes de synthèse, nº 14, p. 59

Chapitre 2

- Investissement : exercices 2.1, nº 11, p. 71 ; exercices 2.3, nº 6, p. 98 ; exercices récapitulatifs, nº 20, p. 103 ; problèmes de synthèse, nº 11, p. 105
- Offre et demande : exercices 2.1, nº 12, p. 71
- Vente : exercices 2.2, nº 10, p. 89
- Achat : exercices 2.2, nos 11, 12 et 14, p. 89
- Coût minimal : exercices 2.3, nº 8, p. 98 ; exercices récapitulatifs, nº 23, p. 103
- Production quotidienne : exercices récapitulatifs, nº 5, p. 100, nº 17, p. 102
- Nombre de maisons : exercices récapitulatifs, nº 16, p. 102
- Nombre de spectateurs : exercices récapitulatifs, nº 18, p. 102
- Production : exercices récapitulatifs, nº 19, p. 102

Chapitre 3

- Investissement : exercices 3.3, nº 6, p. 151 ; exercices récapitulatifs, nº 19, p. 173
- Franchiseur : exercices 3.5, nº 4, p. 168
- Gestion des ressources : problèmes de synthèse, nº 17, p. 178

Chapitre 4

- Vecteurs et ventes : exercices 4.5, nº 14, p. 236

Chapitre 6

- Coût et profit : exercices récapitulatifs, nº 13, p. 341
- Profit : problèmes de synthèse, nº 8, p. 344

Chapitre 7

- Offre et demande : problèmes de synthèse, nº 13, p. 389

Chapitre 11

- Coût de fabrication : exercices 11.1, nº 5, p. 528
- Coût minimal : exercices 11.1, nº 6, p. 529 ; exercices 11.3, nos 4 et 5, p. 554 ; exercices récapitulatifs, nos 9 et 11, p. 557 ; problèmes de synthèse, nº 5, p. 558, nº 10, p. 560
- Profit maximal : exercices 11.1, nº 7, p. 529 ; exercices 11.2, nos 6 et 7, p. 546 ; exercices récapitulatifs, nos 7 et 10, p. 557 ; problèmes de synthèse, nº 4, p. 558, nos 6, 7 et 8, p. 559, nº 11, p. 560
- Maximisation d'un profit : exercices 11.1, nº 8, p. 529
- Investissement : exercices récapitulatifs, nº 8, p. 557
- Revenu maximal : problèmes de synthèse, nº 9, p. 559, nº 12, p. 560

Exemples contextualisés en administration : p. 82, 522, 524, 526, 542, 551

Sciences humaines

Chapitre 1

- Moyenne pondérée : exercices 1.2, nº 7, p. 23
- Réseau routier : exercices 1.4, nº 5, p. 50
- Travail et chômage : exercices 1.4, nº 6, p. 50
- Élections municipales : exercices 1.4, nº 8, p. 51
- Classement sportif : exercices récapitulatifs, nº 11, p. 54
- Points marqués : exercices récapitulatifs, nº 12, p. 54
- Circulation urbaine : exercices récapitulatifs, nº 19, p. 56
- Migration : exercices récapitulatifs, nos 20 et 21, p. 56
- Assurances : exercices récapitulatifs, nº 22, p. 57
- Avantage numérique : problèmes de synthèse, nº 10, p. 58
- Communications : problèmes de synthèse, nº 12, p. 59
- Comportement humain : problèmes de synthèse, nº 13, p. 59

Chapitre 2

- Âge des membres d'une famille : exercices 2.2, nº 15, p. 89
- Unités, dizaines et centaines : exercices 2.3, nº 7, p. 98
- Somme de nombres : exercices récapitulatifs, nº 15, p. 102
- Nombre de chaque espèce : exercices récapitulatifs, nº 21, p. 103
- Unités, dizaines et milliers : exercices récapitulatifs, nº 22, p. 103
- Circulation urbaine : problèmes de synthèse, nº 10, p. 105
- Prix d'un terrain : problèmes de synthèse, nº 15, p. 106
- Test objectif : problèmes de synthèse, nº 19, p. 106

Chapitre 3

- Cryptographie : exercices 3.5, nº 5, p. 168 ; exercices récapitulatifs, nº 15, p. 172 ; problèmes de synthèse, nos 12 et 13, p. 177
- Modèle de Leontief : exercices 3.5, nos 6, 7 et 8, p. 168 ; exercices récapitulatifs, nos 17 et 18, p. 173 ; problèmes de synthèse, nº 15, p. 177, nº 16, p. 178

- Jeu : problèmes de synthèse, n° 14, p. 177
- Moyenne arithmétique : problèmes de synthèse, n° 19, p. 179

Chapitre 6

- Signal d'une station de radio : problèmes de synthèse, n° 9, p. 345
- Trajectoire d'un bateau : problèmes de synthèse, n° 10, p. 345

Chapitre 7

- Estimation de distances : exercices récapitulatifs, n° 10, p. 384
- Estimation de quantités : exercices récapitulatifs, n° 11, p. 384
- Taxes municipales : problèmes de synthèse, n° 12, p. 389

Exemples contextualisés en sciences humaines : p. 15, 17, 24, 43, 44, 46, 47, 163, 165, 166

Applications en sciences de la nature

 Physique

Chapitre 2

- Vitesse : exercices récapitulatifs, n° 14, p. 102
- Masse d'objets en équilibre : problèmes de synthèse, n° 12, p. 105
- Angle de réflexion : problèmes de synthèse, n° 13, p. 105
- Temps de remplissage : problèmes de synthèse, n° 14, p. 105
- Vitesse et distance : problèmes de synthèse, n° 16, p. 106
- Distance de freinage : problèmes de synthèse, n° 17, p. 106

Chapitre 3

- Lois de Kirchhoff : exercices récapitulatifs, n° 20, p. 173
- Température moyenne : problèmes de synthèse, n° 18, p. 178

Chapitre 4

- Force équilibrante : exercices 4.2, n° 9, p. 204
- Force : exercices 4.2, n°s 10 et 11, p. 204 ; exercices récapitulatifs, n° 11, p. 239, n°s 12 et 13, p. 240
- Tension : exercices 4.2, n° 12, p. 204
- Résultante et équilibrante : exercices 4.2, n° 13, p. 205
- Vecteur vitesse : exercices 4.2, n°s 14 et 15, p. 205
- Distance et temps : exercices récapitulatifs, n° 10, p. 239
- Direction et vitesse : exercices récapitulatifs, n° 14, p. 240
- Vitesse : problèmes de synthèse, n° 8, p. 243
- Vecteur de Fresnel : problèmes de synthèse, n° 9, p. 244
- Centre de gravité : problèmes de synthèse, n° 27, p. 246

Chapitre 6

- Travail : exercices 6.1, n° 12, p. 318, n°s 14 et 16, p. 319 ; exercices récapitulatifs, n° 16, p. 342
- Force et travail : exercices 6.1, n° 13, p. 318
- Travail et déplacement : exercices 6.1, n° 15, p. 319
- Moment de force : exercices 6.2, n° 11, p. 332 ; exercices récapitulatifs, n°s 17 et 18, p. 342
- Moment de force et force : exercices récapitulatifs, n° 19, p. 342
- Électricité : puissance : exercices récapitulatifs, n° 20, p. 342

Chapitre 7

- Distance et vitesse : exercices récapitulatifs, n°s 12, 13 et 14, p. 385
- Position et distance : problèmes de synthèse, n° 14, p. 390

Chapitre 8

- Distance minimale : exercices récapitulatifs, n° 14, p. 425
- Vitesse : problèmes de synthèse, n° 10, p. 427
- Vitesse et distance : problèmes de synthèse, n°s 11 et 12, p. 427

Chapitre 9

- Vitesse : exercices récapitulatifs, n° 7, p. 468

Exemples contextualisés en physique : p. 199, 200, 230

 Chimie

Chapitre 2

- Équations chimiques : exercices 2.2, n° 13, p. 89 ; exercices récapitulatifs, n° 13, p. 101
- Mélange de substances : problèmes de synthèse, n° 18, p. 106

Chapitre 3

- Alliage : problèmes de synthèse, n° 11, p. 177

Chapitre 6

- Molécule de méthane : problèmes de synthèse, n° 7, p. 344

Exemple contextualisé en chimie : p. 86

 Biologie

Chapitre 1

- Population animale : problèmes de synthèse, n° 11, p. 58
- Maladie de Lyme : problèmes de synthèse, n° 15, p. 60

Chapitre 6

- Génétique : exercices récapitulatifs, n° 14, p. 341

Chapitre 7

- Taux d'alcoolémie : exercices 7.1, n° 13, p. 363
- Risque d'infarctus : problèmes de synthèse, n° 10, p. 388
- Pression artérielle : problèmes de synthèse, n° 11, p. 388

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier les nombreuses personnes-ressources qui ont collaboré à l'élaboration des éditions précédentes de cet ouvrage, soit : Magella Bélanger, Gilles Boutin, Robert Bradley, Yannick Brochu, Nancy Crosnier, Marie-Paule Dandurand, André Douville, Serge Fontaine, Jean Fradette, Jean-Claude Girard, Gilles Goulet, Marthe Grenier, Daniel Lachance, Christiane Lacroix, Nathalie Ladouceur, Jacques Lafond, Pierre Lantagne, Géraldine Martin, Paul Paquet, Diane Paquin, Robert Paquin, Nicolas Pfister, Suzanne Phillips, Marc Simard, Nathalie Sirois, Normand Vanier, Dimitri Zuchowski, ainsi que les enseignants du Département de mathématiques du Cégep André-Laurendeau.

Nous voulons également souligner l'excellent travail des enseignantes et des enseignants qui ont, par leurs précieux commentaires et leur travail de consultation, grandement contribué à enrichir les versions provisoires de chacun des chapitres de cette édition :

Louis Beaudet, Cégep Édouard-Montpetit

Rachelle Bellerive, Cégep de Sorel-Tracy

Audrey Dagenais, Cégep Gérald-Godin

Serge Fontaine, Cégep Saint-Jean-sur-Richelieu

Sylvie Fortin, Collège Ahuntsic

Marc Leclerc, Polytechnique Montréal

Guillaume Poliquin, Collège Ahuntsic

Audrey Samson, Collège Lionel-Groulx

Stéphanie Tessier, Cégep de Victoriaville

Finalement, nous tenons à remercier chaleureusement les personnes suivantes pour leur apport important à cet ouvrage :

Stéphanie Tessier, pour le développement d'outils pédagogiques pour les enseignants, pour la création de questions d'histoire et pour le développement de problèmes intégrateurs, de pair avec sa collègue Emmanuelle Hinse, que nous remercions également ;

Sylvie Fortin, pour le développement de représentations GeoGebra pour une série d'exercices pertinents ;

Louis Charbonneau, pour avoir rédigé les perspectives et les capsules historiques ;

Sophie Gagnon et Marie Victoire Martin, pour l'édition ;

Jean-Philippe Michaud, pour la coordination et la gestion de projet ;

Katie Delisle, pour la correction d'épreuves ;

Sophie Jama et Solange Lemaitre-Provost, pour leur collaboration à la gestion de projet ;

Dominique Parent, pour les photographies reproduites dans le manuel.

Gilles Charron

Pierre Parent

Table des matières

CHAPITRE 1 Matrices 1



Perspective historique 2

Exercices préliminaires 3

1.1 Notion de matrices 4
- Définition de matrices 4
- Matrices particulières 8

1.2 Addition de matrices et multiplication d'une matrice par un scalaire 14
- Égalité de deux matrices 14
- Addition de matrices 15
- Multiplication d'une matrice par un scalaire 17
- Propriétés de l'addition de matrices et de la multiplication d'une matrice par un scalaire 20

1.3 Multiplication de matrices 23
- Multiplication de matrices 24
- Propriétés de la multiplication de matrices 31
- Matrices idempotente, nilpotente et transposée 33

1.4 Applications des matrices 40
- Systèmes d'équations et équations matricielles 40
- Matrice de permutation 41
- Matrice d'adjacence 42
- Matrice d'incidence 42
- Matrice de migration 44
- Chaîne de Markov 45

Révision des concepts 52

Exercices récapitulatifs 53

Problèmes de synthèse 57

CHAPITRE 2 Résolution de systèmes d'équations linéaires 61



Perspective historique 62

Exercices préliminaires 63

2.1 Résolution de systèmes d'équations linéaires par des méthodes élémentaires 63
- Systèmes d'équations linéaires 64
- Méthode de substitution 66
- Systèmes équivalents d'équations linéaires 67
- Méthode d'élimination 68

2.2 Résolution de systèmes d'équations linéaires et de systèmes homogènes d'équations linéaires par la méthode de Gauss 72
- Méthode de Gauss 72
- Problèmes contextuels 82
- Systèmes homogènes d'équations linéaires 83
- Application en chimie 86

2.3 Résolution de systèmes d'équations linéaires par la méthode de Gauss-Jordan et inversion de matrices carrées par cette méthode 90
Résolution de systèmes d'équations linéaires par la méthode de Gauss-Jordan 90
Inversion de matrices carrées par la méthode de Gauss-Jordan 93
Révision des concepts 99
Exercices récapitulatifs 100
Problèmes de synthèse 103

CHAPITRE 3 **Déterminants et matrices inverses** 107



Perspective historique 108
Exercices préliminaires 109
3.1 Déterminant d'une matrice carrée 109
Système d'équation linéaire d'une équation à une variable 110
Système d'équations linéaires de deux équations à deux variables 111
Interprétation géométrique des déterminants 2 × 2 112
Système d'équations linéaires de trois équations à trois variables 114
Mineur, cofacteur et déterminant 118
3.2 Théorèmes relatifs aux déterminants 126
Déterminants de matrices carrées particulières 126
Déterminants de matrices carrées 127
3.3 Applications reliées au calcul de déterminants 138
Résolution de systèmes de *n* équations linéaires à *n* inconnues à l'aide de la règle de Cramer 139
Rang d'une matrice 142
Étude de sections coniques 147
3.4 Matrice inverse 151
Adjointe et inverse d'une matrice carrée 152
Propriétés des matrices inverses 157
3.5 Applications de la matrice inverse 159
Résolution de systèmes de *n* équations linéaires à *n* inconnues à l'aide de la matrice inverse 159
Cryptographie 163
Modèle de Leontief 164
Révision des concepts 169
Exercices récapitulatifs 170
Problèmes de synthèse 175

CHAPITRE 4 **Vecteurs géométriques et vecteurs algébriques** 181



Perspective historique 182
Exercices préliminaires 183
4.1 Notion de vecteurs géométriques 184
Définition d'un vecteur géométrique 184
Vecteurs géométriques particuliers 187
4.2 Addition et soustraction de vecteurs géométriques 191
Vecteur somme et vecteur différence 191
Addition de *n* vecteurs géométriques 194
Propriétés de l'addition de vecteurs géométriques 197
Norme, direction et sens d'un vecteur somme 198

Applications en physique . . . 199
Projection orthogonale . . . 200

4.3 Multiplication d'un vecteur géométrique par un scalaire . . . 205
Propriétés de la multiplication d'un vecteur géométrique par un scalaire . . . 207
Vecteurs géométriques parallèles . . . 208
Applications des vecteurs géométriques . . . 210

4.4 Vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^n$ . . . 213
Représentation graphique d'un point dans $\mathbb{R}^3$ . . . 214
Composantes de vecteurs algébriques . . . 215
Vecteurs algébriques particuliers . . . 219
Norme d'un vecteur algébrique . . . 221

4.5 Opérations sur les vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^n$ . . . 225
Addition de vecteurs algébriques . . . 225
Multiplication d'un vecteur algébrique par un scalaire et soustraction de vecteurs algébriques . . . 227
Propriétés de l'addition de vecteurs algébriques et de la multiplication d'un vecteur algébrique par un scalaire . . . 232

Révision des concepts . . . 237

Exercices récapitulatifs . . . 238

Problèmes de synthèse . . . 242



CHAPITRE 5 Combinaison linéaire, dépendance linéaire, espaces vectoriels et bases 247

Perspective historique . . . 248

Exercices préliminaires . . . 249

5.1 Combinaison linéaire de vecteurs géométriques et algébriques . . . 250

5.2 Dépendance et indépendance linéaire de vecteurs géométriques et algébriques . . . 256
Vecteurs linéairement dépendants et vecteurs linéairement indépendants . . . 256
Vecteurs colinéaires . . . 260
Vecteurs coplanaires . . . 261

5.3 Espaces vectoriels . . . 264
Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ . . . 264
Sous-espaces vectoriels . . . 270

5.4 Bases d'un espace vectoriel et théorèmes sur les bases . . . 273
Bases d'un espace vectoriel . . . 275
Théorèmes sur les bases . . . 282
Bases orthogonales et bases orthonormées . . . 285

Révision des concepts . . . 290

Exercices récapitulatifs . . . 291

Problèmes de synthèse . . . 294



CHAPITRE 6 Produits de vecteurs 297

Perspective historique . . . 298

Exercices préliminaires . . . 299

6.1 Produit scalaire de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ . . . 300
Définition du produit scalaire . . . 300

Angle formé par deux vecteurs . . . 305
Propriétés du produit scalaire . . . 308
Projection orthogonale . . . 310
Applications du produit scalaire en géométrie . . . 312
Applications du produit scalaire en physique . . . 314
Applications du produit scalaire en économie . . . 315
Applications du produit scalaire aux combinaisons linéaires . . . 316

6.2 Produit vectoriel de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ . . . 320
Définition du produit vectoriel . . . 320
Propriétés du produit vectoriel . . . 324
Applications du produit vectoriel en géométrie . . . 327
Applications du produit vectoriel en physique . . . 329

6.3 Produit mixte de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ . . . 332
Définition du produit mixte . . . 333
Propriétés du produit mixte . . . 334
Applications du produit mixte en géométrie . . . 335

Révision des concepts . . . 339

Exercices récapitulatifs . . . 340

Problèmes de synthèse . . . 343

CHAPITRE 7 La droite dans le plan cartésien 347



Perspective historique . . . 348

Exercices préliminaires . . . 349

7.1 Équations de la droite dans le plan cartésien . . . 350
Équation vectorielle d'une droite dans le plan . . . 350
Équations paramétriques d'une droite dans le plan . . . 353
Équation symétrique d'une droite dans le plan . . . 354
Équation cartésienne d'une droite dans le plan . . . 356
Application en statistique . . . 359

7.2 Position relative de deux droites et angle formé par deux droites dans le plan cartésien . . . 363
Position relative de deux droites dans le plan . . . 364
Angle formé par deux droites dans le plan . . . 366
Faisceau de droites dans le plan . . . 369

7.3 Distance entre un point et une droite, et distance entre deux droites parallèles dans le plan cartésien . . . 372
Distance entre un point et une droite dans le plan . . . 372
Distance entre deux droites parallèles dans le plan . . . 377
Applications en géométrie . . . 378

Révision des concepts . . . 382

Exercices récapitulatifs . . . 383

Problèmes de synthèse . . . 387

CHAPITRE 8 La droite dans l'espace cartésien 393



Perspective historique . . . 394

Exercices préliminaires . . . 395

8.1 Équations de la droite dans l'espace cartésien . . . 395
Équation vectorielle d'une droite dans l'espace . . . 396

Équations paramétriques d'une droite dans l'espace . . . 398
Équations symétriques d'une droite dans l'espace . . . 399
Forme ensembliste d'une droite dans l'espace . . . 402

8.2 Position relative de deux droites et angle formé par deux droites dans l'espace cartésien . . . 404
Position relative de deux droites dans l'espace . . . 404
Angle formé par deux droites dans l'espace . . . 409

8.3 Distance entre un point et une droite, et distance entre deux droites dans l'espace cartésien . . . 413
Distance entre un point et une droite dans l'espace . . . 414
Distance entre deux droites parallèles . . . 415
Distance entre deux droites non parallèles . . . 416
Applications en géométrie . . . 418

Révision des concepts . . . 422

Exercices récapitulatifs . . . 423

Problèmes de synthèse . . . 425

CHAPITRE 9 Le plan dans l'espace cartésien 429



Perspective historique . . . 430

Exercices préliminaires . . . 431

9.1 Équations du plan dans l'espace cartésien . . . 431
Équation vectorielle d'un plan dans l'espace . . . 432
Équations paramétriques d'un plan dans l'espace . . . 435
Équation cartésienne d'un plan dans l'espace . . . 436
Équation normale et équation réduite d'un plan dans l'espace . . . 441

9.2 Position relative de deux plans et position relative d'une droite et d'un plan dans l'espace cartésien . . . 445
Position relative de deux plans dans l'espace . . . 446
Angle formé par deux plans dans l'espace . . . 449
Position relative d'une droite et d'un plan dans l'espace . . . 450
Angle formé par une droite et un plan dans l'espace . . . 452
Faisceau de plans . . . 452

9.3 Distances relatives aux plans dans l'espace cartésien . . . 456
Distance entre un point et un plan dans l'espace . . . 456
Distance entre deux plans parallèles dans l'espace . . . 459
Distance entre un plan et une droite parallèle au plan dans l'espace . . . 460
Applications en géométrie . . . 460

Révision des concepts . . . 466

Exercices récapitulatifs . . . 467

Problèmes de synthèse . . . 470

CHAPITRE 10 Nombres complexes 475



Perspective historique . . . 476

Exercices préliminaires . . . 477

10.1 Forme binomiale et opérations sur les nombres complexes . . . 477
Définition et représentation graphique de nombres complexes . . . 478
Addition, soustraction, multiplication et division de nombres complexes . . . 480

10.2 Forme trigonométrique et forme exponentielle de nombres complexes 486
Forme trigonométrique de nombres complexes 487
Forme exponentielle de nombres complexes 489
Multiplication et division de nombres complexes sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle 491
10.3 Formule de Moivre et racines *n*-ièmes de nombres complexes 495
Formule de Moivre 495
Racines *n*-ièmes de nombres complexes 498
Résolution d'équations 501
Lieux géométriques dans le plan d'Argand 504
Révision des concepts 506
Exercices récapitulatifs 507
Problèmes de synthèse 509

CHAPITRE 11 Programmation linéaire 511



Perspective historique 512
Exercices préliminaires 513
11.1 Résolution de problèmes d'optimisation par la méthode graphique . . . 513
Lieux géométriques 514
Systèmes d'inéquations linéaires 516
Contraintes, région admissible et polygone de contraintes 517
Optimisation d'une fonction linéaire à deux variables 518
Résolution de problèmes d'optimisation 522
11.2 Résolution de problèmes de maximisation par la méthode du simplexe 530
Méthode du simplexe 532
11.3 Résolution de problèmes de minimisation par la méthode duale 546
Méthode duale 548
Révision des concepts 555
Exercices récapitulatifs 556
Problèmes de synthèse 558

Problèmes intégrateurs 561

Annexe : Méthodes de preuve 563

Corrigé 568

Sources iconographiques 676

Index 677

Aide-mémoire 680

1 Matrices



Perspective historique	2
Exercices préliminaires	3
1.1 Notion de matrices	4
1.2 Addition de matrices et multiplication d'une matrice par un scalaire	14
1.3 Multiplication de matrices	23
1.4 Applications des matrices	40
Révision des concepts	52
Exercices récapitulatifs	53
Problèmes de synthèse	57

Les matrices sont des tableaux contenant des éléments disposés en lignes et en colonnes. Ces représentations sont fréquemment utilisées dans des domaines comme l'administration, les sciences de la nature, les sciences humaines, etc. Dans ce chapitre, nous définirons trois opérations élémentaires sur les matrices : l'addition de matrices, la multiplication d'une matrice par un scalaire et la multiplication de matrices.

En particulier, l'étudiant pourra résoudre le problème suivant (qui se trouve au n° 22 des exercices récapitulatifs, à la page 57).

Trois compagnies d'assurance habitation se partagent le marché d'une petite ville de la manière suivante. La compagnie A assure 30 % des maisons de la ville, la compagnie B en assure 20 % et les maisons restantes sont assurées par la compagnie C. La compagnie B décide d'offrir un rabais sur les primes ayant pour conséquence que, annuellement, pour les quelques années suivantes, 20 % des clients de A se tournent vers B et 10 % des clients de A choisissent C pour les assurer ; 15 % des clients de B s'assurent avec A et 5 % des clients de B signent un contrat avec C ; et 15 % des clients de C la délaissent pour faire affaire avec A et 25 % des clients de C se tournent vers B.

a) Déterminer la matrice de transition T.

b) […]

De l'empire du Milieu à l'Empire britannique : décrire beaucoup avec peu de symboles

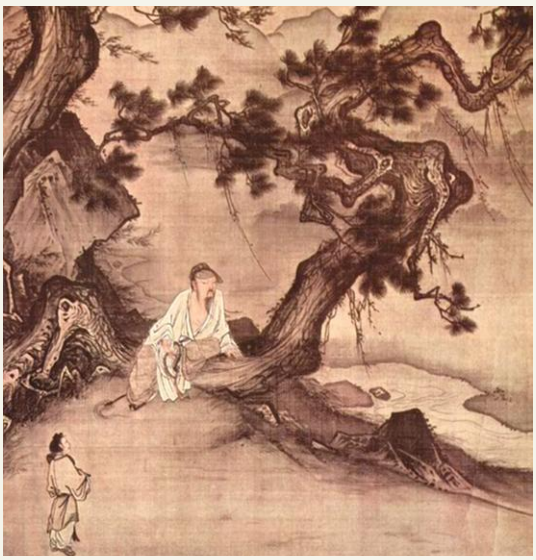
1

La notion de matrice prend son origine dans les travaux visant à résoudre des systèmes d'équations linéaires. (Pour un aperçu de l'histoire de la résolution des systèmes d'équations linéaires, voir la perspective historique du chapitre 2.) L'exemple probablement le plus ancien se trouve dans un livre intitulé *Neuf chapitres de l'art des mathématiques* (*Jiuzhang*) écrit en Chine entre 200 et 100 av. J.-C., au début de la dynastie des Han. L'auteur veut montrer comment résoudre le problème suivant : « Il y a trois sortes de grains dont trois paquets de la première sorte, deux de la deuxième sorte et un de la troisième correspondent à 39 mesures. Deux paquets de la première sorte, trois de la deuxième et un de la troisième correspondent à 34 mesures. Enfin, un paquet de la première sorte, deux de la deuxième et trois de la troisième font 26 mesures. Combien de mesures de grains sont contenues dans un paquet de chacune des sortes ? » Résoudre ce problème revient, dans notre écriture symbolique actuelle, à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}$$

Pour sa part, l'auteur chinois propose une méthode basée sur la manipulation du tableau de nombres suivants :

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$



La peinture chinoise est un peu comme la représentation mathématique, elle est minimaliste.

Dans ce tableau, les colonnes sont formées des coefficients et des termes constants de nos équations, de la dernière à la première.

Voilà l'ancêtre de nos matrices. Cette idée d'utiliser des tableaux de nombres n'est pas vraiment exploitée en Occident avant le XVIII^e^ siècle. Soulignons au passage que la notation a_{ij} pour noter les coefficients de façon générale, et plus tard les nombres composant une matrice, tire son origine d'une lettre datée de 1683 que le mathématicien et philosophe **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716), un des créateurs du calcul différentiel et intégral, adresse à son ami le marquis de L'Hospital (1661-1704). Dans cette lettre, Leibniz écrit $10 + 11x + 12y = 0$ pour la première équation d'un système. Dans cette équation, les nombres ont une signification qui n'est pas numérique, mais plutôt symbolique. D'abord, le « 10 » ne représente pas le nombre 10 ; le « 1 » représente la première équation et le « 0 » représente le terme constant. Ensuite, le premier « 1 » du « 11 » représente la première équation et le second « 1 » représente le coefficient de x. Finalement, le « 1 » du « 12 » représente la première équation et le « 2 » représente le coefficient de y. La seconde équation s'écrira donc $20 + 21x + 22y = 0$. Selon la notation utilisée aujourd'hui, la première équation de Leibniz s'écrirait $a_{10} + a_{11}x + a_{12}y = 0$.

La première publication sur les tableaux de nombres dans laquelle ceux-ci sont étudiés pour eux-mêmes, un peu comme on le fait dans le présent chapitre, paraît en 1858. Écrit par le mathématicien britannique **Arthur Cayley** (1821-1895), cet article définit notamment les opérations d'addition et de multiplication et les inverses multiplicatifs de tableaux. Il est tout à fait dans l'esprit des mathématiques de l'époque, alors qu'on cherche à établir des théories abstraites pour réunir sous un même thème plusieurs règles et méthodes jusqu'alors considérées indépendantes les unes des autres. Le mot « matrice » n'a toutefois pas d'abord été utilisé par Cayley, mais par son ami James Joseph Sylvester (1814-1897). Nous en reparlerons au chapitre 3. Cayley a écrit cet article, comme bon nombre d'autres articles sur les mathématiques qui l'ont rendu célèbre, alors qu'il pratiquait le droit à Londres.

Exercices préliminaires

1. Soit a et $b \in \mathbb{R}$. Compléter :

a) fermeture de l'addition :

$(a + b) \in$ ____

b) fermeture du produit :

$ab \in$ ____

2. Soit a, b et $c \in \mathbb{R}$. Compléter les égalités suivantes qui correspondent aux propriétés de l'addition et de la multiplication pour les nombres réels.

a) Commutativité de l'addition :

$a + b =$ ____

b) Associativité de l'addition :

$(a + b) + c =$ ____

c) Existence d'un élément neutre, $0 \in \mathbb{R}$, pour l'addition :

$a + 0 =$ ____

d) Existence d'un élément inverse pour l'addition :

$a + (-a) =$ ____

e) Commutativité de la multiplication :

$ab =$ ____

f) Associativité de la multiplication :

$(ab)c =$ ____

g) Distributivité de la multiplication sur l'addition :

i) $a(b + c) =$ ____

ii) $(a + b)c =$ ____

h) Existence d'un élément neutre, $1 \in \mathbb{R}$, pour la multiplication :

$1a =$ ____

3. Répondre par vrai (V) ou faux (F).

a) Pour tout $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$.

i) $(a + b) \in \mathbb{N}$

ii) $(a - b) \in \mathbb{N}$

iii) $ab \in \mathbb{N}$

iv) $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$, où $b \neq 0$

b) Pour tout $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$.

i) $(c + d) \in \mathbb{Z}$

ii) $(c - d) \in \mathbb{Z}$

iii) $cd \in \mathbb{Z}$

iv) $\frac{c}{d} \in \mathbb{Z}$, où $d \neq 0$

c) Pour tout $r \in \mathbb{Q}$ et $s \in \mathbb{Q}$.

i) $(r - s) \in \mathbb{Q}$

ii) $\left(\sqrt{2} + r\right) \in \mathbb{Q}$

iii) $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, où $s \neq 0$

iv) $\frac{r}{\pi} \in \mathbb{Q}$

4. a) Soit $a_{ij} = i - j^2$, calculer :

i) a_{34} ii) a_{52}

b) Soit $b_{ij} = \frac{-3i + j}{i}$, calculer :

i) b_{13} ii) b_{31}

c) Soit $c_{ij} = (-1)^{i+j}\, ij$, calculer :

i) c_{34} ii) c_{13}

5. Développer les sommations suivantes.

a) $\sum_{k=1}^{4} a_k b_k$

b) $\sum_{i=1}^{5} (-1)^{(i+4)}\, a_i$

c) $\sum_{i=1}^{3} a_{4i} b_{i5}$

d) $\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

6. Utiliser le symbole Σ pour représenter la somme suivante.

$a_{p1}b_{1q} + a_{p2}b_{2q} + \ldots + a_{p8}b_{8q}$

7. Résoudre les systèmes d'équations suivants.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x - y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -0{,}2x + 0{,}3y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$

1.1 Notion de matrices

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra distinguer certaines matrices.

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de donner la définition d'une matrice ;
- de déterminer la dimension d'une matrice ;
- de déterminer les éléments d'une matrice ;
- de donner la définition des types de matrices suivants : matrice nulle, matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée, matrice triangulaire supérieure, matrice triangulaire inférieure, matrice diagonale, matrice scalaire, matrice identité, matrice symétrique, matrice antisymétrique ;
- de donner la définition de la trace d'une matrice.

Définition de matrices

Il est fréquent que les revues, les journaux et les manuels présentent sous forme de tableau les données servant à analyser un sujet précis.

Exemple 1 Le tableau suivant comporte plusieurs données sur le rendement des équipes de la division Est de la Ligue de hockey junior majeur du Québec.

Classement final								
Équipe	**PJ**	**V**	**D**	**DP**	**DF**	**BP**	**BC**	**Pts**
Baie-Comeau	68	47	16	2	3	255	170	99
Rimouski	68	45	16	3	4	258	194	97
Québec	68	39	17	5	7	255	209	90
Victoriaville	68	33	27	5	3	229	219	74
Chicoutimi	68	27	40	1	0	183	254	55
Shawinigan	68	20	39	4	5	163	251	49

Ainsi, ce tableau nous permet entre autres de constater que

- toutes les équipes ont joué 68 parties (PJ) ;
- l'équipe de Baie-Comeau a obtenu 47 victoires (V), 16 défaites (D) et 99 points (Pts) ;
- l'équipe de Rimouski a subi 3 défaites en prolongation (DP) et 4 défaites en fusillade (DF) ;
- l'équipe de Victoriaville a marqué 229 buts (BP) et elle en a alloué 219 (BC).

Un tel tableau ou arrangement de nombres disposés en lignes et en colonnes s'appelle une matrice.

Cette matrice, donnant le classement final des équipes, est constituée de 6 lignes et de 8 colonnes.

Dimension
Format

Nous dirons qu'elle est de dimension (ou de format) 6 par 8, notée 6×8.

Exemple 2 Le tableau suivant indique la cote, en dollars canadiens, de différents titres à la fermeture de la Bourse de Toronto, ainsi que leur variation quotidienne en dollars et en pourcentage.

Titres	Fermeture ($)	Variation ($)	Variation (%)
Cascades	17,67	0,24	1,36
Saputo	40,35	0,41	1,02
BCE	58,01	0,13	0,22
Dollarama	122,38	-0,60	-0,49
Transcontinental	25,72	-0,14	-0,54

Cette matrice est constituée de 5 lignes et de 3 colonnes ; elle est ainsi de dimension 5 par 3, notée 5×3.

Lorsque chaque ligne et chaque colonne d'une matrice est explicitée, nous disons que cette matrice est « légendée ».

DÉFINITION 1.1

Une **matrice de dimension *m* par *n***, ou de format m par n, est un tableau rectangulaire ordonné d'éléments disposés sur m lignes et n colonnes.

À moins d'avis contraire, les éléments d'une matrice sont des nombres réels.

Une matrice A de dimension m par n peut être représentée de l'une ou l'autre des façons suivantes.

Représentations d'une matrice de m lignes et n colonnes

Façon 1

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

← Ligne 1, ← Ligne 2, ← Ligne i, ← Ligne m

Colonne 1, Colonne 2, Colonne j, Colonne n

Façon 2

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

De façon générale, nous désignons une matrice à l'aide d'une lettre majuscule, et les éléments de celle-ci à l'aide de la même lettre, en minuscule et accompagnée des indices appropriés.

Ainsi, dans ce tableau, a_{ij} ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) représentent les éléments (ou entrées) de la matrice A. De façon particulière, les indices i et j donnent la position des éléments de la matrice ; ainsi a_{ij} est l'élément situé sur la i-ième ligne et la j-ième colonne. Les nombres entiers positifs m et n représentent respectivement le nombre de lignes et le nombre de colonnes de la matrice (le nombre de lignes précède toujours le nombre de colonnes).

Nous pouvons également noter la matrice A précédente de l'une des façons suivantes.

$$A_{m \times n} \quad \vdots \quad A_{mn} \quad \vdots \quad [a_{ij}]_{mn}$$

1

Exemple 3 Représentons à l'aide de matrices légendées les résultats que Jean, Marie et Lucie ont obtenus à leur cours de mathématiques.

	Examen 1	Examen 2	Examen 3	Devoir	Note finale
Jean	75	90	85	90	85
Marie	78	87	87	92	86
Lucie	69	78	90	87	81

La dimension de cette matrice est 3×5.

	Jean	Marie	Lucie
Examen 1	75	78	69
Examen 2	90	87	78
Examen 3	85	87	90
Devoir	90	92	87
Note finale	85	86	81

La dimension de cette matrice est 5×3.

Ces matrices nous permettent de constater, par exemple, que Jean a obtenu 75 au premier examen, que Lucie a obtenu la meilleure note au troisième examen et que Marie a obtenu une note finale de 86.

Les valeurs 75, 78, 69, 90, …, 86 et 81 sont les éléments de ces matrices.

Exemple 4 Soit la matrice A suivante : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & 1 \\ 9 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

- La dimension de A est 3×4.
- L'élément a_{23} est -2.
- 6 est l'élément a_{32}.

Exercices de compréhension 1.1

1. Soit $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 2 & -4 & \pi \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -2 & -5 \\ 8 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$.

a) Déterminer la dimension de la matrice

i) B ; ii) C.

b) Déterminer les éléments

i) b_{21} et b_{12} ; ii) c_{22} et c_{32}.

c) Donner la position de l'élément

i) π ; ii) 9.

Voici trois méthodes différentes pour enregistrer une matrice et ses éléments à l'aide de Maple.

Exemple 5 À l'aide de Maple, effectuons les opérations suivantes.

a) Enregistrons les matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ et identifions certains éléments.

Première méthode

```
Matrix(2, 3, [2, -4, 5, -1, 0, 6]);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Il est parfois essentiel de nommer une matrice, afin d'identifier par la suite un ou plusieurs éléments de la matrice ou pour effectuer des opérations avec cette matrice.

```
B := Matrix(3, 2, [2, -4, 5, -1, 0, 6]);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Identification d'un élément d'une matrice

```
B[1, 2];
```

$$-4$$

```
B[3, 2];
```

$$6$$

b) Enregistrons la matrice $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0{,}2 & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{4} & \sqrt{5} & -6 \end{bmatrix}$ d'une façon différente.

Deuxième méthode

```
C := Matrix([[1/2, 0.2, 1/3], [7/4, sqrt(5), -6]]);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0.2 & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{4} & \sqrt{5} & -6 \end{bmatrix}$$

c) Enregistrons la matrice $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ en cliquant sur l'icône appropriée pour ensuite entrer les éléments de la matrice.

Troisième méthode

```
E := [1 2 3]
     [4 5 6]
     [7 8 9];
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Remarque : Dans Maple, on ne peut pas désigner une matrice par la lettre D. Cette lettre est associée à la dérivée d'une fonction.

Exemple 6

a) Construisons la matrice $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ telle que $a_{ij} = (-1)^{i+j}\, ij$.

Déterminons les éléments de la matrice.

$a_{11} = (-1)^{1+1}(1)(1) = 1$ | $a_{12} = (-1)^{1+2}(1)(2) = -2$ | $a_{13} = (-1)^{1+3}(1)(3) = 3$

$a_{21} = (-1)^{2+1}(2)(1) = -2$ | $a_{22} = (-1)^{2+2}(2)(2) = 4$ | $a_{23} = (-1)^{2+3}(2)(3) = -6$

$a_{31} = (-1)^{3+1}(3)(1) = 3$ | $a_{32} = (-1)^{3+2}(3)(2) = -6$ | $a_{33} = (-1)^{3+3}(3)(3) = 9$

d'où $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$

b) Utilisons Maple pour construire la matrice A précédente.

```
a := (i, j) → (-1)^(i + j) • i • j;
```

$$(i, j) \to (-1)^{i+j}\, i\, j$$

```
A := matrix(3, 3, a);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

Matrices particulières

Définissons quelques matrices particulières.

DÉFINITION 1.2

Une matrice $A_{m\times n}$ est une **matrice nulle**, si $a_{ij} = 0$, $\forall\ i$ et j.

Cette matrice nulle est notée $O_{m\times n}$, O_{mn} ou O.

Ainsi, une matrice nulle est une matrice dont tous les éléments sont égaux à zéro.

Donc, $O_{m\times n} = [0]_{m\times n}$

Exemple 1 Écrivons explicitement les matrices $O_{3\times 2}$, $O_{2\times 4}$ et $O_{1\times 3}$.

$$O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

DÉFINITION 1.3

1) Une **matrice ligne** est une matrice de dimension $1 \times n$.

2) Une **matrice colonne** est une matrice de dimension $m \times 1$.

Exemple 2

a) $L_{1\times 5} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & \pi & \sqrt{5} & \sin 30° \end{bmatrix}$ est une matrice ligne de dimension 1×5.

b) $C_{3\times 1} = \begin{bmatrix} -1{,}2 \\ 10 \\ \sin 30° \end{bmatrix}$ est une matrice colonne de dimension 3×1.

DÉFINITION 1.4

1) Une **matrice carrée d'ordre *n***, notée $A_{n\times n}$, est une matrice contenant n lignes et n colonnes.

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2) Les éléments a_{11}, a_{22}, …, $a_{(n-1)(n-1)}$ et a_{nn} forment la **diagonale principale** de la matrice carrée $A_{n\times n}$.

3) Les éléments a_{n1}, $a_{(n-1)2}$, …, $a_{2(n-1)}$ et a_{1n} forment la **diagonale secondaire** ou la **deuxième diagonale** de la matrice carrée $A_{n\times n}$.

DÉFINITION 1.5

La **trace** d'une matrice carrée A d'ordre n est la somme des éléments de la diagonale principale de cette matrice, c'est-à-dire

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{(n-1)(n-1)} + a_{nn}.$$

Exemple 3 Soit la matrice A suivante : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$.

- La matrice A est une matrice carrée d'ordre 4.
- Les éléments 1, 6, 11 et 16 forment la diagonale principale.
- Les éléments 13, 10, 7 et 4 forment la diagonale secondaire.
- La trace de A est $\text{Tr}(A) = 1 + 6 + 11 + 16 = 34$.

Exercices de compréhension 1.1

2. Soit la matrice B suivante : $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 8 & -9 & 14 \\ -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer l'ordre de B.

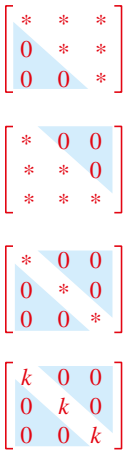
b) Énumérer les éléments de la diagonale

i) principale ; ii) secondaire.

c) Calculer Tr(B).

DÉFINITION 1.6

Soit A, une matrice.



1) A est une **matrice triangulaire supérieure** si A est carrée et si $a_{ij} = 0, \forall\ i > j$, c'est-à-dire que tous les éléments situés au-dessous de la diagonale principale sont nuls.

2) A est une **matrice triangulaire inférieure** si A est carrée et si $a_{ij} = 0, \forall\ i < j$, c'est-à-dire que tous les éléments situés au-dessus de la diagonale principale sont nuls.

3) A est une **matrice diagonale** si A est carrée et si $a_{ij} = 0, \forall\ i \neq j$, c'est-à-dire que tous les éléments qui ne sont pas situés sur la diagonale principale sont nuls.

4) A est une **matrice scalaire** si A est carrée et si

$$a_{ij} = \begin{cases} k & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

c'est-à-dire que tous les éléments situés sur la diagonale principale sont égaux et que tous les autres éléments sont nuls.

Remarques : 1) Une matrice diagonale est une matrice carrée qui est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

2) Une matrice scalaire est une matrice diagonale dont tous les éléments de la diagonale principale sont égaux.

Exemple 4

a) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & 14 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, alors A est une matrice triangulaire supérieure.

b) Si $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 4 \end{bmatrix}$, alors B est une matrice triangulaire inférieure.

c) Si $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, alors C est une matrice diagonale.

d) Si $E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, alors E est une matrice scalaire.

DÉFINITION 1.7

Une matrice carrée A d'ordre n est la **matrice identité** d'ordre n si

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Cette matrice est notée $I_{n \times n}$ ou I_n ou I.

Ainsi, une matrice identité est une matrice scalaire dont tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1 et tous les autres éléments sont nuls.

Matrice identité

Exemple 5 Écrivons explicitement les matrices $I_{3 \times 3}$ et I_4.

$$I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DÉFINITION 1.8

Soit A, une matrice.

1) A est une **matrice symétrique** si A est carrée et si $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall$ i et j.
2) A est une **matrice antisymétrique** si A est carrée et si $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall$ i et j.

Ainsi,

dans une matrice symétrique, les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont égaux.

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} * & & & \\ & * & a_{ji} & \\ & a_{ij} & \ddots & \\ & & & * \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$a_{ij} = a_{ji}$, $\forall$ i et j

dans une matrice antisymétrique, les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont opposés. De plus, tous les éléments de la diagonale principale sont nuls.

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -a_{ji} & \\ & a_{ij} & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall$ i et j

Exemple 6 Soit les matrices A et B suivantes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -4 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

A est une matrice symétrique, car A est carrée et $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall$ i et j.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -7 & -2 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

B est une matrice antisymétrique, car B est carrée et $b_{ij} = -b_{ji}$, $\forall$ i et j.

Exercices de compréhension 1.1

3. Écrire explicitement la matrice qui est à la fois symétrique et antisymétrique

a) d'ordre 2 ; b) d'ordre 3.

1

Exemple 7 La matrice légendée M suivante, indiquant la distance en kilomètres entre certaines villes du Québec, est une matrice symétrique.

Matrice symétrique

	Gatineau	Matane	Rimouski	Sherbrooke
Gatineau	0	828	736	347
Matane	828	0	93	620
Rimouski	736	93	0	527
Sherbrooke	347	620	527	0

$= M$

EXERCICES 1.1

1. La matrice A indique la distance en kilomètres entre certaines villes du Québec.

	Gaspé	Joliette	Montréal	Québec	Sorel
Gaspé	0	910	930	700	924
Joliette	910	0	75	214	34
Montréal	930	75	0	253	88
Québec	700	214	253	0	208
Sorel	924	34	88	208	0

$= A$

a) Déterminer la distance séparant les villes

i) de Sorel et de Gaspé ;

ii) de Québec et de Montréal.

b) Quelles villes sont distantes de

i) 75 km ?

ii) 700 km ?

c) Déterminer a_{24} et interpréter le résultat.

d) Déterminer a_{53} et interpréter le résultat.

2. Soit les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ -5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \\ -e \\ \ln 4 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$.

a) Donner la dimension des matrices A, B et C.

b) Déterminer les éléments a_{12}, a_{24}, b_{21} et c_{12}.

c) Donner la position des éléments 8, $-e$ et 9.

d) À l'aide de Maple, construire la matrice A et donner les éléments a_{22} et a_{14}.

3. Écrire explicitement les matrices $O_{3\times 4}$, $O_{2\times 2}$, $I_{2\times 2}$ et I_4.

4. a) Déterminer le nombre de lignes et le nombre de colonnes des matrices suivantes.

i) $A_{3\times 4}$ ii) B_{42}

iii) I_6 iv) $O_{m\times n}$

b) Déterminer toutes les dimensions possibles d'une matrice ayant

i) 16 éléments ; ii) 31 éléments.

5. Soit $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & -2 \\ 8 & -9 & 14 & 10 \\ -4 & 9 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \end{bmatrix}$, $I_{5\times 5}$ et I_8.

a) Pour les matrices précédentes, déterminer les éléments de la diagonale

i) principale ; ii) secondaire.

b) Calculer :

i) $\mathrm{Tr}(A)$ ii) $\mathrm{Tr}(I_{5\times 5})$ iii) $\mathrm{Tr}(I_8)$

6. Soit les matrices suivantes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$M = [m_{ij}]_{n \times n}$, où $m_{ij} = i + j$

$N = [n_{ij}]_{n \times n}$, où $n_{ij} = i - j$

Parmi ces matrices, déterminer, si c'est possible,

a) la ou les matrices triangulaires supérieures ;

b) la ou les matrices triangulaires inférieures ;

c) la ou les matrices carrées ;

d) la ou les matrices diagonales ;

e) la ou les matrices lignes ;

f) la ou les matrices colonnes ;

g) la ou les matrices identité ;

h) la ou les matrices scalaires ;

i) la ou les matrices symétriques ;

j) la ou les matrices antisymétriques.

7. Déterminer les matrices

a) $A_{2 \times 3}$ telle que $a_{13} = 5$, $a_{21} = -4$, $a_{11} = 2$, $a_{23} = 6$, $a_{12} = 8$ et $a_{22} = 9$;

b) $A_{3 \times 2}$ telle que $a_{ij} = j - i$;

c) $A_{2 \times 3}$ telle que $a_{ij} = (-1)^{i+j}$;

d) $A_{3 \times 2}$ telle que $a_{ij} = ij$;

e) $A_{3 \times 4}$ telle que $a_{ij} = i$;

f) $A_{3 \times 3}$ telle que $a_{ij} = 1$ si $i = j$ et $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$;

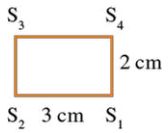
g) $A_{4 \times 4}$ telle que $a_{ij} = (-1)^{ij}(i + j - 1)^2$;

h) $B_{3 \times 6}$ telle que $b_{ij} = \dfrac{(i - j)^j}{i}$.

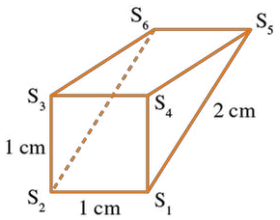
8. **APPLICATION | SALAIRES**

Les employés d'une ville sont regroupés dans quatre catégories salariales. En 2017, les salaires respectifs étaient de 40 000 $, 46 000 $, 50 000 $ et 59 000 $. Cette ville accorde une augmentation de salaire de 3 % la première année et de 2 % l'année suivante. Représenter sous la forme d'une matrice légendée le salaire annuel, au dollar près, de ces employés pour les années 2017, 2018 et 2019.

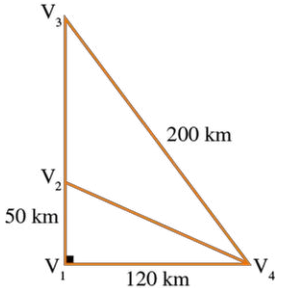
9. a) Soit le rectangle ci-contre. Construire la matrice légendée $M_{4 \times 4}$, où m_{ij} représente la distance entre les sommets S_i et S_j.



b) Soit le demi-parallélépipède droit ci-contre. Construire la matrice légendée N, où n_{ij} représente la distance entre les sommets S_i et S_j indiqués sur la figure.



c) Le schéma ci-contre nous donne certaines distances entre les villes V_1, V_2, V_3 et V_4. Construire la matrice légendée V dont les éléments v_{ij} indiquent la distance, en kilomètres, entre les villes V_i et V_j.



1.2 Addition de matrices et multiplication d'une matrice par un scalaire

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra appliquer la définition de l'addition de matrices et celle de la multiplication d'une matrice par un scalaire.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de déterminer si deux matrices sont égales ;
- d'additionner des matrices de même dimension ;
- d'effectuer la multiplication d'une matrice par un scalaire ;
- de définir la matrice opposée ;
- d'énumérer les propriétés de l'addition de matrices ;
- d'énumérer les propriétés de la multiplication d'une matrice par un scalaire ;
- de démontrer les propriétés précédentes ;
- d'appliquer les propriétés précédentes.

$$[a_{ij}]_{mn} + [b_{ij}]_{mn} = [a_{ij} + b_{ij}]_{mn}$$
$$k[a_{ij}]_{mn} = [ka_{ij}]_{mn}$$

Dans un problème contextuel, les opérations ont une signification uniquement lorsque les éléments sont compatibles.

Égalité de deux matrices

DÉFINITION 1.9

Soit les matrices $A_{m \times n}$ et $B_{p \times q}$.

Les deux matrices sont **égales**, c'est-à-dire $A_{m \times n} = B_{p \times q}$, si et seulement si

1) $m = p$ et $n = q$;

2) $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall\ i$ et j.

Ainsi, deux matrices sont égales si

1) elles ont la même dimension, c'est-à-dire qu'elles ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes ;

2) les éléments qui sont à la même position sont égaux.

Exemple 1 Soit les matrices $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$,

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 0{,}5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ et } F = \begin{bmatrix} \cos \pi & \sin 30° \\ \ln 1 & \sqrt{\sqrt{81} + 16} \end{bmatrix}.$$

Nous avons

$A \neq B, A \neq C, A \neq E$ et $A \neq F$ (dimensions différentes)

$B \neq C, B \neq E$ et $B \neq F$ (dimensions différentes)

$C \neq E$ et $C \neq F$ ($c_{11} \neq e_{11}$ et $c_{11} \neq f_{11}$)

$E = F$ (définition 1.9 satisfaite)

Exemple 2 Déterminons la valeur des éléments x, y, z et w tels que

$$\begin{bmatrix} x & 5 \\ 4y-1 & w^2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & y-3 \\ -z & 4 \end{bmatrix}.$$

Puisque les matrices ont la même dimension, les éléments qui ont la même position doivent être égaux. Ainsi,

$x = 4$	$5 = y - 3$
	$y = 8$
$4y - 1 = -z$	$w^2 - 1 = 4$
$4(8) - 1 = -z$ (car $y = 8$)	$w^2 = 5$
$z = -31$	$w = \sqrt{5}$ ou $w = -\sqrt{5}$

d'où les matrices sont égales si $x = 4$, $y = 8$, $z = -31$ et $w = \sqrt{5}$ ou $w = -\sqrt{5}$.

Addition de matrices



Exemple 1 Soit les matrices T_1 et T_2 représentant le nombre d'automobiles neuves (AN) et d'automobiles usagées (AU) vendues dans une région au cours du premier et du deuxième trimestre d'une année, par les concessionnaires A, B, C, D et E.

$$T_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{AN} & \textbf{AU} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 157 & 97 \\ 160 & 62 \\ 190 & 67 \\ 113 & 40 \\ 162 & 17 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \textbf{A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \\ \textbf{D} \\ \textbf{E} \end{matrix} \qquad T_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{AN} & \textbf{AU} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 193 & 102 \\ 170 & 65 \\ 223 & 72 \\ 135 & 51 \\ 191 & 21 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \textbf{A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \\ \textbf{D} \\ \textbf{E} \end{matrix}$$

Pour connaître le nombre total d'automobiles neuves et d'automobiles usagées vendues depuis le début de l'année, il suffit d'additionner respectivement les éléments qui sont à la même position de ces deux matrices.

Nous obtenons ainsi la matrice S suivante.

$$S = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{AN} & \textbf{AU} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 157+193 & 97+102 \\ 160+170 & 62+65 \\ 190+223 & 67+72 \\ 113+135 & 40+51 \\ 162+191 & 17+21 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \textbf{A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \\ \textbf{D} \\ \textbf{E} \end{matrix}$$

d'où, en effectuant les additions, nous obtenons

$$S = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{AN} & \textbf{AU} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 350 & 199 \\ 330 & 127 \\ 413 & 139 \\ 248 & 91 \\ 353 & 38 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \textbf{A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \\ \textbf{D} \\ \textbf{E} \end{matrix}$$

DÉFINITION 1.10

Soit $A_{m \times n}$ et $B_{m \times n}$, deux matrices de même dimension.

La **somme** $A + B$ de ces deux matrices est la matrice $S_{m \times n} = [s_{ij}]_{m \times n}$, où

$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall$ i et j.

Ainsi, pour obtenir la somme de deux matrices de même dimension, il suffit d'additionner respectivement les éléments qui sont à la même position de ces deux matrices.

On ne peut pas additionner deux matrices de dimensions différentes.

Soit A et B, deux matrices de dimension $m \times n$. Nous pouvons expliciter la somme de ces matrices de deux façons différentes.

Façon 1	**Façon 2**
$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$	$A + B = [a_{ij}]_{mn} + [b_{ij}]_{mn}$
$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1j} + b_{1j} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2j} + b_{2j} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{ij} + b_{ij} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mj} + b_{mj} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$	$= [a_{ij} + b_{ij}]_{mn}$
$= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1j} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2j} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{i1} & s_{i2} & \dots & s_{ij} & \dots & s_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mj} & \dots & s_{mn} \end{bmatrix}$, où $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall\, i$ et j	$= [s_{ij}]_{mn}$, où $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
$= S$	$= S$

Exemple 2 Soit les matrices $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$,

$$O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 7 & -8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{7}{3} \\ \frac{8}{5} & \frac{-3}{7} \end{bmatrix} \text{ et } G = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{-2}{5} \\ \frac{4}{13} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}.$$

Addition de deux matrices

Calculons, si c'est possible, les sommes suivantes.

a) $A + B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 3 & 1 + 5 \\ 4 + 7 & 8 + (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}$

b) $A + A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + (-3) & 1 + 1 \\ 4 + 4 & 8 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$

$C + O = C$

c) $C + O = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0 & -4 + 0 \\ -7 + 0 & 8 + 0 \\ 3 + 0 & 5 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

d) $C + E = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 7 & -8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (-1) & -4 + 4 \\ -7 + 7 & 8 + (-8) \\ 3 + (-3) & 5 + (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $A + C$ n'est pas définie, car A et C ne sont pas de même dimension.

f) $F + G$, à l'aide de Maple.

Méthode 1

```
F := Matrix([[3/2, 7/3], [8/5, -3/7]]):
G := Matrix([[3/11, -2/5], [4/13, 5/12]]):
F + G;
```

$$\begin{bmatrix} \frac{39}{22} & \frac{29}{15} \\ \frac{124}{65} & -\frac{1}{84} \end{bmatrix}$$

Méthode 2

```
with(LinearAlgebra):
F := Matrix([[3/2, 7/3], [8/5, -3/7]]):
G := Matrix([[3/11, -2/5], [4/13, 5/12]]):
MatrixAdd(F, G);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{39}{22} & \frac{29}{15} \\ \frac{124}{65} & -\frac{1}{84} \end{bmatrix}$$

Exercices de compréhension 1.2

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -7 \\ 0 & -2 & 9 \\ 2 & 3 & -8 \end{bmatrix}$. Calculer $A + B$.

Multiplication d'une matrice par un scalaire

Exemple 1 La matrice P ci-dessous représente le prix de trois types de voitures, A, B et C, selon leur équipement, $ÉQ_1$ et $ÉQ_2$.

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{ÉQ}_1 & \textbf{ÉQ}_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12\,000 & 15\,000 \\ 16\,000 & 20\,000 \\ 25\,000 & 31\,000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \textbf{A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \end{matrix}$$

Déterminons la matrice légendée N des nouveaux prix obtenus à la suite d'une augmentation de 5 % des prix suggérés en P.

Pour déterminer les éléments de N, il suffit de multiplier chaque élément de P par 1,05. Ainsi,

$$N = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{ÉQ}_1 & \textbf{ÉQ}_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1{,}05(12\,000) & 1{,}05(15\,000) \\ 1{,}05(16\,000) & 1{,}05(20\,000) \\ 1{,}05(25\,000) & 1{,}05(31\,000) \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \textbf{A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \end{matrix}$$

d'où, en effectuant les multiplications, nous obtenons

$$N = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{ÉQ}_1 & \text{ÉQ}_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12\,600 & 15\,750 \\ 16\,800 & 21\,000 \\ 26\,250 & 32\,550 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{matrix}$$

DÉFINITION 1.11

Soit $A_{m \times n}$, une matrice, et $k \in \mathbb{R}$.

Le produit kA **de la matrice** A **par le scalaire** k est la matrice

$$P_{m \times n} = [p_{ij}]_{m \times n}, \text{ où } p_{ij} = ka_{ij}, \forall\ i \text{ et } j.$$

Ainsi, pour obtenir le produit d'une matrice par un scalaire, on multiplie chaque élément de la matrice par ce scalaire.

Soit A, une matrice $m \times n$, et $k \in \mathbb{R}$.

Nous pouvons expliciter le produit de la matrice A par ce scalaire k de deux façons différentes.

Façon 1

$$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1j} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2j} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{ij} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mj} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1j} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2j} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mj} & \dots & p_{mn} \end{bmatrix}, \text{ où } p_{ij} = ka_{ij}, \forall\ i \text{ et } j$$

$$= P$$

Façon 2

$$kA = k[a_{ij}]_{mn}$$

$$= [ka_{ij}]_{mn}$$

$$= [p_{ij}]_{mn}, \text{ où } p_{ij} = ka_{ij}$$

$$= P$$

Exemple 2 Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -6 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Calculons :

Multiplication d'une matrice par un scalaire

a) $2A = 2\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(4) & 2(-2) & 2(3) \\ 2(-3) & 2(6) & 2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 6 \\ -6 & 12 & 2 \end{bmatrix}$

b) $-3B = -3\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(5) & -3(3) & -3(-1) \\ -3(4) & -3(2) & -3(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & -9 & 3 \\ -12 & -6 & 18 \end{bmatrix}$

c) $-1C = -1\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1(-1) & -1(4) \\ -1(3) & -1(-2) \\ -1(5) & -1(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$

$0A_{mn} = O_{mn}$

d) $0A = 0\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0(4) & 0(-2) & 0(3) \\ 0(-3) & 0(6) & 0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$kO_{mn} = O_{mn}$

e) $4O_{2\times 3} = 4\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(0) & 4(0) & 4(0) \\ 4(0) & 4(0) & 4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

f) $4B + 3A = 4\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -6 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4(5) & 4(3) & 4(-1) \\ 4(4) & 4(2) & 4(-6) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3(4) & 3(-2) & 3(3) \\ 3(-3) & 3(6) & 3(1) \end{bmatrix}$ (définition 1.11)

$= \begin{bmatrix} 20 & 12 & -4 \\ 16 & 8 & -24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -6 & 9 \\ -9 & 18 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 32 & 6 & 5 \\ 7 & 26 & -21 \end{bmatrix}$ (définition 1.10)

g) Calculons $-4A$ et $\frac{3}{2}B$ à l'aide de Maple.

Méthode 1

```
A := Matrix([[4, -2, 3], [-3, 6, 1]]):
-4 . A;
```

$$\begin{bmatrix} -16 & 8 & -12 \\ 12 & -24 & -4 \end{bmatrix}$$

Méthode 2

```
with(LinearAlgebra):
B := Matrix([[5, 3, -1], [4, 2, -6]]):
ScalarMultiply(B, 3/2);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{15}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

DÉFINITION 1.12

La matrice $B_{m\times n}$ est la **matrice opposée** de la matrice $A_{m\times n}$ lorsque

$b_{ij} = -a_{ij}$, $\forall$ i et j.

Nous notons la matrice opposée de A par $-A$, où $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$.

Remarque : Ainsi, nous avons $-A = -1A$ pour toute matrice A.

De plus, la différence $A - B$ est obtenue en effectuant $A + (-B)$.

Soustraction de deux matrices

Matrice opposée

1

$A_{mn} + (-A_{mn}) = O_{mn}$

Exemple 3 Soit $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

a) Déterminons l'opposée de A.

$$-A = \begin{bmatrix} -5 & -(-6) & -3 \\ -7 & -4 & -(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 & -3 \\ -7 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Calculons $A - A$.

$$A - A = A + (-A) = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 7 & 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 6 & -3 \\ -7 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Calculons $A - B$.

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 7 & 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -(-4) & -(-2) \\ 0 & -1 & -(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Calculons $5A - 2B$ et $\frac{1}{2}A - \frac{2}{3}B$ à l'aide de Maple.

```
A := [5 -6 3; 7 4 -2]:
B := [3 -4 -2; 0 1 -3]:
5 • A - 2 • B;
```

$$\begin{bmatrix} 19 & -22 & 19 \\ 35 & 18 & -4 \end{bmatrix}$$

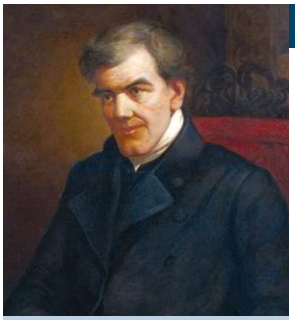
```
evalm(1/2 • A - 2/3 • B);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{3} & \frac{17}{6} \\ \frac{7}{2} & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Exercices de compréhension 1.2

2. Soit $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. Calculer $-5A + 2B$.

Propriétés de l'addition de matrices et de la multiplication d'une matrice par un scalaire



George Peacock (1791-1858)

Il y a environ 200 ans...

C'est d'abord en Angleterre, dans la première moitié du XIX^e siècle, que de nombreux mathématiciens commencent à s'intéresser aux propriétés des opérations sur les symboles. Tant que l'algèbre se limitait à représenter des nombres par des lettres, la nature même des nombres suffisait à justifier ces propriétés. Ce n'est pas le cas lorsque des symboles représentent autre chose, par exemple des nombres complexes ou des matrices. Dès lors, les mathématiciens considèrent que les objets symboliques sont caractérisés non pas par leur nature, mais plutôt par les règles explicites régissant les opérations sur ces objets. C'est là l'approche de **George Peacock** dans son *Treatise of Algebra* dont la première édition date de 1830. À bien des égards, cette approche correspond à celle des mathématiciens d'aujourd'hui.

Les propriétés relatives à l'addition de matrices et à la multiplication d'une matrice par un scalaire qui sont énoncées ici s'appliquent à des matrices dont les éléments sont des nombres réels.

Propriétés de l'addition de matrices et de la multiplication d'une matrice par un scalaire

Si $\mathcal{M}_{m \times n}$ est l'ensemble des matrices de dimension $m \times n$ dont les éléments sont des nombres réels, alors $\forall\, A, B$ et $C \in \mathcal{M}_{m \times n}$ et $\forall\, r$ et $s \in \mathbb{R}$, nous avons les propriétés suivantes :

Propriété 1	$(A + B) \in \mathcal{M}_{m \times n}$	(fermeture pour l'addition de matrices)
Propriété 2	$A + B = B + A$	(commutativité de l'addition de matrices)
Propriété 3	$A + (B + C) = (A + B) + C$	(associativité de l'addition de matrices)
Propriété 4	$A + O = A$	(il existe un **élément neutre** pour l'addition de matrices, noté O, où $O \in \mathcal{M}_{m \times n}$)
Propriété 5	$A + (-A) = O$	(il existe un **élément opposé** pour l'addition de matrices, noté $-A$, où $-A \in \mathcal{M}_{m \times n}$)
Propriété 6	$rA \in \mathcal{M}_{m \times n}$	(fermeture pour la multiplication d'une matrice par un scalaire)
Propriété 7	$(r + s)A = rA + sA$	(pseudo-distributivité de la multiplication d'une matrice sur l'addition de scalaires)
Propriété 8	$r(A + B) = rA + rB$	(pseudo-distributivité de la multiplication par un scalaire sur l'addition de matrices)
Propriété 9	$r(sA) = (rs)A$	(pseudo-associativité de la multiplication d'une matrice par un scalaire)
Propriété 10	$1A = A$	(1 est le pseudo-élément neutre pour la multiplication d'une matrice par un scalaire)

Remarque : Il est essentiel de déterminer l'élément neutre avant de trouver l'élément opposé.

Nous allons démontrer les propriétés 2 et 8.

PROPRIÉTÉ 2

Si A et $B \in \mathcal{M}_{m \times n}$, alors

$$A + B = B + A. \qquad \text{(commutativité de l'addition de matrices)}$$

Preuve

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij}]_{mn} + [b_{ij}]_{mn} \\ &= [a_{ij} + b_{ij}]_{mn} && \text{(définition de l'addition de matrices)} \\ &= [b_{ij} + a_{ij}]_{mn} && \text{(commutativité de l'addition dans } \mathbb{R}) \\ &= [b_{ij}]_{mn} + [a_{ij}]_{mn} && \text{(définition de l'addition de matrices)} \\ &= B + A \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ 8

$r(A + B) = rA + rB$ (pseudo-distributivité de la multiplication par un scalaire sur l'addition de matrices)

Preuve

Soit $r \in \mathbb{R}$ et deux matrices, A et B, définies par $A = [a_{ij}]_{mn}$ et $B = [b_{ij}]_{mn}$.

$$\begin{aligned}
r(A + B) &= r([a_{ij}]_{mn} + [b_{ij}]_{mn}) \\
&= r[a_{ij} + b_{ij}]_{mn} && \text{(définition de l'addition de matrices)} \\
&= [r(a_{ij} + b_{ij})]_{mn} && \text{(définition de la multiplication d'une matrice par un scalaire)} \\
&= [ra_{ij} + rb_{ij}]_{mn} && \text{(distributivité dans } \mathbb{R}) \\
&= [ra_{ij}]_{mn} + [rb_{ij}]_{mn} && \text{(définition de l'addition de matrices)} \\
&= r[a_{ij}]_{mn} + r[b_{ij}]_{mn} && \text{(définition de la multiplication d'une matrice par un scalaire)} \\
&= rA + rB
\end{aligned}$$

EXERCICES 1.2

1. Parmi les matrices suivantes, déterminer celles qui sont égales.

$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 25 \end{bmatrix}$ $\quad E = \begin{bmatrix} 2 \operatorname{Arc\,tan} 1 \\ 3 \ln 2 \\ \cos 90° \end{bmatrix}$

$F = \begin{bmatrix} \operatorname{Arc\,sin} 1 \\ \ln 4 + \ln 2 \\ \operatorname{Arc\,tan} 0 \end{bmatrix}$ $\quad G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$H = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad J = \begin{bmatrix} -3 \\ \sqrt{16} \\ 5^2 \end{bmatrix}$

2. Soit les matrices A, B et C définies par

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 12 & -8 \\ 0 & 8 & 16 \end{bmatrix}$

et $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 3 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$.

Calculer, si c'est possible :

a) $A + B$ $\quad$ b) $A - B$

c) $3C$ $\quad$ d) $A + C$

e) $3A - \frac{3}{4}B$ $\quad$ f) $A + O_{3\times 3}$

3. Calculer :

a) $3\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -5 & -4 \\ 1 & -3 & 8 & 5 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & -1 & -3 \\ 0 & 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\left(\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

c) $4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} + 3I_{3\times 3}$

4. Soit la matrice $M = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & -5 \\ -6 & 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer la matrice N, où N est la matrice opposée de M.

b) Calculer $M + N$.

c) Calculer $M - N$ et exprimer le résultat en fonction de M.

d) Calculer $4M + N$ et exprimer le résultat en fonction de M.

e) Exprimer $kM + N$ et $kM - N$, où $k \in \mathbb{R}$, en fonction de M.

5. Déterminer les valeurs de a, b, c et d si :

a) $\begin{bmatrix} a & -2 \\ c & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & b \\ \pi & d \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} a & b & 6 \\ -4 & 0 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a & 1 & -3 \\ -4 & -5 & 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 9 \\ 3c & 5 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3a+7 & a \\ -c & ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2b \\ b & d-1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} a-4 & 3b-6 \\ a+b & d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & a \\ c & c-a \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} a+2d & 6 \\ ab & d^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2c-3a \\ c & 9d \end{bmatrix}$

6. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 2 & -4 & 10 \end{bmatrix}$. Trouver une matrice B et un nombre réel k tels que $A = kB$ et $b_{12} = 4$.

7. **APPLICATION | MOYENNE PONDÉRÉE**

La matrice légendée E_1 suivante représente les résultats (sur 100) obtenus par Luc, Guy et Léa à leur examen respectif de mathématiques et de chimie.

$$E_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{Math} & \textbf{Chimie} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 70 & 80 \\ 72 & 74 \\ 75 & 87 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \textbf{Luc} \\ \textbf{Guy} \\ \textbf{Léa} \end{matrix}$$

Les matrices E_2, E_3 et E_4 suivantes représentent respectivement les notes obtenues par Luc, Guy et Léa aux deuxième, troisième et quatrième examens de mathématiques et de chimie.

$$E_2 = \begin{bmatrix} 80 & 67 \\ 65 & 75 \\ 72 & 79 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 90 & 70 \\ 85 & 74 \\ 87 & 88 \end{bmatrix} \text{ et } E_4 = \begin{bmatrix} 78 & 90 \\ 82 & 78 \\ 81 & 85 \end{bmatrix}$$

La pondération des examens est la même dans les deux matières, c'est-à-dire 20 % pour le premier examen, 22 % pour le deuxième, 28 % pour le troisième et 30 % pour le quatrième.

a) Déterminer la matrice légendée F des notes finales de Luc, de Guy et de Léa en mathématiques et en chimie.

b) Déterminer la note finale de Luc en chimie et indiquer à quel élément de F correspond cette note.

c) Déterminer f_{31} et préciser à quoi correspond cette valeur.

8. Soit $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 8 \\ 0 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & -4 \end{bmatrix}$.

Vérifier à l'aide d'un outil technologique :

a) $\frac{5}{8}(A+B) = \frac{5}{8}A + \frac{5}{8}B$

b) $\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{7}\right)A = \frac{4}{3}A - \frac{3}{7}A$

1.3 Multiplication de matrices

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra appliquer la définition de produit de matrices.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de vérifier si les matrices sont compatibles pour le produit matriciel ;
- d'effectuer la multiplication de deux matrices compatibles ;
- d'énoncer les propriétés de la multiplication de matrices ;
- de vérifier les propriétés de la multiplication de matrices ;
- de vérifier si une matrice est l'inverse multiplicatif d'une matrice donnée ;
- de donner la définition des matrices suivantes : matrice idempotente, matrice nilpotente, matrice transposée ;
- d'énoncer des théorèmes relatifs à la transposée d'une matrice ;
- d'énoncer les propriétés de la transposée d'une matrice.

$$A_{m \times p} B_{p \times n} = C_{m \times n}$$

$$\text{où } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \forall\ i \text{ et } j$$

Multiplication de matrices

Avant de définir le produit AB, résultat de la multiplication de la matrice A par la matrice B, considérons l'exemple suivant.



Exemple 1 Mylène achète 3 kilogrammes de pommes, 4 kilogrammes de bananes et 2 kilogrammes de raisins. Ces fruits coûtent respectivement 1,90 $, 0,70 $ et 3,50 $ le kilogramme.

Le coût total de l'achat de Mylène est de

$$3(1{,}90) + 4(0{,}70) + 2(3{,}50) = 15{,}50$$

c'est-à-dire 15,50 $.

La situation précédente peut être représentée par les matrices suivantes.

La matrice légendée Q représente le nombre de kilogrammes de chaque sorte de fruits achetés par Mylène.

$$Q = \begin{matrix} \textbf{Pommes} & \textbf{Bananes} & \textbf{Raisins} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \textbf{Achat de Mylène (kg)}$$

La matrice légendée P représente le prix des fruits, au kilogramme.

$$P = \begin{matrix} \textbf{Prix (\$/kg)} \\ \begin{bmatrix} 1{,}90 \\ 0{,}70 \\ 3{,}50 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \textbf{Pommes} \\ \textbf{Bananes} \\ \textbf{Raisins} \end{matrix}$$

La matrice légendée C représente le coût total de l'achat de Mylène.

$$C = \begin{matrix} \textbf{\$} \\ \begin{bmatrix} 15{,}50 \end{bmatrix} \end{matrix} \textbf{Coût de l'achat de Mylène}$$

Nous constatons que la matrice C est obtenue en calculant la somme des produits appropriés des éléments de Q et de P.

En effet, $3(1{,}90) + 4(0{,}70) + 2(3{,}50) = 5{,}70 + 2{,}80 + 7{,}00$

$$= 15{,}50$$

que nous représentons de la façon suivante.

$QP = C$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}90 \\ 0{,}70 \\ 3{,}50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1{,}90) + 4(0{,}70) + 2(3{,}50) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15{,}50 \end{bmatrix}$$

Nous écrivons $QP = C$.

Exemple 2 Jean et Lyse, sachant le nombre de kilogrammes de pommes, de bananes et de raisins qu'ils souhaitent acheter, veulent comparer le coût total de leur achat dans trois épiceries différentes.

Soit la matrice Q, donnant la quantité, en kilogrammes, de pommes, de bananes et de raisins que Jean et Lyse désirent acheter, et la matrice P, donnant le prix, en \$/kg, aux épiceries A, B et C.

$$Q = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{Pommes} & \textbf{Bananes} & \textbf{Raisins} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \textbf{Achat de Jean (kg)} \\ \textbf{Achat de Lyse (kg)} \end{matrix}$$

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{Épicerie A} & \textbf{Épicerie B} & \textbf{Épicerie C} \\ \textbf{(\$/kg)} & \textbf{(\$/kg)} & \textbf{(\$/kg)} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1{,}90 & 1{,}80 & 1{,}75 \\ 0{,}70 & 0{,}80 & 0{,}90 \\ 3{,}50 & 3{,}40 & 3{,}45 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \textbf{Pommes} \\ \textbf{Bananes} \\ \textbf{Raisins} \end{matrix}$$

Pour obtenir la matrice C, donnant le coût d'achat de Jean et de Lyse, aux différentes épiceries, nous devons multiplier la matrice Q par la matrice P de la façon suivante.

Notons que le produit de la matrice P par la matrice Q n'a aucun sens.

$$C = \begin{matrix} Q_{2\times 3} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} P_{3\times 3} \\ \begin{bmatrix} 1{,}90 & 1{,}80 & 1{,}75 \\ 0{,}70 & 0{,}80 & 0{,}90 \\ 3{,}50 & 3{,}40 & 3{,}45 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{Épicerie A} & \textbf{Épicerie B} & \textbf{Épicerie C} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \textbf{Jean} \\ \textbf{Lyse} \end{matrix}$$

où les éléments c_{ij} de C s'obtiennent en additionnant les produits respectifs des éléments de la i-ième ligne de la première matrice, par les éléments de la j-ième colonne de la seconde matrice. Ainsi,

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2(1{,}90) + 0(0{,}70) + 3(3{,}50) \\ &= 14{,}30 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_{12} &= 2(1{,}80) + 0(0{,}80) + 3(3{,}40) \\ &= 13{,}80 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_{13} &= 2(1{,}75) + 0(0{,}90) + 3(3{,}45) \\ &= 13{,}85 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{21} &= 4(1{,}90) + 1(0{,}70) + 2(3{,}50) \\ &= 15{,}30 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_{22} &= 4(1{,}80) + 1(0{,}80) + 2(3{,}40) \\ &= 14{,}80 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_{23} &= 4(1{,}75) + 1(0{,}90) + 2(3{,}45) \\ &= 14{,}80 \end{aligned}$$

Nous obtenons donc la matrice des coûts C suivante.

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{Épicerie A} & \textbf{Épicerie B} & \textbf{Épicerie C} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2(1{,}90) + 0(0{,}70) + 3(3{,}50) & 2(1{,}80) + 0(0{,}80) + 3(3{,}40) & 2(1{,}75) + 0(0{,}90) + 3(3{,}45) \\ 4(1{,}90) + 1(0{,}70) + 2(3{,}50) & 4(1{,}80) + 1(0{,}80) + 2(3{,}40) & 4(1{,}75) + 1(0{,}90) + 2(3{,}45) \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \textbf{Jean} \\ \textbf{Lyse} \end{matrix}$$

c'est-à-dire

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{Épicerie A} & \textbf{Épicerie B} & \textbf{Épicerie C} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 14{,}30 & 13{,}80 & 13{,}85 \\ 15{,}30 & 14{,}80 & 14{,}80 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \textbf{Jean} \\ \textbf{Lyse} \end{matrix}$$

Remarque : Pour obtenir le coût total de l'achat, il faut que, dans la première matrice, Q, le nombre des différents produits achetés (nombre de colonnes) soit égal au nombre de prix (nombre de lignes) de la deuxième matrice, P.

Par conséquent, pour $Q = [q_{ij}]_{2\times 3}$ et $P = [p_{ij}]_{3\times 3}$, nous obtenons $C = [c_{ij}]_{2\times 3}$.

$$\underset{Q}{\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \end{bmatrix}} \underset{P}{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}} = \underset{C}{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}}, \text{ où}$$

$$c_{11} = q_{11}p_{11} + q_{12}p_{21} + q_{13}p_{31}, \text{ donc } c_{11} = \sum_{k=1}^{3} q_{1k}p_{k1}$$

$$c_{12} = q_{11}p_{12} + q_{12}p_{22} + q_{13}p_{32}, \text{ donc } c_{12} = \sum_{k=1}^{3} q_{1k}p_{k2}$$

$$c_{13} = q_{11}p_{13} + q_{12}p_{23} + q_{13}p_{33}, \text{ donc } c_{13} = \sum_{k=1}^{3} q_{1k}p_{k3}$$

$$c_{21} = q_{21}p_{11} + q_{22}p_{21} + q_{23}p_{31}, \text{ donc } c_{21} = \sum_{k=1}^{3} q_{2k}p_{k1}$$

$$c_{22} = q_{21}p_{12} + q_{22}p_{22} + q_{23}p_{32}, \text{ donc } c_{22} = \sum_{k=1}^{3} q_{2k}p_{k2}$$

$$c_{23} = q_{21}p_{13} + q_{22}p_{23} + q_{23}p_{33}, \text{ donc } c_{23} = \sum_{k=1}^{3} q_{2k}p_{k3}$$

DÉFINITION 1.13

Soit $A_{m\times p}$ et $B_{p\times n}$, deux matrices dont les éléments sont des nombres réels.

Le **produit** AB **des matrices** A et B est la matrice $C_{m\times n} = [c_{ij}]_{m\times n}$, où

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}, \ \forall\ i \text{ et } j, \text{ c'est-à-dire}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Ainsi, chaque élément c_{ij} de la matrice C est la somme du produit des éléments de la i-ième ligne de A, c'est-à-dire a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, …, a_{ip}, par les éléments respectifs de la j-ième colonne de B, c'est-à-dire b_{1j}, b_{2j}, b_{3j}, …, b_{pj}.

Ainsi, si A est une matrice de dimension $m \times p$, et B, une matrice de dimension $p \times n$, alors AB est une matrice de dimension $m \times n$ que nous pouvons expliciter de deux façons différentes.

Façon 1

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \ldots & b_{pj} & \ldots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

Façon 2

$$AB = [a_{ij}]_{m\times p}\,[b_{ij}]_{p\times n}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$= C,$

où, $\forall\ i$ et j, $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$

$= [c_{ij}]_{m \times n}$

$= C,$

où, $\forall\ i$ et j, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$

Par exemple :

- $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \dots + a_{1p}b_{p1} = \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1}$,
  soit la somme des produits des éléments de la première ligne de A par les éléments respectifs de la première colonne de B.
- $c_{45} = a_{41}b_{15} + a_{42}b_{25} + a_{43}b_{35} + \dots + a_{4p}b_{p5} = \sum_{k=1}^{p} a_{4k}b_{k5}$,
  soit la somme des produits des éléments de la quatrième ligne de A par les éléments respectifs de la cinquième colonne de B.

Ainsi :

1) Le produit matriciel AB de deux matrices est défini seulement lorsque le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B.
   Nous pouvons alors écrire $AB = C$.
2) Le nombre de lignes de C égale le nombre de lignes de A.
3) Le nombre de colonnes de C égale le nombre de colonnes de B.

De façon générale, $A_{m \times p} B_{p \times n} = C_{m \times n}$
(égalité)

Exemple 3 Soit les matrices $A_{4 \times 2}$ et $B_{3 \times 4}$. Déterminons si les multiplications suivantes sont possibles et, s'il y a lieu, la dimension de la matrice résultante.

a) Multiplication de $A_{4 \times 2}$ par $B_{3 \times 4}$
Nous constatons que $A_{4 \times 2} B_{3 \times 4}$
(pas d'égalité)
d'où le produit matriciel n'est pas défini.

b) Multiplication de $B_{3 \times 4}$ par $A_{4 \times 2}$
Nous constatons que $B_{3 \times 4} A_{4 \times 2}$
(égalité)
d'où le produit matriciel est défini par $B_{3 \times 4} A_{4 \times 2} = C_{3 \times 2}$.
La dimension de la matrice résultante C est 3×2.

Exemple 4 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$.

a) Vérifions si nous pouvons effectuer la multiplication de la matrice A par la matrice B.

La multiplication de A par B est possible, car le produit $A_{2\times 3}B_{3\times 2}$ est défini.

égalité

b) Déterminons la dimension de la matrice résultante C.

$A_{2\times 3}B_{3\times 2} = C_{2\times 2}$

$A_{2\times 3}B_{3\times 2} = C_{2\times 2}$, d'où la dimension de C est 2×2.

égalité

c) Effectuons la multiplication AB.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$c_{11} = 1(2) + 4(-4) + 3(7) = 7$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square \\ 26 & \square \end{bmatrix}$$

$c_{21} = 2(2) + 5(-4) + 6(7) = 26$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & 54 \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

$c_{12} = 1(-5) + 4(8) + 3(9) = 54$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & 84 \end{bmatrix}$$

$c_{22} = 2(-5) + 5(8) + 6(9) = 84$

$A_{2\times 3}B_{3\times 2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$

D'où $AB = \begin{bmatrix} 7 & 54 \\ 26 & 84 \end{bmatrix}$

Exercices de compréhension 1.3

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$. Calculer BA.

Remarque : De façon générale, la multiplication de matrices n'est pas commutative, c'est-à-dire que $AB \neq BA$.

Exemple 5 Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$. Calculons AB et BA.

$A_{1\times 3}B_{3\times 1} = C_{1\times 1}$

a) $A_{1\times 3}B_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1) + 5(0) + (-1)(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$

égalité

d'où $AB = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$

$B_{3\times 1}A_{1\times 3} = C_{3\times 3}$

b) $B_{3\times 1}A_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(3) & 1(5) & 1(-1) \\ 0(3) & 0(5) & 0(-1) \\ -6(3) & -6(5) & -6(-1) \end{bmatrix}$

égalité

d'où $BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -18 & -30 & 6 \end{bmatrix}$

Exemple 6 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Calculons IA et AI, en choisissant la matrice identité I de façon adéquate.

I est une matrice carrée

$I_{2\times 2}A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

égalité

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

d'où $IA = A$

$A_{2\times 3}I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

égalité

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

d'où $AI = A$

Nous acceptons le théorème suivant sans démonstration.

THÉORÈME 1.1

Si A est une matrice de dimension $m \times n$, alors

$$I_{m\times m}A_{m\times n} = A_{m\times n} \text{ et } A_{m\times n}I_{n\times n} = A_{m\times n}.$$

Remarque : De plus, si A est une matrice carrée d'ordre n, alors $IA = AI = A$, où I est d'ordre n.

Exercices de compréhension 1.3

2. Soit $B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Calculer IB et BI, en choisissant I de façon adéquate.

Exemple 7 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. Calculons AB et AC.

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 20 & 16 \end{bmatrix}$

$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 20 & 16 \end{bmatrix}$

Remarque : L'exemple précédent nous permet de constater que $AB = AC$, même si $B \neq C$; par conséquent, lorsque $AB = AC$, on ne peut pas conclure que $B = C$.

Exemple 8 Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -2 & -12 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$. Calculons AB.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -12 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= O_{2\times 2} \end{aligned}$$

Remarque : L'exemple précédent nous permet de constater que $AB = O$, même si $A \neq O$ et $B \neq O$; par conséquent, lorsque $AB = O$, on ne peut pas conclure que $A = O$ ou que $B = O$.

Exemple 9 Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$. Calculons A^2, c'est-à-dire AA.

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -14 & -18 \\ 36 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemple 10 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ 6 & -2 \\ 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 11 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{-3}{7} \end{bmatrix}$.

Calculons AB et BA à l'aide de Maple.

```
with(LinearAlgebra):
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ 6 & -2 \\ 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}: \quad B := \begin{bmatrix} -4 & 2 & 11 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}:$$

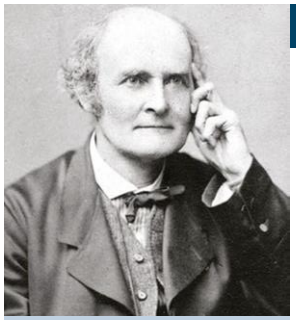
```
Multiply(A, B);
```

$$\begin{bmatrix} -16 & 2 & 12 & \frac{31}{5} & -\frac{9}{7} \\ 8 & -8 & -\frac{130}{3} & -\frac{96}{5} & -\frac{6}{7} \\ -16 & 12 & \frac{196}{3} & \frac{146}{5} & \frac{6}{7} \\ -4 & 2 & 11 & 5 & 0 \\ -4 & 8 & 43 & \frac{94}{5} & \frac{9}{7} \end{bmatrix}$$

```
Multiply(B, A);
```

$$\begin{bmatrix} 59 & -30 \\ -\frac{116}{35} & -\frac{239}{21} \end{bmatrix}$$

Propriétés de la multiplication de matrices



Arthur Cayley
(1821-1895)

Il y a environ 150 ans...

En général, la multiplication de matrices n'est pas commutative, même pour le produit de matrices carrées (*voir la remarque qui précède l'exemple 5, à la page 28*). Cette absence de commutativité illustre bien jusqu'à quel point les propriétés des opérations sur les matrices s'éloignent de celles sur les nombres réels. Avant que **Arthur Cayley** introduise les matrices en 1858, William R. Hamilton créa d'autres objets mathématiques, qu'il appelle quaternions, pour lesquels la multiplication n'est pas commutative. Dans le processus de découverte de ces quaternions, plusieurs années s'écoulent avant que Hamilton se rende compte qu'il doit abandonner la commutativité. La glace étant brisée, la non-commutativité de la multiplication des matrices de Cayley est acceptée sans problème.

Énonçons maintenant des propriétés relatives à la multiplication de matrices dont les éléments sont des nombres réels.

Propriétés de la multiplication de matrices

Si A, B et C sont trois matrices de dimensions compatibles et dont les éléments sont des nombres réels, nous avons alors les propriétés suivantes :

Propriété 1	$(AB)C = A(BC)$	(associativité de la multiplication de matrices)
Propriété 2	$A(B + C) = AB + AC$	(distributivité à gauche de la multiplication de matrices sur l'addition de matrices)
Propriété 3	$(A + B)C = AC + BC$	(distributivité à droite de la multiplication de matrices sur l'addition de matrices)
Propriété 4	$k(AB) = (kA)B = A(kB)$, où $k \in \mathbb{R}$	(pseudo-associativité de la multiplication d'un scalaire par une matrice)

La preuve de ces propriétés étant laborieuse, nous allons vérifier la propriété 1 (associativité de la multiplication de matrices) à l'aide de l'exemple suivant.
Une vérification n'est pas une preuve.

Exemple 1 Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

Vérifions que $(AB)C = A(BC)$.

D'une part,
$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 \\ -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 86 & -129 & 215 & 172 \\ -14 & 21 & -35 & -28 \end{bmatrix}$$

D'autre part,
$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & -21 & 35 & 28 \\ -4 & 6 & -10 & -8 \\ 10 & -15 & 25 & 20 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 86 & -129 & 215 & 172 \\ -14 & 21 & -35 & -28 \end{bmatrix}$$

d'où $(AB)C = A(BC)$

DÉFINITION 1.14

Pour une matrice carrée A, $A^k = \underbrace{AAA \ldots A}_{k \text{ fois}}$, où $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Remarque : De la définition précédente, nous avons les propriétés suivantes.

Si A est une matrice carrée d'ordre n, et si r et $s \in \mathbb{N}$, alors

1) $A^r A^s = A^{r+s}$
2) $A^0 = I_n$, si $A \neq O_{n \times n}$
3) $(A^r)^s = A^{rs}$

Exemple 2 Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Calculons A^3.

$$\begin{aligned} A^3 &= (AA)A \\ &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -18 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -16 & 25 \\ -75 & 34 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) Calculons A^4.

$$\begin{aligned} A^4 &= A^{3+1} \\ &= A^3 A \\ &= \begin{bmatrix} -16 & 25 \\ -75 & 34 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -107 & 84 \\ -252 & 61 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c) Calculons A^{10} à l'aide de Maple.

```
A := [2  1
     -3  4]:
A^10;
```

$$\begin{bmatrix} 59833 & -108546 \\ 325638 & -157259 \end{bmatrix}$$

DÉFINITION 1.15

Soit $A_{n \times n}$, une matrice carrée.

La matrice A est **inversible** s'il existe une matrice $B_{n \times n}$ telle que

$$AB = BA = I_{n \times n}.$$

Dans ce cas, la matrice B est appelée **inverse** de A et la matrice A est appelée **inverse** de B.

THÉORÈME 1.2

Si A est une matrice carrée inversible, alors l'inverse de A est unique.

Preuve

Soit B, une matrice inverse de A.

Preuve par contradiction (preuve par l'absurde)

Démontrons, par contradiction, l'unicité de cette matrice.
Supposons qu'il existe une seconde matrice C, différente de B, inverse de A.

$$BA = I \qquad \text{(définition 1.15)}$$
$$(BA)C = IC$$
$$B(AC) = C \qquad \text{(associativité et } IC = C\text{, théorème 1.1)}$$
$$BI = C \qquad \text{(car } AC = I\text{)}$$
donc $$B = C \qquad \text{(car } BI = B\text{, théorème 1.1)}$$

ce qui contredit que $C \neq B$.

D'où l'inverse de A est unique.

Pour une matrice carrée d'ordre n, l'inverse multiplicatif de A est noté A^{-1}.
Ainsi, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_{n \times n}$.

Exemple 3 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculons AB et BA.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_{3\times 3}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_{3\times 3}}$$

Puisque $AB = BA = I_{3 \times 3}$, $B = A^{-1}$ et $A = B^{-1}$.

Dans les chapitres 2 et 3, nous verrons comment déterminer l'inverse A^{-1} d'une matrice carrée A lorsque A^{-1} existe.

Exercices de compréhension 1.3

3. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Vérifier que B est l'inverse de A.

Matrices idempotente, nilpotente et transposée

Définissons d'autres types de matrices.

DÉFINITION 1.16

Une matrice carrée $A_{n \times n}$ est dite **idempotente** lorsque $A^2 = A$.

Exemple 1 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Vérifions que les matrices A et B sont idempotentes.

Matrice idempotente

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

d'où A est idempotente.

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

d'où B est idempotente.

DÉFINITION 1.17

1) Une matrice carrée $A_{n \times n}$ est dite **nilpotente** lorsqu'il existe un entier positif k tel que

$$A^k = O.$$

2) Le plus petit entier positif k tel que $A^k = O$ est appelé **indice de nilpotence**.

Remarque : On accepte sans démonstration que, si $A_{n \times n}$ est une matrice nilpotente dont l'indice de nilpotence est k, alors $k \leq n$.

Exemple 2 Vérifions si les matrices suivantes sont nilpotentes. Si oui, déterminons leur indice de nilpotence.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ donc } A^2 = O$$

d'où A est nilpotente et l'indice de nilpotence de A est 2.

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \neq O \text{ et } B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \neq O$$

d'où B n'est pas nilpotente. (voir la remarque précédente)

DÉFINITION 1.18

Soit une matrice $A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$.

La **matrice transposée** de A, notée A^{T}, est la matrice de dimension $n \times m$ telle que

$$A^{\mathrm{T}}{}_{n \times m} = [a_{ji}]_{n \times m}.$$

Ainsi, la première ligne de A devient la première colonne de A^{T}, la deuxième ligne de A devient la deuxième colonne de A^{T}, etc.

Exemple 3 Déterminons la transposée des matrices A et B suivantes.

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 7 \\ 3 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \text{ alors } A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \\ -2 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}, \text{ alors } B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{bmatrix}$$

Puisque dans une matrice symétrique, $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall$ i et j, et que dans une matrice antisymétrique, $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall$ i et j (définition 1.8), nous pouvons énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 1.3

1) Une matrice carrée A est symétrique si et seulement si $A^{\mathrm{T}} = A$.
2) Une matrice carrée A est antisymétrique si et seulement si $A^{\mathrm{T}} = -A$.

Les preuves sont laissées à l'étudiant.

Exercices de compréhension 1.3

4. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer si A est symétrique ou antisymétrique.

b) Déterminer si B est symétrique ou antisymétrique.

Énonçons maintenant des propriétés relatives à la transposée d'une matrice.

Propriétés de la transposée d'une matrice

Si A et B sont deux matrices de dimensions compatibles, et si $k \in \mathbb{R}$, nous avons alors les propriétés suivantes.

Propriété 1 $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$

Propriété 2 $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$

Propriété 3 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

Propriété 4 $(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}}$

La preuve de ces propriétés est laissée à l'étudiant.

Exemple 4 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Vérifions la propriété 3.

D'une part, $AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 27 \end{bmatrix}$. Donc, $(AB)^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 12 & 27 \end{bmatrix}$

D'autre part, $B^T A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 12 & 27 \end{bmatrix}$

d'où $(AB)^T = B^T A^T$.

THÉORÈME 1.4

Si A est une matrice de dimension $m \times n$, alors

AA^T et $A^T A$ sont des matrices symétriques.

Preuve

$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T$ (propriété 3 de la transposée d'une matrice)

$= AA^T$ (propriété 1 de la transposée d'une matrice)

Nous démontrons de façon analogue que $(A^T A)^T = A^T A$.

D'où AA^T et $A^T A$ sont des matrices symétriques. (théorème 1.3)

Exemple 5 Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 7 \\ -5 & 9 & 15 & 0 \\ 6 & 11 & 1 & -7 \end{bmatrix}$. Vérifions, à l'aide de Maple, que AA^T et $A^T A$ sont des matrices symétriques.

```
with(LinearAlgebra):
A := Matrix([[2, -3, 4, 7], [-5, 9, 15, 0], [6, 11, 1, -7]]):
AT := Transpose(A);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 6 \\ -3 & 9 & 11 \\ 4 & 15 & 1 \\ 7 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

```
Multiply(A, AT);
```

$$\begin{bmatrix} 78 & 23 & -66 \\ 23 & 331 & 84 \\ -66 & 84 & 207 \end{bmatrix}$$

```
Multiply(AT, A);
```

$$\begin{bmatrix} 65 & 15 & -61 & -28 \\ 15 & 211 & 134 & -98 \\ -61 & 134 & 242 & 21 \\ -28 & -98 & 21 & 98 \end{bmatrix}$$

D'où AA^T et $A^T A$ sont des matrices symétriques.

THÉORÈME 1.5

Si A est une matrice carrée d'ordre n, alors

1) $(A + A^T)$ est une matrice symétrique ;

2) $(A - A^T)$ est une matrice antisymétrique.

Preuve

1) $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T$ (propriété 2 de la transposée d'une matrice)

$= A^T + A$ (propriété 1 de la transposée d'une matrice)

$= A + A^T$ (commutativité de l'addition de matrices)

d'où $(A + A^T)$ est une matrice symétrique. (théorème 1.3)

2) La preuve est laissée à l'étudiant.

EXERCICES 1.3

1. Soit les matrices $A_{2\times3}$, $B_{4\times3}$, $C_{3\times3}$, $E_{3\times2}$ et $F_{3\times7}$. Déterminer, si c'est possible, la dimension des matrices suivantes.

a) AC b) EA c) AE

d) EC e) BC f) BF

g) FE h) ACB i) BEA

j) ACF k) $BCEA$ l) $EACF$

2. Déterminer la dimension de la matrice B si

a) le produit $(AB)C$ est défini, A est de dimension 2×2, et C, de dimension 4×3 ;

b) les produits AB et BA sont définis et A est de dimension 3×5.

3. Effectuer, si c'est possible, AB et BA lorsque :

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 11 & -8 \\ 5 & 7 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -11 \\ 10 \\ 22 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

4. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Vérifier que $(AB)C = A(BC)$.

5. Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Vérifier que

a) $A(B + C) = AB + AC$;

b) $(B + C)A = BA + CA$.

6. Déterminer si les matrices suivantes sont idempotentes.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} -11 & 4 \\ -33 & 12 \end{bmatrix}$ d) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

7. Déterminer l'indice de nilpotence des matrices suivantes.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Calculer :

a) A^2 b) A^3

c) A^6 d) $A^2 - 3A + 5I$

9. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$. Calculer :

a) AA^T b) A^TA

10. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Vérifier que $(AB)^T = B^TA^T$.

b) Calculer $AB + (B^TA^T)^T$.

11. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & -6 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & -8 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Déterminer :

a) B^T b) $(I_{3\times 3} + B)^T$

c) $3A^T + 2B$ d) $(A + B)^T$

e) $A^T + B^T$ f) A^TB

g) $((AB)^T - (BA)^T)^T$ h) $(A^T)^T$

12. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer AB et BA.

b) Quel nom particulier peut-on donner à B ? Expliquer.

c) Exprimer B en fonction de A.

d) Utiliser une des propriétés de la matrice transposée pour déterminer B^TA^T.

13. Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Calculer AB.

b) Pouvons-nous conclure que $B = A^{-1}$? Expliquer.

14. Déterminer les valeurs de a, b, c, d et e telles que :

a) $\begin{bmatrix} a & 2 \\ 4 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & a & -1 \\ -4 & 1 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & c \\ 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}^T$

c) $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & e & 2 \\ 2 & 0 & -5 \\ d & 0 & 2 \end{bmatrix}$

15. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Calculer A^2, B^2, AB et BA.

b) Calculer $(A - B)(A + B)$ et $(A^2 - B^2)$, puis comparer les résultats.

c) Calculer $(A + B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$, puis comparer les résultats.

d) Calculer $A^2 + AB + BA + B^2$, puis comparer le résultat avec $(A + B)^2$.

16. Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, où a et $b \in \mathbb{R}$.

a) Calculer M^2, M^3 et M^4.

b) Déduire une conjecture pour M^n, où $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$, à partir des résultats de a).

17. **APPLICATION | ÉCONOMIE**

Une usine fabrique deux types de machines à laver : une machine à chargement frontal (F) et une machine à chargement par le haut (H). L'usine approvisionne une petite chaîne de magasins comptant trois succursales, S_1, S_2 et S_3. Le nombre de machines à laver en stock à la première succursale est de 15 machines à chargement frontal et de 6 machines à chargement par le haut ; à la deuxième succursale, de 22 machines à chargement frontal et de 9 machines à chargement par le haut ; et à la troisième succursale, de 18 machines à chargement frontal et de 12 machines à chargement par le haut.

a) Déterminer la matrice $L_{3\times 2}$ qui représente les données énoncées. Légender clairement la matrice L.

b) L'usine vend à la chaîne de magasins chaque machine à chargement frontal x \$, et chaque machine à chargement par le haut, 375 \$. Construire une matrice $C_{2\times 1}$ qui représente le coût de chaque type de machine à laver. Légender clairement la matrice C.

c) Déterminer une expression matricielle pour représenter le coût d'achat des machines pour les trois succursales.

d) Si la troisième succursale a déboursé 12 510 \$ pour les machines à laver qu'elle détient en stock, déterminer le coût d'une machine à chargement frontal.

18. **APPLICATION | ÉCONOMIE**

Une entreprise de construction offre quatre modèles de maison différents dans trois villes distinctes.

Le tableau suivant indique le nombre de fenêtres, de portes extérieures et de portes intérieures associées à chacun des modèles.

	Fenêtres	Portes extérieures	Portes intérieures
Aster	18	3	10
Hosta	20	4	11
Jonc	24	5	12
Lis	16	2	8

Le tableau qui suit indique le nombre de maisons par modèle en construction dans les trois villes.

	Brossard	Laval	Candiac
Aster	12	7	8
Hosta	9	5	4
Jonc	2	4	1
Lis	3	5	0

Le prix moyen d'une porte intérieure est de 95 $, celui d'une porte extérieure est de 675 $ et celui d'une fenêtre est de 815 $.

a) Effectuer le produit matriciel approprié pour déterminer le nombre

i) de fenêtres requises à Brossard ;

ii) de portes extérieures requises à Candiac ;

iii) de portes intérieures requises à Laval.

b) Déterminer le nombre total de portes extérieures que l'entreprise doit se procurer.

c) Effectuer le produit matriciel approprié pour déterminer le coût total de ces matériaux dans chacune des villes, en donnant la réponse sous la forme d'une matrice légendée.

19. **APPLICATION | VENTE ET PROFIT**

Le propriétaire d'une boutique du quartier Petite-Italie, à Montréal, a acheté des chandails des deux équipes participant à la finale de la dernière édition du Championnat d'Europe de soccer.

Chandails de l'équipe portugaise : 115 de petite taille (P), 125 de taille moyenne (M), 180 de grande taille (G) et 200 de très grande taille (TG).

Chandails de l'équipe française : 200 de petite taille (P), 215 de taille moyenne (M), 185 de grande taille (G) et 250 de très grande taille (TG).

Les chandails de petite taille lui coûtent 11,00 $ chacun, ceux de taille moyenne, 13,00 $, ceux de grande taille, 15,00 $, et ceux de très grande taille, 18,00 $. Le propriétaire revend les chandails respectivement 44,00 $, 52,00 $, 60,00 $ et 72,00 $.

a) Déterminer la matrice légendée $N_{2\times 4}$ qui représente le nombre de chandails de l'équipe portugaise et de chandails de l'équipe française achetés par le propriétaire dans chacune des tailles.

b) Déterminer la matrice légendée $C_{4\times 1}$ du coût, en dollars, des chandails, et la matrice légendée $V_{4\times 1}$ du prix de vente, en dollars, des chandails.

c) Effectuer NC et donner la signification des valeurs obtenues.

d) Peut-on écrire $V = kC$? Donner, s'il y a lieu, une signification à cette expression.

e) La matrice $R_{2\times 4}$ suivante représente le nombre de chandails de chaque taille qui ont été invendus.

$$R = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{P} & \textbf{M} & \textbf{G} & \textbf{TG} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 85 & 60 & 81 & 102 \\ 18 & 32 & 22 & 48 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \textbf{Portugal} \\ \textbf{France} \end{matrix}$$

Déterminer le nombre de chandails vendus par la boutique, en donnant la réponse sous la forme d'une matrice légendée $A_{2\times 4}$.

f) Déterminer le profit réalisé par le propriétaire de la boutique sur la vente des chandails de l'équipe portugaise et sur la vente des chandails de l'équipe française, en comparant le revenu tiré de ces ventes au coût total d'achat des chandails.

g) Déterminer son profit total, selon les mêmes conditions que celles énoncées en f).

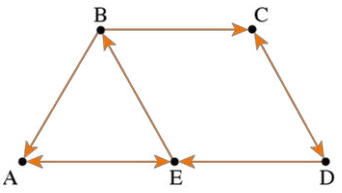
1.4 Applications des matrices

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra utiliser la notion de matrice pour résoudre certains problèmes.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de transformer un système d'équations linéaires sous la forme d'une équation matricielle ;
- de donner la définition d'une matrice de permutation ;
- d'utiliser la matrice de permutation adéquate dans un contexte donné ;
- de donner la définition d'une matrice d'adjacence ;
- de donner la définition d'une matrice d'incidence ;
- d'utiliser une matrice d'incidence pour représenter un graphe orienté ;
- d'utiliser une matrice de migration pour résoudre des problèmes d'échanges de populations ;
- de donner la définition d'une matrice de transition d'une chaîne de Markov ;
- de résoudre certains problèmes à l'aide de la matrice de transition d'une chaîne de Markov.



	A	B	C	D	E
A	0	0	0	0	1
B	1	0	1	0	0
C	0	0	0	1	0
D	0	0	0	1	1
E	1	1	0	0	0

Dans cette section, nous utiliserons la notion de matrice pour résoudre différents types de problèmes.

Systèmes d'équations et équations matricielles

Nous verrons, dans les chapitres 2 et 3, différentes méthodes pour résoudre des systèmes d'équations linéaires après avoir transformé ces systèmes sous la forme d'équations matricielles.

Exemple 1 Soit le système S $\begin{cases} 2x - y + 2z = 15 \\ 4x + 3y - 3z = -25 \\ -2x + 2y + z = -4 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$.

Transformons ce système sous la forme de l'équation matricielle $AX = B$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 15 \\ -25 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B}$$

Matrice des coefficients — Matrice des variables — Matrice des constantes

Exercices de compréhension 1.4

1. Exprimer le système d'équations linéaires suivant sous la forme de l'équation matricielle $AX = B$.

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 6 \\ -x + 2y - 5z = -8 \end{cases}$$

Matrice de permutation

DÉFINITION 1.19

Une **matrice de permutation** est une matrice carrée qui vérifie les propriétés suivantes :

- les éléments sont 0 ou 1 ;
- il y a un et un seul 1 par ligne ;
- il y a un et un seul 1 par colonne.

Exemple 1 La matrice de permutation $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est obtenue en permutant la première ligne et la troisième ligne de la matrice $I_{3\times 3}$. Cette permutation a pour effet de permuter également la première colonne et la troisième colonne de P.

$$I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) La multiplication de P par toute matrice A ayant trois lignes a pour effet de permuter la première ligne et la troisième ligne de A.

Effectuons la multiplication suivante.

$$PA = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{P} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

b) La multiplication de toute matrice B ayant trois colonnes par P a pour effet de permuter la première colonne et la troisième colonne de B.

Effectuons la multiplication suivante.

$$BP = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}}^{B} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{P} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \\ 12 & 11 & 10 \end{bmatrix}$$

c) Effectuons la multiplication $P(PA)$.

$$P(PA) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$PA = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Nous constatons que $P(PA) = A$

$$(PP)A = A \qquad \text{(associativité de la multiplication de matrices)}$$

$$P^2A = A$$

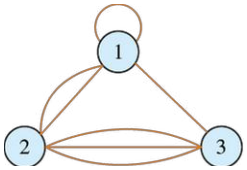
De l'égalité précédente, nous avons $P^2 = I$. (car $IA = A$)

Puisque 2 est le plus petit entier tel que $P^k = I$, nous disons que P est une matrice de permutation de niveau 2.

Remarque : Le plus petit entier positif k, tel que $P^k = I$, est appelé le niveau de permutation de la matrice P.

Matrice d'adjacence

Soit le graphe[1] non orienté suivant et la matrice carrée A représentant le nombre de liens reliant les sommets entre eux ou à eux-mêmes.



$$\begin{array}{c} \\ \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

Une telle matrice A est appelée matrice d'adjacence.

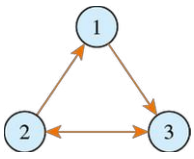
DÉFINITION 1.20

Une **matrice d'adjacence** A est une matrice carrée dont les éléments sont définis comme suit :

$a_{ij} = n$, où n est le nombre de liens reliant les sommets i et j.

Matrice d'incidence

Soit le graphe orienté suivant et la matrice carrée A représentant le nombre de liens d'origine i et d'extrémité j.



$$\begin{array}{c} \\ \textbf{Départ} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \textbf{Arrivée} \\ \begin{array}{ccc} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

Une telle matrice A est appelée matrice d'incidence.

DÉFINITION 1.21

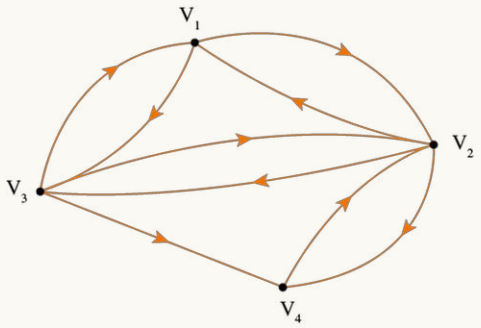
Une **matrice d'incidence** A est une matrice carrée dont les éléments sont définis comme suit :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si on peut aller directement de } i \text{ à } j ; \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

1. La théorie des graphes a été élaborée par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783).

Exemple 1 Soit le schéma ci-dessous représentant un réseau routier entre les villes V_1, V_2, V_3 et V_4. Toutes les routes sont à sens unique.

a) Déterminons la matrice d'incidence $A_{4\times 4}$ correspondant au schéma ci-contre.



$$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = A_{4\times 4}$$

Cette matrice résume les liens entre les différentes villes.

b) Calculons $A^2 = B$ et interprétons certains éléments b_{ij}.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

$$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = B$$ (en effectuant la multiplication)

Les éléments b_{ij} de la matrice B, où $B = A^2$, indiquent le nombre de trajets possibles menant de la ville V_i à la ville V_j en **deux étapes**.

Par exemple,

- $b_{14} = 2$, ce qui signifie qu'il y a deux trajets possibles menant de V_1 à V_4 en **deux étapes**,

  soit $V_1 \to V_2 \to V_4$ et $V_1 \to V_3 \to V_4$;
- $b_{22} = 3$, ce qui signifie qu'il y a trois trajets possibles menant de V_2 à V_2 en **deux étapes**,

  soit $V_2 \to V_1 \to V_2$, $V_2 \to V_3 \to V_2$ et $V_2 \to V_4 \to V_2$;
- $b_{42} = 0$, ce qui signifie qu'il n'y a aucun trajet menant de V_4 à V_2 en **deux étapes**.

Exercices de compréhension 1.4

2. En utilisant la matrice A de l'exemple précédent,

a) déterminer la matrice légendée C, où $C = A^3$;

b) interpréter les éléments c_{43} et c_{34} ;

c) interpréter le fait que la matrice A^3 ne contient aucun un zéro.

Matrice de migration

Une matrice de migration sert à étudier les mouvements de population sur une période de temps donnée.



Exemple 1 Un pays, dont le nombre d'habitants est constant, est séparé en deux régions, nord et sud. Après avoir effectué une étude, des démographes ont constaté que le pourcentage d'habitants qui migrent d'une région à l'autre est le même d'une année à l'autre. Ainsi, chaque année, 4 % de la population de la région nord se déplace vers la région sud, alors que seulement 1 % de la population de la région sud se déplace vers la région nord. Soit n_k et s_k, les populations de la région nord et de la région sud, dans k années à partir de maintenant.

a) Déterminons la relation entre la population de ces deux régions d'une année à la suivante si les taux précédents ne changent pas.

$$n_{k+1} = 0{,}96n_k + 0{,}01s_k$$
$$s_{k+1} = 0{,}04n_k + 0{,}99s_k$$

b) Déterminons sous forme d'équation matricielle le système précédent.

$P_{k+1} = MP_k$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} n_{k+1} \\ s_{k+1} \end{bmatrix}}_{P_{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}96 & 0{,}01 \\ 0{,}04 & 0{,}99 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} n_k \\ s_k \end{bmatrix}}_{P_k}$$

La matrice M est appelée matrice de migration, où $m_{11} + m_{21} = 1$ et $m_{12} + m_{22} = 1$.

c) Si la population actuelle de la région nord est de 15 000 habitants et que celle de la région sud est de 10 200 habitants, déterminons, à l'unité près, la population de ce pays dans chacune des deux régions

i) dans un an ;

$P_1 = MP_0$

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}96 & 0{,}01 \\ 0{,}04 & 0{,}99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15\,000 \\ 10\,200 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 14\,502 \\ 10\,698 \end{bmatrix}$$

d'où, dans un an, la population de la région nord sera de 14 502 habitants, et celle de la région sud, de 10 698 habitants.

ii) dans deux ans ;

$P_2 = MP_1$
$= M(MP_0)$
$= M^2P_0$

$$\begin{bmatrix} n_2 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}96 & 0{,}01 \\ 0{,}04 & 0{,}99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14\,502 \\ 10\,698 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 14\,028{,}9 \\ 11\,171{,}1 \end{bmatrix}$$

d'où, dans deux ans, la population de la région nord sera d'environ 14 029 habitants, et celle de la région sud, d'environ 11 171 habitants.

$P_3 = M^3P_0$
$P_4 = M^4P_0$
$P_5 = M^5P_0$

iii) dans cinq ans.

$$\begin{bmatrix} n_5 \\ s_5 \end{bmatrix} = M^5P_0$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}96 & 0{,}01 \\ 0{,}04 & 0{,}99 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} 15\,000 \\ 10\,200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}819\ldots & 0{,}045\ldots \\ 0{,}180\ldots & 0{,}954\ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15\,000 \\ 10\,200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12\,746{,}8\ldots \\ 12\,453{,}1\ldots \end{bmatrix}$$

d'où, dans cinq ans, la population de la région nord sera d'environ 12 747 habitants, et celle de la région sud, d'environ 12 453 habitants.

iv) Déterminons la matrice P_n exprimant la population de chacune des deux régions en fonction de M et de P_0 dans n années.

$$P_n = M^nP_0$$

Exercices de compréhension 1.4

3. À partir des données énoncées dans l'exemple précédent, déterminer la population de chacune des deux régions dans 10 années.

Chaîne de Markov



Andreï Markov
(1856-1922)

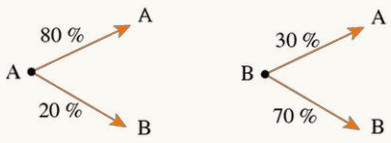
IL Y A ENVIRON 100 ANS...

Andreï Markov est un professeur de l'Université de Saint-Pétersbourg connu principalement pour ses travaux en probabilité, plus précisément sur l'évolution d'un système dont les probabilités de ce que pourrait être son prochain état ne dépendent que de l'état actuel, sans mémoire de ce qu'ont été les états antérieurs. On appelle aujourd'hui de tels systèmes des chaînes de Markov. Elles jouent entre autres un rôle central dans la théorie de l'information, par exemple en informatique, dans la mise au point de processus de compression d'images ou de minimisation d'erreurs dans la transmission de données. Markov est issu d'une famille qui administrait le domaine d'un aristocrate et il est rapidement remarqué pour ses capacités exceptionnelles en mathématiques. Il restera toute sa vie attaché à des idées socialistes. Aussi, dans les dernières années du règne du tsar Nicolas II, il s'oppose souvent aux décisions de l'autocrate. Heureusement, le gouvernement de l'époque n'ose pas brimer cet universitaire célèbre et vieillissant.

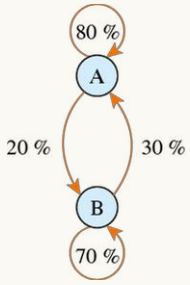
Dans cette section, nous combinons les notions de matrices et de probabilités dans le but d'obtenir des résultats futurs basés sur ces probabilités.

Exemple 1 Dans une région donnée, deux entreprises de câblodistribution A et B se partagent un marché stable d'abonnés. Les dirigeants de ces entreprises estiment qu'une campagne publicitaire effectuée par chacune d'entre elles aurait pour conséquence de faire passer mensuellement 30 % des parts de marché présentement détenues par l'entreprise B aux mains de l'entreprise A et de faire passer mensuellement 20 % des parts de marché présentement détenues par l'entreprise A aux mains de l'entreprise B. Représentons cette situation à l'aide

a) d'un diagramme en arbre ;



b) d'un graphe ;



c) d'une matrice.

$$T = \begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{matrix} \end{array}$$

Une telle matrice T est appelée matrice de transition ou matrice de transition d'une chaîne de Markov (matrice stochastique).

DÉFINITION 1.22

Une **matrice de transition d'une chaîne de Markov** (matrice de Markov) est une matrice carrée $A_{n \times n}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- chaque élément a_{ij} se situe dans l'intervalle [0, 1],
  c'est-à-dire $0 \leq a_{ij} \leq 1$, $\forall\, i$ et j ;
- la somme des éléments de chaque colonne est égale à 1,
  c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$, $\forall\, j$.

Exercices de compréhension 1.4

4. Répondre par vrai (V) ou faux (F) et justifier la réponse. Les matrices suivantes sont des matrices de Markov.

a) $A = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}2 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}3 \end{bmatrix}$

Exemple 2 Soit la matrice de transition T, donnée dans l'exemple 1 précédent, $T = \begin{matrix} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix} \end{matrix}$,

représentant les résultats mensuels anticipés de la campagne publicitaire sur les parts de marché des entreprises A et B.

Nous savons que, avant la campagne publicitaire, l'entreprise A détenait 55 % de l'ensemble du marché et que l'entreprise B détenait 45 % de l'ensemble du marché.

a) Déterminons les parts de marché anticipées de chacune des entreprises un mois après le début de la campagne publicitaire.

Soit $P_0 = \begin{matrix} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{matrix}\begin{bmatrix} 0{,}55 \\ 0{,}45 \end{bmatrix}$, la matrice représentant les parts de marché avant la campagne publicitaire. Ainsi,

$P_1 = TP_0$

$$P_1 = TP_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix}}_{T}\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}55 \\ 0{,}45 \end{bmatrix}}_{P_0} = \underbrace{\begin{matrix} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{matrix}\begin{bmatrix} 0{,}575 \\ 0{,}425 \end{bmatrix}}_{P_1}$$

où P_1 est la matrice représentant les parts de marché anticipées des entreprises A et B un mois après le début de la campagne publicitaire.

D'où, un mois après le début de la campagne publicitaire, l'entreprise A détiendrait 57,5 % de l'ensemble du marché, tandis que l'entreprise B en détiendrait 42,5 %.

b) Déterminons les parts de marché anticipées de chacune des entreprises deux mois après le début de la campagne publicitaire.

$P_2 = TP_1 = T(TP_0) = T^2P_0$

$$P_2 = TP_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix}}_{T}\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}575 \\ 0{,}425 \end{bmatrix}}_{P_1} = \underbrace{\begin{matrix} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{matrix}\begin{bmatrix} 0{,}5875 \\ 0{,}4125 \end{bmatrix}}_{P_2}$$

D'où, deux mois après le début de la campagne publicitaire, l'entreprise A détiendrait 58,75 % de l'ensemble du marché, tandis que l'entreprise B en détiendrait 41,25 %.

c) Déterminons, de deux façons différentes, les parts de marché anticipées de chacune des entreprises trois mois après le début de la campagne publicitaire.

Façon 1

$P_3 = TP_2$

$$P_3 = TP_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix}}_{T}\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}5875 \\ 0{,}4125 \end{bmatrix}}_{P_2} = \underbrace{\begin{matrix} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{matrix}\begin{bmatrix} 0{,}593\,75 \\ 0{,}406\,25 \end{bmatrix}}_{P_3}$$

Façon 2

$P_3 = TP_2 = T(T^2P_0) = T^3P_0$

$$P_3 = T^3P_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}650 & 0{,}525 \\ 0{,}350 & 0{,}475 \end{bmatrix}}_{T^3}\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}55 \\ 0{,}45 \end{bmatrix}}_{P_0} = \underbrace{\begin{matrix} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{matrix}\begin{bmatrix} 0{,}593\,75 \\ 0{,}406\,25 \end{bmatrix}}_{P_3}$$

D'où, trois mois après le début de la campagne publicitaire, l'entreprise A détiendrait 59,375 % de l'ensemble du marché, tandis que l'entreprise B en détiendrait 40,625 %.

d) Déterminons la matrice P_n exprimant les parts de marché anticipées de chacune des entreprises n mois après le début de la campagne publicitaire, en fonction de T et de P_0.

$$P_n = T^n P_0$$

e) Déterminons, à l'aide de Maple, les parts de marché anticipées de chacune des entreprises 10 mois après le début de la campagne publicitaire.

Puisque $P_{10} = T^{10} P_0$, calculons T^{10} et ensuite P_{10}.

```
with(LinearAlgebra):
T := Matrix([[.8, .3], [.2, .7]]):
T^10;
```

$$\begin{bmatrix} ,600390625000 & ,599414062500 \\ ,399609375000 & ,400585937500 \end{bmatrix}$$

```
P0 := Matrix([[0.55], [0.45]]):
MatrixMatrixMultiply(T^10, P0);
```

$$\begin{bmatrix} 0.599951171875000 \\ 0.400048828125000 \end{bmatrix}$$

donc $P_{10} = \begin{bmatrix} 0{,}599\ 95\ldots \\ 0{,}400\ 04\ldots \end{bmatrix}$

D'où, 10 mois après le début de la campagne publicitaire, l'entreprise A détiendrait environ 60 % de l'ensemble du marché, tandis que l'entreprise B en détiendrait environ 40 %.

f) Les entreprises aimeraient savoir si les parts de marché vont se stabiliser à long terme. Pour ce faire, il faut déterminer une matrice $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, où $x + y = 1$, telle que $TP = P$.

Ainsi, $\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 0{,}8x + 0{,}3y = x \\ 0{,}2x + 0{,}7y = y \end{cases}, \text{ c'est-à dire}$$

$$\begin{cases} -0{,}2x + 0{,}3y = 0 & (1) \\ 0{,}2x - 0{,}3y = 0 & (2) \end{cases}$$

Puisque l'équation (2) est un multiple de l'équation (1), les deux équations sont équivalentes.

Or $x + y = 1$, ainsi $y = 1 - x$.

En remplaçant y par $(1 - x)$ dans l'équation (1), nous obtenons

$$-0{,}2x + 0{,}3(1 - x) = 0$$
$$-0{,}5x = -0{,}3$$
$$x = 0{,}6$$

Ainsi, $y = 1 - 0{,}6$ (car $x = 0{,}6$)
$= 0{,}4$

d'où $P = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$,

ce qui signifie que, à long terme, l'entreprise A détiendrait 60 % de l'ensemble du marché, et l'entreprise B, 40 %.

Cette dernière matrice P s'appelle la matrice de distribution stable de la chaîne de Markov.

Remarque : L'étudiant peut vérifier que, pour des valeurs $n \geq 13$, les matrices T obtenues sont de la forme

$$T^n = \begin{bmatrix} 0{,}6000\ldots & 0{,}5999\ldots \\ 0{,}3999\ldots & 0{,}4000\ldots \end{bmatrix}, \text{ où } n \geq 13.$$

Nous acceptons sans démonstration que, lorsque n devient très grand, T^n s'approche de la matrice S suivante.

$$S = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

Cette dernière matrice S s'appelle la matrice stable de la chaîne de Markov.

De façon générale, nous avons la matrice de distribution stable P et la matrice stable S de la chaîne de Markov suivantes.

Matrice de distribution stable

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}, \text{ où } p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1, \text{ et}$$

Matrice stable

$$S_{n \times n} = \begin{bmatrix} p_1 & p_1 & \cdots & p_1 \\ p_2 & p_2 & \cdots & p_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_n & p_n & \cdots & p_n \end{bmatrix}$$

Exercices de compréhension 1.4

5. Soit la matrice de transition T d'une chaîne de Markov suivante.

$$T = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{bmatrix} \text{ et } P_0 = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Calculer :

a) $P_1 = TP_0$ b) $P_2 = TP_1$

EXERCICES 1.4

1. SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Exprimer les systèmes d'équations suivants sous la forme de l'équation matricielle $AX = B$.

a) $3x - y = 5$
$x + 2y = -6$

b) $x = y - z$
$2x - 3 = y + z$

c) $2x - 3y = 1$
$x + 4z = 0$
$2y - 5z = -1$

d) $2x - 4 = y$
$5y = 3 + 7x$
$6x + 3y = -9$

2. MATRICE DE PERMUTATION

Soit la matrice de permutation

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et les matrices } M = \begin{bmatrix} a & 2 \\ b & 3 \\ c & 4 \\ d & 5 \end{bmatrix}$$

et $N = \begin{bmatrix} e & f & g & h \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

a) Effectuer PM et interpréter le résultat.

b) Effectuer NP et interpréter le résultat.

3. MATRICE DE PERMUTATION

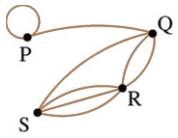
Soit la matrice de permutation $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Déterminer le plus petit entier positif k tel que

$P^k M = M$, où $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$.

4. MATRICE D'ADJACENCE

a) Soit le graphe non orienté suivant.



Déterminer la matrice d'adjacence A correspondante.

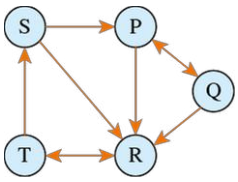
b) Soit A, une matrice d'adjacence.

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{P} & \mathbf{Q} & \mathbf{R} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

Représenter le graphe non orienté correspondant.

5. APPLICATION | RÉSEAU ROUTIER

Le conseil municipal d'une ville a réorganisé la circulation en une série de rues à sens unique et de rues à double sens, tel que représenté ci-dessous.



a) Déterminer la matrice d'adjacence $A_{5 \times 5}$.

b) Calculer $A^2 = B$ et interpréter les éléments suivants.

i) b_{13}

ii) b_{54}

c) Calculer $A^3 = C$ et interpréter les éléments suivants.

i) c_{23}

ii) c_{31}

iii) c_{42}

d) Déterminer la valeur minimale de k telle que tous les éléments de A^k sont différents de zéro. Donner cette matrice et interpréter le fait que cette matrice ne contient aucun zéro.

6. APPLICATION | TRAVAIL ET CHÔMAGE

Dans une région donnée, la population apte au travail est de 40 000 personnes. En 2018, un sondage indique que 32 500 personnes travaillent et que les autres sont au chômage. Compte tenu de la situation économique actuelle, on sait que l'année suivante, la population apte au travail sera la même, que 7 % de ceux qui travaillent en ce moment seront au chômage et que 12 % de ceux qui sont en ce moment au chômage auront du travail.

a) Déterminer la matrice de transition T.

b) Si la situation économique actuelle se maintient, déterminer le nombre de personnes au travail et le nombre de personnes au chômage

i) en 2019 ;

ii) en 2020.

c) Si la situation économique actuelle se maintient, déterminer à partir de quelle année au moins 30 % de la population initiale apte à travailler sera au chômage.

7. CHAÎNE DE MARKOV

Soit la matrice de transition T d'une chaîne de Markov suivante.

$$T = \begin{bmatrix} x & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & y & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & z \end{bmatrix}$$

a) Déterminer la matrice T après avoir calculé les valeurs de x, y et z.

b) Si $P_0 = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$, déterminer

i) $P_1 = TP_0$;

ii) P_2.

8. APPLICATION | ÉLECTIONS MUNICIPALES

Dans une région du Québec, 75 % des élus municipaux sont des hommes et 25 % sont des femmes. Selon une étude, on estime que ces pourcentages se modifieront périodiquement selon la matrice de transition T d'une chaîne de Markov suivante.

$$T = \begin{array}{c} \\ \mathbf{H} \\ \mathbf{F} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{H} & \mathbf{F} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Déterminer la distribution P_1 après une période et interpréter le résultat.

b) Déterminer la distribution P_2 après deux périodes

i) en calculant TP_1 ;

ii) en calculant T^2P_0.

c) Interpréter la matrice P_2.

d) i) Déterminer la matrice de distribution stable

$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, où $x + y = 1$,

telle que $TP = P$.

ii) Interpréter le résultat.

e) Déterminer la matrice stable S de cette matrice de transition.

9. APPLICATION | PARTS DE MARCHÉ

Deux entreprises de déneigement se partagent le marché dans un certain secteur. Présentement, 35 % des ménages du secteur font appel aux services de l'entreprise A, 40 % font affaire avec l'entreprise B et les autres ménages n'ont signé aucun contrat de déneigement. Les dirigeants de ces entreprises estiment qu'une campagne publicitaire effectuée par chacune d'entre elles aurait les conséquences suivantes pendant quelques années : chaque année, 35 % des résidants qui n'ont aucun contrat de déneigement feraient appel à l'entreprise A et 45 % des résidants sans contrat de déneigement se tourneraient vers l'entreprise B. De plus, chaque année, 15 % des clients de chaque entreprise changeraient d'entreprise de déneigement et 5 % des clients de chaque entreprise décideraient de ne faire appel à aucune entreprise de déneigement.

a) Représenter la situation énoncée à l'aide d'un diagramme en arbre.

b) Déterminer la matrice de transition correspondante.

c) Déterminer le pourcentage des ménages faisant appel à l'entreprise A et à l'entreprise B

i) un an après le début de la campagne publicitaire ;

ii) deux ans après le début de la campagne publicitaire.

d) Déterminer le pourcentage des ménages sans contrat de déneigement quatre ans après le début de la campagne publicitaire.

Révision des concepts

1

Matrices

Matrices particulières

Une matrice A est une matrice :

nulle si _____

ligne si _____

colonne si _____

diagonale si _____

carrée si _____

triangulaire supérieure si _____

triangulaire inférieure si _____

symétrique si _____

antisymétrique si _____

scalaire si _____

identité si _____

idempotente si _____

nilpotente si _____

Matrice inverse

Si $AB = BA = I$,
alors $B =$ _____

Opérations sur les matrices

Soit A, B et C, des matrices, et k, r et $s \in \mathbb{R}$.

Addition de matrices

$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$
$B_{m \times n} = [b_{ij}]_{m \times n}$
$A_{m \times n} + B_{m \times n} = S_{m \times n}$
$s_{ij} =$ _____

Propriétés

$A + B =$ _____
$A + (B + C) =$ _____
$A + O =$ _____
$A + (-A) =$ _____

Multiplication d'une matrice par un scalaire

$A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$
$kA_{m \times n} = P_{m \times n}$
$p_{ij} =$ _____

Propriétés

$r(A + B) =$ _____
$(r + s)A =$ _____
$r(sA) =$ _____
$1A =$ _____

Produit de matrices

$A_{m \times p} = [a_{ij}]_{m \times p}$
$B_{p \times n} = [b_{ij}]_{p \times n}$
$A_{m \times p} B_{p \times n} = C_{m \times n}$
$c_{ij} =$ _____

Propriétés

$(AB)C =$ _____
$A(B + C) =$ _____
$(A + B)C =$ _____
$k(AB) =$ _____
$=$ _____
$AI = IA =$ _____

Applications

Matrice de permutation (page 41)
Matrice d'adjacence (page 42)
Matrice d'incidence (page 42)
Matrice de migration (page 44)
Chaîne de Markov (page 45)
Matrice de transition (page 46)

Transposée d'une matrice

$(A^T)^T =$ _____
$(A + B)^T =$ _____
$(AB)^T =$ _____
$(kA)^T =$ _____

Exercices récapitulatifs

Administration | Biologie | Chimie | Géométrie | Physique | Sciences humaines | Outil technologique

Les réponses aux exercices récapitulatifs et aux problèmes de synthèse, à l'exception de ceux notés en **rouge**, sont fournies à la fin du manuel.

1. **APPLICATION | PRODUCTION QUOTIDIENNE**

Dans une usine fonctionnant 24 heures par jour, 3 équipes de travailleurs assurent la production de 4 articles différents. La matrice légendée P suivante nous renseigne sur le nombre d'articles produits par chacune des équipes au cours d'une même journée.

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{A} & \textbf{B} & \textbf{C} & \textbf{D} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 32 & 21 & 5 & 12 \\ 20 & 11 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \textbf{I} \\ \textbf{II} \\ \textbf{III} \end{matrix}$$

a) Déterminer la dimension de P.

b) Déterminer les éléments p_{12}, p_{23}, p_{32} et p_{14}.

c) Donner la signification de $p_{21} + p_{22} + p_{23} + p_{24}$.

d) Donner la signification de $p_{13} + p_{23} + p_{33}$.

e) Déterminer la matrice représentant la production de cinq jours.

2. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & -2 & 7 & -9 \\ -4 & 17 & 8 & 10 \\ 12 & 15 & 9 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer

i) les éléments de la diagonale principale ;

ii) les éléments de la diagonale secondaire ;

iii) la matrice A^T ;

iv) les éléments de la diagonale principale de $(A - A^T)$.

b) Calculer

i) $\text{Tr}(A)$; ii) $\text{Tr}(A^T)$.

3. Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$,

$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ et $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Effectuer, si c'est possible :

a) $A - B^T$ b) $(4A)(5B)$ c) $(A^T + 2B)G$

d) $2GC^T$ e) C^2 f) EG^T

g) FG **h)** GF **i)** $2E + F^T$

j) $(FB)^T$ **k)** $(2B^T - 3A)E$ **l)** F^3E^3

m) $(EF)^3$ **n)** $(FE)^4$

4. Soit les matrices $A_{4\times3}$, $B_{3\times5}$, $C_{4\times3}$ et $E_{1\times3}$. Parmi les opérations suivantes, déterminer celles qui sont définies et donner, dans ce cas, la dimension de la matrice résultante.

a) AB b) AC **c)** EB

d) $A - C$ **e)** $(AB)C$ f) $C(AB)$

g) CB h) $E(A + C)$ **i)** $EB + C$

j) $(A + C)B$ **k)** A^TC l) $(CE^T)^T$

m) AI_3 n) I_3C **o)** $E + O_{3\times1}$

5. Déterminer les matrices X et Y telles que :

a) $3X + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 7 & -5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

b) $3Y^T + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 8 & -5 & 1 \end{bmatrix}^T$

6. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$. Effectuer :

a) BA **b)** AB c) BAB

d) ABA **e)** A^2B^2 **f)** $ABBA$

7. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer AA^T et A^TA.

b) Calculer $\text{Tr}(AA^T)$ et $\text{Tr}(A^TA)$.

c) Répondre par vrai (V) ou faux (F).

i) $A^TA = AA^T$.

ii) A^TA et AA^T sont des matrices symétriques.

8. Soit la matrice $A_{2\times 3}$ telle que $a_{ij} = ij$, et la matrice $B_{3\times 2}$ telle que $b_{ij} = \frac{i}{j}$. Calculer AB et BA.

9. Déterminer, s'il y a lieu, l'indice de nilpotence k des matrices suivantes.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ **d)** $E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 16 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

e) $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ **f)** $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. Répondre par vrai (V) ou faux (F) et justifier la réponse.

a) Une matrice A_{23} peut être symétrique.

b) Si A est une matrice symétrique,
   i) alors $(A - A^{\mathrm{T}}) = O$;
   ii) alors A^{T} est une matrice symétrique.

c) Si A est une matrice antisymétrique, alors $A - A^{\mathrm{T}} = O$.

d) Si A est une matrice triangulaire supérieure,
   i) alors A^{T} est aussi une matrice triangulaire supérieure ;
   ii) alors AA^{T} est une matrice diagonale.

e) Toutes les matrices diagonales sont antisymétriques.

f) Si A est une matrice telle que la matrice A^2 est définie, alors A est une matrice carrée.

g) Si $A_{n\times n}$ et $B_{n\times n}$ sont deux matrices diagonales, alors $AB = BA$.

h) Si A est une matrice carrée, alors $(A^2)^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^2$.

i) Si A et B sont deux matrices triangulaires inférieures de même dimension, alors $A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$ est aussi une matrice triangulaire inférieure.

j) Soit trois matrices, A, B et C.
   i) Si $AB = O$, alors $A = O$ ou $B = O$.
   ii) Si $AB = AC$, alors $B = C$.
   iii) AB et BA sont définis seulement lorsque A et B sont deux matrices carrées de même dimension.

k) Si A et B sont deux matrices carrées de même dimension, alors $(AB)^2 = A^2B^2$.

l) Si A est une matrice carrée
   i) alors $\mathrm{Tr}(A^2) = (\mathrm{Tr}(A))^2$;
   ii) alors $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}})$;
   iii) antisymétrique, alors $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

m) La matrice $O_{n\times n}$ est inversible.

11. **APPLICATION | CLASSEMENT SPORTIF**

Les résultats de cinq pays dans une compétition de soccer de la CONCACAF sont détaillés ci-dessous.

Canada : 2 victoires, 1 nulle et 1 défaite ;

Costa Rica : 0 victoire, 2 nulles et 2 défaites ;

États-Unis : 2 victoires, 0 nulle et 2 défaites ;

Mexique : 4 victoires, 0 nulle et 0 défaite ;

Porto Rico : 0 victoire, 1 nulle et 3 défaites.

Si une victoire procure trois points, une partie nulle, un point, et qu'une défaite ne donne aucun point, utiliser le produit matriciel pour déterminer le nombre de points obtenus par chacune des équipes et donner le classement final.

12. **APPLICATION | POINTS MARQUÉS**

Au basketball, un joueur peut marquer des points grâce à un tir de loin, à un tir de près ou à un lancer franc. Le tableau ci-dessous présente les tirs réussis par un certain joueur au cours des quatre dernières parties.

	Partie 1	**Partie 2**	**Partie 3**	**Partie 4**
Tir de loin	3	2	2	3
Tir de près	5	x	5	$2x$
Lancer franc	2	1	1	4

Un tir de loin procure trois points, un tir de près, deux points, et un lancer franc, un point.

a) Effectuer l'opération matricielle appropriée pour déterminer le nombre de points amassés par ce joueur à chacune des parties. Certains éléments de ce résultat sont écrits en fonction de x.

b) Si le joueur a amassé un total de 136 points au cours des quatre dernières parties, déterminer le nombre de points marqués par ce joueur à chacune de ces parties.

13. **APPLICATION | GESTION DE L'APPROVISIONNEMENT**

Un pâtissier détermine qu'il lui faut 1 œuf, 20 grammes de beurre et 100 grammes de farine pour confectionner un chou à la crème. Il sait également qu'il lui faut 3 œufs, 50 grammes de beurre et 200 grammes de farine pour la confection d'une tarte. Trois épiceries de la région lui font la commande qui suit.

L'épicerie 1 commande 30 choux à la crème et 36 tartes, l'épicerie 2 commande 60 choux à la crème et 50 tartes et l'épicerie 3 commande 72 choux à la crème et 80 tartes.

a) Déterminer la matrice légendée Q présentant l'information qui correspond aux quantités d'œufs, de beurre et de farine nécessaires à la confection d'un chou à la crème et d'une tarte.

b) Déterminer la matrice légendée C correspondant aux commandes des trois épiceries.

c) Utiliser des opérations matricielles pour déterminer les quantités respectives d'œufs, de beurre et de farine que le pâtissier doit acheter pour pouvoir honorer les trois commandes.

d) Si le pâtissier paie les œufs 3,10 $ la douzaine, le beurre 8,50 $ le kilogramme, et la farine 1,80 $ le kilogramme, utiliser des opérations matricielles pour déterminer son coût d'achat A total.

14. APPLICATION | ALIMENTATION

La matrice suivante indique le contenu en vitamines A, B, C et D de trois sortes de céréales, en unité convenablement choisie.

$$M = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{A} & \textbf{B} & \textbf{C} & \textbf{D} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \textbf{Céréales 1} \\ \textbf{Céréales 2} \\ \textbf{Céréales 3} \end{matrix}$$

a) Si, en un mois, Bianca consomme 5 unités de céréales 1, 10 unités de céréales 2 et 8 unités de céréales 3, déterminer la matrice Q donnant la quantité de chaque type de vitamine absorbée.

b) Le coût des céréales est calculé en fonction des vitamines qu'elles contiennent. Le prix des vitamines est respectivement de 0,25 $, 0,40 $, 0,75 $ et 0,85 $ par unité de céréales. Déterminer la matrice C donnant le coût de une unité de chaque type de céréales.

c) Déterminer le coût total P de la nourriture pour un mois.

15. APPLICATION | ACHAT ET VENTE

Une petite chaîne de magasins d'électronique compte trois succursales.

Dans la première succursale, en une semaine, on a vendu six téléviseurs, quatre enregistreurs numériques, deux enceintes de cinéma maison et sept tablettes électroniques.

Dans la deuxième succursale, au cours de la même période, on a vendu cinq téléviseurs, trois enregistreurs numériques, une enceinte de cinéma maison et neuf tablettes électroniques.

Dans la troisième succursale, on a vendu quatre téléviseurs, un enregistreur numérique, aucune enceinte de cinéma maison et six tablettes électroniques.

Ces articles se vendent respectivement 2000 $, 350 $, 2200 $ et 650 $. La marchand a payé ces mêmes articles respectivement 1250 $, 210 $, 1400 $ et 380 $ l'unité.

a) Donner la matrice légendée N correspondant au nombre d'articles vendus dans chacune des succursales.

b) Donner les matrices légendées C et V correspondant respectivement au prix d'achat et au prix de vente de chacun des articles.

c) Donner les matrices légendées C_t et V_t correspondant respectivement au coût total et aux ventes totales de chacune des succursales.

d) Donner la matrice légendée P correspondant aux profits réalisés par chacune des succursales ainsi que le profit total P_t réalisé par la chaîne pendant cette semaine.

16. MATRICE DE PERMUTATION

Soit la matrice $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix}$.

a) Soit la matrice de permutation

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

i) Effectuer P_1M et comparer le résultat obtenu avec M.

ii) Effectuer P_1^2M et comparer le résultat obtenu avec M.

b) Soit la matrice de permutation

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

i) Effectuer P_2M.

ii) Déterminer k, le plus petit entier positif tel que $(P_2)^kM = M$.

c) Soit la matrice de permutation

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Déterminer k, le plus petit entier positif tel que $(P_3)^kM = M$.

17. MATRICE DE PERMUTATION

Déterminer la matrice de permutation 3×3

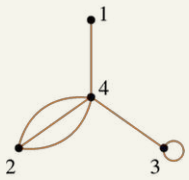
a) P_1 telle que $P_1 \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix}$;

b) P_2 telle que $P_1 \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} P_2 = \begin{bmatrix} b & a & c \\ h & g & i \\ e & d & f \end{bmatrix}$.

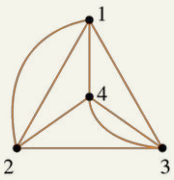
18. MATRICES D'ADJACENCE ET D'INCIDENCE

a) Déterminer la matrice d'adjacence A qui correspond au graphe non orienté suivant.

i)

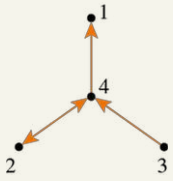


ii)

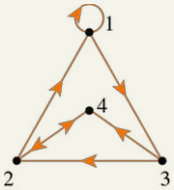


b) Déterminer la matrice d'incidence B qui correspond au graphe orienté suivant.

i)

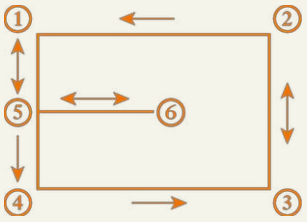


ii)



19. APPLICATION | CIRCULATION URBAINE

Le schéma suivant représente quelques rues d'une ville qui sont à sens unique ou à double sens.



a) Déterminer la matrice d'incidence A.

b) Calculer $B = A^2$ et interpréter les éléments

i) b_{11}; ii) b_{54}; **iii)** b_{31}; **iv)** b_{55}.

c) Calculer $C = A^3$ et interpréter les éléments c_{ij}.

d) Calculer $M = A^4$ et interpréter les éléments

i) m_{11}; ii) m_{53}; iii) m_{55}; iv) m_{35}.

e) Déterminer la valeur minimale de k telle que A^k ne contient aucun zéro. Donner cette matrice et interpréter le fait que cette matrice ne contient aucun zéro.

20. APPLICATION | MIGRATION

Chaque année, 25 % de la population d'une ville X migre vers une ville Y et 15 % de la population de la ville Y migre vers la ville X. On suppose que ces migrations sont les seuls facteurs influant sur les fluctuations de la population de ces villes. De plus, 60 % de la population totale des deux villes se trouve dans la ville X.

a) Représenter cette situation à l'aide d'un diagramme en arbre.

b) Déterminer la matrice de transition T de la chaîne de Markov correspondante et la matrice P_0 donnant, en pourcentage, les populations des deux villes.

c) Déterminer les matrices suivantes et interpréter les résultats.

i) P_1 ii) P_3

d) Déterminer la matrice $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, où $x + y = 1$, telle que $TP = P$ et interpréter la matrice P.

e) Si la population initiale de la ville X est de 17 160 habitants, déterminer la population des deux villes à long terme.

21. APPLICATION | MIGRATION

Le ministère des Affaires municipales et de l'Occupation du territoire (MAMOT) a commandé à ses statisticiens une étude sur les mouvements des populations rurales et urbaines. Aux fins de cette étude, le MAMOT a divisé le Québec en trois grandes régions : la région métropolitaine de Montréal, M, la région métropolitaine de Québec, Q, et toutes les autres régions regroupées, A. Afin d'analyser les mouvements de population, les statisticiens du MAMOT ont déterminé, grâce à un sondage téléphonique, les probabilités de mouvement annuel, sur une période de cinq ans, entre ces trois régions. Les résultats du sondage sont les suivants. Chaque année,

- 4 % de la population de M quitte pour Q, et 3 % pour A ;
- 11 % de la population de Q quitte pour M, et 4 % pour A ;
- 12 % de la population de A quitte pour M, et 2 % pour Q.

a) Représenter cette situation à l'aide d'un diagramme en arbre.

b) Déterminer la matrice de transition T correspondante.

c) En 2017, la population de la région métropolitaine de Montréal était de 4 100 000 habitants, celle de la région métropolitaine de Québec, de 807 000 habitants, et celle de toutes les autres

régions regroupées, de 3 419 000 habitants. Déterminer, en se basant sur l'étude du MAMOT, la population de ces régions

i) en 2018 ; ii) en 2019.

d) Déterminer, en se basant sur l'étude du MAMOT, la population de ces régions en 2022.

e) De 2017 à 2022, déterminer la variation, en pourcentage, de la population de chacune des régions.

f) Déterminer la répartition, en pourcentage, de la population du Québec dans chacune des régions

i) en 2017 ; ii) en 2022.

22. **APPLICATION | ASSURANCES**

Trois compagnies d'assurance habitation se partagent le marché d'une petite ville de la manière suivante. La compagnie A assure 30 % des maisons de la ville, la compagnie B en assure 20 % et les maisons restantes sont assurées par la compagnie C. La compagnie B décide d'offrir un rabais sur les primes ayant pour conséquence que, annuellement, pour les quelques années suivantes, 20 % des clients de A se tournent vers B et 10 % des clients de A choisissent C pour les assurer ; 15 % des clients de B s'assurent avec A et 5 % des clients de B signent un contrat avec C ; et 15 % des clients de C la délaissent pour faire affaire avec A et 25 % des clients de C se tournent vers B.

a) Déterminer la matrice de transition T.

b) En tenant compte de la situation énoncée, calculer le pourcentage des clients de la ville assurés par la compagnie A, la compagnie B et la compagnie C

i) dans un an ;

ii) dans deux ans ;

iii) dans trois ans.

Problèmes de synthèse

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer A^2, A^3 et A^4.

b) Déduire l'inverse de A.

c) Déterminer toutes les valeurs de k, où $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, telles que :

i) $A^k = I$ **ii)** $A^k = A$

iii) $A^k = A^2$ **iv)** $A^k = A^3$

2. a) Soit $M = \begin{bmatrix} m & \sqrt{1-m^2} \\ \sqrt{1-m^2} & -m \end{bmatrix}$, où $-1 \leq m \leq 1$.

i) Déterminer M^2 et en déduire M^{-1}.

ii) Donner une conjecture pour M^n, où n est un entier positif.

iii) Déterminer M^3 et M^6 si $m = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Soit $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}$, déterminer A^7 et A^{10}.

3. a) Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} x & -5 \\ -4 & y \end{bmatrix}$.

Déterminer les valeurs de x et de y telles que $B = A^{-1}$.

b) Soit $F = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ et $G = \begin{bmatrix} x & 2 & -3 \\ 2 & y & 0 \\ 4 & -2 & z \end{bmatrix}$.

Déterminer les valeurs de x, de y et de z telles que $G = F^{-1}$.

4. a) Trouver la matrice inverse de la matrice diagonale suivante.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Déterminer à quelles conditions une matrice diagonale $B_{n \times n}$ est inversible.

5. a) Déterminer les valeurs de x et de y telles que

$A = A^T$ si $A = \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

b) Déterminer les valeurs de x et de y telles que

$$\begin{bmatrix} -11 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 4 & x \\ x^2 & -1 \end{bmatrix} = O.$$

c) Déterminer les valeurs de θ, où $0° \leq \theta \leq 360°$, telles que

$$\begin{bmatrix} \sin\theta & 2\sin\theta & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 3\sin\theta \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

6. Soit la **matrice de Vandermonde**, qui tient son nom du mathématicien français Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796), définie par

$$V_{nn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ (a_{11})^2 & (a_{12})^2 & (a_{13})^2 & \dots & (a_{1n})^2 \\ (a_{11})^3 & (a_{12})^3 & (a_{13})^3 & \dots & (a_{1n})^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{11})^n & (a_{12})^n & (a_{13})^n & \dots & (a_{1n})^n \end{bmatrix}, \text{ où } a_{1j} \in \mathbb{R}.$$

Déterminer la matrice de Vandermonde dans les cas suivants.

a) V_{33} si $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$ et $a_{13} = 3$

b) V_{44} si $a_{11} = -1$ et $a_{1j} = 0$ si $j > 1$

c) V_{44} si $a_{1j} = (-1)^{j+1}$

d) $V_{33} = \begin{bmatrix} _ & _ & 5 \\ _ & 81 & _ \\ -8 & _ & _ \end{bmatrix}$

7. Soit f et g, deux fonctions dérivables, et $W(x)$, la **matrice de Wronski**, définie par

$$W(x) = \begin{bmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{bmatrix}.$$

Déterminer $W(x)$ lorsque :

a) $f(x) = 1$ et $g(x) = x$

b) $f(x) = e^{ax}$ et $g(x) = \ln bx$

c) $f(x) = \sin 2x$ et $g(x) = \cos^2 3x$

d) $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2^x$

e) $f'(x) = \sin x$ et $g'(x) = e^{-x}$

f) $f(x) = g'(x) = \cos x$

8. Soit $A = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$ et $B = I - A$, et $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

a) Donner une conjecture pour

i) A^n ; **ii)** B^n.

b) Calculer

i) AB ; **ii)** BA.

9. Après avoir généré trois matrices arbitraires $A_{4\times4}$, $B_{4\times4}$ et $C_{4\times4}$, dont les éléments se situent entre -20 et 30, à l'aide des commandes Maple suivantes,

with(LinearAlgebra):

RandomMatrix(4, 4, *generator* = -20 ..30):

vérifier que

a) $(AB)C = A(BC)$;

b) $(A + B)C = AC + BC$;

c) $(AB)^T = B^T A^T$.

10. **APPLICATION | AVANTAGE NUMÉRIQUE**

Après l'analyse de l'avantage numérique d'une équipe atome adverse, l'entraîneur détermine que :

- le défenseur gauche (DG) passe la rondelle deux fois plus souvent à l'ailier gauche qu'au joueur de centre et ne passe jamais la rondelle aux autres joueurs ;
- le défenseur droit (DD) passe la rondelle deux fois plus souvent au joueur de centre qu'aux autres joueurs ;
- le centre (C) passe la rondelle deux fois plus souvent à l'ailier droit et au défenseur gauche qu'aux autres joueurs ;
- l'ailier gauche (AG) passe la rondelle trois fois plus souvent au défenseur gauche et au joueur de centre qu'à l'ailier droit, et il ne passe jamais la rondelle au défenseur droit ;
- l'ailier droit (AD) passe la rondelle aux quatre joueurs avec la même fréquence.



a) Compléter la matrice stochastique suivante.

$$H = \begin{array}{c} \\ \textbf{DG} \\ \textbf{DD} \\ \textbf{C} \\ \textbf{AG} \\ \textbf{AD} \end{array} \begin{array}{c} \textbf{Passeur} \\ \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \frac{1}{3} & & & & \\ \frac{2}{3} & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \textbf{DG} \\ \textbf{DD} \\ \textbf{C} \\ \textbf{AG} \\ \textbf{AD} \end{array} \quad \textbf{Receveur}$$

b) Déterminer $M = H^2$, et interpréter m_{11}, m_{35} et m_{53}.

c) Interpréter le fait que $m_{ij} \neq 0$, $\forall$ i et j.

11. **APPLICATION | POPULATION ANIMALE**

Le nombre d'animaux d'une certaine colonie est répertorié à tous les lundis et la population est donnée par la matrice suivante.

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}, \text{ où}$$

m_1 représente le nombre d'animaux dont l'âge $a \in$ [0 jour, 7 jours[,

m_2 représente le nombre d'animaux dont l'âge $a \in$ [7 jours, 14 jours[et

m_3 représente le nombre d'animaux dont l'âge $a \in$ [14 jours, 21 jours[.

Soit $N_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, indiquant le nombre d'animaux de chaque groupe d'âge pour un lundi donné,

et $N_1 = \begin{bmatrix} 2y + 2z \\ \frac{2x}{5} \\ \frac{y}{4} \end{bmatrix}$, indiquant le nombre d'animaux de chaque groupe d'âge le lundi suivant.

a) Donner la signification de
   i) $2y + 2z$; ii) $\frac{2x}{5}$; iii) $\frac{y}{4}$.

b) Déterminer les matrices A et N_2 telles que $N_1 = AN_0$ et $N_2 = AN_1$.

c) Dans le cas où $N_0 = \begin{bmatrix} 1000 \\ 800 \\ 400 \end{bmatrix}$, déterminer N_1, N_2, N_3, N_4 et N_5.

12. APPLICATION | COMMUNICATIONS

Soit C, la matrice d'incidence suivante correspondant aux communications entre quatre individus.

$$\begin{array}{c} \\ \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = C$$

a) Représenter le graphe correspondant à cette matrice d'incidence.

b) i) Calculer $B = C^2$.

ii) Interpréter les éléments b_{12} et b_{23}.

c) Déterminer s'il existe un individu qui peut communiquer avec tous les autres
   i) en une étape ;
   ii) en deux étapes.

d) i) Calculer $M = C + C^2$.
   ii) Interpréter l'élément m_{13}.

e) i) Calculer $N = C^3$.
   ii) Interpréter l'élément n_{24}.

f) i) Calculer $S = C + C^2 + C^3$.
   ii) Interpréter le fait que $s_{ij} > 0$, $\forall$ i et j.

13. APPLICATION | COMPORTEMENT HUMAIN

Un enseignant a observé le comportement de cinq étudiants qui œuvraient à l'intérieur d'un groupe de travail. Il a constaté que certains d'entre eux exerçaient une influence directe sur les décisions que d'autres prenaient. La matrice suivante représente ces observations.

$$\begin{array}{c} \\ \textbf{A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \\ \textbf{D} \\ \textbf{E} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \textbf{A} & \textbf{B} & \textbf{C} & \textbf{D} & \textbf{E} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = M$$

Le chiffre 1 signifie que l'étudiant de la ligne correspondante exerce une influence directe sur l'étudiant de la colonne correspondante.

Le chiffre 0 signifie que l'étudiant de la ligne correspondante n'exerce pas d'influence directe sur l'étudiant de la colonne correspondante.

a) Représenter le graphe correspondant à la matrice M.

b) i) Calculer $Q = M^2$.
   ii) Interpréter les éléments q_{13} et q_{25}.

c) i) Calculer $R = M + M^2$.
   ii) Interpréter l'élément r_{35}.

d) Après combien d'étapes l'étudiant C exercerait-il une influence indirecte sur l'étudiant E ? Déterminer les étudiants intermédiaires.

14. APPLICATION | PUBLICITÉ

Quatre entreprises de microbrassage se partagent le marché de la vente de bière de microbrasserie dans une région donnée. Présentement, l'entreprise A détient 40 % des parts de marché, l'entreprise B, 30 %, l'entreprise C, 20 %, et l'entreprise D, 10 %. À la suite d'une campagne publicitaire effectuée par chacune des entreprises, on obtient la matrice de transition mensuelle T suivante.

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \textbf{A} & \textbf{B} & \textbf{C} & \textbf{D} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \textbf{A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \\ \textbf{D} \end{array}$$

En supposant que cette matrice T est valable pour un an, déterminer la part de marché de chaque entreprise

a) dans un mois ;

b) dans trois mois ;

c) dans six mois ;

d) dans un an.

15. **APPLICATION | MALADIE DE LYME**

La maladie de Lyme est une maladie transmise par l'intermédiaire de la piqûre d'une tique infectée. Cette maladie se propage vers le nord du continent américain à partir des régions sud-est et centre-sud des États-Unis. Après avoir été piqué par une tique infectée, tout individu peut se trouver, d'un mois à l'autre, dans l'un des trois états suivants : infecté mais non malade (I), infecté et malade (M) ou non infecté et non malade (N).

- Une proportion de 70 % des personnes infectées mais non malades (I) peut demeurer dans cet état ; 10 % peut développer la maladie (M) et 20 % peut passer à l'état non infecté et non malade (N).
- Une proportion de 60 % des personnes malades (M) peut voir son état s'améliorer et passer à l'état infecté mais non malade (I), 30 % peut rester malade (M) et 10 % peut guérir complètement (N).
- Une proportion de 60 % des personnes non infectées et non malades (N) peut devenir infectée mais non malade (I), 20 % peut passer à l'état infecté et malade (M) et 20 % peut demeurer dans le même état (N).

a) Déterminer le diagramme en arbre correspondant à la situation énoncée.

b) Déterminer la matrice de transition correspondante.

c) Si, au départ, 50 % d'une population donnée est infectée mais non malade, 5 % est infectée et malade, et 45 % est non infectée et non malade, déterminer le pourcentage de chacun des états après

i) un mois ; ii) trois mois ;

iii) six mois ; iv) un an.

d) Si, au départ, 100 % d'une population donnée n'est pas infectée, déterminer le pourcentage de chacun des états après

i) un mois ; ii) trois mois ;

iii) six mois ; iv) un an.

e) Déterminer la matrice stable de cette chaîne de Markov.

16. Soit $\mathcal{M}_{2\times 2}$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, où a, b, c et $d \in \mathbb{R}$, et telles que $a + c = 1$ et $b + d = 1$.
Démontrer que, si A et $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, alors

a) $A^2 \in \mathcal{M}_{2\times 2}$; b) $AB \in \mathcal{M}_{2\times 2}$;

c) $\frac{1}{2}(A + B) \in \mathcal{M}_{2\times 2}$.

17. Soit les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, et soit $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

a) i) Calculer A^2, A^3 et A^4.

ii) Donner une conjecture pour A^n.

iii) Démontrer par récurrence la conjecture de A^n.

b) i) Calculer B^2, B^3 et B^4.

ii) Donner une conjecture pour B^n.

iii) Démontrer par récurrence la conjecture de B^n.

18. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a & a \end{bmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$, et $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

a) i) Calculer A^2, A^3 et A^4.

ii) Donner une conjecture pour A^n.

iii) Démontrer par récurrence la conjecture de A^n.

b) Déterminer A^n si $a = -1$.

c) Calculer :

i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{10}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{11}$

d) Calculer :

i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{10}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{11}$

19. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

a) i) Calculer A^2, A^3 et A^4.

ii) Donner une conjecture pour A^n.

iii) Démontrer par récurrence la conjecture de A^n.

iv) Exprimer A^n en fonction de A.

b) i) Calculer B^2, B^3 et B^4.

ii) Donner une conjecture pour B^n.

iii) Démontrer par récurrence la conjecture de B^n.

iv) Exprimer B^n en fonction de B.

20. Soit A et B, deux matrices compatibles.
Démontrer que :

a) $(A^T)^T = A$ b) $(A + B)^T = A^T + B^T$

c) $(kA)^T = kA^T$, où $k \in \mathbb{R}$

21. Soit A, B et C, trois matrices de même dimension.

a) Démontrer que, si $A + B = A + C$, alors $B = C$.

b) Si $AB = A$ et $BA = B$, démontrer que A et B sont des matrices idempotentes.

2 Résolution de systèmes d'équations linéaires



Perspective historique 62

Exercices préliminaires 63

2.1 Résolution de systèmes d'équations linéaires par des méthodes élémentaires 63

2.2 Résolution de systèmes d'équations linéaires et de systèmes homogènes d'équations linéaires par la méthode de Gauss 72

2.3 Résolution de systèmes d'équations linéaires par la méthode de Gauss-Jordan et inversion de matrices carrées par cette méthode 90

Révision des concepts 99

Exercices récapitulatifs 100

Problèmes de synthèse 103

La résolution de systèmes d'équations linéaires est utilisée dans plusieurs domaines : mathématiques, sciences, économie, etc.

Dans ce chapitre, nous étudierons différentes méthodes pour résoudre des systèmes d'équations linéaires.

Nous verrons spécialement la méthode de Gauss et celle de Gauss-Jordan. Ces deux méthodes font appel à la notion de matrice que nous avons étudiée au chapitre précédent.

En particulier, l'étudiant pourra résoudre le problème suivant (qui se trouve au n° 16 des exercices récapitulatifs, à la page 102).

> Un entrepreneur de construction se propose de bâtir 65 maisons. Il offre des modèles à 1, 2 ou 3 chambres à coucher. Si, à la fin de la construction, il y a 145 chambres et deux fois plus de maisons à 3 chambres que de maisons à 1 chambre, déterminer le nombre de maisons de chaque modèle.

De la culture du blé à la position des astéroïdes, toujours des systèmes d'équations linéaires

Déjà dans l'Antiquité, en Mésopotamie et en Égypte, on trouve des problèmes dont la solution correspond aujourd'hui à la résolution d'un système d'équations linéaires. Ainsi, dans un vieux texte babylonien, on peut lire le problème suivant : *Un champ produit 2/3 de sila par sar. Un second champ produit 1/2 de sila par sar. La production du premier champ dépasse de 500 silas celle du second champ et l'aire totale des deux champs est de 500 sars. Quelle est l'aire de chacun des champs ?* (Le sila est une mesure de volume, et le sar, une mesure de surface.) Dans le premier chapitre, nous avons vu que les Chinois s'intéressaient aussi à ce genre de problèmes. Dans la seconde moitié du Moyen Âge (du XIII^{e} au XV^{e} siècle), les problèmes de ce type se multiplient.

En effet, à cette époque, le commerce international commence à se développer en Europe. La complexification des activités économiques pose alors souvent des problèmes que seule la connaissance des mathématiques permet de résoudre. C'est pourquoi se développent dans les villes, surtout en Italie, des écoles de mathématiques appelées « écoles d'abaquistes ». Dérivé du mot « abaque », le terme « abaquistes » désigne les professeurs qui enseignent dans ces écoles fréquentées par les fils des grandes familles marchandes. La connaissance des mathématiques représente à cette époque un tel atout que plusieurs abaquistes jouissent d'un grand prestige social et accumulent une importante fortune personnelle. Leur enseignement repose sur la connaissance de très nombreuses règles. L'une d'elles, appelée « règle d'apposition et de rémotion » (d'ajout et de retrait), permet de résoudre certains problèmes correspondant à la résolution de systèmes d'équations linéaires. On se débarrassera alors de toutes ces règles disparates pour se limiter aux règles générales de l'algèbre. Les travaux des abaquistes serviront par la suite de base au développement de l'algèbre aux XVI^{e} et XVII^{e} siècles.

Ce n'est qu'à partir du XVIII^{e} siècle que les mathématiciens entreprennent de résoudre des systèmes d'équations ayant plus de deux ou trois inconnues. Au cours de la première décennie du XIX^{e} siècle, **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) s'intéresse à l'orbite de l'astéroïde Pallas. Ses travaux l'amènent à résoudre un système de six équations linéaires à six inconnues. La méthode qu'il utilise porte aujourd'hui son nom. Gauss est probablement le plus grand mathématicien de tous les temps. Il est le premier, alors qu'il a à peine 20 ans, à démontrer formellement le théorème fondamental de l'algèbre qui énonce que tout polynôme est égal à un produit de binômes du premier degré et de trinômes irréductibles du second degré. Un an ou deux plus tard, il est aussi le premier à démontrer le théorème fondamental de l'arithmétique qui indique que tout nombre naturel peut être représenté d'une seule façon par un produit de nombres premiers. Pas étonnant dans ce contexte que l'empereur Napoléon, alors que ses armées envahissent les États allemands, ait pris des dispositions pour assurer la protection de Gauss, alors professeur à Göttingen.



Ce jeune fils de marchand ira-t-il à l'école d'un abaquiste ?

Exercices préliminaires

1. Résoudre les équations suivantes.

a) $2(y - 1) + 4 = 5(2 - 3y)$

b) $8(a - 1) - 2a + 7 = 3(5 + 2a)$

c) $3(b + 2) + 3 = 4(2 + b) + 1$

d) $5(1 - 2z) + 7z - 12 = 4(1 - z) + z - 11$

2. Représenter graphiquement les droites suivantes.

a) $D_1 : y = 2x - 1$ et $D_2 : x + 2y = 4$

b) $D_3 : y = 3$ et $D_4 : x = -1$

3. Écrire le système d'équations correspondant à :

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$

4. Exprimer les systèmes d'équations linéaires suivants sous la forme $AX = B$, où A représente la matrice des coefficients, X représente la matrice des variables (inconnues) et B représente la matrice des constantes.

a) $\begin{cases} 2x - 5y = 6 \\ 3x + 4y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ 5x + 6y + 7z = -1 \\ 8x + 9y + z = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \\ x + w = 0 \end{cases}$

5. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -9 & -6 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Effectuer AB.

b) Effectuer BA.

2.1 Résolution de systèmes d'équations linéaires par des méthodes élémentaires

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra résoudre des systèmes d'équations linéaires par les méthodes de substitution et d'élimination.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de donner la définition d'un système d'équations linéaires ;
- de donner la définition d'une solution d'un système d'équations linéaires ;
- de donner la définition d'un système d'équations linéaires compatible et d'un système d'équations linéaires incompatible ;
- de déterminer l'ensemble-solution d'un système d'équations linéaires à l'aide de la méthode de substitution ;
- de donner la définition de deux systèmes d'équations linéaires équivalents ;
- d'énumérer les opérations permettant de transformer un système d'équations linéaires en un système équivalent ;
- de déterminer l'ensemble-solution d'un système d'équations linéaires à l'aide de la méthode d'élimination ;
- de déterminer une solution particulière d'un système d'équations linéaires à partir de l'ensemble-solution.

Soit le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 10 & (1) \\ 2x + 2y - z = 2 & (2) \\ 5x - 3y + 4z = 23 & (3) \\ x + 5y - 8z = -25 & (4) \end{cases}$$

Ensemble-solution $= \{(2, 1, 4)\}$

Systèmes d'équations linéaires

DÉFINITION 2.1

1) Une **équation linéaire** à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une équation de premier degré qui peut être exprimée sous la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$, les coefficients des variables, et b sont des constantes réelles.

2) Un **système de *m* équations linéaires à *n* variables** $x_1, x_2, \ldots, x_n$, noté S, est constitué de m équations linéaires de la forme

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m & (m) \end{cases}$$

où a_{ij}, les coefficients des variables, et b_i sont des constantes réelles, $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Dans la définition précédente, chaque équation a été numérotée : (1), (2), …, (*m*), car lorsque nous devons résoudre simultanément plusieurs équations linéaires, il peut être utile de numéroter chaque équation.

Exemple 1 Le système S suivant est un système d'équations linéaires de quatre équations à trois variables : x, y et z.

$$S\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 10 & (1) \\ 2x + 2y - z = 2 & (2) \\ 5x - 3y + 4z = 23 & (3) \\ x + 5y - 8z = -25 & (4) \end{cases}$$

DÉFINITION 2.2

1) Une **solution** d'un système d'équations linéaires de la forme

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m & (m) \end{cases}$$

est une suite de nombres $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ telle que, si nous remplaçons x_1 par s_1, x_2 par s_2, x_3 par s_3, …, x_n par s_n dans chacune des équations du système S, nous obtenons une égalité vraie entre les deux membres.

Cette solution est notée par le n-uplet $(s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n)$.

2) L'**ensemble-solution** d'un système d'équations, noté E.-S., est l'ensemble de toutes les solutions du système.

Exemple 2 Vérifions que (2, 1, 4) est une solution du système d'équations linéaires S suivant.

$$S\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 10 & (1) \\ 2x + 2y - z = 2 & (2) \\ 5x - 3y + 4z = 23 & (3) \\ x + 5y - 8z = -25 & (4) \end{cases}$$

Pour vérifier si (2, 1, 4) est une solution de S, il suffit de remplacer x par 2, y par 1 et z par 4 dans chaque équation et de vérifier si nous obtenons une égalité vraie entre les deux membres.

Ainsi, dans (1) : $3(2) - 4(1) + 2(4) = 10$ (égalité vraie)

dans (2) : $2(2) + 2(1) - (4) = 2$ (égalité vraie)

dans (3) : $5(2) - 3(1) + 4(4) = 23$ (égalité vraie)

dans (4) : $(2) + 5(1) - 8(4) = -25$ (égalité vraie)

d'où (2, 1, 4) est une solution de S.

Remarque : Il peut arriver qu'un système d'équations linéaires ait plus d'une solution ou qu'il n'en ait aucune.

Exemple 3 Soit les systèmes d'équations linéaires S_1 et S_2 suivants.

$$S_1\begin{cases} x - y - z = 4 \\ 4x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

et

$$S_2\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + z = -2 \end{cases}$$

a) Nous pouvons vérifier que (3, -5, 4) et (0, -3, -1) sont des solutions du système S_1. Ce système a donc plus d'une solution.

De fait, ce système a une infinité de solutions.

b) Le système S_2 n'a aucune solution, car $(x + y + z)$ ne peut pas être égal à 4 et à -2 simultanément.

DÉFINITION 2.3

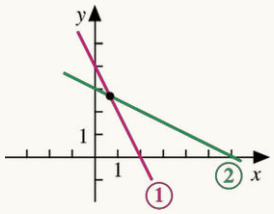
Un système d'équations linéaires est dit

1) **compatible** (**cohérent** ou **non contradictoire**) lorsqu'il a au moins une solution ;

2) **incompatible** (**incohérent** ou **contradictoire**) lorsqu'il n'a aucune solution. Nous écrivons alors E.-S. = Ø.

Exemple 4 Représentons graphiquement les droites définies dans chacun des systèmes S_1, S_2 et S_3 suivants et, à l'aide de chaque représentation graphique, déterminons si les systèmes sont compatibles ou incompatibles.

$$S_1 \begin{cases} 2x + y = 4 & (1) \\ x + 2y = 6 & (2) \end{cases}$$

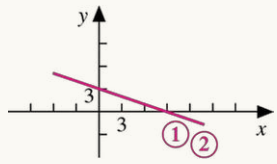


Puisque les droites ne sont pas parallèles, elles ont un seul point d'intersection.

Le système a donc une solution unique.

D'où le système est compatible.

$$S_2 \begin{cases} x + 3y = 9 & (1) \\ 2x + 6y = 18 & (2) \end{cases}$$

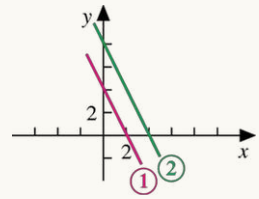


Puisque les droites sont parallèles confondues, elles ont une infinité de points d'intersection.

Le système a donc une infinité de solutions.

D'où le système est compatible.

$$S_3 \begin{cases} 2x + y = 4 & (1) \\ 2x + y = 8 & (2) \end{cases}$$



Puisque les droites sont parallèles distinctes, elles n'ont pas de point d'intersection.

Le système n'a donc aucune solution.

D'où le système est incompatible.

De façon générale, tout système d'équations linéaires de m équations à n inconnues peut

- avoir une solution unique ; (système compatible)
- avoir une infinité de solutions ; (système compatible)
- n'avoir aucune solution. (système incompatible)

Nous allons maintenant résoudre des systèmes d'équations linéaires à l'aide de deux méthodes élémentaires.

Méthode de substitution

Cette méthode consiste à isoler une des variables dans une des équations et à substituer cette valeur dans les autres équations.

Exemple 1 Résolvons le système S suivant par la méthode de substitution.

$$S \begin{cases} 3x + 4y + z = 7 & (1) \\ -2x + y - z = 6 & (2) \\ x - y + 2z = -3 & (3) \end{cases}$$

Étape 1 : Isoler une des variables dans une des équations

Choisissons une variable facile à isoler, par exemple la variable z dans l'équation (1).

De l'équation, nous obtenons $z = 7 - 3x - 4y$.

Étape 2 : Substituer cette valeur dans les autres équations

De l'équation (2), nous obtenons $-2x + y - (7 - 3x - 4y) = 6$

$$x + 5y = 13 \qquad (4)$$

De l'équation (3), nous obtenons $x - y + 2(7 - 3x - 4y) = -3$

$$-5x - 9y = -17 \qquad (5)$$

Nous obtenons ainsi un nouveau système d'équations S_1 contenant seulement deux variables.

$$S_1 \begin{cases} x + 5y = 13 & (4) \\ -5x - 9y = -17 & (5) \end{cases}$$

Étape 3 : Reprendre, au besoin, les étapes 1 et 2 avec les nouvelles équations

Ainsi, en isolant x dans l'équation (4) de S_1, nous obtenons $x = 13 - 5y$.

En substituant cette valeur dans l'équation (5) de S_1, nous obtenons

$$-5(13 - 5y) - 9y = -17$$
$$16y = 48$$
$$y = 3$$

Étape 4 : Trouver la valeur des autres variables

Trouvons la valeur de x en remplaçant y par 3 dans l'équation $x = 13 - 5y$ obtenue à l'étape 3.

Substitution inverse

Nous obtenons alors $x = 13 - 5(3) = -2$.

Trouvons la valeur de z en remplaçant y par 3 et x par -2 dans l'équation $z = 7 - 3x - 4y$ obtenue à l'étape 1.

Nous obtenons alors $z = 7 - 3(-2) - 4(3) = 1$,

d'où E.-S. $= \{(-2, 3, 1)\}$

Vérification

Il suffit de remplacer x par -2, y par 3 et z par 1 dans les équations de S pour vérifier l'égalité entre les deux membres de chaque équation du système.

$$\begin{cases} (1)\ 3(-2) + 4(3) + (1) = 7 & \text{(égalité vraie)} \\ (2)\ -2(-2) + (3) - (1) = 6 & \text{(égalité vraie)} \\ (3)\ (-2) - (3) + 2(1) = -3 & \text{(égalité vraie)} \end{cases}$$

Systèmes équivalents d'équations linéaires

DÉFINITION 2.4

Deux systèmes d'équations linéaires S_1 et S_2 à n variables sont des **systèmes équivalents** si les deux systèmes ont le même ensemble-solution.

Cette équivalence est notée $S_1 \sim S_2$.

Opérations élémentaires sur les équations

Les quatre opérations élémentaires suivantes permettent de transformer un système d'équations linéaires en un système équivalent, c'est-à-dire en un système ayant le même ensemble-solution.

1) Permuter des équations ($E_i \leftrightarrow E_j$), c'est-à-dire ($E_i \rightarrow E_j$) et ($E_j \rightarrow E_i$).
2) Multiplier les deux membres d'une équation par k, où $k \in \mathbb{R}$ et $k \neq 0$ ($kE_i \rightarrow E_i$).
3) Additionner, membre à membre, à une équation une autre équation dont les deux membres ont été multipliés par k, où $k \in \mathbb{R}$ ($E_i + kE_j \rightarrow E_i$).
4) Additionner, membre à membre, à une équation dont les deux membres ont été multipliés par k_1, où $k_1 \in \mathbb{R}$ et $k_1 \neq 0$, une autre équation dont les deux membres ont été multipliés par k_2, où $k_2 \in \mathbb{R}$ ($k_1E_i + k_2E_j \rightarrow E_i$).

Remarque : Effectuer l'opération 4) est équivalent à effectuer les opérations 2) et 3) précédentes simultanément sur les équations E_i et E_j.

Méthode d'élimination

Cette méthode, appelée aussi méthode d'addition ou méthode de réduction, consiste à faire en sorte que les coefficients d'une des variables, dans deux équations, soient des nombres opposés : cela peut être obtenu en multipliant chaque membre d'une équation par un nombre approprié et chaque membre de l'autre équation par un autre nombre approprié.

En additionnant membre à membre les équations obtenues, la variable choisie sera éliminée.

Exemple 1 Résolvons le système S suivant par la méthode d'élimination.

$$S\begin{cases} x - 2y + 4z = -6 & \text{①, également notée } E_1 \\ 5x + 3y - z = 25 & \text{②, également notée } E_2 \\ 3x - 4y + 2z = 4 & \text{③, également notée } E_3 \end{cases}$$

Étape 1 : Éliminer une variable pour obtenir un système à deux variables

Pour éliminer x, effectuons les opérations suivantes.

En effectuant $E_2 - 5E_1$, nous obtenons $13y - 21z = 55$ ④, également notée E_4.

En effectuant $E_3 - 3E_1$, nous obtenons $2y - 10z = 22$ ⑤, également notée E_5.

Étape 2 : Éliminer une variable dans le système obtenu à l'étape 1

En effectuant $2E_4 - 13E_5$, nous obtenons $88z = -176$

$$z = -2$$

Étape 3 : Trouver la valeur des autres variables

En remplaçant z par -2 dans l'équation E_4 ou E_5, nous obtenons $y = 1$.

En remplaçant z par -2 et y par 1 dans l'équation E_1, E_2 ou E_3, nous obtenons $x = 4$.

D'où E.-S. $= \{(4, 1, -2)\}$

Nous pouvons vérifier que $x = 4$, $y = 1$ et $z = -2$ est une solution du système S de l'exemple 1 précédent.

Exercice de compréhension 2.1

1. Soit le système suivant.

$$S\begin{cases} -4x + 2y - 3z = -2 & E_1 \\ 3x - y + 2z = 1 & E_2 \\ x + 2y - z = 3 & E_3 \end{cases}$$

a) Déterminer $S_1 \sim S$ en effectuant $E_3 \leftrightarrow E_1$.

b) Déterminer $S_2 \sim S_1$ en effectuant $E_2 - 3E_1 \rightarrow E_2$ et $E_3 + 4E_1 \rightarrow E_3$.

c) Déterminer $S_3 \sim S_2$ en effectuant $7E_3 + 10E_2 \rightarrow E_3$.

d) À partir de S_3, déterminer l'ensemble-solution de S.

Exemple 2 Soit le système $S\begin{cases} x + y + z = 3 & E_1 \\ x - 2y + 3z = 2 & E_2 \\ 5x - y + 9z = 13 & E_3 \end{cases}$

a) Résolvons le système S par la méthode d'élimination.

Étape 1 : Éliminer une variable pour obtenir un système à deux variables

En effectuant $E_1 - E_2$, nous obtenons $3y - 2z = 1 \quad E_4$

En effectuant $-5E_1 + E_3$, nous obtenons $-6y + 4z = -2 \quad E_5$

Étape 2 : Éliminer une variable dans le système obtenu à l'étape 1

En effectuant $2E_4 + E_5$, nous obtenons $0y + 0z = 0$.

Une infinité de valeurs de y et de z vérifient cette dernière équation. Cependant, ces valeurs doivent satisfaire les équations E_4 et E_5.

En posant $z = s$, où $s \in \mathbb{R}$, dans l'équation E_4 ou E_5, nous obtenons $y = \dfrac{1 + 2s}{3}$.

En remplaçant z par s et y par $\dfrac{1 + 2s}{3}$ dans l'équation E_1, E_2 ou E_3, nous obtenons $x = \dfrac{8 - 5s}{3}$.

Ensemble-solution

D'où E.-S. $= \left\{ \left(\dfrac{8 - 5s}{3}, \dfrac{1 + 2s}{3}, s \right) \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$

Ainsi, il y a une infinité de solutions qui dépendent de la valeur attribuée à la variable s.

Paramètre

Cette variable s est appelée paramètre.

Solutions particulières

b) Déterminons trois solutions particulières du système S précédent.

Pour obtenir trois solutions particulières du système précédent, il suffit d'attribuer au paramètre s trois valeurs différentes dans l'ensemble-solution. Par exemple,

- pour $s = 0$, nous obtenons $\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$,
- pour $s = 1$, nous obtenons $(1, 1, 1)$,
- pour $s = -2$, nous obtenons $(6, -1, -2)$.

EXERCICES 2.1

1. Déterminer les systèmes d'équations linéaires parmi les systèmes d'équations suivants.

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - 4 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ x^2 + y - 5 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ x_4 = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + \sqrt{2x_2} = 3 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y - z + w = 1 \\ 2x - 3yz + 2w = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ \sqrt{2}x - 3y - z = 5 \end{cases}$

2. Soit le système S $\begin{cases} 3x + 4y + z - 17w = 15 & (1) \\ 3x + 5y + z - 20w = 20 & (2) \\ 2x + 3y + z - 12w = 13 & (3) \end{cases}$

a) Déterminer si les valeurs suivantes sont des solutions du système précédent.

i) $x = -2, \quad y = 6, \quad z = 5 \quad$ et $\quad w = 1$

ii) $x = -1, \quad y = 8, \quad z = 3 \quad$ et $\quad w = 1$

iii) $x = -3, \quad y = 5, \quad z = 4 \quad$ et $\quad w = 0$

iv) $x = 0, \quad y = 0, \quad z = -2 \quad$ et $\quad w = -1$

b) Déterminer si le système S est compatible ou incompatible.

3. Expliquer pourquoi le système suivant est compatible.

S $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 4x - 5y - 2z = 0 \end{cases}$

4. Parmi les ensembles suivants, déterminer ceux qui sont un ensemble-solution de l'équation $3x - 5y + 6z = 2$.

a) $\mathrm{A} = \left\{ \left(\frac{5t - 6s + 2}{3}, t, s \right) \middle| \, s \text{ et } t \in \mathbb{R} \right\}$

b) $\mathrm{B} = \left\{ \left(\frac{2 - 6s + 5t}{3}, s, t \right) \middle| \, s \text{ et } t \in \mathbb{R} \right\}$

c) $\mathrm{C} = \left\{ \left(s, t, \frac{2 + 5t - 3s}{6} \right) \middle| \, s \text{ et } t \in \mathbb{R} \right\}$

d) $\mathrm{D} = \left\{ \left(s, s, \frac{s + 1}{3} \right) \middle| \, s \in \mathbb{R} \right\}$

5. Soit l'équation $x + 4y - 2z = 8$.

a) Trouver l'ensemble-solution en posant :

i) $y = s$ et $z = t$, où s et $t \in \mathbb{R}$

ii) $x = s$ et $y = t$, où s et $t \in \mathbb{R}$

iii) $x = s$ et $z = t$, où s et $t \in \mathbb{R}$

b) Trouver une solution particulière de l'équation précédente si, à la question a), $s = 1$ et $t = 2$.

6. Déterminer toutes les formes de l'ensemble-solution si :

a) $2x + 3y = 6$

b) $2x - 3y + 4z = 7$

7. Résoudre les systèmes suivants par la méthode de substitution.

a) $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ -3x + 2y = -18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 12x - 4y = -28 \\ 3x - y + 7 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y + z = -4 \\ x + 5y - z = 11 \\ x + 19y - 5z = 1 \end{cases}$

8. Résoudre les systèmes suivants par la méthode d'élimination.

a) $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 3x + y = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6y = 8 - 3x \\ 15 = 10y + 5x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 5y - 4z = 1 \\ 2x - y + 5z = 4 \\ 7x + 3y + 6z = 9 \end{cases}$

9. Représenter graphiquement les droites des systèmes suivants ; trouver, si c'est possible, les points d'intersection de ces droites et déterminer si ces systèmes sont compatibles ou incompatibles.

a) $\begin{cases} 6x + 9y = 18 & (1) \\ 4x + 6y = 12 & (2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 2 & (1) \\ 7x + 4y = -2 & (2) \\ -x - 4y = -9 & (3) \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 2y = 26 & (1) \\ -x + 3y = -13 & (2) \\ 3x + 4y = 0 & (3) \end{cases}$

10. Déterminer, si c'est possible, pour quelles valeurs de k, où $k \in \mathbb{R}$, le système

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ 4x + ky = 2 \end{cases}$$

a) a une infinité de solutions ;

b) n'a aucune solution ;

c) a une solution unique ;

d) est compatible ;

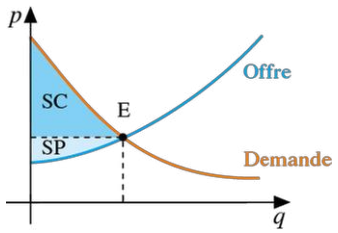
e) est incompatible.

11. **APPLICATION | INVESTISSEMENT**

Pour des raisons stratégiques, Dominique investit une partie de son capital de 25 000 $ à un taux d'intérêt annuel de 3 % et l'autre partie à un taux d'intérêt annuel de 3,4 %. Si le total des intérêts s'élève à 819 $ après un an, déterminer la somme investie dans chacun des placements.

12. **APPLICATION | OFFRE ET DEMANDE**

En économie, le point d'équilibre est le point de rencontre entre la fonction représentant la demande d'un produit et la fonction représentant l'offre d'un produit (*voir la représentation suivante*).



a) Déterminer le point d'équilibre $E(q_e, p_e)$ entre l'offre et la demande d'un produit si une compagnie estime que l'offre du produit est $O(q) = 2{,}5q + 3{,}5$ et la demande, $D(q) = 54{,}85 - 5{,}4q$, où $q \geq 0$, et $O(q)$ et $D(q)$ sont exprimés en dollars.

b) Représenter graphiquement les fonctions précédentes et indiquer le point d'équilibre.

c) Lorsque $q = q_e$, déterminer

i) le surplus du consommateur SC, qui correspond à l'aire de la région SC ;

ii) le surplus du producteur SP, qui correspond à l'aire de la région SP ;

iii) le surplus total ST, où ST = SC + SP.

2.2 Résolution de systèmes d'équations linéaires et de systèmes homogènes d'équations linéaires par la méthode de Gauss

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra résoudre, à l'aide de la méthode de Gauss, des systèmes d'équations linéaires et des systèmes homogènes d'équations linéaires.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- d'exprimer un système d'équations linéaires à l'aide d'un produit de matrices ;
- de déterminer la matrice augmentée correspondant à un système d'équations linéaires ;
- d'énumérer les opérations sur une matrice augmentée permettant de transformer un système d'équations linéaires en un système équivalent ;
- de transformer une matrice augmentée en une matrice augmentée échelonnée ;
- de déterminer l'ensemble-solution d'un système d'équations linéaires à l'aide de la méthode de Gauss ;
- d'utiliser la méthode de Gauss pour résoudre certains problèmes contextuels ;
- de donner la définition d'un système homogène d'équations linéaires ;
- de déterminer l'ensemble-solution d'un système homogène d'équations linéaires ;
- de donner la définition d'un système homogène dépendant d'équations linéaires ;
- de donner la définition d'un système homogène indépendant d'équations linéaires ;
- d'équilibrer des équations chimiques.

Soit le système homogène S d'équations linéaires

$$S\begin{cases} x + y + z - 3w = 0 \\ 2x + 4y + 2z - 6w = 0 \\ -x - y - 5z + 3w = 0 \end{cases}$$

Matrice augmentée correspondante

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & -6 & 0 \\ -1 & -1 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Solution triviale $(0, 0, 0, 0)$

E.-S. $= \{(3s, 0, 0, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$

Lorsque le nombre d'équations est différent du nombre de variables, ou lorsqu'il y a plus de trois équations, les méthodes de substitution et d'élimination ne sont pas toujours les plus efficaces pour trouver l'ensemble-solution. Dans cette section, nous présenterons la méthode de Gauss permettant de déterminer l'ensemble-solution d'un système d'équations linéaires de m équations à n inconnues.

Méthode de Gauss



Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

IL Y A ENVIRON 200 ANS...

Issu d'une famille aux revenus très modestes, **Carl Friedrich Gauss** se fait remarquer dès son jeune âge par sa vive intelligence. Il peut ainsi entreprendre des études universitaires aux frais du duc de Brunswick. À peine âgé de 24 ans, il publie un livre fondamental sur la théorie des nombres. Gauss passe presque toute sa vie d'universitaire à Göttingen ; il est professeur d'astronomie et directeur de l'observatoire. Ses intérêts dépassent donc largement les mathématiques pures. De fait, c'est dans le cadre de ses recherches en astronomie qu'il est amené à développer la méthode qui porte son nom et dont fait l'objet cette section. Les méthodes échafaudées jusqu'alors nécessitaient un trop grand nombre de calculs lorsqu'il y avait plus de trois ou quatre inconnues. La méthode systématique de Gauss réduit et facilite grandement ces calculs.

Établissons un parallèle entre les opérations élémentaires sur les équations et les opérations élémentaires sur les matrices augmentées.

Exemple 1 Soit le système S $\begin{cases} 2x - y + 2z = 15 \\ 4x + 3y - 3z = -25 \\ -2x + 2y + z = -4 \end{cases}$

À l'aide des quatre opérations élémentaires présentées dans l'encadré à la page 68, transformons le système S en un système équivalent afin de déterminer l'ensemble-solution.

$$S \sim \begin{cases} 2x - y + 2z = 15 \\ 5y - 7z = -55 \\ y + 3z = 11 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ E_2 - 2E_1 \to E_2 \\ E_3 + E_1 \to E_3 \end{matrix}$$

$$S \sim \begin{cases} 2x - y + 2z = 15 \\ 5y - 7z = -55 \\ -22z = -110 \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \\ -5E_3 + E_2 \to E_3 \end{matrix}$$

De E_3, nous obtenons $z = 5$.

En remplaçant z par 5 dans E_2, nous obtenons $5y - 7(5) = -55$, donc $y = -4$.

En remplaçant z par 5 et y par -4 dans E_1, nous obtenons $2x - (-4) + 2(5) = 15$, donc $x = \frac{1}{2}$.

D'où E.-S. $= \left\{\left(\frac{1}{2}, -4, 5\right)\right\}$

Pour résoudre le système S précédent à l'aide de matrices, transformons d'abord le système sous la forme de l'équation matricielle $AX = B$ suivante, en s'assurant que la position de chaque variable est la même dans toutes les équations du système.

$AX = B$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice des coefficients}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\text{Matrice des variables}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 15 \\ -25 \\ -4 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice des constantes}}$$

En tenant compte seulement des coefficients et des constantes dans le système précédent, nous pouvons écrire la matrice suivante.

Matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 4 & 3 & -3 & -25 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$[A \mid B]$

Cette matrice $[A \mid B]$ est appelée matrice augmentée correspondant au système S.

Système S

$$S \begin{cases} 2x - y + 2z = 15 \\ 4x + 3y - 3z = -25 \\ -2x + 2y + z = -4 \end{cases}$$

Matrice augmentée correspondante

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 4 & 3 & -3 & -25 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

Étudions maintenant les effets sur la matrice augmentée des opérations élémentaires effectuées sur S.

Systèmes équivalents	Transformations sur les équations	Matrices augmentées équivalentes	Transformations sur les lignes des matrices augmentées
$\begin{cases} 2x - y + 2z = 15 \\ 4x + 3y - 3z = -25 \\ -2x + 2y + z = -4 \end{cases}$		$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 4 & 3 & -3 & -25 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right]$	
$\begin{cases} 2x - y + 2z = 15 \\ 5y - 7z = -55 \\ y + 3z = 11 \end{cases}$	$E_2 - 2E_1 \to E_2$ $E_3 + E_1 \to E_3$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 0 & 5 & -7 & -55 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right]$	$L_2 - 2L_1 \to L_2$ $L_3 + L_1 \to L_3$
$\begin{cases} 2x - y + 2z = 15 \\ 5y - 7z = -55 \\ -22z = -110 \end{cases}$	$-5E_3 + E_2 \to E_3$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 0 & 5 & -7 & -55 \\ 0 & 0 & -22 & -110 \end{array}\right]$	$-5L_3 + L_2 \to L_3$

Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice augmentée

Les quatre opérations élémentaires suivantes, analogues aux opérations élémentaires sur les équations (*voir page 68*), permettent de transformer une matrice augmentée correspondant à un système d'équations S en une matrice augmentée équivalente correspondant à un système d'équations équivalent à S.

1) Permuter des lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$), c'est-à-dire ($L_i \to L_j$) et ($L_j \to L_i$).
2) Multiplier une ligne par k, où $k \in \mathbb{R}$ et $k \neq 0$ ($kL_i \to L_i$).
3) Additionner un multiple k, où $k \in \mathbb{R}$, d'une ligne à une autre ligne ($L_i + kL_j \to L_i$).
4) Additionner à une ligne multipliée par k_1, où $k_1 \in \mathbb{R}$ et $k_1 \neq 0$, une autre ligne multipliée par k_2, où $k_2 \in \mathbb{R}$ ($k_1L_i + k_2L_j \to L_i$).

Remarque : Effectuer l'opération 4) est équivalent à effectuer les opérations 2) et 3) précédentes simultanément sur les lignes L_i et L_j.

Nous utilisons le symbole $\sim$ pour indiquer que deux matrices augmentées sont équivalentes. Par exemple, du tableau précédent, nous avons

$$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 4 & 3 & -3 & -25 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 0 & 5 & -7 & -55 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 + L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & -1 & 2 & 15 \\ 0 & 5 & -7 & -55 \\ 0 & 0 & -22 & -110 \end{array}\right] \quad -5L_3 + L_2 \to L_3$$

Exercices de compréhension 2.2

1. Exprimer les systèmes d'équations linéaires suivants à l'aide d'une équation matricielle et déterminer la matrice augmentée correspondante.

a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 5x - y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + 4x_3 = 4 \end{cases}$

Soit le système S de m équations linéaires à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, où a_{ij} et $b_i \in \mathbb{R}$.

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Nous pouvons exprimer le système S précédent sous la forme $AX = B$, c'est-à-dire

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice des coefficients}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{Matrice des variables}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\text{Matrice des constantes}}$$

DÉFINITION 2.5

Soit le système S de m équations linéaires à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, où a_{ij} et $b_i \in \mathbb{R}$.

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

La matrice $\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ est appelée **matrice augmentée** de S.

À l'aide des opérations élémentaires (*voir page précédente*) sur les lignes, nous voulons transformer la matrice augmentée correspondant à un système d'équations en une matrice augmentée équivalente où le nombre de zéros précédant la première entrée non nulle de chaque ligne augmente de ligne en ligne, jusqu'à n'avoir possiblement que des lignes de zéros.

Voici une forme possible de la dernière matrice augmentée que nous voulons obtenir, où les éléments ■ sont différents de zéro et les éléments □ sont des nombres réels.

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} \blacksquare & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \blacksquare & \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \square \end{array}\right]$$

Cette matrice augmentée nous permettra de trouver l'ensemble-solution du système initial. Une telle matrice augmentée est appelée matrice augmentée échelonnée.

DÉFINITION 2.6

Une matrice est appelée **matrice échelonnée** si le nombre de zéros précédant la première entrée non nulle de chaque ligne augmente de ligne en ligne jusqu'à n'avoir possiblement que des lignes de zéros.

DÉFINITION 2.7

Dans une matrice échelonnée, le premier élément non nul d'une ligne s'appelle le **pivot** de cette ligne.

2

Exemple 2

a) Les matrices suivantes sont des matrices échelonnées.

$A = \left[\begin{array}{ccc} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$

Pivots : 5, 4 et 7

$B = \left[\begin{array}{ccccc} -2 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Pivots : -2 et 4

$C = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Pivots : 8 et 5

b) Les matrices augmentées suivantes sont des matrices échelonnées.

$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Pivots : 1, 3 et 1

$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right]$

Pivot : 1

$C = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{array}\right]$

Pivots : 3, -2 et 7

c) Les matrices suivantes ne sont pas des matrices échelonnées.

$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right]$

a_{21} devrait être 0 au lieu de 4.

$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \end{array}\right]$

Les lignes 2 et 3 devraient être permutées.

$C = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right]$

c_{32} devrait être 0 au lieu de 6.

Méthode de Gauss

La méthode de Gauss pour résoudre un système d'équations linéaires consiste à transformer, à l'aide d'opérations élémentaires (*voir page 74*), la matrice augmentée, qui correspond au système d'équations, en une matrice augmentée échelonnée équivalente.

Il suffit alors de résoudre le système d'équations correspondant à la matrice augmentée échelonnée en commençant par la dernière équation et en remplaçant la ou les valeurs trouvées dans les équations précédentes. Nous appelons cette étape la substitution inverse.

Remarque : Il est toujours possible de transformer, en un nombre fini d'opérations élémentaires, une matrice augmentée en une matrice augmentée échelonnée équivalente.

Notons que cette dernière matrice augmentée échelonnée n'est pas unique, car le résultat dépend des opérations faites sur les lignes.

Exemple 3 Résolvons le système suivant par la méthode de Gauss.

$$\begin{cases} 2x - 4y + z - 3w = 6 \\ 4x + 16y - 3z - w = -10 \\ 6x - 2y - 5z - w = -3 \\ -2x - 8y + z - w = 0 \end{cases}$$

Transformons la matrice augmentée correspondant au système d'équations linéaires en une matrice augmentée échelonnée équivalente.

Étape 1
On veut obtenir des 0

Étape 2
On veut obtenir des 0

Étape 3
On veut obtenir un 0

$$\begin{bmatrix} x & y & z & w & \\ 2 & -4 & 1 & -3 & 6 \\ 4 & 16 & -3 & -1 & -10 \\ 6 & -2 & -5 & -1 & -3 \\ -2 & -8 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x & y & z & w & \\ 2 & -4 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 24 & -5 & 5 & -22 \\ 0 & 10 & -8 & 8 & -21 \\ 0 & -12 & 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - 3L_1 \to L_3 \\ L_4 + L_1 \to L_4 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 24 & -5 & 5 & -22 \\ 0 & 0 & 142 & -142 & 284 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -10 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} -24L_3 + 10L_2 \to L_3 \\ 2L_4 + L_2 \to L_4 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 24 & -5 & 5 & -22 \\ 0 & 0 & 142 & -142 & 284 \\ 0 & 0 & 0 & -568 & -1136 \end{bmatrix} \quad 142L_4 + L_3 \to L_4$$

Cette dernière matrice augmentée est échelonnée, et les pivots sont 2, 24, 142 et -568.

Le système d'équations linéaires correspondant est

Système compatible avec une solution

$$\begin{cases} 2x - 4y + z - 3w = 6 & E_1 \\ 24y - 5z + 5w = -22 & E_2 \\ 142z - 142w = 284 & E_3 \\ -568w = -1136 & E_4 \end{cases}$$

De E_4, nous obtenons $w = 2$.

Substitution inverse

En remplaçant w par 2 dans E_3, nous trouvons $z = 4$.

En remplaçant w par 2 et z par 4 dans E_2, nous trouvons $y = \frac{-1}{2}$.

En remplaçant w par 2, z par 4 et y par $\frac{-1}{2}$ dans E_1, nous trouvons $x = 3$.

D'où E.-S. $= \left\{\left(3, \frac{-1}{2}, 4, 2\right)\right\}$

Exemple 4 Résolvons le système suivant par la méthode de Gauss.

$$\begin{cases} x - y - z = 4 \\ 4x - 2y - 2z = -1 \end{cases}$$

Transformons la matrice augmentée correspondant au système d'équations linéaires en une matrice augmentée équivalente.

$$\begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right] \end{array} \sim \begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -17 \end{array}\right] \end{array} \qquad L_2 - 4L_1 \to L_2$$

On veut obtenir un 0

Le système d'équations linéaires correspondant est

Système compatible avec une infinité de solutions

$$\begin{cases} x - y - z = 4 \\ 2y + 2z = -17 \end{cases}$$

Ce système possède une infinité de solutions.

En posant $z = s$, où $s \in \mathbb{R}$, et en remplaçant z par s dans l'équation $2y + 2z = -17$, nous obtenons $2y + 2s = -17$, donc $y = \dfrac{-17 - 2s}{2}$.

En remplaçant z par s et y par $\dfrac{-17 - 2s}{2}$ dans l'équation $x - y - z = 4$,

nous obtenons $x - \dfrac{-17 - 2s}{2} - s = 4$, donc $x = \dfrac{-9}{2}$.

D'où E.-S. $= \left\{ \left(\dfrac{-9}{2}, \dfrac{-17 - 2s}{2}, s \right) \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$

DÉFINITION 2.8

Dans un système d'équations linéaires,

1) une variable est dite **variable libre** si on peut attribuer n'importe quelle valeur réelle à cette variable ;
2) une variable est dite **variable liée** si cette variable est une constante ou si cette variable est exprimée en fonction de une ou de plusieurs variables libres.

Dans l'exemple 4 précédent,

Variable libre
- z est une variable libre, car $z = s$, où $s \in \mathbb{R}$;

Variable liée
- x et y sont des variables liées, car $x = \dfrac{-9}{2}$ et $y = \dfrac{-17 - 2z}{2}$, où $z = s$.

Solutions particulières

En donnant à la variable libre z différentes valeurs réelles, nous obtenons des solutions particulières du système d'équations linéaires. Par exemple,

- pour $z = 0$, nous obtenons $x = \dfrac{-9}{2}$ et $y = \dfrac{-17}{2}$;
- pour $z = -1$, nous obtenons $x = \dfrac{-9}{2}$ et $y = \dfrac{-15}{2}$.

Puisque $z = s$, où $s \in \mathbb{R}$, il existe une infinité de solutions particulières.

Exemple 5 Résolvons le système suivant par la méthode de Gauss.

$$\begin{cases} 4x - y + 3z = 7 \\ 3x + 5z = 12 \\ 5x - 2y + z = 13 \end{cases}$$

Transformons la matrice augmentée correspondant au système d'équations linéaires en une matrice augmentée échelonnée équivalente.

Étape 1
On veut obtenir des 0

Étape 2
On veut obtenir un 0

$$\begin{matrix} x & y & z \end{matrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 0 & 5 & 12 \\ 5 & -2 & 1 & 13 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} x & y & z \end{matrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 11 & 27 \\ 0 & -3 & -11 & 17 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 4L_2 - 3L_1 \to L_2 \\ 4L_3 - 5L_1 \to L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 11 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 44 \end{bmatrix} \quad L_3 + L_2 \to L_3$$

Système incompatible

Le système précédent est incompatible car, de la dernière ligne de la matrice augmentée échelonnée, nous obtenons

$$0x + 0y + 0z = 44,$$

ce qui n'est jamais vérifié quelle que soit la valeur attribuée à x, à y ou à z.

D'où E.-S. $= \emptyset$

Remarque : Si une matrice augmentée échelonnée contient une ligne de la forme

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \text{ où } k \neq 0,$$

alors le système d'équations linéaires correspondant est incompatible et E.-S. $= \emptyset$. En effet, si $k \neq 0$, alors $\forall\, x_i \in \mathbb{R}$,

$0(x_1) + 0(x_2) + 0(x_3) + \dots + 0(x_n) = k$ est une égalité fausse.

Exercices de compréhension 2.2

2. Résoudre le système d'équations linéaires suivant par la méthode de Gauss.

$$\begin{cases} 3x - z - w = 4 \\ y + z + w = -2 \\ x + y - 2w = 8 \\ 2x + 3y + z - w = 6 \end{cases}$$

Dans certains cas, il est avantageux de permuter des lignes de la matrice augmentée correspondant au système d'équations afin d'obtenir un élément non nul à la position a_{11}.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Exemple 6

a) Résolvons le système d'équations linéaires suivant par la méthode de Gauss et déterminons les variables liées et les variables libres.

$$\begin{cases} 6c + 2d - 4e - 8f = 8 \\ 9c + 3d - 6e - 12f = 12 \\ 2a - 3b + c + 4d - 7e + f = 2 \\ 6a - 9b + 11d - 19e + 3f = 0 \end{cases}$$

Transformons la matrice augmentée correspondant au système d'équations linéaires en une matrice augmentée échelonnée équivalente.

On veut obtenir un nombre différent de 0

On veut obtenir un 0

On veut obtenir des 0

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f & \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & -6 & -12 & 12 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 6 & -9 & 0 & 11 & -19 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f & \\ 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & -6 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 6 & -9 & 0 & 11 & -19 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_1 \to L_3 \\ \\ L_3 \to L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & -6 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad L_4 - 3L_1 \to L_4$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & -6 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3L_3 - 2L_2 \to L_3 \\ 3L_4 + L_2 \to L_4 \end{matrix}$$

2, 9 et -12 sont les pivots

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & -6 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_4 \to L_3 \\ L_3 \to L_4 \end{matrix}$$

Remarque : Si une matrice augmentée échelonnée contient une ligne de la forme

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right],$$

cette ligne est omise lorsque nous écrivons le système d'équations correspondant, car elle ne fournit aucune information sur la valeur des variables. En effet, $\forall\, x_i \in \mathbb{R}$,

$0(x_1) + 0(x_2) + 0(x_3) + \dots + 0(x_n) = 0$ est une égalité vraie.

Ainsi, le système d'équations linéaires correspondant est

$$\begin{cases} 2a - 3b + c + 4d - 7e + f = 2 & E_1 \\ 9c + 3d - 6e - 12f = 12 & E_2 \\ -12f = -6 & E_3 \end{cases}$$

De E_3, nous obtenons $f = \frac{1}{2}$.

En remplaçant f par $\frac{1}{2}$ et en posant $e = r$, où $r \in \mathbb{R}$, et $d = s$, où $s \in \mathbb{R}$, dans E_2, nous obtenons $c = \frac{-1}{3}s + \frac{2}{3}r + 2$.

En remplaçant f par $\frac{1}{2}$ et e, d et c par leur valeur respective, et en posant $b = t$, où $t \in \mathbb{R}$, dans E_1, nous obtenons $a = \frac{3}{2}t - \frac{11}{6}s + \frac{19}{6}r - \frac{1}{4}$.

D'où E.-S. $= \left\{\left(\overbrace{\frac{3t}{2} - \frac{11s}{6} + \frac{19r}{6} - \frac{1}{4}}^{a}, \underbrace{t}_{b}, \overbrace{\frac{-s}{3} + \frac{2r}{3} + 2}^{c}, \underbrace{s}_{d}, \underbrace{r}_{e}, \underbrace{\frac{1}{2}}_{f}\right)\right\}$, où r, s et $t \in \mathbb{R}$

Variables libres
Variables liées

Les variables b, d et e sont les variables libres et les variables a, c et f sont les variables liées. (définition 2.8)

Remarque : De façon générale, on choisit comme variables libres les variables qui ne sont pas associées aux pivots de la matrice augmentée échelonnée équivalente à la matrice augmentée du système d'équations.

Solutions particulières

b) Trouvons deux solutions particulières du système d'équations précédent.

- En posant $r = 0$, $s = 0$ et $t = 0$, nous obtenons $a = \frac{-1}{4}$, $b = 0$, $c = 2$, $d = 0$, $e = 0$ et $f = \frac{1}{2}$.
- En posant $r = 0$, $s = 6$ et $t = 1$, nous obtenons $a = \frac{-39}{4}$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 6$, $e = 0$ et $f = \frac{1}{2}$.

D'où $\left(\frac{-1}{4}, 0, 2, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{-39}{4}, 1, 0, 6, 0, \frac{1}{2}\right)$ sont deux solutions particulières.

Exemple 7 Soit le système d'équations linéaires $\begin{cases} x - 4y + 6z + 3w = 16 \\ 3x + y - 2z + 6w = 0 \\ -2x - y + 4z - 3w = 2 \\ 5x + 2y - 6z + 98w = -3 \end{cases}$

Déterminons, à l'aide de Maple, la valeur de x, y, z et w

a) en utilisant la commande « gausselim( ) », qui nous donne une matrice augmentée échelonnée ;

```
with(linalg):
eq1 := x - 4 • y + 6 • z + 3 • w = 16:
eq2 := 3 • x + y - 2 • z + 6 • w = 0:
eq3 := -2 • x - y + 4 • z - 3 • w = 2:
eq4 := 5 • x + 2 • y - 6 • z + 98 • w = -3:
A := genmatrix([eql, eq2, eq3, eq4], [x, y, z, w], flag);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & 3 & 16 \\ 3 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -6 & 98 & -3 \end{bmatrix}$$

b) en utilisant la commande « solve( ) », qui nous donne directement l'ensemble-solution.

i) Réponse sous forme fractionnaire

```
with(linalg):
eq1 := x - 4 • y + 6 • z + 3 • w = 16:
eq2 := 3 • x + y - 2 • z + 6 • w = 0:
eq3 := -2 • x - y + 4 • z - 3 • w = 2:
eq4 := 5 • x + 2 • y - 6 • z + 98 • w = -3:
solve({eq1, eq2, eq3, eq4}, [x, y, z, w]);
```

$$\left[\left[x = \frac{816}{623}, y = -\frac{1955}{623}, z = \frac{451}{1246}, w = -\frac{1}{89}\right]\right]$$

```
gausselim(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & 3 & 16 \\ 0 & -9 & 16 & 3 & 34 \\ 0 & 0 & \frac{28}{9} & \frac{4}{3} & \frac{10}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 89 & -1 \end{bmatrix}$$

```
w := solve(89 • w = -1);
```

$$-\frac{1}{89}$$

```
z := solve((28/9) • z + (4/3) • w = 10/9);
```

$$\frac{451}{1246}$$

```
y := solve(-9 • y + 16 • z + 3 • w = 34);
```

$$-\frac{1955}{623}$$

```
x := solve(x - 4 • y + 6 • z + 3 • w = 16);
```

$$\frac{816}{623}$$

d'où $x = \frac{816}{623}$, $y = \frac{-1955}{623}$, $z = \frac{451}{1246}$ et $w = \frac{-1}{89}$

ii) Réponse sous forme décimale, en ajoutant un point après une des constantes (par exemple, 16.)

```
with(linalg):
eq1 := x - 4 • y + 6 • z + 3 • w = 16.:
eq2 := 3 • x + y - 2 • z + 6 • w = 0:
eq3 := -2 • x - y + 4 • z - 3 • w = 2:
eq4 := 5 • x + 2 • y - 6 • z + 98 • w = -3:
solve({eq1, eq2, eq3, eq4}, [x, y, z, w]);
```

$$[[x = 1.309791332,\ y = -3.138041734,\ z = 0.3619582665,\ w = -0.01123595506]]$$

Problèmes contextuels

Les étapes à suivre pour résoudre un problème contextuel impliquant des équations linéaires sont les suivantes.

1) Définir les variables.
2) Déterminer le système d'équations linéaires correspondant à la situation.
3) Résoudre le système d'équations linéaires.
4) Formuler la réponse.

Exemple 1 Stéphanie achète trois sortes de crayons à bille qui se vendent respectivement 0,30 $, 0,50 $ et 0,60 $ l'unité, taxes incluses. Elle débourse 5,50 $ pour 12 crayons. Déterminer le nombre de crayons de chaque sorte qu'elle a achetés, sachant qu'elle a au moins un crayon de chaque sorte.

1) Définissons d'abord les variables.

Soit x, le nombre de crayons à 0,30 $,
y, le nombre de crayons à 0,50 $, et
z, le nombre de crayons à 0,60 $.

2) Déterminons le système d'équations linéaires correspondant à la situation.

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 0{,}3x + 0{,}5y + 0{,}6z = 5{,}5 \end{cases}$$

Méthode de Gauss

3) Résolvons ce système d'équations linéaires par la méthode de Gauss.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}6 & 5{,}5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 19 \end{array}\right] \qquad 10L_2 - 3L_1 \to L_2$$

Le système d'équations linéaires possède une infinité de solutions réelles.

En posant $z = t$, où $t \in \mathbb{R}$,

de L_2, nous obtenons $2y + 3t = 19$, donc $y = \dfrac{19 - 3t}{2}$;

de L_1, nous obtenons $x + \dfrac{19 - 3t}{2} + t = 12$, donc $x = \dfrac{t + 5}{2}$.

Ainsi, E.-S. $= \left\{\left(\dfrac{t + 5}{2}, \dfrac{19 - 3t}{2}, t\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$.

Dans la situation présente, seules les solutions entières et positives sont acceptables.

- En posant $t = 1$, nous obtenons $z = 1$, $y = 8$ et $x = 3$.
- En posant $t = 2$, nous obtenons $z = 2$, $y = \dfrac{13}{2}$. (à rejeter)

Toutes les valeurs paires de t sont à rejeter, car y doit être un entier positif.

- En posant $t = 3$, nous obtenons $z = 3$, $y = 5$ et $x = 4$.
- En posant $t = 5$, nous obtenons $z = 5$, $y = 2$ et $x = 5$.
- En posant $t = 7$, nous obtenons $z = 7$, $y = -1$. (à rejeter)

Toutes les valeurs de t telles que $t > 7$ sont à rejeter, car y doit être un entier positif.

Donc, les solutions acceptables sont (3, 8, 1), (4, 5, 3) et (5, 2, 5).

4) Formulons la réponse.

Stéphanie peut avoir acheté

3 crayons à 0,30 $, 8 crayons à 0,50 $ et 1 crayon à 0,60 $; ou

4 crayons à 0,30 $, 5 crayons à 0,50 $ et 3 crayons à 0,60 $; ou encore

5 crayons à 0,30 $, 2 crayons à 0,50 $ et 5 crayons à 0,60 $.

Systèmes homogènes d'équations linéaires

DÉFINITION 2.9

Tout système de m équations linéaires à n inconnues de la forme

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

est appelé **système homogène d'équations linéaires**.

Dans un système homogène d'équations linéaires, toutes les constantes b_i sont nulles. Nous pouvons alors exprimer ce système sous la forme $AX = O$, c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tout système homogène d'équations linéaires admet au moins la solution

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, \dots, x_n = 0$, c'est-à-dire $(0, 0, 0, \dots, 0)$.

Par conséquent, tout système homogène d'équations linéaires est compatible.

DÉFINITION 2.10

Dans un système homogène d'équations linéaires, la solution $(0, 0, 0, \dots, 0)$ est appelée **solution triviale** du système.

Toutefois, un système homogène d'équations linéaires peut admettre d'autres solutions que la solution triviale.

Exemple 1 Résolvons le système homogène d'équations linéaires suivant.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 4x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

Ce système admet la solution triviale $(0, 0, 0)$.

Vérifions, par la méthode de Gauss, si ce système possède une solution autre que la solution triviale.

En transformant la matrice augmentée correspondant à ce système d'équations linéaires en une matrice augmentée échelonnée équivalente, nous obtenons

Méthode de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{matrix} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - 4L_1 \to L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad L_3 - L_2 \to L_3$$

En posant $z = s$, où $s \in \mathbb{R}$,

de L_2, nous obtenons $-5y + 8s = 0$, donc $y = \frac{8}{5}s$;

de L_1, nous obtenons $x + 2\left(\frac{8}{5}s\right) - 3s = 0$, donc $x = \frac{-1}{5}s$.

D'où E.-S. $= \left\{\left(\frac{-s}{5}, \frac{8s}{5}, s\right) \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$. Ce système possède une infinité de solutions.

Pour toute valeur attribuée à s, nous obtenons une solution particulière du système.

Solutions particulières

Par exemple, lorsque $s = 0$, nous obtenons la solution triviale $(0, 0, 0)$;
lorsque $s = 5$, nous obtenons la solution particulière $(-1, 8, 5)$.

Exemple 2 Résolvons le système homogène d'équations linéaires suivant.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Ce système admet la solution triviale (0, 0, 0).

Vérifions, par la méthode de Gauss, si ce système possède une solution autre que la solution triviale.

En transformant la matrice augmentée correspondant à ce système d'équations linéaires en une matrice augmentée échelonnée équivalente, nous obtenons

Méthode de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 + L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -17 & 0 \end{array}\right] \quad -3L_3 + L_2 \to L_3$$

De L_3, nous obtenons $-17z = 0$, donc $z = 0$;

de L_2, nous obtenons $3y - 8(0) = 0$, donc $y = 0$;

de L_1, nous obtenons $x - 1(0) + 2(0) = 0$, donc $x = 0$.

D'où E.-S. $= \{(0, 0, 0)\}$, c'est-à-dire que la solution triviale (0, 0, 0) est l'unique solution du système.

DÉFINITION 2.11

Un système homogène d'équations linéaires est dit

1) **dépendant** lorsqu'il admet d'autres solutions que la solution triviale ;
2) **indépendant** lorsque la solution triviale est la seule solution du système.

Ainsi, le système de l'exemple 1 précédent est un système dépendant, car il admet d'autres solutions que la solution triviale, tandis que le système de l'exemple 2 précédent est un système indépendant, car il admet seulement la solution triviale.

Nous énonçons maintenant un théorème que nous acceptons sans démonstration.

THÉORÈME 2.1

Tout système homogène d'équations linéaires où le nombre de variables est supérieur au nombre d'équations possède une infinité de solutions réelles.

Exemple 3 Soit le système S $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$

Ce système possède une infinité de solutions. (théorème 2.1)

De plus, ce système est dépendant. (définition 2.11)

Exercices de compréhension 2.2

3. Soit le système S $\begin{cases} x + y + z - 3w = 0 \\ 2x + 4y + 2z - 6w = 0 \\ -x - y - 5z + 3w = 0 \end{cases}$.

a) Déterminer l'ensemble-solution du système S.

b) Déterminer la solution particulière lorsque

i) $w = 1$; ii) $x = 1$.

2

Application en chimie

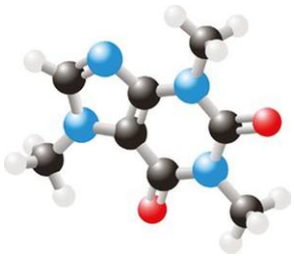
La résolution de systèmes homogènes d'équations linéaires est utilisée en chimie pour équilibrer des équations chimiques.

Exemple 1 La composition chimique de la caféine est $C_8H_{10}N_4O_2$.

Lorsqu'on combine de l'oxygène (O_2) à cette molécule chauffée, nous obtenons du dioxyde de carbone (CO_2), de l'eau (H_2O) et du dioxyde d'azote (NO_2). Cette réaction chimique est notée comme suit : $C_8H_{10}N_4O_2 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O + NO_2$.

Équilibrons l'équation chimique précédente.

Molécule de caféine



Azote
Carbone
Hydrogène
Oxygène

Pour ce faire, il suffit de trouver les plus petites valeurs entières positives de l'équation chimique

$$x C_8H_{10}N_4O_2 + y O_2 \rightarrow z CO_2 + w H_2O + t NO_2$$

telles que le nombre d'atomes des éléments du membre de gauche égale le nombre d'atomes des éléments du membre de droite.

Ainsi, nous obtenons :

Nombre d'atomes	Système homogène correspondant
pour C : $8x = z$	$8x - z = 0$
pour H : $10x = 2w$	$10x - 2w = 0$
pour N : $4x = t$	$4x - t = 0$
pour O : $2x + 2y = 2z + w + 2t$	$2x + 2y - 2z - w - 2t = 0$

Résolvons ce système.

$$\begin{bmatrix} x & y & z & w & t & \\ 8 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x & y & z & w & t & \\ 2 & 2 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_4 \rightarrow L_1 \\ (1/2)L_2 \rightarrow L_2 \\ \\ L_1 \rightarrow L_4 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 3 & 10 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 7 & 4 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 2L_2 - 5L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 - 2L_1 \rightarrow L_3 \\ L_4 - 4L_1 \rightarrow L_4 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & w & t \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccccc:c} 2 & 2 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ 5L_3 - 2L_2 \to L_3 \\ 5L_4 - 4L_2 \to L_4 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc:c} 2 & 2 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 3 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_4 \to L_3 \\ L_3 \to L_4 \end{array}$$

Ce système homogène d'équations linéaires possède une infinité de solutions. En posant $z = s$, où $s \in \mathbb{R}$, nous obtenons

de L_4, $4w - 5s = 0$, donc $w = \frac{5}{4}s$;

de L_3, $-5z + 8\left(\frac{5}{4}s\right) = 0$, donc $z = 2s$;

de L_2, $-10y + 10(2s) + 3\left(\frac{5}{4}s\right) + 10s = 0$, donc $y = \frac{27}{8}s$;

de L_1, $2x + 2\left(\frac{27}{8}s\right) - 2(2s) - 1\left(\frac{5}{4}s\right) - 2s = 0$, donc $x = \frac{1}{4}s$.

Ainsi, E.-S. $= \left\{\frac{s}{4}, \frac{27s}{8}, 2s, \frac{5s}{4}, s \,\middle|\, s \in \mathbb{R}\right\}$.

Puisque nous voulons attribuer à chacune des variables la plus petite valeur entière positive possible, il faut choisir s égale 8.

La solution cherchée est donc (2, 27, 16, 10, 8).

D'où l'équation chimique équilibrée est

$2C_8H_{10}N_4O_2 + 27O_2 \to 16CO_2 + 10H_2O + 8NO_2$.

EXERCICES 2.2

1. Exprimer les systèmes d'équations linéaires suivants à l'aide d'une équation matricielle et déterminer la matrice augmentée correspondante.

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + 5y = 7 \\ x + 6y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 4x_3 = 6 \\ 3x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 4y - z = 5 \\ 2x + 3z - 6w = 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = z \\ y = -w \\ x + y = z - w \end{cases}$

2. Déterminer un système d'équations linéaires qui correspond à chacune des matrices augmentées suivantes.

a) $\left[\begin{array}{cccc:c} 3 & 2 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 10 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$

3. Déterminer si les matrices suivantes sont des matrices échelonnées, et si oui, donner les pivots.

a) $\begin{bmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\left[\begin{array}{cccc:c} 3 & 4 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ d) $\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

4. Déterminer l'ensemble-solution du système d'équations linéaires correspondant à chacune des matrices augmentées échelonnées suivantes.

a) $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -4 & 1 & 14 \\ 0 & -2 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$ d) $\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 18 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right]$

e) $\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ f) $\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

g) $\left[\begin{array}{cccccc:c} 1 & 2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

5. a) Soit les matrices augmentées équivalentes suivantes.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 & 35 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right]$$

Déterminer les valeurs de a et b.

b) Utiliser le résultat obtenu en a) pour déterminer l'ensemble-solution du système d'équations linéaires suivant.

$$S\begin{cases} -3x + 4y + 5z = 35 \\ 2x + 5y - z = 2 \\ x + y + z = -2 \end{cases}$$

6. a) Soit les matrices augmentées équivalentes suivantes.

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right]$$

Déterminer les valeurs de a, b, c et d.

b) Utiliser le résultat obtenu en a) pour déterminer l'ensemble-solution du système d'équations linéaires suivant.

$$S\begin{cases} x + y + 2z + w = 5 \\ x + 2y + 4z + 2w = 8 \\ x - y - 2z - w = -1 \end{cases}$$

c) Déterminer les variables libres et les variables liées à partir de la solution obtenue en b).

d) Déterminer la solution particulière lorsque

i) $z = 0$ et $w = 0$;

ii) $z = 1$ et $w = -1$;

iii) $y = -3$ et $w = 5$.

7. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants par la méthode de Gauss.

a) $\begin{cases} 6x + 3y = 3 \\ 2x - y = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2a + 3b = 6 \\ 6b + 4a = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 7 \\ y + z = 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2a + 5b + 2c = 5 \\ 3a - b - 3c = 6 \\ 12a + 13b = 20 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ x_2 - x_1 - 3x_3 = -6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ c + b + \frac{3}{4}a = -9 \\ b - 3c + \frac{a}{6} = -18 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x - 3y + 6z = 0 \\ 4x + 8y - z = -4 \\ -6x + 23y - 31z = -4 \\ 4x - 48y + 51z = 12 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x - y - z + w = -8 \\ x + y + z + w = 2 \\ 1{,}6x - 0{,}8y + 1{,}9y - 0{,}5w = 0 \\ 0{,}4x - 1{,}2y + 0{,}6z - w = -4{,}6 \end{cases}$

8. Déterminer l'ensemble-solution des systèmes homogènes d'équations linéaires correspondant aux matrices augmentées suivantes.

a) $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ d) $\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

e) $\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ f) $\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

9. Déterminer l'ensemble-solution des systèmes homogènes suivants et préciser si les systèmes sont dépendants ou indépendants.

a) $\begin{cases} 3x - 4y + z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \\ 5x + 12z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y + z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \\ 5x + 11z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -u + 3v - 6w = 0 \\ u + v + w = 0 \\ 2u - 6v + 4w = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -3a + 2b - 5c + d = 0 \\ 2a + b + 2c - 3d = 0 \\ 4a - b + 4c + 2d = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3z - w + 2u = 0 \\ -2y + w - u = 0 \\ 5w - 6u = 0 \\ 7u = 0 \\ -6x + 6y + 9z + 4w + 3u = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y - 3z + 5w - 4u = 0 \\ x - y + 3z - w - 2u = 0 \\ 3x + 2y - 6z + 2w - 6u = 0 \\ -5x + 3w + 10u = 0 \end{cases}$

10. **APPLICATION | VENTE**

Un gérant de magasin de musique décide de liquider un stock de CD sous forme de lots. Le lot A contient 5 CD de musique rétro, 2 CD de musique de jazz et 1 CD de musique classique. Le lot B contient 4 CD de musique de jazz et 4 CD de musique classique. Le lot C contient 2 CD de musique rétro, 1 CD de musique de jazz et 5 CD de musique classique. Combien de lots de chaque genre de musique le gérant doit-il proposer s'il veut épuiser son stock de 760 CD de musique rétro, de 720 CD de musique de jazz et de 920 CD de musique classique ?

11. **APPLICATION | ACHAT**

Gilles a rangé 70 boîtes de conserves de fruits (pêches, cerises et ananas) dans sa chambre froide. Une boîte de pêches coûte 2,89 $, une boîte de cerises, 5,49 $, et une boîte d'ananas, 1,69 $. Gilles a déboursé 195,50 $. Combien de conserves de fruits de chaque sorte Gilles a-t-il achetées, s'il y a 16 boîtes d'ananas de plus que de boîtes de pêches ?

12. **APPLICATION | ACHAT**

Le directeur d'un collège achète 30 ordinateurs valant 600 $, 1500 $ et 3000 $, selon le modèle. S'il désire au moins un ordinateur de chaque modèle, mais pas plus de 18 ordinateurs d'un modèle donné, combien de modèles de chaque sorte a-t-il achetés s'il a déboursé 36 000 $?

13. **APPLICATION | ÉQUATIONS CHIMIQUES**

Équilibrer les équations chimiques suivantes en donnant le système homogène d'équations linéaires correspondant.



a) $Fe_7S_8 + O_2 \rightarrow Fe_3O_4 + SO_2$

b) $CH_4 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

c) $Al + H_2SO_4 \rightarrow Al_2(SO_4)_3 + H_2$

d) $H_3PO_4 + Ca \rightarrow Ca_3P_2O_8 + H_2$

14. **APPLICATION | ACHAT**

Sylvie songe à acheter des anges, des guppys et des poissons rouges pour mettre dans son aquarium qui peut contenir 100 poissons. Les anges coûtent 10 $ chacun, les guppys, 3 $ chacun, et les poissons rouges, 0,50 $ chacun.



Déterminer le nombre de poissons de chaque espèce que Sylvie achètera si elle dépense 100 $ et qu'elle désire

a) au moins un poisson de chaque espèce ;

b) seulement deux espèces de poissons.

15. **ÂGE DES MEMBRES D'UNE FAMILLE**

Un quinquagénaire et ses trois fils célèbrent aujourd'hui leur anniversaire de naissance. Sachant que l'âge du père est égal au double de la somme des âges de ses fils, et à 13 fois la différence d'âge entre le cadet et le benjamin, sachant aussi que l'âge de l'aîné est égal au triple de la différence d'âge entre ses frères et que le quart de l'âge de l'aîné est égal au tiers de l'âge du cadet, déterminer l'âge de chaque personne, en ce jour d'anniversaire, après avoir trouvé l'ensemble-solution.

2.3 Résolution de systèmes d'équations linéaires par la méthode de Gauss-Jordan et inversion de matrices carrées par cette méthode

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra résoudre des systèmes d'équations linéaires par la méthode de Gauss-Jordan et inverser une matrice par cette méthode.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de transformer une matrice augmentée en une matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan ;
- de déterminer l'ensemble-solution d'un système d'équations linéaires à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan ;
- de déterminer l'inverse d'une matrice à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A \qquad I} \sim \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & -\frac{11}{32} \end{array}\right]}_{I \qquad\qquad A^{-1}}$$

Résolution de systèmes d'équations linéaires par la méthode de Gauss-Jordan



Wilhelm Jordan (1842-1899)

Il y a environ 130 ans...

La méthode de Gauss pour résoudre un système d'équations linéaires est améliorée par **Wilhelm Jordan** dans la troisième édition de son *Manuel de géodésie*, publiée en 1888. Jordan n'est pas à proprement parler un mathématicien. Il a fait ses études dans une école d'ingénieurs de Stuttgart avant de travailler pendant deux ans en tant qu'aide-ingénieur sur un chantier de chemin de fer. Il est alors fasciné par les questions liées aux mesures effectuées lors d'opérations d'arpentage. À tel point qu'il devient, en 1868, à l'âge de 26 ans, professeur d'arpentage à l'Institut de technologie de Karlsruhe, puis, en 1882, à l'Université de Hanovre. Jordan utilise une notation simplifiée pour décrire son amélioration de la méthode de Gauss, mais il ne met pas à profit la notation matricielle qui prend forme, à cette époque, dans le milieu des mathématiciens. Aujourd'hui, on pense souvent, à tort, que le Jordan de la méthode de Gauss-Jordan est le mathématicien français Camille Jordan (1838-1922), car ce dernier a joué un rôle important dans la mise en forme de la théorie des matrices.

DÉFINITION 2.12

Une matrice échelonnée est appelée **matrice échelonnée de Gauss-Jordan**, également appelée **matrice échelonnée réduite**, si elle possède les propriétés suivantes.

Propriété 1 Le premier élément non nul de chaque ligne de la matrice est 1.

Propriété 2 Cet élément 1 doit être le seul élément non nul de la colonne où il se trouve.

Voici une forme possible de matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan, où le pivot de chaque ligne est 1 et où les éléments □ sont des nombres réels.

Matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \square & 0 & 0 & 0 & \square & 0 & \square \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \square & 0 & \square \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \square & 0 & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \square & 0 & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Exemple 1

a) Les matrices suivantes sont des matrices échelonnées de Gauss-Jordan.

Matrice échelonnée de Gauss-Jordan

$$A = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

b) Les matrices augmentées suivantes sont des matrice échelonnées de Gauss-Jordan.

Matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 7 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

c) Les matrices suivantes ne sont pas des matrices échelonnées de Gauss-Jordan.

$$A = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

a_{13} devrait être 0 au lieu de 1.

$$B = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Les lignes 2 et 4 devraient être permutées.

$$C = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

c_{44} devrait être 1 au lieu de -1.

La méthode de Gauss-Jordan pour résoudre un système d'équations linéaires consiste à transformer la matrice augmentée correspondant au système d'équations linéaires en une matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan.

Exemple 2 Résolvons le système suivant par la méthode de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 2y + 8z = 0 \\ x - y - 4z = 3 \\ 2x - 3y + 4z = 14 \end{cases}$$

Transformons la matrice augmentée correspondant à ce système en une matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan.

On veut obtenir un nombre différent de 0

Étape 1
On veut obtenir des 0

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 14 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_2 \to L_1 \\ L_1 \to L_2 \end{array}$$

Étape 2
On veut obtenir des 0

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & & 3 \\ 0 & 2 & 8 & & 0 \\ 0 & -1 & 12 & & 8 \end{array}\right] \qquad L_3 - 2L_1 \to L_3$$

Étape 3
On veut obtenir des 0

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & & 3 \\ 0 & 2 & 8 & & 0 \\ 0 & 0 & 16 & & 8 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_1 + (1/2)L_2 \to L_1 \\ L_3 + (1/2)L_2 \to L_3 \end{array}$$

Étape 4
On veut obtenir des 1

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & & 3 \\ 0 & 2 & 0 & & -4 \\ 0 & 0 & 16 & & 8 \end{array}\right] \qquad L_2 - (1/2)L_3 \to L_2$$

Matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & & 3 \\ 0 & 1 & 0 & & -2 \\ 0 & 0 & 1 & & \frac{1}{2} \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} (1/2)L_2 \to L_2 \\ (1/16)L_3 \to L_3 \end{array}$$

Système compatible avec une solution unique

Le système d'équations linéaires correspondant est $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

d'où E.-S. $= \left\{\left(3, -2, \frac{1}{2}\right)\right\}$

Exemple 3 Résolvons le système suivant par la méthode de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} x + y + 2z + w = 4 \\ 2x + 3y - z + 2w = 1 \\ 5x - y + z - w = 2 \\ x + 7z + w = 11 \end{cases}$$

Transformons la matrice augmentée correspondant à ce système en une matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan.

Étape 1
On veut obtenir des 0

Étape 2
On veut obtenir des 0

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 & 11 \end{array}\right] \sim \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & -6 & -9 & -6 & -18 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 7 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - 5L_1 \to L_3 \\ L_4 - L_1 \to L_4 \end{array}$$

Étape 3
On veut obtenir des 0

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -39 & -6 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} L_1 - L_2 \to L_1 \\ L_3 + 6L_2 \to L_3 \\ L_4 + L_2 \to L_4 \end{array}$$

Étape 4
On veut obtenir des 1

$$\sim \left[\begin{array}{cccc:c} 39 & 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 39 & 0 & 30 & 27 \\ 0 & 0 & -39 & -6 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 39L_1 + 7L_3 \to L_1 \\ 39L_2 - 5L_3 \to L_2 \end{array}$$

Matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan

$$\sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{13} & \frac{3}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{13} & \frac{9}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{13} & \frac{20}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (1/39)L_1 \to L_1 \\ (1/39)L_2 \to L_2 \\ (-1/39)L_3 \to L_3 \end{array}$$

Système compatible avec une infinité de solutions

Le système d'équations linéaires correspondant est $\begin{cases} x - \frac{1}{13}w = \frac{3}{13} \\ y + \frac{10}{13}w = \frac{9}{13} \\ z + \frac{2}{13}w = \frac{20}{13} \end{cases}$

Ce système possède une infinité de solutions.

w, variable libre
x, *y*, *z*, variables liées

En posant $w = s$, où $s \in \mathbb{R}$, et en isolant les variables x, y et z, nous obtenons

$$x = \frac{1}{13}s + \frac{3}{13}, \qquad y = \frac{-10}{13}s + \frac{9}{13} \qquad \text{et} \qquad z = \frac{-2}{13}s + \frac{20}{13}$$

d'où E.-S. $= \left\{ \left(\frac{s+3}{13}, \frac{-10s+9}{13}, \frac{-2s+20}{13}, s \right) \middle| \, s \in \mathbb{R} \right\}$

Inversion de matrices carrées par la méthode de Gauss-Jordan

La méthode de Gauss-Jordan, utilisée pour résoudre un système d'équations linéaires, peut être adaptée pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée si cette matrice est inversible.

Exemple 1 Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. Déterminons l'inverse de A, si A est inversible.

Soit B, l'inverse de A si A est inversible.

Ainsi, par la définition 1.15, nous avons $A_{2\times 2}\, B_{2\times 2} = I_{2\times 2}$

En posant $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, nous obtenons $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2x + 8z & 2y + 8w \\ x + 5z & y + 5w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (en effectuant la multiplication)

Les systèmes d'équations linéaires correspondants sont

$$\begin{cases} 2x + 8z = 1 \\ x + 5z = 0 \end{cases} \qquad \vdots \qquad \begin{cases} 2y + 8w = 0 \\ y + 5w = 1 \end{cases}$$

Les matrices augmentées correspondantes sont

$$\begin{array}{cc} x & z \\ \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{cc} y & w \\ \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

a) Résolvons parallèlement les deux systèmes d'équations linéaires précédents.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right] \quad 2L_2 - L_1 \to L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right] \quad L_1 - 4L_2 \to L_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (1/2)L_1 \to L_1 \\ (1/2)L_2 \to L_2 \end{array}$$

Donc, $x = \frac{5}{2}$ et $z = \frac{-1}{2}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \quad 2L_2 - L_1 \to L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \quad L_1 - 4L_2 \to L_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (1/2)L_1 \to L_1 \\ (1/2)L_2 \to L_2 \end{array}$$

Donc, $y = -4$ et $w = 1$

D'où $B = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -4 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ est l'inverse de A. $\left(\text{car } B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right)$

Remarquons que nous avons effectué des opérations identiques sur les lignes pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

b) Résolvons simultanément les deux systèmes d'équations linéaires de la façon suivante, à l'aide d'une seule matrice augmentée de Gauss-Jordan.

Étape 1
On veut obtenir un 0

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{array}\right.}_{A} \underbrace{\left.\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]}_{I} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \quad 2L_2 - L_1 \to L_2$$

Étape 2
On veut obtenir un 0

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 5 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \quad L_1 - 4L_2 \to L_1$$

Étape 3
On veut obtenir des 1

$$\sim \underbrace{\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right.}_{I} \underbrace{\left.\begin{array}{cc} \frac{5}{2} & -4 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{array}\right]}_{B} \quad \begin{array}{l} (1/2)L_1 \to L_1 \\ (1/2)L_2 \to L_2 \end{array}$$

d'où $A^{-1} = B = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -4 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Vérifions que B est l'inverse de A.

Puisque l'inverse de A est unique (théorème 1.2), il suffit de vérifier que $AB = I$.

Vérification

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -4 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Méthode de Gauss-Jordan pour trouver l'inverse d'une matrice carrée

La méthode de Gauss-Jordan pour trouver l'inverse d'une matrice carrée A, lorsque cette matrice est inversible, consiste à écrire une matrice augmentée de la forme $\left[\, A \mid I \,\right]$ et de la transformer, si c'est possible, à l'aide des opérations élémentaires, de manière à obtenir une nouvelle matrice augmentée équivalente de la forme $\left[\, I \mid B \,\right]$, c'est-à-dire

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]}_{A \qquad I} \sim \dots \sim \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right]}_{I \qquad B}$$

où $B = A^{-1}$.

Exemple 2 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$. Déterminons A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan, si A est inversible.

Transformons, si c'est possible, la matrice augmen tée correspondante en une matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan.

Étape 1
On veut obtenir des 0

Étape 2
On veut obtenir des 0

Étape 3
On veut obtenir des 0

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A \qquad I} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 8 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 - 4L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 11 & 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & 8 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -32 & -6 & -4 & 11 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 11L_1 + 3L_2 \to L_1 \\ 11L_3 - 4L_2 \to L_3 \end{array}$$

Étape 4
On veut obtenir des 1

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 176 & 0 & 0 & -22 & 44 & 11 \\ 0 & -44 & 0 & -22 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -32 & -6 & -4 & 11 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 16L_1 + L_3 \to L_1 \\ 4L_2 + L_3 \to L_2 \end{array}$$

$$\sim \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{-11}{32} \end{array}\right]}_{I \qquad\qquad A^{-1}} \quad \begin{array}{l} (1/176)L_1 \to L_1 \\ (-1/44)L_2 \to L_2 \\ (-1/32)L_3 \to L_3 \end{array}$$

D'où $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{-11}{32} \end{bmatrix}$. L'étudiant peut vérifier que $AA^{-1} = I$.

Exemple 3 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & 15 \end{bmatrix}$. Déterminons A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan, si A est inversible.

Transformons, si c'est possible, la matrice augmentée correspondante en une matrice augmentée échelonnée de Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -29 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_1 + 3L_2 \to L_1 \\ \\ L_3 + L_2 \to L_3 \end{array}$$

Puisque nous obtenons une ligne de zéros dans la partie gauche de la matrice augmentée, il est donc impossible d'obtenir la matrice I dans la partie gauche de la dernière matrice augmentée ; cela signifie que A n'est pas inversible.

Exercice de compréhension 2.3

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Déterminer A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan, si A est inversible.

Exemple 4 Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 10 & -5 \\ 23 & -15 & 7 \\ -12 & 18 & 25 \end{bmatrix}$. Déterminons A^{-1} à l'aide de Maple,

a) en utilisant la commande « gaussjord( ) » ;

```
with(linalg):
A:= matrix([[3, 10, -5], [23, -15, 7], [-12, 18, 25]]):
i:= diag(1, 1, 1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
B:= augment(A, i);
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 23 & -15 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & 18 & 25 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
gaussjord(B);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{501}{9263} & \frac{340}{9263} & \frac{5}{9263} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{659}{9263} & -\frac{15}{9263} & \frac{136}{9263} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{234}{9263} & \frac{174}{9263} & \frac{275}{9263} \end{bmatrix}$$

d'où $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{501}{9263} & \frac{340}{9263} & \frac{5}{9263} \\ \frac{659}{9263} & \frac{-15}{9263} & \frac{136}{9263} \\ \frac{-234}{9263} & \frac{174}{9263} & \frac{275}{9263} \end{bmatrix}$

b) en utilisant la commande « inverse( ) » qui nous donne directement A^{-1}.

```
with(linalg):
A:= matrix([[3, 10, -5], [23, -15, 7], [-12, 18, 25]]):
inverse(A);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{501}{9263} & \frac{340}{9263} & \frac{5}{9263} \\ \frac{659}{9263} & -\frac{15}{9263} & \frac{136}{9263} \\ -\frac{234}{9263} & \frac{174}{9263} & \frac{275}{9263} \end{bmatrix}$$

EXERCICES 2.3

1. Parmi les matrices suivantes, identifier les matrices échelonnées de Gauss-Jordan.

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

2. Transformer les matrices augmentées suivantes de sorte qu'elles deviennent des matrices augmentées échelonnées réduites et donner l'ensemble-solution du système d'équations linéaires correspondant.

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 3 \\ 7 & -3 & 5 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 8 & -1 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & -7 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 12 \end{array}\right]$

3. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants par la méthode de Gauss-Jordan.

a) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 4y = -9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x - 9y = 15 \\ 12y - 8x = -20 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 4y + z = 4 \\ 2y - 9x - z = -3 \\ 4y - 4z - 6x = -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - y + 2z = -5 \\ 3x + y + 2z = 6 \\ x - 2y + 5z = 4 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 3y - z + 2w = 5 \\ x + z = 5 \end{cases}$

4. Trouver, si c'est possible, l'inverse des matrices suivantes par la méthode de Gauss-Jordan.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ d) $E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

e) $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ f) $G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

5. a) Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer A^{-1} à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan, en indiquant les valeurs de a telles que A^{-1} existe.

b) Si $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, déterminer, si c'est possible, B^{-1} en utilisant le résultat trouvé en a).

6. **APPLICATION | INVESTISSEMENT**

Une personne investit 25 000 $ dans deux types de placement, un à risque élevé et l'autre à risque modéré. Après un an, le montant placé à risque élevé a eu un rendement de 6,5 %, et l'autre, un rendement de 3,8 %, pour une somme totale de 1171,40 $.

Déterminer, en utilisant la méthode de Gauss-Jordan, la somme investie dans chaque type de placement.

7. **UNITÉS, DIZAINES ET CENTAINES**

Soit un nombre entier de trois chiffres. En enlevant le chiffre des unités, la différence entre le nombre initial et ce nouveau nombre est de 762. En enlevant le chiffre des dizaines, la somme du nombre initial et de ce nouveau nombre est de 932. De plus, nous obtenons 198 en soustrayant du nombre initial le nombre obtenu en permutant le chiffre des centaines et celui des unités.

Déterminer le nombre initial en utilisant la méthode de Gauss-Jordan.

8. **APPLICATION | COÛT MINIMAL**

Une compagnie de transport par autocar prévoit acheter 30 autocars de trois types différents pour transporter 960 passagers. Selon le type d'autocars, le nombre de passagers pouvant être transportés est respectivement de 18, 24 et 42.



a) Utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour déterminer le nombre d'autocars de chaque type satisfaisant les conditions précédentes.

b) Le prix des autocars pouvant transporter 18 passagers est de 180 000 $, celui des autocars pouvant transporter 24 passagers est de 220 000 $ et celui des autocars pouvant transporter 42 passagers est de 350 000 $. Déterminer la solution donnant le coût minimal et trouver ce coût.

Révision des concepts

Système d'équations linéaires

1) Compatible si _____ 2) Incompatible si _____

Non homogène

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Matrice augmentée correspondante : _____

Homogène

$$S_1\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = _____ \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = _____ \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = _____ \end{cases}$$

Solution triviale

$x_1 =$ _____, $x_2 =$ _____, …, $x_n =$ _____

S_1 est dépendant si _____

S_1 est indépendant si _____

Résolution de systèmes d'équations linéaires

Méthodes élémentaires

Substitution (page 66)

Élimination (page 68)

Méthode de Gauss

Opérations permettant de transformer une matrice augmentée en une matrice augmentée échelonnée

1) _____

2) _____

3) _____

Méthode de Gauss-Jordan

Propriétés d'une matrice échelonnée réduite

1) _____

2) _____

Inverse de matrices

Soit $A_{n \times n}$, une matrice inversible.

$[A_{n \times n} \vdots I_{n \times n}] \sim \ldots \sim [I_{n \times n} \vdots B_{n \times n}]$,

alors $B_{n \times n} =$ _____

Applications

Physique

Chimie

Économie

Exercices récapitulatifs

Administration | Biologie | Chimie | Géométrie | Physique | Sciences humaines | Outil technologique

Les réponses aux exercices récapitulatifs et aux problèmes de synthèse, à l'exception de ceux notés en **rouge**, sont fournies à la fin du manuel.

1. Écrire chacun des systèmes d'équations linéaires suivants sous la forme $AX = B$ et donner la matrice augmentée correspondante.

a) $\begin{cases} 2x - 4y = 7 \\ x + 8y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4z = 1 \\ y + z = 4 \\ z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x_1 + 4x_3 = -2x_2 + 5x_4 \\ 2 + 4x_2 = 2x_4 + 5x_3 \\ x_3 = x_4 \\ 2x_1 + 4 = 3x_2 - 6x_3 \end{cases}$

2. Déterminer si le système d'équations linéaires associé à chacune des matrices augmentées suivantes, où $k \in \mathbb{R}$, est compatible ou incompatible, et déterminer le nombre de solutions.

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -7 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ **d)** $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

e) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & k \\ 0 & 1 & 5 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ f) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & k \\ 0 & 1 & 4 & k \\ 0 & 0 & 0 & k \end{array}\right]$

g) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 3 & 7 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 5 & -1 & 5 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$

h) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & & 0 \\ 0 & k+1 & & 0 \\ 0 & 0 & & k^2 - 1 \end{array}\right]$

3. Déterminer l'ensemble-solution des systèmes d'équations linéaires suivants par la méthode de Gauss.

a) $\begin{cases} 2x - 2y + 4z = 6 \\ 2x - y + 5z = 15 \\ -x + y + 3z = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 3y + 3z = 17 \\ x - 8y - 5z = 13 \\ -5x + 2y - z = -23 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ -2a + b + 3c = 0 \\ 2a + 3b + 5c = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ -2a + b + 3c = 0 \\ 4a + 13b + 9c = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x - 2y + z = -4 \\ 4x + y + 7z = -4 \\ 2x + 5y + 8z = 7 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x - y + z - w = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x - 3y - 4z = 0 \\ 2x + 4y + 7z = 0 \\ 3x + y + 3z = 0 \\ 4x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$

4. Déterminer l'ensemble-solution des systèmes d'équations linéaires suivants par la méthode de Gauss-Jordan.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -5x + 12y = -5 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y + 3z + w = 0 \\ 2x + 2y + z - w = 0 \\ 2x - y + z + 2w = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + 2w = 3 \\ y = 2 \\ -z + 3w = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u + y = x + 2w \\ x = z \\ x + z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3(x - 2) = 2y \\ 6x + 4y = -8 \\ 2(y + 4) = 9x \\ 15x = 2(3y + 10) \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}y + 3z = \frac{41}{2} \\ \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}y + z = 4 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{3}z = \frac{13}{2} \end{cases}$

5. **APPLICATION | PRODUCTION QUOTIDIENNE**

Une usine dispose de trois machines, A, B et C, pour fabriquer trois produits, P, Q et R. Les machines A et B fonctionnent 12 heures par jour et la machine C, 13 heures par jour. Pour fabriquer une unité du produit P, la machine A doit fonctionner pendant 45 minutes, la machine B pendant 30 minutes, et la machine C pendant 15 minutes. Pour fabriquer une unité du produit Q, la machine A doit fonctionner pendant 30 minutes, la machine B pendant 20 minutes, et la machine C pendant 80 minutes. Pour fabriquer une unité du produit R, la machine A doit fonctionner pendant 20 minutes, la machine B pendant 40 minutes, et la machine C pendant 20 minutes.

Déterminer le nombre d'unités de P, de Q et de R produites quotidiennement.

6. Déterminer l'ensemble-solution des systèmes d'équations linéaires suivants.

a) $\begin{cases} 2a + c + 2d = 3b \\ 3a = b + 2c + 3d \\ 4a + 2b = c + 4d \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y + z - 4w = 2 \\ 6x + 3y - z - 4w = 3 \\ 9x + 2y - 8w = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ -x + 3y - z = -2 \\ 3x + 4y - 5z = 3 \\ 2x - 4z = -2 \\ 5y + 2z = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2a - b + c - d + 2e = 4 \\ 6a + 4c + d - 3e = 2 \\ 3a + 2b + c + 2d + 5e = 0 \\ a - b + c - d - 4e = -1 \\ -a + 2c - 3d + e = -3 \end{cases}$

7. Déterminer, si c'est possible, la matrice inverse des matrices suivantes par la méthode de Gauss-Jordan.

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

e) $F = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **f)** $G = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & -0{,}5 \end{bmatrix}$

g) $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ h) $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

8. Soit le système d'équations linéaires suivant.

$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ 2x - y + z = b, \text{ où } a, b \text{ et } c \in \mathbb{R} \\ 3x + y + 2z = c \end{cases}$

Déterminer l'ensemble-solution en fonction de a, b et c.

9. Dans les systèmes d'équations linéaires suivants, déterminer les valeurs de k, où $k \in \mathbb{R}$, de sorte que le système est compatible.

a) $\begin{cases} 3x - 9y = 4k \\ -2x + 6y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 5x + 2y = 16 \\ 7x + 3y = k \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ -3x + y - 3z = 2 \\ -2x - y + (k^2 - 2k)z = k + 3 \end{cases}$

10. Soit le système d'équations linéaires suivant.

$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x + a^2y - 15y - a = 0 \end{cases}$

Déterminer pour quelles valeurs de a, où $a \in \mathbb{R}$, le système

a) n'admet aucune solution ;

b) admet une infinité de solutions ;

c) admet une solution unique.

11. Répondre par vrai (V) ou faux (F) et justifier la réponse.

a) Tout système d'équations linéaires

i) compatible est homogène ;

ii) compatible a une infinité de solutions ;

iii) incompatible n'a aucune solution ;

iv) ayant une infinité de solutions est homogène ;

v) où le nombre de variables est supérieur au nombre d'équations possède toujours une infinité de solutions ;

vi) ayant une infinité de solutions admet la solution triviale.

b) Tout système homogène d'équations linéaires

i) est compatible ;

ii) a une infinité de solutions ;

iii) où le nombre de variables est supérieur au nombre d'équations possède toujours une infinité de solutions.

c) Soit les deux systèmes d'équations linéaires suivants.

$S_1 \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases}$

$S_2 \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = 0 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 = 0 \end{cases}$

Si $b_1 \neq 0$ ou si $b_2 \neq 0$, alors les deux systèmes sont équivalents.

12. Déterminer les valeurs réelles de A, B, C, … de sorte que les équations suivantes sont vérifiées $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) $9x + 5 = A(x + 1) + B(x - 1)$

b) $26x^2 - x - 30 = (2A + 4B + 2C)x^2 + (A + 6B - 2C)x - 3A$

c) $6x^2 - x = (A + B - D)x^3 + (A + 2B + C)x^2 + (3B + 2C - D)x + 2A - 3B + 5C + D$

13. **APPLICATION | ÉQUATIONS CHIMIQUES**

Équilibrer, si c'est possible, les équations chimiques suivantes.

a) $Al_2O_3 + H_2O \rightarrow Al(OH)_3$

b) $CCl_4 + SbF_3 \rightarrow CCl_2F_2 + SbCl_3$

c) $Cr + H_2O \rightarrow Cr(OH)_2 + O_2$

d) $Cu + HNO_3 \rightarrow (NO_3)_2Cu + NO_2 + H_2O$

e) $BiCl_3 + NH_3 + H_2O \rightarrow Bi(OH)_3 + NH_4Cl$

f) $CO + CO_2 + H_2 \rightarrow CH_4 + H_2O$

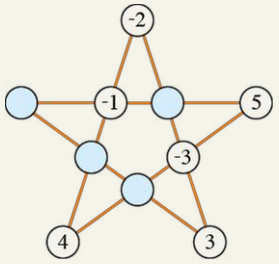
g) $KNO_3 + S + C \rightarrow CO_2 + CO + N_2 + K_2CO_3 + K_2S_3$

14. APPLICATION | VITESSE

En descendant une rivière, une embarcation a mis 1 heure et 15 minutes pour parcourir 20 kilomètres. Pour revenir au point de départ, elle met 2 heures. Déterminer la vitesse moyenne de l'embarcation et la vitesse constante du courant.

15. SOMME DE NOMBRES

a) Déterminer la valeur des éléments omis dans l'étoile ci-dessous, telle que la somme des éléments de chaque ligne de l'étoile est identique, et déterminer cette somme.



b) Déterminer une valeur possible des éléments omis dans la grille suivante, telle que la somme des éléments de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale

4		10	
	11		3
	1		15
14		2	

i) est identique ;

ii) est égale à 50 ;

iii) est égale à -50.

16. APPLICATION | NOMBRE DE MAISONS

Un entrepreneur de construction se propose de bâtir 65 maisons. Il offre des modèles à 1, 2 ou 3 chambres à coucher.



Si, à la fin de la construction, il y a 145 chambres et deux fois plus de maisons à 3 chambres que de maisons à 1 chambre, déterminer le nombre de maisons de chaque modèle.

17. APPLICATION | PRODUCTION QUOTIDIENNE

Une compagnie produit des téléviseurs de 61 cm (24 po), de 109 cm (43 po), de 127 cm (50 po) et de 165 cm (65 po). Le tableau suivant indique le temps requis pour assembler, tester et emballer chaque modèle.

Modèle	Assemblage	Tests	Emballage
61 cm	45 min	30 min	12 min
109 cm	1 heure	45 min	12 min
127 cm	1,5 heure	1 heure	15 min
165 cm	2 heures	75 min	15 min

Sachant que quatre employés consacrent au total 25,75 h par jour à l'assemblage, trois employés consacrent au total 17,5 h par jour aux tests, un employé consacre 4,45 h par jour à l'emballage, et que la compagnie fabrique 20 téléviseurs par jour, déterminer le nombre de téléviseurs de chaque modèle que la compagnie peut produire par jour.

18. APPLICATION | NOMBRE DE SPECTATEURS

Pour assister à un concert, les étudiants doivent débourser 8 $, les adultes 20 $ et les personnes du troisième âge 12 $. Au moins une personne de chaque catégorie assiste au concert.



Déterminer, si c'est possible, la solution unique du nombre de spectateurs de chaque catégorie si

a) 25 spectateurs ont déboursé 228 $ au total ;

b) 26 spectateurs ont déboursé 228 $ au total.

19. APPLICATION | PRODUCTION

Une usine fabrique des robots de type A, B et C. Chaque robot de type A nécessite 1 heure d'assemblage et 2 heures de préparation, chaque robot de type B nécessite 2 heures d'assemblage et 3 heures de préparation et chaque robot de type C nécessite 3 heures d'assemblage et 8 heures de préparation. La ligne d'assemblage fonctionne pendant exactement 63 heures et le temps alloué à la préparation est de 130 heures pile.

a) Déterminer le nombre total de robots de type A, B et C que l'usine peut fabriquer durant cette période.

b) Si la demande totale est de 35 robots, déterminer le nombre de robots de chaque type.

20. **APPLICATION | INVESTISSEMENT**

Une personne investit 25 000 $ dans deux types de placements, A et B. Le placement de type A, un investissement sans risque, procure un rendement annuel de 3 % ; le placement de type B, à risque élevé, procure un rendement pouvant aller jusqu'à 13 % par année. Si, après un an, la personne obtient un rendement moyen de 6,5 % et que le placement de type B procure dans les faits un rendement de 9 %, déterminer la somme investie dans chacun des types de placement.

21. **APPLICATION | NOMBRE DE CHAQUE ESPÈCE**

Math Jones revient d'une expédition périlleuse avec quelques souvenirs vivants. Lors de son arrivée au poste frontalier, le douanier lui demande :

— Qu'avez-vous à déclarer ?

Math Jones répond :

— Quelques animaux : des décapodes, des araignées et des capybaras, qui totalisent 18 têtes et 156 pattes, mais une quantité différente de chaque espèce.

Peut-on déterminer de façon précise le nombre exact de chaque espèce ?

22. **UNITÉS, DIZAINES ET MILLIERS**

Geneviève écrit au tableau un nombre n de quatre chiffres. Mylène efface le chiffre des dizaines ; la différence entre n et le nouveau nombre est alors de 3480. Robin omet le chiffre des unités de n pour obtenir n_1 et omet le chiffre des milliers de n pour obtenir n_2. En additionnant n_1 et n_2, il obtient 1248. Déterminer n.

23. **APPLICATION | COÛT MINIMAL**

Audrey achète, sous forme de comprimés, trois types de suppléments vitaminés. Chaque comprimé de type I contient 1 unité de vitamine A, 3 unités de vitamine B et 4 unités de vitamine C. Chaque comprimé de type II en contient respectivement 2, 3 et 5. Et chaque comprimé de type III en contient respectivement 3, 0 et 3.

a) Déterminer le nombre de comprimés de chaque type nécessaire pour obtenir 15 unités de vitamine A, 9 unités de vitamine B et 24 unités de vitamine C.

b) Si un comprimé de type I coûte 0,40 $, un comprimé de type II, 0,60 $, et un comprimé de type III, 0,30 $, déterminer le nombre de comprimés de chaque type nécessaire pour satisfaire les besoins exprimés en a) de manière à ce que le coût soit minimal, et déterminer ce coût.

Problèmes de synthèse

1. a) Déterminer les valeurs réelles de A, B, C, … de sorte que les équations suivantes sont vérifiées, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

i) $\dfrac{5x-2}{x(3x+1)(x-4)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{3x+1} + \dfrac{C}{x-4}$

ii) $\dfrac{4x^3+x^2+2x+1}{x^3(x+1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D}{x+1} + \dfrac{E}{(x+1)^2}$

iii) $\dfrac{7x^3-x^2+17x-3}{(x^2+3)(x^2+1)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+3} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$

b) Déterminer les valeurs réelles de a, d et k, telles que, $\forall\, n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$,

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = \frac{an^6 + 6n^5 + 5n^4 + dn^2}{k}.$$

2. a) La solution générale de l'équation différentielle $y'' - y = 0$ est une fonction de la forme $f(x) = Ae^x + Be^{-x}$, où $y = f(x)$. Déterminer la solution si $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

b) La solution générale de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est une fonction de la forme $f(x) = A \sin x + B \cos x$, où $y = f(x)$. Déterminer la solution si $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4$ et $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2$.

c) Soit $g(x)$, une fonction polynomiale de degré trois. Si $g(-2) = 0$, $g(0) = -4$, $g'(-2) = 0$ et $g'(0) = 0$, déterminer $g(x)$ et donner une esquisse du graphique de $g(x)$.

3. **PARABOLE ET CERCLE**

a) Déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole qui passe par les points P(1, 2), Q(-1, 6) et R(2, 9).

b) Déterminer les coordonnées du centre C et le rayon r du cercle passant par les points P(1, 5), R(-6, 4) et S(2, -2).

c) Déterminer l'équation de la parabole et du cercle passant par les points P(2, -5), Q(8, 3) et R(1, 2) ; déterminer les coordonnées de l'autre point d'intersection entre la parabole et le cercle, et représenter graphiquement.

4. Résoudre les systèmes d'équations suivants.

a) $\begin{cases} 3^{4x}\left(\frac{1}{9}\right)^{y} = \frac{1}{3} \\ (25)^{\frac{x}{2}}\,(125)^{2y} = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \ln(x^3y) = 4 \\ \ln\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{x^2} + y^2 + z = 5 \\ \frac{2}{x^2} - 3y^2 - z = 3 \\ \frac{3}{x^2} + 4y^2 + 19z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 3x + 2y + z = 9 \\ (x + 2y)^2 - z^2 = 15 \end{cases}$

5. a) Soit le système d'équations linéaires suivant.

$$\begin{cases} x + 2y + z = k \\ 2x + y + 4z = 6 \\ x - 4y + 5z = 9 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble-solution du système selon les valeurs de k, où $k \in \mathbb{R}$.

b) Soit le système homogène d'équations linéaires suivant.

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ kx + (4 - k)y + 2z = 0 \\ kx + y + (5 - k)z = 0 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de k, où $k \in \mathbb{R}$, pour lesquelles le système possède une solution non triviale et, pour chacune de ces valeurs, déterminer l'ensemble-solution du système.

c) Soit le système d'équations linéaires suivant.

$$\begin{cases} x + ay + 3z = 11 \\ ax + y + 2z = -1 \\ (a + 2)x + (1 + 2a)y + 9z = 23 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble-solution du système selon les valeurs de a, où $a \in \mathbb{R}$.

d) Soit le système d'équations linéaires suivant.

$$\begin{cases} x + y + 2kz = 2k \\ (k + 3)y + (3k + 1)z = (k + 1)^2 \\ 2x + 3y + 5kz = 5k \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble-solution du système selon les valeurs de k, où $k \in \mathbb{R}$.

e) Soit le système d'équations linéaires suivant, où a, b et $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} -3x + y + 2z = a \\ -11x + 2y + 6z = b \\ 7x + y - 2z = c \end{cases}$$

i) Déterminer la relation entre a, b et c pour que le système admette au moins une solution.

ii) Si $a = 3$ et $b = 7$, donner l'ensemble-solution et déterminer les solutions particulières de la forme $(0, y_1, z_1,)$, $(x_2, 0, z_2)$ et $(x_3, y_3, 0)$.

6. Soit le système d'équations linéaires suivant.

$$\begin{cases} 2a - 3b + c - d + e = 0 \\ 4a - 6b + 2c - 3d - e = -5 \\ -2a + 3b - 2c + 2d - e = 3 \end{cases}$$

Déterminer

a) l'ensemble-solution du système ;

b) une solution entière du système ;

c) l'ensemble des solutions si $e = 0$;

d) l'ensemble des solutions si $b = 0$ et $e = 0$;

e) l'ensemble des solutions si $b = e$;

f) l'ensemble des solutions entières si $b = e$;

g) l'ensemble des solutions si $c = 3e$;

h) l'ensemble des solutions si $b = c = e$;

i) l'ensemble des solutions si $c = d$;

j) l'ensemble des solutions si $a = 2b$ et $b = 2e$.

7. Soit un système d'équations linéaires de trois équations à deux variables. Répondre par vrai (V) ou faux (F) et justifier la réponse.

a) Si le système est compatible, alors nous pouvons enlever

i) une des équations sans affecter l'ensemble-solution ;

ii) n'importe laquelle des équations sans affecter l'ensemble-solution.

b) Si le système est incompatible et que nous enlevons une des équations

i) alors le système devient compatible ;

ii) alors le système peut devenir compatible.

8. Soit le système d'équations linéaires suivant.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = -3 \\ -2x_2 - 3x_3 = -8 \\ x_1 + x_3 = 5 \end{cases}$$

a) Écrire le système sous la forme $AX = B$.

b) Déterminer A^{-1}.

c) Effectuer $A^{-1}AX = A^{-1}B$ et déterminer X.

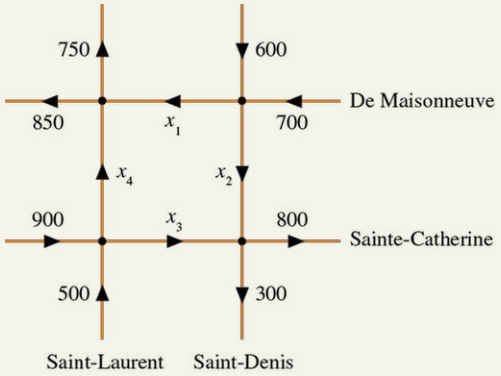
9. Soit les systèmes d'équations linéaires suivants.

$$S\begin{cases} y_1 = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ y_2 = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ y_3 = x_1 + 2x_2 - x_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad S_1\begin{cases} x_1 = 3t_1 + 4t_2 + t_3 \\ x_2 = 2t_1 - 3t_2 - t_3 \\ x_3 = t_1 + 7t_2 \end{cases}$$

Exprimer y_1, y_2 et y_3 en fonction de t_1, t_2 et t_3, en utilisant le produit matriciel.

10. APPLICATION | CIRCULATION URBAINE

Une étude de la ville de Montréal révèle qu'à l'heure de pointe, le nombre de véhicules par heure traversant les intersections des rues à sens unique suivantes est donné par ce schéma



où x_i représente le nombre de véhicules par heure se déplaçant entre les intersections.

a) Déterminer le système d'équations correspondant à cette situation et résoudre ce système.

b) Déterminer le nombre maximum et le nombre minimum de véhicules pouvant circuler de l'intersection du boulevard Saint-Laurent et de la rue Sainte-Catherine à l'intersection du boulevard Saint-Laurent et du boulevard De Maisonneuve.

c) Le feu de circulation à l'intersection du boulevard Saint-Laurent et de la rue Sainte-Catherine permet le passage d'un maximum de 950 véhicules par heure en direction du boulevard De Maisonneuve. Refaire le schéma en y indiquant les valeurs appropriées.

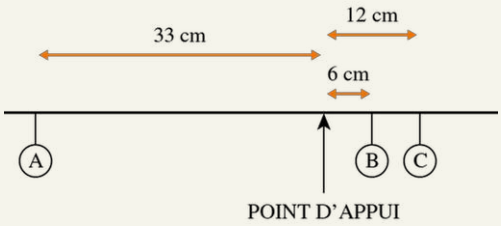
11. APPLICATION | INVESTISSEMENT

Une personne a investi 100 000 $ dans quatre placements, A, B, C et D. Pour tenir compte des risques inhérents à chacun de ces placements, cette personne a investi dans A le triple du montant investi dans D, et elle a investi dans B le double du montant investi dans C. Après une année, le rendement moyen de ces placements a été de 5 %, et chacun des placements a rapporté respectivement 3 %, 4 %, 8 % et 9 %. Déterminer le montant que la personne a investi dans chacun des placements.

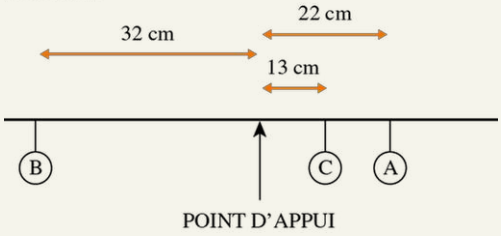
12. APPLICATION | MASSE D'OBJETS EN ÉQUILIBRE

Soit trois objets A, B et C dont nous voulons déterminer la masse en kilogrammes. Un principe de physique établit que, lorsque le système est en équilibre, la somme des moments (la masse multipliée par la distance du point d'appui) du côté gauche est égale à la somme des moments du côté droit. Les trois représentations suivantes illustrent trois situations où le système est en équilibre.

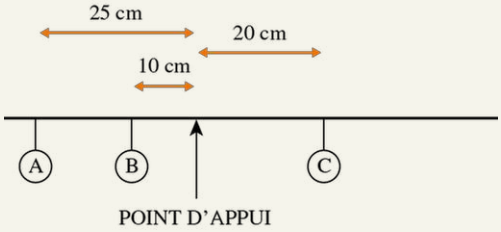
Situation 1



Situation 2



Situation 3

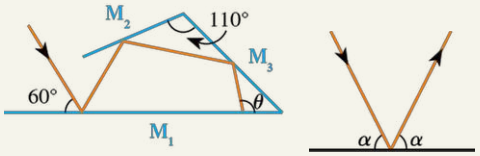


a) Écrire le système d'équations correspondant simultanément aux trois situations.

b) Déterminer la masse de A, de B et de C sachant que chaque masse est une valeur entière comprise entre 1 kg et 5 kg.

13. APPLICATION | ANGLE DE RÉFLEXION

Un rayon lumineux est réfléchi par les miroirs M_1, M_2 et M_3 tel qu'illustré dans la représentation suivante. De plus, nous savons que l'angle d'incidence α est égal à l'angle de réflexion.



Déterminer la valeur de θ.

14. APPLICATION | TEMPS DE REMPLISSAGE

Un bassin circulaire est alimenté par trois robinets de tailles inégales. Les deux plus gros robinets remplissent le bassin en 1 heure et 12 minutes, le plus gros et le plus petit en 1 heure et 30 minutes, et les deux plus petits en 2 heures. Déterminer le temps nécessaire pour remplir le bassin lorsque les trois robinets sont ouverts.

15. APPLICATION | PRIX D'UN TERRAIN

Un terrain de forme trapézoïdale est limité par quatre côtés mesurant respectivement 195 m, 76 m, 131 m et 52 m de longueur. Les côtés les plus longs sont parallèles. Si le prix actuel de 1 m^2 de terrain est de 35,00 $, déterminer la valeur de ce terrain.

16. APPLICATION | VITESSE ET DISTANCE

La vitesse d'un mobile est donnée par $v(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$, où $t \in [k_1 \text{ min}, k_2 \text{ min}]$, v est en mètres/minute et $v(t) \geq 0$. Lors d'essais, nous trouvons $v(0) = 0$, $v(1) = 7$, $v(2) = 48$, $v(3) = 135$ et $v(4) = 256$.

a) Déterminer $v(t)$ et les valeurs de k_1 et k_2.

b) Déterminer la vitesse maximale de ce mobile.

c) Calculer la distance totale parcourue par ce mobile.

17. APPLICATION | DISTANCE DE FREINAGE

La distance d (en mètres) de freinage d'une voiture, avant de s'immobiliser, est une fonction de la vitesse v (exprimée en m/s). Elle est donnée par l'équation suivante.

$d = av^2 + bv$, où a et $b \in \mathbb{R}$

Si la distance de freinage de la voiture avant de s'immobiliser est de 16 m à la vitesse de 10 m/s, et de 36 m à la vitesse de 20 m/s, déterminer la distance de freinage de la voiture avant de s'immobiliser lorsque sa vitesse est de 100 km/h.

18. APPLICATION | MÉLANGE DE SUBSTANCES

Soit trois substances S_1, S_2 et S_3 ayant respectivement un taux d'acidité de 30 %, de 40 % et de 50 %. Si un mélange de 24 litres de ces trois substances a un taux d'acidité de 36,6 % et que le nombre de litres de la substance S_1 est égal à la somme du nombre de litres des deux autres substances, déterminer le nombre de litres de chacune des trois substances.

19. APPLICATION | TEST OBJECTIF

Un test objectif de mathématiques comporte 50 questions. La grille de correction accorde cinq points pour une bonne réponse, retranche quatre points pour une mauvaise réponse et enlève deux points pour une question laissée sans réponse. Sachant qu'un étudiant a obtenu 136 points, déterminer le nombre possible de bonnes réponses, de mauvaises réponses et de questions laissées sans réponse.

20. Déterminer le polynôme $P(x)$ satisfaisant les conditions suivantes.

a) $P(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 945$ est divisible par $(x - 5)$, par $(x + 3)$ et par $(x - 7)$.

b) $P(x) = x^3 + ax^2 - 3x + b$ est divisible par $(x - 2)$ et, lorsqu'on divise ce polynôme par $(x + 3)$, on obtient un reste de -30.

c) $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, sachant que

- le reste de la division de $P(x)$ par $(x + 1)$ est sept fois le reste qui est trouvé lorsque $P(x)$ est divisé par $(x + 2)$,
- le reste de la division de $P(x)$ par $(x - 3)$ est moins trois fois le reste qui est trouvé lorsque $P(x)$ est divisé par x,
- $P(4) = 7$.

21. a) Soit le système homogène d'équations linéaires suivant, où a, b, c et $d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

Démontrer que si (x_0, y_0) et (x_1, y_1) sont des solutions, alors $(rx_0 + sx_1, ry_0 + sy_1)$, où r et $s \in \mathbb{R}$, est également une solution.

b) Soit un système homogène d'équations linéaires. Démontrer que si X_1 et X_2 sont des solutions, alors $rX_1 + sX_2$, où r et $s \in \mathbb{R}$, est également une solution.

22. Soit le système d'équations $\begin{cases} 4x - y + 5z = 11 \\ 2x + 3y + 6z = 23. \\ 4x - 5y + z = -9 \end{cases}$

a) Déterminer l'ensemble-solution sous la forme donnée en indiquant la variable libre et les variables liées.

i) $\{(x(s), y(s), s) \mid s \in \mathbb{R}\}$;

ii) $\{(x(t), t, z(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$;

iii) $\{(r, y(r), z(r)) \mid r \in \mathbb{R}\}$.

b) Déterminer la solution particulière lorsque

i) $x = 6$; ii) $y = 6$;

iii) $z = 6$; iv) $x + y + z = 18$.

c) i) Déterminer l'ensemble des solutions $\{(x, y, z)\}$ telles que $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$.

ii) Déterminer l'ensemble des solutions entières $\{(x, y, z)\}$ telles que $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$.

d) Déterminer l'ensemble des solutions $\{(x, y, z)\}$ telles que $x < 0$, $y < 0$ et $z < 0$.

23. Soit le système d'équations linéaires $\begin{cases} a + b + c = 6 \\ 2a + 3b + 2c = 17 \end{cases}$, où a, b et $c \in \mathbb{R}$.

Déterminer la valeur de $(a^4 + b^4 + c^4)$, sachant que $(a^2 + c^2) = 2$.

3 Déterminants et matrices inverses



Perspective historique 108
Exercices préliminaires 109
3.1 Déterminant d'une matrice carrée 109
3.2 Théorèmes relatifs aux déterminants 126
3.3 Applications reliées au calcul de déterminants 138
3.4 Matrice inverse 151
3.5 Applications de la matrice inverse 159
Révision des concepts 169
Exercices récapitulatifs 170
Problèmes de synthèse 175

La notion de déterminant peut être abordée de nombreuses façons, par exemple à partir d'axiomes, de propriétés, de sommes de permutations, etc. Dans ce chapitre, nous introduirons la notion de déterminant par la résolution de systèmes d'équations linéaires.

Après avoir défini le déterminant d'une matrice carrée, nous utiliserons cette notion pour résoudre des systèmes d'équations linéaires à l'aide de la règle de Cramer, pour déterminer la nature de sections coniques et pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée.

La matrice inverse sera utilisée pour résoudre des systèmes d'équations linéaires, pour coder et décoder des messages (cryptographie) et dans le modèle de Leontief.

En particulier, l'étudiant pourra résoudre le problème suivant (qui se trouve au n° 19 des exercices récapitulatifs, à la page 173).

Il y a deux ans, Solange a demandé à son conseiller financier d'investir un montant de 40 000 $ pour une période de deux ans. Afin de tenir compte des risques inhérents à cet investissement, le conseiller a choisi de séparer le montant en trois investissements à des taux capitalisés annuellement respectifs de 3 %, 2 % et 1 %. Sachant que, après une année, la valeur totale des placements était de 40 712 $, et que, à la fin de la deuxième année, la valeur était de 41 439 $, déterminer le montant investi à un taux de 3 %, celui investi à un taux de 2 % et celui investi à un taux de 1 %.

De la matrice au déterminant : une chronologie qui s'est inversée

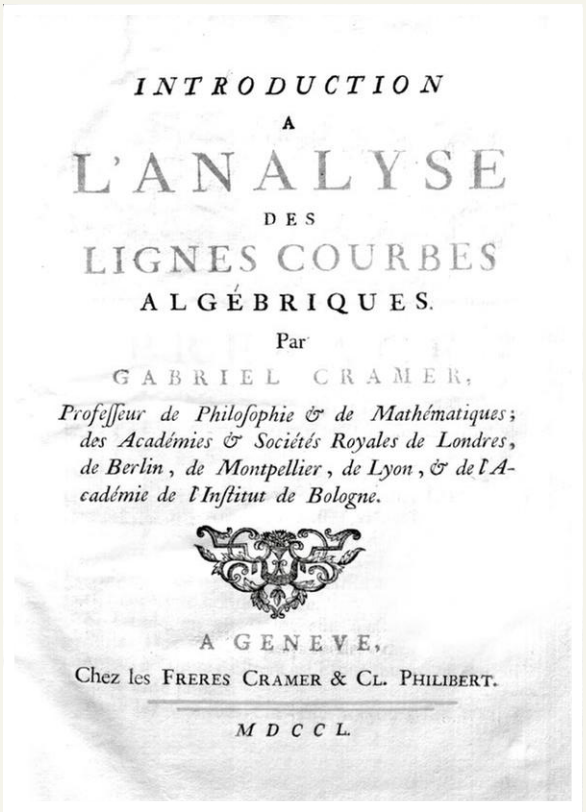
Le cours de l'histoire est souvent étonnant. En effet, alors qu'aujourd'hui les matrices sont habituellement étudiées avant la notion de déterminant, sur le plan historique, la notion de déterminant a précédé celle de matrice. La notion de déterminant apparaît d'abord dans une règle de résolution des équations qui fait référence uniquement aux coefficients. Cette règle, connue sous le nom de règle de Cramer, est énoncée par le mathématicien suisse **Gabriel Cramer** (1704-1752) dans un ouvrage intitulé *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* publié en 1750. La règle énoncée par Cramer n'est pas tout à fait celle qui apparaît dans ce chapitre, mais plutôt celle que vous avez vue au secondaire et qui s'énonce ainsi pour les variables x et y d'un système à deux inconnues :

Soit le système $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$.

Si les deux équations ne sont pas redondantes, les valeurs de x et de y satisfaisant ce système seront

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \text{ et } x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

En fait, Cramer n'est pas le premier à formuler cette règle. Leibniz l'énonce déjà en 1683 dans une lettre adressée à son ami Guillaume de L'Hospital (*voir la perspective historique du chapitre 1*). Par une étrange coïncidence, cette même année, le Japonais Seki Kowa (1642-1708) l'énonce aussi pour des systèmes d'équations comprenant jusqu'à cinq inconnues. Hélas ! À cette époque, le Japon s'est volontairement isolé du reste du monde. De plus, la lettre de Leibniz restera ignorée pendant plus de deux siècles. Deux ans avant la publication du livre de Cramer, l'Écossais Colin Maclaurin (1698-1746), dans son ouvrage posthume intitulé *A Treatise of Algebra in Three Parts* (1748), formule la même règle pour les systèmes d'équations comprenant jusqu'à quatre inconnues, mais sa notation, trop lourde, rend sa règle peu engageante. En étant plus claire, la règle telle qu'énoncée par Cramer est immédiatement remarquée. Le nom de ce dernier y est de la sorte associé.


INTRODUCTION
A
L'ANALYSE
DES
LIGNES COURBES
ALGÉBRIQUES.
Par
GABRIEL CRAMER,
Professeur de Philosophie & de Mathématiques; des Académies & Sociétés Royales de Londres, de Berlin, de Montpellier, de Lyon, & de l'Académie de l'Institut de Bologne.
A GENEVE,
Chez les FRERES CRAMER & CL. PHILIBERT.
M D C C L.

La page titre du livre de Gabriel Cramer

Le mot « déterminant » est introduit pour la première fois par Gauss en 1801 dans une étude sur les expressions de la forme $ax^2 + 2bxy + cy^2$ pour « déterminer » les propriétés de ce genre d'expression du second degré. Pour comprendre la signification du mot dans ce contexte, pensez au discriminant $b^2 - 4ac$ de la forme générale de l'équation du second degré. Ce discriminant est en quelque sorte un déterminant. Il détermine, selon sa valeur dans la formule de résolution de la racine de l'équation, la nature, réelle ou imaginaire, de ces racines. Cependant, le mot « déterminant » prend véritablement son sens actuel dans un article du mathématicien français Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) publié en 1815. Cauchy utilise la notation a_{ij}, mais il n'emploie pas encore le mot « matrice » ; il parle plutôt de « tableau ». Il étudie les mineurs et les adjointes. Plusieurs résultats présentés dans le chapitre 3 ont été publiés pour la première fois dans cet article de 1815. Cauchy y expose l'essentiel de la théorie des déterminants dans sa forme actuelle. En 1844, **Arthur Cayley** (1821-1895) introduira la notation $|A|$ pour le déterminant du tableau A. Pourtant, comme on l'a vu dans le chapitre 1, ce n'est que dans la seconde moitié du XIX^{e} siècle qu'on étudiera les tableaux pour eux-mêmes.

C'est dans le contexte où les tableaux de nombres n'ont d'intérêt que pour le calcul de déterminants que le mot « matrice » apparaît. En 1850, l'Anglais James Joseph Sylvester (1814-1897) utilise le mot « matrice » plutôt que « tableau de nombres » car, en anglais, *matrix* signifie « ce dont une chose provient ». C'est un peu comme un moule duquel sort un objet. Comme le déterminant est calculé à partir d'un tableau, ce tableau est la matrice du déterminant. Une fois cette constatation faite, il devient naturel, pédagogiquement, de considérer d'abord les matrices, puis de voir comment on en extrait le déterminant, inversant ainsi l'ordre historique.

Exercices préliminaires

1. a) Donner un exemple d'une matrice $A_{3\times 3}$

i) triangulaire supérieure ;

ii) triangulaire inférieure ;

iii) symétrique ;

iv) antisymétrique.

b) Déterminer la transposée des matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & 7 & 6 & 2 \\ -5 & -1 & 3 & 8 \\ -2 & 9 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

2. Transformer sous la forme $AX = B$ les systèmes d'équations linéaires suivants et les résoudre par la méthode de Gauss.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ 5x - y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 5y = a \\ 7x + 3y = b \end{cases}$

3. Soit le système d'équations $\begin{cases} ax + by = f \\ cx + dy = g \end{cases}$.

a) Résoudre ce système par la méthode de Gauss dans le cas où $(ad - bc) \neq 0$.

b) Si $(ad - bc) = 0$, déterminer le nombre de solutions.

4. Effectuer les opérations suivantes.

a) $3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ b) $4\left[(-1)^{i+j}\right]_{3\times 3}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

5. a) Compléter : Deux matrices carrées M et P d'ordre n sont l'inverse l'une de l'autre si _____.

b) Parmi les matrices suivantes, déterminer celles qui sont l'inverse l'une de l'autre.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -36 \\ -5 & -16 & 84 \\ 4 & 8 & -48 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \text{ et } E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Déterminer la valeur des constantes a, b, c et d si :

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ et $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{17} & a \\ b & \frac{3}{17} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. Représenter et identifier les courbes définies par les équations suivantes.

a) $x^2 - 2x - y - 3 = 0$

b) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 4 = 0$

c) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 0$

d) $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

3.1 Déterminant d'une matrice carrée

Objectifs d'apprentissage

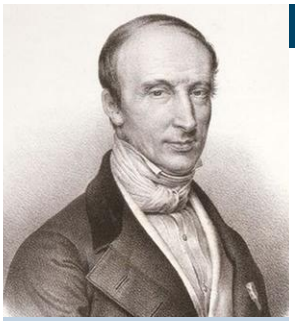
À la fin de cette section, l'étudiant pourra calculer le déterminant d'une matrice carrée.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de donner la définition d'un mineur ;
- de calculer un mineur ;
- de donner la définition d'un cofacteur ;
- de calculer un cofacteur ;
- de déterminer la matrice des cofacteurs ;
- de donner la définition du déterminant d'une matrice carrée ;
- de calculer le déterminant d'une matrice carrée.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$



Augustin-Louis Cauchy
(1789-1857)

IL Y A ENVIRON 200 ANS...

Le mot «déterminant», dans le sens mathématique actuel, est introduit en 1815 par le mathématicien français **Augustin-Louis Cauchy**. Ce dernier fut l'un des grands mathématiciens du XIX^e siècle. Sa vie n'en fut pas moins parfois très difficile. Né l'année même du début de la Révolution française, il devient un catholique convaincu réfractaire à tout mouvement politique anticlérical. Il se réjouit de la restauration de la monarchie après la chute de Napoléon en 1815, mais lorsqu'une nouvelle révolution provoque la fuite du roi en juillet 1830, il s'exile pour ne pas prêter serment d'allégeance au nouveau pouvoir. Il laisse alors derrière lui tous les honneurs que lui avait valus son talent de mathématicien, une place à l'Académie des sciences et son poste à l'École polytechnique et au Collège de France.

3

Nous allons introduire la notion de déterminant d'une matrice carrée en résolvant de façon générale des systèmes d'équations linéaires où le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations.

Ensuite, dans les sections suivantes, nous utiliserons le déterminant d'une matrice carrée pour établir si la matrice est inversible et pour trouver son inverse, s'il y a lieu. Nous utiliserons également des déterminants pour résoudre certains systèmes d'équations linéaires.

Système d'équation linéaire d'une équation à une variable

Soit le système d'équation $a_{11}x_1 = b_1$, où $a_{11} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $b_1 \in \mathbb{R}$,

que nous pouvons écrire sous la forme matricielle $AX = B$ de la façon suivante.

$$[a_{11}]\,[x_1] = [b_1]$$

En résolvant le système $a_{11}x_1 = b_1$, nous obtenons $x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$, car $a_{11} \neq 0$.

L'expression a_{11} du dénominateur s'appelle le déterminant de la matrice A, où $A = [a_{11}]$.

Ainsi, nous avons la définition suivante.

DÉFINITION 3.1

Soit $A = [a_{11}]$, où $a_{11} \in \mathbb{R}$, une matrice d'ordre 1.

Le **déterminant** de la matrice A, noté dét A, est défini par

$$\text{dét } A = a_{11}.$$

De façon générale, le déterminant d'une matrice carrée A d'ordre n est noté dét A.

Déterminant d'une matrice d'ordre 1

Exemple 1 Calculons le déterminant des matrices $A = [3]$, $B = [-7]$ et $C = [0]$.

$$\text{dét } A = 3$$

$$\text{dét } B = -7$$

$$\text{dét } C = 0$$

Système d'équations linéaires de deux équations à deux variables

Soit le système d'équations

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases} \quad \text{où } a_{ij} \text{ et } b_i \in \mathbb{R}, \text{ et } a_{11} \neq 0$$

que nous pouvons écrire sous la forme matricielle $AX = B$ de la façon suivante.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Résolvons ce système par la méthode de Gauss.

Méthode de Gauss

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) & (a_{11}b_2 - b_1a_{21}) \end{array}\right] \qquad a_{11}L_2 - a_{21}L_1 \to L_2$$

Ainsi, $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$

donc, $$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \text{ si } (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \neq 0.$$

En substituant cette valeur dans (1), nous obtenons

$$a_{11}x_1 + a_{12}\left(\frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\right) = b_1$$

$$a_{11}x_1 = b_1 - \frac{a_{12}a_{11}b_2 - a_{12}b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$a_{11}x_1 = \frac{b_1a_{11}a_{22} - b_1a_{12}a_{21} - a_{12}a_{11}b_2 + a_{12}b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$a_{11}x_1 = \frac{a_{11}(b_1a_{22} - a_{12}b_2)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad (\text{car } a_{11} \neq 0)$$

Nous constatons que le dénominateur de x_1 est identique à celui de x_2.

L'expression $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ du dénominateur s'appelle le déterminant de la matrice A, où $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Ainsi, nous avons la définition suivante.

DÉFINITION 3.2

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, où $a_{ij} \in \mathbb{R}$, une matrice d'ordre 2.

Le **déterminant** de la matrice A est défini par

$$\text{dét } A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

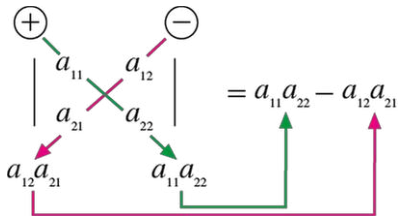
Ainsi, le déterminant d'une matrice 2×2 est obtenu par la multiplication des éléments de la diagonale principale de laquelle est soustrait le produit des éléments de la diagonale secondaire.

Deuxième notation d'un déterminant

Le déterminant de la matrice A, où $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, est également noté $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Ainsi, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

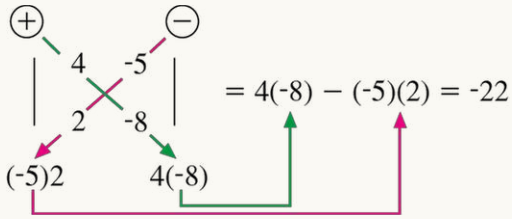
Voici un moyen visuel pour retenir la formule du déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2.



Remarque : La seconde notation n'est pas utilisée pour des matrices d'ordre 1, pour éviter la confusion avec la notation de valeur absolue.

Déterminant d'une matrice d'ordre 2

Exemple 1 Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$. Calculons $\det A$ et $\det B$.



d'où $\det A = -22$

$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 12 & -6 \end{vmatrix} = 4(-6) - (-2)12 = 0$

d'où $\det B = 0$

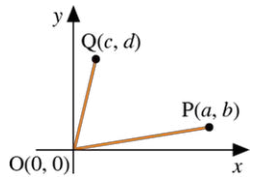
Exercices de compréhension 3.1

1. Calculer les déterminants suivants.

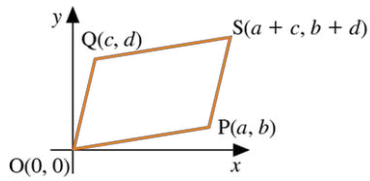
a) $\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

Interprétation géométrique des déterminants 2×2

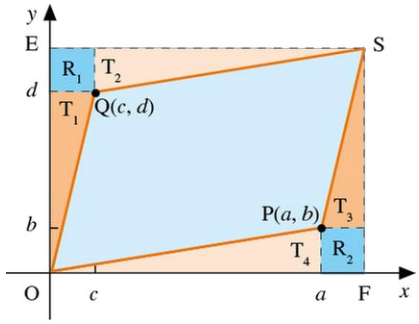
Soit les points P(a, b) et Q(c, d), et les segments de droite reliant ces points à l'origine O$(0, 0)$.



Complétons le parallélogramme OQSP, où S est le point S$(a + c, b + d)$.



Calculons l'aire du parallélogramme OQSP en calculant l'aire du rectangle OESF et en soustrayant l'aire des rectangles R_1 et R_2, de même que celle des triangles T_1, T_2, T_3 et T_4.



Soit A_1 = Aire T_1 = Aire T_3

A_2 = Aire T_2 = Aire T_4

A_3 = Aire R_1 = Aire R_2. Ainsi,

$$\begin{aligned}\text{Aire OQSP} &= \text{Aire OESF} - 2A_1 - 2A_2 - 2A_3\\ &= (a + c)(b + d) - 2\left(\frac{cd}{2}\right) - 2\left(\frac{ab}{2}\right) - 2cb\\ &= ab + ad + cb + cd - cd - ab - 2cb\\ &= ad - cb\end{aligned}$$

L'aire du parallélogramme ci-dessus correspond donc à $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, c'est-à-dire au dét M, où $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

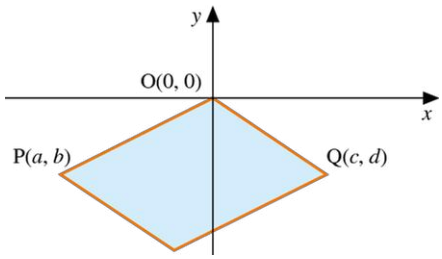
De façon générale, nous admettons que, peu importe la position des points P(a, b) et Q(c, d) dans le plan cartésien, le calcul de $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ permet d'obtenir, à un signe près, l'aire du parallélogramme et l'aire du triangle engendrés par les segments de droite $\overline{OP}$ et $\overline{OQ}$. Il suffit alors de calculer la valeur absolue du déterminant obtenu.

Aire d'un parallélogramme

Valeur absolue du dét M

Ainsi, l'aire A_p du parallélogramme ci-contre est donnée par

$$A_p = |\text{dét } M|, \text{ où } M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

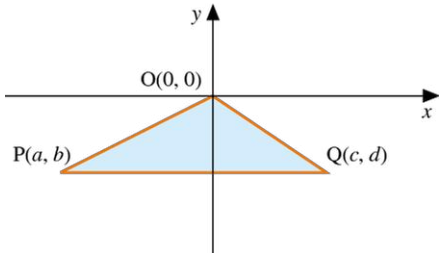


Aire d'un triangle

Valeur absolue du dét M

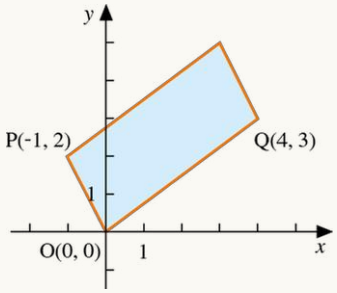
Ainsi, l'aire A_t du triangle ci-contre est donnée par

$$A_t = \frac{1}{2}|\text{dét } M|, \text{ où } M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$



Exemple 1 Soit les points P(-1, 2), Q(4, 3), R(2, -3) et S(-4, 1).

a) Représentons le parallélogramme engendré par les segments de droite $\overline{OP}$ et $\overline{OQ}$ et calculons l'aire A_p de ce parallélogramme.



Soit $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, ainsi

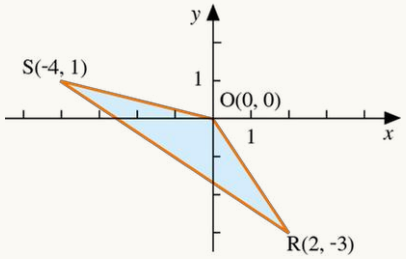
$$\begin{aligned} \text{dét } M &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)3 - 2(4) \\ &= -11 \end{aligned}$$

Valeur absolue du dét M

$$\begin{aligned} A_p &= |\text{dét } M| \\ &= |-11| \end{aligned}$$

d'où $A_p = 11$ u^2.

b) Représentons le triangle engendré par les segments de droite $\overline{OR}$ et $\overline{OS}$ et calculons l'aire A_t de ce triangle.



Soit $M = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, ainsi

$$\begin{aligned} \text{dét } M &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(1) - (-3)(-4) \\ &= -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_t &= \frac{1}{2}|\text{dét } M| \\ &= \frac{1}{2}|-10| \end{aligned}$$

d'où $A_t = 5$ u^2.

Système d'équations linéaires de trois équations à trois variables

Soit le système d'équations

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & (3) \end{cases} \quad \text{où } a_{ij} \text{ et } b_i \in \mathbb{R} \text{ et } a_{11} \neq 0,$$

que nous pouvons écrire sous la forme matricielle $AX = B$ de la façon suivante.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Résolvons ce système par la méthode de Gauss.

Méthode de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) & (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) & (a_{11}b_2 - a_{21}b_1) \\ 0 & (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) & (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) & (a_{11}b_3 - a_{31}b_1) \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} a_{11}L_2 - a_{21}L_1 \to L_2 \\ a_{11}L_3 - a_{31}L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) & (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) & (a_{11}b_2 - a_{21}b_1) \\ 0 & 0 & \mathrm{D} & \mathrm{D}_3 \end{array}\right]$$

$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})L_3 - (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})L_2 \to L_3$, si $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \neq 0$

où $\mathrm{D} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

et $\mathrm{D}_3 = a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}b_1 - a_{32}b_2a_{11} - b_3a_{21}a_{12}$

Ainsi, $x_3 = \dfrac{\mathrm{D}_3}{\mathrm{D}}$ si $\mathrm{D} \neq 0$.

En faisant les substitutions appropriées, nous trouvons $x_2 = \dfrac{\mathrm{D}_2}{\mathrm{D}}$ et $x_1 = \dfrac{\mathrm{D}_1}{\mathrm{D}}$

où $\mathrm{D}_2 = a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{31}b_2a_{13} - b_3a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}b_1$

et $\mathrm{D}_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_3a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}b_1 - a_{33}b_2a_{12}$

Nous constatons que l'expression D,

où $\mathrm{D} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$,

se retrouve au dénominateur de x_1, x_2 et x_3.

De façon générale, nous avons la définition suivante.

DÉFINITION 3.3

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, où $a_{ij} \in \mathbb{R}$, une matrice d'ordre 3.

Le **déterminant** de la matrice A est défini par

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Le déterminant de A, où $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, est également noté $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Il n'est pas nécessaire de mémoriser la formule

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

En effet, il est possible de regrouper les termes du déterminant de la matrice A de façon à retrouver des expressions égales à des déterminants de matrices carrées d'ordre 2.

Plusieurs regroupements différents des termes du dét A peuvent être effectués. Par exemple, si nous regroupons les termes de façon à pouvoir factoriser

- les éléments de la première ligne, nous obtenons

$$\begin{aligned}\text{dét } A &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{33}a_{21} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}\\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}), \text{ ainsi}\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$\text{dét } A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}}^{} \quad \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}}^{} \quad \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}}^{}$$

(développé selon les éléments de la première ligne de A)

- les éléments de la deuxième ligne, nous obtenons

$$\begin{aligned}\text{dét } A &= -a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{23}a_{12}a_{31}\\ &= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}), \text{ ainsi}\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$\text{dét } A = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

(développé selon les éléments de la deuxième ligne de A)

- les éléments de la troisième colonne, nous obtenons

$$\begin{aligned}\text{dét } A &= a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{23}a_{12}a_{31} + a_{33}a_{11}a_{22} - a_{33}a_{12}a_{21}\\ &= a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \text{ ainsi}\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$\text{dét } A = a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

(développé selon les éléments de la troisième colonne de A)

Nous constatons que, en regroupant les termes d'une façon différente, nous n'obtenons pas nécessairement les mêmes déterminants de matrices carrées d'ordre 2.

Cependant, la valeur numérique du déterminant de la matrice A est toujours la même.

Déterminant d'une matrice d'ordre 3

Exemple 1 Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5\\ -4 & 0 & -1\\ 5 & 9 & 8\end{bmatrix}$. Calculons dét A

a) selon le développement des éléments de la première ligne ;

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5\\ -4 & 0 & -1\\ 5 & 9 & 8\end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & -1\\ 9 & 8\end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -4 & -1\\ 5 & 8\end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} -4 & 0\\ 5 & 9\end{vmatrix}$$

$$= 3(0(8) - (-1)(9)) + 2(-4(8) - (-1)(5)) - 5(-4(9) - 0(5))$$

$$= 3(9) + 2(-27) - 5(-36)$$
$$= 153$$

b) selon le développement des éléments de la deuxième ligne ;

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -4 & 0 & -1 \\ 5 & 9 & 8 \end{vmatrix} = -(-4)\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$$
$$= 4(-2(8) - (-5)9) + 0(3(8) - (-5)(5)) + 1(3(9) - (-2)5)$$
$$= 4(29) + 0(49) + 1(37)$$
$$= 153$$

c) selon le développement des éléments de la troisième colonne.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -4 & 0 & -1 \\ 5 & 9 & 8 \end{vmatrix} = (-5)\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -5(-4(9) - 0(5)) + 1(3(9) - (-2)5) + 8(3(0) - (-2)(-4))$$
$$= -5(-36) + 1(37) + 8(-8)$$
$$= 153$$

Il y a environ 200 ans...

L'année 1815 se révèle une année difficile pour les Français qui affichent leurs idées politiques. En avril 1814, l'empereur Napoléon Ier est déporté à l'île d'Elbe. Le 1er mars de l'année suivante, il revient en France et déloge le roi Louis XVIII, qui avait rétabli la monarchie l'année précédente. Mais le 18 juin, les armées napoléoniennes sont défaites à Waterloo, signalant ainsi le retour de Louis XVIII au pouvoir. À l'automne 1815, **Pierre Sarrus** (1798-1861), alors âgé de 17 ans, veut devenir professeur de mathématiques. Cependant, le maire de sa ville natale signale aux autorités que Sarrus est « un jeune homme auteur et propagateur de chansons séditieuses, outrageantes pour le roi et la famille royale ». En 1821, Sarrus obtient son doctorat en sciences. Il fait carrière principalement à l'Université de Strasbourg, à partir de 1829. La règle qui porte son nom ne constitue qu'un entrefilet dans l'ensemble de ses publications qui, en général, abordent des questions de physique.

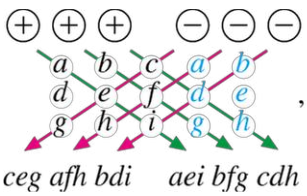
La méthode suivante, appelée méthode de Sarrus, permet de calculer uniquement des déterminants de matrices carrées d'ordre 3.

Cette méthode consiste à récrire les deux premières colonnes de A,

Matrice d'ordre 3

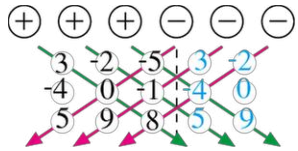
où $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, comme l'illustre le schéma ci-dessous, et à effectuer la somme des produits des éléments selon chaque flèche, en tenant compte des signes.

Méthode de Sarrus (1833)



, d'où $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

Recalculons le déterminant de la matrice A de l'exemple 1 précédent en utilisant la méthode de Sarrus.



$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -4 & 0 & -1 \\ 5 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 3(0)(8) + (-2)(-1)5 + (-5)(-4)9 - (-5)(0)5 - 3(-1)(9) - (-2)(-4)8$$

$$= 0 + 10 + 180 + 0 + 27 - 64$$

$$= 153$$

Exercices de compréhension 3.1

2. Calculer le déterminant des matrices suivantes.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Mineur, cofacteur et déterminant

DÉFINITION 3.4

Soit la matrice $A_{m \times n}$. Une **sous-matrice** de A est une matrice obtenue en supprimant un nombre quelconque de lignes ou de colonnes de A.

Exemple 1 Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & -5 \\ 5 & 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) En supprimant la première ligne et la troisième colonne de A,

c'est-à-dire $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & -5 \\ 5 & 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, nous obtenons la sous-matrice $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

b) En supprimant la troisième ligne, et la première et la quatrième colonne de A,

c'est-à-dire $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & -5 \\ 5 & 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, nous obtenons la sous-matrice $A_2 = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) En supprimant la première et la troisième ligne de B,

c'est-à-dire $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, nous obtenons la sous-matrice $B_1 = [\,0 \;\; 7\,]$

DÉFINITION 3.5

Le **mineur** d'un élément a_{ij}, noté M_{ij}, d'une matrice carrée A d'ordre n, où $n \geq 2$, est le déterminant de la sous-matrice obtenue en enlevant la i-ième ligne et la j-ième colonne de la matrice A.

Exemple 2 Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & -4 \\ 5 & -3 & 6 & 9 \\ -2 & 1 & 5 & 8 \\ -6 & 7 & 0 & -8 \end{bmatrix}$.

a) Déterminons le mineur de a_{11}, c'est-à-dire M_{11}.

Le mineur M_{11} de a_{11} est le déterminant de la sous-matrice obtenue en enlevant la première ligne et la première colonne de A.

De $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, nous obtenons $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$

b) Déterminons le mineur de a_{12}, c'est-à-dire M_{12}.

Le mineur M_{12} de a_{12} est le déterminant de la sous-matrice obtenue en enlevant la première ligne et la deuxième colonne de A.

De $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, nous obtenons $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$

c) Calculons M_{32} et M_{23} de B.

De $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, nous obtenons $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 1(6) - 3(-4) = 18$

De $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, nous obtenons $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1(8) - 2(7) = -6$

d) Calculons M_{32} de C.

De $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & -4 \\ 5 & -3 & 6 & 9 \\ -2 & 1 & 5 & 8 \\ -6 & 7 & 0 & -8 \end{bmatrix}$,

nous obtenons $M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -4 \\ 5 & 6 & 9 \\ -6 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ -6 & -8 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix}$

$= 3(-48) + 5(14) - 4(36)$

$= -218$

DÉFINITION 3.6

1) Le **cofacteur** d'un élément a_{ij} d'une matrice carrée A d'ordre n, où $n \geq 2$, est égal au produit de $(-1)^{i+j}$ par le mineur de cet élément.

   Le cofacteur de l'élément a_{ij} est noté C_{ij}. Ainsi, $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

2) La **matrice des cofacteurs** des éléments d'une matrice carrée A d'ordre n, où $n \geq 2$, notée Cof A, est la matrice obtenue en remplaçant chaque élément de la matrice A par son cofacteur. Ainsi,

$$\text{Cof } A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}, \text{ où } C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Exemple 3 Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & -3 \\ -2 & 6 & -8 \end{bmatrix}$.

a) Calculons les cofacteurs C_{12}, C_{21} et C_{33} de A.

De $\begin{bmatrix} 4 & \mathbf{0} & 7 \\ 5 & \mathbf{1} & -3 \\ -2 & \mathbf{6} & -8 \end{bmatrix}$, nous obtenons $C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = -(-40 - 6) = 46$

De $\begin{bmatrix} 4 & \mathbf{0} & 7 \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & -3 \\ -2 & \mathbf{6} & -8 \end{bmatrix}$, nous obtenons $C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -(0 - 42) = 42$

De $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & -3 \\ -2 & 6 & \mathbf{-8} \end{bmatrix}$, nous obtenons $C_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = (+1)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (4 - 0) = 4$

b) Déterminons la matrice des cofacteurs de A, c'est-à-dire Cof A.

$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

$$\text{Cof } A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}M_{11} & (-1)^{1+2}M_{12} & (-1)^{1+3}M_{13} \\ (-1)^{2+1}M_{21} & (-1)^{2+2}M_{22} & (-1)^{2+3}M_{23} \\ (-1)^{3+1}M_{31} & (-1)^{3+2}M_{32} & (-1)^{3+3}M_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

d'où Cof $A = \begin{bmatrix} 10 & 46 & 32 \\ 42 & -18 & -24 \\ -7 & 47 & 4 \end{bmatrix}$ (en calculant les déterminants)

Remarque : Sachant que $(-1)^{i+j} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i+j) \text{ est un nombre pair} \\ -1 & \text{si } (i+j) \text{ est un nombre impair} \end{cases}$

nous pouvons construire la matrice des signes de $(-1)^{i+j}$ de la façon suivante

Matrice 3×3 | Matrice 4×4 | Matrice $n \times n$

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

pour déterminer le signe à placer devant chaque mineur dans la matrice des cofacteurs.

3

Exercices de compréhension 3.1

3. Déterminer la matrice des cofacteurs des matrices suivantes.

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Avant d'énoncer le théorème suivant, rappelons que nous avons déjà développé le déterminant de la matrice carrée A d'ordre 3 selon les éléments de la première ligne.

En exprimant ce déterminant en fonction des mineurs et des cofacteurs des éléments de la première ligne, nous avons

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$\text{dét } A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\text{dét } A = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} \quad \text{(définition 3.5)}$$

$$\text{dét } A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \quad \text{(définition 3.6)}$$

$$\text{dét } A = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}C_{1j}$$

Nous admettons le théorème suivant sans démonstration.

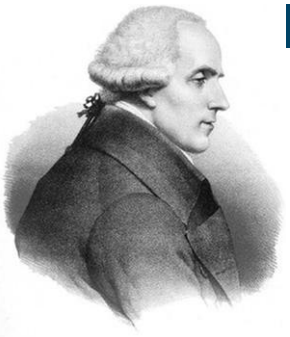
THÉORÈME 3.1

Si A est une matrice carrée d'ordre n, où $n \geq 2$, alors toutes les sommes suivantes,

$a_{k1}C_{k1} + a_{k2}C_{k2} + \ldots + a_{kn}C_{kn}$ pour un k quelconque de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et

$a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \ldots + a_{nk}C_{nk}$ pour un k quelconque de $\{1, 2, \ldots, n\}$,

sont identiques.



Pierre Simon de Laplace (1749-1827)

Il y a environ 200 ans...

Né au milieu du XVIII^e siècle, le siècle des Lumières, **Pierre Simon de Laplace** est le témoin de nombreux bouleversements politiques. Toutefois, par son génie mathématique et son aisance sociale, il sait passer au travers de ces changements sans trop d'inconvénients. Ayant fortement impressionné d'Alembert, celui-ci le prend sous son aile. Ainsi, Laplace est élu à l'Académie des sciences en 1773, à l'âge de 23 ans. Digne disciple de Newton, il résout essentiellement la question de la stabilité du système solaire. Son *Traité de mécanique céleste*, publié en cinq tomes entre 1799 et 1825 marque profondément les mathématiques et la physique du XIX^e siècle. Le traitement des erreurs d'observations en astronomie l'amène à s'intéresser aux probabilités et aux statistiques. Il synthétise ses travaux dans son magistral *Théorie analytique des probabilités*, publié en 1812, dans lequel il applique sa théorie aux assurances, à la démographie et à la théorie des décisions.

DÉFINITION 3.7 Formules de Laplace

Le **déterminant** d'une matrice carrée $A_{n \times n}$, où $n \geq 2$, est défini ainsi :

$$\det A = a_{k1}C_{k1} + a_{k2}C_{k2} + \ldots + a_{kn}C_{kn} \quad \text{(développé selon les éléments de la ligne } k\text{)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{kj}C_{kj} \text{ pour un } k \text{ quelconque de } \{1, 2, \ldots, n\}$$

ou

$$\det A = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \ldots + a_{nk}C_{nk} \quad \text{(développé selon les éléments de la colonne } k\text{)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ik}C_{ik} \text{ pour un } k \text{ quelconque de } \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Remarque : Le théorème 3.1 et la définition 3.7 impliquent que chaque matrice carrée admet un et un seul déterminant, c'est-à-dire que nous pouvons le calculer en le développant selon n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne.

De plus, la définition 3.7 précédente, qui présente les formules de Laplace, permet de ramener le calcul du déterminant d'une matrice carrée d'ordre n au calcul de n déterminants de matrices carrées d'ordre $(n - 1)$.

Exemple 4 Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 3 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Calculons le déterminant de la matrice A.

Développons selon les éléments de la deuxième ligne.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 3 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 8C_{21} + 3C_{22} + (-5)C_{23}$$

$$= 8(-1)^{2+1}M_{21} + 3(-1)^{2+2}M_{22} + (-5)(-1)^{2+3}M_{23}$$

$$= -8\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -8(2) + 3(22) + 5(14)$$

$$= 120$$

Remarque : Le calcul de certains déterminants peut devenir long et fastidieux. Puisque nous pouvons calculer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n selon n'importe quelle ligne ou colonne, il est donc préférable de choisir la ligne ou la colonne contenant le plus de zéros. Ce choix réduira le nombre de déterminants de matrices carrées d'ordre $(n - 1)$ à calculer.

Exemple 5 Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Calculons dét A en développant selon les éléments de la troisième colonne parce que celle-ci contient le plus de zéros.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2C_{13} + 0C_{23} + (-4)C_{33} + 0C_{43}$$

$$= 2(-1)^{1+3}M_{13} + 0(-1)^{2+3}M_{23} + (-4)(-1)^{3+3}M_{33} + 0(-1)^{4+3}M_{43}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 9 & 8 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 9 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) - 4\left(2\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 2(1(-4 - 6) + 4(9 - 16)) - 4(2(-18 - 48) + 3(-2 - 32))$$

$$= 2(-38) - 4(-234)$$

$$= 860$$

Remarque : Nous constatons que, pour évaluer le déterminant d'une matrice $A_{n \times n}$, nous devons calculer des déterminants $(n - 1) \times (n - 1)$.
Puis, pour évaluer chacun de ces déterminants $(n - 1) \times (n - 1)$, nous devons calculer des déterminants $(n - 2) \times (n - 2)$, et ainsi de suite.

Exemple 6 Calculons, à l'aide de Maple, le déterminant de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{7} & \frac{-3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-4}{7} & \frac{3}{11} \\ \frac{-5}{3} & \frac{-8}{5} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}.$$

Les éléments sont entrés sous la forme fractionnaire.

```
with(LinearAlgebra):
A := Matrix([[1/3, 2/7, -3/5], [2/5, -4/7, 3/11], [-5/3, -8/5, 2/9]]):
Determinant(A);
```

$$\frac{234742}{259875}$$

La réponse est donnée sous la forme fractionnaire.

On ajoute un point à la suite d'un nombre. Par exemple, $\frac{1.}{3}$.

```
with(LinearAlgebra):
A := Matrix([[1./3, 2/7, -3/5], [2/5, -4/7, 3/11], [-5/3, -8/5, 2/9]]):
Determinant(A);
```

$$0.903288119$$

La réponse est donnée sous la forme décimale.

Un élément est donné sous la forme décimale. Par exemple, -0,6.

```
with(LinearAlgebra):
A := Matrix([[1/3, 2/7, -0.6], [2/5, -4/7, 3/11], [-5/3, -8/5, 2/9]]):
Determinant(A);
```

$$0.903288119$$

La réponse est donnée sous la forme décimale.

3

EXERCICES 3.1

1. Calculer le déterminant des matrices suivantes.

a) $A = [\,8\,]$ b) $B = [\,-5\,]$

c) $C = [\,0\,]$ d) $E = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

e) $F = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ f) $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

g) $H = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ h) $J = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

2. Soit les points B(2, 1), C(-4, 4), D(-4, -2) et E(4, -2). Représenter et calculer l'aire

a) A_1 du parallélogramme engendré par les segments de droite $\overline{OB}$ et $\overline{OE}$;

b) A_2 du parallélogramme engendré par les segments de droite $\overline{OB}$ et $\overline{OD}$;

c) A_3 du triangle OBC.

3. Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer :

i) a_{11}, M_{11} et C_{11} ii) a_{12}, M_{12} et C_{12}

iii) a_{21}, M_{21} et C_{21} iv) a_{22}, M_{22} et C_{22}

b) Déterminer :

i) Cof A ii) $(\text{Cof } A)^T$

4. Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 8 \\ 5 & -7 & 9 \end{bmatrix}$.

Déterminer :

a) a_{11}, M_{11} et C_{11} b) a_{12}, M_{12} et C_{12}

c) a_{22}, M_{22} et C_{22} d) a_{32}, M_{32} et C_{32}

5. Soit $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 3 & 8 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & -1 & 0 \\ 8 & 9 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

Déterminer les cofacteurs suivants en laissant votre réponse sous la forme d'un déterminant.

a) C_{23} b) C_{44}

6. Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 3 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & -3 \\ 4 & 7 & -5 & 6 \\ 3 & 8 & 10 & 9 \end{bmatrix}$.

a) Calculer dét A selon

i) la deuxième ligne ;

ii) la troisième colonne ;

iii) par la méthode de Sarrus.

b) Calculer le cofacteur C_{12} de la matrice B.

7. Évaluer les déterminants suivants.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 13 & 23 & 44 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \\ 5 & 7 & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 & 8 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 9 & 0 & -5 & 9 \\ 12 & 0 & 12 & 8 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & -8 \\ 13 & 4 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 9 & 2 & -7 \\ 3 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & -6 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} 0 & 7 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 1 \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} 0{,}5 & -4{,}2 & 2 & 5{,}3 & 6 \\ 9{,}2 & 10 & 8{,}3 & -1{,}3 & 2{,}5 \\ -4 & 3 & -7 & 6 & 11 \\ -2{,}5 & 8{,}1 & 7{,}5 & 6{,}7 & 3{,}2 \\ 3 & 7{,}2 & 8{,}9 & 5{,}3 & -2{,}7 \end{vmatrix}$

8. Déterminer les valeurs de x telles que :

a) $\begin{vmatrix} x & x \\ 5 & x-2 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 \\ 2+2x & 2 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} = -9$

d) $\begin{vmatrix} x-1 & 5 & -4 \\ 0 & x-2 & 7 \\ 0 & 0 & x+3 \end{vmatrix} = 0$

9. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -8 \\ -3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

a) Calculer dét A.

b) Calculer dét A^{T}.

c) Comparer les deux réponses.

10. Soit $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 15 & -10 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \end{bmatrix}$.

a) i) Calculer dét A.

ii) Exprimer $A(\mathrm{Cof}\, A)^{\mathrm{T}}$ sous la forme $kI_{2\times 2}$.

b) i) Calculer dét B.

ii) Exprimer $B(\mathrm{Cof}\, B)^{\mathrm{T}}$ sous la forme $kI_{2\times 2}$.

c) i) Calculer dét C.

ii) Exprimer $C(\mathrm{Cof}\, C)^{\mathrm{T}}$ sous la forme $kI_{3\times 3}$.

11. Démontrer que :

a) i) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$

ii) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a+x & b \\ c+y & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ y & d \end{vmatrix}$

12. Soit $k \in \mathbb{R}$. Exprimer :

a) $\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix}$ en fonction de $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ en fonction de $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

13. Soit $A_{3\times 3}$, une matrice antisymétrique. Démontrer que dét $(A_{3\times 3}) = 0$.

3.2 Théorèmes relatifs aux déterminants

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra utiliser certains théorèmes relatifs aux déterminants.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure
- d'énoncer certains théorèmes relatifs aux déterminants ;
- de démontrer certains théorèmes relatifs aux déterminants ;
- de calculer le déterminant d'une matrice carrée à l'aide de théorèmes.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{vmatrix} = aehj$$

Dans cette section, nous énoncerons quelques théorèmes sur les déterminants de matrices carrées, où les éléments sont des nombres réels. Ces théorèmes, dont certains seront démontrés, permettront à l'étudiant d'évaluer des déterminants en réduisant les calculs.

3

Déterminants de matrices carrées particulières

THÉORÈME 3.2

Si A est une matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments d'une colonne (ou d'une ligne) sont des zéros, alors

$$\det A = 0.$$

Preuve

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, une matrice $A_{n \times n}$ dont tous les éléments de la j-ième colonne sont des zéros.

En calculant $\det A$ développé selon les éléments de la colonne contenant uniquement des zéros, nous obtenons

$$\det A = 0C_{1j} + 0C_{2j} + 0C_{3j} + \dots + 0C_{nj} = 0$$

La preuve est analogue lorsque tous les éléments d'une ligne sont des zéros.

THÉORÈME 3.3

Si A est une matrice carrée d'ordre n triangulaire supérieure (ou triangulaire inférieure), alors

$$\det A = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \dots a_{nn}, \text{ que l'on peut noter } \det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

La preuve est laissée à l'étudiant (*voir le problème de synthèse n° 35, page 180*).

Ainsi, le déterminant d'une matrice carrée triangulaire supérieure (ou triangulaire inférieure) est égal au produit des éléments de la diagonale principale.

Exemple 1

Si $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 7 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, alors $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 7 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 4(-2)(1)(3)(5) = -120$

Exercices de compréhension 3.2

1. Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -8 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 5 \end{bmatrix}$.

THÉORÈME 3.4

Si I est la matrice identité d'ordre n, alors dét $I = 1$.

Preuve

Soit $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$, la matrice identité $I_{n \times n}$.

Nous avons dét $I_n = (1)(1)(1) \dots (1)$ (théorème 3.3)

d'où dét $I = 1$.

Déterminants de matrices carrées

De façon générale, pour une matrice A d'ordre n, le développement du déterminant de A^T selon la k-ième colonne est identique au développement du déterminant de A selon la k-ième ligne.

Exemple 1 Calculons dét A et dét A^T et comparons les résultats pour la matrice A suivante.

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, ainsi $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\text{dét } A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -82$$

$$\text{dét } A^T = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -82$$

Ainsi, dét A^T = dét A

Énonçons maintenant le théorème suivant que nous acceptons sans démonstration.

THÉORÈME 3.5

Le déterminant de la transposée d'une matrice carrée $A_{n \times n}$ est égal au déterminant de la matrice $A_{n \times n}$, c'est-à-dire

$$\det A^{\mathrm{T}} = \det A.$$

Remarque : Le théorème 3.5 nous permet d'affirmer que, pour calculer un déterminant, tous les théorèmes relatifs aux opérations sur les colonnes sont également valables pour les mêmes opérations sur les lignes.

Exemple 2 Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 5$, alors $\begin{vmatrix} a & 1 & 4 \\ b & 2 & 5 \\ c & 3 & 6 \end{vmatrix} = 5$ (théorème 3.5)

THÉORÈME 3.6

Si une matrice carrée B est obtenue d'une matrice carrée A d'ordre n en multipliant tous les éléments d'une colonne (ou d'une ligne) de A par k, où $k \in \mathbb{R}$, alors

$$\det B = k \det A.$$

Preuve

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & ka_{1r} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & ka_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & ka_{nr} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

En évaluant $\det B$ développé selon les éléments de la r-ième colonne,

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{i=1}^{n} ka_{ir}C_{ir} && \text{(définition 3.7)} \\ &= k\sum_{i=1}^{n} a_{ir}C_{ir} && \text{(propriété des sommations)} \\ &= k \det A && \text{(définition 3.7)} \end{aligned}$$

Exemple 3

a) Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 5$, alors

$$\begin{vmatrix} -7a & -7b & -7c \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{(théorème 3.6)}$$

$$= -7(5)$$

$$= -35$$

b) Si $\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 3 & 5 & b \\ -6 & 1 & c \end{vmatrix} = 71$ et si $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ a & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7$, alors

i) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 3 & a \\ \frac{3}{2} & 5 & b \\ -3 & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(1) & 3 & a \\ \frac{1}{2}(3) & 5 & b \\ \frac{1}{2}(-6) & 1 & c \end{vmatrix}$ (en factorisant $(1/2)$ de la première colonne, notée C_1)

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 3 & 5 & b \\ -6 & 1 & c \end{vmatrix} = 71$

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 3 & 5 & b \\ -6 & 1 & c \end{vmatrix}$ (théorème 3.6)

$= \frac{1}{2}(71)$

$= 35{,}5$

ii) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ a & 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(2) & 2(3) & 2(-1) & 2(0) \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ a & 9 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (en factorisant 2 de la première ligne, notée L_1)

$= 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ a & 9 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (théorème 3.6)

$= 2\begin{vmatrix} 2 & 3(1) & -1 & 0 \\ 1 & 3(-1) & 0 & 1 \\ 2 & 3(1) & -1 & -2 \\ a & 3(3) & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (en factorisant 3 de la deuxième colonne, notée C_2)

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ a & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7$

$= 2(3)\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ a & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (théorème 3.6)

$= 6(7)$

$= 42$

Exercices de compréhension 3.2

2. Sachant que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$, évaluer $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{vmatrix}$.

THÉORÈME 3.7

Si A est une matrice carrée d'ordre n et si $k \in \mathbb{R}$, alors

$$\det(kA) = k^n \det A.$$

La preuve est laissée à l'étudiant (*voir le problème de synthèse n° 36, page 180*).

Exemple 4 Sachant que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -5$, évaluons $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$.

Puisque $\begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 2A$, où $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} = \text{dét } (2A)$$

$$= 2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \qquad \text{(théorème 3.7)}$$

$$= 8(-5)$$

$$= -40$$

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -5$

3

THÉORÈME 3.8

Si une matrice carrée B d'ordre n est obtenue d'une matrice carrée A d'ordre n en permutant deux colonnes (ou deux lignes) consécutives, alors

$$\text{dét } B = -\text{dét } A.$$

Preuve

Soit les matrices A et B suivantes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1(r+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2(r+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} & a_{n(r+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(r+1)} & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(r+1)} & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(r+1)} & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Colonne r de A — Colonne $(r+1)$ de A — Colonne r de B — Colonne $(r+1)$ de B

En évaluant dét B développé selon les éléments de la $(r+1)$-ième colonne,

$$\text{dét } B = \sum_{i=1}^{n} a_{ir} C_{i(r+1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ir}(-1)^{i+(r+1)} M_{i(r+1)} \qquad \text{(définition 3.7, où } C_{i(r+1)} \text{ est le cofacteur de } a_{ir} \text{ dans la matrice } B\text{)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ir}(-1)^{(i+r)}(-1) M_{i(r+1)}$$

$$= (-1) \sum_{i=1}^{n} a_{ir}(-1)^{(i+r)} M_{i(r+1)}$$

Cependant, comme $M_{i(r+1)}$ dans B est identique à M_{ir} dans A,

$$\begin{aligned}\text{dét } B &= (-1)\sum_{i=1}^{n} a_{ir}(-1)^{(i+r)}M_{ir}\\ &= (-1)\sum_{i=1}^{n} a_{ir}C_{ir} \qquad \text{(où } C_{ir} \text{ est le cofacteur de } a_{ir} \text{ dans la matrice } A\text{)}\\ &= (-1)\ \text{dét } A \qquad \text{(définition de dét } A\text{)}\end{aligned}$$

d'où dét B = -dét A

Exemple 5 Soit $A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Calculons dét A et dét B, et comparons les résultats.

$$\text{dét } A = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -4(-3) - 5(2) = 2$$

$$\text{dét } B = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 2(5) - (-3)(-4) = -2$$

d'où dét B = -dét A

b) Calculons dét C en ramenant C à une forme triangulaire supérieure.

$$\text{dét } C = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{(théorème 3.8, par la permutation des colonnes 2 et 3, notée } C_2 \leftrightarrow C_3\text{)}$$

$$= -(4)(2)(-3)(3) \qquad \text{(théorème 3.3)}$$

$$= 72$$

En généralisant le théorème 3.8, nous obtenons le théorème suivant que nous acceptons sans démonstration.

THÉORÈME 3.9

Si une matrice carrée B d'ordre n est obtenue d'une matrice carrée A d'ordre n en permutant deux colonnes (ou deux lignes) quelconques, alors

$$\text{dét } B = -\text{dét } A.$$

Exemple 6 Calculons le déterminant suivant à l'aide des théorèmes 3.9 et 3.3.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ (théorème 3.9, par la permutation des lignes 1 et 3, notée $L_1 \leftrightarrow L_3$)

$$= (-)(-) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$ (théorème 3.9, $L_2 \leftrightarrow L_4$)

$$= (1)(2)(3)(4)$$ (théorème 3.3)

$$= 24$$

3

THÉORÈME 3.10

Si une matrice carrée A d'ordre n possède deux colonnes (ou deux lignes) identiques, alors

$$\det A = 0.$$

Preuve

Soit A, une matrice carrée d'ordre n ayant deux colonnes identiques, et soit B, la matrice obtenue de la matrice A en permutant ces deux colonnes identiques.

D'une part, en permutant les deux colonnes identiques, nous avons $B = A$, ainsi $\det B = \det A$. (équation 1)

D'autre part, par le théorème 3.9, nous avons $\det B = -\det A$. (équation 2)

Des deux équations précédentes, nous avons $\det A = -\det A$, ainsi $2 \det A = 0$ d'où $\det A = 0$.

Exemple 7 Calculons les déterminants suivants.

a) $$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$ (théorème 3.10, $L_1 = L_3$)

b) $$\begin{vmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$ (théorème 3.10, $C_2 = C_3$)

c) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -8 \\ -1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & -16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4\,(2) \\ -1 & 5 & -4\,(1) \\ 4 & 3 & -4\,(4) \end{vmatrix}$$

$$= -4 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$ (théorème 3.6)

$$= -4(0)$$ (théorème 3.10, $C_1 = C_3$)

$$= 0$$

THÉORÈME 3.11

Si une matrice carrée A d'ordre n possède une colonne (ou une ligne) dont les éléments sont un multiple des éléments d'une autre colonne (ou d'une autre ligne), alors

$$\text{dét } A = 0.$$

La preuve est laissée à l'étudiant.

Exemple 8 Calculons les déterminants suivants.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$ (théorème 3.11, $C_3 = 2C_1$)

b) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 5 & -5 & 10 & -15 \end{vmatrix} = 0$ (théorème 3.11, $L_4 = 5L_2$)

THÉORÈME 3.12

Soit $A = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \dots & a_{ir} & \dots & p_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & a_{nr} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \dots & b_{ir} & \dots & p_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & b_{nr} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$,

deux matrices carrées d'ordre n, dont tous les éléments sont identiques, sauf possiblement ceux de la colonne r.

Si P est la matrice définie par $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & (a_{1r} + b_{1r}) & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{i1} & p_{i2} & \dots & (a_{ir} + b_{ir}) & \dots & p_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & (a_{nr} + b_{nr}) & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$, alors

$$\text{dét } P = \text{dét } A + \text{dét } B.$$

Preuve

En évaluant dét P développé selon les éléments de la r-ième colonne,

$$\text{dét } P = \sum_{i=1}^{n} (a_{ir} + b_{ir})C_{ir} \qquad \text{(définition 3.7)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_{ir}C_{ir} + b_{ir}C_{ir}) \qquad \text{(distributivité)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ir}C_{ir} + \sum_{i=1}^{n} b_{ir}C_{ir} \qquad \text{(propriété des sommations)}$$

$$= \text{dét } A + \text{dét } B \qquad \text{(définition 3.7, car les cofacteurs } C_{ir} \text{ sont les mêmes dans les matrices } A, B \text{ et } P)$$

d'où dét P = dét A + dét B

Exemple 9 Sachant que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 8$ et que $\begin{vmatrix} a & x & c \\ d & y & f \\ g & z & i \end{vmatrix} = -15$,

calculons $\begin{vmatrix} a & (b+x) & c \\ d & (e+y) & f \\ g & (h+z) & i \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} a & (b+x) & c \\ d & (e+y) & f \\ g & (h+z) & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x & c \\ d & y & f \\ g & z & i \end{vmatrix} \qquad \text{(théorème 3.12)}$$

$$= 8 + (-15)$$

$$= -7$$

THÉORÈME 3.13

Si une matrice carrée B d'ordre n est obtenue d'une matrice carrée A d'ordre n en additionnant respectivement aux éléments d'une colonne (ou d'une ligne) de A un multiple des éléments d'une autre colonne (ou d'une autre ligne) de A, alors

$$\text{dét } B = \text{dét } A.$$

Preuve

Soit les matrices A et B suivantes, et $k \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & (a_{1s} + ka_{1r}) & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & (a_{ns} + ka_{nr}) & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

Colonne r de A — Colonne s de A — Colonne r de B — Colonne s de B

$$\text{dét } B = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & (a_{1s} + ka_{1r}) & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & (a_{ns} + ka_{nr}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & ka_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & ka_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(théorème 3.12)

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & ka_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & ka_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \text{dét } A + 0 \qquad \text{(théorème 3.11)}$$

$$= \text{dét } A$$

d'où $\text{dét } B = \text{dét } A$

Exemple 10 Évaluons les déterminants suivants en utilisant des théorèmes relatifs aux déterminants dans le but de faciliter les calculs.

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & -6 \\ -2 & 1 & 7 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$C_4 + 2C_1 \to C_4$

$(-2 + 2(1) = 0)$
$(-6 + 2(3) = 0)$
$(4 + 2(-2) = 0)$
$(1 + 2(-1) = -1)$

(théorème 3.13)

$$= (1)(2)(7)(-1) \quad \text{(théorème 3.3)}$$
$$= -14$$

b)
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 & -8 \\ 3 & 7 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 6 & -3 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 6 & -3 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(en factorisant 2 de L_1, théorème 3.6)

$$= 2(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(en factorisant 3 de L_3, théorème 3.6)

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & -11 & 4 & -4 & 22 \end{vmatrix}$$

$L_2 - 3L_1 \to L_2$
$L_3 - L_1 \to L_3$
$L_4 - L_1 \to L_4$
$L_5 - 5L_1 \to L_5$

(théorème 3.13)

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -8 & 22 \\ 0 & 0 & 48 & -48 & 209 \end{vmatrix}$$

$L_4 + L_2 \to L_4$
$L_5 + 11L_2 \to L_5$

(théorème 3.13)

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 46 \\ 0 & 0 & 0 & 48 & 401 \end{vmatrix}$$

$L_4 + 6L_3 \to L_4$
$L_5 + 48L_3 \to L_5$

(théorème 3.13)

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -151 \end{vmatrix}$$

$L_5 - 12L_4 \to L_5$ (théorème 3.13)

$$= 6(1)(1)(-1)(4)(-151) \quad \text{(théorème 3.3)}$$
$$= 3624$$

c) $\begin{vmatrix} a & (b+c) & c \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 36 & 21 \end{vmatrix}$, sachant que $\begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ b & -2 & 5 \\ c & 3 & 7 \end{vmatrix} = 13$.

$$\begin{vmatrix} a & (b+c) & c \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 36 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 4 & 3 \\ (b+c) & 1 & 36 \\ c & 3 & 21 \end{vmatrix}$$ (théorème 3.5)

$$= \begin{vmatrix} a & 4 & 3 \\ b & -2 & 15 \\ c & 3 & 21 \end{vmatrix}$$ $L_2 - L_3 \rightarrow L_2$ (théorème 3.13)

$$= 3\begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ b & -2 & 5 \\ c & 3 & 7 \end{vmatrix}$$ (en factorisant 3 de C_3, théorème 3.6)

$$= 3(13)$$

$$= 39$$

3 $\begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ b & -2 & 5 \\ c & 3 & 7 \end{vmatrix} = 13$

Énonçons maintenant un théorème que nous acceptons sans démonstration.

THÉORÈME 3.14

Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors

$$\text{dét}\,(AB) = (\text{dét}\,A)(\text{dét}\,B).$$

Exemple 11 Soit $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$, où dét $A = 5$ et dét $B = -3$.

a) Vérifions que dét $(AB) =$ (dét A)(dét B).

Calculons AB et dét (AB).

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$$

ainsi, dét $(AB) = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -15$

d'où dét $(AB) =$ (dét A)(dét B) (car $-15 = 5(-3)$)

dét $(AB) =$ (dét A)(dét B)

b) Calculons $A + B$ et dét $(A + B)$.

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

ainsi, dét $(A + B) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -12$

d'où dét $(A + B) \neq$ dét $A +$ dét B (car $-12 \neq 5 + (-3)$)

dét $(A + B) \neq$ dét $A +$ dét B

Remarque : De façon générale, dét $(A + B) \neq$ dét $A +$ dét B.

THÉORÈME 3.15

Si A est une matrice carrée d'ordre n, alors dét $(A^k) = (\text{dét } A)^k$, où $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Preuve par induction (récurrence)

Preuve

1) Pour $k = 1$, nous avons dét $(A^1) = (\text{dét } A)^1$,

donc le théorème est vérifié pour $k = 1$.

2) Supposons que le théorème est valable pour $k = m$, où $m \in \mathbb{N}$, ainsi dét $(A^m) = (\text{dét } A)^m$. (hypothèse d'induction)

3) Démontrons que le théorème est vérifié pour $k = m + 1$.

$$\begin{aligned}\text{dét } (A^{m+1}) &= \text{dét } (A^m A)\\ &= (\text{dét } A^m)(\text{dét } A) && \text{(théorème 3.14)}\\ &= (\text{dét } A)^m(\text{dét } A) && \text{(hypothèse d'induction)}\\ &= (\text{dét } A)^{m+1}\end{aligned}$$

donc le théorème est vérifié pour $k = m + 1$.

D'où dét $(A^k) = (\text{dét } A)^k$, où $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$

Exemple 12 Sachant que dét $A = 4$, évaluons dét (A^5) et dét (A^{10}).

dét $(A^5) = (\text{dét } A)^5 = 4^5 = 1024$ (théorème 3.15)

dét $(A^{10}) = (\text{dét } A)^{10} = 4^{10} = 1\,048\,576$ (théorème 3.15)

EXERCICES 3.2

1. Sans calculer les déterminants, déterminer si les égalités suivantes sont vraies (V) ou fausses (F) pour $a, b, c, \ldots, z \in \mathbb{R}$. Justifier les réponses.

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 10 \\ 3 & 10 & 6 \\ 2 & -7 & 15 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a & c \\ 2 & 1 & 3 \\ y & x & z \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} a + x & b + y \\ c + z & d + w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ kd & ke & kf \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \\ g & kh & i \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 25 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 25 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + 1 & b + 2 & c + 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ x - 1 & y - 2 & z - 3 \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ a + 1 & b + 2 & c + 3 \end{vmatrix} = 0$

2. Évaluer les déterminants suivants, sachant que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 9 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a & b & x \\ d & e & y \\ g & h & z \end{vmatrix} = -5.$$

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} e & d & f \\ 4b & 4a & 4c \\ h & g & i \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x & b & 2a \\ 3y & 3e & 6d \\ z & h & 2g \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2a & -3g & 5d \\ 2b & -3h & 5e \\ 2c & -3i & 5f \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a-3b & b & c \\ d-3e & e & f \\ g-3h & h & i \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} -a & 3c+x & b \\ -d & 3f+y & e \\ -g & 3i+z & h \end{vmatrix}$

3. Calculer les déterminants suivants en les transformant d'abord sous la forme

$k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 9 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{3}{4} \\ 5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

4. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Calculer AB et $A + B$.

b) Calculer dét A, dét B, dét (AB) et dét $(A + B)$.

c) Comparer dét (AB) avec (dét A)(dét B).

d) Comparer dét $(A + B)$ avec (dét A + dét B).

5. Soit $B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Exprimer $B(\text{Cof } B)^T$ en fonction de dét B et de I.

3.3 Applications reliées au calcul de déterminants

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra résoudre certains problèmes à l'aide du calcul de déterminants.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de déterminer l'ensemble-solution d'un système de n équations linéaires à n inconnues à l'aide de la règle de Cramer ;
- de donner la définition du rang d'une matrice ;
- de déterminer le rang d'une matrice ;
- de déterminer si un système d'équations linéaires est compatible ou incompatible en utilisant la notion de rang ;
- de déterminer la nature de coniques à l'aide de déterminants.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \text{ où } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \text{ et } x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Résolution de systèmes de *n* équations linéaires à *n* inconnues à l'aide de la règle de Cramer



Gabriel Cramer
(1704-1752)

Il y a environ 270 ans...

Gabriel Cramer naît à Genève dans la famille d'un médecin. Il est rapidement remarqué ; à peine âgé de 18 ans, il obtient un doctorat avec une thèse sur la théorie du son. Deux ans plus tard, on lui offre de partager une chaire de mathématiques à l'Académie de Calvin, à Genève. De 1724 à 1726, il voyage, rencontrant les plus grands mathématiciens d'Europe. Sa personnalité avenante l'aide à développer avec chacun des liens cordiaux. Il énonce ce que nous appelons maintenant la règle de Cramer, dans une annexe à son œuvre maîtresse, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (1750). Il utilise cette règle pour déterminer un polynôme du cinquième degré dont le graphe passe par cinq points donnés.

THÉORÈME 3.16 Règle de Cramer

Soit un système de n équations linéaires à n inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \text{ où } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Si dét $A \neq 0$, alors le système d'équations admet une solution unique donnée par

$$x_1 = \frac{\text{dét } A_1}{\text{dét } A}, x_2 = \frac{\text{dét } A_2}{\text{dét } A}, \ldots, x_i = \frac{\text{dét } A_i}{\text{dét } A}, \ldots, x_n = \frac{\text{dét } A_n}{\text{dét } A}, \text{ où}$$

le déterminant du numérateur de la valeur de chaque x_i, noté dét A_i, est obtenu en remplaçant la i-ième colonne du dét A par la colonne des constantes.

Preuve

Exprimons x_i à l'aide de déterminants.

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

car $\begin{cases} b_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ b_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ b_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}x_2 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{22}x_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2}x_2 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{1n}x_n & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{2n}x_n & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nn}x_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ (théorème 3.12)

$$= x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + x_n \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{2n} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ (théorème 3.6)

$$= x_1 \text{ dét } A + x_2(0) + \ldots + x_n(0) \quad \text{(théorème 3.10)}$$

Ainsi, $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\text{dét } A}$. De façon analogue, nous obtenons

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\text{dét } A}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\text{dét } A}, \dots, x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{\text{dét } A}$$

3

Le déterminant du numérateur de la valeur de chaque x_i, noté dét A_i, est obtenu en remplaçant la i-ième colonne du dét A par la colonne des constantes.

D'où $x_1 = \dfrac{\text{dét } A_1}{\text{dét } A}, x_2 = \dfrac{\text{dét } A_2}{\text{dét } A}, x_3 = \dfrac{\text{dét } A_3}{\text{dét } A}, \dots, x_i = \dfrac{\text{dét } A_i}{\text{dét } A}, \dots, x_n = \dfrac{\text{dét } A_n}{\text{dét } A}$

Remarque : La règle de Cramer ne peut pas être utilisée directement pour résoudre un système d'équations linéaires lorsque :

- le nombre d'équations n'est pas égal au nombre d'inconnues ;
- le déterminant de la matrice des coefficients est égal à zéro.

Dans ces cas, l'ensemble-solution peut être déterminé en utilisant une des méthodes étudiées dans le chapitre précédent.

Exemple 1 Résolvons les systèmes suivants à l'aide de la règle de Cramer.

a) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x + 3y + 2z = 5 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$, où $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

En calculant dét A, nous obtenons dét $A = 5$. Puisque dét $A \neq 0$, nous avons

$$x = \frac{\text{dét } A_1}{\text{dét } A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{7}{5};$$

$$y = \frac{\text{dét } A_2}{\text{dét } A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-3}{5};$$

$$z = \frac{\text{dét } A_3}{\text{dét } A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{0}{5}$$

D'où $x = \frac{7}{5}$, $y = \frac{-3}{5}$ et $z = 0$, ainsi E.-S. $= \left\{\left(\frac{7}{5}, \frac{-3}{5}, 0\right)\right\}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + 4y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$, où $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

En calculant dét A, nous obtenons dét $A = 49$. Puisque dét $A \neq 0$, nous avons

$$x = \frac{\text{dét } A_1}{\text{dét } A} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix}}{49} = \frac{0}{49} = 0;$$

$$y = \frac{\text{dét } A_2}{\text{dét } A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{49} = \frac{0}{49} = 0;$$

$$z = \frac{\text{dét } A_3}{\text{dét } A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{49} = \frac{0}{49} = 0$$

Solution triviale

D'où $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, ainsi E.-S. $= \{(0, 0, 0)\}$

c) $\begin{cases} x + 2y - z + 3w = 8 \\ x + 3y + 2z + 4w = 7 \\ x + 2y + 3z - 2w = -6 \\ x + 2y - z + 5w = 12 \end{cases}$, où $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}$

En calculant dét A, nous obtenons dét $A = 8$. Puisque dét $A \neq 0$, nous avons

$$x = \frac{\text{dét } A_1}{\text{dét } A} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & 2 & 4 \\ -6 & 2 & 3 & -2 \\ 12 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{8} = \frac{8}{8}; \quad y = \frac{\text{dét } A_2}{\text{dét } A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 1 & -6 & 3 & -2 \\ 1 & 12 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{8} = \frac{0}{8};$$

$$z = \frac{\text{dét } A_3}{\text{dét } A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 12 & 5 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-8}{8}; \quad w = \frac{\text{dét } A_4}{\text{dét } A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & 12 \end{vmatrix}}{8} = \frac{16}{8}$$

D'où $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$ et $w = 2$, ainsi E.-S. $= \{(1, 0, -1, 2)\}$

Exercices de compréhension 3.3

1. Résoudre le système suivant à l'aide de la règle de Cramer.

$$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ -4x + 5y = 7 \end{cases}$$

Exemple 2 Résolvons le système d'équations suivant par la règle de Cramer en utilisant Maple pour calculer les déterminants appropriés.

$$\begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{y}{2} - 2z = \frac{-2}{5} \\ \frac{2x}{5} + \frac{y}{4} - \frac{4z}{3} = \frac{-7}{30} \\ \frac{x}{7} + \frac{y}{3} + \frac{4z}{5} = \frac{29}{3150} \end{cases}$$

```
with(LinearAlgebra):
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & \frac{-4}{3} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}: \quad A1 := \begin{bmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{-7}{30} & \frac{1}{4} & \frac{-4}{3} \\ \frac{29}{3150} & \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}: \quad A2 := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{5} & -2 \\ \frac{2}{5} & \frac{-7}{30} & \frac{-4}{3} \\ \frac{1}{7} & \frac{29}{3150} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}: \quad A3 := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{-2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{4} & \frac{-7}{30} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & \frac{29}{3150} \end{bmatrix}:$$

```
Determinant(A); Determinant(A1); Determinant(A2); Determinant(A3);
```

$$-\frac{197}{9450}$$

$$-\frac{197}{18900}$$

$$\frac{197}{14175}$$

$$-\frac{197}{47250}$$

```
x:= simplify(Determinant(A1)/Determinant(A)); y:= simplify(Determinant(A2)/Determinant(A)); z:= simplify(Determinant(A3)/Determinant(A));
```

$$x = \frac{1}{2}$$

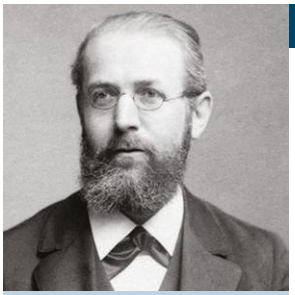
$$y = -\frac{2}{3}$$

$$z = \frac{1}{5}$$

D'où E.-S. $= \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{5}\right)\right\}$

Rang d'une matrice

La notion de rang d'une matrice peut être utilisée pour déterminer si un système d'équations linéaires est compatible ou incompatible.



Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917)

Il y a environ 140 ans...

Ce n'est que vers le troisième quart du XIX^e siècle que les mathématiciens formalisent en un tout relativement cohérent ce que nous appelons maintenant l'algèbre linéaire. Nous l'avons vu dans la perspective historique de ce chapitre, dès 1815, Cauchy structure ce qui était alors connu sur les déterminants. Mais il faut attendre les années 1860 et 1870 pour que l'étude des solutions possibles d'un système d'équations linéaires ayant plus d'inconnues que d'équations débouche sur une formalisation plus poussée. Dans un article publié en 1878, l'allemand **Ferdinand Georg Frobenius** définit pour la première fois la notion de rang d'un déterminant. Il n'utilise le terme matrice qu'à partir de 1896. Cette notion de rang est intimement liée à la question du nombre de solutions.

DÉFINITION 3.8

1) Le **rang** d'une matrice non nulle $A_{m \times n}$, noté rang (A), est égal à l'ordre de la plus grande sous-matrice carrée dont le déterminant est différent de zéro.

2) Le **rang** d'une matrice nulle $O_{m \times n}$, est égal à zéro, c'est-à-dire rang $(O) = 0$.

Remarque : rang $(A_{m \times n}) \leq \min \{m, n\}$

Pour déterminer le rang d'une matrice, il faut parfois calculer plusieurs déterminants.

Exemple 1 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Déterminons le rang de A.

Étape 1

En calculant d'abord dét A développé selon les éléments de la deuxième ligne de A, nous obtenons

$$\text{dét } A = 0 + 0 - 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -5(0) = 0$$

Puisque dét $A = 0$, alors rang $(A) \neq 3$, donc rang $(A) \leq 2$.

Étape 2

Calculons ensuite le déterminant de sous-matrices carrées d'ordre 2.

En supprimant la première ligne et la troisième colonne de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$,

nous obtenons $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, où $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

Puisque dét $(A_1) = 0$, on ne peut rien conclure.

En supprimant la première ligne et la première colonne de $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$,

nous obtenons $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, où $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$.

Puisque dét $(A_2) \neq 0$, rang $(A) = 2$.

D'où rang $(A) = 2$

b) Déterminons rang (B).

Étape 1

Calculons d'abord dét B.

$$\text{dét } B = 2(-1)(3)(5) = -30 \qquad \text{(théorème 3.3)}$$

Puisque dét $B = -30 \neq 0$, alors rang $(B) = 4$. (car dét $B \neq 0$)

c) Déterminons le rang de C.

rang $(C) = 0$ (définition 3.8, où $C = O_{2 \times 3}$)

Exemple 2 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 13 & 7 & 10 \end{bmatrix}$.

a) Déterminons rang (A) en utilisant la définition 3.8.

Étape 1

Supprimons d'abord deux colonnes de A pour obtenir des sous-matrices carrées d'ordre 3 et calculons le déterminant de ces sous-matrices.

En supprimant les deux dernières colonnes de A, nous obtenons

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 13 \end{bmatrix}, \text{ où dét } A_1 = 0$$

En supprimant les deux premières colonnes de A, nous obtenons

$$A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & -2 \\ 13 & 7 & 10 \end{bmatrix}, \text{ où dét } A_2 = 0$$

L'étudiant peut vérifier que les déterminants des huit autres sous-matrices carrées d'ordre 3, obtenues en supprimant deux colonnes de A, sont égaux à 0.

Ainsi, rang $(A) \neq 3$, donc rang $(A) \leq 2$.

Étape 2

En supprimant les trois dernières colonnes et la troisième ligne de A, nous obtenons

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \text{ où dét } A_3 = -6 \neq 0$$

D'où rang $(A) = 2$ (car dét $A_3 \neq 0$)

b) Déterminons rang (A) à l'aide de Maple.

```
with(LinearAlgebra):
A := Matrix([[1, 2, 5, 3, 4], [1, 2, -4, 0, -2], [2, 4, 13, 7, 10]]):
Rank(A);
```

```
2
```

Le théorème suivant, que nous acceptons sans démonstration, permet également de déterminer le rang d'une matrice.

THÉORÈME 3.17

Si A est une matrice quelconque et A_i est une matrice échelonnée obtenue de A à l'aide d'opérations élémentaires, alors

le rang de A est égal au nombre de lignes non nulles de A_i, c'est-à-dire que

le rang de A est égal au nombre de pivots de A_i.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 13 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Exemple 3 Déterminons le rang de la matrice A de l'exemple 2 précédent à l'aide du théorème 3.17.

Transformons la matrice A en une matrice échelonnée équivalente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 13 & 7 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 3L_3 + L_2 \to L_3$$

Façon 1

Le nombre de lignes non nulles de la matrice échelonnée équivalente à A est 2.

D'où rang $(A) = 2$

Façon 2

Cette matrice échelonnée possède deux pivots, soit 1 et -9.

D'où rang $(A) = 2$

Exercices de compréhension 3.3

2. Calculer le rang de la matrice suivante, à l'aide du théorème 3.17.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le nombre de solutions d'un système d'équations linéaires, écrit sous la forme matricielle $AX = B$, peut être déterminé en comparant le rang de la matrice des coefficients, rang (A), le rang de la matrice augmentée, rang $(A \vdots B)$, et le nombre n d'inconnues.

Nous acceptons le théorème suivant sans démonstration.

THÉORÈME 3.18 Théorème de Kronecker[1]

Un système de m équations linéaires à n inconnues est compatible, c'est-à-dire qu'il admet au moins une solution, si et seulement si le rang de la matrice des coefficients est égal au rang de la matrice augmentée.

De façon générale, pour un système de m équations linéaires à n inconnues que nous pouvons écrire sous la forme matricielle $AX = B$, nous avons le tableau suivant.

Système compatible		Système incompatible
Si rang (A) = rang $(A \vdots B)$		Si rang (A) < rang $(A \vdots B)$
lorsque rang $(A) = n$	lorsque rang $(A) < n$	
solution unique	infinité de solutions	aucune solution

En particulier, pour un système d'équations linéaires de trois équations à trois inconnues, nous obtenons, après avoir échelonné la matrice augmentée, une des

1. Du nom du mathématicien allemand Leopold Kronecker (1823-1891).

situations suivantes, où les éléments ■ sont différents de zéro et les éléments □ sont des nombres réels.

Système compatible		Système incompatible
$\begin{bmatrix} ■ & □ & □ & □ \\ 0 & ■ & □ & □ \\ 0 & 0 & ■ & □ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ■ & □ & □ & □ \\ 0 & ■ & □ & □ \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ■ & □ & □ & □ \\ 0 & ■ & □ & □ \\ 0 & 0 & 0 & ■ \end{bmatrix}$
rang $(A) = 3$ et	rang $(A) = 2$ et	rang $(A) = 2$ et
rang $(A \vdots B) = 3$, d'où	rang $(A \vdots B) = 2$, d'où	rang $(A \vdots B) = 3$, d'où
rang $(A) =$ rang $(A \vdots B) = 3$	rang $(A) =$ rang $(A \vdots B) < 3$	rang $(A) <$ rang $(A \vdots B)$
solution unique	infinité de solutions	aucune solution

Exemple 4 Soit le système S $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ -x + y - 3z = -6 \\ 2x + 3y - 4z = 1 \end{cases}$.

À l'aide de la notion de rang, déterminons si le système est compatible ou incompatible.

Déterminons rang (A).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 + L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 3L_3 + L_2 \to L_3$$

Le nombre de pivots est 2,

donc rang $(A) = 2$. (théorème 3.17)

Déterminons rang $(A \vdots B)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & -6 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{matrix} L_2 + L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \quad 3L_3 + L_2 \to L_3$$

Le nombre de pivots est 3,

donc rang $(A \vdots B) = 3$. (théorème 3.17)

D'où le système est incompatible. (car rang $(A) <$ rang $(A \vdots B)$)

Exemple 5 Soit le système S $\begin{cases} 3x + 4y + 7z = -3 \\ 6x + 8y - 2z = 4 \end{cases}$.

a) Déterminons si le système est compatible.

Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & -2 \end{bmatrix}$, la matrice des coefficients.

En supprimant la troisième colonne, nous avons

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \text{ où } \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

En supprimant la deuxième colonne, nous avons

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}, \text{ où } \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -48 \neq 0,$$

donc rang $(A) = 2$. (définition 3.8)

Soit $(A \vdots B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 7 & -3 \\ 6 & 8 & -2 & 4 \end{array}\right]$, la matrice augmentée.

En supprimant la deuxième et la troisième colonne, nous avons

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, \text{ où } \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 30 \neq 0,$$

donc rang $(A \vdots B) = 2$.

D'où le système est compatible. (théorème 3.18, où rang (A) = rang $(A \vdots B)$)

b) Résolvons le système d'équations.

Puisque rang (A) = rang $(A \vdots B) = 2 < 3$, où 3 est le nombre d'inconnues, nous avons une infinité de solutions.

Du système $\begin{cases} 3x + 4y + 7z = -3 \\ 6x + 8y - 2z = 4 \end{cases}$

puisque $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, nous pouvons poser $y = s$, où $s \in \mathbb{R}$, et nous obtenons le nouveau système

$$\begin{cases} 3x + 7z = -3 - 4s \\ 6x - 2z = 4 - 8s \end{cases}$$

que nous pouvons résoudre par la règle de Cramer.

Règle de Cramer

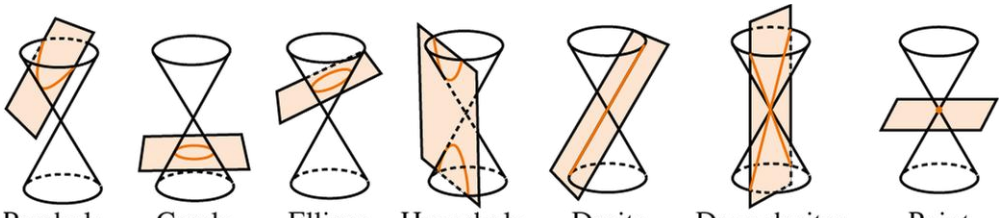
$$x = \frac{\begin{vmatrix} (-3 - 4s) & 7 \\ (4 - 8s) & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{(-3 - 4s)(-2) - 7(4 - 8s)}{-48} = \frac{11 - 32s}{24}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & (-3 - 4s) \\ 6 & (4 - 8s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{3(4 - 8s) - (-3 - 4s)6}{-48} = \frac{-5}{8}$$

D'où E.-S. $= \left\{ \frac{11 - 32s}{24}, s, \frac{-5}{8} \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$

Étude de sections coniques

Lorsqu'un cône circulaire droit à deux nappes est coupé par un plan, l'intersection du cône et du plan définit un lieu géométrique (ensemble de points satisfaisant certaines conditions algébriques ou géométriques) appelé « section conique ». Voici quelques exemples de section conique.



Le calcul de déterminants peut être utilisé pour identifier la nature des sections coniques définies par l'équation générale suivante :

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, où A, B, C, D, E et $F \in \mathbb{R}$.

Le tableau suivant, que nous acceptons sans démonstration, permet de déterminer la nature de la conique selon la valeur des déterminants Δ et δ, où

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} \text{ et } \delta = \begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix},$$

A, B, C, D, E et F sont les coefficients de l'équation générale.

$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}$

$\delta = \begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix}$

Valeur de Δ	valeur de δ	Nature de la conique	Exemples $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
$\Delta = 0$	$\delta < 0$	Deux droites non parallèles	$2x^2 + 3xy + y^2 + 3x + 2y + 1 = 0$ $A = 2, B = 3, C = 1, D = 3, E = 2$ et $F = 1$ $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$; $\delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$
	$\delta = 0$	Deux droites parallèles distinctes	$-x^2 + 2xy - y^2 - 3x + 3y - 2 = 0$ $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$; $\delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$
		Deux droites parallèles confondues	$x^2 - 2xy + y^2 = 0$ $\Delta = 0$; $\delta = 0$
		Ensemble vide	$y^2 + 1 = 0$ $\Delta = 0$; $\delta = 0$
	$\delta > 0$	Point	$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$ $\Delta = 0$; $\delta = 4$
$\Delta \neq 0$	$\delta < 0$	Hyperbole	$8x^2 + 24xy + y^2 + x + 2y + 1 = 0$ $\Delta = -1058$; $\delta = -544$
	$\delta = 0$	Parabole	$x^2 - 2x - y + 5 = 0$ $\Delta = -2$; $\delta = 0$
	$\delta > 0$	Ellipse	$x^2 + 4y^2 - 4x - 24y + 39 = 0$ $\Delta = -32$; $\delta = 16$
		Cercle	$x^2 + y^2 + 4x - 4y - 3 = 0$ $\Delta = -88$; $\delta = 4$
		Point	$x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$ $\Delta = -16$; $\delta = 8$
		Ensemble vide	$x^2 + y^2 + 1 = 0$ $\Delta = 8$; $\delta = 4$

Remarque : La représentation graphique des courbes définies dans le tableau précédent dont la nature n'est pas l'ensemble vide est demandée à l'exercice récapitulatif n° 9 (*voir page 171*).

Exercices de compréhension 3.3

3. Soit $2x^2 + xy + y^2 - 4 = 0$.

a) Calculer Δ et δ.

b) Déterminer la nature possible de la conique.



Exemple 1 Soit $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$.

a) Déterminons la nature de cette conique.

Puisque $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = -2$, $E = 4$ et $F = -3$, nous avons

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4, \text{ donc } \Delta = 0 \text{ et } \delta < 0$$

d'où nous avons deux droites non parallèles.

b) Représentons graphiquement ces deux droites.

Déterminons quelques points de l'équation.

Si $x = 0$, nous avons $-y^2 + 4y - 3 = 0$

$$(y - 1)(-y + 3) = 0,$$

ainsi $y = 1$ ou $y = 3$

donc P(0, 1) et Q(0, 3) sont deux points satisfaisant l'équation.

Si $y = 0$, nous avons $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$(x + 1)(x - 3) = 0,$$

ainsi $x = -1$ ou $x = 3$

donc R(-1, 0) et S(3, 0) sont deux autres points satisfaisant l'équation.

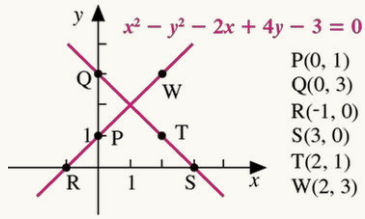
Si $x = 2$, nous avons $-y^2 + 4y - 3 = 0$

$$(y - 1)(-y + 3) = 0,$$

ainsi $y = 1$ ou $y = 3$

donc T(2, 1) et W(2, 3) sont deux autres points satisfaisant l'équation.

D'où nous avons les deux droites non parallèles ci-dessous.



Exemple 2 Déterminons la nature des coniques suivantes.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

Calculons Δ et δ, où

$A = 1, B = 0, C = 1, D = -4, E = 2$ et $F = 1$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -32 \text{ et } \delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

donc $\Delta \neq 0$ et $\delta > 0$

Ainsi, nous avons une ellipse, un cercle, un point ou l'ensemble vide.

Transformons l'équation

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$
$$x^2 - 4x + y^2 + 2y = -1$$
$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = -1 + 4 + 1$$
$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

D'où nous avons un cercle de centre P(2, -1) et de rayon 2.

b) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$

$A = 1, B = 0, C = 1, D = -4, E = 2$ et $F = 6$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 8 \text{ et } \delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

donc $\Delta \neq 0$ et $\delta > 0$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$$
$$x^2 - 4x + y^2 + 2y = -6$$
$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = -6 + 4 + 1$$
$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = -1$$

L'équation précedente n'a aucune solution car $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \geq 0, \forall\, x$ et $y \in \mathbb{R}$.

D'où nous avons l'ensemble vide.

EXERCICES 3.3

1. Expliquer pourquoi nous ne pouvons pas utiliser la règle de Cramer pour résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants.

a) $\begin{cases} 3x - 5y + 4w = 1 \\ 2x + y - 3w = 5 \\ x - 2y + w = 7 \\ 2x - 3y + 5w = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + w = 4 \\ y + z = 6 \\ z + w = 7 \end{cases}$

2. Résoudre les systèmes d'équations suivants à l'aide de la règle de Cramer.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 7 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{5} = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y - 3z = 0 \\ 2x + 5y + 4z = 0 \\ -3x - 7y - 5z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2y - 2z = 2{,}5 \\ -2x + y = 0 \\ x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}y + 3z = \frac{41}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{3}z = \frac{13}{2} \\ \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}y + z = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x + 2z = 2 \\ y + 3w = 0 \\ 4z - w = -1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x + 4y + 8z + 16w = 26 \\ 3x + 9y + 27z + 81w = 144 \\ 4x + 16y + 64z + 256w = 468 \end{cases}$

3. Déterminer le rang des matrices suivantes en calculant les déterminants appropriés.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 9 & 4 \end{bmatrix}$ d) $E = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

4. Déterminer le rang des matrices suivantes à l'aide de la matrice échelonnée associée.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 9 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & -4 & 7 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

5. Pour chacun des systèmes d'équations suivants, répondre aux questions ci-après.

a) $\begin{cases} 2x + 3y + 16z = 16 \\ x - 2y - 6z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y + z - 4w = 2 \\ 6x + 3y - z - 4w = 3 \\ 9x + 2y - 8w = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ -x + 3y - z = -2 \\ 3x + 4y - 5z = 3 \\ 2x - 4z = -2 \\ 5y + 2z = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2a + c + 2d = 3b \\ 3a = b + 2c + 3d \\ 4a + 2b = c + 4d \end{cases}$

i) À l'aide de la notion de rang, déterminer si les systèmes précédents sont compatibles ou incompatibles.

ii) Déterminer le nombre de solutions.

iii) Déterminer l'ensemble-solution.

6. **APPLICATION | INVESTISSEMENT**

Audrey investit un montant de 40 000 $ dans trois placements différents. Après une année, le premier placement affiche un rendement de 3,2 % en dividendes et de 1,5 % en intérêts, le deuxième placement montre un rendement de 4,8 % en dividendes, et le troisième placement a un rendement de 4,0 % en intérêts. Sachant que, au total, la somme des dividendes s'élève à 1198,40 $ et que celle des intérêts s'élève à 630,50 $,

a) écrire le système d'équations S correspondant ;

b) déterminer le montant de chacun des placements initiaux à l'aide de la méthode de Cramer.

7. **APPLICATION | NATURE DE CONIQUES**

Déterminer la nature des coniques suivantes et représenter ces coniques.

a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$

b) $xy - y - 2 = 0$

c) $x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y - 4 = 0$

d) $4x^2 + 4xy + y^2 + 20x - 10y = 0$

e) $2x^2 + xy + y^2 - 4 = 0$

3.4 Matrice inverse

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra déterminer l'inverse de certaines matrices carrées.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de donner la définition de l'adjointe d'une matrice carrée ;
- de démontrer certains théorèmes relatifs aux matrices inverses ;
- de déterminer l'inverse d'une matrice carrée ;
- de donner la définition d'une matrice régulière ;
- de donner la définition d'une matrice singulière ;
- de vérifier si une matrice est l'inverse d'une matrice donnée ;
- de démontrer certaines propriétés relatives aux matrices.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

Dans cette section, nous utiliserons le déterminant d'une matrice carrée pour savoir si cette matrice est inversible, puis nous déterminerons l'inverse d'une matrice inversible.

Adjointe et inverse d'une matrice carrée

DÉFINITION 3.9

L'**adjointe** d'une matrice carrée $A_{n \times n}$, où $n \geq 2$, notée adj A, est obtenue en transposant la matrice des cofacteurs de A. Ainsi,

$$\text{adj } A = (\text{Cof } A)^T.$$

Dans l'exemple suivant, nous utiliserons l'adjointe d'une matrice carrée A inversible pour déterminer l'inverse A^{-1} de la matrice A.

Exemple 1 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Déterminons adj A.

$$\text{adj } A = (\text{Cof } A)^T \qquad \text{(définition 3.9)}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T$$

$$\text{d'où adj } A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Calculons $A(\text{adj } A)$.

$$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

c) Exprimons $A(\text{adj } A)$ en fonction de $I_{3 \times 3}$.

$$A(\text{adj } A) = 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(voir b))}$$

$$\text{d'où } A(\text{adj } A) = 5\, I_{3 \times 3}$$

d) Calculons dét A.

$$\text{dét } A = 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(0) - 0(5) + 1(5) = 5$$

$$\text{d'où dét } A = 5$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

e) Déterminons A^{-1} en multipliant par $\frac{1}{5}$ les deux membres de l'équation suivante.

$$A(\text{adj } A) = 5\, I_{3\times 3}$$

$$\frac{1}{5}A(\text{adj } A) = \frac{1}{5}(5\, I_{3\times 3})$$

$$A\left(\frac{1}{5}\text{adj } A\right) = I_{3\times 3}, \text{ ainsi } A^{-1} = \frac{1}{5}\text{adj } A \qquad (\text{car } AA^{-1} = I)$$

$$\text{d'où } A^{-1} = \frac{1}{\text{dét } A}\text{adj } A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

L'étudiant peut vérifier que

$AA^{-1} = I_{3\times 3}$
$A^{-1}A = I_{3\times 3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous démontrons le théorème suivant dans le cas de matrices carrées d'ordre 3. Dans le cas général de matrices carrées d'ordre n, la preuve est demandée au problème de synthèse nº 37, à la page 180.

THÉORÈME 3.19

Si A est une matrice carrée d'ordre n, où $n \geq 2$, telle que dét $A \neq 0$, alors la matrice inverse de A, notée A^{-1}, existe et

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét } A}\text{adj } A.$$

Preuve

Nous démontrons le théorème dans le cas où $n = 3$.

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. En effectuant $A(\text{adj } A)$, nous obtenons

$$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

D'une part, $x_{11} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$= \det A$ (définition du dét A développé selon les éléments de la première ligne)

De même, nous obtenons $x_{22} = \det A$ et $x_{33} = \det A$. (en calculant dét A développé selon les éléments de la deuxième ligne et de la troisième ligne respectivement)

D'autre part, $x_{12} = -a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (selon les éléments de la deuxième ligne)

$= 0$ (car $L_1 = L_2$)

De même, $x_{13} = 0$, $x_{21} = 0$, $x_{23} = 0$, $x_{31} = 0$ et $x_{32} = 0$, car chacune de ces valeurs correspond au déterminant d'une matrice où deux lignes sont identiques.

Ainsi, $A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix} = \det A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\det A)\, I_{3\times 3}$

donc, $A(\text{adj } A) = (\det A)\, I_{3\times 3}$

En multipliant les deux membres de l'équation précédente par $\frac{1}{\det A}$, où dét $A \neq 0$,

nous obtenons $\frac{1}{\det A} A(\text{adj } A) = \frac{1}{\det A}(\det A)\, I_{3\times 3}$

$A\left(\frac{1}{\det A}\text{adj } A\right) = I_{3\times 3}$ (car $kM_{3\times 3}N_{3\times 3} = M_{3\times 3}(kN_{3\times 3})$)

d'où $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj } A$

THÉORÈME 3.20

Une matrice carrée $A_{n\times n}$ est inversible si et seulement si dét $A \neq 0$.

Preuve

($\Rightarrow$) Si A est inversible, alors A^{-1} existe.

Ainsi, $AA^{-1} = I_{n\times n}$ (définition de l'inverse)

$\det(AA^{-1}) = \det I_{n\times n}$

$(\det A)(\det A^{-1}) = 1$ (car dét $(AB) = (\det A)(\det B)$ et dét $I_{n\times n} = 1$)

d'où dét $A \neq 0$

($\Leftarrow$) Si dét $A \neq 0$, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj } A$ (théorème 3.19)

d'où A^{-1} existe.

DÉFINITION 3.10

1) Une matrice carrée $A_{n\times n}$ est **régulière** lorsqu'elle est inversible, c'est-à-dire lorsque dét $A \neq 0$.

2) Une matrice carrée $A_{n\times n}$ est **singulière** lorsqu'elle n'est pas inversible, c'est-à-dire lorsque dét $A = 0$.

Remarque : Lorsque nous voulons déterminer l'inverse d'une matrice carrée $A_{n\times n}$, il est préférable de calculer *a priori* son déterminant.

Dans le cas où dét $A = 0$, la matrice A n'a pas d'inverse.

Dans le cas où dét $A \neq 0$, nous trouvons adj A et nous obtenons $A^{-1} = \dfrac{1}{\text{dét } A}\,\text{adj } A$ (théorème 3.19) ; cet inverse est unique (théorème 1.2).

Exercice de compréhension 3.4

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$.

a) Calculer dét A.
b) Déterminer adj A.
c) Déterminer A^{-1}.
d) Calculer AA^{-1}.

Exemple 2 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Déterminons si les matrices A, B et C sont régulières ou singulières, et trouvons, si c'est possible, A^{-1}, B^{-1} et C^{-1}.

a) Calculons d'abord dét A.

dét $A = -5$

Puisque dét $A \neq 0$, A est inversible. (théorème 3.20)

D'où la matrice A est régulière. (définition 3.10)

Déterminons ensuite adj A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -4 \\ -3 & -5 & 2 \\ -7 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Théorème 3.19

Puisque $A^{-1} = \dfrac{1}{\text{dét } A}\,\text{adj } A$, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{-5}\begin{bmatrix} 6 & 5 & -4 \\ -3 & -5 & 2 \\ -7 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ (car dét $A = -5$)

d'où $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-6}{5} & -1 & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & 1 & \frac{-2}{5} \\ \frac{7}{5} & 1 & \frac{-3}{5} \end{bmatrix}$

$I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

L'étudiant peut vérifier que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_{3\times 3}$.

b) Calculons d'abord dét B.

dét $B = 0$

Puisque dét $B = 0$, B n'est pas inversible. (théorème 3.20)

D'où la matrice B est singulière. (définition 3.10)

c) Calculons d'abord dét C.

dét $C = 160$

Puisque dét $C \neq 0$, C est inversible. (théorème 3.20)

D'où la matrice C est régulière. (définition 3.10)

Déterminons ensuite partiellement adj C et C^{-1}.

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\text{adj } C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & 4 & 4 & 44 \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

dét $C = 160$

$C^{-1} = \frac{1}{\text{dét } C} \text{adj } C$

$$C^{-1} = \frac{1}{160}\begin{bmatrix} -36 & 4 & 4 & 44 \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}, \text{ donc } C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-9}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{11}{40} \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

Déterminons C^{-1} à l'aide de Maple.

```
with(LinearAlgebra):
C := [[1, 2, 3, 4], [2, 3, 4, 1], [3, 4, 1, 2], [4, 1, 2, 3]]:
MatrixInverse(C);
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{11}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{40} & \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} \\ \frac{11}{40} & -\frac{9}{40} & \frac{1}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix}$$

Propriétés des matrices inverses

Nous allons maintenant énoncer quelques propriétés des matrices.

Si $A_{n\times n}$ et $B_{n\times n}$ sont deux matrices régulières où $n \geq 2$ et $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors nous avons :

Propriété 1 $\quad \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Propriété 2 $\quad (A^{-1})^{-1} = A$

Propriété 3 $\quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Propriété 4 $\quad (A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$

Propriété 5 $\quad (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

Propriété 6 $\quad (kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$

Démontrons les propriétés 1 et 3 précédentes.

PROPRIÉTÉ 1

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Preuve

$$\det (AA^{-1}) = \det I_{n\times n} \quad (\text{car } AA^{-1} = I_{n\times n})$$

$$(\det A)(\det A^{-1}) = 1 \quad (\text{car } \det (AB) = (\det A)(\det B) \text{ et } \det I_{n\times n} = 1)$$

d'où $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

PROPRIÉTÉ 3

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Preuve

Soit $M = (AB)^{-1}$, la matrice inverse de (AB). Déterminons M.

$$M(AB) = I_{n\times n} \quad (\text{définition de l'inverse})$$

$$(MA)B = I_{n\times n} \quad (\text{associativité de la multiplication})$$

$$(MA)BB^{-1} = I_{n\times n}B^{-1} \quad (\text{en multipliant à droite les deux membres de l'équation par } B^{-1})$$

$$(MA)I_{n\times n} = B^{-1} \quad (\text{car } BB^{-1} = I_{n\times n} \text{ et } I_{n\times n} \text{ est l'élément neutre pour la multiplication})$$

$$(MA) = B^{-1} \quad (I_{n\times n} \text{ est l'élément neutre pour la multiplication})$$

$$(MA)A^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (\text{en multipliant à droite les deux membres de l'équation par } A^{-1})$$

$$M(AA^{-1}) = B^{-1}A^{-1} \quad (\text{associativité de la multiplication})$$

$$MI_{n\times n} = B^{-1}A^{-1} \quad (\text{car } AA^{-1} = I_{n\times n})$$

$$M = B^{-1}A^{-1} \quad (I_{n\times n} \text{ est l'élément neutre pour la multiplication})$$

d'où $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $\quad (\text{car } M = (AB)^{-1})$

EXERCICES 3.4

1. Vérifier que les matrices A et B suivantes sont l'inverse l'une de l'autre.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Calculer le déterminant des matrices suivantes, puis trouver la matrice adjointe et la matrice inverse.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Trouver, si c'est possible, l'inverse des matrices suivantes et déterminer si ces matrices sont régulières ou singulières.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -6 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

4. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer A^{-1} et B^{-1}.

b) Déterminer AB et $(AB)^{-1}$.

c) Vérifier que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

5. Déterminer à quelles conditions les matrices suivantes sont inversibles et trouver l'inverse, s'il y a lieu.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 - x & x \\ -x & 1 + x \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 5x - 3 & x + 9 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

d) $E = \begin{bmatrix} 1 - \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 + \sin\theta \end{bmatrix}$

e) $F = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$

f) $G = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ x & -x & 5 \\ 4 + x & -6 - x & 13 \end{bmatrix}$

g) $H = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{bmatrix}$

6. Soit A et B, deux matrices carrées 4×4 telles que dét $A = 4$ et dét $B = -2$. Évaluer les déterminants suivants.

a) dét A^{-1} b) dét B^{-1}

c) dét $(AB)^{-1}$ d) dét $(A^{-1})^{-1}$

e) dét $(B^{-1})^3$ f) dét $(A^3)^{-1}$

g) dét $(A^{-1})^T$ h) dét $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}$

i) dét (A^3B^{-1}) j) dét $((3A)(2B)^{-1})$

7. Soit A et B, deux matrices $n \times n$. Si dét $(AB) = 0$, démontrer qu'au moins une des deux matrices est singulière.

8. Soit $A_{n \times n}$, où $n \geq 2$, une matrice inversible.

a) Démontrer que $A^2 = I_{n \times n}$ si et seulement si $A = A^{-1}$.

b) Démontrer que si $A^2 = I_{n \times n}$, alors dét $A = \pm 1$.

3.5 Applications de la matrice inverse

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra résoudre certains problèmes à l'aide de la matrice inverse.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de déterminer l'ensemble-solution d'un système de n équations linéaires à n inconnues à l'aide de la matrice inverse ;
- d'utiliser une matrice inverse en cryptographie pour décoder des messages encodés à l'aide de matrices ;
- d'utiliser une matrice inverse dans le modèle de Leontief pour déterminer le niveau de production satisfaisant la demande.

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}^{A}\overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}^{X} = \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}^{B}, \text{ où dét } A \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Résolution de systèmes de n équations linéaires à n inconnues à l'aide de la matrice inverse

THÉORÈME 3.21

Soit un système de n équations linéaires à n inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

que nous pouvons écrire sous la forme matricielle $AX = B$, où

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Si dét $A \neq 0$, alors $X = A^{-1}B$.

Preuve

$$AX = B$$

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ (A^{-1} existe car dét $A \neq 0$, théorème 3.20)

$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$ (associativité)

$I_{n\times n}X = A^{-1}B$ (car $A^{-1}A = I_{n\times n}$)

d'où $X = A^{-1}B$ (car $I_{n\times n}X = X$)

Remarque : La méthode de la matrice inverse ne peut pas être utilisée pour résoudre un système d'équations linéaires lorsque

- le nombre d'équations n'est pas égal au nombre d'inconnues ;
- le déterminant de la matrice des coefficients est égal à zéro.

Dans ces cas, l'ensemble-solution peut être déterminé en utilisant une des méthodes étudiées dans le chapitre précédent.

Exemple 1 Résolvons, si c'est possible, les systèmes d'équations linéaires suivants à l'aide de la matrice inverse.

$$S_1\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 15 \\ 4x - z = -1 \end{cases},\quad S_2\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases} \text{ et } S_3\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases}$$

a) En exprimant le système S_1 sous la forme $AX = B$, nous obtenons

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 15 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B}, \text{ où dét } A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 27$$

Puisque dét $A \neq 0$, alors A^{-1} existe. (théorème 3.20)

Déterminons maintenant A^{-1} à l'aide du théorème 3.19.

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét } A}\text{adj } A = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 11 & -5 & 1 \\ 4 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

adj $A = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 4 \\ 2 & -5 & 8 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 11 & -5 & 1 \\ 4 & 8 & -7 \end{bmatrix}$

Déterminons X à l'aide du théorème 3.21.

$$X = A^{-1}B$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}^{X} = \overbrace{\frac{1}{27}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 11 & -5 & 1 \\ 4 & 8 & -7 \end{bmatrix}}^{A^{-1}}\overbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 15 \\ -1 \end{bmatrix}}^{B} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 27 \\ -54 \\ 135 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Donc, $x = 1$, $y = -2$ et $z = 5$.

D'où E.-S. $= \{(1, -2, 5)\}$ (solution unique)

b) En exprimant les systèmes S_2 et S_3 sous la forme $AX = B$, nous obtenons

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}}_{B}, \text{ où } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B}, \text{ où } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Puisque dét $A = 0$, alors A n'est pas inversible.

Ainsi, on ne peut pas appliquer la méthode de la matrice inverse.

Déterminons l'ensemble-solution par la méthode de Gauss.

Méthode de Gauss

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2$

En posant $y = t$, où $t \in \mathbb{R}$,
nous obtenons $x = 5 - 2t$

d'où E.-S. $= \{(5 - 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
(infinité de solutions)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$L_2 - 3L_1 \rightarrow L_2$

d'où E.-S. $= \emptyset$
(aucune solution)

Exercice de compréhension 3.5

1. Résoudre le système d'équations suivant à l'aide de la matrice inverse.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ -9x + 4y = -5 \end{cases}$$

Nous acceptons sans démonstration les conclusions du tableau suivant.

Soit A, la matrice des coefficients d'un système de n équations linéaires à n inconnues.

Système non homogène	**Système homogène**
Si dét $A \neq 0$, nous pouvons utiliser la méthode de la matrice inverse.	
Le système admet une solution unique.	Le système admet la solution unique $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$, c'est-à-dire la solution triviale.
Si dét $A = 0$, nous devons utiliser une des méthodes étudiées dans le chapitre 2.	
Le système admet • soit une infinité de solutions ; • soit aucune solution.	Le système admet une infinité de solutions.

Exemple 2 Résolvons, si c'est possible, les systèmes homogènes d'équations linéaires suivants à l'aide de la matrice inverse.

$$S_1 \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad S_2 \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 4x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

a) En exprimant S_1 sous la forme $AX = B$, nous obtenons

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B}$$

En calculant dét A, nous obtenons dét $A = -28 \neq 0$.

Ainsi, dét $A \neq 0$, le système admet la solution unique $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, c'est-à-dire la solution triviale.

D'où E.-S. $= \{(0, 0, 0)\}$

b) En exprimant S_2 sous la forme $AX = B$, nous obtenons

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B}$$

En calculant dét A, nous obtenons dét $A = 0$,

donc A n'est pas inversible.

Par la méthode de Gauss, nous obtenons

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - 4L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad L_3 - L_2 \to L_3$$

En posant $z = s$, où $s \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$y = \frac{8}{5}s$ et $x = \frac{-1}{5}s$

d'où E.-S. $= \left\{\left(\frac{-s}{5}, \frac{8s}{5}, s\right) \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$ (infinité de solutions)

Exemple 3 Résolvons, par la méthode de la matrice inverse, le système d'équations linéaires suivant en utilisant Maple.

$$S\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}3y - z + 1{,}2w = 1{,}74 \\ -x + 1{,}4y - 0{,}1z + 0{,}2w = -0{,}24 \\ 0{,}3x + 0{,}1y + 5{,}2z - 0{,}7w = -1{,}73 \\ 0{,}9x - 0{,}5y + 2{,}3z - w = -1{,}21 \end{cases}$$

Étape 1

```
with(LinearAlgebra):
eq1 := 2/10 • x + 3/10 • y − z + 12/10 • w = 174/100:
eq2 := -x + 14/10 • y − 1/10 • z + 2/10 • w = -24/100:
eq3 := 3/10 • x + 1/10 • y + 52/10 • z − 7/10 • w = -173/100:
eq4 := 9/10 • x − 5/10 • y + 23/10 • z − w = -121/100:
A := genmatrix([eq1, eq2, eq3, eq4], [x, y, z, w]);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -1 & \frac{6}{5} \\ -1 & \frac{7}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{26}{5} & -\frac{7}{10} \\ \frac{9}{10} & -\frac{1}{2} & \frac{23}{10} & -1 \end{bmatrix}$$

Étape 2

```
C := inverse(A);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{9010}{10049} & \frac{3738}{10049} & -\frac{4792}{10049} & \frac{14914}{10049} \\ \frac{5650}{10049} & \frac{10352}{10049} & -\frac{3808}{10049} & \frac{11516}{10049} \\ \frac{120}{10049} & -\frac{954}{10049} & \frac{2836}{10049} & -\frac{2032}{10049} \\ \frac{5560}{10049} & -\frac{4006}{10049} & \frac{4114}{10049} & -\frac{7058}{10049} \end{bmatrix}$$

```
B := [ 174/100 ]
     [ -24/100 ]
     [ -173/100 ]
     [ -121/100 ]:
multiply(C, B);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

D'où E.-S. $= \left\{\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{5}, \frac{6}{5}\right)\right\}$

Cryptographie

Il est possible d'utiliser une matrice inversible pour encoder et décoder des messages. La première étape consiste à chiffrer le message à l'aide d'une clé de chiffrement, c'est-à-dire en associant à chaque lettre un nombre auquel elle est jumelée.

Par exemple,

Clé de chiffrement

espace	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

constitue une clé de chiffrement.

Ensuite, l'émetteur du message utilise une matrice inversible pour encoder le message chiffré. Puis le destinataire doit utiliser l'inverse de la matrice pour décoder le message envoyé. Finalement, le destinataire se sert de la clé de chiffrement pour déchiffrer le message.

Exemple 1 Le message « jour du dîner » est chiffré comme suit à l'aide de la clé précédente.

J	O	U	R		D	U		D	Î	N	E	R
10	15	21	18	0	4	21	0	4	9	14	5	18

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$

a) Utilisons la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, où A est inversible, car dét $A \neq 0$, pour encoder le message chiffré à l'aide d'un produit de matrices.

Transformons le message chiffré sous la forme d'une matrice B de deux lignes, de façon à ce que le produit matriciel AB soit défini.

Soit $B = \begin{bmatrix} 10 & 21 & 0 & 21 & 4 & 14 & 18 \\ 15 & 18 & 4 & 0 & 9 & 5 & 0 \end{bmatrix}$. (ce 0 a été ajouté pour compléter la matrice B)

Effectuons AB et posons $AB = C$.

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 21 & 0 & 21 & 4 & 14 & 18 \\ 15 & 18 & 4 & 0 & 9 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$A_{2\times 2}B_{2\times 7} = C_{2\times 7}$

$$C = \begin{bmatrix} 45 & 81 & 4 & 63 & 21 & 47 & 54 \\ 80 & 141 & 8 & 105 & 38 & 80 & 120 \end{bmatrix}$$ (en effectuant AB)

Le message codé suivant est donc envoyé au destinataire.

45 80 81 141 4 8 63 105 21 38 47 80 54 120

Le destinataire doit transformer ce message codé en une matrice de deux lignes. Ainsi, il obtient la matrice C.

Il décode le message en effectuant $A^{-1}C$ et utilise ensuite la clé pour le déchiffrer.

b) Déterminons la réponse du destinataire si celui-ci envoie le message chiffré suivant, qui a également été encodé à l'aide de la matrice A précédente.

35 60 67 113 27 45 3 5 48 83 21 38

En transformant cette séquence sous la forme d'une matrice ayant deux lignes, nous obtenons $M = \begin{bmatrix} 35 & 67 & 27 & 3 & 48 & 21 \\ 60 & 113 & 45 & 5 & 83 & 38 \end{bmatrix}$

Trouvons A^{-1}, où $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ et dét $A = 1$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{dét } A} \text{adj } A = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Effectuons $A^{-1}M$ et posons $A^{-1}M = R$.

$$A^{-1}M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 35 & 67 & 27 & 3 & 48 & 21 \\ 60 & 113 & 45 & 5 & 83 & 38 \end{bmatrix}$$

$A^{-1}{}_{2\times 2} M_{2\times 6} = R_{2\times 6}$

$$R = \begin{bmatrix} 10 & 21 & 9 & 1 & 13 & 4 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{(en effectuant } A^{-1}M\text{)}$$

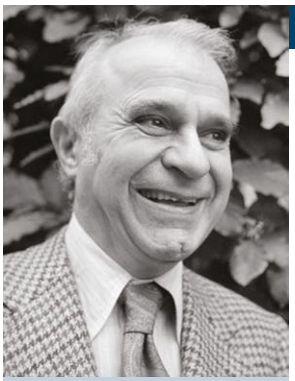
La réponse chiffrée reçue par l'émetteur est donc

10 5 21 4 9 0 1 0 13 9 4 9

En utilisant la clé pour déchiffrer le message,

	10	5	21	4	9	0	1	0	13	9	4	9
nous obtenons	J	E	U	D	I		À		M	I	D	I

Modèle de Leontief



Wassily Leontief (1906-1999)

IL Y A ENVIRON 50 ANS...

Wassily Leontief naît en Allemagne de parents russes. Son père, professeur d'économie, appartient à une vieille famille marchande de Saint-Pétersbourg. À 19 ans, Leontief obtient l'équivalent d'une maîtrise en économie. Mais sous le régime bolchevique en place depuis la révolution de 1917, il n'est pas prudent de promouvoir la liberté académique. Aussi est-il arrêté par la police de la sécurité intérieure. En 1925, pensant qu'il est atteint d'une maladie mortelle, les autorités le laissent toutefois émigrer. Il se rend à Berlin, où il complète son doctorat en 1929. Au début des années 1930, il quitte l'Europe pour travailler d'abord dans des organismes gouvernementaux américains avant de devenir professeur à l'Université Harvard. Il obtient le prix Nobel d'économie en 1973 pour le modèle économique qui porte son nom, aussi connu comme l'analyse entrées-sorties. Après 1959, le gouvernement soviétique, qui commence à utiliser ses travaux dans ses planifications économiques, le qualifie, en faisant référence à ses origines, d'économiste soviétique.

Le modèle de Leontief est une application importante des matrices inverses en économie.

Ce modèle est basé sur l'hypothèse que chaque secteur de l'économie dispose de deux types de demandes : une demande interne et une demande externe.

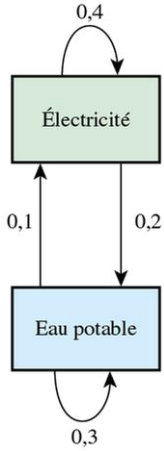
L'objectif du modèle de Leontief est de déterminer le niveau de production P de n secteurs interdépendants qui doit :

- satisfaire la demande interne des n secteurs interdépendants ;
- satisfaire la demande externe D, c'est-à-dire la demande des autres secteurs ;
- éviter les surplus de production.

Ainsi, on dit que le système économique est en équilibre lorsque la production est égale à la somme de la demande interne et de la demande externe, c'est-à-dire

$P = QP + D$, où

- P est la matrice de la production, donnée sous la forme d'une matrice colonne ;
- Q est la matrice des exigences internes de chaque secteur ;
- QP correspond à la demande interne totale ;
- D est la matrice de la demande externe, donnée sous la forme d'une matrice colonne.



Exemple 1 Soit le modèle économique suivant, basé sur deux secteurs : la production d'eau potable et la production d'électricité. La production de 1,00 $ d'électricité nécessite 0,40 $ d'électricité et 0,10 $ d'eau potable, et la production de 1,00 $ d'eau potable nécessite 0,20 $ d'électricité et 0,30 $ d'eau potable. La demande externe d'électricité est de 20 millions de dollars et celle d'eau potable est de 16 millions de dollars.

a) Déterminons la matrice Q des exigences internes de chaque secteur, la matrice D de la demande externe, la matrice P de la production satisfaisant la demande interne totale et la demande externe, et l'équation correspondante, $P = QP + D$.

$$Q = \begin{matrix} \\ \text{Électricité} \\ \text{Eau potable} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \text{Exigences internes} \\ \text{Électricité} \quad \text{Eau potable} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 20 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}}_{P} + \underbrace{\begin{bmatrix} 20 \\ 16 \end{bmatrix}}_{D}$$

(p_1 est la production d'électricité)
(p_2 est la production d'eau potable)

Matrice de la production — Demande interne totale — Matrice de la demande externe

b) Déterminons la matrice P de la production satisfaisant la demande interne totale et la demande externe.

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 16 \end{bmatrix} \quad \text{(en transformant l'équation précédente)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 16 \end{bmatrix} \quad (\text{car } IP = P)$$

$(I - Q)P = D$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 16 \end{bmatrix} \quad \text{(distributivité à droite)}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}7 \end{bmatrix}}_{(I - Q)} \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 20 \\ 16 \end{bmatrix}}_{D} \quad \text{(en effectuant)}$$

Nous pouvons déterminer P si $(I - Q)$ est inversible.

$(I - Q) = \begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}7 \end{bmatrix}$

Nous avons $\begin{vmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}7 \end{vmatrix} = 0{,}4 \neq 0,$

donc $\begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}7 \end{bmatrix}$ est inversible. (théorème 3.20)

$\text{adj } (I - Q) = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{bmatrix}$

$$(I - Q)^{-1} = \frac{1}{0{,}4}\begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}75 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 1{,}5 \end{bmatrix}$$

$P = (I - Q)^{-1} D$

Donc, $\underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1{,}75 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 1{,}5 \end{bmatrix}}_{(I - Q)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 20 \\ 16 \end{bmatrix}}_{D}$ (théorème 3.21)

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 \\ 29 \end{bmatrix}$$ (en effectuant)

d'où la production d'électricité doit être de 43 millions de dollars et la production d'eau potable doit être de 29 millions de dollars.

THÉORÈME 3.22

Si $P = QP + D$ et dét $(I - Q) \neq 0$, alors

$P = (I - Q)^{-1}D$.

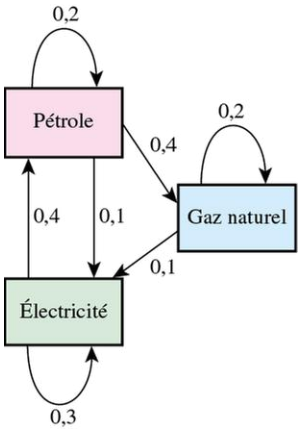
Preuve

$$P = QP + D$$
$$P - QP = D$$
$$(I - Q)P = D$$
$$(I - Q)^{-1}(I - Q)P = (I - Q)^{-1}D \quad \text{(car dét } (I - Q) \neq 0)$$
$$IP = (I - Q)^{-1}D \quad \text{(car } (I - Q)^{-1}(I - Q) = I)$$

d'où $P = (I - Q)^{-1}D$ (car $IP = P$)

Exemple 2 Soit le modèle économique suivant, basé sur trois secteurs. La production de 1,00 $ de pétrole nécessite 0,20 $ de pétrole et 0,40 $ d'électricité. La production de 1,00 $ de gaz naturel nécessite 0,40 $ de pétrole et 0,20 $ de gaz naturel. La production de 1,00 $ d'électricité nécessite 0,10 $ de pétrole, 0,10 $ de gaz naturel et 0,30 $ d'électricité. La demande externe de pétrole, de gaz naturel et d'électricité, exprimée en milliers de dollars, est respectivement de 30, de 24 et de 15.

a) Déterminons la matrice Q des exigences internes de chaque secteur, la matrice D de la demande externe et l'équation correspondante, $P = QP + D$.



Exigences internes

Pétrole Gaz naturel Électricité

$$Q = \begin{matrix}\text{Pétrole}\\ \text{Gaz naturel}\\ \text{Électricité}\end{matrix}\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 15 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}}^{P} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}3 \end{bmatrix}}^{Q} \overbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}}^{P} + \overbrace{\begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 15 \end{bmatrix}}^{D}$$

(p_1 est la production de pétrole)
(p_2 est la production de gaz naturel)
(p_3 est la production d'électricité)

b) Déterminons la matrice P de la production satisfaisant la demande interne totale et la demande externe.

Puisque $P = (I - Q)^{-1}D$, si $(I - Q)$ est inversible, (théorème 3.22)
calculons d'abord dét $(I - Q)$.

$$\text{dét}\,(I - Q) = \begin{vmatrix} 0{,}8 & -0{,}4 & -0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & 0 & 0{,}7 \end{vmatrix} = 0{,}4 \neq 0, \text{ donc } (I - Q) \text{ est inversible.}$$

(théorème 3.20)

$$(I - Q)^{-1} = \frac{1}{0{,}4}\begin{bmatrix} 0{,}56 & 0{,}28 & 0{,}12 \\ 0{,}04 & 0{,}52 & 0{,}08 \\ 0{,}32 & 0{,}16 & 0{,}64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}4 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 1{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}4 & 1{,}6 \end{bmatrix}$$

$P = (I - Q)^{-1}D$

$$\text{Donc} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}4 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 1{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}4 & 1{,}6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 \\ 24 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63{,}3 \\ 37{,}2 \\ 57{,}6 \end{bmatrix} \quad \text{(en effectuant)}$$

d'où la production de pétrole doit être de 63 300 $,
la production de gaz naturel doit être de 37 200 $ et
la production d'électricité doit être de 57 600 $.

EXERCICES 3.5

1. Expliquer pourquoi nous ne pouvons pas utiliser la méthode de la matrice inverse pour résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants.

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 6x + z = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y + 4z = 5 \\ x + y - 2z = 8 \\ 5x - y + 6z = 17 \end{cases}$

2. Résoudre les systèmes d'équations suivants à l'aide de la matrice inverse.

a) $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x - 5y = -19 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ -x + 2y + 4z = 13 \\ 3x + z = -7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ 4x - 2y + z = 0 \\ 6x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{2} + y + 2z = -4 \\ 2x + 3z = -5 \\ \frac{2x}{5} + \frac{y}{5} + \frac{z}{3} = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2w = -8 \\ 2x + 3y - 2z + 3w = -23 \\ 2x + 2y - z = -3 \\ -x - y + 3z - 2w = 19 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + z = 10\,000 \\ 0{,}08x + 0{,}09y + 0{,}12z = 1005 \\ 0{,}08x + 0{,}09y - 0{,}12z = -75 \end{cases}$

3. Soit $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ et $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 8 \end{bmatrix}$.

Résoudre les systèmes d'équations suivants en utilisant la méthode de la matrice inverse.

a) $\begin{cases} -2x + 2y + z = 4 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ 2x + y - 2z = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4a - 5b + 7c = 4 \\ 2a - 2b + 3c = -2 \\ 5a - 6b + 8c = 3 \end{cases}$

4. **APPLICATION | FRANCHISEUR**

Une compagnie offre des franchises R à 150 000 $, des franchises S à 275 000 $ et des franchises T à 325 000 $. Au cours d'une année, elle a vendu deux fois plus de franchises R que de franchises T et les 13 franchises vendues lui ont rapporté 2 975 000 $.

a) Déterminer le système d'équations correspondant aux données énoncées, après avoir identifié les variables.

b) En utilisant la méthode de la matrice inverse, déterminer le nombre de franchises de chaque type qui ont été vendues.

5. **APPLICATION | CRYPTOGRAPHIE**

On associe à chaque lettre un nombre auquel elle est jumelée, à l'aide de la clé suivante.

espace	A	B	C	D	…	X	Y	Z
0	1	2	3	4	…	24	25	26

a) Le message chiffré M suivant

2 26 5 1 40 13 4 10 5 10 30
15 -14 20 1 -14 14

a été chiffré à l'aide de la clé et encodé à l'aide de la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Déterminer le message M.

b) Répondre à la question posée dans le message M par un message chiffré à l'aide de la clé et encodé à l'aide de la matrice A.

6. **APPLICATION | MODÈLE DE LEONTIEF**

À la suite de l'étude d'un système économique, on a obtenu l'équation matricielle suivante.

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \end{bmatrix}$$

a) Déterminer

i) la matrice Q des exigences internes de chaque secteur ;

ii) la matrice D de la demande externe.

b) Déterminer la matrice P de la production satisfaisant la demande interne totale et la demande externe.

7. **APPLICATION | MODÈLE DE LEONTIEF**

À partir des données ci-dessous, déterminer la production des industries A, B et C nécessaire pour satisfaire la demande interne totale et la demande externe.

	Exigences internes			
	A	**B**	**C**	**Demande**
A	0,8	0,1	0	14
B	0,1	0,8	0,1	16
C	0	0,1	0,8	22

8. **APPLICATION | MODÈLE DE LEONTIEF**

Soit le modèle économique suivant, basé sur deux secteurs : l'électricité et l'aluminium. La production de 1,00 $ d'électricité nécessite 0,10 $ d'électricité et 0,20 $ d'aluminium, et la production de 1,00 $ d'aluminium nécessite 0,20 $ d'électricité et 0,40 $ d'aluminium. La demande externe, par mois, est de 24 millions de dollars d'électricité et de 8 millions de dollars d'aluminium. Déterminer la matrice de la production P satisfaisant la demande interne totale et la demande externe.

Révision des concepts

Déterminant

Mineurs et cofacteurs

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$,

1) $M_{12} =$ _____ 2) $C_{12} =$ _____

3) $M_{31} =$ _____ 4) $C_{31} =$ _____

Déterminant

1) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$ _____ 2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$ _____

Théorèmes relatifs aux déterminants

1) dét $I_{n \times n} =$ _____

2) Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors dét $(AB) =$ _____

3) a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} =$ _____ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} =$ _____

4) Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = r$, alors $\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2g & h & i \\ -6d & -3e & -3f \end{vmatrix} =$ _____

Matrice inverse

Adjointe

adj $A =$ _____

Matrice inverse

1) $A_{n \times n}$ est inversible si et seulement si _____

2) $A^{-1} =$ _____

Propriétés des matrices inverses

Soit $A_{n \times n}$ et $B_{n \times n}$, deux matrices régulières où $n \geq 2$ et $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1) dét $A^{-1} =$ _____

2) $(A^{-1})^{-1} =$ _____

3) $(AB)^{-1} =$ _____

4) $(A^{T})^{-1} =$ _____

5) $(A^{n})^{-1} =$ _____

6) $(kA)^{-1} =$ _____

Applications

Rang d'une matrice

Page 142

Nature de coniques

Page 148

Résolution de certains systèmes d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$A =$ ____, $X =$ ____ et $B =$ ____

à l'aide de la règle de Cramer

Si dét $A \neq 0$, alors

$x_1 =$ _____; $x_2 =$ _____; …; $x_n =$ _____

à l'aide de la matrice inverse

Si dét $A \neq 0$, alors

$X =$ _____

Cryptographie

Page 163

Modèle de Leontief

Page 164

Exercices récapitulatifs

Administration · Biologie · Chimie · Géométrie · Physique · Sciences humaines · Outil technologique

Les réponses aux exercices récapitulatifs et aux problèmes de synthèse, à l'exception de ceux notés en **rouge**, sont fournies à la fin du manuel.

1. Calculer, si c'est possible, le déterminant des matrices suivantes.

a) $\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} x & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 0 & x & -3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

2. Calculer les déterminants suivants.

a) $\begin{vmatrix} 2 & \frac{14}{3} & 2 \\ 1 & \frac{-13}{6} & -1 \\ 4 & 9 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0{,}1 & 1 & -2 \\ 2 & -0{,}2 & 1 \\ 1 & 2 & 0{,}3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 8 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 9 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

3. **CALCUL D'AIRE**

Soit les points B(3, 5), C(-4, 1) et D(-2, -5). Calculer l'aire A

a) du parallélogramme engendré par les segments de droite $\overline{OB}$ et $\overline{OC}$;

b) du parallélogramme engendré par les segments de droite $\overline{OD}$ et $\overline{OC}$;

c) du triangle BCD en faisant une translation du triangle de telle sorte que un des sommets est ramené à l'origine.

4. Calculer les déterminants suivants en les transformant de façon à pouvoir appliquer le théorème 3.3.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 17 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & -4 & 9 & 20 \\ 3 & 9 & -6 & 12 & 19 \\ -3 & -7 & 7 & -10 & -20 \\ -4 & -12 & 8 & -12 & -19 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1+a & 1+a & 1 \\ 2+a & -a & 3 \end{vmatrix}$

5. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ telle que dét $A = -5$.

Évaluer les déterminants suivants.

a) $\begin{vmatrix} e & d & f \\ b & a & c \\ h & g & i \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2a & 3b & 4c \\ 2d & 3e & 4f \\ -2g & -3h & -4i \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 5g & 5a & 5d \\ -2h & -2b & -2e \\ 3i & 3c & 3f \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a & c & b+2a \\ d & f & e+2d \\ g & i & h+2g \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a+d & a+2d & g+d \\ b+e & b+2e & h+e \\ c+f & c+2f & i+f \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d+a & e+b & f+c \\ g+d+a & h+e+b & i+f+c \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g+a & b+h & i+c \\ g-a & h-b & i-c \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ d+xa & e+xb & f+xc \\ g+yd+za & h+ye+zb & i+yf+zc \end{vmatrix}$

6. Démontrer que :

a) $\begin{vmatrix} a+d & d+g & g+a \\ b+e & e+h & h+b \\ c+f & f+i & i+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a+e & e+i & i+m & m+a \\ b+f & f+j & j+n & n+b \\ c+g & g+k & k+o & o+c \\ d+h & h+l & l+p & p+d \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & r & s \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0$

7. Calculer :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & n^2 \end{vmatrix}$, où $n \geq 3$

8. a) Sans calculer le déterminant, trouver une valeur de x telle que :

i) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ ii) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 1$

iii) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$ iv) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 4 & 8 \\ x & 8 & 16 \end{vmatrix} = 0$

b) Sans calculer le déterminant, trouver quatre valeurs de x telles que :

i) $\begin{vmatrix} 4 & x^2 & x^4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 9 & 81 \end{vmatrix} = 0$ ii) $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^4 \\ 1 & x & 4x \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 0$

c) Résoudre l'équation suivante.

i) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & -2 & 4x \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$ ii) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ x & 2 & 2 \\ x^2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{vmatrix}$

9. **APPLICATION | REPRÉSENTATION DE CONIQUES**

Représenter graphiquement les coniques suivantes, dont les équations sont données dans le tableau de la page 148.

a) $2x^2 + 3xy + y^2 + 3x + 2y + 1 = 0$

b) $-x^2 + 2xy - y^2 - 3x + 3y - 2 = 0$

c) $x^2 - 2xy + y^2 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$

e) $8x^2 + 24xy + y^2 + x + 2y + 1 = 0$

f) $x^2 - 2x - y + 5 = 0$

g) $x^2 + 4y^2 - 4x - 24y + 39 = 0$

h) $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 3 = 0$

i) $x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$

10. **APPLICATION | NATURE DE CONIQUES**

Déterminer la nature des coniques suivantes et représenter graphiquement ces coniques.

a) $4x^2 + 5y^2 + 16x - 20y + 31 = 0$

b) $3x^2 - 4xy + y^2 - 3x + y = 0$

c) $x^2 - 2xy + y^2 + 8x - 8y + 16 = 0$

11. Déterminer, si c'est possible, l'inverse des matrices suivantes.

a) $\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 15 & 25 \\ 18 & 30 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 3 & 2 & 8 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 3 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 7 & -10 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 15 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 & 1 \\ -5 & -6 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ **h)** $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

12. Déterminer, si c'est possible, à quelles conditions les matrices suivantes sont inversibles et trouver l'inverse, s'il y a lieu.

a) $A = \begin{bmatrix} x+1 & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ **d)** $E = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

e) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & b+a \end{bmatrix}$

f) $G = \begin{bmatrix} x-3 & 0 & 4-x \\ 4 & x & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

g) $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 \end{bmatrix}$

h) $M = \begin{bmatrix} x & 2x & 3x & x+1 \\ 0 & 5 & 2x+2 & 23 \\ 0 & 0 & x^2+1 & 5x+6 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-4 \end{bmatrix}$

13. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants en utilisant la règle de Cramer.

a) $\begin{cases} 4u - 9v = -4 \\ -6u + 3v = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y + 2z = \frac{14}{3} \\ x + 2y - z = \frac{-13}{6} \\ 4x - 3y + 3z = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 5y + 2z = 0 \\ 5x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x + 3y + 2z + w = 15 \\ 2y - 2z - 3w = 15 \\ 2x + y + z + w = 5 \\ -4x - y - 3z - 2w = -7 \end{cases}$

14. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants en utilisant la méthode de la matrice inverse.

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 2x - 5y = -11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 2y - 4z = 4 \\ 3x - 3z = 9 \\ x + 5y + 2z = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4a - 2b - 2c = \frac{17}{6} \\ 3a - 4b + 3c = \frac{-5}{4} \\ a + 3b - 3c = \frac{31}{12} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x - y - 2z + 3w = 14 \\ 3x + 4y + 8z = -18 \\ -x - y + 3z - 2w = -15 \end{cases}$

15. **APPLICATION | CRYPTOGRAPHIE**

On associe à chaque lettre un nombre auquel elle est jumelée, à l'aide de la clé suivante.

espace	A	B	C	D	…	X	Y	Z
0	1	2	3	4	…	24	25	26

a) Le message M suivant

62 49 57 70 68 57 18 19 13 16 10 15 97 97 78

a été codé à l'aide de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Déterminer le message M.

b) La réponse R suivante

1 13 -6 102 -12 24 0 90 -3 31 0 90 -13 41

a été codée à l'aide de la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Déterminer la réponse R.

16. Résoudre les systèmes d'équations suivants.

a) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 84 \\ 72 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$

17. **APPLICATION | MODÈLE DE LEONTIEF**

À la suite de l'étude d'un système économique, on sait que la matrice Q des exigences internes de chaque secteur est donnée par

$$Q = \begin{array}{c} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix} \end{array}$$

et que la matrice D de la demande externe, exprimée en milliers de dollars, est donnée par

$$D = \begin{bmatrix} 20 \\ 12 \\ 48 \end{bmatrix}.$$

a) Donner la signification des éléments suivants de la matrice Q.

i) 0,5 ii) 0,3

b) À partir des données énoncées, déterminer la production des industries A, B et C nécessaire pour satisfaire la demande interne totale et la demande externe.

18. **APPLICATION | MODÈLE DE LEONTIEF**

L'économie d'une région dépend principalement de trois secteurs, soit l'agriculture (A), les biens manufacturés (B) et l'énergie (E). La production de 1,00 $ d'agriculture nécessite 0,20 $ d'agriculture, 0,10 $ de biens manufacturés et 0,05 $ d'énergie. La production de 1,00 $ de biens manufacturés nécessite 0,12 $ de biens manufacturés et 0,08 $ d'énergie. Finalement, la production de 1,00 $ d'énergie nécessite 0,08 $ de biens manufacturés et 0,12 $ d'énergie. Les besoins de la population de cette région sont de 13,2 millions de dollars d'agriculture, de 17,6 millions de dollars de biens manufacturés et de 8 millions de dollars d'énergie.

a) Déterminer la matrice Q des exigences internes de chaque secteur et la matrice D de la demande externe.

b) Déterminer la matrice P de la production satisfaisant la demande interne totale et la demande externe.

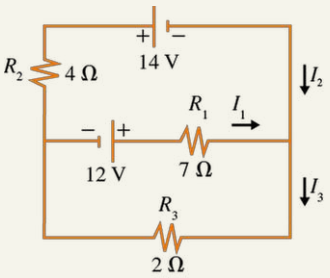
19. **APPLICATION | INVESTISSEMENT**

Il y a deux ans, Solange a demandé à son conseiller financier d'investir un montant de 40 000 $ pour une période de deux ans. Afin de tenir compte des risques inhérents à cet investissement, le conseiller a choisi de séparer le montant en trois investissements à des taux capitalisés annuellement respectifs de 3 %, 2 % et 1 %. Sachant que, après une année, la valeur totale des placements était de 40 712 $, et que, à la fin de la deuxième année, la valeur était de 41 439 $, déterminer le montant investi à un taux de 3 %, celui investi à un taux de 2 % et celui investi à un taux de 1 %.

20. **APPLICATION | LOIS DE KIRCHHOFF**

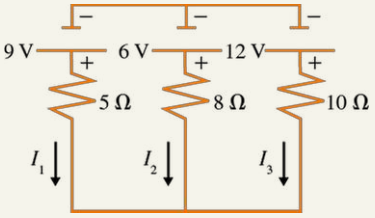
Les **lois de Kirchhoff**, qui tiennent leur nom du physicien allemand Gustav Kirchhoff (1824-1887), nous permettent d'exprimer les circuits suivants sous forme de systèmes d'équations linéaires. Déterminer les intensités de courant I_1, I_2 et I_3, exprimées en ampères, à l'aide de la règle de Cramer.

a)



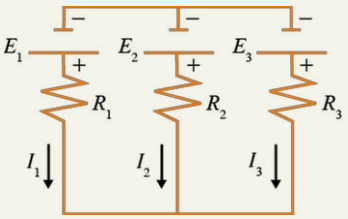
$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$
$$7I_1 + 2I_3 = 12$$
$$7I_1 - 4I_2 = 26$$

b)



$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$
$$-5I_1 + 8I_2 = -3$$
$$-8I_2 + 10I_3 = 6$$

c)



où E_i est en volts et R_i est en ohms

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$
$$-R_1I_1 + R_2I_2 = E_2 - E_1$$
$$-R_2I_2 + R_3I_3 = E_3 - E_2$$

21. a) Soit les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Résoudre les systèmes d'équations suivants en utilisant la méthode de la matrice inverse.

i) $AX = B$ ii) $A^{-1}X = B$

iii) $A^{-1}X = AB$ iv) $A^2X = A^3B$

v) $A^{-1}XA = BA$

b) Soit les matrices $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Déterminer X si $AXB = C$.

22. Résoudre, si c'est possible, les systèmes d'équations linéaires suivants en utilisant la méthode de la matrice inverse ou la règle de Cramer ; sinon, expliquer pourquoi ces méthodes ne peuvent être utilisées et résoudre les systèmes à l'aide de la méthode de Gauss.

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 3y + 4x = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2a + 3b = -4 \\ 3a + 4c = 13 \\ b - 2c = -7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 5x + 4y - 7z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + 4y + z = 3 \end{cases}$

23. Soit le système

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + (a^2 - 15)y = a \end{cases}$$

Déterminer, si c'est possible, les valeurs de a telles que le système

a) admet une solution unique, et trouver cette solution ;

b) n'admet aucune solution ;

c) a une infinité de solutions, et trouver l'ensemble-solution.

24. Soit A, B et C, trois matrices carrées 4×4, et E et F, deux matrices carrées 3×3, telles que dét $A = 2$, dét $B = -3$, dét $C = 4$, dét $E = -2$ et dét $F = 5$. Évaluer, si c'est possible, les déterminants suivants.

a) i) dét A^{-1} **ii)** dét E^{-1}

b) i) dét B^T **ii)** dét F^T

c) i) dét (AC) **ii)** dét (BF)

d) i) dét $(-C)$ **ii)** dét $(-E)$

e) i) dét $(-3A)$ **ii)** dét $\left(\frac{-1}{3}E\right)$

f) i) 5 dét F^{-1} **ii)** dét $(5F^{-1})$

g) i) dét $(2B^2)$ **ii)** dét $(2B)^2$

h) i) dét (AB^{-1}) **ii)** dét $(AB)^{-1}$

i) i) dét $(2A^{-1})$ **ii)** dét $(2A)^{-1}$

j) i) dét (CEF^{-1}) **ii)** dét $((A^{-1}B)^{-1}C^T)$

25. Déterminer le rang des matrices suivantes.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -5 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

b) $B = [\,0\ 0\ 0\ 0\ 0\,]$

c) $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 6 & -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

d) $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

e) $F = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & \frac{-2}{3} & \frac{-5}{2} \\ \frac{-7}{3} & \frac{4}{3} & 5 \\ \frac{7}{2} & -2 & \frac{-15}{2} \end{bmatrix}$

f) $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

26. Trouver des matrices $A_{2\times 2}$ et $B_{2\times 2}$ telles que

a) A et B sont inversibles, mais $(A + B)$ ne l'est pas ;

b) A et B ne sont pas inversibles, mais $(A + B)$ l'est ;

c) rang $(A + B) =$ rang $(A) +$ rang (B), où $A_{2\times 2} \neq O_{2\times 2}$ et $B_{2\times 2} \neq O_{2\times 2}$.

27. Soit A, une matrice carrée d'ordre n, où $n \geq 2$. Parmi les affirmations suivantes, déterminer celles qui sont équivalentes entre elles.

a) A est inversible.

b) $AX = B$ admet une solution unique.

c) A est singulière.

d) A est régulière.

e) $AX = 0$ admet une solution non triviale.

f) dét $A = 0$.

g) rang $(A) = n$.

h) rang $(A) < n$.

28. Soit $M = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ x & -1 \end{bmatrix}$ et $N = \begin{bmatrix} y & 3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$, où x et $y \in \mathbb{Z}$.

Sachant que dét $M =$ dét N et que dét $(MN) = 256y$,

a) déterminer la valeur de a et de b si $ay^2 + by + 81 = 0$;

b) déterminer la valeur de y et celle de x qui satisfont les équations précédentes.

29. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$. Démontrer que dét $(AB) =$ (dét A)(dét B) (théorème 3.14, où $n = 2$).

30. a) Soit A, B et C, trois matrices carrées d'ordre n telles que $AB = AC$. Démontrer que si dét $A \neq 0$, alors $B = C$.

b) Soit $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ et $A_{2\times 2}$, une matrice telle que $AB = AC$. Déterminer si A est inversible.

c) Vérifier le résultat précédent si $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

31. Démontrer le théorème 3.11.

Si une matrice carrée A d'ordre n possède une colonne (ou une ligne) dont les éléments sont un multiple des éléments d'une autre colonne (ou d'une autre ligne), alors dét $A = 0$.

32. Démontrer les propriétés suivantes.

a) **Propriété 2** $(A^{-1})^{-1} = A$

b) **Propriété 4** $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$

c) **Propriété 5** $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

d) **Propriété 6** $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$, si $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Problèmes de synthèse

3

1. Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Déterminer :

a) i) a_{23} ii) a_{32}

b) i) M_{12} ii) M_{33}

c) i) C_{12} ii) C_{33}

d) i) $\sum_{j=1}^{3} a_{2j}$ ii) Tr(A)

e) i) dét A ii) dét $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{-3}}A\right)$

f) i) dét A^{-1} ii) dét A^{T}

g) i) Cof A ii) adj A

h) i) $(3A)(4A^{-1})$ ii) $(3A)(4A)^{-1}$

i) i) dét (adj A) ii) dét (Cof A)

j) i) rang (A) ii) rang ($2A^{-1}$)

2. Soit $A_{n\times n}$ et $B_{n\times n}$, deux matrices où $n \geq 2$. Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie (V) ou fausse (F). Justifier.

a) Si A et B sont inversibles, alors BA est inversible.

b) Si A est nilpotente, alors A est inversible.

c) adj (adj A) $= A$.

d) Si A est inversible, alors A^k, où $k \in \{2, 3, 4, \ldots\}$, est inversible.

e) Si $AB = I_{n\times n}$, alors $AB = BA$.

f) Si dét $A =$ dét $B = 5$, alors $A = B$.

g) Si $A = 5B$, alors dét $A = 5$ dét B.

h) Si dét $(AB) = 0$, alors dét $A = 0$ et dét $B = 0$.

i) dét $(A + B) =$ dét $A +$ dét B.

j) rang (A) = rang (A^{T}).

k) A est régulière si et seulement si $a_{ii} \neq 0$ pour tout i.

l) $AX = O$ admet une solution non triviale si et seulement si dét $A \neq 0$.

m) Si $A^3 = A$ et si dét $A \neq 0$, alors $A^{-1} = A$.

n) Si $(A^2)^{-1} = B$, alors $AB = BA$.

o) A est inversible si et seulement si A est régulière.

p) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

q) Si A est une matrice idempotente et inversible, alors dét $A = 1$.

3. Calculer les déterminants suivants.

a) $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 \\ (x+1)^2 & (y+1)^2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ (x+1)^2 & (y+1)^2 & (z+1)^2 \\ (x+2)^2 & (y+2)^2 & (z+2)^2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ (x+1)^2 & (y+1)^2 & (z+1)^2 & (w+1)^2 \\ (x+2)^2 & (y+2)^2 & (z+2)^2 & (w+2)^2 \\ (x+3)^2 & (y+3)^2 & (z+3)^2 & (w+3)^2 \end{vmatrix}$

4. a) Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$.

Calculer dét A.

b) Soit $M_{n\times n} = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{bmatrix}$, où $n \geq 2$.

i) Calculer dét M.

ii) Déterminer les valeurs de x telles que dét $M = 0$.

5. Sans les résoudre, déterminer si les systèmes homogènes d'équations linéaires suivants admettent d'autres solutions que la solution triviale. Expliquer.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9x - 15y = 0 \\ 10y - 6x = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ -3z = 0 \\ 5y + 2z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -3x - 2y + 7z = 0 \\ 2x - 4y - 26z = 0 \\ 5x - 2y - 33z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z - w = 0 \\ x + 2y - 4z + 2w = 0 \\ -2x + y - z + w = 0 \end{cases}$

6. Déterminer l'ensemble-solution des systèmes d'équations suivants en utilisant, si c'est possible, la méthode de la matrice inverse ou la règle de Cramer ; sinon, utiliser la méthode de Gauss.

a) $\begin{cases} 3x - y + 2z = -2 \\ x + 2y - 3z = 14 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x + y + 2z + w = -8 \\ 2x + y + 3z + 2w = -1 \\ -x - y - 3z - 2w = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x - y + 2z = -5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x + 4y + 9z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ 4x + 2y + 7z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -3x + 2z = -1 \\ 3y + 4z = 0 \\ 5x + 6y + 2z = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 3y - z + 2w = 6 \\ 5x + 3y - 6z + 6w = 5 \\ 5x + 2y - 4z + 2w = 2 \\ 2x + 6y - 2z + 4w = 7 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x + y + z + 2w = 3 \\ -6x - 2y - 4w = 0 \\ 2y - 3z + 4w = 0 \\ 3x + 3y - z + 6w = 4 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x + 3y + 5z + w = -22 \\ -5x - 6y - 2z - 3w = 4 \\ 2x + y - 7z + w = 31 \\ 3x - y - 3z - 2w = 7 \end{cases}$

7. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Déterminer dét A si :

a) $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = O_{2\times 2}$

b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} = I_{2\times 2}$

8. Soit $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$.

Vérifier que les matrices A et B sont l'inverse l'une de l'autre.

9. **LIEU GÉOMÉTRIQUE**

Soit L défini par $\begin{vmatrix} x & y \\ -y & x+2 \end{vmatrix} = 15$.

a) Identifier ce lieu géométrique L.

b) Déterminer les points d'intersection de L et de la droite passant par les points P(0, 1) et Q(-1, 0).

c) Déterminer les points d'intersection de L et de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.

d) Représenter graphiquement, sur un même système d'axes, L, la droite et l'ellipse.

10. a) Résoudre les systèmes d'équations suivants.

i) $\begin{cases} (3^{3x})(9^y) = 1 \\ (5^{4y})(125^x) = \frac{1}{25} \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} \frac{(5^{2x})(5^y)}{25^z} = \frac{1}{5} \\ (7^x)(7^y)(7^z) = 1 \\ (27^x)(9^y)(27^{3z}) = 3 \end{cases}$

b) Soit l'équation
$(2x - 3y + z)^2 + (x + 2y - z)^2 + (5x - 4y + z)^2 = 0$.

i) Résoudre l'équation précédente.

ii) Donner les solutions entières lorsque $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 10$ et $0 \leq z \leq 10$.

c) Utiliser la règle de Cramer pour exprimer x et y en fonction de u et v si

$u = x\cos\theta - y\sin\theta$;

$v = x\sin\theta + y\cos\theta$.

11. APPLICATION | ALLIAGE

La composition de trois alliages, R, S et T, est la suivante :

R est constitué de 75 % de cuivre, 5 % de zinc et 20 % d'étain ;

S est constitué de 25 % de cuivre, 25 % de zinc et 50 % d'étain ;

T est constitué de 30 % de cuivre, 20 % de zinc et 50 % d'étain.

En mélangeant les alliages R, S et T, on veut obtenir un quatrième alliage, V, de 64 kg, constitué de $\frac{16}{41}$ de cuivre, de $\frac{15}{82}$ de zinc et de $\frac{35}{82}$ d'étain.

a) Déterminer la matrice M exprimant le pourcentage de cuivre, de zinc et d'étain dans les alliages R, S et T.

b) Exprimer $\begin{bmatrix} R \\ S \\ T \end{bmatrix}$, où R, S et T représentent les alliages, en kilogrammes, sous la forme $N\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, où x, y et z représentent la quantité de cuivre, de zinc et d'étain dans le quatrième alliage.

c) Déterminer les quantités, en kilogrammes, de R, S et T contenues dans V.

12. APPLICATION | CRYPTOGRAPHIE

On associe à chaque lettre un nombre auquel elle est jumelée, à l'aide de la clé suivante.

espace	A	B	C	D	…	X	Y	Z
0	2	4	6	8	…	48	50	52

Soit les matrices A et B suivantes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Soit l'exclamation « Eurêka », énoncée par un savant de l'Antiquité.

a) Coder d'abord l'exclamation à l'aide de la matrice A, puis coder le résultat obtenu à l'aide de la matrice B.

b) Le nom du savant, codé à l'aide de la matrice B, est :

-70 106 -26 42 -34 60 -6 14 10 -10

Déterminer le nom de ce savant.

13. APPLICATION | CRYPTOGRAPHIE

On associe à chaque lettre un nombre auquel elle est jumelée, à l'aide de la clé suivante.

espace	A	B	C	D	…	X	Y	Z
0	1	2	3	4	…	24	25	26

Soit les matrices A et B suivantes.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Soit le message « Où est né Cramer ». Coder d'abord le message à l'aide de A, puis coder le résultat obtenu à l'aide de B.

b) Sachant que la réponse a aussi été codée successivement par A et par B, décoder la réponse obtenue soit,

475 258 -192 200 517 96 32 0 0 96

14. APPLICATION | JEU

Trois joueurs A, B et C conviennent que, à chaque partie, le perdant donnera à chacun des autres joueurs le montant correspondant à leur avoir respectif. Si A perd la première partie, B perd la deuxième, et C perd la troisième, et que chacun termine le jeu avec une somme de 400 $, déterminer la somme initiale de chacun en résolvant le système d'équations approprié à l'aide de la méthode de Cramer.

15. APPLICATION | MODÈLE DE LEONTIEF

Une économie est basée sur quatre secteurs interdépendants, l'agriculture (A), l'énergie (E), la main-d'œuvre (M) et le transport (T). Le tableau suivant contient les exigences internes de chaque secteur, ainsi que la demande externe, en millions de dollars, pour les deux prochaines années.

	Exigences internes				Demande	
	A	**E**	**M**	**T**	**Année 1**	**Année 2**
A	0,12	0,07	0,19	0,15	41	62
E	0,17	0,05	0,09	0,23	23	55
M	0,19	0,11	0,16	0,28	31	35
T	0,08	0,25	0,32	0,03	18	25

Déterminer, au dollar près, le niveau de la production de chaque secteur nécessaire pour satisfaire la demande interne totale et la demande externe

a) de la première année ;

b) de la seconde année.

16. APPLICATION | MODÈLE DE LEONTIEF

Dans le cas où des industries interdépendantes n'ont aucune demande externe à satisfaire, le modèle de Leontief est dit fermé, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune entrée ni sortie externe au système. Le tableau suivant contient les exigences internes de trois secteurs, soit l'électricité (E), le gaz (G) et les services (S).

	E	G	S
E	0,3	0,2	0,4
G	0,4	0,3	0,4
S	0,3	0,5	0,2

a) Si le coût du secteur des services se situe entre 10 000 $ et 15 000 $, déterminer l'intervalle de coût correspondant pour l'électricité et le gaz, au dollar près.

b) Si le coût du secteur du gaz se situe entre 10 000 $ et 15 000 $, déterminer l'intervalle de coût correspondant pour l'électricité et les services, au dollar près.

17. APPLICATION | GESTION DES RESSOURCES

Les administrateurs d'un hôpital veulent déterminer rapidement le nombre de patients pouvant être admis sous certaines conditions. Considérons le problème en analysant le nombre de lits (L), le nombre de chambres (C) et le nombre de techniciens en soins infirmiers (T).

Chaque patient requiert un lit. Une chambre individuelle peut accueillir un patient, une chambre à deux lits, deux patients, et une chambre ordinaire, huit patients.

Étant donné l'état des patients, chaque technicien peut s'occuper exclusivement de 4 patients en chambre individuelle, ou de 6 patients dans des chambres à deux lits, ou de 12 patients dans des chambres ordinaires.

Soit x, le nombre de patients dans des chambres individuelles, y, le nombre de patients dans des chambres à deux lits, et z, le nombre de patients dans des chambres ordinaires.

a) **i)** Déterminer le système S d'équations linéaires, où L, C et T sont exprimés en fonction de x, y et z.

ii) Déterminer le nombre de lits, le nombre de chambres et le nombre de techniciens nécessaires pour les soins de 8 patients devant être dans une chambre individuelle, de 12 patients devant être dans une chambre à deux lits et de 24 patients devant être dans une chambre ordinaire.

iii) Déterminer les nombres de lits, de chambres et de techniciens nécessaires pour les soins de 7 patients devant être dans une chambre individuelle, de 17 patients devant être dans une chambre à deux lits et de 41 patients devant être dans une chambre ordinaire.

b) Les nombres de patients x, y et z pouvant être accueillis, étant donné les nombres de lits, de chambres et de techniciens, peuvent être obtenus en résolvant le système S trouvé en a) i).

i) Écrire S sous la forme du produit matriciel $HX = K$.

ii) Déterminer H^{-1}.

iii) Exprimer X en fonction de H^{-1} et de K.

c) i) Utiliser, si c'est possible, le résultat obtenu en b) iii) pour exprimer le nombre de patients en fonction des nombres de lits, de chambres et de techniciens, si l'hôpital a 80 lits dans 27 chambres et 10 techniciens en service.

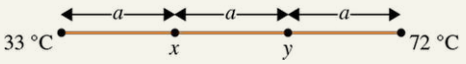
ii) Interpréter le résultat.

d) Si l'on augmente de 6 le nombre de lits, déterminer le nombre de patients de chaque type que l'hôpital peut accueillir s'il y a 10 techniciens en service.

18. APPLICATION | TEMPÉRATURE MOYENNE

La température de tiges métalliques à un point donné est égale à la moyenne des températures des points adjacents situés à une distance égale.

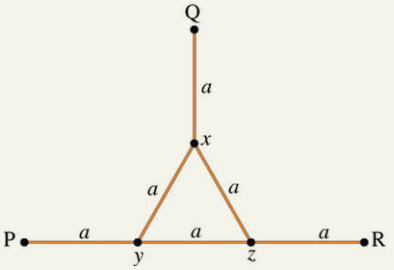
a) Déterminer la température des points x et y du graphique ci-dessous à l'aide de la règle de Cramer.



b) Déterminer, à l'aide de la méthode de la matrice inverse, la température des points x, y et z du graphique ci-dessous si la température aux points P, Q et R est respectivement de

i) 30 °C, 45 °C et 60 °C ;

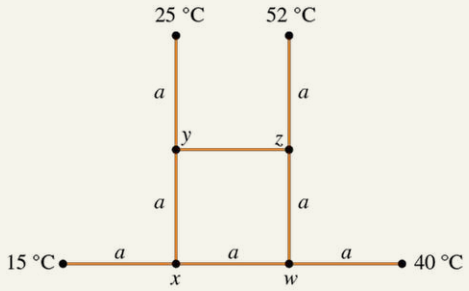
ii) 40 °C, 45 °C et 80 °C.



c) Déterminer la température des points x, y, z et w du graphique ci-dessous

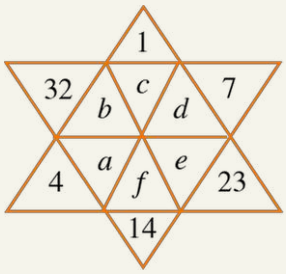
i) à l'aide de la méthode de Gauss ;

ii) à l'aide de la méthode de la matrice inverse.



19. MOYENNE ARITHMÉTIQUE

Déterminer la valeur de a, b, c, d, e et f dans la figure ci-dessous, telle que chaque inconnue est égale à la moyenne arithmétique des valeurs des cases adjacentes.



20. APPLICATION | NATURE DE CONIQUES

Déterminer la nature des coniques suivantes et représenter graphiquement les coniques à l'aide d'un outil technologique.

a) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 4 = 0$

b) $x^2 + 24xy + 8y^2 + 6x + y + 1 = 0$

c) $x^2 + xy + y^2 - 3y - 1 = 0$

d) $x^2 - xy - 2y^2 = 0$

e) $x^2 - 2xy + y^2 - 9 = 0$

21. APPLICATION | NATURE DE CONIQUES

Déterminer l'équation et la nature de la conique passant par les points suivants, à partir de l'équation $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, où $A \neq 0$, et représenter graphiquement cette conique à l'aide d'un outil technologique.

a) P(-6, 2), Q(-5, -1), R(-2, 1), S(-1, 1) et T(0, -1)

b) P(-2, -6), Q(1, -1), R(1, -11), $S\left(\frac{14}{5}, -2\right)$ et T(4, -6)

22. CALCUL D'AIRE

Calculer l'aire A de la région fermée délimitée par $y^2 + 2xy + 60|x| - 900 = 0$.

23. Soit $W(x)$, la **matrice de Wronski** définie par

$$W(x) = \begin{bmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{bmatrix},$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions différentiables.

Calculer le wronskien, c'est-à-dire le déterminant des matrices $W(x)$ si :

a) $f(x) = x$ et $g(x) = \ln(x)$

b) $f(x) = e^{ax}$ et $g'(x) = e^{ax}$

c) $f'(x) = \sin x$ et $g'(x) = \cos x$,

où $f(0) = 0$ et $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$

24. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, où a, b, c et d sont des nombres réels non nuls, telle que $A = A^{-1}$.

a) Déterminer les relations entre a, b, c et d.

b) Donner, si c'est possible, deux exemples de A si $a = 3$.

c) Donner, si c'est possible, un exemple de A si $a = -5$ et $b = 2a$.

d) Donner, si c'est possible, un exemple de A si $a = 2$ et $b = c$.

e) Déterminer A si $b = c$, et si $-1 < a < 1$.

25. Soit A, B, C et E, quatre matrices carrées 3×3. Déterminer si ces matrices sont inversibles si :

a) $A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $B = MN$, où M et N sont inversibles

c) $C\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ et $C\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$

d) $E\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

26. Soit les systèmes d'équations S_1 et S_2 suivants.

$$S_1 \begin{cases} x - 2y - 3z = a \\ -x + 4y + 6z = b \\ -x + y + 2z = c \end{cases} ; S_2 \begin{cases} x + 4y + 7z = a \\ 2x + 5y + 8z = b \\ 3x + 6y + 9z = c \end{cases}$$

a) Dans S_1, exprimer, si c'est possible,

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ sous la forme $M\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ et déterminer x, y, z en fonction de a, b, c.

b) Dans S_2, exprimer, si c'est possible, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ sous la forme $N\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ et déterminer l'ensemble-solution de S_2.

c) Dans S_2, on pose $b = 13$ et $c = 5$. Donner l'ensemble-solution du nouveau système.

27. Soit les systèmes d'équations S_1 et S_2 suivants.

$$S_1\begin{cases} 2x + 2y + z = a \\ -3x + y + 2z = b \\ 4x + 3y - z = c \end{cases}; S_2\begin{cases} a + b + c = -4 \\ 3a + 3b - c = 8 \\ -2a - 7b + c = -2 \end{cases}$$

a) Exprimer $\begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$ sous la forme $NM\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

b) Exprimer $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ sous la forme $PR\begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$.

c) Déterminer x, y et z.

28. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ et $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer a, b, c et d si $\det(A - xI) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

b) En considérant la réponse obtenue en a), calculer $\det A$.

c) Vérifier que $A^{-1} = \frac{1}{8}(-A^2 + 5A - 2I)$.

d) Utiliser c) pour déterminer A^{-1}.

e) Les valeurs de λ telles que $\det(A - \lambda I) = 0$ s'appellent les **valeurs propres** de A. Déterminer ces valeurs.

f) Vérifier que $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = \text{Tr}(A)$ et que $\prod_{i=1}^{3} \lambda_i = \det A$, où λ_i sont les valeurs propres trouvées en e).

29. Deux matrices $A_{n\times n}$ et $B_{n\times n}$ sont dites **anticommutatives** lorsque $AB = -BA$. Soit A et B, des matrices anticommutatives. Démontrer qu'au moins une des deux matrices n'est pas inversible lorsque n est impair.

30. Soit A et B, deux matrices carrées d'ordre n. Démontrer que si $AB = kI_{n\times n}$, où $k \in \mathbb{R}$ et $k \neq 0$, alors $AB = BA$.

31. a) Soit A, une matrice régulière d'ordre n, où $n \geq 2$.

i) Déterminer A si $A^2 = A$.

ii) Démontrer que si $A^3 = A$, alors $A = A^{-1}$.

b) Déterminer les valeurs de a et b pour que M soit une matrice singulière, où $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 8 & 3 \\ 0 & b & 5 \end{bmatrix}$.

32. Déterminer la condition pour que l'inverse de $(I - A)$ soit $(I + A + A^2)$, où A est une matrice carrée d'ordre n.

33. Soit A, B et C, trois matrices carrées d'ordre n, telles que $BC = I_{n\times n}$ et $AB = I_{n\times n}$. Démontrer que $A = C$.

34. Soit $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$ et $(A + B)$, des matrices inversibles. Démontrer que $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B(B + A)^{-1}A$.

35. Démontrer le théorème 3.3.

Si A est une matrice carrée d'ordre n triangulaire supérieure (ou triangulaire inférieure), alors $\det A = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \ldots a_{nn}$, que l'on peut noter

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

36. Démontrer le théorème 3.7.

Si A est une matrice carrée d'ordre n et si $k \in \mathbb{R}$, alors $\det(kA) = k^n \det A$.

37. Démontrer le théorème 3.19, dans le cas général.

Si A est une matrice carrée d'ordre n, où $n \geq 2$, telle que $\det A \neq 0$, alors la matrice inverse de A, notée A^{-1}, existe et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{adj}\, A.$$

4 Vecteurs géométriques et vecteurs algébriques



Perspective historique 182
Exercices préliminaires 183
4.1 Notion de vecteurs géométriques 184
4.2 Addition et soustraction de vecteurs géométriques 191
4.3 Multiplication d'un vecteur géométrique par un scalaire 205
4.4 Vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^n$ 213
4.5 Opérations sur les vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^n$ 225
Révision des concepts 237
Exercices récapitulatifs 238
Problèmes de synthèse 242

Le vecteur est un outil mathématique fréquemment utilisé par les scientifiques, car parfois la grandeur ou l'intensité ne suffit pas pour décrire certaines quantités physiques. En effet, certaines propriétés des vecteurs sont utilisées en mécanique (force, vitesse, etc.) et en électricité (champ électrique). En mathématique, plusieurs problèmes géométriques peuvent être résolus à l'aide de certaines propriétés des vecteurs.

Dans ce chapitre, nous étudierons les vecteurs géométriques : définition, représentation géométrique, addition de vecteurs et multiplication d'un vecteur par un scalaire. Nous étudierons par la suite les vecteurs à l'intérieur de systèmes d'axes. Nous verrons les vecteurs algébriques dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$ avant de les généraliser dans $\mathbb{R}^n$.

En particulier, l'étudiant pourra résoudre le problème suivant (qui se trouve au n° 8 des problèmes de synthèse, à la page 243).

Soit A et B, deux points directement opposés de chaque côté d'une rivière de 1 km de largeur. Jean-François part de A en pagayant à la vitesse de 6 km/h parallèlement à AB. La vitesse du courant perpendiculaire à AB est de 8 km/h.

a) Déterminer la vitesse à laquelle il s'éloigne de A.

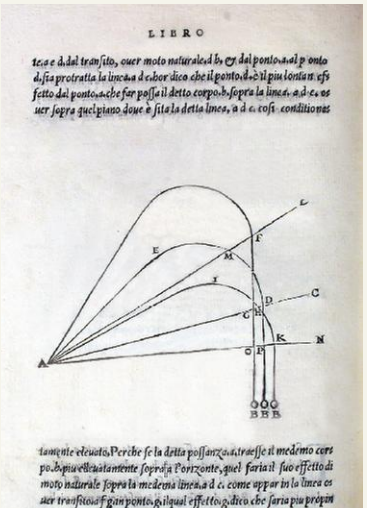
b) À quelle distance de B arrivera-t-il de l'autre côté de la rivière ?

[…]

De la mécanique aux segments orientés

Pendant l'Antiquité, la conception qu'ont les Grecs des mouvements est très différente de la nôtre. Ainsi, ils n'ont pas d'idée claire de la trajectoire exacte d'un projectile lancé dans les airs. La physique d'Aristote offre peu d'outils intellectuels pour aller au-delà des perceptions premières fournies par nos sens. Pour comprendre l'approche des Grecs devant ce problème, pensons à la façon dont est traité le mouvement dans certains dessins animés. Par exemple, nous voyons parfois Bugs Bunny courir jusqu'au bord d'une falaise et se retrouver au-dessus du vide. Pendant un certain temps, il continue horizontalement en ligne droite… puis, tout à coup, il s'arrête un instant avant de tomber verticalement vers le sol. Cette perception du mouvement ne nous semble pas complètement impossible. Elle suppose en fait que les mouvements ne se combinent pas, comme si le mouvement horizontal continue jusqu'à temps qu'il s'épuise. C'est seulement à ce moment que l'attraction terrestre peut entrer en action, et que l'objet, en l'occurrence Bugs Bunny, tombe inexorablement vers le sol. Depuis la fin de la falaise, il a parcouru non pas une trajectoire parabolique, mais plutôt un genre de «L» inversé. Cette façon de voir la chute des corps ne change pas jusqu'à la Renaissance, aux XV^{e} et XVI^{e} siècles.

En 1586, l'ingénieur et mathématicien belge **Simon Stevin** (1548-1620) a l'idée, en faisant des expériences sur le plan incliné, du parallélogramme de forces qui permet de combiner l'action simultanée de deux mouvements ou forces. De façon similaire, Galilée (1564-1642) montrera expérimentalement qu'un corps en chute libre est soumis à l'action simultanée, mais indépendante, de l'inertie et de l'attraction terrestre. Autrement dit, l'effet de l'attraction verticale n'est pas influencé par le déplacement horizontal du corps. Dès lors, Galilée est capable de déterminer que la trajectoire d'un corps qui se déplace horizontalement et qu'on laisse subitement à lui-même tombe en suivant une trajectoire parabolique. Ainsi, se met en place l'idée que deux forces agissant sur un corps peuvent être remplacées par une seule, la résultante.



L'ingénieur et mathématicien italien Niccolò Fontana, dit Tartaglia (1499-1557), tente de déterminer la trajectoire d'un boulet de canon. Il propose une trajectoire en trois sections : une ligne droite et un arc de cercle suivis d'une ligne verticale. La mécanique d'Aristote l'influence encore.

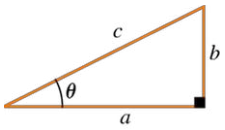
Alors même que Galilée développe ses idées avec un minimum d'outils mathématiques, la géométrie analytique se développe. René Descartes (1596-1650) et Pierre de Fermat (1601-1665) sont les premiers à voir l'utilité des coordonnées et des expressions algébriques exprimant la relation entre les deux coordonnées des points d'une courbe dans le plan ou entre les trois coordonnées des points d'une courbe dans l'espace. Mais ce nouvel outil symbolique n'est pas immédiatement utilisé par les physiciens.

La représentation géométrique des forces laisse à désirer jusqu'au milieu du XIX^{e} siècle. Dans la première moitié de ce siècle, **Hermann Günther Grassmann** (1809-1877) enseigne dans la petite ville de Stettin, en Allemagne (cette ville fait aujourd'hui partie de la Pologne du Nord et est connue sous le nom de Szczecin), et ne peut consacrer tout son temps aux mathématiques. Au cours des années 1830, en élaborant une théorie des marées, il développe un calcul géométrique basé sur la constatation suivante : «Les segments AB et BA sont des grandeurs opposées et AB + BC = AC même quand A, B et C ne sont pas sur une ligne droite.» Grassmann met donc en forme une théorie des segments orientés, que nous appelons les vecteurs géométriques. Dans un livre publié en 1844, il enrichit grandement ce calcul en définissant le produit de deux segments orientés (nos vecteurs) comme étant la surface du parallélogramme défini par les deux segments et le produit de trois segments comme étant le volume du parallélépipède formé par ces trois segments. À partir de ces définitions purement géométriques, Grassmann arrive à définir ce qui pourrait caractériser les opérations à effectuer sur des segments orientés dans des espaces de plus de trois dimensions. Ces caractéristiques correspondent essentiellement aux 10 propriétés des espaces vectoriels présentées dans la définition 5.6 du chapitre 5.

Malheureusement, Grassmann n'est pas connu des autres mathématiciens et son style lourd en rebute plus d'un. Son ouvrage remporte peu de succès. En réponse aux critiques parfois acerbes, il réédite son livre en 1862 en améliorant la présentation… sans beaucoup plus de succès. Il n'en demeure pas moins qu'il a établi les bases géométriques de ce que nous appelons maintenant le calcul vectoriel.

Exercices préliminaires

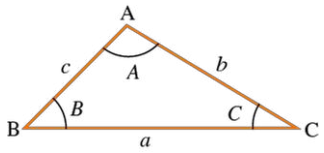
1. Soit le triangle rectangle ci-dessous.



a) Exprimer les fonctions trigonométriques sin θ, cos θ et tan θ en fonction des côtés a, b et c.

b) Exprimer la relation entre a, b et c.

2. Soit le triangle ci-dessous.



a) Écrire les équations résultant de la loi des sinus.

b) Compléter les égalités suivantes à partir de la loi des cosinus.

i) $a^2 =$ _____

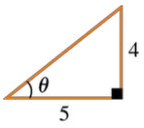
ii) $b^2 =$ _____

iii) $c^2 =$ _____

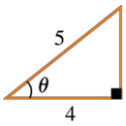
3. Déterminer, en degrés, la mesure approximative de l'angle θ si :

a) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$, où $\theta \in [0°, 90°]$

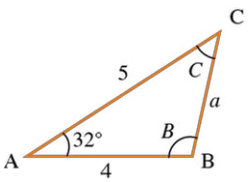
b)



c)

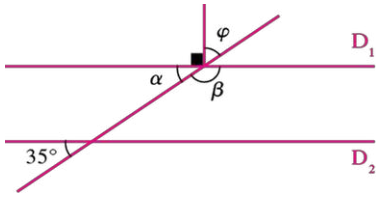


4. Déterminer la valeur de a ainsi que la mesure, en degrés, des angles B et C dans le triangle ci-dessous.

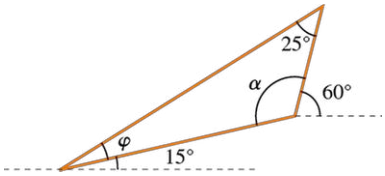


5. Dans un parc d'attractions, la rame de voitures des montagnes russes parcourt 30 m linéairement selon un angle d'élévation de 38°. Déterminer le déplacement horizontal, x, et le déplacement vertical, y, de la rame de voitures.

6. a) Déterminer la mesure des angles α, β et φ représentés ci-dessous, où $D_1 /\!/ D_2$.



b) Déterminer la mesure des angles α et φ dans le triangle ci-dessous.



7. a) Soit les points $P(x_1, y_1)$ et $Q(x_2, y_2)$. Déterminer la distance $d(P, Q)$ entre P et Q.

b) Soit les points A(-2, -2), B(2, 1) et C(5, -3). Déterminer la distance entre les points

i) A et B ; ii) A et C ; iii) B et C.

c) Déterminer la nature du triangle ABC.

8. En choisissant parmi les caractéristiques suivantes :

1) les diagonales se coupent en leur milieu,

2) les diagonales sont orthogonales,

3) les diagonales sont de longueur égale,

donner les caractéristiques des diagonales

a) d'un parallélogramme quelconque ;

b) d'un losange quelconque ;

c) d'un carré ;

d) d'un rectangle quelconque.

9. Donner la formule du volume V

a) d'une sphère de rayon r ;

b) d'une pyramide, en fonction de l'aire A de la base et de la hauteur h de la pyramide.

4.1 Notion de vecteurs géométriques

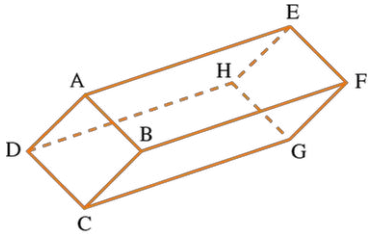
Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra se familiariser avec la notion de vecteurs géométriques.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de donner la définition d'un vecteur géométrique ;
- de déterminer l'origine d'un vecteur géométrique ;
- de déterminer l'extrémité d'un vecteur géométrique ;
- de déterminer la direction d'un vecteur géométrique ;
- de déterminer le sens d'un vecteur géométrique ;
- de déterminer la norme d'un vecteur géométrique ;
- de donner la définition de vecteurs nuls, vecteurs unitaires, vecteurs parallèles, vecteurs équipollents et vecteurs opposés ;
- d'identifier des vecteurs nuls, des vecteurs unitaires, des vecteurs parallèles, des vecteurs équipollents et des vecteurs opposés.

Soit le parallélépipède suivant.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$

$\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{GB}$

4

Définition d'un vecteur géométrique

Scalaire

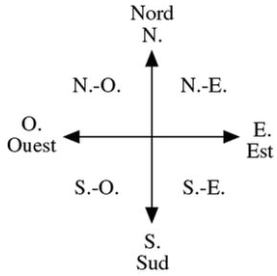
Certaines quantités mesurables sont entièrement définies par un nombre avec ou sans l'unité de mesure appropriée. Ce nombre s'appelle un scalaire.

Exemple 1 Donnons des exemples de quantités mesurables définies par un scalaire.

Quantité mesurable définie par un scalaire	Scalaire avec ou sans unité de mesure
Taille de Françoise	1,52 m
Température extérieure	-4 °C
Volume d'un cube ayant une arête de 2 cm	8 cm^3
Durée d'une activité	90 min
Masse d'un électron	10^{-28} kg
Potentiel électrique	220 V
Aire d'un cercle ayant un rayon de 4 mètres	16π m^2
Âge de Pierre	55 ans
Coût d'un téléviseur	659 $
Nombre	5 (aucune unité de mesure)

Vecteur

D'autres quantités ne peuvent pas être définies uniquement par un scalaire. Il faut donner, en plus, la direction et le sens ; une telle quantité s'appelle quantité vectorielle ou vecteur.



Exemple 2 Donnons des exemples de quantités définies par un vecteur.

Quantité définie par un vecteur	Scalaire avec unité de mesure, direction et sens
Déplacement d'un bateau	3 km, 80° sud-ouest (S.-O.)
Force d'attraction que la Terre exerce sur la Lune	$19{,}9 \times 10^{19}$ N, vers le centre de la Terre
Accélération d'un corps en chute libre	9,8 m/s^2, vers le centre de la Terre
Vitesse et cap d'un avion	600 km/h, 37° nord-est (N.-E.)

DÉFINITION 4.1

Un **vecteur géométrique** est un segment de droite orienté possédant les caractéristiques suivantes.

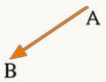
1) Une **origine** : point de départ du segment.
2) Une **extrémité** : point d'arrivée du segment, où nous trouvons une pointe de flèche.
3) Une **direction** : donnée par une droite D supportant le segment (ou par toute droite parallèle à D).
4) Un **sens** : de l'origine vers l'extrémité.
5) Une **norme** : distance entre l'origine et l'extrémité du segment.

4

Notation

L'origine et l'extrémité d'un vecteur sont généralement désignées par des lettres majuscules.

Exemple 3 Soit le vecteur géométrique ci-contre.



Précisons les caractéristiques de ce vecteur.

Origine

1) A est l'origine de ce vecteur.

Extrémité

2) B est l'extrémité de ce vecteur.

   Ce vecteur est noté $\overrightarrow{AB}$.

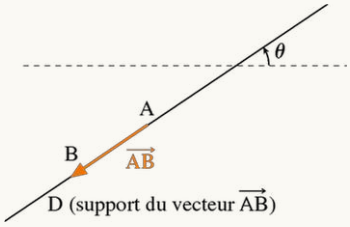
   Nous pourrions aussi utiliser une lettre minuscule surmontée d'une flèche pour désigner ce vecteur, par exemple $\vec{v}$.

Direction

3) La droite D, appelée support du vecteur $\overrightarrow{AB}$, donne la direction de ce vecteur. Toute droite parallèle à D donne également la direction de ce vecteur.

   Dans $\mathbb{R}^2$, nous caractérisons la direction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par l'angle θ (où $0° \leq \theta < 180°$) que forme le support D du vecteur avec une droite horizontale.

   Cet angle est mesuré de la droite horizontale vers D, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.



Dans $\mathbb{R}^3$, nous verrons dans le chapitre 8 que la direction d'une droite D sera donnée par les angles directeurs de la droite.

Sens

4) Le sens du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donné par la position de la flèche à l'extrémité du vecteur. Dans $\mathbb{R}^2$, on détermine le sens d'un vecteur à l'aide des points cardinaux.

Norme

5) La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la distance entre A et B.

Les termes longueur, grandeur ou module sont aussi utilisés pour désigner la distance entre A et B.

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est notée $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Précisons que $\|\overrightarrow{AB}\| > 0$ lorsque B et A sont différents et que $\|\overrightarrow{AB}\| = 0$ lorsque B et A coïncident.

Remarque : La direction et le sens d'un vecteur déterminent son orientation.

4

Exemple 4 Déterminons le sens des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$, $\vec{u}_5$, $\vec{u}_6$ et $\vec{u}_7$ représentés ci-dessous.

$\vec{u}_1$ est de sens N., où $\theta_1 = 90°$

$\vec{u}_2$ est de sens N.-E., où $0° < \theta_2 < 90°$

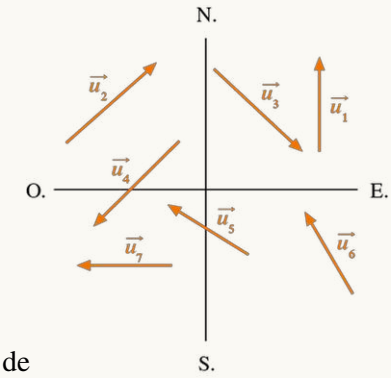
$\vec{u}_3$ est de sens S.-E., où $90° < \theta_3 < 180°$

$\vec{u}_4$ est de sens S.-O., où $0° < \theta_4 < 90°$

$\vec{u}_5$ est de sens N.-O., où $90° < \theta_5 < 180°$

$\vec{u}_6$ est de sens N.-O., où $90° < \theta_6 < 180°$

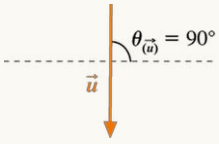
$\vec{u}_7$ est de sens O., où $\theta_7 = 0°$



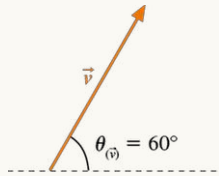
Remarquons que même si $\vec{u}_5$ et $\vec{u}_6$ sont tous deux de sens N.-O., ils n'ont pas la même direction car $\theta_5 \neq \theta_6$.

Exemple 5 Représentons les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ suivants.

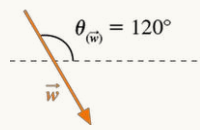
$\|\vec{u}\| = 3$ et $\theta_{(\vec{u})} = 90°$ dans le sens sud (S.)



$\|\vec{v}\| = 5$ et $\theta_{(\vec{v})} = 60°$ dans le sens nord-est (N.-E.)



$\|\vec{w}\| = 4$ et $\theta_{(\vec{w})} = 120°$ dans le sens sud-est (S.-E.)



$\|\vec{t}\| = 2$ et $\theta_{(\vec{t})} = 0°$ dans le sens est (E.)



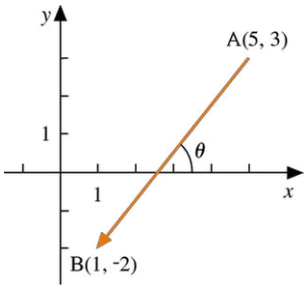
Exercices de compréhension 4.1

1. Représenter les vecteurs suivants à partir d'une même origine.

$\vec{u}$, tel que $\theta = 90°$ dans le sens N. et $\|\vec{u}\| = 1$

$\vec{v}$, tel que $\theta = \frac{3\pi}{4}$ dans le sens N.-O. et $\|\vec{v}\| = 3$

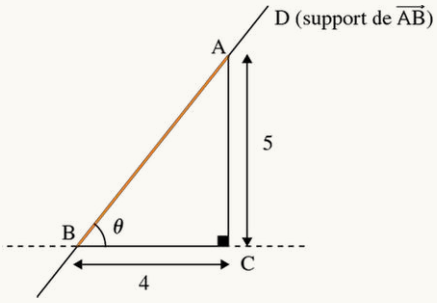
$\vec{w}$, tel que $\theta = 70°$ dans le sens S.-O. et $\|\vec{w}\| = 2$



Exemple 6 Soit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dont l'origine est le point A(5, 3), et l'extrémité, le point B(1, -2), et dont la représentation est ci-contre.

a) Déterminons la direction de ce vecteur, c'est-à-dire l'angle θ représenté sur le graphique ci-contre.

Par construction géométrique, nous avons le triangle suivant.



$$\tan\theta = \frac{5}{4}$$
$$\theta = \text{Arc tan}\left(\frac{5}{4}\right)$$
$$\theta = 51{,}340\ldots$$

d'où $\theta \approx 51{,}3°$

b) Le sens de ce vecteur est sud-ouest (S.-O.).

c) Calculons la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $\|\overrightarrow{AB}\|$.

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \qquad \text{(Pythagore)}$$

d'où $\|\overrightarrow{AB}\| \approx 6{,}4$

Vecteurs géométriques particuliers

Définissons maintenant quelques vecteurs géométriques particuliers.

DÉFINITION 4.2

Le **vecteur nul**, noté $\vec{O}$, est le vecteur géométrique dont l'origine et l'extrémité coïncident.

Remarque : 1) La direction et le sens de $\vec{O}$ sont indéterminés.

2) La norme de $\vec{O}$ est 0, c'est-à-dire $\|\vec{O}\| = 0$.

3) Si $\|\vec{v}\| = 0$, alors $\vec{v} = \vec{O}$.

DÉFINITION 4.3

Un vecteur $\vec{u}$ tel que $\|\vec{u}\| = 1$ est appelé **vecteur unitaire**.

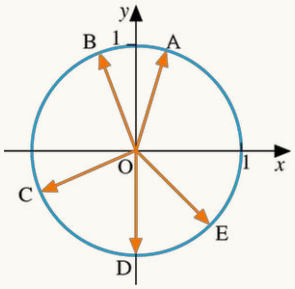
Exemple 1

a) Soit le cercle de centre O(0, 0) et de rayon 1.

Tous les vecteurs d'origine O dont l'extrémité est sur la circonférence du cercle sont des vecteurs unitaires.

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont des vecteurs unitaires, car

$$\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{OD}\| = \|\overrightarrow{OE}\| = 1.$$

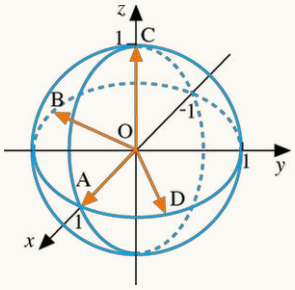


b) Soit la sphère de centre O(0, 0, 0) et de rayon 1.

Tous les vecteurs d'origine O dont l'extrémité est sur la sphère sont des vecteurs unitaires.

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont des vecteurs unitaires, car

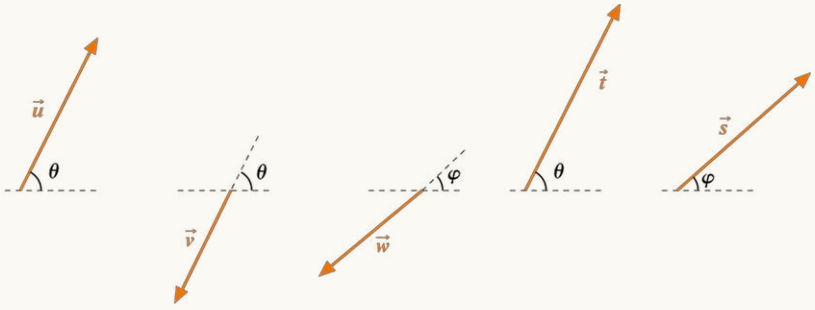
$$\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{OD}\| = 1.$$



DÉFINITION 4.4

Deux **vecteurs géométriques** non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **parallèles** ($\vec{u} /\!/ \vec{v}$) si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.

Exemple 2 Déterminons les vecteurs parallèles parmi les vecteurs suivants.



Nous avons $\vec{u} /\!/ \vec{v}$, $\vec{u} /\!/ \vec{t}$ et $\vec{v} /\!/ \vec{t}$; $\vec{w} /\!/ \vec{s}$.

DÉFINITION 4.5

1) Deux **vecteurs** non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ sont **équipollents** ou **égaux** si et seulement si les deux vecteurs ont

   i) la même direction ;

   ii) le même sens ;

   iii) la même norme.

   Ces deux vecteurs équipollents sont notés $\vec{u} = \vec{v}$.

2) Deux **vecteurs** non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ sont **opposés** si et seulement si les deux vecteurs ont

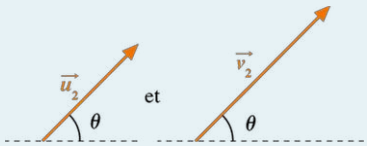
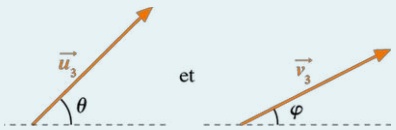
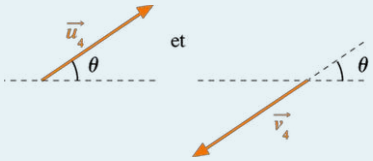
   i) la même direction ;

   ii) un sens opposé ;

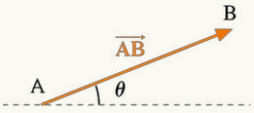
   iii) la même norme.

   Le vecteur $\vec{v}$, opposé à $\vec{u}$, est noté $\vec{v} = -\vec{u}$.

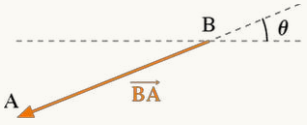
Le tableau suivant contient les éléments nécessaires pour déterminer si deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont équipollents ou opposés.

Représentation	Direction	Sens	Norme	Conclusion
	θ même direction	N.-E. même sens	$\lVert\vec{u}_1\rVert = \lVert\vec{v}_1\rVert$ même norme	équipollents $\vec{u}_1 = \vec{v}_1$
	θ même direction	N.-E. même sens	$\lVert\vec{u}_2\rVert \neq \lVert\vec{v}_2\rVert$ norme différente	non équipollents $\vec{u}_2 \neq \vec{v}_2$ non opposés $\vec{u}_2 \neq -\vec{v}_2$
	$\theta \neq \varphi$ direction différente	N.-E. même sens	$\lVert\vec{u}_3\rVert = \lVert\vec{v}_3\rVert$ même norme	non équipollents $\vec{u}_3 \neq \vec{v}_3$ non opposés $\vec{u}_3 \neq -\vec{v}_3$
	θ même direction	$\vec{u}_4$: N.-E. $\vec{v}_4$: S.-O. sens opposé	$\lVert\vec{u}_4\rVert = \lVert\vec{v}_4\rVert$ même norme	opposés $\vec{v}_4 = -\vec{u}_4$ $\vec{u}_4 = -\vec{v}_4$

Exemple 3 Soit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ci-contre, d'origine A et d'extrémité B.



Représentons le vecteur $\overrightarrow{BA}$, d'origine B et d'extrémité A.



Ainsi, $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ et nous écrivons $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. (définition 4.5)

Exemple 4 Soit le parallélogramme ABCD suivant.



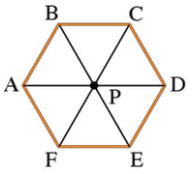
Nous pouvons écrire

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$;

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$

Exercices de compréhension 4.1

2. Soit P, le centre de l'hexagone régulier ABCDEF ci-contre.



Déterminer tous les vecteurs

a) équipollents à $\overrightarrow{AB}$;

b) opposés à $\overrightarrow{CD}$;

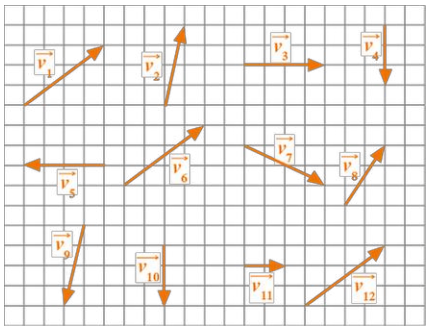
c) parallèles à $\overrightarrow{FE}$.

EXERCICES 4.1

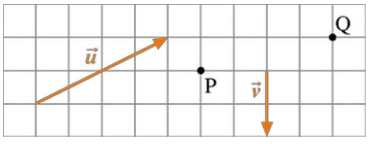
1. Parmi les vecteurs suivants, identifier

a) les vecteurs équipollents ;

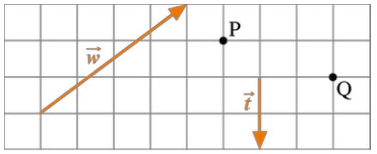
b) les vecteurs opposés.



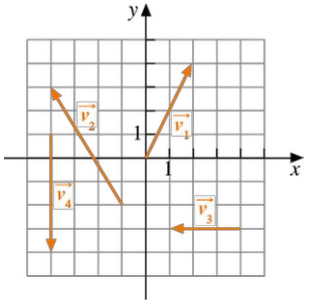
2. a) Du point P, tracer un vecteur équipollent à $\vec{u}$, et du point Q, tracer un vecteur équipollent à $\vec{v}$.



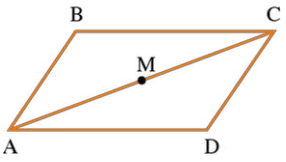
b) Du point P, tracer un vecteur opposé à $\vec{w}$, et du point Q, tracer un vecteur opposé à $\vec{t}$.



3. Déterminer les coordonnées du point d'origine, les coordonnées du point d'extrémité, la direction, le sens et la norme des vecteurs suivants.



4. Soit le parallélogramme ABCD suivant et M, le point milieu de la diagonale AC.



Déterminer, si c'est possible, tous les vecteurs

a) équipollents à $\overrightarrow{AB}$;

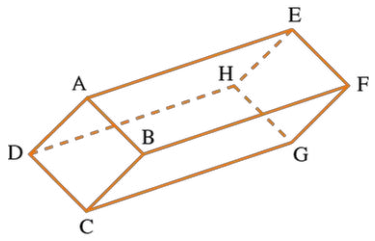
b) opposés à $\overrightarrow{DA}$;

c) équipollents à $\overrightarrow{AC}$;

d) opposés à $\overrightarrow{AM}$;

e) parallèles à $\overrightarrow{CA}$.

5. Soit le parallélépipède droit ci-dessous.



Déterminer, si c'est possible, tous les vecteurs

a) équipollents à $\overrightarrow{CB}$;

b) équipollents à $\overrightarrow{HD}$;

c) opposés à $\overrightarrow{HE}$;

d) opposés à $\overrightarrow{AH}$;

e) équipollents à $\overrightarrow{DG}$;

f) équipollents à $\overrightarrow{CE}$;

g) opposés à $\overrightarrow{DF}$;

h) opposés à $\overrightarrow{BD}$.

6. Représenter les vecteurs suivants à partir d'une même origine.

$\vec{u}$, tel que $\theta = 45°$ dans le sens N.-E. et $\|\vec{u}\| = 1$

$\vec{v}$, tel que $\theta = 90°$ dans le sens S. et $\|\vec{v}\| = 2$

$\vec{w}$, tel que $\theta = 0°$ dans le sens O. et $\|\vec{w}\| = 1{,}5$

$\vec{t}$, tel que $\theta = 135°$ dans le sens S.-E. et $\|\vec{t}\| = 3$

$\vec{r}$, tel que $\theta = \frac{\pi}{6}$ dans le sens S.-O. et $\|\vec{r}\| = 4$

4.2 Addition et soustraction de vecteurs géométriques

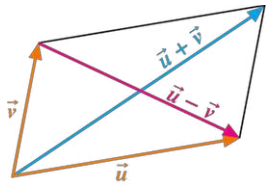
Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra appliquer les méthodes d'addition de vecteurs géométriques.

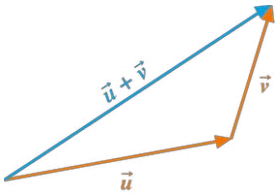
Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- d'additionner des vecteurs géométriques de directions différentes à l'aide de la méthode du parallélogramme ;
- d'additionner des vecteurs géométriques de directions différentes à l'aide de la méthode du triangle ;
- de soustraire des vecteurs géométriques ;
- d'additionner des vecteurs géométriques à l'aide de la loi de Chasles ;
- d'énumérer les propriétés de l'addition de vecteurs géométriques ;
- de démontrer certaines propriétés de l'addition de vecteurs géométriques ;
- d'appliquer les propriétés de l'addition de vecteurs géométriques ;
- de calculer la norme d'un vecteur somme ;
- de calculer la direction d'un vecteur somme ;
- de déterminer le sens d'un vecteur somme ;
- de décomposer un vecteur en une addition d'un vecteur horizontal et d'un vecteur vertical ;
- de donner la définition de la projection orthogonale d'un vecteur ;
- de calculer la norme de la projection orthogonale d'un vecteur.

Méthode du parallélogramme



Méthode du triangle

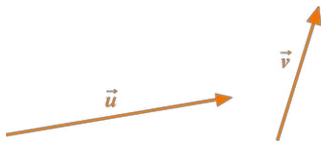


Vecteur somme et vecteur différence

L'addition des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donne le vecteur somme, également appelé vecteur résultant ou résultante, noté $\vec{u} + \vec{v}$.

Ce vecteur somme est obtenu en utilisant une des deux méthodes suivantes.

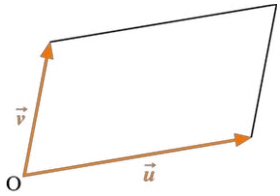
Soit les vecteurs de directions différentes $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-contre que nous voulons additionner.



Méthode du parallélogramme

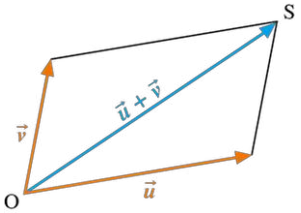
Étape 1

Faire coïncider l'origine des deux vecteurs en un point O arbitraire, et compléter le parallélogramme engendré par les deux vecteurs.



Étape 2

Tracer la diagonale reliant O au sommet opposé S du parallélogramme.



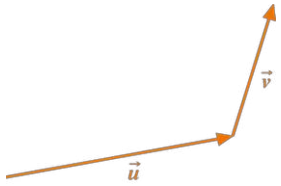
$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OS}$

Si S désigne le sommet opposé à O, alors le vecteur d'origine O et d'extrémité S est le vecteur somme, noté $\vec{u} + \vec{v}$, qui est le résultat de l'addition des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Méthode du triangle

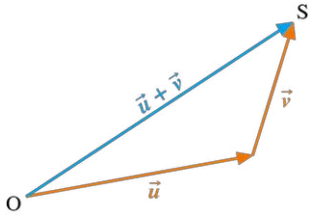
Étape 1

Faire coïncider l'origine de $\vec{v}$ avec l'extrémité de $\vec{u}$.



Étape 2

Compléter le triangle engendré par les deux vecteurs.



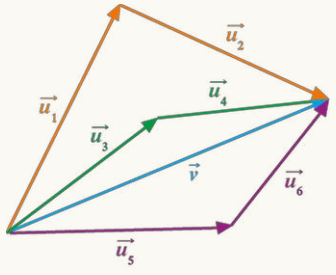
$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OS}$

Si O est l'origine de $\vec{u}$ et S l'extrémité de $\vec{v}$, alors le vecteur d'origine O et d'extrémité S est le vecteur somme, noté $\vec{u} + \vec{v}$, qui est le résultat de l'addition des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarque : Le vecteur somme résultant de l'addition de deux vecteurs est unique à équipollence près. Cependant, un même vecteur peut être obtenu en additionnant des vecteurs différents.

Exemple 1 La figure ci-contre nous permet de constater que :

$\vec{v} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$
$\vec{v} = \vec{u_3} + \vec{u_4}$
$\vec{v} = \vec{u_5} + \vec{u_6}$



Lorsque nous additionnons deux vecteurs ayant la même direction, le vecteur somme a la même direction que ces deux vecteurs.

Vecteurs parallèles

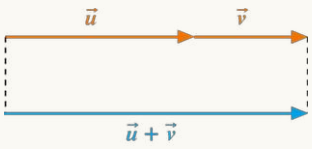
Exemple 2 Soit les vecteurs de même direction $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ suivants.



a) Déterminons $\vec{u} + \vec{v}$.

En faisant coïncider l'origine de $\vec{v}$ avec l'extrémité de $\vec{u}$, nous obtenons la figure ci-contre.

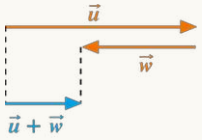
Dans ce cas, nous avons $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$



b) Déterminons $\vec{u} + \vec{w}$.

En faisant coïncider l'origine de $\vec{w}$ avec l'extrémité de $\vec{u}$, nous obtenons la figure ci-contre.

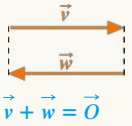
Dans ce cas, nous avons $\|\vec{u} + \vec{w}\| = \|\vec{u}\| - \|\vec{w}\|$



c) Déterminons $\vec{v} + \vec{w}$.

En faisant coïncider l'origine de $\vec{w}$ avec l'extrémité de $\vec{v}$, nous obtenons la figure ci-contre.

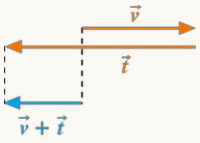
Dans ce cas, nous avons $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{v}\| - \|\vec{w}\| = 0$



d) Déterminons $\vec{v} + \vec{t}$.

En faisant coïncider l'origine de $\vec{t}$ avec l'extrémité de $\vec{v}$, nous obtenons la figure ci-contre.

Dans ce cas, nous avons $\|\vec{v} + \vec{t}\| = \|\vec{t}\| - \|\vec{v}\|$



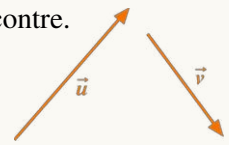
DÉFINITION 4.6

En soustrayant le vecteur $\vec{v}$ du vecteur $\vec{u}$, nous obtenons le **vecteur différence**, noté $\vec{u} - \vec{v}$, qui est défini par

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

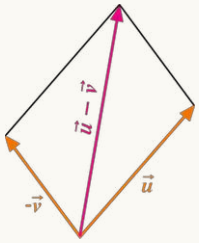
Ainsi, pour effectuer $\vec{u} - \vec{v}$, il suffit d'additionner à $\vec{u}$ l'opposé de $\vec{v}$, c'est-à-dire $-\vec{v}$.

Exemple 3 Déterminons $\vec{u} - \vec{v}$ pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-contre.



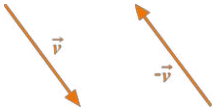
Par définition, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Par la méthode du parallélogramme :



Par la méthode du triangle :





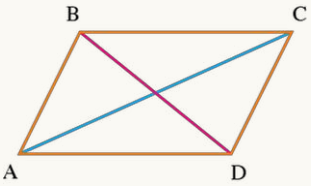
Exemple 4 Soit le parallélogramme ABCD ci-dessous. Exprimons les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (méthode du parallélogramme)

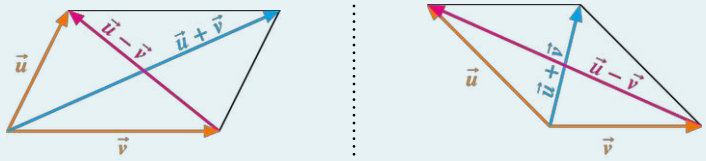
$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$ (méthode du parallélogramme)

$= \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AD})$ (car $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$)

$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ (définition de la soustraction)



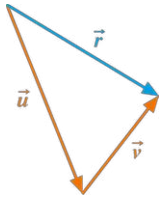
En considérant l'exemple 4 précédent, nous constatons que les diagonales d'un parallélogramme correspondent respectivement à la somme et à la différence des deux vecteurs qui engendrent le parallélogramme.



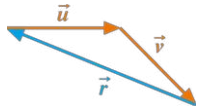
Exercices de compréhension 4.2

1. À l'aide des représentations suivantes, exprimer le vecteur $\vec{r}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

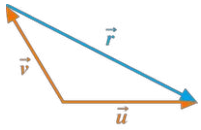
a)



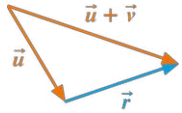
b)



c)



d)

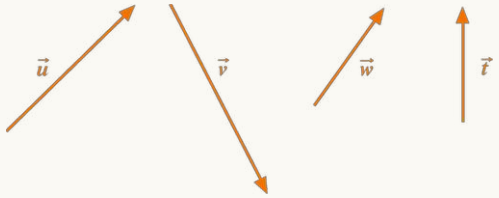


Addition de *n* vecteurs géométriques

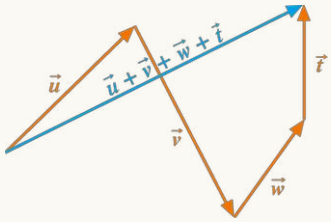
De façon générale, lorsque nous devons additionner plus de deux vecteurs, il suffit de placer ces vecteurs de façon consécutive, c'est-à-dire placer le premier vecteur, faire coïncider l'origine du deuxième avec l'extrémité du premier, faire coïncider l'origine du troisième avec l'extrémité du deuxième, et ainsi de suite.

Le vecteur somme est celui dont l'origine coïncide avec celle du premier vecteur, et l'extrémité, avec celle du dernier vecteur.

Exemple 1 Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ ci-dessous.

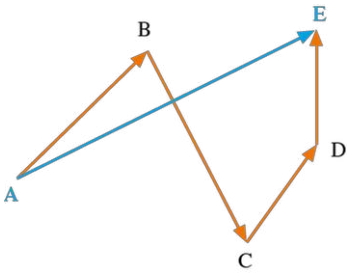


Déterminons $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{t}$ en plaçant ces vecteurs de façon consécutive.



Remarque : En désignant chaque origine et chaque extrémité des vecteurs précédents par une lettre, nous obtenons

Loi de Chasles

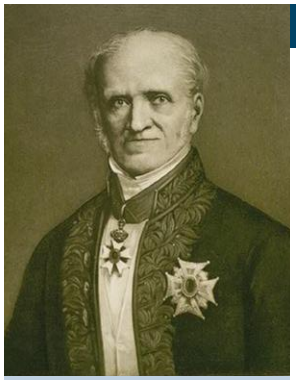


$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$

Ce résultat s'appelle la loi de Chasles.

Cette loi peut être généralisée de la façon suivante.

Loi de Chasles : $\overrightarrow{AX_1} + \overrightarrow{X_1X_2} + \overrightarrow{X_2X_3} + \ldots + \overrightarrow{X_{n-1}X_n} + \overrightarrow{X_nB} = \overrightarrow{AB}$



Michel Chasles
(1793-1880)

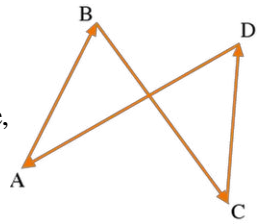
Il y a environ 180 ans...

Michel Chasles commence sa carrière de mathématicien, alors qu'il a près de 44 ans, en publiant un livre qui fait encore autorité aujourd'hui : *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. Dans sa jeunesse, il sert dans les armées de Napoléon avant de tenter, sans succès, sa chance comme courtier. Fort heureusement, issu d'une famille bourgeoise, il n'a pas vraiment besoin de gagner son pain quotidien. La publication de son livre change le cours de sa vie. En 1848, il devient professeur à l'École polytechnique de Paris, puis à la Sorbonne. Il est élu à l'Académie des sciences en 1851. Toutefois, malgré ses talents de géomètre, Chasles fait preuve d'une grande crédulité. Ainsi, il est l'objet d'une fraude importante entre 1861 et 1869, alors qu'un faussaire lui vend pour de fortes sommes de fausses lettres prétendument écrites par Newton, Pascal et d'autres grands scientifiques. Lorsque l'affaire est dévoilée, le pauvre Chasles est la risée du monde scientifique et du public.

Remarque : Dans le cas particulier de la loi de Chasles où l'extrémité du dernier vecteur de l'addition coïncide avec l'origine du premier vecteur, nous avons

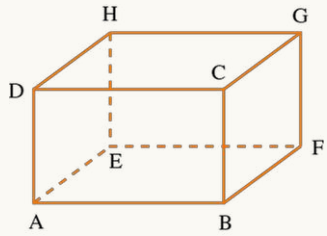
$$\overrightarrow{AX_1} + \overrightarrow{X_1X_2} + \ldots + \overrightarrow{X_{n-1}X_n} + \overrightarrow{X_nA} = \overrightarrow{AA} = \vec{O}.$$

Par exemple,



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{O}$$

Exemple 2 Soit le parallélépipède droit ci-contre.



a) Déterminons $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}$.

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AH}$ (loi de Chasles)

b) Déterminons $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EC}$ (loi de Chasles)

Lorsque la loi de Chasles ne peut être appliquée directement, nous pouvons remplacer, si c'est possible, certains vecteurs par des vecteurs équipollents de façon à appliquer la loi de Chasles.

c) Déterminons $\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{EF}$.

$\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG}$ ($\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$)

$= \overrightarrow{DG}$ (loi de Chasles)

d) Déterminons $\overrightarrow{HG} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{HG} + (-\overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{BA} + (-\overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB}$

($-\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EA}$ et $-\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DB}$)

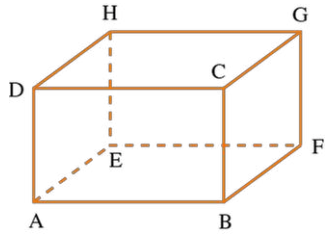
$= \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$

($\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$)

$= \overrightarrow{HB}$ (loi de Chasles)

Exercices de compréhension 4.2

2. Soit le parallélépipède droit ci-contre.



Déterminer

a) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AD}$;

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$;

c) $\overrightarrow{HG} - \overrightarrow{AB}$.

Propriétés de l'addition de vecteurs géométriques

Énonçons maintenant des propriétés relatives à l'addition de vecteurs géométriques.

Si V est l'ensemble des vecteurs géométriques, alors $\forall\ \vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w} \in V$, nous avons :

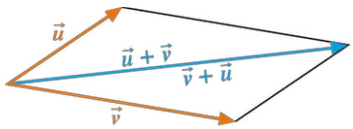
Propriété 1	$(\vec{u} + \vec{v}) \in V$	(fermeture pour l'addition de vecteurs géométriques)
Propriété 2	$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$	(commutativité de l'addition de vecteurs géométriques)
Propriété 3	$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$	(associativité de l'addition de vecteurs géométriques)
Propriété 4	$\vec{u} + \vec{O} = \vec{u}$	(il existe un **élément neutre** pour l'addition, noté $\vec{O}$, où $\vec{O} \in V$)
Propriété 5	$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{O}$	(il existe un **élément opposé** pour l'addition, noté $-\vec{u}$, où $-\vec{u} \in V$)

Illustrons géométriquement les propriétés 2 et 3.

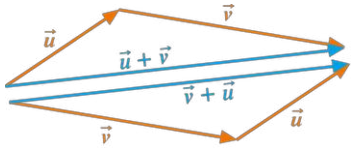
PROPRIÉTÉ 2

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativité de l'addition de vecteurs géométriques)

À l'aide de la méthode du parallélogramme, nous obtenons



À l'aide de la méthode du triangle, nous obtenons

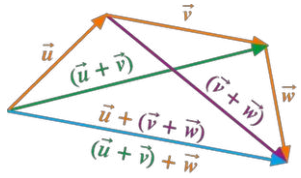


D'où $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

PROPRIÉTÉ 3

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (associativité de l'addition de vecteurs géométriques)

À l'aide de la méthode du triangle, nous obtenons la représentation ci-contre.



D'où $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

Norme, direction et sens d'un vecteur somme

De façon générale, pour déterminer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, la direction et le sens de $(\vec{u} + \vec{v})$, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs géométriques, nous pouvons utiliser

- le théorème de Pythagore et une fonction trigonométrique lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires ;
- la loi des cosinus et la loi des sinus (*voir l'exercice préliminaire n° 2, page 183*) lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont ni perpendiculaires ni parallèles.

DÉFINITION 4.7

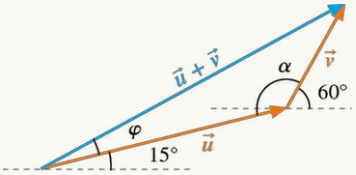
L'**angle entre deux vecteurs** est l'angle φ, où $0° \leq \varphi \leq 180°$, formé par les deux vecteurs ramenés à une même origine.

Exemple 1 Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, où

$\|\vec{u}\| = 6$, $\theta_{(\vec{u})} = 15°$ dans le sens N.-E. et

$\|\vec{v}\| = 3$, $\theta_{(\vec{v})} = 60°$ dans le sens N.-E.

a) Représentons $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $(\vec{u} + \vec{v})$ par la méthode du triangle.



Norme

b) Déterminons la norme de $(\vec{u} + \vec{v})$, c'est-à-dire $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

À l'aide de la loi des cosinus, nous obtenons

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\alpha, \text{ où } \alpha = (180° - 60°) + 15°$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{6^2 + 3^2 - 2(6)(3)\cos 135°}$$

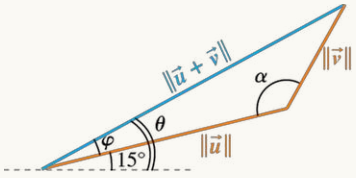
$$= \sqrt{70,455\ldots}$$

d'où $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 8,393\ldots$

$\theta = 15° + \varphi$

c) Déterminons la direction θ de $(\vec{u} + \vec{v})$, c'est-à-dire $(15° + \varphi)$, où φ est l'angle entre $\vec{u}$ et $(\vec{u} + \vec{v})$.

À l'aide de la loi des sinus, déterminons φ.



$$\frac{\sin\varphi}{\|\vec{v}\|} = \frac{\sin\alpha}{\|\vec{u} + \vec{v}\|}$$

$$\frac{\sin\varphi}{3} = \frac{\sin 135°}{8,393\ldots}$$

$$\varphi = \text{Arc sin}\left(\frac{3\sin 135°}{8,393\ldots}\right) = 14,638\ldots° \qquad (\varphi < 90°, \text{ car } \alpha = 135°)$$

Direction

Donc, la direction de $(\vec{u} + \vec{v})$ est $\theta = 29,638\ldots°$. $(\text{car } \theta = 15° + \varphi)$

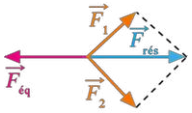
Sens

Le sens de $(\vec{u} + \vec{v})$ est N.-E.

D'où $\vec{u} + \vec{v}$ est tel que $\|\vec{u} + \vec{v}\| \approx 8,39$, $\theta \approx 29,64°$ dans le sens N.-E.

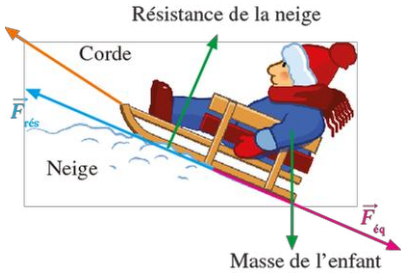
Applications en physique

En physique mécanique, il faut additionner plusieurs vecteurs pour déterminer la force résultante des forces appliquées à un même objet. Nous pouvons également déterminer la force équilibrante, qui est de même norme et de même direction que la résultante, mais de sens opposé à cette dernière.

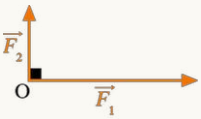


Par exemple, lorsqu'un enfant tire un traîneau sur la neige, nous pouvons représenter la force résultante et la force équilibrante comme suit.



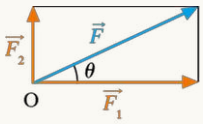


Exemple 1 Soit une force $\vec{F}_1$, où $\|\vec{F}_1\| = 5$ newtons, et une force $\vec{F}_2$, où $\|\vec{F}_2\| = 2$ newtons, appliquées à un objet O de la façon ci-contre.



Déterminons la norme, la direction et le sens du vecteur résultant $\vec{F}$, où $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

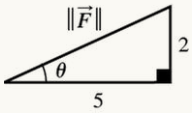
À l'aide de la méthode du parallélogramme, nous trouvons $\vec{F}$.



Norme

Déterminons $\|\vec{F}\|$, sachant que $\|\vec{F}_1\| = 5$ et que $\|\vec{F}_2\| = 2$.

$$\|\vec{F}\|^2 = \|\vec{F}_1\|^2 + \|\vec{F}_2\|^2 \qquad \text{(Pythagore)}$$
$$= 5^2 + 2^2 = 29$$
$$\|\vec{F}\| = \sqrt{29}$$



donc $\|\vec{F}\| \approx 5{,}39$ N.

Direction

Sachant que $\tan\theta = \frac{2}{5}$, $\theta = \text{Arc tan}\left(\frac{2}{5}\right) = 21{,}801\ldots$

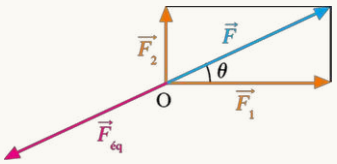
donc $\theta \approx 21{,}8°$.

Sens

Le sens de $\vec{F}$ est N.-E.

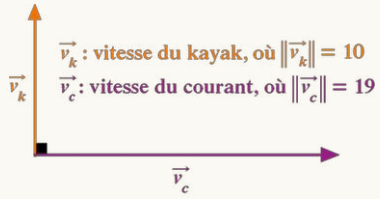
D'où la résultante $\vec{F}$ est une force d'environ 5,39 newtons appliquée dans une direction formant un angle d'environ 21,8° avec la force $\vec{F}_1$ dans le sens N.-E.

Remarque : La force équilibrante $\vec{F}_{éq}$ est de même norme et de même direction, mais de sens opposé à $\vec{F}$, c'est-à-dire S.-O.



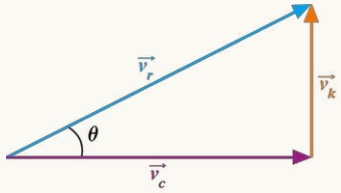
Exemple 2 Sylvie traverse en kayak une rivière perpendiculairement aux rives. La vitesse du kayak est de 10 nœuds et la vitesse du courant, parallèle aux rives, est de 19 nœuds.

a) Représentons la situation précédente à l'aide de deux vecteurs de même origine.



Direction

b) Déterminons la direction θ et la vitesse réelle $\|\vec{v}_r\|$ du kayak.



Méthode du triangle

$$\tan\theta = \frac{\|\vec{v}_k\|}{\|\vec{v}_c\|}$$

$$\tan\theta = \frac{10}{19} \qquad (\text{car } \|\vec{v}_k\| = 10 \text{ et } \|\vec{v}_c\| = 19)$$

$$\theta = \text{Arc tan}\left(\frac{10}{19}\right)$$

$$\theta = 27{,}758\ldots$$

Norme

$$\text{De } \|\vec{v}_r\|^2 = \|\vec{v}_k\|^2 + \|\vec{v}_c\|^2$$

$$\|\vec{v}_r\|^2 = 10^2 + 19^2$$

$$\|\vec{v}_r\| = \sqrt{461} = 21{,}470\ldots$$

d'où $\theta \approx 27{,}8°$ et $\|\vec{v}_r\| \approx 21{,}5$ nœuds.

Projection orthogonale

DÉFINITION 4.8

La **projection orthogonale** d'un vecteur $\vec{u}$ sur un vecteur $\vec{v}$ non nul est notée $\vec{u}_{\vec{v}}$ et est définie comme suit :

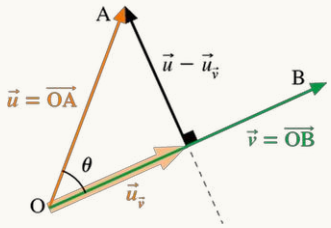
1) Lorsque $\vec{u} \neq \vec{O}$ et $\vec{u}$ est non parallèle à $\vec{v}$, $\vec{u}_{\vec{v}}$ est le vecteur parallèle à $\vec{v}$ tel que $(\vec{u} - \vec{u}_{\vec{v}})$ est perpendiculaire à $\vec{v}$.

2) Lorsque $\vec{u} \neq \vec{O}$ et $\vec{u}$ est parallèle à $\vec{v}$, $\vec{u}_{\vec{v}} = \vec{u}$.

3) Lorsque $\vec{u} = \vec{O}$, $\vec{u}_{\vec{v}} = \vec{O}$.

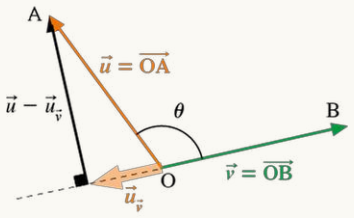
Exemple 1 Représentons $\vec{u}_{\vec{v}}$ pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants, où θ est l'angle entre les deux vecteurs.

a) Lorsque $0° < \theta < 90°$,



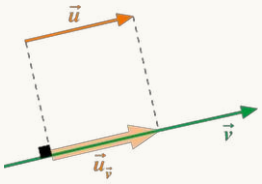
$\vec{u}_{\vec{v}}$ est de même sens que $\vec{v}$.

b) Lorsque $90° < \theta < 180°$,



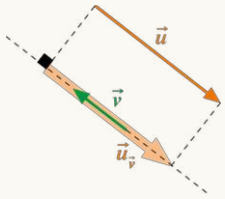
$\vec{u}_{\vec{v}}$ est de sens opposé à $\vec{v}$.

c) Lorsque $\theta = 0°$,



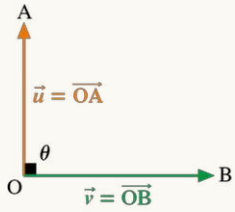
$\vec{u}_{\vec{v}} = \vec{u}$
et $\vec{u}_{\vec{v}}$ est de même sens que $\vec{v}$.

d) Lorsque $\theta = 180°$,



$\vec{u}_{\vec{v}} = \vec{u}$
et $\vec{u}_{\vec{v}}$ est de sens opposé à $\vec{v}$.

e) Lorsque $\theta = 90°$,



$\vec{u}_{\vec{v}} = \vec{O}$.

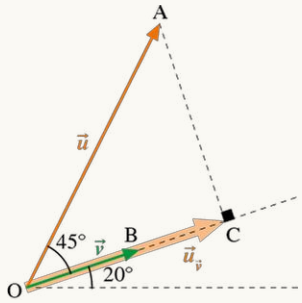
Remarque : La direction de $\vec{u}_{\vec{v}}$ est la même que celle de $\vec{v}$ lorsque $\vec{u}_{\vec{v}} \neq \vec{O}$.

Exemple 2 Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, trois vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 25$, $\theta_{(\vec{u})} = 65°$, $\|\vec{v}\| = 10$, $\theta_{(\vec{v})} = 20°$ et $\|\vec{w}\| = 15$, $\theta_{(\vec{w})} = 170°$.

a) Déterminons la norme de $\vec{u}_{\vec{v}}$ après avoir représenté les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u}_{\vec{v}}$.

$\vec{u}_{\vec{v}}$ a la même direction que $\vec{v}$ et le même sens que $\vec{v}$

$\vec{u} = \overrightarrow{OA}$
$\vec{v} = \overrightarrow{OB}$
$\vec{u}_{\vec{v}} = \overrightarrow{OC}$

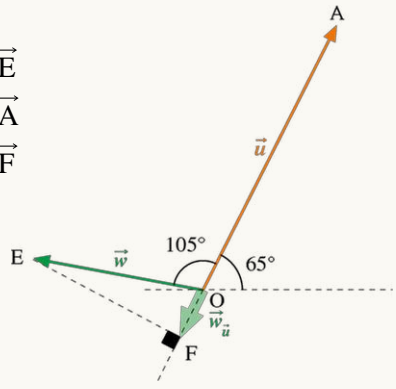


$$\begin{aligned}\|\vec{u}_{\vec{v}}\| &= \|\vec{u}\| \cos 45° \\ &= 25\,\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\approx 17{,}68\end{aligned}$$

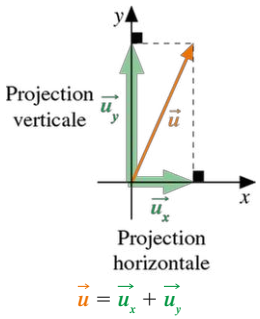
b) Déterminons la norme de $\vec{w}_{\vec{u}}$ après avoir représenté les vecteurs $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{w}_{\vec{u}}$.

$\vec{w}_{\vec{u}}$ a la même direction que $\vec{u}$ et est de sens opposé à $\vec{u}$

$\vec{w} = \overrightarrow{OE}$
$\vec{u} = \overrightarrow{OA}$
$\vec{w}_{\vec{u}} = \overrightarrow{OF}$



$$\begin{aligned}\|\vec{w}_{\vec{u}}\| &= \|\vec{w}\| \cos (180° - 105°) \\ &= 15 \cos 75° \\ &\approx 3{,}88\end{aligned}$$



Pour déterminer la norme, la direction et le sens d'un vecteur égal à la somme de vecteurs, nous pouvons décomposer chacun des vecteurs de la somme, par exemple $\vec{u}$, en une somme d'un vecteur horizontal appelé projection horizontale, notée $\vec{u}_x$, et d'un vecteur vertical appelé projection verticale, notée $\vec{u}_y$.

Exercices de compréhension 4.2

3. Soit $\vec{v}$ tel que $\|\vec{v}\| = 5$ et $\theta = 27°$ N.-E.

a) Déterminer la norme du vecteur $\vec{v}_x$ qui résulte de la projection de $\vec{v}$ sur une droite horizontale.

b) Déterminer la norme du vecteur $\vec{v}_y$ qui résulte de la projection de $\vec{v}$ sur une droite verticale.

c) Quelle relation existe-t-il entre $\vec{v}_x$, $\vec{v}_y$ et $\vec{v}$?

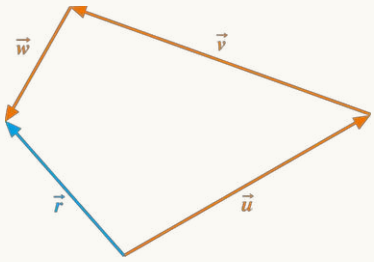
d) Quelle relation existe-t-il entre $\|\vec{v}_x\|$, $\|\vec{v}_y\|$ et $\|\vec{v}\|$?

Exemple 3 Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ représenté ci-dessous, où

$\vec{u}$ est tel que $\|\vec{u}\| = 8$, $\theta_{(\vec{u})} = 30°$ dans le sens N.-E.,

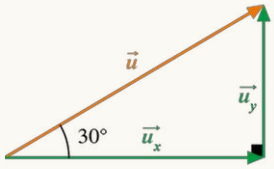
$\vec{v}$ est tel que $\|\vec{v}\| = 9$, $\theta_{(\vec{v})} = 160°$ dans le sens N.-O. et

$\vec{w}$ est tel que $\|\vec{w}\| = 4$, $\theta_{(\vec{w})} = 60°$ dans le sens S.-O.

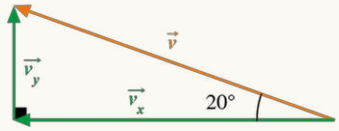


Déterminons la norme, la direction et le sens de $\vec{r}$ en utilisant la projection horizontale et la projection verticale des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

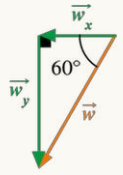
Représentons chacun des vecteurs et leurs projections horizontale et verticale.



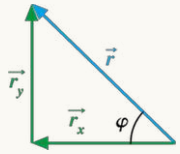
$\vec{u} = \vec{u}_x + \vec{u}_y$



$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$



$\vec{w} = \vec{w}_x + \vec{w}_y$



$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y$

Calculons $\|\vec{u}_x\|$, $\|\vec{u}_y\|$, $\|\vec{v}_x\|$, $\|\vec{v}_y\|$, $\|\vec{w}_x\|$ et $\|\vec{w}_y\|$.

$\|\vec{u}_x\| = \|\vec{u}\| \cos 30° = 8 \cos 30°$

$\|\vec{v}_x\| = \|\vec{v}\| \cos 20° = 9 \cos 20°$

$\|\vec{w}_x\| = \|\vec{w}\| \cos 60° = 4 \cos 60°$

$\|\vec{u}_y\| = \|\vec{u}\| \sin 30° = 8 \sin 30°$

$\|\vec{v}_y\| = \|\vec{v}\| \sin 20° = 9 \sin 20°$

$\|\vec{w}_y\| = \|\vec{w}\| \sin 60° = 4 \cos 60°$

En tenant compte du sens et de la direction des vecteurs, nous avons

$\vec{r}_x = \vec{u}_x + \vec{v}_x + \vec{w}_x$, où

$\|\vec{r}_x\| = |8 \cos 30° - 9 \cos 20° - 4 \cos 60°|$

$= |-3{,}529\ldots|$

$= 3{,}529\ldots$

De plus, le signe négatif obtenu par le calcul $(8 \cos 30° - 9 \cos 20° - 4 \cos 60°)$ nous indique que $\vec{r}_x$ est dans le sens ouest.

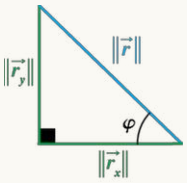
$\vec{r}_y = \vec{u}_y + \vec{v}_y + \vec{w}_y$, où

$\|\vec{r}_y\| = |8 \sin 30° + 9 \sin 20° - 4 \sin 60°|$

$= |3{,}614\ldots|$

$= 3{,}614\ldots$

De plus, le signe positif obtenu par le calcul $(8 \sin 30° + 9 \sin 20° - 4 \sin 60°)$ nous indique que $\vec{r}_y$ est dans le sens nord.



Déterminons la norme de $\vec{r}$.

$\|\vec{r}\|^2 = \|\vec{r}_x\|^2 + \|\vec{r}_y\|^2 = (3{,}529\ldots)^2 + (3{,}614\ldots)^2$, donc $\|\vec{r}\| \approx 5{,}1$

Déterminons la direction θ, où $\theta = 180° - \varphi$.

$$\tan \varphi = \frac{\|\vec{r}_y\|}{\|\vec{r}_x\|} = \left(\frac{3{,}614\ldots}{3{,}529\ldots}\right)$$

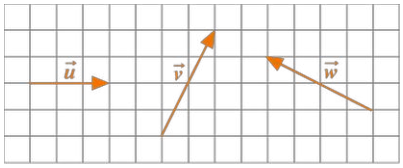
$\varphi = \text{Arc tan}\,(1{,}024\ldots) = 45{,}681\ldots$, donc $\theta \approx 134{,}3°$ (car $\theta = 180° - \varphi$)

Le vecteur $\vec{r}$ est dans le sens N.-O. (voir la représentation graphique de $\vec{r}$)

D'où $\vec{r}$ est tel que $\|\vec{r}\| \approx 5{,}1$ et $\theta \approx 134{,}3°$ dans le sens N.-O.

EXERCICES 4.2

1. Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ suivants.



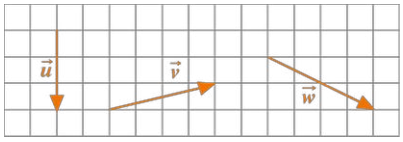
Utiliser la méthode du parallélogramme pour déterminer les vecteurs suivants.

a) $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{v} - \vec{u}$

b) $\vec{u} + \vec{w}$ et $\vec{v} - \vec{w}$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

2. Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ suivants.



Utiliser la méthode du triangle pour déterminer les vecteurs suivants.

a) $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$

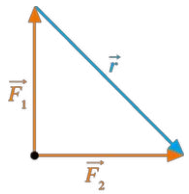
b) $\vec{v} + \vec{w}$ et $-\vec{w} - \vec{v}$

c) $\vec{v} + \vec{v}$

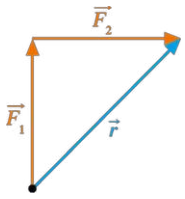
d) $\vec{v} + \vec{w} + \vec{u}$ et $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$

3. Déterminer, parmi les représentations suivantes, lesquelles illustrent correctement $\vec{r}$, où $\vec{r}$ est l'addition vectorielle des forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.

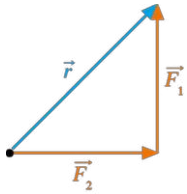
a)



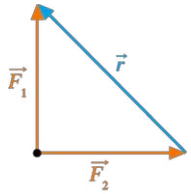
b)



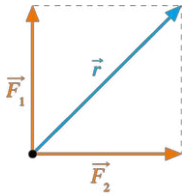
c)



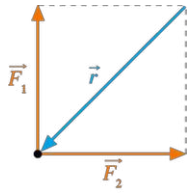
d)



e)



f)



4. Exprimer les vecteurs suivants sous la forme d'une addition ou d'une soustraction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

a) $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$

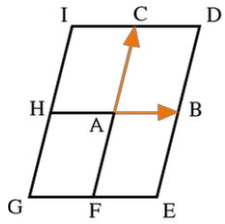
b) $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FB}$

c) $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{HF}$

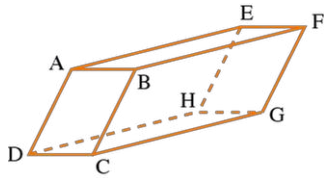
d) $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{CH}$

e) $\overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{EC}$

f) $\overrightarrow{GD}$ et $\overrightarrow{IE}$



5. Soit le parallélépipède suivant.



Déterminer un vecteur résultant de :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

b) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BF}$

c) $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{CB}$

d) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED}$

e) $\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{DH}$

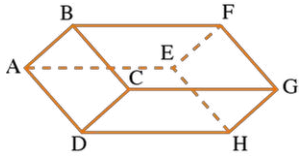
f) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$

g) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BD}$ h) $\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{EC}$

i) $\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{FA}$

j) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{GA}$

6. Soit le parallélépipède droit suivant, où $\|\overrightarrow{AD}\| = 6$, $\|\overrightarrow{DC}\| = 4$ et $\|\overrightarrow{DH}\| = 11$.



Calculer :

a) $\|\overrightarrow{DG}\|$ b) $\|\overrightarrow{AC}\|$ c) $\|\overrightarrow{BG}\|$ d) $\|\overrightarrow{AG}\|$

7. Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que

$\|\vec{u}\| = 4$, $\theta_{(\vec{u})} = 0°$ vers l'est ;

$\|\vec{v}\| = 3$, $\theta_{(\vec{v})} = 90°$ vers le nord ;

$\|\vec{w}\| = 5$, $\theta_{(\vec{w})} = 30°$ N.-E.

Déterminer la norme, la direction et le sens des vecteurs suivants, puis représenter graphiquement ces vecteurs.

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} - \vec{v}$

c) $\vec{u} + \vec{w}$ d) $\vec{v} - \vec{w}$

e) $\vec{u} - \vec{w} + \vec{u}$ f) $(\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{v} - \vec{w})$

8. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs de sens N.-E. tels que $\|\vec{u}\| = 9$, $\theta_{(\vec{u})} = 15°$ et $\|\vec{v}\| = 8$, $\theta_{(\vec{v})} = 70°$.

a) Déterminer la norme du vecteur $\vec{u}_{\vec{v}}$ et représenter graphiquement $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u}_{\vec{v}}$.

b) Déterminer la norme du vecteur $\vec{v}_{\vec{u}}$ et représenter graphiquement $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v}_{\vec{u}}$.

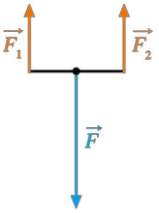
9. **APPLICATION | FORCE ÉQUILIBRANTE**

Soit $\vec{F}$, une force telle que $\|\vec{F}\| = 200$ N et $\theta = 90°$ vers le sud. Dans les représentations suivantes, déterminer la norme de la force $\vec{F}_1$ qui équilibre $\vec{F}$, si $\|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\|$.

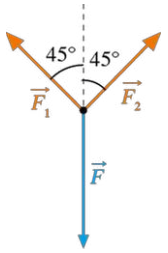
a)



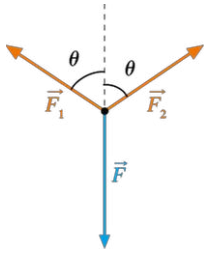
b)



c)

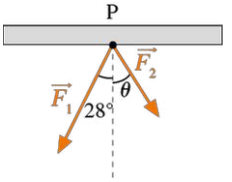


d)



10. **APPLICATION | FORCE**

Deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, où $\|\vec{F}_1\| = 40$ N et $\|\vec{F}_2\| = 30$ N, sont appliquées en un point P.



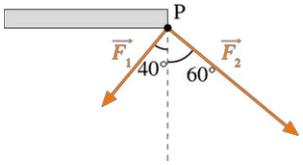
Si la force résultante $\vec{F}$ est verticale, déterminer

a) l'angle θ ;

b) $\|\vec{F}\|$.

11. **APPLICATION | FORCE**

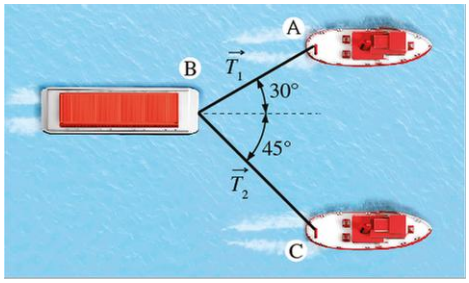
Deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, où $\|\vec{F}_1\| = 200$ N et $\|\vec{F}_2\| = 300$ N, sont appliquées à l'extrémité d'une poutre en un point P.



Déterminer la norme, la direction et le sens de la force résultante $\vec{F}$.

12. **APPLICATION | TENSION**

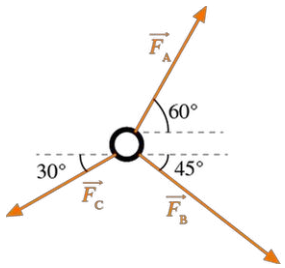
Une barge est tirée par deux remorqueurs.



Si la norme de la résultante des deux forces exercées par les remorqueurs est de 5000 N et est dirigée parallèlement à l'axe de la barge, déterminer la tension dans chaque câble.

13. APPLICATION | RÉSULTANTE ET ÉQUILIBRANTE

Amélie, Benoit et Chloé tirent sur un anneau rigide situé sur une table, tel qu'illustré ci-dessous.



$\|\vec{F}_A\| = 180$ N
$\|\vec{F}_B\| = 200$ N
$\|\vec{F}_C\| = 150$ N

a) Déterminer la norme, la direction et le sens de la force résultante $\vec{F}_{rés}$.

b) Denis exerce une force équilibrante $\vec{F}_{éq}$. Déterminer la norme, la direction et le sens de $\vec{F}_{éq}$.

c) Illustrer $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$, $\vec{F}_C$, $\vec{F}_{rés}$ et $\vec{F}_{éq}$ appliquées sur l'anneau.

14. APPLICATION | VECTEUR VITESSE

En plein vol, un pilote oriente son avion à 120° S.-E., à la vitesse de 150 km/h. Un vent de 25 km/h, par rapport au sol, souffle à 45° S.-O.



a) Représenter graphiquement la vitesse de l'avion et la vitesse du vent à l'aide de deux vecteurs de même origine.

b) Déterminer la direction, le sens et la vitesse réelle de l'avion par rapport au sol.

15. APPLICATION | VECTEUR VITESSE

Un bateau se dirige vers le sud à une vitesse de 25 nœuds. Un courant de 10 nœuds, dont la direction est de 135° N.-O., agit sur le bateau.

a) Représenter graphiquement la vitesse du bateau et la vitesse du courant à l'aide de deux vecteurs de même origine.

b) Déterminer la direction, le sens et la vitesse réelle du bateau.

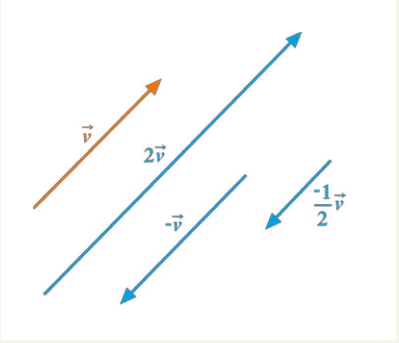
4.3 Multiplication d'un vecteur géométrique par un scalaire

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra appliquer la notion de multiplication d'un vecteur géométrique par un scalaire.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de donner la définition de la multiplication d'un vecteur géométrique par un scalaire ;
- d'effectuer la multiplication d'un vecteur géométrique par un scalaire ;
- d'énumérer les propriétés de la multiplication d'un vecteur géométrique par un scalaire ;
- de démontrer certains théorèmes relatifs à la multiplication d'un vecteur géométrique par un scalaire ;
- d'appliquer les propriétés de la multiplication d'un vecteur géométrique par un scalaire ;
- de résoudre certains problèmes de géométrie.



Physique

Plusieurs notions en physique font intervenir la multiplication d'un vecteur par un scalaire. Par exemple,

$\vec{F} = m\vec{a}$ (loi de Newton)

$\vec{F} = -k\vec{x}$ (loi de Hooke)

$\vec{F} = q\vec{E}$ (force électrique)

$\vec{v} = \vec{v_0} + t\vec{a}$ (vecteur vitesse, en mécanique)

$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v_0} + \frac{1}{2}t^2\vec{a}$ (vecteur position, en mécanique)

DÉFINITION 4.9

Le résultat de la **multiplication d'un vecteur géométrique $\vec{v}$ par un scalaire** k, où $k \in \mathbb{R}$, est le vecteur, noté $k\vec{v}$, ayant les caractéristiques suivantes.

1) Lorsque $\vec{v} \neq \vec{O}$ et $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
   i) la direction de $k\vec{v}$ est la même que celle de $\vec{v}$;
   ii) le sens de $k\vec{v}$ est le même que celui de $\vec{v}$ lorsque $k > 0$ et le sens de $k\vec{v}$ est opposé à celui de $\vec{v}$ lorsque $k < 0$;
   iii) $\|k\vec{v}\| = |k|\,\|\vec{v}\|$.

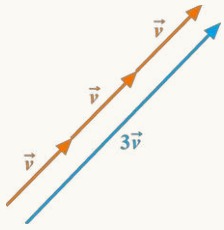
2) Lorsque $\vec{v} = \vec{O}$ ou $k = 0$,
   $k\vec{v} = \vec{O}$.

Remarque : $(-1)\vec{v} = -\vec{v}, \forall\ \vec{v} \neq \vec{O}$

Exemple 1 Soit le vecteur $\vec{v}$, tel que $\|\vec{v}\| = 2$, représenté ci-contre.



Représentons graphiquement et déterminons le sens et la norme des vecteurs $3\vec{v}$, $-2\vec{v}$ et $\frac{1}{2}\vec{v}$.

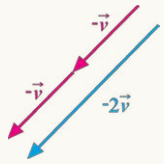


$k = 3 > 0$, d'où

$3\vec{v}$ a le même sens que $\vec{v}$

$\|3\vec{v}\| = |3|\,\|\vec{v}\| = 3(2)$,

d'où $\|3\vec{v}\| = 6$



$k = -2 < 0$, d'où

$-2\vec{v}$ est de sens opposé à $\vec{v}$

$\|-2\vec{v}\| = |-2|\,\|\vec{v}\| = 2(2)$,

d'où $\|-2\vec{v}\| = 4$



$k = \frac{1}{2} > 0$, d'où

$\frac{1}{2}\vec{v}$ a le même sens que $\vec{v}$

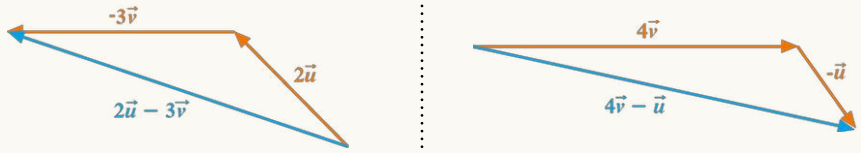
$\left\|\frac{1}{2}\vec{v}\right\| = \left|\frac{1}{2}\right|\,\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}(2)$,

d'où $\left\|\frac{1}{2}\vec{v}\right\| = 1$

Exemple 2 Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-contre.



Représentons graphiquement les vecteurs $2\vec{u} - 3\vec{v}$ et $4\vec{v} - \vec{u}$.



Propriétés de la multiplication d'un vecteur géométrique par un scalaire

Énonçons maintenant des propriétés relatives à la multiplication d'un vecteur géométrique par un scalaire.

Si V est l'ensemble des vecteurs géométriques, alors $\forall\ \vec{u}$ et $\vec{v} \in \mathrm{V}$, et $\forall\ r$ et $s \in \mathbb{R}$, nous avons :

Propriété 1	$r\vec{u} \in \mathrm{V}$	(fermeture pour la multiplication d'un vecteur géométrique par un scalaire)
Propriété 2	$(r + s)\vec{u} = r\vec{u} + s\vec{u}$	(pseudo-distributivité de la multiplication d'un vecteur géométrique sur l'addition de scalaires)
Propriété 3	$r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$	(pseudo-distributivité de la multiplication d'un scalaire sur l'addition de vecteurs géométriques)
Propriété 4	$r(s\vec{u}) = (rs)\vec{u}$	(pseudo-associativité de la multiplication de scalaires et d'un vecteur géométrique)
Propriété 5	$1\vec{u} = \vec{u}$	(1 est le pseudo-élément neutre pour la multiplication d'un vecteur géométrique par un scalaire)

Exemple 1 Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-contre.



Représentons graphiquement les vecteurs $2(\vec{u} + \vec{v})$ et $2\vec{u} + 2\vec{v}$.



La propriété 3 précédente de la multiplication d'un vecteur géométrique par un scalaire, c'est-à-dire $r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$, nous assure que $2(\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$.

Vecteurs géométriques parallèles

Dans la section 4.1, nous avons vu que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si ces vecteurs ont la même direction. Ainsi, nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 4.1

Deux vecteurs géométriques non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles ($\vec{u} /\!/ \vec{v}$) si et seulement s'il existe un scalaire $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ (ou $\vec{v} = k\vec{u}$).

Exemple 1 Soit les vecteurs suivants.



Nous avons $\vec{u} /\!/ \vec{w}$, car $\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{w}$ $\left(\text{ou } \vec{w} = \frac{2}{3}\vec{u}\right)$, et $\vec{v} /\!/ \vec{t}$, car $\vec{v} = \frac{-1}{2}\vec{t}$ (ou $\vec{t} = -2\vec{v}$).

THÉORÈME 4.2

Si $\vec{v}$ est un vecteur géométrique non nul, alors

$$\vec{u} \text{ et } -\vec{u}, \text{ où } \vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} \text{ et } -\vec{u} = \frac{-1}{\|\vec{v}\|}\vec{v},$$

sont deux vecteurs unitaires parallèles à $\vec{v}$.

Preuve

Puisque $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$, nous avons $\vec{u} /\!/ \vec{v}$. $\left(\text{théorème 4.1, où } k = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\right)$

De plus, $\|\vec{u}\| = \left\|\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right\|$

$$= \left|\frac{1}{\|\vec{v}\|}\right| \|\vec{v}\| \qquad \text{(définition 4.9)}$$

$$= \frac{1}{\|\vec{v}\|}\|\vec{v}\| \qquad (\text{car } \|\vec{v}\| > 0)$$

$$= 1$$

d'où $\vec{u}$, où $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$, est un vecteur unitaire parallèle à $\vec{v}$.

De façon analogue, nous pouvons démontrer que

$-\vec{u}$, où $-\vec{u} = \frac{-1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$, est un vecteur unitaire parallèle à $\vec{v}$.

THÉORÈME 4.3

Soit $\vec{v}$, un vecteur géométrique.

$k\vec{v} = \vec{O}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{O}$.

Preuve

($\Rightarrow$) Si $k\vec{v} = \vec{O}$, alors

$\|k\vec{v}\| = \|\vec{O}\|$

$|k|\,\|\vec{v}\| = 0$ (définition 4.9)

Donc $|k| = 0$ ou $\|\vec{v}\| = 0$

d'où $k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{O}$

($\Leftarrow$) Laissée à l'étudiant.

THÉORÈME 4.4

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs géométriques non nuls.

Si $\vec{u} = k\vec{v}$, alors k est unique.

Preuve par contradiction

Preuve

Supposons qu'il existe deux scalaires, k_1 et k_2, où $k_1 \neq k_2$,

tels que $\vec{u} = k_1\vec{v}$ et $\vec{u} = k_2\vec{v}$.

Ainsi, $k_1\vec{v} = k_2\vec{v}$

$k_1\vec{v} - k_2\vec{v} = k_2\vec{v} - k_2\vec{v}$

$k_1\vec{v} - k_2\vec{v} = \vec{O}$ (propriété 5 de l'addition de vecteurs géométriques)

$(k_1 - k_2)\vec{v} = \vec{O}$ (propriété 2 de la multiplication d'un vecteur géométrique par un scalaire)

Puisque $\vec{v} \neq \vec{O}$, alors $(k_1 - k_2) = 0$ (théorème 4.3)

Donc $k_1 = k_2$, ce qui est une contradiction.

D'où k est unique.

THÉORÈME 4.5

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs géométriques non nuls et non parallèles.

$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{O}$ si et seulement si $k_1 = k_2 = 0$.

Preuve

($\Rightarrow$) Si $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{O}$, alors

$(k_1\vec{u} + k_2\vec{v}) - k_2\vec{v} = \vec{O} - k_2\vec{v}$ (en soustrayant $k_2\vec{v}$ de chaque membre)

$k_1\vec{u} + (k_2\vec{v} - k_2\vec{v}) = -k_2\vec{v}$ (associativité de l'addition de vecteurs géométriques et $\vec{O}$ est l'élément neutre)

$k_1\vec{u} + \vec{O} = -k_2\vec{v}$ ($k_2\vec{v} - k_2\vec{v} = \vec{O}$, élément opposé)

$k_1\vec{u} = -k_2\vec{v}$ ($\vec{O}$ est l'élément neutre)

En supposant $k_1 \neq 0$, nous obtenons $\vec{u} = \frac{-k_2}{k_1}\vec{v}$.

Donc, $\vec{u}$ est parallèle à $\vec{v}$ par définition, ce qui est une contradiction.

D'où $k_1 = 0$. De façon analogue, nous pouvons démontrer que $k_2 = 0$.

($\Leftarrow$) La preuve est laissée à l'étudiant.

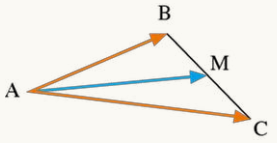
Applications des vecteurs géométriques

L'utilisation des propriétés de l'addition de vecteurs géométriques et des propriétés de la multiplication d'un vecteur par un scalaire permet de résoudre certains problèmes de géométrie.

Exemple 1 Soit un triangle ABC, et M, le point milieu du côté BC.

Démontrons que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Représentons le triangle ABC, le point M et les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.



① $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ (loi de Chasles)

② $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$ (loi de Chasles)

Additionnons ① et ②.

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$

$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$ (commutativité de l'addition de vecteurs géométriques)

$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (car $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{O}$, M étant le point milieu de $\overline{BC}$)

$\frac{1}{2}(2\overrightarrow{AM}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

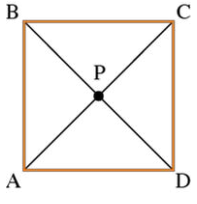
$\left(\left(\frac{1}{2}\right)2\right)\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (propriétés 3 et 4 de la multiplication d'un vecteur par un scalaire)

$1\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

d'où $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (car $1\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM}$)

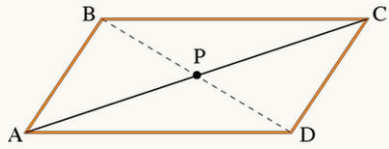
Exercice de compréhension 4.3

1. Sachant que les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu, exprimer $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et de $\overrightarrow{BD}$.



Exemple 2 Démontrons que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Soit le parallélogramme ABCD, et P, le point milieu de la diagonale AC.



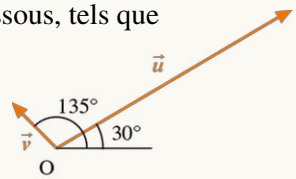
Démontrons que P est également le point milieu de la diagonale BD.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} && \text{(loi de Chasles)}\\
&= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{PA} && \text{(car } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\text{, côtés opposés d'un parallélogramme, et } \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{CP}\text{, P étant le point milieu de la diagonale AC)}\\
&= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} && \text{(commutativité de l'addition de vecteurs géométriques)}\\
&= \overrightarrow{PD} && \text{(loi de Chasles)}
\end{aligned}$$

Ainsi, P est le point milieu de la diagonale BD.

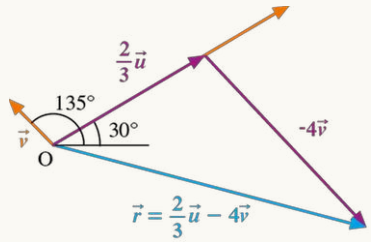
D'où les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

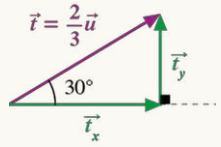
Exemple 3 Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, représentés ci-dessous, tels que $\|\vec{u}\| = 9$, $\theta_{(\vec{u})} = 30°$ dans le sens N.-E., et $\|\vec{v}\| = 2$, $\theta_{(\vec{v})} = 135°$ dans le sens N.-O.

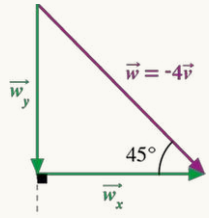


Déterminons la norme, la direction et le sens de $\vec{r}$, où $\vec{r} = \frac{2}{3}\vec{u} - 4\vec{v}$, en utilisant la projection verticale ainsi que la projection horizontale.

Représentons $\vec{t}$, où $\vec{t} = \frac{2}{3}\vec{u}$ et $\vec{w}$, où $\vec{w} = -4\vec{v}$.







$(180° - 135° = 45°)$

$$\|\vec{t}\| = \left\|\frac{2}{3}\vec{u}\right\| = \left|\frac{2}{3}\right| \|\vec{u}\| = \frac{2}{3}(9) = 6 \qquad \|\vec{w}\| = \|-4\vec{v}\| = |-4|\,\|\vec{v}\| = 4(2) = 8$$

En calculant $\|\vec{t}_x\|$, $\|\vec{t}_y\|$, $\|\vec{w}_x\|$ et $\|\vec{w}_y\|$, nous obtenons

$$\|\vec{t}_x\| = \|\vec{t}\| \cos 30° = 6 \cos 30° \qquad \|\vec{t}_y\| = \|\vec{t}\| \sin 30° = 6 \sin 30°$$
$$\|\vec{w}_x\| = \|\vec{w}\| \cos 45° = 8 \cos 45° \qquad \|\vec{w}_y\| = \|\vec{w}\| \sin 45° = 8 \sin 45°$$

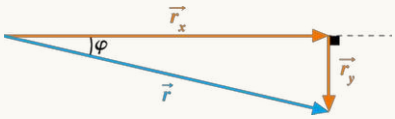
En tenant compte du sens et de la direction des vecteurs, nous avons

$$\vec{r}_x = \vec{t}_x + \vec{w}_x, \text{ où } \|\vec{r}_x\| = |6 \cos 30° + 8 \cos 45°| = |10{,}853\ldots| = 10{,}853\ldots$$
$$\vec{r}_y = \vec{t}_y + \vec{w}_y, \text{ où } \|\vec{r}_y\| = |6 \sin 30° - 8 \sin 45°| = |-2{,}656\ldots| = 2{,}656\ldots$$

Calculons $\|\vec{r}\|$.

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{(10{,}853\ldots)^2 + (2{,}656\ldots)^2} = 11{,}173\ldots$$

Calculons la direction $\theta_{(\vec{r})}$.



$$\tan \varphi = \frac{\|\vec{r}_y\|}{\|\vec{r}_x\|}$$

$$\varphi = \text{Arc tan}\left(\frac{2{,}656\ldots}{10{,}853\ldots}\right) = 13{,}755\ldots$$

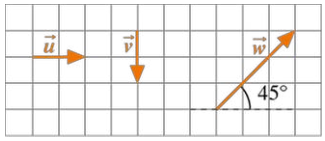
donc $\theta_{(\vec{r})} \approx 166{,}24°$ (car $\theta_{(\vec{r})} = 180° - \varphi$)

Le sens de $\vec{r}$ est S.-E.

D'où $\|\vec{r}\| \approx 11{,}17$, $\theta \approx 166{,}24°$ dans le sens S.-E.

EXERCICES 4.3

1. Soit les vecteurs suivants.



Représenter les vecteurs suivants.

a) $2\vec{u}$ et $-3\vec{u}$

b) $-2\vec{v}$ et $\frac{3}{2}\vec{v}$

c) $\frac{2}{3}\vec{w}$ et $\frac{-4}{3}\vec{w}$

d) $\vec{r} = 3\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{w}$

e) $\vec{r} = -2\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v} - \frac{5}{3}\vec{w}$

f) $\vec{r} = 2\vec{u} - 2\vec{v} - \frac{4}{3}\vec{w}$

2. Soit un vecteur $\vec{v}$ tel que $\|\vec{v}\| = 12$. Déterminer la norme des vecteurs suivants.

a) $3\vec{v}$ b) $\frac{1}{12}\vec{v}$ c) $-5\vec{v}$

d) $\frac{-1}{3}\vec{v}$ e) $\frac{-1}{4}(3\vec{v})$ f) $0\vec{v}$

3. Simplifier le plus possible les expressions suivantes.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}$

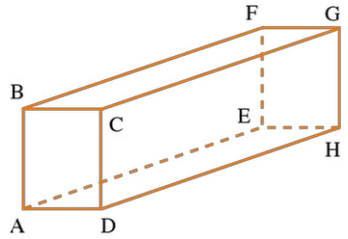
b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA}$

c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}) - \overrightarrow{BA}$

d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$

e) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DF}$

4. Soit le parallélépipède droit ci-dessous.



a) Exprimer $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH}$ en fonction des arêtes du parallélépipède issues de A.

b) Exprimer $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AG}$.

c) Exprimer $\|\overrightarrow{AG}\|$ en fonction de $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{AD}\|$ et $\|\overrightarrow{AE}\|$.

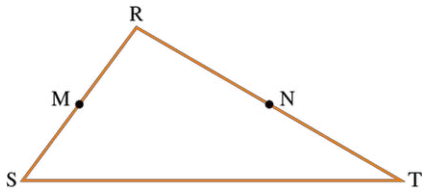
5. Soit un vecteur $\vec{u}$ tel que $\|\vec{u}\| = 5$, $\theta_{(\vec{u})} = 20°$ dans le sens N.-E., et un vecteur $\vec{v}$ tel que $\|\vec{v}\| = 12$, $\theta_{(\vec{v})} = 135°$ dans le sens N.-O. Déterminer la norme, la direction et le sens des vecteurs suivants en utilisant la méthode indiquée.

a) $\vec{r} = 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ (loi des cosinus et loi des sinus)

b) $\vec{s} = \frac{1}{4}(6\vec{u} - 3\vec{v})$ (loi des cosinus et loi des sinus)

c) $\vec{t} = \frac{5}{6}\vec{v} - \frac{6}{5}\vec{u}$ (projection horizontale et projection verticale)

6. Dans la représentation ci-dessous,



M et N sont respectivement les points milieux des segments $\overline{RS}$ et $\overline{RT}$.

a) Démontrer que le segment de droite reliant le point milieu de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté du triangle et que sa longueur équivaut à la moitié de celle du troisième côté.

b) Écrire les vecteurs suivants en fonction de $\overrightarrow{RS}$ et de $\overrightarrow{RT}$.

i) $\overrightarrow{TR}$

ii) $\overrightarrow{MR}$

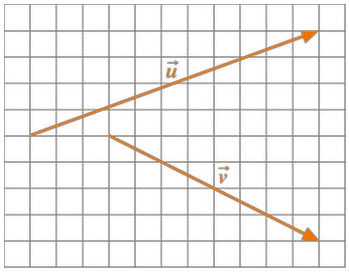
iii) $\overrightarrow{MN}$

iv) $\overrightarrow{TM}$

7. Soit le triangle ABC, et M, un point du segment de droite $\overline{BC}$ tel que $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$, où $0 \leq k \leq 1$. Démontrer que $\overrightarrow{AM} = (1 - k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.

8. a) Soit le parallélogramme ABCD, où M est le point milieu de $\overline{AB}$, et N, le point milieu de $\overline{CD}$. Démontrer que AMCN est un parallélogramme.

b) i) Tracer le parallélogramme dont les diagonales sont représentées par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants.



ii) Exprimer les côtés du parallélogramme en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

4.4 Vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^n$

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra, dans $\mathbb{R}^2$, dans $\mathbb{R}^3$ et dans $\mathbb{R}^n$, se familiariser avec la notion de vecteurs algébriques.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de représenter un point et un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans un système tridimensionnel d'axes à angle droit ;
- de donner la définition d'un vecteur algébrique de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^n$;
- de donner la dimension d'un vecteur algébrique ;
- de déterminer les composantes de vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^n$;
- de donner la définition de vecteurs algébriques tels que : vecteurs équipollents, vecteurs nuls, vecteurs canoniques et vecteurs opposés ;
- de calculer la norme d'un vecteur algébrique ;
- de donner la définition d'un vecteur algébrique unitaire.

Soit A(-2, 3) et B(4, -1), deux points de $\mathbb{R}^2$.

$$\overrightarrow{AB} = (4 - (-2), -1 - 3) = (6, -4)$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{13}$$

Soit C(4, -3, -2) et D(0, -3, -1), deux points de $\mathbb{R}^3$.

$$\overrightarrow{CD} = (0 - 4, -3 - (-3), -1 - (-2))$$
$$= (-4, 0, 1)$$
$$\left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

Si $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + \ldots + u_n\vec{e}_n$

alors $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_n^2}$

Avant d'aborder l'étude des vecteurs algébriques, il est utile de se familiariser avec la représentation graphique dans $\mathbb{R}^3$.

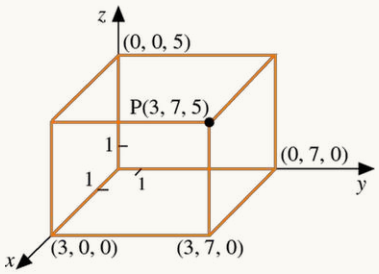
Représentation graphique d'un point dans $\mathbb{R}^3$

Différentes méthodes peuvent être utilisées pour représenter un point dans un système tridimensionnel d'axes gradués à angle droit, appelé espace cartésien.

Exemple 1 Représentons respectivement les points P(3, 7, 5), Q(3, 8, 5) et R(-4, 3, -5) à l'aide de différente méthodes.

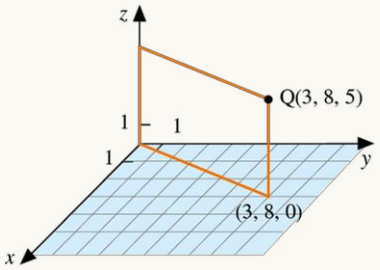
Méthode 1

À l'aide d'un parallélépipède droit



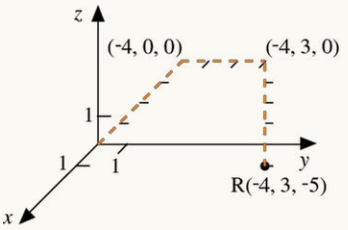
Méthode 2

À l'aide d'un quadrillage dans le plan XOY et d'un rectangle perpendiculaire à ce plan

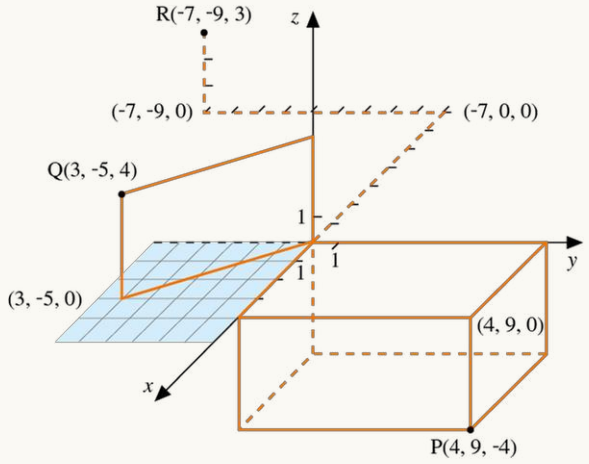


Méthode 3

À l'aide de chemins parallèles à l'axe des x, à l'axe des y et à l'axe des z

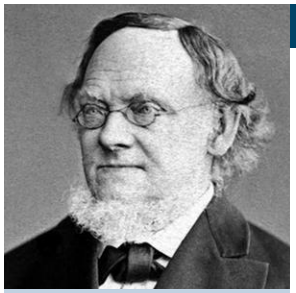


Exemple 2 Représentons dans un même système d'axes les points P(4, 9, -4), Q(3, -5, 4) et R(-7, -9, 3) en utilisant une des méthodes précédentes pour chacun.



Remarque : Soit P(a, b, c), un point de l'espace. Les coordonnées a, b et c de ce point sont respectivement appelées abscisse, ordonnée et cote du point P.

Composantes de vecteurs algébriques



Hermann Günther Grassmann (1809-1877)

IL Y A ENVIRON 150 ANS...

La notion de vecteur algébrique dans l'espace, et plus généralement dans un espace de plus de trois dimensions, est développée pour la première fois par **Hermann Günther Grassmann**. Professeur dans une école secondaire technique durant toute sa vie, il rêve très longtemps de devenir professeur d'université. Malgré plusieurs publications sur des sujets variés, telles l'électricité, la botanique et l'acoustique, il se rend compte au début de la cinquantaine que son rêve ne se réalisera pas. Il se tourne alors vers l'étude des langues et plus particulièrement du sanskrit. Son dictionnaire du sanskrit est utilisé tout au long du XX^{e} siècle et est même réédité en 1996.

Remarque : Dans cette section et la suivante, les notions qui se rapportent à $\mathbb{R}^2$ sont en noir, celles qui se rapportent à $\mathbb{R}^3$ sont en bleu et celles qui se rapportent à $\mathbb{R}^n$ sont en vert.

DÉFINITION 4.10

1) Un **vecteur algébrique**
   - $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$ est défini par $\vec{u} = (u_1, u_2)$, où u_1 et $u_2 \in \mathbb{R}$;
   - $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ est défini par $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, où u_1, u_2 et $u_3 \in \mathbb{R}$;
   - $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$ est défini par $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$, où $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$.
2) Les nombres réels $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ constituent respectivement la première, la deuxième, la troisième, …, la n-ième **composante** du vecteur $\vec{u}$.

DÉFINITION 4.11

La **dimension** d'un vecteur algébrique $\vec{u}$, notée dim $(\vec{u})$, est donnée par le nombre de composantes de ce vecteur.

Exemple 1 Déterminons la dimension des vecteurs suivants.

a) $\vec{u} = (3, -4)$ de $\mathbb{R}^2$ est un vecteur de dimension 2, d'où dim $(\vec{u}) = 2$.

b) $\vec{v} = (0, -5, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ est un vecteur de dimension 3, d'où dim $(\vec{v}) = 3$.

c) $\vec{w} = (1, -3, 4, 5)$ de $\mathbb{R}^4$ est un vecteur de dimension 4, d'où dim $(\vec{w}) = 4$.

d) $\vec{t} = (0, 0, 0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^5$ est un vecteur de dimension 5, d'où dim $(\vec{t}) = 5$.

Soit le point P(a, b), dont les coordonnées sont a et b.

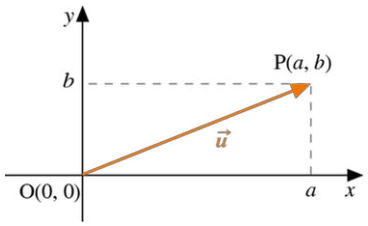
La représentation, dans le plan cartésien, du vecteur algébrique $\vec{u}$,

Soit le point Q(a, b, c), dont les coordonnées sont a, b et c.

La représentation, dans l'espace cartésien, du vecteur algébrique $\vec{v}$,

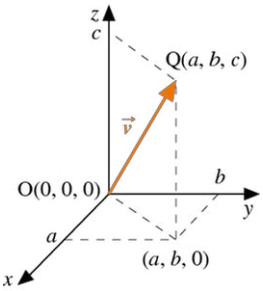
Représentation graphique d'un vecteur algébrique de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$

où $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$, d'origine O(0, 0) et d'extrémité P(a, b), est le vecteur géométrique $\overrightarrow{OP}$ représenté ci-dessous.



Nous pouvons écrire $\vec{u} = (a, b)$.

où $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$, d'origine O(0, 0, 0) et d'extrémité Q(a, b, c), est le vecteur géométrique $\overrightarrow{OQ}$ représenté ci-dessous.

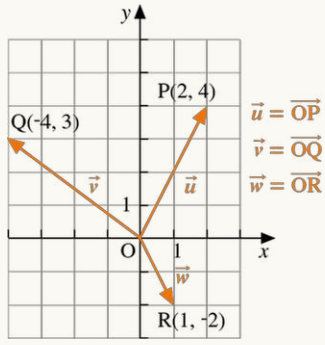


Nous pouvons écrire $\vec{v} = (a, b, c)$.

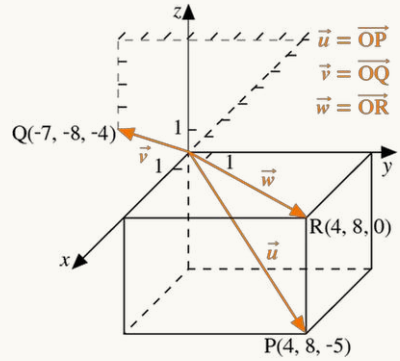
Remarque : Lorsque l'origine du vecteur coïncide avec l'origine du système d'axes, les composantes du vecteur sont les coordonnées du point situé à l'extrémité du vecteur.

Exemple 2 Représentons

a) dans le plan cartésien les vecteurs $\vec{u} = (2, 4)$, $\vec{v} = (-4, 3)$ et $\vec{w} = (1, -2)$.



b) dans l'espace cartésien les vecteurs $\vec{u} = (4, 8, -5)$, $\vec{v} = (-7, -8, -4)$ et $\vec{w} = (4, 8, 0)$.



DÉFINITION 4.12

Les **vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **équipollents** ou **égaux** si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même dimension et leurs composantes respectives sont égales, ainsi :

- Pour $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$,
  $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$.
- Pour $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$,
  $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ et $u_3 = v_3$.
- Pour $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$,
  $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $u_3 = v_3$, …, et $u_n = v_n$.

Exercices de compréhension 4.4

1. Déterminer si les vecteurs suivants sont équipollents.

a) $\vec{u} = (1, -1, 3, 4)$ et $\vec{v} = (\sin 90°, -1, \sqrt{9}, 4)$

b) $\vec{u} = (1, -1, 3, 4)$ et $\vec{w} = (1, -1, 3, 4, 0)$

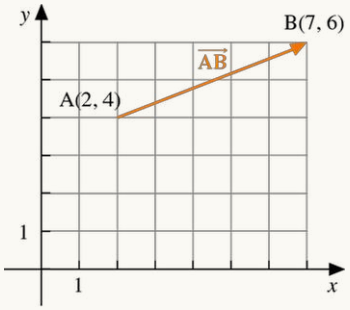
c) $\vec{r} = \left(\tan \frac{\pi}{4}, -1, \sqrt{9}, 4\right)$ et $\vec{t} = (1, -1, -3, 4)$

Déterminons maintenant les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ quelconque.

Exemple 3

a) Soit les points A(2, 4) et B(7, 6).

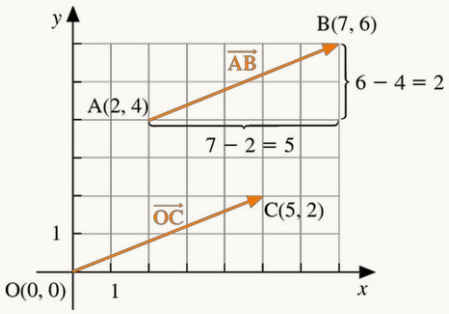
Représentons le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le plan cartésien et déterminons les composantes de $\overrightarrow{AB}$.



Pour déterminer les composantes de $\overrightarrow{AB}$, il faut trouver un vecteur $\overrightarrow{OC}$ équipollent à $\overrightarrow{AB}$, où O est le point O(0, 0).

Pour déterminer le vecteur $\overrightarrow{OC}$, il suffit d'effectuer la translation du point A(2, 4) au point O(0, 0) en soustrayant 2 de l'abscisse de A et 4 de l'ordonnée de A.

En soustrayant ces mêmes valeurs des coordonnées du point B, nous trouvons le point C(7 − 2, 6 − 4), c'est-à-dire C(5, 2).



Nous obtenons ainsi le vecteur $\overrightarrow{OC}$ tel que $\overrightarrow{OC} = (5, 2)$.

Ce vecteur est équipollent à $\overrightarrow{AB}$.

D'où $\overrightarrow{AB} = (5, 2)$.

b) Soit les points A(4, 5, 2) et B(7, 12, 6).

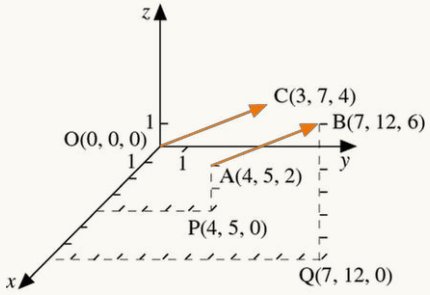
Représentons le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans l'espace cartésien et déterminons les composantes de $\overrightarrow{AB}$.

Par un procédé analogue à celui qui est utilisé en a) pour déterminer les composantes d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$, nous obtenons

$\overrightarrow{OC} = (7 - 4, 12 - 5, 6 - 2) = (3, 7, 4)$

Ce vecteur est équipollent à $\overrightarrow{AB}$.

D'où $\overrightarrow{AB} = (3, 7, 4)$.



De façon générale, nous avons la définition suivante.

DÉFINITION 4.13

1) Soit les points $A(x_a, y_a)$ et $B(x_b, y_b)$ de $\mathbb{R}^2$.

Les **composantes** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $x_b - x_a$ et $y_b - y_a$, ainsi $\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$.

2) Soit les points $A(x_a, y_a, z_a)$ et $B(x_b, y_b, z_b)$ de $\mathbb{R}^3$.

Les **composantes** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $x_b - x_a$, $y_b - y_a$ et $z_b - z_a$, ainsi $\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)$.

Exemple 4

a) Soit les points A(0, -4), B(-2, 7) et C(4, -1).

Déterminons les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (-2 - 0, 7 - (-4)) = (-2, 11)$$
$$\overrightarrow{AC} = (4 - 0, -1 - (-4)) = (4, 3)$$
$$\overrightarrow{BC} = (4 - (-2), -1 - 7) = (6, -8)$$
$$\overrightarrow{CB} = (-2 - 4, 7 - (-1)) = (-6, 8)$$

b) Soit les points A(3, 0, -7), B(-2, 3, 4) et C(5, -6, 1).

Déterminons les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{AB} = (-2 - 3, 3 - 0, 4 - (-7)) = (-5, 3, 11)$$
$$\overrightarrow{AC} = (5 - 3, -6 - 0, 1 - (-7)) = (2, -6, 8)$$
$$\overrightarrow{BC} = (5 - (-2), -6 - 3, 1 - 4) = (7, -9, -3)$$
$$\overrightarrow{CA} = (3 - 5, 0 - (-6), -7 - 1) = (-2, 6, -8)$$

Exercices de compréhension 4.4

2. Soit les points A(-2, 5), B(4, -3), C(-1, 3, -5) et D(0, -2, -5).
Déterminer les composantes des vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ b) $\overrightarrow{BO}$ et $\overrightarrow{BB}$

c) $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DC}$ d) $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{DO}$

Exemple 5 Soit les points A(-1, 2), B(3, 5), C(-3, -4) et D(6, 1).

a) Déterminons les coordonnées du point $P(x_p, y_p)$ telles que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CP}$.

Calculons d'abord les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (3 - (-1), 5 - 2) = (4, 3)$$

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{CP}$ sont

$$\overrightarrow{CP} = (x_p - (-3), y_p - (-4)) = (x_p + 3, y_p + 4)$$

Puisque $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB}$, nous avons

$(x_p + 3, y_p + 4) = (4, 3)$

Ainsi, $x_p + 3 = 4$ et $y_p + 4 = 3$ (définition 4.12)

donc $x_p = 1$ et $y_p = -1$

d'où P(1, -1)

b) Déterminons les coordonnées du point $Q(x_q, y_q)$ telles que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{QD}$.

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{QD}$ sont

$\overrightarrow{QD} = (6 - x_q, 1 - y_q)$

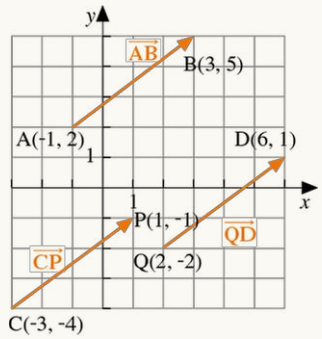
Puisque $\overrightarrow{QD} = \overrightarrow{AB}$, nous avons

$(6 - x_q, 1 - y_q) = (4, 3)$

Ainsi, $6 - x_q = 4$ et $1 - y_q = 3$ (définition 4.12)

donc $x_q = 2$ et $y_q = -2$

d'où Q(2, -2)



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{QD}$

4

Exemple 6 Soit le point A(-5, 1, 6) et le vecteur $\vec{v} = (4, -3, 2)$.

a) Déterminons $P(x_p, y_p, z_p)$ tel que $\overrightarrow{AP} = \vec{v}$.

$\overrightarrow{AP} = (x_p + 5, y_p - 1, z_p - 6)$. (définition 4.13)

Puisque $\overrightarrow{AP} = \vec{v}$, nous avons $(x_p + 5, y_p - 1, z_p - 6) = (4, -3, 2)$.

Ainsi, $x_p + 5 = 4$, $y_p - 1 = -3$ et $z_p - 6 = 2$ (définition 4.12)

donc $x_p = -1$, $y_p = -2$ et $z_p = 8$

d'où P(-1, -2, 8)

b) Déterminons $Q(x_q, y_q, z_q)$ tel que $\overrightarrow{QA} = \vec{v}$.

$\overrightarrow{QA} = (-5 - x_q, 1 - y_q, 6 - z_q)$. (définition 4.13)

Puisque $\overrightarrow{QA} = \vec{v}$, nous avons $(-5 - x_q, 1 - y_q, 6 - z_q) = (4, -3, 2)$.

Ainsi, $-5 - x_q = 4$, $1 - y_q = -3$ et $6 - z_q = 2$ (définition 4.12)

donc $x_q = -9$, $y_q = 4$ et $z_q = 4$

d'où Q(-9, 4, 4)

Vecteurs algébriques particuliers

DÉFINITION 4.14

Le **vecteur nul**, noté $\vec{O}$, est défini

- dans $\mathbb{R}^2$ par $\vec{O} = (0, 0)$, où $\vec{O}$ a deux composantes ;
- dans $\mathbb{R}^3$ par $\vec{O} = (0, 0, 0)$, où $\vec{O}$ a trois composantes ;
- dans $\mathbb{R}^n$ par $\vec{O} = (0, 0, 0, \ldots, 0)$, où $\vec{O}$ a n composantes.

Exemple 1 Déterminons le vecteur nul dans $\mathbb{R}^5$ et $\mathbb{R}^7$.

a) Dans $\mathbb{R}^5$, $\vec{O} = (0, 0, 0, 0, 0)$.

b) Dans $\mathbb{R}^7$, $\vec{O} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

DÉFINITION 4.15

Les **vecteurs canoniques**

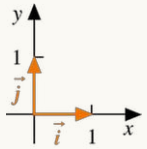
- de $\mathbb{R}^2$ sont $\vec{i}$ et $\vec{j}$, où $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$;
- de $\mathbb{R}^3$ sont $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, où $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$;
- de $\mathbb{R}^n$ sont les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, …, $\vec{e}_n$ de n composantes, où $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e}_2 = (1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, …, $\vec{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$.

$\vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$
n composantes

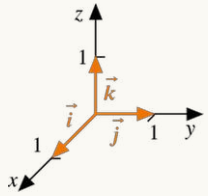
Représentation graphique de vecteurs canoniques

Exemple 2 Réprésentons graphiquement les vecteurs canoniques

$\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$ dans le plan cartésien.



$\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$ dans l'espace cartésien.



Exercices de compréhension 4.4

3. Déterminer $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_4$

a) dans $\mathbb{R}^4$; b) dans $\mathbb{R}^5$.

DÉFINITION 4.16

Le **vecteur opposé** à $\vec{u}$, noté $-\vec{u}$, se définit ainsi :

- Pour $\vec{u} = (u_1, u_2)$, un vecteur de $\mathbb{R}^2$, $-\vec{u} = (-u_1, -u_2)$.
- Pour $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, un vecteur de $\mathbb{R}^3$, $-\vec{u} = (-u_1, -u_2, -u_3)$.
- Pour $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$, un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $-\vec{u} = (-u_1, -u_2, -u_3, \ldots, -u_n)$.

Exemple 3 Trouvons l'opposé de $\vec{u}$.

a) Si $\vec{u} = \left(\frac{4}{3}, \frac{-5}{7}\right)$, alors
$-\vec{u} = \left(-\frac{4}{3}, -\left(\frac{-5}{7}\right)\right)$
d'où $-\vec{u} = \left(\frac{-4}{3}, \frac{5}{7}\right)$

b) Si $\vec{u} = (-3, 8, -4)$, alors
$-\vec{u} = (-(-3), -8, -(-4))$
d'où $-\vec{u} = (3, -8, 4)$

c) Si $\vec{u} = (2, 5, -3, 1)$, alors
$-\vec{u} = (-2, -5, -(-3), -1)$
d'où $-\vec{u} = (-2, -5, 3, -1)$

Norme d'un vecteur algébrique

DÉFINITION 4.17

La **norme** d'un vecteur algébrique $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, du plan cartésien ou de l'espace cartésien, est égale à la longueur du segment de droite joignant l'origine et l'extrémité du vecteur $\vec{u}$.

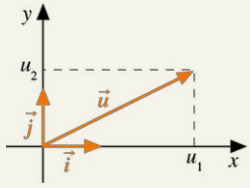
THÉORÈME 4.6

1) Soit $\vec{u}$, un vecteur du plan cartésien.
Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

2) Soit $\vec{u}$, un vecteur de l'espace cartésien.
Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

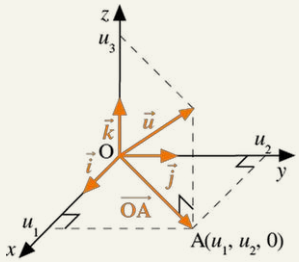
Preuve

1)



$$\|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 \qquad \text{(Pythagore)}$$
$$\text{d'où } \|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

2)



$$\|\vec{u}\|^2 = \|\overrightarrow{OA}\|^2 + u_3^2 \qquad \text{(Pythagore)}$$
$$= (u_1^2 + u_2^2) + u_3^2 \qquad \text{(Pythagore)}$$
$$\text{d'où } \|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Exemple 1 Calculons la norme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants.

a) Soit $\vec{u} = (3, -2)$.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2} \qquad \text{(théorème 4.6)}$$
$$= \sqrt{13}$$

b) Soit $\vec{v} = (3, -5, 7)$.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 7^2} \qquad \text{(théorème 4.6)}$$
$$= \sqrt{83}$$

COROLLAIRE du théorème 4.6

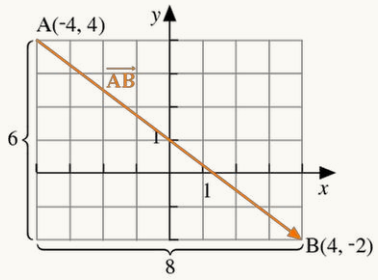
1) Si $A(x_a, y_a)$ et $B(x_b, y_b)$ sont deux points du plan cartésien, alors
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}.$$

2) Si $A(x_a, y_a, z_a)$ et $B(x_b, y_b, z_b)$ sont deux points de l'espace cartésien, alors
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}.$$

Les preuves sont laissées à l'étudiant.

Exemple 2

a) Soit les points A(-4, 4) et B(4, -2).
Calculons $\|\overrightarrow{AB}\|$.

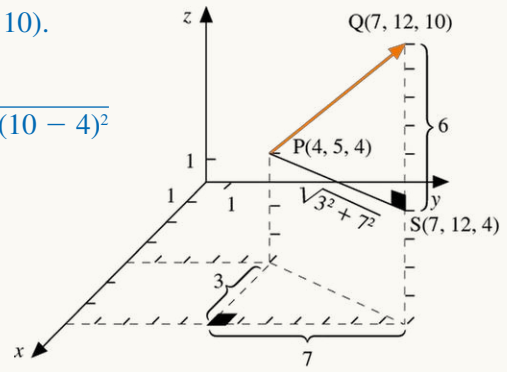


Corollaire du théorème 4.6

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(4 - (-4))^2 + (-2 - 4)^2}$$
$$= \sqrt{8^2 + (-6)^2}$$
$$= \sqrt{100}$$

d'où $\|\overrightarrow{AB}\| = 10$

b) Soit les points P(4, 5, 4) et Q(7, 12, 10).
Calculons $\|\overrightarrow{PQ}\|$.



Corollaire du théorème 4.6

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(7 - 4)^2 + (12 - 5)^2 + (10 - 4)^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + 7^2 + 6^2}$$

d'où $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{94}$

Pour un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$, nous avons la définition suivante.

DÉFINITION 4.18

Soit $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3 + \ldots + u_n\vec{e}_n$, un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

La **norme** de $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est définie par
$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_n^2}$.

Exemple 3 Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^4$, où $\vec{u} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 + \vec{e}_4$,
et $\vec{v} \in \mathbb{R}^5$, où $\vec{v} = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3 + 6\vec{e}_5$.
Calculons $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (-4)^2 + (1)^2}$$ (définition 4.18)
$$= \sqrt{30}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (-5)^2 + (0)^2 + (6)^2}$$ (définition 4.18)
$$= \sqrt{71}$$

DÉFINITION 4.19

Un vecteur algébrique $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ ou de $\mathbb{R}^n$ est un **vecteur unitaire** si $\|\vec{u}\| = 1$.

Exemple 4 Déterminons les vecteurs unitaires parmi les vecteurs suivants.

a) Soit $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AB}$, où $A\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ et $B\left(\frac{4}{5}, 1\right)$.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} \qquad \text{(théorème 4.6)}$$
$$= \sqrt{2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} \qquad \text{(théorème 4.6)}$$
$$= 1$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\left(\frac{4}{5} - \frac{7}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2} \qquad \text{(corollaire du théorème 4.6)}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2}$$
$$= 1$$

D'où $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont des vecteurs unitaires.

b) Soit $\vec{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} \qquad \text{(théorème 4.6)}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)^2} \qquad \text{(théorème 4.6)}$$
$$= 1$$

$$\|\vec{k}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \qquad \text{(théorème 4.6)}$$
$$= 1$$

D'où $\vec{v}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires.

c) Soit $\vec{u} = \frac{3}{13}\vec{e}_1 + \frac{12}{13}\vec{e}_3 - \frac{4}{13}\vec{e}_5$, $\vec{v} = \frac{1}{4}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4)$ et $\vec{e}_6 \in \mathbb{R}^7$.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{-4}{13}\right)^2} \qquad \text{(définition 4.18)}$$
$$= 1$$

$\vec{v} = \frac{1}{4}\vec{e}_1 - \frac{1}{4}\vec{e}_2 - \frac{1}{4}\vec{e}_3 + \frac{1}{4}\vec{e}_4$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} \qquad \text{(définition 4.18)}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$\vec{e}_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$

$$\|\vec{e}_6\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2} \qquad \text{(définition 4.18)}$$
$$= 1$$

D'où $\vec{u}$ et $\vec{e}_6$ sont des vecteurs unitaires.

EXERCICES 4.4

1. Déterminer la dimension des vecteurs algébriques suivants.

a) $\vec{u} = (4, 3, -2)$

b) $\vec{v} = (8, 1, 0, 0, 0)$

c) $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{24})$

d) $\vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$

2. Déterminer les composantes des vecteurs suivants.

a) $\vec{O}$ dans $\mathbb{R}^5$ b) $\vec{O}$ dans $\mathbb{R}^{12}$

c) $\vec{e}_1$ dans $\mathbb{R}^4$ d) $\vec{e}_5$ dans $\mathbb{R}^6$

e) $\vec{j}$ dans $\mathbb{R}^2$ f) $\vec{j}$ dans $\mathbb{R}^3$

3. Représenter les vecteurs suivants dans le même plan cartésien.
$\vec{u} = (5, 4)$, $\vec{v} = (-2, -6)$, $\vec{w} = (-4, 2)$ et $\overrightarrow{AB}$, où A(1, -2) et B(4, -4)

4. Représenter les vecteurs suivants dans le même espace cartésien.

a) $\vec{u} = (2, -5, 4)$ et $\vec{v} = (3, 6, 6)$

b) $\vec{w} = (-4, 3, -2)$ et $\overrightarrow{AB}$, où A(2, 6, -4) et B(-3, -7, -2)

5. Déterminer si les vecteurs suivants sont égaux.

a) $\vec{u} = (1, 2, 3, 4)$ et $\vec{v} = (1, 2, 3, 4, 0)$

b) $\vec{u} = (\sqrt{4}, 3, 2 \sin 30°)$ et $\vec{v} = (2, \sqrt[4]{81}, 1)$

c) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $\vec{v} = (2, 3, 1)$

d) $\vec{u} = (0, 0, 0)$ et $\vec{v} = (0, 0, 0, 0)$

e) $\vec{u} = 4(1, 2, -4, 10)$ et $\vec{v} = 2(2, 4, -8, 20)$

6. Déterminer les valeurs des constantes a, b, c et k telles que les vecteurs suivants sont égaux.

a) $\vec{u} = (3, a)$ et $\vec{v} = (b, -2)$

b) $\vec{u} = k(2, -3)$ et $\vec{v} = (8, a)$

c) $\vec{u} = (a - 2, 2b - a)$ et $\vec{v} = (b, 1)$

d) $\vec{u} = (a^2, a + b)$ et $\vec{v} = (4, 5)$

e) $\vec{u} = (2a, 9, 4c)$ et $\vec{v} = (7, 3b, -8)$

f) $2(a, 2, b) = k\left(b, \frac{-4}{3}, -2\right)$

g) $(a - b, 2a + c, 18) = 3(1, 2, b - c)$

h) $(a^3, a^2 + 2b, 3a + b) = 8(-1, 2, c^2)$

i) $\vec{u} = (5, 0, b, c)$ et $\vec{v} = (5, a, 7, a + b)$

j) $\vec{u} = 2(0, 1, 2, a, -7)$ et $\vec{v} = (0, b, 4, 10, c)$

k) $\vec{u} = 2(8, -6, 4, 2a)$ et $\vec{v} = 4(4, -3, 2, a)$

l) $\vec{u} = k(1, 2, 3, 0)$ et $\vec{v} = (a, -4, b, a + c)$

7. Soit les points A(5, -3), B(-1, 7), P(3, -2, 4) et Q(-5, 0, 8). Déterminer les composantes des vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{BA}$

d) $\overrightarrow{BB}$ e) $\overrightarrow{PQ}$ f) $\overrightarrow{QP}$

g) $\overrightarrow{PO}$ h) $\overrightarrow{PP}$

8. a) Soit les vecteurs $\vec{u} = (-1, 4)$ et $\vec{v} = (5, -3)$. Déterminer le point $Q(x_q, y_q)$ tel que

i) $\overrightarrow{PQ}$ est équipollent à $\vec{u}$ pour P(3, -1) ;

ii) $\overrightarrow{QP}$ est équipollent à $\vec{v}$ pour P(3, -1) ;

iii) $\overrightarrow{QO}$ est équipollent à $\vec{u}$ pour O(0, 0).

b) Soit le vecteur $\vec{u} = (4, -2, 1)$. Déterminer le point $B(x_b, y_b, z_b)$ tel que

i) $\overrightarrow{AB}$ est équipollent à $\vec{u}$ pour A(5, 3, -4) ;

ii) $\overrightarrow{BA}$ est équipollent à $\vec{u}$ pour A(5, 3, -4) ;

iii) $\overrightarrow{BO}$ est équipollent à $\vec{u}$ pour O(0, 0, 0).

9. Calculer la norme des vecteurs suivants.

a) i) $\vec{u} = (5, -12)$

ii) $\overrightarrow{AB}$, où A(5, -1) et B(3, -2)

b) i) $\vec{v} = (1, -2, 3)$

ii) $\overrightarrow{CD}$, où C(-2, -1, 3) et D(0, -5, 2)

c) $\vec{w} = 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_3 + \vec{e}_4 - 2\vec{e}_5$, où $\vec{w} \in \mathbb{R}^6$

10. Déterminer les vecteurs unitaires parmi les vecteurs suivants.

a) $\vec{j} = (0, 1)$; $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$;
$\vec{w} = (\cos\theta, \sin\theta)$

b) $\vec{u} = (1, -1, 1)$; $\vec{v} = (-1, 0, 0)$;
$\vec{w} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;
$\vec{t} = (\sin\theta, \sin\theta\cos\theta, \cos^2\theta)$

4.5 Opérations sur les vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^n$

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra, dans $\mathbb{R}^2$, dans $\mathbb{R}^3$ et dans $\mathbb{R}^n$, additionner des vecteurs algébriques et multiplier un vecteur algébrique par un scalaire.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- d'additionner des vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^n$;
- de multiplier par un scalaire un vecteur algébrique de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^n$;
- de soustraire des vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^n$;
- d'énoncer, pour les vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^n$, les propriétés des opérations d'addition de vecteurs algébriques et de multiplication d'un vecteur algébrique par un scalaire ;
- de démontrer, pour les vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^n$, les propriétés des opérations.

Soit les vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et $k \in \mathbb{R}$.

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \ldots, u_n + v_n)$

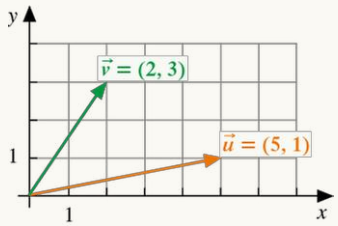
$k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3, \ldots, ku_n)$

4

Addition de vecteurs algébriques

Exemple 1 Soit les vecteurs $\vec{u} = (5, 1)$ et $\vec{v} = (2, 3)$.

a) Représentons graphiquement les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

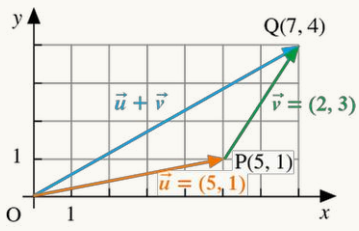


b) Déterminons les composantes du vecteur $\vec{r}$, où $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$.

En utilisant la méthode du triangle, nous obtenons le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ ci-contre.

À partir du point P(5, 1), nous traçons le vecteur $\vec{v} = (2, 3)$ et nous obtenons le point Q(5 + 2, 1 + 3), c'est-à-dire Q(7, 4).

D'où $\vec{r} = \overrightarrow{OQ}$, c'est-à-dire $\vec{r} = (7, 4)$.



On procède de la même façon pour additionner deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

DÉFINITION 4.20

L'addition des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même dimension, donne le **vecteur somme**, noté $\vec{u} + \vec{v}$, et qui est défini ainsi :

- Pour $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$,
  $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$.
- Pour $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$,
  $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$.
- Pour $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$,
  $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \ldots, u_n + v_n)$.

Ainsi, pour additionner deux vecteurs algébriques ayant le même nombre de composantes, il suffit d'additionner leurs composantes respectives.

Exemple 2 Calculons, si c'est possible, les vecteurs sommes.

a) Soit $\vec{u} = (-1, 4)$, $\vec{v} = (2, -7)$ et les points A(-1, 3), B(2, -2), C(0, -4) et D(1, -5).

i) $\vec{u} + \vec{v} = (-1, 4) + (2, -7)$

$= (-1 + 2, 4 + (-7))$ (définition 4.20)

d'où $\vec{u} + \vec{v} = (1, -3)$

ii) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (2 - (-1), -2 - 3) + (1 - 0, -5 - (-4))$

$= (3, -5) + (1, -1)$

$= (3 + 1, -5 + (-1))$ (définition 4.20)

d'où $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (4, -6)$

b) Soit $\vec{u} = (4, -5, 2)$ et les points A(2, 1, 3) et B(-2, 6, 1).

$\vec{u} + \overrightarrow{AB} = (4, -5, 2) + (-2 - 2, 6 - 1, 1 - 3)$

$= (4, -5, 2) + (-4, 5, -2)$

$= (4 + (-4), -5 + 5, 2 + (-2))$ (définition 4.20)

$= (0, 0, 0)$

d'où $\vec{u} + \overrightarrow{AB} = \vec{O}$

c) Soit $\vec{u} = (1, 2, 4, 6, -8)$, $\vec{v} = (-1, 0, -5, 9, 1)$ et $\vec{w} = (1, 2, 4, 6)$.

i) $\vec{u} + \vec{v} = (1, 2, 4, 6, -8) + (-1, 0, -5, 9, 1)$

$= (1 + (-1), 2 + 0, 4 + (-5), 6 + 9, -8 + 1)$ (définition 4.20)

d'où $\vec{u} + \vec{v} = (0, 2, -1, 15, -7)$

ii) $\vec{u} + \vec{w}$

Les deux vecteurs ne sont pas de même dimension,

d'où $\vec{u} + \vec{w}$ n'est pas définie.

Définissons le vecteur somme obtenu en additionnant n vecteurs.

DÉFINITION 4.21

Soit les vecteurs $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}, \ldots, \overrightarrow{w_n}$ ayant le même nombre de composantes.

Le **vecteur somme** $\vec{r}$, où $\vec{r} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} + \ldots + \overrightarrow{w_n}$, est obtenu en additionnant les composantes respectives de ces vecteurs.

Exemple 3 Calculons la somme des vecteurs suivants.

a) Si $\vec{u} = (2, -4)$, $\vec{v} = (0, 8)$, $\vec{w} = (-3, 1)$ et $\vec{t} = (-4, -1)$, alors

$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{t} = (2 + 0 + (-3) + (-4), -4 + 8 + 1 + (-1))$ (définition 4.21)

$= (-5, 4)$

b) Si $\vec{u} = (-5, 9, 8)$, $\vec{v} = (4, 3, 2)$ et $\vec{w} = (6, 0, -7)$, alors

$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = ((-5) + 4 + 6, 9 + 3 + 0, 8 + 2 + (-7))$ (définition 4.21)

$= (5, 12, 3)$

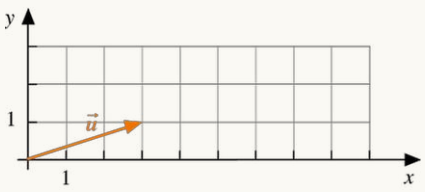
Exercices de compréhension 4.5

1. Soit $\vec{u} = (0, 1, 4, -2)$, $\vec{v} = (1, -3, 5, 6)$ et $\vec{w} = (2, 5, -1, 7)$.
Calculer $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

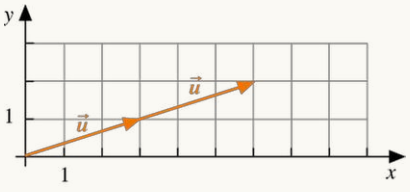
Multiplication d'un vecteur algébrique par un scalaire et soustraction de vecteurs algébriques

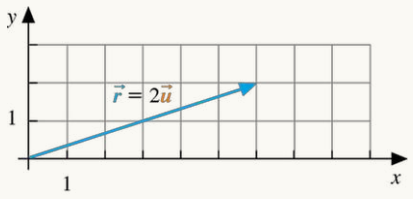
Multiplication d'un vecteur algébrique par un scalaire

Exemple 1 Soit le vecteur $\vec{u} = (3, 1)$. Déterminons les composantes du vecteur $\vec{r}$, où $\vec{r} = 2\vec{u}$.



Puisque $2\vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$, alors le vecteur $\vec{r} = 2\vec{u}$ est représenté ainsi :





$\vec{r} = 2\vec{u} = \vec{u} + \vec{u} = (3, 1) + (3, 1) = (3 + 3, 1 + 1) = (6, 2)$

D'où $\vec{r} = (6, 2)$, c'est-à-dire $\vec{r} = (2(3), 2(1))$.

On procède de la même façon pour effectuer la multiplication d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ par un scalaire.

DÉFINITION 4.22

La **multiplication du vecteur algébrique $\vec{u}$ par le scalaire** k, notée $k\vec{u}$, où $k \in \mathbb{R}$, est définie ainsi :

- Pour $\vec{u} = (u_1, u_2)$, un vecteur de $\mathbb{R}^2$, $k\vec{u} = (ku_1, ku_2)$.
- Pour $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, un vecteur de $\mathbb{R}^3$, $k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$.
- Pour $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$, un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3, \ldots, ku_n)$.

Ainsi, pour effectuer la multiplication d'un vecteur par un scalaire, il suffit de multiplier chaque composante du vecteur par ce scalaire.

Exercices de compréhension 4.5

2. Soit $\vec{u} = (-3, 2)$, $\vec{v} = (1, -2, 0)$ et $\vec{w} = (4, -1, 0, 5)$. Calculer

a) $5\vec{u}$; b) $0\vec{v}$; c) $-2\vec{w}$.

Exemple 2 Effectuons les opérations suivantes.

a) Soit $\vec{u} = (4, -7)$ et $\vec{v} = (-2, 5)$. Calculons $3\vec{u} + 4\vec{v}$.

$$\begin{aligned} 3\vec{u} + 4\vec{v} &= 3(4, -7) + 4(-2, 5) \\ &= (12, -21) + (-8, 20) && \text{(définition 4.22)} \\ &= (4, -1) && \text{(définition 4.20)} \end{aligned}$$

b) Soit $\vec{u} = (4, -5, 3)$ et $\vec{v} = (-2, 3, 0)$. Calculons $3\vec{u} + 5\vec{v}$.

$$\begin{aligned} 3\vec{u} + 5\vec{v} &= 3(4, -5, 3) + 5(-2, 3, 0) \\ &= (12, -15, 9) + (-10, 15, 0) && \text{(définition 4.22)} \\ &= (2, 0, 9) && \text{(définition 4.20)} \end{aligned}$$

c) Soit $\vec{u} = (4, -3, 0, 1, 2)$ et $\vec{v} = (-4, 2, -1, 3, -2)$. Calculons $2\vec{u} + 4\vec{v}$.

$$\begin{aligned} 2\vec{u} + 4\vec{v} &= 2(4, -3, 0, 1, 2) + 4(-4, 2, -1, 3, -2) \\ &= (2(4), 2(-3), 2(0), 2(1), 2(2)) + (4(-4), 4(2), 4(-1), 4(3), 4(-2)) && \text{(définition 4.22)} \\ &= (8, -6, 0, 2, 4) + (-16, 8, -4, 12, -8) \\ &= (-8, 2, -4, 14, -4) && \text{(définition 4.20)} \end{aligned}$$

DÉFINITION 4.23

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs algébriques non nuls de $\mathbb{R}^n$ ayant le même nombre de composantes.

Les **vecteurs algébriques** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **parallèles** ($\vec{u} /\!/ \vec{v}$) si et seulement s'il existe un scalaire $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ (ou $\vec{v} = k\vec{u}$).

De façon générale, pour tout vecteur non nul $\vec{u}$, et pour $k \neq 0$, nous avons $k\vec{u} /\!/ \vec{u}$. Dans le cas où $k = -1$, nous avons $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$, où $-\vec{u}$ est le vecteur opposé à $\vec{u}$.

Exemple 3 Déterminons si les vecteurs suivants sont parallèles.

a) $\vec{u} = (6, -9)$ et $\vec{v} = (-2, 3)$

Pour déterminer si $\vec{u}$ est parallèle à $\vec{v}$, il faut déterminer s'il existe un scalaire $k \neq 0$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, c'est-à-dire

$(6, -9) = k(-2, 3)$

$(6, -9) = (-2k, 3k)$

Donc,

Définition 4.12

$6 = -2k$ et $-9 = 3k$

$k = -3$ et $k = -3$

Puisque nous obtenons la même valeur de k ($k = -3$), $\vec{u} = -3\vec{v}$

Définition 4.23

d'où $\vec{u}$ est parallèle à $\vec{v}$.

b) $\vec{w} = (-15, 25, 6)$ et $\vec{t} = (9, -15, -10)$

Pour déterminer si $\vec{w}$ est parallèle à $\vec{t}$, il faut déterminer s'il existe un scalaire $k \neq 0$ tel que $\vec{w} = k\vec{t}$, c'est-à-dire

$(-15, 25, 6) = k(9, -15, -10)$

$(-15, 25, 6) = (9k, -15k, -10k)$

Donc,

$-15 = 9k$, $25 = -15k$ et $6 = -10k$

$k = \frac{-5}{3}$, $k = \frac{-5}{3}$ et $k = \frac{-3}{5}$

Puisque nous obtenons des valeurs différentes de k, $\vec{w} \neq k\vec{t}$

d'où $\vec{w}$ n'est pas parallèle à $\vec{t}$.

4

DÉFINITION 4.24

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ayant le même nombre de composantes.

En soustrayant le vecteur $\vec{v}$ du vecteur $\vec{u}$, nous obtenons le **vecteur différence**, noté $\vec{u} - \vec{v}$, qui est défini par

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$, où $-\vec{v} = (-1)\vec{v}$.

Exemple 4 Effectuons les opérations suivantes.

Soustraction de vecteurs algébriques

a) Soit $\vec{u} = (-1, 5)$ et $\vec{v} = (4, -7)$. Calculons $\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{v} - \vec{u}$.

$$\begin{aligned} \vec{u} - \vec{v} &= \vec{u} + (-1)\vec{v} && \text{(définition 4.24)} \\ &= (-1, 5) + (-1)(4, -7) \\ &= (-1, 5) + (-4, 7) && \text{(définition 4.22)} \\ &= (-5, 12) && \text{(définition 4.20)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} - \vec{u} &= \vec{v} + (-1)\vec{u} \\ &= (4, -7) + (-1)(-1, 5) \\ &= (4, -7) + (1, -5) \\ &= (5, -12) \end{aligned}$$

b) Soit $\vec{u} = (-1, 2, -4, 5)$ et $\vec{v} = (0, 3, -2, 6)$. Calculons $3\vec{u} - \vec{v}$.

$$\begin{aligned} 3\vec{u} - \vec{v} &= 3\vec{u} + (-\vec{v}) && \text{(définition 4.24)} \\ &= 3(-1, 2, -4, 5) + (-1)(0, 3, -2, 6) \\ &= (-3, 6, -12, 15) + (0, -3, 2, -6) && \text{(définition 4.22)} \\ &= (-3, 3, -10, 9) && \text{(définition 4.20)} \end{aligned}$$

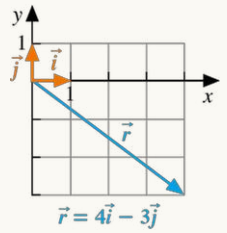
$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont les vecteurs canoniques de $\mathbb{R}^2$

Exemple 5

a) Soit $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$. Calculons $\vec{r} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$.

$$\begin{aligned} 4\vec{i} - 3\vec{j} &= 4(1, 0) + (-3)(0, 1) \\ &= (4, 0) + (0, -3) \\ &= (4, -3) \end{aligned}$$

d'où $\vec{r} = (4, -3)$



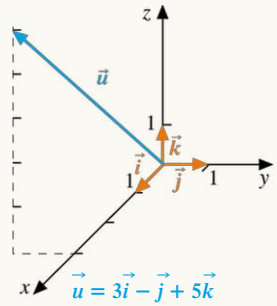
$\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont les vecteurs canoniques de $\mathbb{R}^3$

b) Soit $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Calculons $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$.

$$\begin{aligned} 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k} &= 3(1, 0, 0) + (-1)(0, 1, 0) + 5(0, 0, 1) \\ &= (3, 0, 0) + (0, -1, 0) + (0, 0, 5) \\ &= (3, -1, 5) \end{aligned}$$

d'où $\vec{u} = (3, -1, 5)$



$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ et $\vec{e}_4$ sont les vecteurs canoniques de $\mathbb{R}^4$

c) Soit $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$ et $\vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$.

Déterminons les composantes du vecteur $\vec{v}$, où $\vec{v} = 3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$.

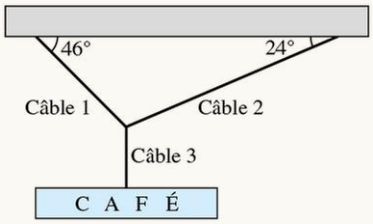
$$\begin{aligned} \vec{v} &= 3(1, 0, 0, 0) + (-5)(0, 1, 0, 0) + (0, 0, 1, 0) + 2(0, 0, 0, 1) \\ &= (3, 0, 0, 0) + (0, -5, 0, 0) + (0, 0, 1, 0) + (0, 0, 0, 2) \\ &= (3, -5, 1, 2) \end{aligned}$$

d'où $\vec{v} = (3, -5, 1, 2)$



Exemple 6

Une enseigne de 5 kg est suspendue à l'aide de trois câbles de masse négligeable, tel qu'illustré ci-contre.

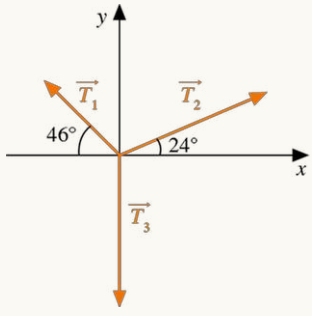


Deuxième loi de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$

Déterminons la tension dans chacun des câbles, sachant que $\vec{F} = m\vec{a}$.

$\|\vec{F}\| = m\,\|\vec{a}\|$

Le schéma ci-contre, qui n'est pas à l'échelle, illustre les forces agissant sur l'enseigne, où $\|\vec{T}_3\| = 5 \text{ kg } (9{,}8 \text{ m/s}^2) = 49 \text{ N}$.



Puisque l'enseigne est en équilibre, nous avons

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = \vec{O}$$

ainsi $(T_{1x}, T_{1y}) + (T_{2x}, T_{2y}) + (T_{3x}, T_{3y}) = (0, 0)$

$$(T_{1x} + T_{2x} + T_{3x}, T_{1y} + T_{2y} + T_{3y}) = (0, 0)$$

Définition 4.21

Définition 4.12

donc, nous avons le système $\text{S} \begin{cases} T_{1x} + T_{2x} + T_{3x} = 0 \\ T_{1y} + T_{2y} + T_{3y} = 0 \end{cases}$

où $T_{1x} = -\|\overrightarrow{T_1}\| \cos 46°$, $T_{2x} = \|\overrightarrow{T_2}\| \cos 24°$ et $T_{3x} = \|\overrightarrow{T_3}\| \cos 90°$

(projection horizontale)

$T_{1y} = \|\overrightarrow{T_1}\| \sin 46°$, $T_{2y} = \|\overrightarrow{T_2}\| \sin 24°$ et $T_{3y} = -\|\overrightarrow{T_3}\| \sin 90°$

(projection verticale)

Système d'équations correspondant à S

$$\begin{cases} -\|\overrightarrow{T_1}\| \cos 46° + \|\overrightarrow{T_2}\| \cos 24° + 0 = 0 & (\|\overrightarrow{T_3}\| \cos 90° = 0) \\ \|\overrightarrow{T_1}\| \sin 46° + \|\overrightarrow{T_2}\| \sin 24° - 49 = 0 & (-\|\overrightarrow{T_3}\| \sin 90° = -49) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\|\overrightarrow{T_1}\| \cos 46° + \|\overrightarrow{T_2}\| \cos 24° = 0 \\ \|\overrightarrow{T_1}\| \sin 46° + \|\overrightarrow{T_2}\| \sin 24° = 49 \end{cases}$$

Règle de Cramer

$$\|\overrightarrow{T_1}\| = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos 24° \\ 49 & \sin 24° \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\cos 46° & \cos 24° \\ \sin 46° & \sin 24° \end{vmatrix}} = \frac{-44{,}763\ldots}{-0{,}939\ldots} = 47{,}636\ldots$$

$$\|\overrightarrow{T_2}\| = \frac{\begin{vmatrix} -\cos 46° & 0 \\ \sin 46° & 49 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\cos 46° & \cos 24° \\ \sin 46° & \sin 24° \end{vmatrix}} = \frac{-34{,}038\ldots}{-0{,}939\ldots} = 36{,}222\ldots$$

D'où la tension est d'environ 47,6 N dans le câble 1, d'environ 36,2 N dans le câble 2 et de 49 N dans le câble 3.

THÉORÈME 4.7

Si $\vec{v}$ est un vecteur algébrique non nul de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ ou de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\vec{u} \text{ et } -\vec{u}, \text{ où } \vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} \text{ et } -\vec{u} = \frac{-1}{\|\vec{v}\|}\vec{v},$$

sont deux vecteurs unitaires parallèles à $\vec{v}$.

La preuve est laissée à l'étudiant.

Ce théorème nous permet de déterminer des vecteurs, avec une norme donnée, qui sont parallèles à un vecteur non nul.

Exemple 7

a) Soit $\vec{v} = (3, -4)$.

i) Déterminons deux vecteurs unitaires parallèles à $\vec{v}$.

Vecteurs unitaires parallèles à $\vec{v}$

Puisque $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$,

alors $\vec{u} = \frac{1}{5}(3, -4)$, c'est-à-dire $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ est un vecteur unitaire parallèle à $\vec{v}$.

De même, $-\vec{u} = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ est un vecteur unitaire parallèle à $\vec{v}$.

ii) Déterminons deux vecteurs, de norme égale à 9, parallèles à $\vec{v}$.

Vecteurs de norme 9 parallèles à $\vec{v}$

Puisque $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right)$ est un vecteur unitaire parallèle à $\vec{v}$ (*voir i)*),

alors $\vec{w} = 9\vec{u} = 9\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right) = \left(\frac{27}{5}, \frac{-36}{5}\right)$ est un des deux vecteurs cherchés.

L'autre vecteur est $-\vec{w} = \left(\frac{-27}{5}, \frac{36}{5}\right)$.

b) Soit les points A(-1, 1, 2) et B(3, 0, 4).

Vecteurs de norme 5 parallèles à $\overrightarrow{AB}$

Déterminons un vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v}$ est parallèle à $\overrightarrow{AB}$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

Puisque $\overrightarrow{AB} = (4, -1, 2)$, alors $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{21}$.

Déterminons d'abord un vecteur unitaire $\vec{u}$ parallèle à $\overrightarrow{AB}$.

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{21}}(4, -1, 2)$$

$$= \left(\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\right)$$

$$= \left(\frac{4\sqrt{21}}{21}, \frac{-1\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21}\right)$$

En posant $\vec{v} = 5\vec{u}$, nous obtenons $\vec{v} = \left(\frac{20\sqrt{21}}{21}, \frac{-5\sqrt{21}}{21}, \frac{10\sqrt{21}}{21}\right)$

D'où $\vec{v} = \left(\frac{20\sqrt{21}}{21}, \frac{-5\sqrt{21}}{21}, \frac{10\sqrt{21}}{21}\right)$ est un vecteur de norme 5 parallèle à $\overrightarrow{AB}$.

De même, $-\vec{v} = \left(\frac{-20\sqrt{21}}{21}, \frac{5\sqrt{21}}{21}, \frac{-10\sqrt{21}}{21}\right)$ est également un vecteur de norme 5, parallèle à $\overrightarrow{AB}$.

Exercices de compréhension 4.5

3. Déterminer les deux vecteurs unitaires parallèles à $\vec{v}$, où $\vec{v} = (3, -4, 12)$.

Propriétés de l'addition de vecteurs algébriques et de la multiplication d'un vecteur algébrique par un scalaire

Énonçons maintenant les propriétés de l'addition de vecteurs algébriques et les propriétés de la multiplication d'un vecteur algébrique par un scalaire.

Si V est l'ensemble des vecteurs algébriques dans $\mathbb{R}^n$, alors pour tout vecteur de même dimension $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w} \in$ V, et pour tout r et $s \in \mathbb{R}$, nous avons :

Propriété 1	$(\vec{u} + \vec{v}) \in$ V	(fermeture pour l'addition de vecteurs algébriques)
Propriété 2	$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$	(commutativité de l'addition de vecteurs algébriques)
Propriété 3	$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$	(associativité de l'addition de vecteurs algébriques)
Propriété 4	$\vec{u} + \vec{O} = \vec{u}$	(il existe un **élément neutre** pour l'addition, de même dimension que $\vec{u}$, noté $\vec{O}$, où $\vec{O} \in$ V)
Propriété 5	$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{O}$	(il existe un **élément opposé** pour l'addition, de même dimension que $\vec{u}$, noté $-\vec{u}$, où $-\vec{u} \in$ V)
Propriété 6	$r\vec{u} \in$ V	(fermeture pour la multiplication d'un vecteur algébrique par un scalaire)
Propriété 7	$(r + s)\vec{u} = r\vec{u} + s\vec{u}$	(pseudo-distributivité de la multiplication d'un vecteur algébrique sur l'addition de scalaires)
Propriété 8	$r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v}$	(pseudo-distributivité de la multiplication sur l'addition de vecteurs algébriques par un scalaire)
Propriété 9	$r(s\vec{u}) = (rs)\vec{u}$	(pseudo-associativité de la multiplication d'un scalaire et d'un vecteur algébrique)
Propriété 10	$1\vec{u} = \vec{u}$	(1 est le pseudo-élément neutre pour la multiplication d'un vecteur algébrique par un scalaire)

Démontrons les propriétés 2, 4 et 9.

PROPRIÉTÉ 2

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativité de l'addition de vecteurs algébriques)

Preuve

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$, deux vecteurs de même dimension appartenant à $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\vec{u} + \vec{v} &= (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n) \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \ldots, u_n + v_n) && \text{(définition 4.20)} \\
&= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3, \ldots, v_n + u_n) && \text{(commutativité de l'addition dans } \mathbb{R}) \\
&= (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n) + (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) && \text{(définition 4.20)} \\
&= \vec{v} + \vec{u}
\end{aligned}$$

d'où $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

PROPRIÉTÉ 4

$\vec{u} + \vec{O} = \vec{u}$ (il existe un élément neutre pour l'addition, de même dimension que $\vec{u}$, noté $\vec{O}$, où $\vec{O} \in V$)

Preuve

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$, un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Déterminons le vecteur $\vec{O} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, l'élément neutre pour l'addition.

Puisque $\vec{u} + \vec{O} = \vec{u}$

$$(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) + (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$$

$$(u_1 + x_1, u_2 + x_2, u_3 + x_3, \ldots, u_n + x_n) = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) \quad \text{(définition 4.20)}$$

Ainsi, par la définition 4.12,

$$\begin{array}{ccccc} u_1 + x_1 = u_1 & \vdots & u_2 + x_2 = u_2 & \vdots & \cdots \quad \vdots \quad u_n + x_n = u_n \\ x_1 = 0 & & x_2 = 0 & & x_n = 0 \end{array}$$

d'où $\vec{O} = (0, 0, 0, \ldots, 0)$ est l'élément neutre pour l'addition de vecteurs algébriques dans $\mathbb{R}^n$, car $\vec{u} + \vec{O} = \vec{u}$.

PROPRIÉTÉ 9

$r(s\vec{u}) = (rs)\vec{u}$ (pseudo-associativité de la multiplication d'un scalaire et d'un vecteur algébrique)

Preuve

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$, un vecteur de $\mathbb{R}^n$, et $r, s \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} r(s\vec{u}) &= r(s(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)) \\ &= r(su_1, su_2, su_3, \ldots, su_n) && \text{(définition 4.22)} \\ &= (r(su_1), r(su_2), r(su_3), \ldots, r(su_n)) && \text{(définition 4.22)} \\ &= ((rs)u_1, (rs)u_2, (rs)u_3, \ldots, (rs)u_n) && \text{(associativité de la multiplication dans } \mathbb{R}) \\ &= (rs)(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n) && \text{(définition 4.22)} \\ &= (rs)\vec{u} \end{aligned}$$

d'où $r(s\vec{u}) = (rs)\vec{u}$

EXERCICES 4.5

1. a) Déterminer les composantes des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants.

$\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$; $\vec{v} = -2\vec{i} + 7\vec{j}$; $\vec{w} = 5\vec{i} - \vec{j}$

b) Exprimer le vecteur $\vec{t} = (a, b)$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

c) Exprimer les vecteurs suivants en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

$\vec{u_1} = (2, 8)$; $\vec{u_2} = (0, -5)$;

$\vec{u_3} = 3(4, 5) + 2(1, -3)$

d) Déterminer les composantes des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants.

$\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$; $\vec{w} = 7\vec{j}$

e) Exprimer le vecteur $\vec{t} = (a, b, c)$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

f) Exprimer les vecteurs suivants en fonction de $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$.

$\vec{u_1} = (4, -5, 3)$;

$\vec{u_2} = (0, 0, 0)$;

$\vec{u_3} = 2(1, 2, -4) - 4(0, 3, -2)$

2. Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{r}$ suivants.

a) Pour $\vec{u} = (-3, 4)$, $\vec{v} = (5, -1)$ et $\vec{w} = (-4, 2)$.

i) $\vec{r} = 2\vec{u}$ ii) $\vec{r} = 5\vec{O} - 6\vec{v}$

iii) $\vec{r} = \vec{w} + 0\vec{u}$ iv) $\vec{r} = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$

v) $\vec{r} = 3\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w}$ vi) $\vec{r} = 3\vec{v} - 2\vec{i} + 7\vec{j}$

b) Pour $\vec{u} = (3, -3, 9)$, $\vec{v} = (-1, 0, 1)$ et $\vec{w} = (-2, 5, -6)$.

i) $\vec{r} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ ii) $\vec{r} = 3\vec{v} - \dfrac{1}{3}\vec{u}$

iii) $\vec{r} = 4\vec{O} + \vec{w}$ iv) $\vec{r} = 2\vec{u} + 0\vec{w}$

v) $\vec{r} = 2\vec{u} - 3\vec{j} + \vec{k}$

vi) $\vec{r} = \dfrac{2}{3}\vec{u} - \vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$

c) Pour $\vec{u} = (-2, 3, 0, 1, 7)$, $\vec{v} = (4, 0, -2, 1, -5)$, $\vec{w} = (3, 0, 0, 1, -2)$ et $\vec{t} = (4, 0, 5, 6)$.

i) $\vec{r} = 2\vec{w} - 4\vec{u}$ ii) $\vec{r} = \vec{e_2} + \vec{v}$

iii) $\vec{r} = \vec{e_2} + \vec{t}$ iv) $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

v) $\vec{r} = 3(\vec{u} + 2\vec{v})$

vi) $\vec{r} = (\vec{v} + \vec{O}) + (\vec{w} - \vec{w})$

3. a) Soit $\vec{u} = (-3, 4)$ et $\vec{v} = (5, -1)$. Calculer :

i) $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ ii) $\|\vec{u} - \vec{v}\|$

iii) $\|-\vec{v}\|$ iv) $-5\|\vec{u}\|$

v) $\left\|\dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right\|$ vi) $\left\|\dfrac{4}{\|\vec{u} + 3\vec{v}\|}(\vec{u} + 3\vec{v})\right\|$

b) Soit $\vec{u} = (3, -3, 9)$ et $\vec{v} = (-2, 5, -6)$. Calculer :

i) $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ ii) $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

iii) $\|-4\vec{v}\|$ iv) $-4\|\vec{v}\|$

v) $\left\|\dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right\|$ vi) $\left\|\dfrac{1}{\|\vec{u} + \vec{v}\|}(-2\vec{u} - 2\vec{v})\right\|$

c) Soit $\vec{u} = 2\vec{e_1} + 4\vec{e_3} - 5\vec{e_4}$ et $\vec{v} = 3\vec{e_1} - \vec{e_2} + 4\vec{e_5}$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^6$. Calculer :

i) $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ ii) $\|-4\vec{u}\|$

iii) $-3\|\vec{v}\|$ iv) $\left\|\dfrac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}\right\|$

4. a) Soit les points A(4, 6), B(5, -1), C(-3, 0) et D(-2, -3). Calculer :

i) $\|-3\overrightarrow{BA}\|$

ii) $\|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA}\|$

iii) $\|3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}\|$

b) Soit les points A(1, 2, 3), B(2, 2, 3), C(2, 2, 5) et D(2, 3, 5). Calculer :

i) $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}\right\|$

ii) $\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}\|$

iii) $\left\|\dfrac{-7}{\|\overrightarrow{AB} + 0{,}5\overrightarrow{BC}\|}(\overrightarrow{AB} + 0{,}5\overrightarrow{BC})\right\|$

5. Déterminer les vecteurs parallèles parmi les vecteurs suivants.

a) $\vec{u} = (6, -4)$; $\vec{v} = (-4, 6)$; $\vec{w} = (14, -21)$;

$\vec{s} = \left(-5, \dfrac{10}{3}\right)$; $\vec{t} = (-2, -3)$

b) $\vec{u} = (-3, 6, 3)$; $\vec{v} = (2, -4, 2)$; $\vec{w} = \left(\dfrac{-5}{3}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{-5}{3}\right)$;

$\vec{s} = (1, 2, 1)$; $\vec{t} = \left(\dfrac{6}{7}, \dfrac{-12}{7}, \dfrac{-6}{7}\right)$

6. a) Déterminer un vecteur unitaire parallèle à

i) $\vec{s} = (-5, 12)$ et de même sens que $\vec{s}$;

ii) $\vec{w} = (2, -1, 5)$ et de sens opposé à $\vec{w}$.

b) Déterminer deux vecteurs

i) de norme 5 et qui sont parallèles à $\vec{t} = (-7, 3)$;

ii) de norme 4 et qui sont parallèles à $\overrightarrow{AB}$, où A(4, 1, -4) et B(-8, 5, -1).

7. **POINT MILIEU D'UN SEGMENT**

a) Déterminer le point milieu M du segment de droite joignant les points

i) $P_0(x_0, y_0)$ et $P_1(x_1, y_1)$;

ii) $P_0(x_0, y_0, z_0)$ et $P_1(x_1, y_1, z_1)$.

b) Utiliser le résultat trouvé en a) pour déterminer le point milieu M du segment de droite joignant les points

i) A(0, 1) et B(-4, 5) ;

ii) A(-6, 5) et B(6, -5) ;

iii) A(0, 0, 1) et B(1, -1, 1) ;

iv) $A\left(\frac{7}{5}, \frac{-9}{4}, \frac{2}{3}\right)$ et $B\left(\frac{-5}{7}, \frac{4}{9}, \frac{-2}{3}\right)$.

8. **POINTS SUR UN SEGMENT DE DROITE**

a) Soit les points A(4, 5) et B(-6, -2).

i) Déterminer les points P et Q qui séparent le segment de droite $\overline{AB}$ en trois parties de même longueur et représenter graphiquement les points A, B, P et Q.

ii) Déterminer les points R et S de la droite passant par A et B situés quatre fois plus près de B que de A.

b) Soit les points A(2, -3, 4) et B(-1, 5, -3).

i) Déterminer le point P du segment de droite $\overline{AB}$ situé deux fois plus près de A que de B.

ii) Déterminer les points R et S du segment de droite $\overline{AB}$ partageant ce segment en deux segments, de sorte que la longueur de l'un est égale à trois fois la longueur de l'autre.

iii) Déterminer les points Q_1 et Q_2 de la droite passant par A et B situés cinq fois plus près de B que de A, en précisant leur position relative par rapport à A et à B.

9. **PARALLÉLOGRAMME**

Soit les points A(2, 1), B(5, 7), C(10, 14) et D(7, 8).

a) Démontrer que le quadrilatère formé par ces points est un parallélogramme.

b) Vérifier que les diagonales du parallélogramme précédent se coupent en leur milieu.

10. Soit les points A(3, 2), B(2, -4), C(-3, 4), $R(x_1, y_1)$ et $S(x_2, y_2)$ tels que $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RA} - 2\overrightarrow{RB} + 3\overrightarrow{RC}$.

a) Exprimer x_1 en fonction de x_2, et y_1 en fonction de y_2.

b) Est-il possible que les points R et S coïncident ? Si oui, déterminer leurs coordonnées.

11. **NATURE D'UN TRIANGLE**

Soit $\overrightarrow{OA} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ et le point C(5, -6, 5).

Déterminer la nature du triangle ABC.

12. **AIRE D'UN RECTANGLE**

Soit les points A(4, -3, 2), B(-1, -2, 3) et C(6, c, 5) tels que $\angle BAC = 90°$.

a) Déterminer la valeur de c.

b) Si le quadrilatère ABCD est un rectangle, déterminer le point D.

c) Calculer l'aire du rectangle ABCD.

13. Soit les points A(-1, 2, 3), B(5, 3, 0), C(11, 4, 9) et $D\left(9, \frac{11}{3}, 6\right)$.

Déterminer

a) si les points A, B et C sont alignés ;

b) si les points B, C et D sont alignés.

14. **APPLICATION | VECTEURS ET VENTES**

Les vecteurs $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ suivants représentent les ventes quotidiennes (en dollars) enregistrées dans un dépanneur au cours de la deuxième et de la troisième semaine du mois de mars 2018.

$\vec{v}_2 = (1089, 495, 660, 781, 638, 891, 1045)$

$\vec{v}_3 = (1200, 540, 730, 860, 700, 980, 1150)$

a) Déterminer le vecteur $\vec{s}$ représentant les ventes quotidiennes totales de ces deux semaines.

b) Déterminer le vecteur $\vec{m}$ représentant les ventes quotidiennes moyennes de ces deux semaines.

c) Après analyse, le propriétaire constate que $\vec{v}_2$ représente une augmentation de 10 % par rapport aux ventes quotidiennes de la semaine précédente. Déterminer les composantes du vecteur $\vec{v}_1$ représentant les ventes quotidiennes de la première semaine.

d) Le propriétaire estime que les ventes quotidiennes de la quatrième semaine seront de 10 % supérieures à celles de la troisième semaine. Déterminer le vecteur $\vec{v}_4$ représentant les ventes quotidiennes de la quatrième semaine.

Révision des concepts

Vecteurs géométriques

Vecteurs géométriques particuliers

Le vecteur $\vec{u}$ est unitaire si et seulement si _____

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont

équipollents si et seulement si les deux vecteurs ont

i) _____

ii) _____

iii) _____

opposés si et seulement si les deux vecteurs ont

i) _____

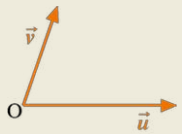
ii) _____

iii) _____

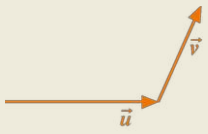
Addition de vecteurs géométriques

Représenter le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Méthode du parallélogramme



Méthode du triangle



Loi de Chasles

$\overrightarrow{AX_1} + \overrightarrow{X_1X_2} + \ldots + \overrightarrow{X_{n-1}X_n} + \overrightarrow{X_nB} =$ _____

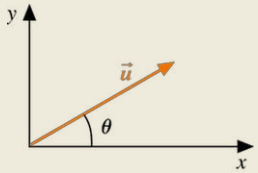
Multiplication d'un vecteur géométrique $\vec{v}$ par un scalaire k, où $k \in \mathbb{R}$.

1) Si $k \neq 0$, alors la direction de $k\vec{v}$ est _____
   a) Si $k > 0$, alors le sens de $k\vec{v}$ est _____
   b) Si $k < 0$, alors le sens de $k\vec{v}$ est _____
2) Si $k = 0$, alors $k\vec{v} =$ _____
3) $\|k\vec{v}\| =$ _____

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs géométriques non nuls ; $\vec{u} /\!/ \vec{v}$ si et seulement si _____

Projection orthogonale

Soit $\vec{u}$, le vecteur illustré, où $\|\vec{u}\| = r$.



Représenter $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ sur le graphique et compléter.

$\|\vec{u}_x\| =$ _____ $\|\vec{u}_y\| =$ _____

Vecteurs algébriques

Composantes et norme d'un vecteur algébrique

Dans $\mathbb{R}^2$

Soit $A(x_a, y_a)$ et $B(x_b, y_b)$, deux points du plan cartésien.

$\overrightarrow{AB} =$ _____

$\|\overrightarrow{AB}\| =$ _____

Dans $\mathbb{R}^3$

Soit $A(x_a, y_a, z_a)$ et $B(x_b, y_b, z_b)$, deux points de l'espace cartésien.

$\overrightarrow{BA} =$ _____

$\|\overrightarrow{BA}\| =$ _____

Vecteurs algébriques particuliers

Dans $\mathbb{R}^2$

$\vec{O} =$ _____

$\vec{i} =$ _____

$\vec{j} =$ _____

Dans $\mathbb{R}^3$

$\vec{O} =$ _____

$\vec{i} =$ _____

$\vec{j} =$ _____

$\vec{k} =$ _____

Dans $\mathbb{R}^n$

$\vec{O} =$ _____

$\vec{e}_1 =$ _____

$\vec{e}_2 =$ _____

$\vec{e}_n =$ _____

Vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^n$

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ et $\vec{w} = w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2 + w_3\vec{e}_3 + \ldots + w_n\vec{e}_n$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow$ _____

$\vec{u} + \vec{v} =$ _____

$r\vec{u} =$ _____, où $r \in \mathbb{R}$

$-\vec{v} =$ _____

$\vec{u} - \vec{v} =$ _____

$\|\vec{w}\| =$ _____

$\vec{u} /\!/ \vec{v}$ si et seulement si _____

$\vec{u} =$ _____ est un vecteur unitaire parallèle à $\vec{v}$

Exercices récapitulatifs

Administration · Biologie · Chimie · Géométrie · Physique · Sciences humaines · Outil technologique

Les réponses aux exercices récapitulatifs et aux problèmes de synthèse, à l'exception de ceux notés en **rouge**, sont fournies à la fin du manuel.

1. Déterminer, parmi les situations suivantes, celles qui correspondent à une quantité vectorielle.

a) Un bébé a une masse de 3,1 kg.

b) Une chaise a un poids de 50 N.

c) Un bateau se dirige vers le sud à 34 km/h.

d) On trace un segment de droite de 10 cm à un angle de 45° par rapport à l'horizontale.

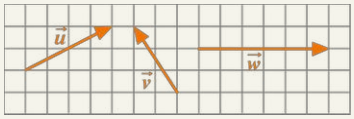
e) On pousse une boîte le long d'un plancher sur une distance de 2 m.

f) Une tasse de café, située à une hauteur de 1 m, est à une température de 90 °C.

g) Un système de poulies utilise une force de 500 N pour soulever un paquet.

h) Le frottement de la glace sur la lame des patins ralentit un patineur.

2. Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ci-dessous.



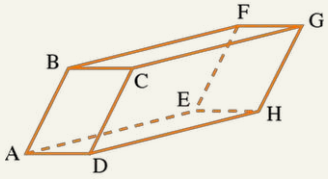
Représenter les vecteurs $\vec{r}$ suivants.

a) $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{r} = \vec{w} + \vec{v} - \vec{u}$

c) $\vec{r} = 3\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w}$ d) $\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{5}{3}\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}$

e) $\vec{r} = \frac{1}{6}(9\vec{u} + 8\vec{v} + 2\vec{w}) - \frac{1}{3}(6\vec{u} - \vec{v} + \vec{w})$

3. Soit le parallélépipède ci-dessous. Déterminer un vecteur équipollent aux vecteurs suivants.



a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH}$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}$ d) $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{DE}$

e) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HG}$ f) $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{CB}$

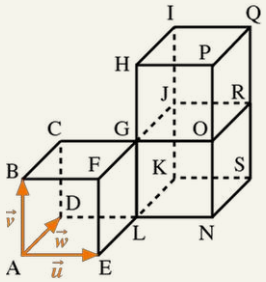
g) $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{FC}$

h) $\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CD}$

i) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{HF}$

j) $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{ED}$

4. Soit la figure ci-dessous, formée de trois cubes de même dimension.

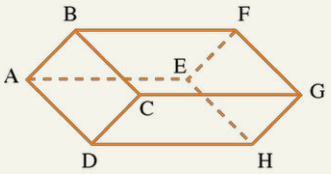


Exprimer les vecteurs suivants sous la forme d'additions ou de soustractions des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

a) $\overrightarrow{AF}$ b) $\overrightarrow{GD}$ c) $\overrightarrow{LS}$ d) $\overrightarrow{GQ}$

e) $\overrightarrow{CN}$ f) $\overrightarrow{BQ}$ g) $\overrightarrow{IA}$ h) $\overrightarrow{AQ}$

5. Soit le parallélépipède droit suivant où $\|\overrightarrow{AB}\| = 3$ cm, $\|\overrightarrow{AD}\| = 4$ cm et $\|\overrightarrow{AE}\| = 7$ cm.



Calculer :

a) $\|\overrightarrow{AC}\|$ b) $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}\|$

c) $\|\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{FG}\|$ d) $\|\overrightarrow{AG}\|$

e) $\|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}\|$ f) $\|\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD}\|$

g) $\|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FE}\|$

h) $\|\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{HG}\|$

i) $\|4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{HE}\|$

6. Répondre par vrai (V) ou faux (F) et justifier les réponses.

a) Deux vecteurs équipollents ont la même origine.

b) Deux vecteurs opposés ont la même direction.

c) Deux vecteurs opposés ont le même sens.

d) Si $\vec{u} = k\vec{v}$, alors $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

e) Il est possible de trouver deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls tels que $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|$.

f) $\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \leq \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

g) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0$

h) $\|\vec{u} - (\vec{u} + \vec{v})\| = \|\vec{v}\|$

i) $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont le même sens.

j) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls et parallèles, alors il existe $k_1 \neq 0$ et $k_2 \neq 0$ tels que $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{O}$.

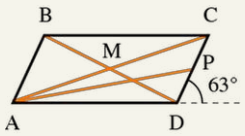
k) Si $\|\vec{u}\| = 3\|\vec{v}\|$, alors $\vec{u} /\!/ \vec{v}$.

l) $\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{1}{k}\vec{u}$ $(k \neq 0)$

m) Si $\vec{v} \neq \vec{O}$, alors $\left\| \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} \right\|$ est un vecteur unitaire.

n) $\|k\vec{v}\| = k\|\vec{v}\|$

7. Soit le parallélogramme où $\|\overrightarrow{AB}\| = 2$ unités et $\|\overrightarrow{AD}\| = 5$ unités.



a) Déterminer $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}$.

b) Évaluer $\|\overrightarrow{AC}\|$ et la direction de $\overrightarrow{AC}$.

c) Évaluer $\|\overrightarrow{BM}\|$ et la direction de $\overrightarrow{BM}$.

d) Évaluer $\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MC}\|$.

e) Évaluer $\|\overrightarrow{AP}\|$ et la direction de $\overrightarrow{AP}$, où P est le point milieu du segment de droite DC.

f) Exprimer $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AP}$.

8. Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, où

$\|\vec{u}\| = 4$, $\theta_{(\vec{u})} = 15°$, N.-E.,

$\|\vec{v}\| = 3$, $\theta_{(\vec{v})} = 45°$, S.-O. et

$\|\vec{w}\| = 6$, $\theta_{(\vec{w})} = 120°$, N.-O.

Déterminer la norme, la direction et le sens de

a) $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$; **b)** $\vec{r} = \vec{u} - \vec{w}$;

c) $\vec{r} = \vec{w} - \vec{u} - \vec{v}$; **d)** $\vec{r} = \vec{u} - 2\vec{v}$.

9. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que

$\|\vec{u}\| = 6$, $\theta_{(\vec{u})} = 20°$, N.-E. et

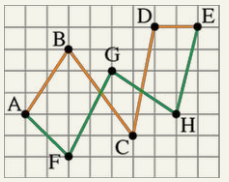
$\|\vec{v}\| = 8$, $\theta_{(\vec{v})} = 135°$, N.-O.

Déterminer la norme, la direction et le sens de

a) $\vec{v}_{\vec{u}}$; **b)** $\vec{u}_{\vec{v}}$.

10. **APPLICATION | DISTANCE ET TEMPS**

Un enfant, suivi de ses parents, marche en forêt. Il veut se rendre du point A au point E. La distance entre les points D et E est de 100 m.





a) Exprimer la distance parcourue par l'enfant à l'aide de la norme de vecteurs et calculer cette distance s'il parcourt

i) le trajet ABCDE;

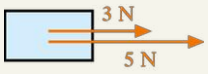
ii) le trajet AFGHE.

b) Si l'enfant marche à une vitesse moyenne de 30 m/min, déterminer la différence de temps T entre les deux trajets.

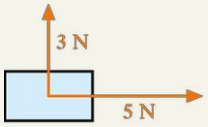
11. **APPLICATION | FORCE**

Les figures ci-dessous illustrent quatre situations où deux forces sont appliquées sur le même bloc placé sur une table. On néglige le frottement entre les surfaces. Déterminer la norme, la direction et le sens de la force résultante.

a)



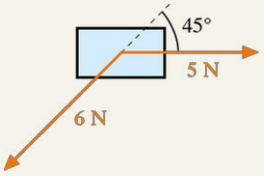
b)



c)

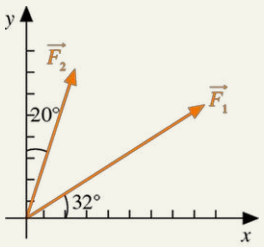


d)



12. **APPLICATION | FORCE**

Soit deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, telles que $\|\vec{F}_1\| = 4$ N et $\|\vec{F}_2\| = 3$ N.



a) Déterminer $\|\vec{F}_{1x}\|$ et $\|\vec{F}_{1y}\|$.

b) Déterminer $\|\vec{F}_{2x}\|$ et $\|\vec{F}_{2y}\|$.

c) Déterminer la norme, la direction et le sens de la force équilibrante.

d) Représenter, dans un même système d'axes, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, la force résultante et la force équilibrante.

13. **APPLICATION | FORCE**

Un cerf-volant est soumis aux deux forces suivantes.

$\vec{F}_1$: une force de 4 newtons avec $\theta = 30°$, N.-E. ;

$\vec{F}_2$: une force de 5 newtons avec $\theta = 135°$, S.-E.

Représenter graphiquement les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, et déterminer la force $\vec{F}$ qu'il faudrait appliquer à l'objet pour annuler l'effet des forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.

14. **APPLICATION | DIRECTION ET VITESSE**

Le vent souffle à 50 km/h, dans la direction 30° N.-E. Un pilote veut diriger son avion dans la direction 130° N.-O. à la vitesse de 400 km/h par rapport au sol. Déterminer la direction qu'il devra suivre et sa vitesse de vol.

15. Soit le segment de droite $\overline{AB}$, et C, un point sur $\overline{AB}$ tel que $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$, et O, un point quelconque de l'espace. Démontrer que $\overrightarrow{OC} = \frac{7}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OB}$.

16. Soit O, A, B et C, quatre points tels que $\overrightarrow{OA} = 10\vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = 5\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = 4\vec{u} + 3\vec{v}$. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

17. **QUADRILATÈRE ET PARALLÉLOGRAMME**

Soit A, B, C et D, les sommets d'un quadrilatère.

a) Démontrer que si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

b) Quel nom donne-t-on au quadrilatère ABCD lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$?

c) Soit M, un point tel que $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$. Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

18. **QUADRILATÈRE ET HEXAGONE**

Démontrer que, en joignant les points milieux respectifs des côtés adjacents

a) d'un parallélogramme, on obtient un parallélogramme ;

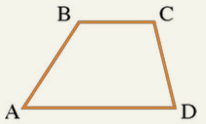
b) d'un quadrilatère quelconque, on obtient un parallélogramme ;

c) d'un rectangle, on obtient un losange ;

d) d'un hexagone régulier, on obtient un hexagone régulier.

19. **TRAPÈZE**

Soit le trapèze ci-dessous.



a) Soit M et N, les points milieux des deux côtés non parallèles du trapèze. Démontrer que le segment de droite $\overline{MN}$ est parallèle aux bases du trapèze et que sa longueur est égale à la moitié de la somme des longueurs des bases du trapèze.

b) Démontrer que le segment de droite joignant les points milieux des diagonales du trapèze est parallèle aux bases et que sa longueur est égale à la moitié de la différence des longueurs des bases du trapèze.

c) Si nous prolongeons les côtés non parallèles de ce trapèze jusqu'à leur point de rencontre E, si nous joignons les points M et N, milieux de $\overline{AE}$ et $\overline{DE}$ respectivement, et si nous joignons également les points P et Q, milieux des diagonales $\overline{AC}$ et $\overline{DB}$, nous obtenons le quadrilatère MNQP. Démontrer que MNQP est un trapèze.

20. Soit les points A(4, 3) et B(2, -1).

a) Représenter, dans le plan cartésien, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur $\overrightarrow{OC}$, équipollent à $\overrightarrow{AB}$, et déterminer les coordonnées du point C.

b) Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ et déduire $\|\overrightarrow{OC}\|$.

c) Déterminer la direction θ et le sens de $\overrightarrow{AB}$.

21. Soit les points A(2, 3, -2) et B(-3, 4, 2), et le vecteur $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$.

a) Représenter $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ dans l'espace cartésien et calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\overrightarrow{AB}\|$.

b) Déterminer $\vec{v}$ tel que $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

c) Déterminer

i) $\vec{r}$ et $\vec{w}$ parallèles à $\overrightarrow{AB}$ tels que $\|\vec{r}\| = \|\vec{w}\| = 1$;

ii) $\vec{s}$ et $\vec{t}$ parallèles à $\overrightarrow{AB}$ tels que $\|\vec{s}\| = \|\vec{t}\| = 5$.

22. Soit les points A(3, 4), B(-5, 0), C(7, -3) et D(-4, -3).

a) Déterminer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{CO}$.

b) Calculer $\|\overrightarrow{AD}\|$, $\|\overrightarrow{OA}\|$ et $\|\overrightarrow{BB}\|$.

c) Déterminer $2\overrightarrow{DA} - 5\overrightarrow{BC}$.

d) Déterminer $\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$.

e) Déterminer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$.

f) Déterminer $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

g) Calculer $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\|$ et $\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{CD}\|$; comparer les résultats.

h) Déterminer $\frac{1}{\|\overrightarrow{BD}\|}\overrightarrow{BD}$ et $\left\|\frac{1}{\|\overrightarrow{BD}\|}\overrightarrow{BD}\right\|$.

23. Soit les points A(4, -3, 1), B(-2, 0, -1) et C(3, -4, 5).

a) Déterminer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b) Calculer $\|\overrightarrow{AC}\|$ et $\|\overrightarrow{BO}\|$.

c) Déterminer $4\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CO}$.

d) Déterminer $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

e) Calculer :

i) $\left\|\frac{1}{\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA})\right\|$

ii) $\left\|\frac{1}{\|\overrightarrow{BA}\| + \|\overrightarrow{AB}\|}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB})\right\|$

f) Déterminer les coordonnées

i) de D si $\overrightarrow{BD} = (4, 0, -7)$;

ii) de E si $\overrightarrow{EA} = (-3, 5, 0)$;

iii) de F si $2\overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{AB}$.

24. Soit les points et les vecteurs A(1, 4, -5), B(0, -2, 7), C(3, -6), D(-4, 1), $\overrightarrow{OE} = (3, -2, 1)$, $\vec{u} = (3, -4, 5)$, $\vec{v} = (1, -2, 0, 3)$ et $\vec{t} = (-3, 2, 1, 4)$. Déterminer, si c'est possible,

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CB}$;

b) les coordonnées de E ;

c) les coordonnées de F si $\overrightarrow{BF} = \vec{u}$;

d) $\vec{v} + \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BA} - \vec{u}$;

e) $2\vec{v} - 3\vec{t}$ et $\|2\vec{v} - 3\vec{t}\|$;

f) $(\vec{u} - \vec{u}) + (\vec{v} - \vec{v})$;

g) $\left\|\frac{1}{\|6\vec{t} - 6\vec{v}\|}(2\vec{v} - 2\vec{t})\right\|$;

h) les points Q et R du segment de droite $\overline{AB}$ tels que $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AR} = \frac{-4}{3}\overrightarrow{AB}$.

25. Déterminer les vecteurs unitaires parmi les vecteurs suivants.

a) $\vec{u} = (\ln \sqrt{e}, \cos 30°, \ln 1)$

b) $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_4$

c) $\vec{u} = \frac{1}{5}\vec{e}_1 + \frac{1}{5}\vec{e}_2 + \frac{1}{5}\vec{e}_3 + \frac{1}{5}\vec{e}_4 + \frac{1}{5}\vec{e}_5$

d) $\vec{u} = (\cos^2\theta, \sin^2\theta)$

e) $\vec{u} = (-\cos\theta, \sin\theta \sin\alpha, \sin\theta \cos\alpha)$

f) $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + 0\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$

26. Soit $\vec{u} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4$ et $\vec{v} = -5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_4$, deux vecteurs de dimension 4, et $\vec{w} = 10\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_4 + 7\vec{e}_5$ et $\vec{t} = 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 - \vec{e}_4 + 5\vec{e}_5$, deux vecteurs de dimension 5. Déterminer, si c'est possible :

a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{v} + \vec{t}$ c) $3\vec{w} - 2\vec{t}$

d) $0\vec{u} + \vec{w}$ e) $0 + \vec{O}$ f) $|0| + \|\vec{O}\|$

g) $\|\vec{w}\|$ h) $\|\vec{u}\| + \|\vec{t}\|$ i) $\|\vec{u} + \vec{t}\|$

j) $\vec{u} + \|\vec{u}\|$ k) $\|\vec{v}\|\vec{v}$ l) $\left|\|\vec{v}\| - \|\vec{t}\|\right|$

m) $\frac{1}{\vec{v}}\vec{v}$ n) $\frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w}$ o) $\left\|\frac{-4}{\|\vec{w}\|}\vec{w}\right\|$

27. Soit les points A(-3, 9) et B(3, 1).

a) Déterminer les coordonnées des points C et D tels que $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

b) Déterminer les coordonnées des points M et N, milieux respectifs des segments de droite $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$.

c) Les points O, M et N sont-ils alignés ? Justifier.

d) Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ est parallèle à $\overrightarrow{CD}$.

e) Les points A, B, C et D sont-ils alignés ? Justifier.

28. Soit les points A(-3, 5, -2) et B(-1, 7, 4). Déterminer

a) le point milieu M du segment de droite $\overline{AB}$;

b) les points qui séparent le segment de droite $\overline{AB}$ en quatre segments de même longueur ;

c) les points qui partagent le segment de droite $\overline{AB}$ en deux segments dont la longueur de l'un est égale à quatre fois la longueur de l'autre ;

d) le point C tel que B est le point milieu du segment de droite $\overline{AC}$.

29. Soit les vecteurs $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\overrightarrow{OC} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$, des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

a) Déterminer les composantes de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b) Les points A, B et C sont-ils alignés ? Pourquoi ?

c) Soit le point D tel que $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Quel est le point N, milieu du segment de droite $\overline{OD}$?

d) Calculer $\|\overrightarrow{OC}\|$, $\|\overrightarrow{OD}\|$ et $\|\overrightarrow{CD}\|$.

e) Déterminer la nature du triangle COD.

f) Déterminer les coordonnées des points E_i telles que les points C, O, D et E_i sont les sommets d'un parallélogramme. Déterminer, s'il y a lieu, la nature particulière des parallélogrammes.

g) Déterminer les coordonnées du point M, milieu du segment de droite $\overline{CD}$.

h) Soit P, le point milieu du segment de droite $\overline{BC}$. Démontrer que $\overline{PM}$ est parallèle à $\overline{OC}$.

30. **TRIANGLE ET QUADRILATÈRE**

Soit les vecteurs $\overrightarrow{OA} = (3, 5, -2)$, $\overrightarrow{OB} = 5\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}$ et $\overrightarrow{BC} = (-1, -5, 3)$, des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer les trois angles du triangle ABC.

b) Calculer l'aire du triangle ABC.

c) Déterminer la longueur du segment de droite joignant A au milieu du côté opposé.

d) Déterminer la hauteur issue de A.

e) Déterminer les coordonnées de D si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

f) Déterminer la nature du quadrilatère ABDC.

g) Déterminer M, le point de rencontre des diagonales du quadrilatère ABDC.

31. **SPHÈRE**

Soit la sphère S de rayon 7 unités, centrée au point C(2, -1, 5).

a) Déterminer si les points suivants sont situés à l'intérieur de la sphère, à l'extérieur de la sphère ou sur la sphère.

i) P(1, 2, 8)

ii) Q(2, 8, 1)

iii) R(8, 1, 2)

b) Déterminer les points des axes qui sont situés sur S.

Problèmes de synthèse

1. Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que

$\|\vec{u}\| = 3$ et $\theta_{(\vec{u})} = 0°$ vers l'est,

$\|\vec{v}\| = 6$ et $\theta_{(\vec{v})} = 90°$ vers le nord et

$\|\vec{w}\| = 5$ et $\theta_{(\vec{w})} = 135°$ S.-E.

a) Déterminer la norme de $\vec{v}_{\vec{u}}$.

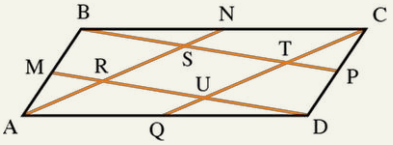
b) Déterminer la norme, la direction et le sens de

i) $(\vec{u} + \vec{v})_{\vec{w}}$;

ii) $\vec{w}_{(\vec{u}+\vec{v})}$.

2. **PARALLÉLOGRAMME**

Soit un parallélogramme ABCD, où M, N, P et Q sont les points milieux des côtés.



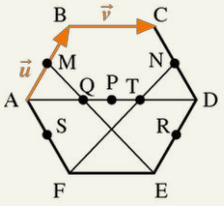
a) Démontrer que le quadrilatère RSTU est un parallélogramme.

b) Exprimer les vecteurs suivants en fonction de $\overrightarrow{RS}$.

i) $\overrightarrow{AR}$ ii) $\overrightarrow{NS}$

3. **HEXAGONE**

Soit ABCDEF, l'hexagone régulier ci-dessous, où P est le centre de l'hexagone, et M, N, R et S, les points milieux respectifs des côtés AB, CD, DE et FA.



a) Simplifier $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF}$.

b) Exprimer $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FA}$ en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

c) Exprimer $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE}$ en fonction

i) de $\overrightarrow{AD}$; ii) de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

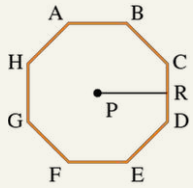
d) Soit le quadrilatère MNRS.

i) Démontrer que MNRS est un rectangle.

ii) Comparer l'aire du quadrilatère MNRS à l'aire de l'hexagone.

e) Démontrer que $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QT} = \overrightarrow{TD}$.

4. Soit P, le centre de l'octogone régulier ci-dessous, où $\|\overrightarrow{AB}\| = 1$ et $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{CD}$.



a) Déterminer $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{AH}\|$.

b) Déterminer k_1 et k_2 si

i) $\overrightarrow{PR} = k_1\overrightarrow{FE}$;

ii) $\overrightarrow{BC} = k_2\overrightarrow{AD}$.

5. PARALLÉLÉPIPÈDE

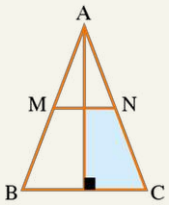
Démontrer que les grandes diagonales d'un parallélépipède droit se coupent en leur milieu,

a) à l'aide de vecteurs géométriques ;

b) à l'aide de vecteurs algébriques.

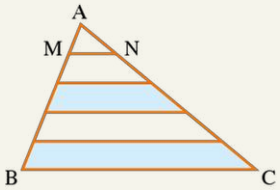
6. TRIANGLE ET AIRE

a) Soit le triangle isocèle ABC ci-dessous, dont l'aire est égale à 17 u² et où $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$.



Déterminer l'aire de la région ombrée.

b) L'aire du triangle quelconque ABC ci-dessous est de 75 u². On subdivise ce triangle au moyen de quatre segments de droites parallèles à $\overrightarrow{BC}$, qui séparent le segment de droite $\overline{AB}$ en cinq parties égales.



Déterminer l'aire totale des régions ombrées.

7. APPLICATION | DISTANCE DANS $\mathbb{R}^3$

Un contrôleur de la circulation aérienne voit deux avions sur son écran radar. Le premier avion est à une altitude de 1200 m, à une distance horizontale de 8 km et à 60° au sud de l'est. Le deuxième avion est à une altitude de 1000 m, à une distance horizontale de 9 km et à 20° également au sud de l'est.



Déterminer la distance séparant les deux avions.

8. APPLICATION | VITESSE

Soit A et B, deux points directement opposés de chaque côté d'une rivière de 1 km de largeur. Jean-François part de A en pagayant à la vitesse de 6 km/h parallèlement à AB. La vitesse du courant perpendiculaire à AB est de 8 km/h.



a) Déterminer la vitesse à laquelle il s'éloigne de A.

b) À quelle distance de B arrivera-t-il de l'autre côté de la rivière ?

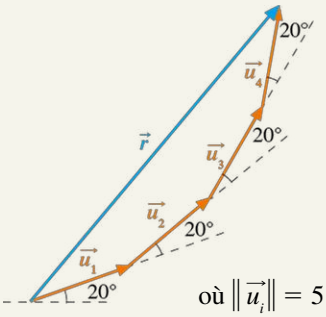
c) Déterminer le temps nécessaire pour traverser la rivière.

d) Déterminer, si c'est possible, la direction qu'il devrait prendre pour arriver directement à B.

e) Déterminer le temps qu'il lui faudrait pour traverser cette rivière s'il n'y avait pas de courant.

9. APPLICATION | VECTEUR DE FRESNEL

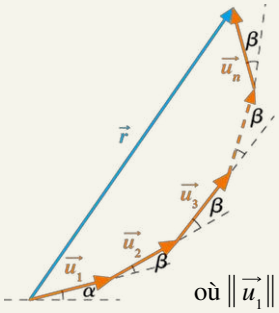
a) Soit les vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$ et $\vec{u_4}$, et $\vec{r}$, le **vecteur de Fresnel**, qui tient son nom du physicien français Augustin Fresnel (1788-1827), défini par $\vec{r} = \sum_{i=1}^{4} \vec{u_i}$, représentés sur la figure suivante.



où $\|\vec{u_i}\| = 5$

Déterminer $\|\vec{r}\|$ et la direction de $\vec{r}$.

b) Soit les vecteurs $\vec{u_i}$, $\vec{u_2}$, …, $\vec{u_n}$ et le vecteur $\vec{r}$ défini par $\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} \vec{u_i}$ représentés sur la figure suivante.



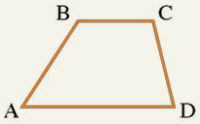
où $\|\vec{u_1}\| = \|\vec{u_2}\| = \ldots = \|\vec{u_n}\|$

Exprimer la direction θ de $\vec{r}$ en fonction de

i) α et β ; ii) α si $\beta = \alpha$.

10. QUADRILATÈRE

Soit ABCD, un trapèze tel que $\|\overrightarrow{BC}\| = 4$ m, $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$ m, $\|\overrightarrow{AD}\| = 10$ m et $\|\overrightarrow{CD}\| = 3$ m.



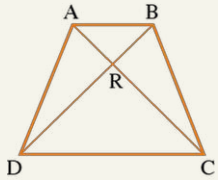
Le point E est tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$, et le point F, situé sur la droite passant par A et D, est tel que $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{AD}$.

a) Déterminer k si $k\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF}$.

b) Calculer l'aire du quadrilatère CEFD.

11. TRAPÈZE

Soit le trapèze isocèle ABCD ci-après, où $\overrightarrow{DB} \perp \overrightarrow{CA}$, $\|\overrightarrow{DA}\| = 13$ cm et $\|\overrightarrow{AB}\| = 5\sqrt{2}$ cm.

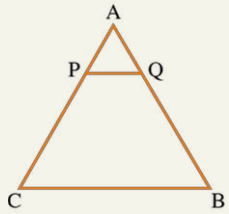


a) Calculer $\|\overrightarrow{DC}\|$.

b) Calculer la hauteur h du trapèze.

12. TRAPÈZE

Soit le triangle équilatéral ABC, où $\|\overrightarrow{AB}\| = 10\sqrt{2}$, et le trapèze PQBC ci-dessous.



Si $\overrightarrow{CQ}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{BP}$, déterminer la valeur de k telle que $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AC}$.

13. PARALLÉLOGRAMME

Soit A, B, C, trois points non alignés, D, un point tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, E, le milieu du segment de droite $\overline{AB}$, F, le milieu du segment de droite $\overline{AD}$, et G, le milieu du segment de droite $\overline{BD}$.

a) Démontrer que le quadrilatère EBGF est un parallélogramme.

b) Déterminer le point X tel que $\overrightarrow{BX} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BG}$.

c) Exprimer $\overrightarrow{EG}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$.

d) Soit J, le point d'intersection des droites supportant $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{CD}$, et K, le point d'intersection des droites supportant $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{CA}$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{CJ}$ en fonction de $\overrightarrow{FG}$.

14.

Soit P, Q et R, trois points distincts tels que $\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{QR}$, où $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et O, un point tel que $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{w}$ et $\overrightarrow{OR} = \vec{v}$. Démontrer que $\vec{w} = \dfrac{1}{(k+1)}(\vec{u} + k\vec{v})$.

15. PARALLÉLOGRAMME

Soit le parallélogramme ci-dessous.



a) Soit M, le point milieu de AD, et P, l'intersection de AC et de BM. Déterminer k tel que $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AC}$.

b) Soit R et S, des points sur la diagonale AC tels que $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{SC}$. Démontrer que DRBS est un parallélogramme.

16. TRAPÈZE

Soit ABC, un triangle, où le point E est tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, et le point F est tel que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$.

a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont parallèles.

b) Si l'aire du trapèze EBFC est de 40 u^2, calculer l'aire du triangle ABF.

17. PARALLÉLOGRAMME

Soit ABCD, un parallélogramme, P et Q, deux points sur la diagonale AC tels que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QC}$. Démontrer que la droite passant par les points B et P rencontre le segment de droite $\overline{AD}$ en son milieu et que la droite passant par D et Q rencontre le segment de droite $\overline{BC}$ en son milieu.

18. TRIANGLE ET CERCLE

Soit le point A(-3, 4).

a) Trouver les coordonnées du point B symétrique à A par rapport à l'axe des x.

b) Trouver les coordonnées du point D symétrique à A par rapport à l'axe des y.

c) Démontrer que les points B, O et D sont alignés.

d) Déterminer la nature du triangle ABD.

e) Déterminer l'équation du cercle passant par les points A, B et D.

f) Le cercle précédent coupe l'axe des x en E (abscisse négative) et en F (abscisse positive). Déterminer la nature du triangle BEF.

g) Calculer l'aire du quadrilatère BEDF.

19. CERCLE ET QUADRILATÈRE

Soit les points A(-1, 0) et B(9, 0).

a) Déterminer les coordonnées du point M, milieu du segment de droite $\overline{AB}$.

b) Soit C, le point d'ordonnée positive appartenant à la droite, passant par (0, 0), perpendiculaire à la droite passant par A et B, tel que $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MC}\|$. Déterminer les coordonnées du point C.

c) Démontrer que $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux.

d) Soit N, le point milieu du segment de droite $\overline{BC}$. Démontrer que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN}$.

e) Le cercle de diamètre AB coupe la droite passant par O et C en un point D distinct de C et coupe la droite passant par C et M en un point E distinct de C. Démontrer que le quadrilatère ACBE est un parallélogramme.

f) Démontrer que $\overrightarrow{AB} /\!/ \overrightarrow{DE}$.

20. PARALLÉLOGRAMME

Soit les vecteurs $\overrightarrow{OA} = 8\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = 6\vec{j}$ et $\overrightarrow{OC} = 8\vec{i} + 10\vec{j}$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

a) Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{AC}\|$ et $\|\overrightarrow{CB}\|$.

b) Déterminer les coordonnées du point D telles que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AM}$, où M est le point milieu du segment de droite $\overline{BC}$.

c) La droite L est la droite sur laquelle se trouve le point D ; elle est parallèle à la droite passant par B et C. Le point F est l'intersection de L et de la droite passant par A et C. Le point E est l'intersection de L et de la droite passant par A et B. Démontrer que D est le milieu du segment de droite $\overline{EF}$.

d) Soit Q, le point milieu du segment de droite $\overline{MC}$, et P, le point milieu du segment de droite $\overline{MB}$. Démontrer que la droite passant par E et Q est parallèle à la droite passant par A et C, et que la droite passant par F et P est parallèle à la droite passant par A et B.

e) Le point H est l'intersection des droites passant respectivement par E et Q, et par F et P. Démontrer que AEHF est un parallélogramme.

f) Démontrer que les points A, D et H sont alignés et que H est le point milieu du segment de droite $\overline{AM}$.

21. TRAPÈZE ET TRIANGLE

Soit les points A(13, 4, -2), B(7, 6, 1), C(-10, 9, 14) et D(14, 1, 2).

a) Calculer l'aire A_1 du trapèze ABCD.

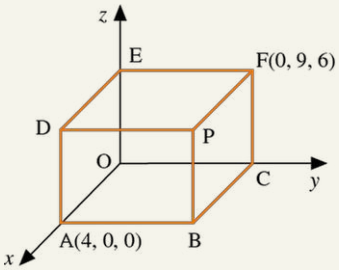
b) Déterminer les coordonnées du point H, où H est le point de rencontre des prolongements des côtés DA et CB du trapèze.

c) Calculer l'aire

i) A_2 du triangle HAB ;

ii) A_3 du triangle HDC.

22. Soit le parallélépipède droit ci-dessous.



a) Déterminer $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AF}$.

b) Calculer $\|\overrightarrow{OP}\|$, $\|\overrightarrow{OC}\|$, $\|\overrightarrow{PF}\|$, $\|\overrightarrow{AD}\|$, $\|\overrightarrow{EP}\|$ et $\|\overrightarrow{DC}\|$.

c) Calculer l'angle α formé par $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OA}$.

d) Calculer l'angle β formé par $\overrightarrow{OP}$ et l'axe des y.

e) Calculer l'angle γ formé par $\overrightarrow{OP}$ et l'axe des z.

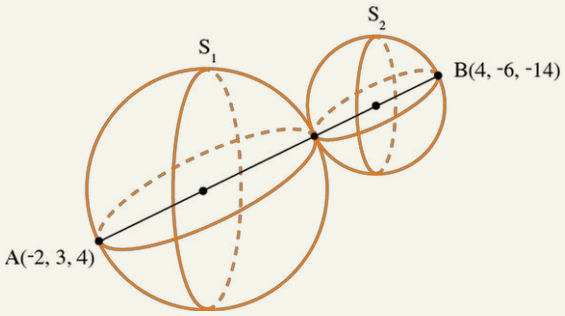
f) Calculer $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$.

g) Calculer l'angle θ formé par $\overrightarrow{OP}$ et le plan XOY.

h) Calculer le volume de la pyramide OADPB de base ADPB et de sommet O.

23. ÉQUATIONS DE SPHÈRES

Soit les sphères tangentes S_1 et S_2 suivantes dont le volume respectif est V_1 et V_2.



Déterminer les équations de S_1 et de S_2 telles que $V_1 = 8V_2$.

24. LIEUX GÉOMÉTRIQUES

Soit les points A(3, -2) et B(15, 7).

a) Déterminer P tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

b) Donner l'équation du lieu géométrique L des points $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

i) $\|\overrightarrow{AP}\| = \left\|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right\|$. Identifier L.

ii) $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{PB}\|$. Identifier L.

iii) $\|\overrightarrow{AP}\| = \left\|\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}\right\|$. Identifier L.

25. PARALLÉLOGRAMME

Soit PQRS, un parallélogramme où P(1, -2, 2), R(0, -1, 2) et $\overrightarrow{PQ} = (-2, -1, 1)$.

a) Déterminer les coordonnées de Q.

b) Déterminer $\overrightarrow{QR}$.

c) Déterminer les coordonnées de S, si $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{QP}$.

d) Déterminer le point de rencontre B des diagonales du parallélogramme PQRS.

e) Déterminer l'angle formé par les diagonales du parallélogramme PQRS.

f) Déterminer la nature du parallélogramme PQRS.

g) Calculer l'aire A du parallélogramme PQRS.

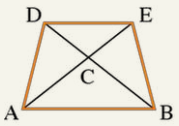
26. CENTRE DE GRAVITÉ D'UN TRIANGLE

a) Démontrer que les médianes d'un triangle quelconque se coupent en un point, appelé **barycentre**, situé aux deux tiers de chacune d'elles à partir du sommet. Ce point est le **centre de gravité** du triangle.

b) Démontrer que la somme des vecteurs issus des sommets et associés aux médianes d'un triangle quelconque est égale à $\vec{O}$.

c) Démontrer que les médianes délimitent à l'intérieur d'un triangle six régions de même aire.

d) Le trapèze ci-dessous a été obtenu en tronquant la partie supérieure d'un triangle isocèle ABF.



Si l'aire du triangle ABF est de 60 cm² et si l'aire du trapèze ADEB est de 45 cm², calculer l'aire

i) du triangle ACB ; ii) du triangle DEC ;

iii) du triangle ADC.

27. APPLICATION | CENTRE DE GRAVITÉ

Sachant que k objets, de masse respective m_1, m_2, …, m_k, situés aux points $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, …, $P_k(x_k, y_k)$, ont leur centre de gravité au point C tel que

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} m_i} \sum_{i=1}^{k} m_i \vec{r}_i, \text{ où } \vec{r}_i = \overrightarrow{OP}_i$$

déterminer, si c'est possible, les masses m_1, m_2 et m_3 situées respectivement aux points $P_1(-1, 1)$, $P_2(-1, -1)$ et $P_3(2, 1)$ lorsque $m_1 + m_2 + m_3 = 30$ grammes et que

a) C(0, 0) ;

b) $C\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$;

c) $C\left(1, \frac{1}{3}\right)$;

d) C(2, 0).

5 Combinaison linéaire, dépendance linéaire, espaces vectoriels et bases



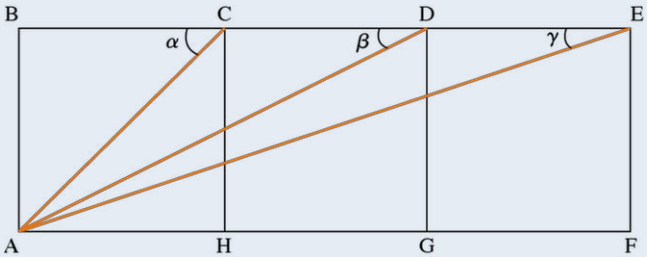
Perspective historique	248
Exercices préliminaires	249
5.1 Combinaison linéaire de vecteurs géométriques et algébriques	250
5.2 Dépendance et indépendance linéaire de vecteurs géométriques et algébriques	256
5.3 Espaces vectoriels	264
5.4 Bases d'un espace vectoriel et théorèmes sur les bases	273
Révision des concepts	290
Exercices récapitulatifs	291
Problèmes de synthèse	294

Dans ce chapitre, nous étudierons d'abord la notion de combinaison linéaire de vecteurs, de même que la dépendance linéaire et l'indépendance linéaire afin de définir la notion de base d'un espace vectoriel. Pour ce faire, il est essentiel de connaître les méthodes de résolution de systèmes d'équations linéaires présentées dans les chapitres 2 et 3.

Par la suite, nous ferons une étude des espaces vectoriels et des bases d'un espace vectoriel.

En particulier, l'étudiant pourra résoudre le problème suivant (qui se trouve au n° 14 des problèmes de synthèse, à la page 295).

Soit les trois carrés juxtaposés ci-dessous.



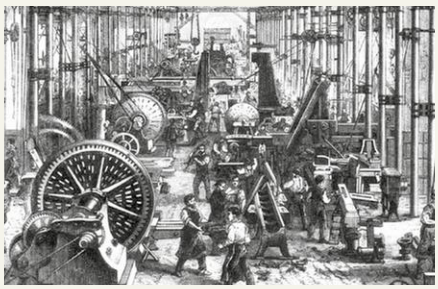
a) Exprimer $\overrightarrow{AE}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Déterminer la relation entre α, β et γ.

De l'addition de vecteurs à la génération de nouveaux mondes vectoriels

René Descartes (1596-1650) et Pierre de Fermat (1601-1665) ne se posent pas la question à savoir si deux coordonnées sont suffisantes pour représenter un point du plan, ou trois coordonnées pour un point de l'espace. Cela semble évident. Pourtant, au XIX^e siècle, tout change. Afin de comprendre pourquoi cette idée en apparence si simple devient une véritable question, parlons un peu des nombres complexes. Si on applique aveuglément la règle de résolution des équations du second degré à l'équation $x^2 - 4x + 5 = 0$, on obtient les racines $x_1 = 2 + \sqrt{-1}$ et $x_2 = 2 - \sqrt{-1}$. *A priori*, ces valeurs n'ont aucun sens, mais les mathématiciens du XVIII^e siècle se rendent compte qu'elles sont utiles dans de nombreux calculs symboliques. C'est alors qu'ils notent i le $\sqrt{-1}$ et qu'ils appellent « nombres complexes » les nombres de la forme $a + bi$, où a et b sont des nombres réels. Toutefois, ils trouvent inconfortable de manipuler des symboles dont la signification demeure obscure. Heureusement, au début du XIX^e siècle, on réussit à représenter ces nombres géométriquement. Dans le plan cartésien, on représente $a + bi$ par le segment de droite reliant l'origine (0, 0) au point (a, b). Le nombre complexe permet maintenant de représenter symboliquement une grandeur orientée comme la vitesse ou le déplacement, mais uniquement dans le plan. Que faire pour les grandeurs à trois dimensions ? On tente alors d'étendre l'application des nombres complexes aux grandeurs à trois dimensions. Pour les mathématiciens de l'époque, cela signifie qu'il faut trouver des « nombres hypercomplexes » ayant des propriétés semblables à celles des nombres réels et complexes, des propriétés comme l'associativité et la commutativité des opérations. Toutefois, la tâche s'avère beaucoup plus ardue que prévu.

Le passage à trois dimensions présente une difficulté qui apparaît insurmontable, parce qu'on exige que les opérations soient commutatives. Aussi, en 1843, **William Rowan Hamilton** (1805-1865) se résout finalement à proposer un système non pas à trois mais bien à quatre dimensions. Les nouveaux nombres définis par Hamilton portent le nom de « quaternions » et sont notés $a + bi + cj + dk$. Hamilton invente les termes « scalaire » et « vecteur », qu'il utilise dans un article paru en 1847. Il écrit que a est un scalaire parce que a peut prendre « toutes les valeurs contenues dans une échelle » (*scale* en anglais) correspondant aux nombres réels. Il ajoute que la partie $bi + cj + dk$ d'un quaternion est « construite géométriquement par une ligne droite ou un rayon vecteur […] ayant une longueur déterminée et une direction dans l'espace. » Il nomme cette partie le « vecteur du quaternion ». L'expression « rayon vecteur » était utilisée depuis longtemps en référence à l'adjectif latin *vectorius* signifiant « qui sert à transporter ». Lorsque, plus tard dans le siècle, on se rend compte que plusieurs questions de physique ne nécessitent que cette partie géométrique des quaternions, le terme vecteur reste en usage, même si le souvenir de son origine s'estompe progressivement.



Les notions de quaternion et de vecteur voient le jour pendant la révolution industrielle.

La recherche de systèmes de nombres hypercomplexes amène de nombreux mathématiciens à vouloir générer des systèmes mathématiques inconnus au point de départ. En géométrie, Hermann Günther Grassmann (1809-1877) soulève la question de déterminer comment générer des espaces géométriques à partir du plan. Pour y arriver, les mathématiciens disposent alors essentiellement de deux opérations. Il y a l'addition de nombres hypercomplexes ou de segments orientés. Et il y a la multiplication de ces derniers par un nombre réel. En combinant ces deux opérations, il devient possible, à partir d'un ensemble initial, de générer un nouvel ensemble contenant éventuellement d'autres nombres hypercomplexes ou d'autres entités géométriques que celles de l'ensemble initial. C'est le fondement même de la combinaison linéaire. Cette découverte soulève alors un certain nombre de questions. Ainsi, lorsqu'on génère un système à partir d'un ensemble initial, peut-on trouver un autre ensemble qui générerait exactement ce même système ? Est-il possible de réduire au minimum le nombre d'éléments dans l'ensemble initial de sorte que le système généré reste le même ? En 1844, et de façon encore plus explicite en 1862, Grassmann se pose toutes ces questions de combinaison linéaire (le mode de génération), d'indépendance linéaire (un élément inaccessible à partir d'autres éléments), de base (un ensemble générateur minimal) et de dimension (le nombre d'éléments des ensembles générateurs minimaux). À cause de ses travaux, Grassmann peut être considéré comme le plus important instigateur de l'étude des espaces géométriques à plus de trois dimensions.

Ce n'est qu'en 1872 que le mathématicien allemand **Ferdinand Georg Frobenius** (1849-1917) établira explicitement un pont entre l'étude en émergence des espaces vectoriels et celle des systèmes d'équations linéaires. À partir des années 1920, la notion d'espace vectoriel prendra une grande importance en mathématiques.

Exercices préliminaires

1. Calculer les déterminants suivants.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

2. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants à l'aide de la méthode ou de la règle suggérée.

a) $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$ par la règle de Cramer

b) $\begin{cases} 2a - b + 2c = 13 \\ a + 2b - c = -4 \\ 3a - 3b + c = 13 \end{cases}$ par la règle de Cramer

c) $\begin{cases} 2a - 3b + c = 4 \\ -a + b + 2c = -1 \\ 3a - 5b + 4c = 9 \end{cases}$ par la méthode de Gauss

d) $\begin{cases} 3a - 2b - 5c = 2 \\ a + b = 9 \\ b + c = 5 \end{cases}$ par la méthode de Gauss

3. Déterminer, si c'est possible, la valeur de k_i, où $k_i \in \mathbb{R}$, si :

a) $k_1(2, 1, -1) + k_2(1, -1, 4) + k_3(2, -4, 6) = (5, 3, -8)$

b) $k_1(1, 1, 5) + k_2(2, -1, -1) + k_3(1, -2, -6) = (4, -3, 1)$

4. Résoudre les systèmes d'équations linéaires correspondant aux équations suivantes, où $k_i \in \mathbb{R}$, et déterminer s'ils admettent une seule solution ou une infinité de solutions.

a) $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} + k_3\vec{w} = \vec{O}$, où $\vec{u} = (3, 1, -3)$, $\vec{v} = (-1, 2, 8)$ et $\vec{w} = (2, 4, 8)$

b) $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} + k_3\vec{w} = \vec{O}$, où $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, 0)$ et $\vec{w} = (0, 0, -5)$

5. Soit A, la matrice des coefficients d'un système homogène d'équations linéaires de n équations à n inconnues. Compléter les énoncés suivants.

a) Si dét $A \neq 0$, alors…

b) Si dét $A = 0$, alors…

6. Soit $\vec{u} = (1, -2)$, $\vec{v} = (4, 3)$ et $\vec{w} = (-2, 6, -3)$.

a) Déterminer deux vecteurs unitaires, $\vec{s}_1$ et $\vec{s}_2$, parallèles à $\vec{r}$, où $\vec{r} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$.

b) Déterminer deux vecteurs $\vec{t}_1$ et $\vec{t}_2$, de norme égale à 4, parallèles à $\vec{w}$.

7. Soit les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ tels que

$\|\vec{u}_1\| = 2$, $\theta_1 = 45°$, N.-E.

$\|\vec{u}_2\| = 3$, $\theta_2 = 120°$, N.-O.

a) Représenter $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{w}$, où $\vec{w} = 3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$.

b) Déterminer la norme, la direction et le sens de $\vec{w}$.

c) Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{w}$.

8. Soit a, b et $c \in \mathbb{R}$.

Compléter les 10 propriétés suivantes sur les réels.

Propriété 1 : $(a + b) \in$ _____

Propriété 2 : $a + b =$ _____

Propriété 3 : $(a + b) + c =$ _____

Propriété 4 : $a + 0 =$ _____

Propriété 5 : $a + (-a) =$ _____

Propriété 6 : $ab \in$ _____

Propriété 7 : $(a + b)c =$ _____

Propriété 8 : $a(b + c) =$ _____

Propriété 9 : $a(bc) =$ _____

Propriété 10 : $1a =$ _____

5.1 Combinaison linéaire de vecteurs géométriques et algébriques

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra appliquer la notion de combinaison linéaire.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de donner la définition d'une combinaison linéaire de vecteurs de même dimension ;
- d'exprimer un vecteur géométrique comme combinaison linéaire d'autres vecteurs géométriques ;
- d'exprimer un vecteur algébrique comme combinaison linéaire d'autres vecteurs algébriques ;
- de représenter un vecteur géométrique qui est une combinaison linéaire d'autres vecteurs géométriques ;
- de déterminer si un vecteur algébrique est une combinaison linéaire d'autres vecteurs algébriques.

$\vec{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ s'il existe des scalaires $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\vec{u} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots + k_n\vec{v}_n.$$

5

Lorsque nous avons étudié les vecteurs géométriques et les vecteurs algébriques, nous avons effectué les opérations addition de vecteurs et multiplication d'un vecteur par un scalaire.

À moins d'un avis contraire, dans ce chapitre, les vecteurs algébriques sont exprimés en fonction des vecteurs canoniques.

DÉFINITION 5.1

Soit $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, un ensemble de n vecteurs ayant la même dimension.

On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ toute expression de la forme

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots + k_n\vec{v}_n, \text{ où } k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}.$$

DÉFINITION 5.2

Soit $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, un ensemble de n vecteurs ayant la même dimension.

Un vecteur $\vec{u}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ s'il existe des scalaires $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\vec{u} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots + k_n\vec{v}_n.$$

Les scalaires $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ sont appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire.

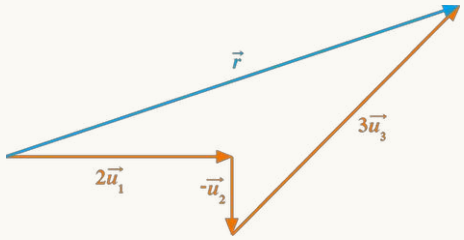
Combinaison linéaire de vecteurs géométriques

Exemple 1

a) Soit les vecteurs géométriques $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ ci-dessous.



Représentons $\vec{r}$, où $\vec{r} = 2\vec{u_1} - \vec{u_2} + 3\vec{u_3}$.



D'où $\vec{r}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$. (définition 5.2)

Les coefficients de cette combinaison linéaire sont 2, -1 et 3.

b) Soit les vecteurs algébriques $\vec{v_1} = (1, 4, -3)$ et $\vec{v_2} = (-2, 4, 3)$.

Calculons $\vec{s} = \frac{1}{3}\vec{v_1} + \frac{2}{3}\vec{v_2}$.

$$\vec{s} = \frac{1}{3}(1, 4, -3) + \frac{2}{3}(-2, 4, 3)$$

$$= \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -1\right) + \left(\frac{-4}{3}, \frac{8}{3}, 2\right)$$

$$= (-1, 4, 1)$$

D'où $\vec{s}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$. (définition 5.2)

Les coefficients de cette combinaison linéaire sont $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

Combinaison linéaire de vecteurs algébriques

Exemple 2 Soit $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, où $\vec{u} = (1, -3, 2)$, $\vec{v} = (0, 4, -5)$ et $\vec{w} = (0, 1, -3)$. Les vecteurs algébriques $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$ et $\vec{O}$ suivants sont des combinaisons linéaires de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

a) $\vec{r} = 2\vec{u} - \vec{v} + 3\vec{w}$, ainsi $\vec{r} = 2(1, -3, 2) - (0, 4, -5) + 3(0, 1, -3) = (2, -7, 0)$

b) $\vec{s} = \vec{u} + 3\vec{v}$, ainsi $\vec{s} = 1(1, -3, 2) + 3(0, 4, -5) + 0(0, 1, -3) = (1, 9, -13)$

c) $\vec{t} = 2\vec{v} - 4\vec{w}$, ainsi $\vec{t} = 0(1, -3, 2) + 2(0, 4, -5) - 4(0, 1, -3) = (0, 4, 2)$

Combinaison linéaire triviale

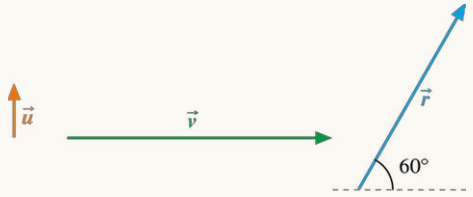
d) $\vec{O} = 0\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w}$, ainsi $\vec{O} = 0(1, -3, 2) + 0(0, 4, -5) + 0(0, 1, -3) = (0, 0, 0)$

Exercice de compréhension 5.1

1. a) Exprimer le vecteur $\vec{u} = (3, -4)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$.

b) Exprimer le vecteur $\vec{v} = (-2, 0, 7)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Exemple 3 Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{r}$ suivants, où $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 10$ et $\|\vec{r}\| = 8$.

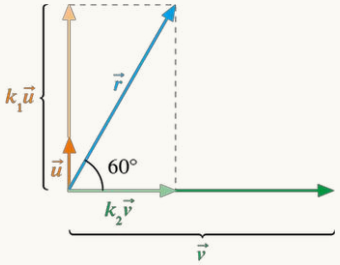


Exprimons le vecteur $\vec{r}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Il faut déterminer la valeur des scalaires k_1 et k_2 telle que $\vec{r} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$.

$$\|k_1\vec{u}\| = \|\vec{r}\| \sin 60°$$
$$|k_1|\,\|\vec{u}\| = \|\vec{r}\| \sin 60°$$
$$k_1(2) = 8\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (\text{car } k_1 > 0)$$
$$k_1 = 2\sqrt{3}$$

$\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



De même, $\|k_2\vec{v}\| = \|\vec{r}\| \cos 60°$

$$|k_2|\,\|\vec{v}\| = \|\vec{r}\| \cos 60°$$
$$k_2(10) = 8\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (\text{car } k_2 > 0)$$
$$k_2 = \frac{2}{5}$$

$\cos 60° = \dfrac{1}{2}$

d'où $\vec{r} = 2\sqrt{3}\vec{u} + \dfrac{2}{5}\vec{v}$

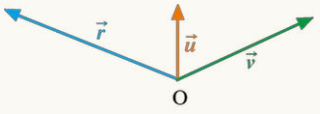
Exemple 4 Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{r}$ suivants.



Déterminons approximativement, en utilisant la méthode du triangle, la valeur des scalaires k_1 et k_2 telle que $\vec{r} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$.

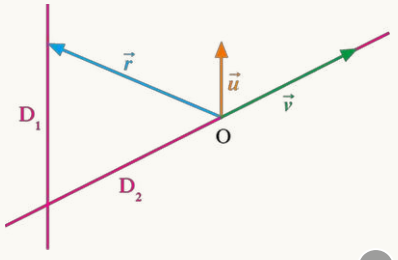
Étape 1

Traçons les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{r}$ à partir d'une même origine O.



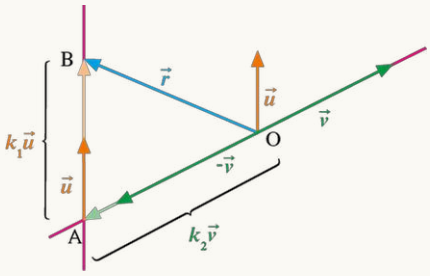
Étape 2

À partir de l'extrémité de $\vec{r}$, traçons la droite D_1 parallèle à $\vec{u}$ et la droite D_2 passant par O et parallèle à $\vec{v}$.



Étape 3

Soit B, l'extrémité de $\vec{r}$, et A, le point d'intersection des droites D_1 et D_2. Par la méthode du triangle pour l'addition de deux vecteurs, exprimons $\vec{r}$ comme la somme des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$.



$$\begin{aligned}\vec{r} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \\ &= k_2\vec{v} + k_1\vec{u} \quad (k_1 > 0 \text{ et } k_2 < 0)\end{aligned}$$

En mesurant, nous trouvons

$$k_1 \approx 2{,}2 \text{ et } k_2 \approx -1{,}4$$

d'où $\vec{r} \approx -1{,}4\vec{v} + 2{,}2\vec{u}$

Exemple 5

a) Vérifions si le vecteur $\vec{w}$, où $\vec{w} = (-4, -11, 22)$, est une combinaison linéaire des vecteurs de $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, où $\vec{u} = (1, -4, 5)$ et $\vec{v} = (2, 1, -4)$.

Pour vérifier si $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il faut déterminer s'il existe des scalaires k_1 et k_2 tels que

$$\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$$

$$(-4, -11, 22) = k_1(1, -4, 5) + k_2(2, 1, -4)$$

$$(-4, -11, 22) = (k_1 + 2k_2, -4k_1 + k_2, 5k_1 - 4k_2)$$

Puisque deux vecteurs sont équipollents si et seulement si leurs composantes respectives sont égales, nous devons résoudre le système d'équations suivant.

Système d'équations

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 = -4 \\ -4k_1 + k_2 = -11 \\ 5k_1 - 4k_2 = 22 \end{cases}$$

Par la méthode de Gauss, nous obtenons

Méthode de Gauss

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & -4 \\ -4 & 1 & -11 \\ 5 & -4 & 22 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 9 & -27 \\ 0 & -14 & 42 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 + 4L_1 \to L_2 \\ L_3 - 5L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 9 & -27 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad 9L_3 + 14L_2 \to L_3$$

De L_2, nous obtenons $k_2 = -3$, et de L_1, $k_1 = 2$. Ainsi, $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.

D'où $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) Vérifions si le vecteur $\vec{r}$, où $\vec{r} = (3, 2, -3)$, est une combinaison linéaire des vecteurs de $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, où $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (3, 1, 2)$ et $\vec{w} = (1, -3, -1)$.

Pour vérifier si $\vec{r}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, il faut déterminer s'il existe des scalaires k_1, k_2 et k_3 tels que

$$\vec{r} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v} + k_3\vec{w}$$

$$(3, 2, -3) = k_1(1, 1, 1) + k_2(3, 1, 2) + k_3(1, -3, -1)$$

$$(3, 2, -3) = (k_1 + 3k_2 + k_3, k_1 + k_2 - 3k_3, k_1 + 2k_2 - k_3)$$

Nous devons alors résoudre le système d'équations suivant.

Système d'équations

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 + k_3 = 3 \\ k_1 + k_2 - 3k_3 = 2 \\ k_1 + 2k_2 - k_3 = -3 \end{cases}$$

Par la méthode de Gauss, nous obtenons

Méthode de Gauss

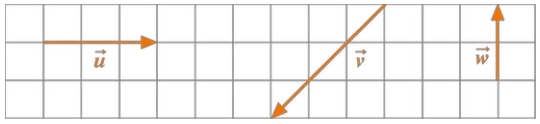
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} -L_2 + L_1 \to L_2 \\ -L_3 + L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right] \quad 2L_3 - L_2 \to L_3$$

Comme le système d'équations est incompatible, le système n'admet aucune solution et le vecteur $\vec{r}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

EXERCICES 5.1

1. Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ suivants.



Représenter graphiquement le résultat des combinaisons linéaires suivantes.

a) $\vec{r} = 2\vec{u} - \vec{v}$

b) $\vec{s} = \frac{1}{3}\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$

c) $\vec{t} = -3\vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w}$

2. Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{r}$ tels que

$\|\vec{u}\| = 4$, $\theta_{(\vec{u})} = 45°$, N.-E.

$\|\vec{v}\| = 6$, $\theta_{(\vec{v})} = 135°$, N.-O.

$\|\vec{w}\| = 5$, $\theta_{(\vec{w})} = 90°$, N.

$\|\vec{r}\| = 8$, $\theta_{(\vec{r})} = 0°$, E.

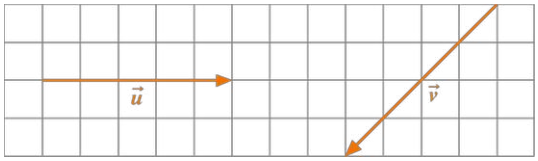
Exprimer

a) $\vec{w}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

b) $\vec{u}$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$;

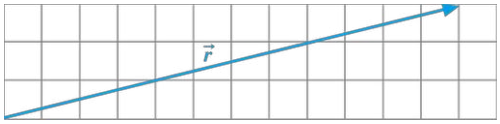
c) $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{w}$ et $\vec{r}$.

3. Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants.

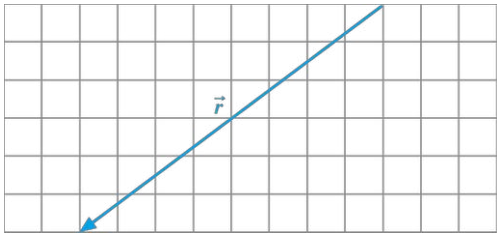


Déterminer approximativement les valeurs de k_1 et k_2 telles que $\vec{r} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$ si

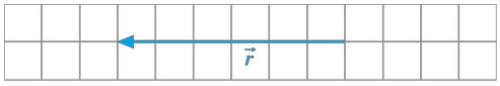
a)



b)



c)



4. Soit $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\}$, où $\vec{u} = (3, -2)$, $\vec{v} = (0, 4)$, $\vec{w} = (-1, 5)$ et $\vec{t} = (-6, 4)$. Trouver les composantes des vecteurs résultant des combinaisons linéaires suivantes.

a) $\vec{r} = 2\vec{u} - 4\vec{v}$

b) $\vec{s} = 3\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{v} + 2\vec{w} + \frac{5}{2}\vec{t}$

5. Soit $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, où $\vec{u} = (-1, 0, 4)$, $\vec{v} = (4, 1, 2)$ et $\vec{w} = (3, -1, 4)$.

a) Trouver les composantes des vecteurs résultant des combinaisons linéaires suivantes.
$\vec{r} = 2\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{s} = -5\vec{v} + 4\vec{w}$ et $\vec{t} = 3\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$

b) Soit $\vec{z}$, le vecteur défini par $\vec{z} = 2\vec{r} - 4\vec{s} + 3\vec{t}$.
Exprimer $\vec{z}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

c) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{z}$.

6. Soit $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\}$, où $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (-1, 3)$, $\vec{w} = (3, 2)$ et $\vec{t} = (-4, -2)$. Exprimer, si c'est possible, le vecteur

a) $\vec{r}_1 = (2, 15)$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

b) $\vec{r}_1 = (2, 15)$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$;

c) $\vec{r}_2 = (0, 0)$ comme combinaison linéaire de $\vec{w}$ et $\vec{t}$;

d) $\vec{r}_3 = (2, -6)$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{t}$;

e) $\vec{r}_4 = (1, 2)$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{t}$;

f) $\vec{r}_5 = (-2, 9)$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

7. Soit $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$, où $\vec{v}_1 = (1, -2, 3)$, $\vec{v}_2 = (0, 4, -2)$, $\vec{v}_3 = (-1, 2, 3)$, $\vec{v}_4 = (3, -6, 3)$ et $\vec{v}_5 = (-4, 8, -12)$. Exprimer, si c'est possible, le vecteur

a) $\vec{u} = (-1, -2, 17)$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$;

b) $\vec{w} = (1, 0, 4)$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_4$;

c) $\vec{t} = (1, -1, 3)$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$;

d) $\vec{s} = (5, -10, -3)$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_5$.

8. Soit $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{O}\}$, où $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$, $\vec{u} = (-2, 5)$, $\vec{v} = (3, 4)$ et $\vec{O} = (0, 0)$. Exprimer, si c'est possible, le vecteur

a) $\vec{u}$ comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$;

b) $\vec{i}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{j}$;

c) $\vec{j}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

d) $\vec{O}$ comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$;

e) $\vec{O}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

f) $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{O}$.

9. Soit $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, où $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

a) Exprimer les vecteurs $\vec{u} = (3, -2, 4)$ et $\vec{O}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

b) Démontrer que tout vecteur $\vec{t}$, où $\vec{t} = (x, y, z)$, peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, et donner cette combinaison linéaire.

10. Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, non nuls et non parallèles, et les vecteurs $\vec{r} = 8\vec{u} - 21\vec{v}$, $\vec{s} = -3\vec{u} + 6\vec{v}$ et $\vec{t} = 2\vec{u} - 5\vec{v}$. Exprimer

a) $\vec{r}$ comme combinaison linéaire de $\vec{s}$ et $\vec{t}$;

b) $\vec{s}$ comme combinaison linéaire de $\vec{r}$ et $\vec{t}$;

c) $\vec{u}$ comme combinaison linéaire de $\vec{r}$ et $\vec{s}$.

11. Soit $\vec{w}$, une combinaison linéaire des vecteurs de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$. Démontrer que si chaque $\vec{u}_i$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$, alors $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$.

5.2 Dépendance et indépendance linéaire de vecteurs géométriques et algébriques

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra appliquer les notions de dépendance linéaire et d'indépendance linéaire.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de déterminer si les vecteurs d'un ensemble sont linéairement dépendants ou linéairement indépendants ;
- d'énoncer certains théorèmes relatifs aux notions de dépendance linéaire et d'indépendance linéaire ;
- de démontrer certains théorèmes relatifs aux notions de dépendance linéaire et d'indépendance linéaire ;
- de donner la définition de vecteurs colinéaires ;
- de déterminer si des vecteurs sont colinéaires ;
- de donner la définition de vecteurs coplanaires ;
- de déterminer si des vecteurs sont coplanaires.

Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sont linéairement dépendants si et seulement s'il existe au moins un $k_i \neq 0$ tel que

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots + k_n\vec{v}_n = \vec{O}.$$

5

Dans cette section, nous étudierons la dépendance linéaire et l'indépendance linéaire de vecteurs, ce qui nous permettra, à la section 5.4, de présenter la notion de base d'un espace vectoriel.

Vecteurs linéairement dépendants et vecteurs linéairement indépendants



Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917)

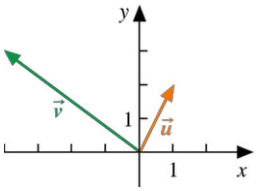
IL Y A ENVIRON 125 ANS...

Ferdinand Georg Frobenius travaille sur la résolution des systèmes d'équations linéaires alors qu'il enseigne dans une école technique supérieure à Zurich. C'est dans le cadre de ces travaux qu'il définit clairement les notions de combinaison linéaire et d'indépendance linéaire qui seront retenues par Peano et certains autres. Frobenius s'inspire, notamment, des publications mathématiques de Charles L. Dodgson (1832-1898), mieux connu sous le nom de Lewis Carroll, l'auteur d'*Alice au pays des merveilles*. Autant Dodgson a une imagination fertile, autant Frobenius est rigide. On le dit colérique, irascible et même porté à l'injure. Cela ne facilite guère ses relations avec ses collègues, particulièrement à Berlin où il devient professeur en 1892. Excellent mathématicien ayant contribué au développement de la science dans divers domaines, il souhaitait que Berlin soit considérée comme principal foyer des mathématiques allemandes. Son caractère difficile semble toutefois avoir provoqué l'effet contraire, à l'avantage de Göttingen qui deviendra le phare des mathématiques allemandes au début du XX^{e} siècle.

DÉFINITION 5.3

Soit $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, un ensemble de n vecteurs ayant la même dimension.

1) Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sont **linéairement indépendants** si et seulement si $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ est la seule solution de $k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots + k_n\vec{v}_n = \vec{O}$.
2) Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sont **linéairement dépendants** si et seulement s'il existe au moins un $k_i \neq 0$ tel que $k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots + k_n\vec{v}_n = \vec{O}$.



Exemple 1

a) Soit S = $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, où $\vec{u} = (1, 2)$ et $\vec{v} = (-4, 3)$. Déterminons, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants ou linéairement indépendants.

Trouvons les scalaires k_1 et k_2 tels que

$$k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{O}$$

$$k_1(1, 2) + k_2(-4, 3) = (0, 0)$$

$$(k_1 - 4k_2, 2k_1 + 3k_2) = (0, 0)$$

Nous obtenons alors le système homogène d'équations linéaires suivant.

$$\begin{cases} k_1 - 4k_2 = 0 \\ 2k_1 + 3k_2 = 0 \end{cases}$$

Rappelons que tout système homogène d'équations linéaires admet au moins la solution triviale.

Si c'est possible, résolvons ce système par la règle de Cramer.

En calculant le déterminant de la matrice A des coefficients, nous obtenons

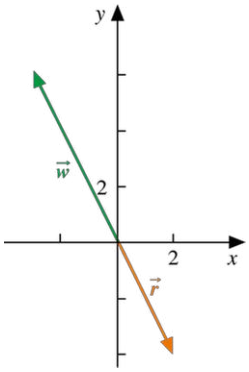
$$\text{dét } A = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 11.$$

Puisque dét $A \neq 0$, la seule solution est la solution triviale. En effet,

Règle de Cramer

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{11} = 0 \text{ et } k_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{11} = 0$$

D'où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants. (définition 5.3)



b) Soit S = $\{\vec{r}, \vec{w}\}$, où $\vec{r} = (2, -4)$ et $\vec{w} = (-3, 6)$. Déterminons si $\vec{r}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants ou linéairement indépendants.

Trouvons les scalaires k_1 et k_2 tels que

$$k_1\vec{r} + k_2\vec{w} = \vec{O}$$

$$k_1(2, -4) + k_2(-3, 6) = (0, 0)$$

$$(2k_1 - 3k_2, -4k_1 + 6k_2) = (0, 0)$$

Nous obtenons alors le système homogène d'équations linéaires suivant.

$$\begin{cases} 2k_1 - 3k_2 = 0 \\ -4k_1 + 6k_2 = 0 \end{cases}$$

Si c'est possible, résolvons ce système par la règle de Cramer.

En calculant le déterminant de la matrice A des coefficients, nous obtenons

$$\text{dét } A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Puisque dét $A = 0$, nous ne pouvons pas résoudre ce système par la règle de Cramer. Utilisons la méthode de Gauss.

Méthode de Gauss

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad L_2 + 2L_1 \to L_2$$

De L_1, en posant $k_2 = t$, où $t \in \mathbb{R}$, nous obtenons $k_1 = \frac{3t}{2}$.

Donc, E.-S. $= \left\{ \left(\frac{3}{2}t, t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$; ainsi il existe une solution non triviale.

Par exemple, si $t = 2$, nous avons $k_1 = 3$ et $k_2 = 2$, donc $3\vec{r} + 2\vec{w} = \vec{O}$.

D'où les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants. (définition 5.3)

Remarque : Dans le chapitre 3 (*voir page 161*), nous avons vu que le nombre de solutions d'un système homogène d'équations linéaires, où le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues, dépend de la valeur du déterminant de A, où A est la matrice des coefficients du système d'équations. En effet,

- si dét $A \neq 0$, alors le système admet une solution unique, c'est-à-dire la solution triviale ;
- si dét $A = 0$, alors le système admet une infinité de solutions.

Énonçons maintenant un théorème que nous acceptons sans démonstration.

THÉORÈME 5.1

Soit l'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, contenant n vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^n$, et A, la matrice obtenue en plaçant en colonnes les composantes des n vecteurs,

1) si dét $A \neq 0$, alors les vecteurs sont linéairement indépendants,
2) si dét $A = 0$, alors les vecteurs sont linéairement dépendants.

Exemple 2 Soit $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, où $\vec{u} = (1, 2, 7)$, $\vec{v} = (4, 5, -1)$ et $\vec{w} = (0, 2, 3)$. Déterminons si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants ou linéairement indépendants.

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 7 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, où dét $A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 7 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 49 \neq 0$.

D'où les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants. (théorème 5.1)

Exercices de compréhension 5.2

1. Soit les vecteurs $\vec{u} = (-4, 2)$, $\vec{v} = (5, -3)$ et $\vec{w} = (10, -5)$. Déterminer si les vecteurs suivants sont linéairement dépendants ou linéairement indépendants.

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ b) $\vec{u}$ et $\vec{w}$

THÉORÈME 5.2

Soit $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, un ensemble de n vecteurs ayant la même dimension.

Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sont linéairement dépendants si et seulement si au moins un des vecteurs de S peut être exprimé comme combinaison linéaire des $(n - 1)$ autres vecteurs de S.

La preuve est laissée à l'étudiant.

Remarque : Si aucun des vecteurs de l'ensemble S ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres vecteurs de S, alors les vecteurs de S sont linéairement indépendants.

Exemple 3 Soit $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, où $\vec{u} = (4, 3)$, $\vec{v} = (5, -10)$ et $\vec{w} = (-2, 4)$. Déterminons, à l'aide du théorème 5.2, si les vecteurs sont linéairement dépendants.

Essayons d'abord d'exprimer $\vec{u}$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

$\vec{u} = k_1\vec{v} + k_2\vec{w}$, où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

$(4, 3) = k_1(5, -10) + k_2(-2, 4)$

$(4, 3) = (5k_1 - 2k_2, -10k_1 + 4k_2)$

Système d'équations correspondant

$$\begin{cases} 5k_1 - 2k_2 = 4 \\ -10k_1 + 4k_2 = 3 \end{cases}$$

Résolvons ce système par la méthode de Gauss.

Méthode de Gauss

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & 4 \\ -10 & 4 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{array}\right] \qquad L_2 + 2L_1 \to L_2$$

Comme ce système n'admet aucune solution, $\vec{u}$ ne peut pas être exprimé comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Essayons maintenant d'exprimer $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{w}$.

$\vec{v} = k_1\vec{u} + k_2\vec{w}$, où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

$(5, -10) = k_1(4, 3) + k_2(-2, 4)$

$(5, -10) = (4k_1 - 2k_2, 3k_1 + 4k_2)$

Système d'équations correspondant

$$\begin{cases} 4k_1 - 2k_2 = 5 \\ 3k_1 + 4k_2 = -10 \end{cases}$$

Résolvons ce système par la méthode de Gauss.

Méthode de Gauss

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 5 \\ 0 & 22 & -55 \end{array}\right] \qquad 4L_2 - 3L_1 \to L_2$$

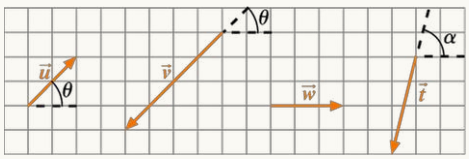
De L_2, $k_2 = \frac{-5}{2}$, et de L_1, $k_1 = 0$.

Ainsi, $\vec{v} = 0\vec{u} - \frac{5}{2}\vec{w}$.

D'où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants. (théorème 5.2)

Remarque : Même si $\vec{u}$ ne peut pas s'exprimer comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et de $\vec{w}$, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

Exemple 4 Soit les vecteurs géométriques $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ suivants. Déterminons si les vecteurs des ensembles suivants sont linéairement dépendants ou linéairement indépendants.



a) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$

Puisque $\vec{v} = -2\vec{u}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants. (théorème 5.2)

De plus, les vecteurs contenus respectivement dans les ensembles $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}\}$ et $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}, \vec{w}\}$ sont linéairement dépendants, car nous avons respectivement $\vec{v} = -2\vec{u} + 0\vec{w}$, $\vec{v} = -2\vec{u} + 0\vec{t}$ et $\vec{v} = -2\vec{u} + 0\vec{t} + 0\vec{w}$.

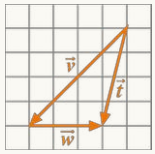
b) $\{\vec{u}, \vec{w}\}$

Puisque $\vec{u} \neq k_1\vec{w}$ et $\vec{w} \neq k_2\vec{u}$, (car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas parallèles)
les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants. (théorème 5.2)

De façon analogue, les vecteurs contenus respectivement dans les ensembles $\{\vec{u}, \vec{t}\}$, $\{\vec{v}, \vec{w}\}$, $\{\vec{v}, \vec{t}\}$ et $\{\vec{w}, \vec{t}\}$ sont linéairement indépendants.

c) $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\}$

Puisque $\vec{t} = \vec{v} + \vec{w}$ (*voir la figure ci-contre*), les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont linéairement dépendants. (théorème 5.2)



Énonçons maintenant un théorème que nous acceptons sans démonstration.

5

THÉORÈME 5.3

Soit un ensemble $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \ldots, \vec{u_m}\}$ de m vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Si $m > n$, alors les vecteurs $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \ldots, \vec{u_m}$ sont linéairement dépendants.

Le théorème 5.3 signifie notamment

1) que trois vecteurs (ou plus) de $\mathbb{R}^2$ sont linéairement dépendants,

   par exemple les trois vecteurs $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$ et $\vec{s} = (3, 2)$ de $\mathbb{R}^2$ sont linéairement dépendants ;

2) que quatre vecteurs (ou plus) de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants,

   par exemple les quatre vecteurs $\vec{u} = (1, -2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 4, -2)$, $\vec{w} = (2, -6, 12)$ et $\vec{t} = (7, -20, 25)$ de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants.

Vecteurs colinéaires

DÉFINITION 5.4

Des vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$ ou des vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$ sont **colinéaires** s'ils sont parallèles.

Exemple 1 Vérifions si les vecteurs $\vec{u} = (-2, 4, 1)$ et $\vec{v} = (6, -12, -3)$ sont colinéaires.

Puisque $\vec{v} = -3\vec{u}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles.

D'où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. (définition 5.4)

THÉORÈME 5.4

Deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$ ou deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$ sont colinéaires si et seulement s'ils sont linéairement dépendants.

La preuve est laissée à l'étudiant.

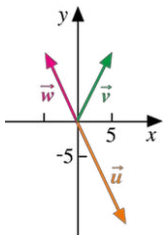
Nous pouvons utiliser la notion de déterminant pour vérifier si deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont colinéaires.

COROLLAIRE du théorème 5.4

Soit $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$, deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$.

Les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$.

La preuve est laissée à l'étudiant.



Exemple 2 Soit $\vec{u} = (6, -15)$, $\vec{v} = (5, 10)$ et $\vec{w} = (-4, 10)$. À l'aide du corollaire du théorème 5.4, déterminons si

a) $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

Puisque $\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -15 & 10 \end{vmatrix} = 0$,

$\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

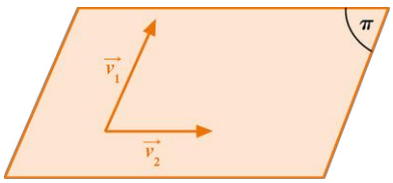
b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Puisque $\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -15 & 10 \end{vmatrix} = 135 \neq 0$,

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Vecteurs coplanaires

Remarque : Deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ramenés à une même origine, sont toujours situés dans un même plan ; ils sont donc coplanaires.

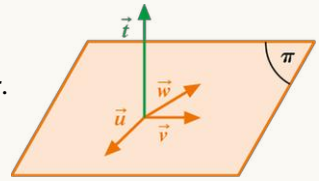


DÉFINITION 5.5

Trois vecteurs (ou plus) non nuls de $\mathbb{R}^3$ sont **coplanaires** s'ils sont situés dans un même plan lorsqu'ils sont ramenés à une même origine.

Exemple 1 Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, car ces trois vecteurs ramenés à une même origine sont situés dans le plan π.

Par contre, $\vec{t}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas coplanaires, car il n'existe aucun plan contenant ces trois vecteurs.



THÉORÈME 5.5

Trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$ sont coplanaires
si et seulement s'ils sont linéairement dépendants.

La preuve est laissée à l'étudiant.

Nous pouvons également utiliser la notion de déterminant pour vérifier si trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont coplanaires.

COROLLAIRE du théorème 5.5

Soit $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ et $\vec{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$, trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$.

Les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont coplanaires si et seulement si $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$.

La preuve est laissée à l'étudiant.

5

Exercices de compréhension 5.2

2. Soit $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (4, 5, 6)$, $\vec{w} = (7, 8, 9)$ et $\vec{t} = (1, 0, 0)$.

Déterminer, à l'aide du corollaire du théorème 5.5, si les vecteurs suivants sont coplanaires.

a) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

b) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$

Voici un résumé des notions étudiées précédemment.

Soit $\vec{u} = (x_1, y_1)$ et $\vec{v} = (x_2, y_2)$, deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$.

Les énoncés suivants sont équivalents.

1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants ;
2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;
3) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles, c'est-à-dire $\vec{u} = k\vec{v}$, où $k \neq 0$;
4) $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$.

Soit $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ et $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$.

Les énoncés suivants sont équivalents.

1) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants ;
2) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ;
3) au moins un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres ;
4) $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$.

EXERCICES 5.2

1. Déterminer si les vecteurs suivants sont linéairement indépendants ou linéairement dépendants,

i) à l'aide de la définition 5.3 ;

ii) à l'aide d'un déterminant, si c'est possible.

a) $\vec{u} = (-1, 2)$ et $\vec{v} = (0, 1)$

b) $\vec{u} = (3, -6)$ et $\vec{v} = (-4, 8)$

c) $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (3, 1)$ et $\vec{w} = (2, -2)$

d) $\vec{u} = (1, 4, -3)$, $\vec{v} = (0, 7, 1)$ et $\vec{w} = (0, 0, 1)$

e) $\vec{u} = (-1, 2, 0)$, $\vec{v} = (4, 1, -3)$ et $\vec{w} = (10, -2, -6)$

f) $\vec{u} = (2, 4, -8, 6)$, $\vec{v} = (5, 1, 2, 0)$, $\vec{w} = (0, 4, 1, 1)$ et $\vec{t} = (-3, -6, 12, -9)$

2. Exprimer, si c'est possible, un vecteur comme combinaison linéaire des autres vecteurs et déterminer si les vecteurs suivants sont linéairement dépendants ou linéairement indépendants.

a) $\vec{u} = (-10, 8)$ et $\vec{v} = (15, -12)$

b) $\vec{u} = (3, 2)$, $\vec{v} = (-9, 6)$ et $\vec{w} = (6, -4)$

c) $\vec{u} = (-1, 2, 4)$, $\vec{v} = (-2, 7, 2)$ et $\vec{w} = (0, -1, 2)$

d) $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (2, -3, 0)$ et $\vec{w} = (1, -1, 1)$

3. Déterminer si les vecteurs suivants sont linéairement dépendants ou linéairement indépendants.

a) $\vec{u} = (4, -5)$ et $\vec{v} = (-5, 4)$

b) $\vec{u} = (3, -1)$, $\vec{v} = (1, 5)$ et $\vec{w} = (8, -2)$

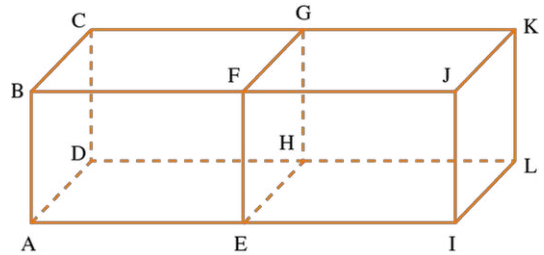
c) $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$

d) $\vec{u} = (-6, 9, 15)$ et $\vec{v} = (10, -15, -25)$

e) $\vec{u} = (-1, 2, 3)$, $\vec{v} = (4, -1, 0)$, $\vec{w} = (2, -1, 4)$ et $\vec{t} = (4, 0, 5)$

f) $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$ et $\vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$

4. Soit la figure suivante, formée de deux parallélépipèdes identiques et adjacents.



Exprimer, si c'est possible, un vecteur comme combinaison linéaire des autres vecteurs et déterminer si les vecteurs suivants sont linéairement dépendants ou linéairement indépendants.

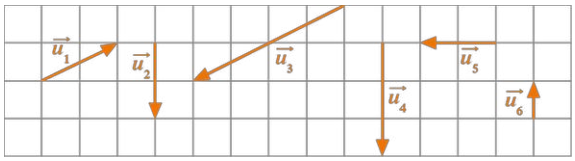
a) $\overrightarrow{KF}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{IL}$

b) $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{HD}$

c) $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{CJ}$

d) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{DH}$

5. Parmi les vecteurs suivants, déterminer lesquels sont colinéaires.



6. a) Déterminer si les vecteurs suivants sont colinéaires.

i) $\vec{u} = (4, -5)$ et $\vec{v} = (5, -4)$

ii) $\vec{u} = (-2, 6)$ et $\vec{v} = (3, -9)$

iii) $\vec{u} = (-1, 2, 5)$ et $\vec{v} = (-2, 4, 10)$

b) Déterminer les valeurs de a et b telles que les vecteurs suivants sont colinéaires.

i) $\vec{u} = (3, -5)$ et $\vec{v} = (a, 8)$

ii) $\vec{u} = (-1, a, 6)$ et $\vec{v} = (3, 5, b)$

7. a) Déterminer si les vecteurs suivants sont coplanaires.

i) $\vec{u} = (2, -1, 4)$, $\vec{v} = (1, 0, -2)$ et $\vec{w} = (-4, 5, 3)$

ii) $\vec{u} = (1, 3, 1)$, $\vec{v} = (-2, 5, 9)$ et $\vec{w} = (4, -2, -10)$

iii) $\vec{u} = (4, -3, 0)$ et $\vec{v} = (5, 0, 2)$

b) Déterminer les valeurs de a, b et c telles que les vecteurs suivants sont coplanaires

i) $\vec{u} = (-2, 1, 4)$, $\vec{v} = (3, -2, 5)$ et $\vec{w} = (a, 0, -3)$

ii) $\vec{u} = (3, -4, 0)$, $\vec{v} = (7, -2, 0)$ et $\vec{w} = (a, b, c)$

8. Répondre par vrai (V) ou faux (F) et justifier les réponses.

a) Deux vecteurs parallèles sont linéairement dépendants.

b) Trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$ sont linéairement dépendants.

c) Deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont toujours colinéaires.

d) Deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ramenés à l'origine sont coplanaires.

e) Trois vecteurs coplanaires de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants.

f) Trois vecteurs non nuls linéairement dépendants sont toujours parallèles.

9. Démontrer que les vecteurs des ensembles suivants sont linéairement dépendants.

a) $\{\vec{u}, \vec{v}, (\vec{u} + \vec{v})\}$

b) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, (3\vec{u} - \vec{v})\}$

c) $\{\vec{O}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4}, \ldots, \vec{u_n}\}$

5.3 Espaces vectoriels

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra déterminer si un ensemble est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de donner la définition d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$;
- de déterminer si un ensemble muni d'une opération interne et d'une opération externe est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$;
- de donner la définition d'un sous-espace vectoriel ;
- de déterminer si un ensemble muni d'opérations est un sous-espace vectoriel.

V est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$ lorsque pour tout $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w} \in$ V et pour tout r et $s \in \mathbb{R}$, nous avons

Propriété 1 $(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \in$ V

Propriété 2 $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$

⋮

Propriété 9 $r * (s * \boldsymbol{u}) = (rs) * \boldsymbol{u}$

Propriété 10 $1 * \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Au chapitre 4, nous avons étudié les propriétés des opérations sur les vecteurs géométriques et sur les vecteurs algébriques.

Plusieurs autres ensembles, par exemple l'ensemble des matrices, l'ensemble des polynômes, l'ensemble des fonctions continues et l'ensemble des nombres complexes munis d'opérations semblables, possèdent les mêmes propriétés.

Nous présentons maintenant la notion d'espace vectoriel. Notre étude se limitera aux espaces vectoriels où l'opération externe est définie sur $\mathbb{R}$.

Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$



Giuseppe Peano
(1858-1932)

IL Y A ENVIRON 125 ANS...

Lorsque la communauté mathématique n'est pas prête à recevoir et à apprécier un concept ou une notion, on aura beau faire, elle restera rébarbative à ces nouvelles idées. C'est le cas pour les idées de Grassmann. Il en ira de même après 1888 pour le système linéaire (espace vectoriel dans $\mathbb{R}^n$) de **Giuseppe Peano**. À plusieurs reprises, des mathématiciens reprennent, parfois sans le savoir, quelques-unes des idées de Peano, mais la communauté mathématique dans son ensemble n'en voit pas toute la richesse. Les choses ne changent guère en 1918 lorsque Hermann Weyl (1885-1955) reprend cette idée d'axiomatiser ce que nous appelons un espace vectoriel dans $\mathbb{R}^n$ dans son livre *Espace – Temps – Matière* sur la théorie de la relativité. La définition d'espace vectoriel en termes de propriétés, analogue à celle donnée dans cette section, ne frappera l'imagination des mathématiciens que lorsqu'elle sera présentée dans la thèse du polonais Stephan Banach (1892-1945), soutenue en 1920 et qui étudie des ensembles d'objets mathématiques beaucoup plus abstraits que les points d'un espace à n dimensions, en l'occurrence des ensembles dont les éléments sont des fonctions.

DÉFINITION 5.6

Soit V, un ensemble non vide muni d'une opération interne et d'une opération externe. L'opération interne, notée $\oplus$, s'appelle addition, et l'opération externe, notée $*$, s'appelle multiplication d'un élément de V par un scalaire de $\mathbb{R}$.

V est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$ lorsque pour tout $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w} \in$ V et pour tout r et $s \in \mathbb{R}$, nous avons :

Propriété 1	$(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \in$ V	(fermeture pour l'addition)
Propriété 2	$\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$	(commutativité de l'addition)
Propriété 3	$(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w})$	(associativité de l'addition)
Propriété 4	$\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{O} = \boldsymbol{u}$	(il existe un **élément neutre** pour l'addition, noté $\boldsymbol{O}$, où $\boldsymbol{O} \in$ V)
Propriété 5	$\boldsymbol{u} \oplus (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{O}$	(il existe un **élément opposé** pour l'addition, noté $-\boldsymbol{u}$, où $-\boldsymbol{u} \in$ V)
Propriété 6	$r * \boldsymbol{u} \in$ V	(fermeture pour la multiplication par un scalaire)
Propriété 7	$(r + s) * \boldsymbol{u} = r * \boldsymbol{u} \oplus s * \boldsymbol{u}$	(pseudo-distributivité de la multiplication par un vecteur sur l'addition de scalaires)
Propriété 8	$r * (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) = r * \boldsymbol{u} \oplus r * \boldsymbol{v}$	(pseudo-distributivité de la multiplication par un scalaire sur l'addition de vecteurs)
Propriété 9	$r * (s * \boldsymbol{u}) = (rs) * \boldsymbol{u}$	(pseudo-associativité de la multiplication par un scalaire)
Propriété 10	$1 * \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$	(1 est le pseudo-élément neutre pour la multiplication par un scalaire)

Les éléments d'un espace vectoriel V sont appelés vecteurs de V et sont notés en caractères gras.

Pour déterminer si un ensemble non vide V muni d'une opération interne $\oplus$ et d'une opération externe $*$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, il faut vérifier si les 10 propriétés de la définition d'un espace vectoriel sont satisfaites.

Toutefois, si une des 10 propriétés n'est pas satisfaite, alors V n'est pas un espace vectoriel.

En particulier pour démontrer les propriétés 2, 3, 7, 8 et 9, nous pouvons

- soit développer un membre de l'égalité jusqu'à obtenir l'autre membre de l'égalité ;
- soit développer les deux membres de l'égalité jusqu'à obtenir la même expression.

Exemple 1 Soit V, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1, c'est-à-dire $\mathrm{V} = \{ax + b \,|\, a \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$, muni des opérations interne et externe suivantes.

Addition : $(cx + d) \oplus (ex + f) = (c + e)x + (d + f)$

Multiplication : $k * (cx + d) = (kc)x + kd$, où $k \in \mathbb{R}$

Déterminons si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Il faut vérifier si les 10 propriétés énoncées dans la définition 5.6 sont satisfaites.

Soit $\boldsymbol{u} = cx + d$, $\boldsymbol{v} = ex + f$ et $\boldsymbol{w} = gx + h$, des éléments de V, et r et $s \in \mathbb{R}$.

Fermeture de l'addition dans $\mathbb{R}$

Propriété 1 Vérifions si $(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \in$ V.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} &= (cx + d) \oplus (ex + f)\\ &= (c + e)x + (d + f) && \text{(définition de } \oplus)\end{aligned}$$

Puisque c, d, e et $f \in \mathbb{R}$, $(c + e) \in \mathbb{R}$ et $(d + f) \in \mathbb{R}$.

D'où $(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \in$ V.

Propriété 2 Vérifions si $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} &= (cx + d) \oplus (ex + f)\\ &= (c + e)x + (d + f) && \text{(définition de } \oplus)\\ &= (e + c)x + (f + d) && \text{(commutativité de l'addition dans } \mathbb{R})\\ &= (ex + f) \oplus (cx + d) && \text{(définition de } \oplus)\\ &= \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}\end{aligned}$$

d'où $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$.

Propriété 3 Vérifions si $\boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{w}$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}) &= (cx + d) \oplus ((ex + f) \oplus (gx + h))\\ &= (cx + d) \oplus ((e + g)x + (f + h)) && \text{(définition de } \oplus)\\ &= (c + (e + g))x + (d + (f + h)) && \text{(définition de } \oplus)\\ &= ((c + e) + g)x + ((d + f) + h) && \text{(associativité de l'addition dans } \mathbb{R})\\ &= ((c + e)x + (d + f)) \oplus (gx + h) && \text{(définition de } \oplus)\\ &= ((cx + d) \oplus (ex + f)) \oplus (gx + h) && \text{(définition de } \oplus)\\ &= (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{w}\end{aligned}$$

d'où $\boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{w}$.

Propriété 4 Vérifions s'il existe dans V un élément neutre pour $\oplus$, noté $\boldsymbol{O}$, tel que $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{O} = \boldsymbol{u}$, $\forall\ \boldsymbol{u} \in$ V.

Soit $\boldsymbol{O}$, l'élément de V défini par $\boldsymbol{O} = 0x + 0$.

$$\begin{aligned}\text{Ainsi, } \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{O} &= (cx + d) \oplus (0x + 0)\\ &= (c + 0)x + (d + 0) && \text{(définition de } \oplus)\\ &= cx + d && \text{(0 est l'élément neutre de l'addition dans } \mathbb{R})\\ &= \boldsymbol{u}\end{aligned}$$

d'où $\boldsymbol{O} = 0x + 0$ est l'élément neutre de l'addition, car $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{O} = \boldsymbol{u}$.

Propriété 5 Vérifions si, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, il existe dans V un élément opposé, noté $\text{-}\boldsymbol{u}$, tel que $\boldsymbol{u} \oplus (\text{-}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{O}$.

Soit $\text{-}\boldsymbol{u}$, l'élément de V défini par $\text{-}\boldsymbol{u} = \text{-}cx + (\text{-}d)$.

Ainsi, $\boldsymbol{u} \oplus (\text{-}\boldsymbol{u}) = (cx + d) \oplus (\text{-}cx + (\text{-}d))$

$= ((c + (\text{-}c))x + (d + (\text{-}d))$ (définition de $\oplus$)

$= 0x + 0$ (car $(\text{-}c)$ est l'opposé de c dans $\mathbb{R}$, et $(\text{-}d)$ est l'opposé de d dans $\mathbb{R}$)

$= \boldsymbol{O}$ (propriété 4, où $\boldsymbol{O} = 0x + 0$)

d'où $\text{-}\boldsymbol{u} = \text{-}cx + (\text{-}d)$ est l'élément opposé de $\boldsymbol{u}$, car $\boldsymbol{u} + (\text{-}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{O}$.

Fermeture de la multiplication dans $\mathbb{R}$

Propriété 6 Vérifions si $r * \boldsymbol{u} \in \text{V}$.

$r * \boldsymbol{u} = r * (cx + d)$

$= (rc)x + rd$ (définition de $*$)

Puisque r, c et $d \in \mathbb{R}$, $rc \in \mathbb{R}$ et $rd \in \mathbb{R}$.

D'où $r * \boldsymbol{u} \in \text{V}$.

Propriété 7 Vérifions si $(r + s) * \boldsymbol{u} = r * \boldsymbol{u} \oplus s * \boldsymbol{u}$.

$(r + s) * \boldsymbol{u} = (r + s) * (cx + d)$

$= ((r + s)c)x + (r + s)d$ (définition de $*$)

$= (rc + sc)x + (rd + sd)$ (distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{R}$)

$= ((rc)x + rd) \oplus ((sc)x + sd)$ (définition de $\oplus$)

$= r * (cx + d) \oplus s * (cx + d)$ (définition de $*$)

$= r * \boldsymbol{u} \oplus s * \boldsymbol{u}$

d'où $(r + s) * \boldsymbol{u} = r * \boldsymbol{u} \oplus s * \boldsymbol{u}$.

Propriété 8 Vérifions si $r * (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) = r * \boldsymbol{u} \oplus r * \boldsymbol{v}$.

D'une part,

$r * (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) = r * ((cx + d) \oplus (ex + f))$

$= r * ((c + e)x + (d + f))$ (définition de $\oplus$)

$= (r(c + e))x + r(d + f)$ (définition de $*$)

$= (rc + re)x + (rd + rf)$ (distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{R}$)

D'autre part,

$r * \boldsymbol{u} \oplus r * \boldsymbol{v} = r * (cx + d) \oplus r * (ex + f)$

$= ((rc)x + rd) \oplus ((re)x + rf)$ (définition de $*$)

$= (rc + re)x + (rd + rf)$ (définition de $\oplus$)

d'où $r * (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) = r * \boldsymbol{u} \oplus r * \boldsymbol{v}$.

Propriété 9 Vérifions si $r*(s*\boldsymbol{u}) = (rs)*\boldsymbol{u}$.

$$\begin{aligned} r*(s*\boldsymbol{u}) &= r*(s*(cx+d)) \\ &= r*((sc)x+(sd)) && \text{(définition de } *) \\ &= (r(sc))x + r(sd) && \text{(définition de } *) \\ &= (rs)(cx) + (rs)d && \text{(associativité de la multiplication dans } \mathbb{R}) \\ &= (rs)*(cx+d) && \text{(définition de } *) \\ &= (rs)*\boldsymbol{u} \end{aligned}$$

d'où $r*(s*\boldsymbol{u}) = (rs)*\boldsymbol{u}$.

Propriété 10 Vérifions si $1*\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

$$\begin{aligned} 1*\boldsymbol{u} &= 1*(cx+d) \\ &= (1c)x + 1d && \text{(définition de } *) \\ &= cx + d && \text{(1 est l'élément neutre de la multiplication dans } \mathbb{R}) \\ &= \boldsymbol{u} \end{aligned}$$

d'où $1*\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

Puisque les 10 propriétés sont satisfaites, V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2

a) L'ensemble V des vecteurs algébriques dans $\mathbb{R}^n$, muni des opérations addition et multiplication d'un vecteur par un scalaire (définies à la page 233), est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

En effet, les 10 propriétés de l'addition de vecteurs algébriques et de la multiplication d'un vecteur algébrique par un scalaire correspondent aux 10 propriétés d'un espace vectoriel. (définition 5.6)

b) L'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices carrées $n \times n$, muni des opérations addition et multiplication d'une matrice par un scalaire (définies à la page 21), est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

En effet, les 10 propriétés de l'addition de matrices et de la multiplication d'une matrice par un scalaire correspondent aux 10 propriétés d'un espace vectoriel. (définition 5.6)

Pour conclure qu'un ensemble donné V n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, il suffit de démontrer qu'une des 10 propriétés n'est pas satisfaite.

Exemple 3 Soit $\mathcal{M}$, l'ensemble des matrices carrées 2×2 de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ c & 5 \end{bmatrix}$, où a, b et $c \in \mathbb{R}$, muni des opérations addition et multiplication d'une matrice par un scalaire (définies à la page 21).
Déterminons si $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Il faut vérifier si les 10 propriétés énoncées dans la définition 5.6 sont satisfaites.

Soit $\boldsymbol{M}_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{M}_2 = \begin{bmatrix} d & e \\ f & 5 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{M}_3 = \begin{bmatrix} h & g \\ i & 5 \end{bmatrix}$, des éléments de $\mathcal{M}$, et r et $s \in \mathbb{R}$.

Propriété 1 Vérifions si $(\boldsymbol{M}_1 \oplus \boldsymbol{M}_2) \in \mathcal{M}$.

$$\boldsymbol{M}_1 \oplus \boldsymbol{M}_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 5 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} d & e \\ f & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d & b+e \\ c+f & 10 \end{bmatrix} \quad \text{(définition de } \oplus\text{)}$$

Puisque l'élément de la deuxième ligne et de la deuxième colonne n'est pas égal à 5, $(\boldsymbol{M}_1 \oplus \boldsymbol{M}_2) \notin \mathcal{M}$.

Donc, la propriété 1 n'est pas satisfaite.

D'où $\mathcal{M}$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4 Soit $V = \{(a, b) \mid a \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$, l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$, muni des opérations suivantes.

Addition : $(c, d) \oplus (e, f) = (c + e, d + f)$

Multiplication : $k * (c, d) = (kc, d)$, où $k \in \mathbb{R}$

Déterminons si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Il n'est pas nécessaire de vérifier les propriétés de l'addition, puisque l'addition est définie de la même façon que l'addition de vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^2$ (définie à la page 233).

Toutefois, comme la multiplication d'un vecteur par un scalaire est définie différemment de la définition présentée à la page 233, il est possible qu'une des propriétés relatives à la multiplication par un scalaire, autre que la fermeture, ne soit pas satisfaite.

Propriété 7 Soit $\boldsymbol{u} = (c, d)$, un élément de V, et r et $s \in \mathbb{R}$.

Vérifions si $(r + s) * \boldsymbol{u} = r * \boldsymbol{u} \oplus s * \boldsymbol{u}$.

D'une part, $(r + s) * \boldsymbol{u} = (r + s) * (c, d)$

$= ((r + s)c, d)$ (définition de $*$)

D'autre part, $r * \boldsymbol{u} \oplus s * \boldsymbol{u} = r * (c, d) \oplus s * (c, d)$

$= (rc, d) \oplus (sc, d)$ (définition de $*$)

$= (rc + sc, d + d)$ (définition de $\oplus$)

$= ((r + s)c, 2d)$ (distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{R}$)

Puisque $((r + s)c, d) \neq ((r + s)c, 2d)$ lorsque $d \neq 0$, $(r + s) * \boldsymbol{u} \neq r * \boldsymbol{u} \oplus s * \boldsymbol{u}$.

Donc, la propriété 7 n'est pas satisfaite.

D'où V n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Pour démontrer qu'une des propriétés n'est pas satisfaite, nous pouvons également trouver un contre-exemple.

Exemple 5 Soit $V = \{(a, b, c) \mid a, b \text{ et } c \in \mathbb{R}\}$, l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, muni des opérations suivantes.

Addition : $(e, f, g) \oplus (h, i, j) = (e + h, f + i, g + j)$

Multiplication : $k * (e, f, g) = (1, 1, 1)$, où $k \in \mathbb{R}$

Vérifions que V n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ en trouvant un exemple qui ne satisfait pas la propriété 10.

Contre-exemple

En choisissant $\boldsymbol{u} = (2, 3, 4) \in V$, nous avons

$$1 * \boldsymbol{u} = 1 * (2, 3, 4)$$
$$= (1, 1, 1) \quad \text{(définition de } *\text{)}$$

Puisque $1 * \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}$ lorsque $\boldsymbol{u} = (2, 3, 4)$, la propriété 10 n'est pas satisfaite.

D'où V n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

5

Sous-espaces vectoriels

DÉFINITION 5.7

Soit V, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et W, un sous-ensemble non vide de V ($W \subseteq V$).

On dit que W est un **sous-espace vectoriel** de V lorsque W, muni des mêmes opérations que V, est également un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Théoriquement, il faudrait vérifier si les 10 propriétés d'un espace vectoriel sont satisfaites pour W.

En pratique, il n'est pas nécessaire de vérifier les propriétés 2, 3, 7, 8, 9 et 10, puisque le fait qu'elles soient valides pour tous les éléments de V implique qu'elles sont également valides pour les éléments de W, car $W \subseteq V$.

Il reste donc à vérifier la validité des propriétés 1, 4, 5 et 6 de la définition 5.6.

Énonçons maintenant un théorème, que nous acceptons sans démonstration, nous permettant de déterminer si W est un sous-espace vectoriel de V en vérifiant uniquement la validité des propriétés 1 et 6.

THÉORÈME 5.6

Soit V, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et W, un sous-ensemble non vide de V ($W \subseteq V$).

Si W est muni des mêmes opérations que V, alors W est un sous-espace vectoriel de V si et seulement si, pour tout $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v} \in W$, et pour tout $r \in \mathbb{R}$, nous avons

i) $(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \in W$; (fermeture pour l'addition)

ii) $r * \boldsymbol{u} \in W$. (fermeture pour la multiplication par un scalaire)

$\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Exemple 1 Soit $W = \{(a, 0, b) \in \mathbb{R}^3\}$, un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^3$ ($W \subseteq \mathbb{R}^3$), c'est-à-dire que W est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont la deuxième composante est nulle.

Déterminons, à l'aide du théorème 5.6, si W, muni des opérations définies sur les vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^3$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\boldsymbol{u} = (a, 0, b)$ et $\boldsymbol{v} = (c, 0, d)$, deux vecteurs de W, et $r \in \mathbb{R}$.

i) $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = (a, 0, b) \oplus (c, 0, d)$

$= (a + c, 0 + 0, b + d)$ (définition de $\oplus$)

$= (a + c, 0, b + d)$ (car $0 + 0 = 0$ dans $\mathbb{R}$)

Puisque la deuxième composante est nulle, $(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \in W$.

ii) $r * \boldsymbol{u} = r * (a, 0, b)$

$= (ra, r0, rb)$ (définition de $*$)

$= (ra, 0, rb)$ (car $r0 = 0$ dans $\mathbb{R}$)

Puisque la deuxième composante est nulle, $r * \boldsymbol{u} \in W$.

D'où W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. (théorème 5.6)

5

$\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Exemple 2 Soit $W = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, ab = 0\}$, un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^2$ ($W \subseteq \mathbb{R}^2$).

Déterminons, à l'aide du théorème 5.6, si W, muni des opérations définies sur les vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^2$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\boldsymbol{u} = (a, b)$ et $\boldsymbol{v} = (c, d)$, deux vecteurs de W, et $r \in \mathbb{R}$.

i) $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = (a, b) \oplus (c, d)$

$= (a + c, b + d)$ (définition de $\oplus$)

Vérifions si $(a + c, b + d) \in W$, c'est-à-dire si

$(a + c)(b + d) = 0$, c'est-à-dire si $ab + ad + cb + cd = 0$.

Nous savons que $ab = 0$ et $cd = 0$, car $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v} \in W$.

Nous devons donc vérifier si $ad + cb = 0$.

En choisissant $a = 0$ et $b \neq 0$, et en choisissant $d = 0$ et $c \neq 0$, nous avons $ad + cb \neq 0$.

Donc, $(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \notin W$.

D'où W n'est pas un sous-espace vectoriel de V, car la première condition du théorème 5.6 n'est pas satisfaite.

Contre-exemple

Dans l'exemple précédent, en choisissant $\boldsymbol{u} = (0, 5)$ et $\boldsymbol{v} = (2, 0)$, où $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$, nous obtenons un contre-exemple.

$\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = (0, 5) \oplus (2, 0)$

$= (2, 5)$ (définition de $\oplus$)

Donc $(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \notin W$ (car $2(5) \neq 0$)

THÉORÈME 5.7

Tout espace vectoriel V possède deux **sous-espaces vectoriels triviaux**, soit

$$W_1 = \{\boldsymbol{O}\} \text{ et } W_2 = V.$$

La preuve est laissée à l'étudiant.

EXERCICES 5.3

1. Vérifier si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Dans le cas où un ensemble n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, énoncer une propriété qui n'est pas satisfaite.

a) $V = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2\}$, muni des opérations définies sur les vecteurs algébriques de $\mathbb{R}^2$.

b) $V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$, muni des opérations suivantes.

Addition :

$$(a, b, c) \oplus (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f)$$

Multiplication :

$$k * (a, b, c) = (0, 0, 0)$$

c) L'ensemble V, contenant un seul élément appelé $\boldsymbol{u}$, muni des opérations suivantes.

Addition : $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Multiplication : $r * (\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$

d) $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, muni des opérations suivantes.

Addition : $(a, b) \oplus (c, d) = (ad, bc)$

Multiplication : $r * (a, b) = (ra, rb)$

e) $P = \{ax^2 + bx + c \,|\, a, b \text{ et } c \in \mathbb{R}\}$, muni des opérations suivantes.

Addition :

$$(ax^2 + bx + c) \oplus (dx^2 + ex + f) = (a + d)x^2 + (b + e)x + (c + f)$$

Multiplication :

$$r * (ax^2 + bx + c) = (ra)x^2 + (rb)x + rc$$

f) L'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices $M_{2\times 2}$, où les éléments m_{ij} de $M_{2\times 2}$ sont des entiers, muni des opérations addition et multiplication d'une matrice par un scalaire définies à la page 21.

2. Soit $V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a > 0, b > 0 \text{ et } c > 0\}$, muni des opérations suivantes.

Addition : $(a, b, c) \oplus (d, e, f) = (ad, be, cf)$

Multiplication : $r * (a, b, c) = (a^r, b^r, c^r)$

a) Déterminer l'élément neutre de l'addition.

b) Déterminer l'élément opposé de l'addition.

c) Vérifier si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3. Soit V, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni des opérations usuelles sur les vecteurs algébriques, les polynômes et les suites, et W, un sous-ensemble non vide de V, muni des mêmes opérations. Déterminer si W est un sous-espace vectoriel de V. Si tel n'est pas le cas, justifier ou trouver un contre-exemple.

a) $V = \mathbb{R}^3$; $W = \{(a, 2a, 3a) \in \mathbb{R}^3\}$

b) $V = \mathbb{R}^2$; $W = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a > 0 \text{ et } b \geq 0\}$

c) $V = \mathbb{R}^3$; $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, c = a + b\}$

d) $V = \mathbb{R}^3$; $W = \{(a, b, ab) \in \mathbb{R}^3\}$

e) $V = \mathbb{R}^2$; $W = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a > b\}$

f) $V = \mathbb{R}^3$;
$W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3a + 2b - c = 0\}$

g) $V = \{ax^2 + bx + c \,|\, a, b \text{ et } c \in \mathbb{R}\}$;
$W = \{ax^2 + bx + c \,|\, b = 0, a \text{ et } c \in \mathbb{R}\}$

h) $V = \{ax^2 + bx + c \,|\, a, b \text{ et } c \in \mathbb{R}\}$;
$W = \{ax^2 + bx + c \,|\, b = 1, a \text{ et } c \in \mathbb{R}\}$

i) $V = \{ax^2 + bx + c \,|\, a, b \text{ et } c \in \mathbb{R}\}$;
$W = \{ax^2 + bx + c \,|\, a + b + c = 0\}$

j) $V = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots) \,|\, a_i \in \mathbb{R}\}$;
$W = \{(a, a, a, \ldots) \,|\, a \in \mathbb{R}\}$

4. Soit $\mathcal{M}$, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices $M_{2\times 2}$ muni des opérations sur les matrices définies à la page 21. Parmi les sous-ensembles non vides de $\mathcal{M}$ suivants, munis des mêmes opérations, déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}$. Lorsqu'il ne s'agit pas d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$, justifier ou trouver un contre-exemple.

a) $\mathrm{W} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$

b) $\mathrm{W} = \{M \in \mathcal{M} \,|\, \text{dét } M = 1\}$

c) $\mathrm{W} = \{M \in \mathcal{M} \,|\, \text{dét } M \neq 0\}$

d) $\mathrm{W} = \{M \in \mathcal{M} \,|\, M^{\mathrm{T}} = M\}$

e) $\mathrm{W} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

5.4 Bases d'un espace vectoriel et théorèmes sur les bases

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra utiliser la notion de bases.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de donner la définition d'un ensemble de générateurs d'un espace vectoriel ;
- de donner la définition d'une base d'un espace vectoriel ;
- de déterminer si les vecteurs d'un ensemble forment une base d'un espace vectoriel ;
- de déterminer si un ensemble de vecteurs est un ensemble de générateurs d'un espace vectoriel ;
- de déterminer les composantes d'un vecteur dans une base donnée ;
- d'énoncer certains théorèmes relatifs aux bases ;
- de démontrer certains théorèmes relatifs aux bases ;
- de donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel ;
- de donner la définition d'une base orthogonale ;
- de déterminer si des vecteurs sont orthogonaux ;
- de déterminer si une base est orthogonale ;
- de donner la définition d'une base orthonormée ;
- de déterminer si une base est orthonormée.

$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ est une base de V si

1) les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ sont linéairement indépendants ;
2) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ est un ensemble de générateurs de V.

Dans cette section, nous utiliserons les notions de combinaison linéaire et de vecteurs linéairement indépendants pour définir une base d'un espace vectoriel.

Généralisons la définition 5.1 (*voir page 250*) pour des vecteurs d'un espace vectoriel V.

DÉFINITION 5.8

Soit V, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, un ensemble de n vecteurs de V.

On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs de $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ toute expression de la forme

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + k_n\boldsymbol{v}_n, \text{ où } k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}.$$

Généralisons la définition 5.2 (*voir page 250*) pour des vecteurs d'un espace vectoriel V.

DÉFINITION 5.9

Soit V, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, un ensemble de n vecteurs de V.

Un vecteur $\boldsymbol{u}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs de $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ s'il existe des scalaires $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + k_n\boldsymbol{v}_n.$$

Exemple 1 Soit $\mathcal{M}$, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices $M_{2\times 2}$. Soit $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$, un ensemble de deux vecteurs de $\mathcal{M}$, où $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

a) $3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}$.

En calculant, nous obtenons

$$3\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B} = 3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

b) La matrice $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -12 \end{bmatrix}$ est une combinaison linéaire des matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, car

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -12 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 5\boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{B}.$$

Généralisons la définition 5.3 (*voir page 256*) pour des vecteurs d'un espace vectoriel V.

DÉFINITION 5.10

Soit V, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, un ensemble de n vecteurs de V.

1) Les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ sont **linéairement indépendants** si et seulement si $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ est la seule solution de $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + k_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{O}$.
2) Les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ sont **linéairement dépendants** si et seulement s'il existe au moins un $k_i \neq 0$ tel que $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + k_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{O}$.

Le théorème 5.1 peut se généraliser comme suit pour un espace vectoriel V.

THÉORÈME 5.8

Soit V, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, un ensemble de n vecteurs de V.

Les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ sont linéairement dépendants si et seulement si au moins un des vecteurs de S peut être exprimé comme combinaison linéaire des $(n - 1)$ autres vecteurs de S.

Bases d'un espace vectoriel



René Descartes
(1596-1650)

IL Y A ENVIRON 375 ANS...

René Descartes, le soldat philosophe et mathématicien, a écrit *Géométrie* comme une annexe à son *Discours de la méthode*, publié en 1637, afin d'illustrer l'efficacité de sa méthode. C'est dans cette annexe que se trouvent les idées à la base de ce qui sera appelé, près de deux siècles plus tard, la géométrie analytique. Descartes savait intuitivement qu'il pouvait partir de deux points, par exemple (2, 5) et (4, 3), pour générer tous les points du plan, à la condition qu'un de ces points ne soit pas « multiple » de l'autre. Comme nous le verrons dans cette section, nous disons aujourd'hui que {(1, 0), (0, 1)} et {(2, 5), (4, 3)} sont chacun une base des points du plan. Mais au XIX^e siècle, lorsqu'on se demande si un ensemble dont les éléments sont difficiles à concevoir intuitivement (comme des matrices, des nombres complexes ou même des fonctions) constitue une base (c'est-à-dire un ensemble générateur), la réponse est moins évidente. La théorie des espaces vectoriels offre des moyens de répondre à cette question.

DÉFINITION 5.11

Soit V, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, un ensemble de n vecteurs de V. L'ensemble $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ des vecteurs est un ensemble de **générateurs** de V si tout vecteur $\boldsymbol{u}$ de V peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$.

DÉFINITION 5.12

Soit V, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, un ensemble de n vecteurs de V. L'ensemble $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ des vecteurs est une **base** de V si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

1) Les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ sont linéairement indépendants.
2) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ est un ensemble de générateurs de V.

Exemple 1 Soit $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$.

a) Déterminons si $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Étape 1 : Vérifions si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont linéairement indépendants.

Nous pouvons utiliser l'une ou l'autre des méthodes suivantes.

Méthode 1

Soit $k_1\vec{i} + k_2\vec{j} = \vec{O}$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$.

$$k_1(1, 0) + k_2(0, 1) = (0, 0)$$
$$(k_1, k_2) = (0, 0)$$

donc, $k_1 = 0$ et $k_2 = 0$.

Ainsi, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont linéairement indépendants. (définition 5.3)

Méthode 2

En calculant $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, nous obtenons

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Ainsi, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont linéairement indépendants. (théorème 5.1)

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont linéairement indépendants

Étape 2 : Vérifions si $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est un ensemble de générateurs de $\mathbb{R}^2$.

Il faut vérifier si tout vecteur $\vec{u} = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Soit $\vec{u} = k_1\vec{i} + k_2\vec{j}$ (où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$)

$(x, y) = k_1(1, 0) + k_2(0, 1)$

Il faut exprimer k_1 et k_2 en fonction de x et de y, si c'est possible.

$(x, y) = (k_1, 0) + (0, k_2)$

$(x, y) = (k_1, k_2)$

ainsi, $k_1 = x$ et $k_2 = y$.

Donc $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

$\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est un ensemble de générateurs de $\mathbb{R}^2$

Ainsi, tout vecteur $\vec{u} = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ peut être engendré par $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

D'où $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. (définition 5.12)

$\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est appelé base canonique de $\mathbb{R}^2$

La base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est appelée base canonique de $\mathbb{R}^2$.

b) Donnons quelques exemples de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ exprimés sous forme de combinaison linéaire des vecteurs de la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, en utilisant le résultat de l'étape 2.

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Donc, pour $\vec{u}_1 = (3, 7)$, nous avons $\vec{u}_1 = 3\vec{i} + 7\vec{j}$ (car $x = 3$ et $y = 7$)

et pour $\vec{u}_2 = (-4, 2)$, nous avons $\vec{u}_2 = -4\vec{i} + 2\vec{j}$. (car $x = -4$ et $y = 2$)

Remarque : De façon analogue, on peut démontrer que $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, où $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$, est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est appelé base canonique de $\mathbb{R}^3$

La base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est appelée base canonique de $\mathbb{R}^3$.

À moins d'avis contraire, les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ sont donnés respectivement en fonction de la base canonique $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ et $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exemple 2 Soit $\vec{u} = (1, 3)$ et $\vec{v} = (-2, 1)$.

a) Déterminons si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, est une base de $\mathbb{R}^2$.

Étape 1 : Vérifions si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.

Puisque $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.

(théorème 5.1)

Étape 2 : Vérifions si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est un ensemble de générateurs de $\mathbb{R}^2$.

Il faut vérifier si tout vecteur $\vec{w} = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soit $\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$ (où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$)

$(x, y) = k_1(1, 3) + k_2(-2, 1)$

$(x, y) = (k_1 - 2k_2, 3k_1 + k_2)$

Nous obtenons le système d'équations $\begin{cases} k_1 - 2k_2 = x \\ 3k_1 + k_2 = y \end{cases}$

Il faut exprimer k_1 et k_2 en fonction de x et de y, si c'est possible.

En utilisant la règle de Cramer, nous obtenons

Règle de Cramer

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} x & -2 \\ y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \left(\frac{x + 2y}{7}\right) \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 3 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \left(\frac{y - 3x}{7}\right)$$

donc $\vec{w} = \left(\frac{x + 2y}{7}\right)\vec{u} + \left(\frac{y - 3x}{7}\right)\vec{v}$

Ainsi, tout vecteur $\vec{w} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ peut être engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

D'où $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. (définition 5.12)

$\vec{w} = (4\vec{i} + 5\vec{j})$

b) Soit $\vec{w} = (4, 5)$, exprimé dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Exprimons $\vec{w}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, en utilisant le résultat de l'étape 2.

En remplaçant x par 4 et y par 5 dans $\vec{w} = \left(\frac{x + 2y}{7}\right)\vec{u} + \left(\frac{y - 3x}{7}\right)\vec{v}$, (voir a))

nous obtenons $\vec{w} = \left(\frac{4 + 2(5)}{7}\right)\vec{u} + \left(\frac{5 - 3(4)}{7}\right)\vec{v}$

$\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$

d'où $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$.

L'étudiant peut vérifier que $2\vec{u} - \vec{v} = (4, 5)$.

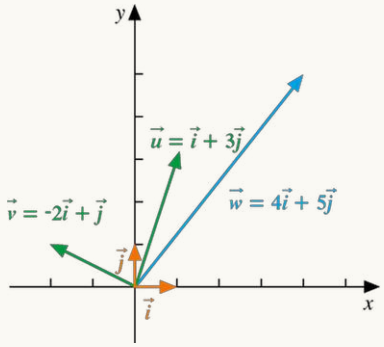
Ainsi, dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, $\vec{w} = (4, 5)$, c'est-à-dire $\vec{w} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$.

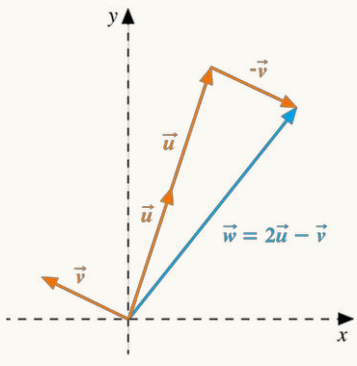
Dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, $\vec{w} = (2, -1)$, c'est-à-dire $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$.

c) Représentons

$\vec{u} = (1, 3)$, $\vec{v} = (-2, 1)$ et $\vec{w} = (4, 5)$ dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$;

$\vec{w} = (2, -1)$ dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.





Exemple 3 Soit $\vec{u} = (2, 1)$, $\vec{v} = (7, -2)$ et $\vec{w} = (-3, 4)$.

a) Déterminons si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Étape 1 : Vérifions si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

Les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^2$ sont linéairement dépendants. (théorème 5.3)

D'où $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

Remarque : Lorsque les vecteurs d'un ensemble de vecteurs d'un espace vectoriel V sont linéairement dépendants, nous pouvons conclure que l'ensemble de ces vecteurs n'est pas une base de V. Cependant, il est possible que ces vecteurs soient un ensemble de générateurs de V.

b) Déterminons si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est un ensemble de générateurs de $\mathbb{R}^2$.

Il faut vérifier si tout vecteur $\vec{t} = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Soit $\vec{t} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v} + k_3\vec{w}$ (où k_1, k_2 et $k_3 \in \mathbb{R}$)

$$(x, y) = k_1(2, 1) + k_2(7, -2) + k_3(-3, 4)$$

$$(x, y) = (2k_1 + 7k_2 - 3k_3, k_1 - 2k_2 + 4k_3)$$

Nous obtenons le système d'équations $\begin{cases} 2k_1 + 7k_2 - 3k_3 = x \\ k_1 - 2k_2 + 4k_3 = y \end{cases}$

Il faut exprimer k_1, k_2 et k_3 en fonction de x et de y, si c'est possible.

En résolvant ce système par la méthode de Gauss, nous obtenons

Méthode de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 7 & -3 & x \\ 1 & -2 & 4 & y \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 7 & -3 & x \\ 0 & -11 & 11 & 2y - x \end{array}\right] \qquad 2L_2 - L_1 \to L_2$$

Ce système admet une infinité de solutions.

En posant $k_3 = s$, où $s \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$k_2 = \left(\frac{x - 2y + 11s}{11}\right) \text{ et } k_1 = \left(\frac{2x + 7y - 22s}{11}\right).$$

Puisque $\vec{t} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v} + k_3\vec{w}$, nous avons

$$\vec{t} = \left(\frac{2x + 7y - 22s}{11}\right)\vec{u} + \left(\frac{x - 2y + 11s}{11}\right)\vec{v} + s\vec{w}, \text{ où } s \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, tout vecteur $\vec{t} = (x, y)$ peut être engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et il existe une infinité de combinaisons linéaires possibles.

D'où $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est un ensemble de générateurs de $\mathbb{R}^2$.

c) Exprimons un vecteur de $\mathbb{R}^2$, par exemple $\vec{t} = (3, -2)$, comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Puisque $\vec{t} = \left(\frac{2x + 7y - 22s}{11}\right)\vec{u} + \left(\frac{x - 2y + 11s}{11}\right)\vec{v} + s\vec{w}$, (voir b))

en remplaçant x par 3 et y par -2, nous obtenons

$$\vec{t} = \left(\frac{2(3) + 7(-2) - 22s}{11}\right)\vec{u} + \left(\frac{3 - 2(-2) + 11s}{11}\right)\vec{v} + s\vec{w}$$

$$= \left(\frac{-8 - 22s}{11}\right)\vec{u} + \left(\frac{7 + 11s}{11}\right)\vec{v} + s\vec{w}$$

En posant $s = 0$, nous avons

$$\vec{t} = \frac{-8}{11}\vec{u} + \frac{7}{11}\vec{v} + 0\vec{w}$$

En posant $s = 1$, nous avons

$$\vec{t} = \frac{-30}{11}\vec{u} + \frac{18}{11}\vec{v} + 1\vec{w}$$

Remarque : L'étudiant peut vérifier que les ensembles $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ et $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 4 Soit $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, où $\vec{u} = (4, -6)$ et $\vec{v} = (-10, 15)$.

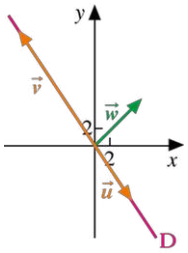
a) Déterminons si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Étape 1 : Vérifions si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.

Puisque $\begin{vmatrix} 4 & -10 \\ -6 & 15 \end{vmatrix} = 0$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants. (théorème 5.1)

D'où $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$. (définition 5.12)

En représentant les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ graphiquement, nous constatons qu'ils n'engendrent que les vecteurs situés sur la droite D comprenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



$\vec{w}$ n'est pas situé sur la droite D.

b) Déterminons si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est un ensemble de générateurs de $\mathbb{R}^2$.

Il faut vérifier si tout vecteur $\vec{w} = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soit $\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$ (où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$)

$$(x, y) = k_1(4, -6) + k_2(-10, 15)$$

$$(x, y) = (4k_1 - 10k_2, -6k_1 + 15k_2)$$

Nous obtenons le système d'équations $\begin{cases} 4k_1 - 10k_2 = x \\ -6k_1 + 15k_2 = y \end{cases}$

Il faut exprimer k_1 et k_2 en fonction de x et de y, si c'est possible.

En résolvant ce système par la méthode de Gauss, nous obtenons

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -10 & x \\ -6 & 15 & y \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -10 & x \\ 0 & 0 & 2y + 3x \end{array}\right] \qquad 2L_2 + 3L_1 \rightarrow L_2$$

Si $(3x + 2y) \neq 0$, alors le système n'a pas de solution.

Ainsi, les vecteurs $\vec{w} = (x, y)$ tels que $3x + 2y \neq 0$ ne sont pas engendrés par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Par exemple, $\vec{w} = (6, 6)$. (car $3(6) + 2(6) = 30 \neq 0$)

D'où $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ n'est pas un ensemble de générateurs de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 5 Soit $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ et $\vec{w} = (-1, 1, -1)$.

a) Déterminons si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Étape 1 : Vérifions si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

Puisque $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$,

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants. (théorème 5.1)

Étape 2 : Vérifions si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est un ensemble de générateurs de $\mathbb{R}^3$.

Il faut vérifier si tout vecteur $\vec{t} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Soit $\vec{t} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v} + k_3\vec{w}$ (où k_1, k_2 et $k_3 \in \mathbb{R}$)

$$(x, y, z) = k_1(1, 2, 3) + k_2(-1, 1, 2) + k_3(-1, 1, -1)$$

$$(x, y, z) = (k_1 - k_2 - k_3, 2k_1 + k_2 + k_3, 3k_1 + 2k_2 - k_3)$$

Nous obtenons le système d'équations $\begin{cases} k_1 - k_2 - k_3 = x \\ 2k_1 + k_2 + k_3 = y \\ 3k_1 + 2k_2 - k_3 = z \end{cases}$

Il faut exprimer k_1, k_2 et k_3 en fonction de x, de y et de z, si c'est possible.

Puisque le déterminant de la matrice des coefficients est différent de zéro (*voir a)*), le système possède une solution unique.

En résolvant ce système par la méthode de Cramer, nous obtenons

Règle de Cramer

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ y & 1 & 1 \\ z & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-9} \qquad k_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 2 & y & 1 \\ 3 & z & -1 \end{vmatrix}}{-9} \qquad k_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \end{vmatrix}}{-9}$$

$$k_1 = \frac{x + y}{3} \qquad k_2 = \frac{-5x - 2y + 3z}{9} \qquad k_3 = \frac{-x + 5y - 3z}{9}$$

donc $\vec{t} = \left(\frac{x + y}{3}\right)\vec{u} + \left(\frac{-5x - 2y + 3z}{9}\right)\vec{v} + \left(\frac{-x + 5y - 3z}{9}\right)\vec{w}$.

Ainsi, tout vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ peut être engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

D'où $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. (définition 5.12)

Dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$
$\vec{t} = (2, 4, -1)$, donc
$\vec{t} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$

b) Soit $\vec{t} = (2, 4, -1)$, exprimé dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Exprimons $\vec{t}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

$$\vec{t} = \left(\frac{x + y}{3}\right)\vec{u} + \left(\frac{-5x - 2y + 3z}{9}\right)\vec{v} + \left(\frac{-x + 5y - 3z}{9}\right)\vec{w} \quad \text{(voir a)}$$

En remplaçant x par 2, y par 4 et z par -1, nous obtenons

$$\vec{t} = \left(\frac{2 + 4}{3}\right)\vec{u} + \left(\frac{-10 - 8 - 3}{9}\right)\vec{v} + \left(\frac{-2 + 20 + 3}{9}\right)\vec{w}$$

Dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$
$\vec{t} = \left(2, \frac{-7}{3}, \frac{7}{3}\right)$, donc
$\vec{t} = 2\vec{u} - \frac{7}{3}\vec{v} + \frac{7}{3}\vec{w}$

d'où $\vec{t} = 2\vec{u} - \frac{7}{3}\vec{v} + \frac{7}{3}\vec{w}$, exprimé dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

L'étudiant peut vérifier que $2\vec{u} - \frac{7}{3}\vec{v} + \frac{7}{3}\vec{w} = (2, 4, -1)$.

Exemple 6 Soit $\vec{u} = (2, 1, -1)$ et $\vec{v} = (-1, 3, 2)$.

Déterminons si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Étape 1 : Vérifions si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.

Soit $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{O}$ (où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$)

$$k_1(2, 1, -1) + k_2(-1, 3, 2) = (0, 0, 0)$$

$$(2k_1 - k_2, k_1 + 3k_2, -k_1 + 2k_2) = (0, 0, 0)$$

Nous obtenons le système d'équations $\begin{cases} 2k_1 - k_2 = 0 \\ k_1 + 3k_2 = 0 \\ -k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases}$

En utilisant la méthode de Gauss, nous obtenons

Méthode de Gauss

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

donc $k_2 = 0$ et $k_1 = 0$.

Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants. (définition 5.3)

Étape 2 : Vérifions si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est un ensemble de générateurs de $\mathbb{R}^3$.

Il faut vérifier si tout vecteur $\vec{w} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soit $\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$ (où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$)

$$(x, y, z) = k_1(2, 1, -1) + k_2(-1, 3, 2)$$

$$(x, y, z) = (2k_1 - k_2, k_1 + 3k_2, -k_1 + 2k_2)$$

Nous obtenons le système d'équations $\begin{cases} 2k_1 - k_2 = x \\ k_1 + 3k_2 = y \\ -k_1 + 2k_2 = z \end{cases}$

Il faut exprimer k_1 et k_2 en fonction de x, de y et de z, si c'est possible.

En utilisant la méthode de Gauss, nous obtenons

Méthode de Gauss

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 1 & 3 & y \\ -1 & 2 & z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 0 & -7 & x - 2y \\ 0 & 3 & x + 2z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 0 & -7 & x - 2y \\ 0 & 0 & 10x - 6y + 14z \end{array}\right]$$

Système incompatible

Si $10x - 6y + 14z \neq 0$, alors le système n'a pas de solution.

Ainsi, les vecteurs $\vec{w} = (x, y, z)$ tels que $10x - 6y + 14z \neq 0$ ne sont pas engendrés par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Par exemple, $\vec{w} = (2, -3, 1)$. (car $10(2) - 6(-3) + 14(1) = 52 \neq 0$)

D'où $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

De l'exemple précédent, nous constatons qu'un ensemble contenant deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ n'est pas un ensemble de générateurs de $\mathbb{R}^3$, donc n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

De façon générale, un ensemble contenant m vecteurs de $\mathbb{R}^n$, où $m < n$, n'est pas un ensemble de générateurs de $\mathbb{R}^n$, donc n'est pas une base de $\mathbb{R}^n$.

Théorèmes sur les bases

THÉORÈME 5.9

Si l'ensemble ordonné des vecteurs $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ est une base de l'espace vectoriel V, alors tout vecteur $\boldsymbol{u} \in V$ s'exprime d'une et d'une seule façon comme combinaison linéaire des vecteurs de l'ensemble ordonné $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$.

Preuve

Puisque $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ est une base, alors $\boldsymbol{u}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$.

Preuve par contradiction

Soit $\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_3 + \ldots + k_n\boldsymbol{v}_n$, et

$\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + a_3\boldsymbol{v}_3 + \ldots + a_n\boldsymbol{v}_n$, une seconde combinaison linéaire de $\boldsymbol{u}$.

$\boldsymbol{O} = (k_1 - a_1)\boldsymbol{v}_1 + (k_2 - a_2)\boldsymbol{v}_2 + (k_3 - a_3)\boldsymbol{v}_3 + \ldots + (k_n - a_n)\boldsymbol{v}_n$ (en soustrayant membre à membre)

Puisque les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ sont linéairement indépendants, alors

$k_1 - a_1 = 0, \quad k_2 - a_2 = 0, \quad \ldots, \quad k_n - a_n = 0.$ (définition 5.3)

$k_1 = a_1, \quad k_2 = a_2, \quad \ldots, \quad k_n = a_n.$

D'où $\boldsymbol{u}$ s'exprime d'une et d'une seule façon comme combinaison linéaire des vecteurs de la base.

DÉFINITION 5.13

Soit l'ensemble ordonné de vecteurs $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, une base de l'espace vectoriel V, et $\boldsymbol{u} \in V$ tel que $\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_3 + \ldots + k_n\boldsymbol{v}_n$.

Les scalaires $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ sont appelés les **composantes** du vecteur $\boldsymbol{u}$ dans la base $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ et nous pouvons écrire $\boldsymbol{u} = (k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n)$.

Exemple 1 Soit $\vec{w} = (4, 5)$, un vecteur exprimé dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.
Déterminons les composantes de $\vec{w}$ dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, où $\vec{u} = (-1, -2)$ et $\vec{v} = (1, -1)$.

Soit $(4, 5) = k_3\vec{u} + k_4\vec{v}$

$(4, 5) = k_3(-1, -2) + k_4(1, -1)$

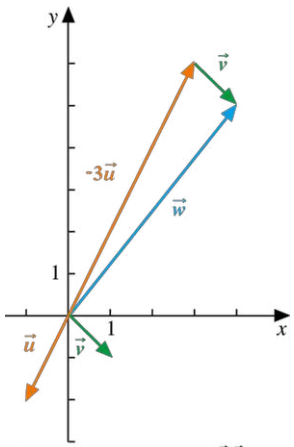
$(4, 5) = (-k_3 + k_4, -2k_3 - k_4)$

Ainsi, $\begin{cases} -k_3 + k_4 = 4 \\ -2k_3 - k_4 = 5 \end{cases}$

En résolvant ce système, nous obtenons $k_3 = -3$ et $k_4 = 1$.

Donc, dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, $\vec{w} = -3\vec{u} + 1\vec{v}$

d'où les composantes de $\vec{w}$ sont -3 et 1.



$\vec{w} = (4, 5)$ dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$
$\vec{w} = (-3, 1)$ dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n\}$ est appelé base canonique de $\mathbb{R}^n$

À moins d'avis contraire, les n composantes des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont toujours données en fonction des vecteurs de la base canonique $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n\}$, où

$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$,

$\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$,

$\vdots$

$\vec{e}_{n-1} = (0, 0, 0, \ldots, 1, 0)$ et

$\vec{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$.

De plus, tout vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

- $\vec{u} = k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + k_3\vec{e}_3 + \ldots + k_n\vec{e}_n$ (combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_i$) ;
- $\vec{u} = (k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n)$ (en fonction de ses composantes).

D'où $k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + k_3\vec{e}_3 + \ldots + k_n\vec{e}_n = (k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n)$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^5$, nous pouvons écrire $3\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4 = (3, -5, 1, -1, 0)$.

THÉORÈME 5.10

Si $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ est une base de n vecteurs d'un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$, alors toute autre base de V contient aussi n vecteurs.

5

Remarque : Soit $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, une base de n vecteurs d'un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$, et $U = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$, un ensemble de m vecteurs de V, où $m \neq n$.

Dans le cas où $m < n$, les vecteurs de U ne sont pas un ensemble de générateurs de V.

Dans le cas où $m > n$, les vecteurs de U sont linéairement dépendants.

Par conséquent, U n'est pas une base de V.

Exemple 2 Soit $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, une base de $\mathbb{R}^3$, et $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$, quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

a) $A = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$, car l'ensemble A contient deux vecteurs.

b) $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$, car l'ensemble B contient quatre vecteurs.

DÉFINITION 5.14

Soit V, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. La **dimension** de V, notée dim V, est définie de la façon suivante.

dim V $= n$, si une base de V contient n vecteurs.

Exemple 3 Déterminons la dimension de $\mathbb{R}^2$ et la dimension de $\mathbb{R}^3$.

$\vec{i} = (1, 0) ; \vec{j} = (0, 1)$

Puisque $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (*voir l'exemple 1 à la page 275*), $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

$\vec{i} = (1, 0, 0) ; \vec{j} = (0, 1, 0) ; \vec{k} = (0, 0, 1)$

Puisque $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (*voir la remarque à la page 276*), $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Remarque : Un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$ est de dimension finie lorsqu'une base de V contient un nombre fini de vecteurs. Autrement, V est de dimension infinie.

Par exemple, l'espace vectoriel de l'ensemble des suites de la forme $\{a, 0, a, 0, \ldots \mid a \in \mathbb{R}\}$ (*voir le problème de synthèse n° 20 f), à la page 296*) est de dimension infinie.

THÉORÈME 5.11

Soit $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}\}$, un ensemble de vecteurs d'un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$.

Si $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ et $\boldsymbol{v}_n$ sont des vecteurs linéairement indépendants, et si le vecteur $\boldsymbol{w}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ et $\boldsymbol{v}_n$, alors $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ et $\boldsymbol{w}$ sont des vecteurs linéairement indépendants.

Preuve

Puisque les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ sont linéairement indépendants et que $\boldsymbol{w} \neq k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + k_n\boldsymbol{v}_n$, aucun vecteur de l'ensemble B ne peut être exprimé comme une combinaison linéaire des autres vecteurs de B.

D'où $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ et $\boldsymbol{w}$ sont des vecteurs linéairement indépendants.

THÉORÈME 5.12

Soit V, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Si $\dim V = n$, alors tout ensemble $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ contenant exactement n vecteurs linéairement indépendants de V est une base de V.

Preuve

Puisque les vecteurs $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ et $\boldsymbol{v}_n$ sont linéairement indépendants, il suffit de démontrer qu'ils engendrent tout vecteur $\boldsymbol{w}$ de V.

Preuve par contradiction

Supposons qu'il existe un vecteur $\boldsymbol{w} \in V$ qui n'est pas engendré par $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, c'est-à-dire que $\boldsymbol{w}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ et $\boldsymbol{v}_n$.

Par le théorème 5.11, nous obtenons $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}\}$ est un ensemble contenant $(n + 1)$ vecteurs linéairement indépendants.

Or, il y a contradiction ; puisque $\dim V = n$, par la remarque qui suit le théorème 5.10, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}\}$ est un ensemble de vecteurs linéairement dépendants, car $(n + 1) > n$.

Donc, tout vecteur $\boldsymbol{w}$ de V est une combinaison linéaire des vecteurs de B.

D'où B est une base de V.

Exemple 4

a) Soit $\vec{u}_1 = (4, 3)$ et $\vec{u}_2 = (-5, 1)$.

Déterminons si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Puisque dim $\mathbb{R}^2 = 2$ et que nous avons deux vecteurs, il suffit de démontrer que $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont linéairement indépendants. (théorème 5.12)

Puisque $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 19 \neq 0$, les vecteurs sont linéairement indépendants. (théorème 5.1)

D'où $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Soit $\vec{v}_1 = (-1, 3, 2)$, $\vec{v}_2 = (3, 0, 4)$ et $\vec{v}_3 = (1, 3, 2)$.

Déterminons si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Puisque dim $\mathbb{R}^3 = 3$ et que nous avons trois vecteurs, il suffit de démontrer que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont linéairement indépendants. (théorème 5.12)

Puisque $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$, les vecteurs sont linéairement indépendants. (théorème 5.1)

D'où $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

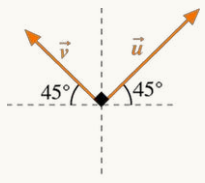
Bases orthogonales et bases orthonormées

DÉFINITION 5.15

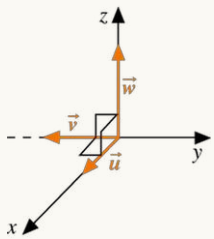
1) Une base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ est dite **base orthogonale** de $\mathbb{R}^2$ si les vecteurs de la base sont perpendiculaires entre eux.
2) Une base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est dite **base orthogonale** de $\mathbb{R}^3$ si tous les vecteurs de la base sont perpendiculaires deux à deux.

Exemple 1

a) La base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$,
où $\vec{u} = (3, 3)$ et $\vec{v} = (-2, 2)$,
est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$, car $\vec{u} \perp \vec{v}$.



b) La base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$,
où $\vec{u} = (3, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, -4, 0)$ et $\vec{w} = (0, 0, 5)$,
est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$,
car $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{w}$ et $\vec{v} \perp \vec{w}$.



DÉFINITION 5.16

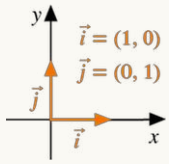
Une base de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ est dite **base orthonormée** si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1) la base est orthogonale ;
2) tous les vecteurs de la base sont unitaires.

Exemple 2

a) La base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, car

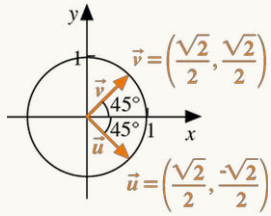
1) la base est orthogonale ; $(\vec{i} \perp \vec{j})$
2) $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.



b) La base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, où $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, car

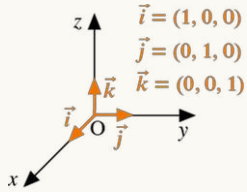
1) la base est orthogonale ; $(\vec{u} \perp \vec{v})$
2) $\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$ et

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1.$



c) La base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, car

1) la base est orthogonale ; $(\vec{i} \perp \vec{j},\ \vec{i} \perp \vec{k}$ et $\vec{j} \perp \vec{k})$
2) $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.



De façon générale,

1) si $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$, alors les quatre ensembles de la forme

$\left\{\frac{\pm 1}{\|\vec{u_1}\|}\vec{u_1}, \frac{\pm 1}{\|\vec{u_2}\|}\vec{u_2}\right\}$, c'est-à-dire $\left\{\frac{1}{\|\vec{u_1}\|}\vec{u_1}, \frac{1}{\|\vec{u_2}\|}\vec{u_2}\right\}$, $\left\{\frac{-1}{\|\vec{u_1}\|}\vec{u_1}, \frac{-1}{\|\vec{u_2}\|}\vec{u_2}\right\}$,

$\left\{\frac{1}{\|\vec{u_1}\|}\vec{u_1}, \frac{-1}{\|\vec{u_2}\|}\vec{u_2}\right\}$ et $\left\{\frac{-1}{\|\vec{u_1}\|}\vec{u_1}, \frac{1}{\|\vec{u_2}\|}\vec{u_2}\right\}$, sont des bases orthonormées de $\mathbb{R}^2$,

2) si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, alors les huit ensembles de la forme

$\left\{\frac{\pm 1}{\|\vec{v_1}\|}\vec{v_1}, \frac{\pm 1}{\|\vec{v_2}\|}\vec{v_2}, \frac{\pm 1}{\|\vec{v_3}\|}\vec{v_3}\right\}$ sont des bases orthonormées de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3 Soit $\vec{u} = (3, -5)$.

a) Déterminons une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$ contenant $\vec{u}$.

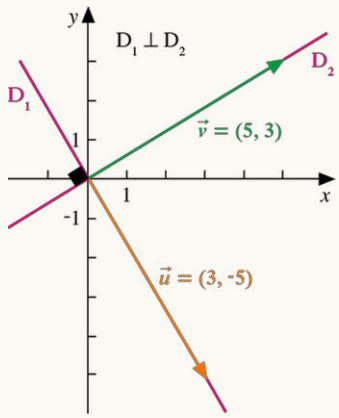
La pente de la droite D_1, supportant $\vec{u}$, est $m_1 = \frac{-5}{3}$.

Soit m_2, la pente d'une droite D_2, telle que $D_2 \perp D_1$.

Puisque $m_1(m_2) = -1$, alors $m_2 = \frac{3}{5}$.

Ainsi, $\vec{v} = (5, 3)$, un vecteur supporté par D_2, est perpendiculaire à $\vec{u}$.

D'où $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, où $\vec{u} = (3, -5)$ et $\vec{v} = (5, 3)$, est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$.



De façon générale, tout ensemble de la forme $\{k_1\vec{u}, k_2\vec{v}\}$, où $k_1 \neq 0$ et $k_2 \neq 0$, est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminons une base orthonormée à partir de la base orthogonale trouvée en a).

Puisque $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$ et que $\|\vec{v}\| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$, nous avons que $\left\{\frac{1}{\sqrt{34}}(3, -5), \frac{1}{\sqrt{34}}(5, 3)\right\}$,

c'est-à-dire $\left\{\left(\frac{3\sqrt{34}}{34}, \frac{-5\sqrt{34}}{34}\right), \left(\frac{5\sqrt{34}}{34}, \frac{3\sqrt{34}}{34}\right)\right\}$,

est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

Remarque : $\left\{\left(\frac{-3\sqrt{34}}{34}, \frac{5\sqrt{34}}{34}\right), \left(\frac{-5\sqrt{34}}{34}, \frac{-3\sqrt{34}}{34}\right)\right\}$,

$\left\{\left(\frac{3\sqrt{34}}{34}, \frac{-5\sqrt{34}}{34}\right), \left(\frac{-5\sqrt{34}}{34}, \frac{-3\sqrt{34}}{34}\right)\right\}$ et

$\left\{\left(\frac{-3\sqrt{34}}{34}, \frac{5\sqrt{34}}{34}\right), \left(\frac{5\sqrt{34}}{34}, \frac{3\sqrt{34}}{34}\right)\right\}$ sont également des bases orthonormées de $\mathbb{R}^2$.

EXERCICES 5.4

1. Soit $\vec{u} = (1, 2)$ et $\vec{v} = (2, 1)$.

a) À l'aide de la définition 5.12, déterminer si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Exprimer, si c'est possible, $\vec{w} = (3, -6)$, $\vec{t} = (-2, 3)$, $\vec{r} = (5, 10)$ et $\vec{O} = (0, 0)$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

c) Représenter graphiquement $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{s} = 3\vec{u} - 4\vec{v}$.

2. Soit $\vec{u} = (6, -3)$ et $\vec{v} = (-8, 4)$.

a) À l'aide de la définition 5.12, déterminer si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Exprimer, si c'est possible, $\vec{w} = (3, 2)$ et $\vec{t} = (10, -5)$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

c) Représenter graphiquement $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

d) Expliquer pourquoi $\vec{w}$ ne peut être une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tandis que $\vec{t}$ peut être une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3. Soit $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{j} = (0, 1)$ et $\vec{v} = (1, 1)$.

a) À l'aide de la définition 5.12, déterminer si $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer si $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{v}\}$ est un ensemble de générateurs de $\mathbb{R}^2$.

c) Exprimer $\vec{w} = (4, -5)$ comme combinaison linéaire de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{v}$.

d) Déterminer les sous-ensembles de $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{v}\}$ qui sont des bases de $\mathbb{R}^2$.

e) Exprimer $\vec{t} = (-3, 7)$ comme combinaison linéaire de

i) $\vec{i}$ et $\vec{j}$;

ii) $\vec{i}$ et $\vec{v}$;

iii) $\vec{j}$ et $\vec{v}$.

4. Soit $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

a) À l'aide de la définition 5.12, déterminer si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Exprimer $\vec{w} = (1, -2, 3)$, $\vec{i} = (1, 0, 0)$ et $\vec{O} = (0, 0, 0)$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{k}$.

5. Soit $\vec{u} = (1, -2, -3)$, $\vec{v} = (2, 1, 2)$ et $\vec{w} = (5, 0, 1)$.

a) À l'aide de la définition 5.12, déterminer si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Exprimer, si c'est possible, les vecteurs suivants comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

i) $\vec{t} = (11, -7, -9)$

ii) $\vec{r} = (1, 1, 1)$

c) Expliquer pourquoi $\vec{t}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tandis que $\vec{r}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

6. À l'aide des théorèmes sur les bases, déterminer si chaque ensemble de vecteurs suivant est une base de l'espace vectoriel donné.

a) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, où $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (3, 4)$ et $\vec{w} = (4, 5)$, pour $\mathbb{R}^2$.

b) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, où $\vec{u} = (1, 2, 4)$ et $\vec{v} = (-1, 4, -2)$, pour $\mathbb{R}^3$.

c) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, où $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, pour $\mathbb{R}^2$.

d) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, où $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{v} = -4\vec{j} - 2\vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j}$, pour $\mathbb{R}^3$.

e) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$, pour $\mathbb{R}^4$.

7. À partir des vecteurs de l'ensemble S ci-dessous, énumérer, si c'est possible, les sous-ensembles de S qui sont des bases de l'espace vectoriel donné.

a) $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, où $\vec{u} = (2, -1)$, $\vec{v} = (0, 1)$ et $\vec{w} = (-8, 4)$, pour $\mathbb{R}^2$.

b) $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\}$, où $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (4, 6)$, $\vec{w} = (6, 4)$ et $\vec{t} = (8, 12)$, pour $\mathbb{R}^2$.

c) $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\}$, où $\vec{u} = (0, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$, $\vec{w} = (1, 1, 1)$ et $\vec{t} = (1, 1, -1)$, pour $\mathbb{R}^3$.

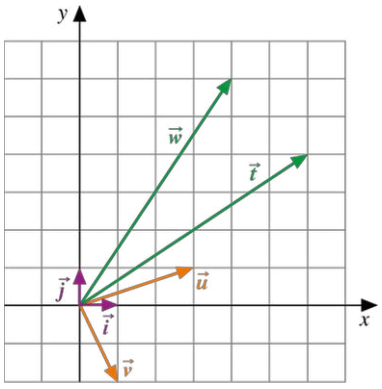
d) $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\}$, où $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 0, 1)$, $\vec{w} = (1, 0, 1)$ et $\vec{t} = (0, 1, 1)$, pour $\mathbb{R}^3$.

8. Soit $\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$, où $\vec{u}$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Représenter ce vecteur en fonction des vecteurs de la base

a) $\{\vec{i}, \vec{j}\}$;

b) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, où $\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

9. Soit la représentation graphique suivante.



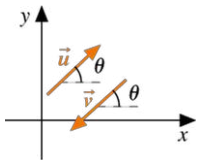
Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{t}$ dans la base

a) $\{\vec{i}, \vec{j}\}$;

b) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

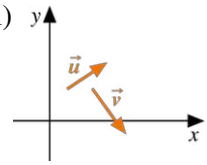
10. a) Déterminer si les vecteurs suivants forment une base de l'espace vectoriel donné. Si tel n'est pas le cas, donner une raison.

i)



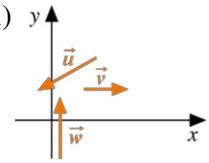
pour $\mathbb{R}^2$

ii)



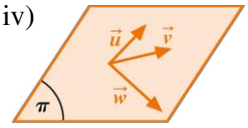
pour $\mathbb{R}^2$

iii)



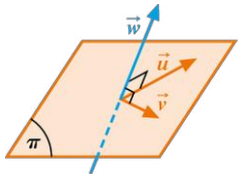
pour $\mathbb{R}^2$

iv)



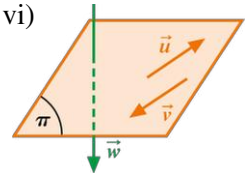
pour $\mathbb{R}^3$

v)



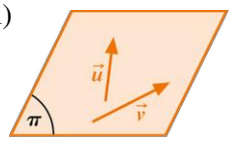
pour $\mathbb{R}^3$

vi)



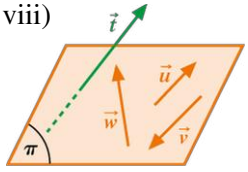
pour $\mathbb{R}^3$

vii)



pour $\mathbb{R}^3$

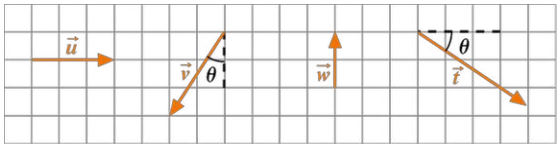
viii)



pour $\mathbb{R}^3$

b) Parmi les représentations précédentes, déterminer celles dont les vecteurs forment un ensemble de générateurs pour l'espace vectoriel donné.

11. Soit les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$.



Répondre par vrai (V) ou faux (F) et justifier les réponses.

a) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$.

b) $\{\vec{u}, \vec{w}\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$.

c) $\{\vec{v}, \vec{t}\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$.

d) $\left\{\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}, \frac{1}{\|\vec{t}\|}\vec{t}\right\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

e) $\left\{\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}, \frac{1}{\|\vec{t}\|}\vec{t}\right\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

f) $\left\{\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}, \frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w}\right\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$.

12. Soit $\vec{u_1} = (1, 1)$, $\vec{u_2} = (-2, -2)$, $\vec{u_3} = (-3, 4)$, $\vec{u_4} = (-3, -4)$, $\vec{u_5} = (4, 3)$ et $\vec{u_6} = (-1, 1)$.

a) Déterminer les ensembles $\{\vec{u_m}, \vec{u_n}\}$ qui sont des bases orthogonales de $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer des bases orthonormées à partir des bases orthogonales trouvées en a).

13. Répondre par vrai (V) ou faux (F) et justifier les réponses.

a) Les vecteurs d'une base sont linéairement dépendants.

b) Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ forment une base si et seulement s'ils sont linéairement indépendants.

c) Toute base orthogonale est orthonormée.

d) Toutes les bases de $\mathbb{R}^2$ sont orthogonales.

e) Une base de $\mathbb{R}^3$ contient exactement trois vecteurs.

f) Si dim V = 5, une base de V peut contenir six vecteurs.

g) Les composantes d'un vecteur dépendent des vecteurs de la base.

h) Des vecteurs qui engendrent V forment une base de V.

i) Toutes les bases d'un espace vectoriel V de dimension finie contiennent le même nombre de vecteurs.

j) Quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ peuvent être linéairement indépendants.

k) Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ linéairement indépendants forment une base de $\mathbb{R}^3$.

l) Des vecteurs linéairement indépendants forment nécessairement une base.

Révision des concepts

Combinaison linéaire

$\vec{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n\}$ si _____

Vecteurs linéairement indépendants

Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ sont linéairement indépendants si et seulement si _____

Vecteurs linéairement dépendants

Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ sont linéairement dépendants si et seulement si _____

Vecteurs colinéaires

Soit $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$ et $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$, deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$.

Les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont colinéaires si _____

Vecteurs coplanaires

Soit $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ et $\vec{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$, trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$.

Les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont coplanaires si _____

Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

Propriétés d'un espace vectoriel

Soit V, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni des opérations $\oplus$ et $*$.

Pour tout $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w} \in$ V et pour tout r et $s \in \mathbb{R}$, nous avons

Propriété 1 $(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \in$ _____

Propriété 2 $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} =$ _____

Propriété 3 $\boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}) =$ _____

Propriété 4 $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{O} =$ _____

Propriété 5 $\boldsymbol{u} \oplus (-\boldsymbol{u}) =$ _____

Propriété 6 $r * \boldsymbol{u} \in$ _____

Propriété 7 $(r + s) * \boldsymbol{u} =$ _____

Propriété 8 $r * (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) =$ _____

Propriété 9 $r * (s * \boldsymbol{u}) =$ _____

Propriété 10 $1 * \boldsymbol{u} =$ _____

Bases d'un espace vectoriel

L'ensemble $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ des vecteurs est une base de l'espace vectoriel V si

1) _____
2) _____

Base orthogonale

Une base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ est

1) orthogonale si _____
2) orthonormée si _____

Une base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ est

1) orthogonale si _____
2) orthonormée si _____

Théorèmes sur les bases

Page 282

Sous-espaces vectoriels

Soit V, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et W, un sous-ensemble non vide de V. Si W est muni des mêmes opérations que V, alors W est un sous-espace vectoriel de V si et seulement si, pour tout $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v} \in$ W et pour tout $r \in \mathbb{R}$, nous avons

i) _____
ii) _____

Exercices récapitulatifs

Administration | Biologie | Chimie | Géométrie | Physique | Sciences humaines | Outil technologique

Les réponses aux exercices récapitulatifs et aux problèmes de synthèse, à l'exception de ceux notés en **rouge**, sont fournies à la fin du manuel.

1. Compléter les énoncés suivants.

a) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base d'un espace vectoriel V sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ _____

b) $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \Leftrightarrow$ _____

c) Si $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ est la seule solution de $k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3 + k_4\vec{v}_4 = \vec{O}$, alors les vecteurs _____

d) Si $\vec{w} = 2\vec{u} + 5\vec{v}$, alors les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement _____

e) Si $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0$, alors les vecteurs $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$ sont linéairement _____

f) Les vecteurs $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ et $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ sont coplanaires $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ _____

g) Une base est dite orthonormée si _____

h) $(n + 1)$ vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n sont linéairement _____

i) Une base d'un espace vectoriel de dimension n contient _____

j) Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{O}, \ldots, \vec{v}_n$ sont linéairement _____

2. Exprimer, si c'est possible, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ suivants comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_i$ donnés.

a) $\vec{v}_1 = (1, 0)$ et $\vec{v}_2 = (0, 1)$, où
   i) $\vec{u} = (3, 4)$ ii) $\vec{w} = (x, y)$

b) $\vec{v}_1 = (-4, 6)$ et $\vec{v}_2 = (-6, 9)$ où
   i) $\vec{u} = (3, 4)$ ii) $\vec{w} = (50, -75)$

c) $\vec{v}_1 = (2, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (-2, 0, 1)$ et $\vec{v}_3 = (0, 1, 1)$, où
   i) $\vec{u} = (-6, -2, 1)$ ii) $\vec{w} = (1, -2, 2)$

d) $\vec{v}_1 = (1, -1, 3)$ et $\vec{v}_2 = (-1, 2, -2)$, où
   i) $\vec{u} = (5, -7, 13)$ ii) $\vec{w} = (1, 1, 1)$

e) $\vec{v}_1 = (2, -1, 4)$, $\vec{v}_2 = (1, 4, -5)$ et $\vec{v}_3 = (4, -3, 5)$, où
   i) $\vec{u} = \left(\frac{-28}{15}, \frac{7}{10}, \frac{-1}{3}\right)$ ii) $\vec{w} = (x, y, z)$

f) $\vec{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{v}_2 = (-2, -4, -2)$, $\vec{v}_3 = (0, 2, 3)$, $\vec{v}_4 = (2, 0, -3)$ et $\vec{v}_5 = (-3, 8, 16)$
   i) $\vec{u} = (2, 6, 8)$ ii) $\vec{w} = (1, 6, 0)$

3. Déterminer si les vecteurs suivants sont linéairement indépendants ou linéairement dépendants. S'ils sont linéairement dépendants, exprimer un des vecteurs comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

a) $\vec{v}_1 = (2, -1)$ et $\vec{v}_2 = (-6, 3)$

b) $\vec{v}_1 = (-4, 5)$ et $\vec{v}_2 = (8, -4)$

c) $\vec{v}_1 = (-4, 5)$, $\vec{v}_2 = (5, -4)$ et $\vec{v}_3 = (1, 1)$

d) $\vec{v}_1 = (4, -6, 20)$ et $\vec{v}_2 = (-10, 15, -50)$

e) $\vec{v}_1 = (2, 4, 14)$, $\vec{v}_2 = (-1, 4, 7)$ et $\vec{v}_3 = (7, -3, 15)$

f) $\vec{v}_1 = (1, 2, 7)$, $\vec{v}_2 = (-1, 4, 5)$ et $\vec{v}_3 = (7, -3, 15)$

g) $\vec{v}_1 = (3, 2, 5)$, $\vec{v}_2 = (4, 7, -2)$ et $\vec{v}_3 = (0, 0, 0)$

h) $\vec{v}_1 = (4, -1, 2)$, $\vec{v}_2 = (2, 3, 0)$, $\vec{v}_3 = (-1, 2, -1)$ et $\vec{v}_4 = (5, 3, -2)$

i) $\vec{v}_1 = (1, 0, 2, 3)$, $\vec{v}_2 = (4, 0, 5, 6)$ et $\vec{v}_3 = (7, 0, 8, 9)$

j) $\vec{v}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{v}_2 = (5, 6, 7, 8)$, $\vec{v}_3 = (9, 10, 11, 12)$ et $\vec{v}_4 = (13, 14, 15, 16)$

4. Soit les points A(-4, 0, 1), B(-10, -1, 2), C(10, 3, -1), D(0, 4, -2) et E(-16, -2, 3).

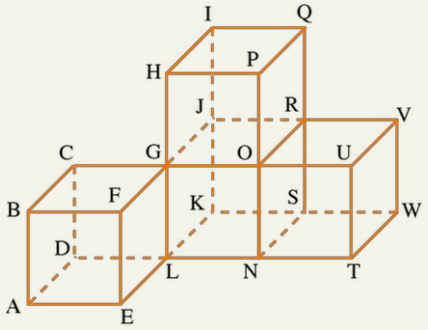
a) Déterminer si les points suivants sont situés sur une même droite.
   i) B, C et D ii) A, B et E

b) Déterminer si les points suivants sont situés dans un même plan.
   i) A, B, C et E ii) B, C, D et E

5. a) Soit A, B, C et D, quatre points de l'espace cartésien, M, le point milieu du segment de droite $\overline{AB}$, et N, le point milieu du segment de droite $\overline{CD}$. Exprimer $\overrightarrow{MN}$ comme combinaison linéaire de
   i) $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$; ii) $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$;
   iii) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

b) Déterminer si les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont linéairement dépendants ou linéairement indépendants.

6. Soit la figure suivante, formée de quatre cubes.



a) Exprimer, si c'est possible, chacun des vecteurs suivants comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

i) $\overrightarrow{GW}$, $\overrightarrow{IR}$ et $\overrightarrow{SA}$ ii) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{SQ}$

iii) $\overrightarrow{CQ}$, $\overrightarrow{TD}$, $\overrightarrow{FJ}$ et $\overrightarrow{SV}$ iv) $\overrightarrow{LQ}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{NW}$ et $\overrightarrow{HN}$

v) $\overrightarrow{NU}$, $\overrightarrow{KS}$ et $\overrightarrow{FJ}$ vi) $\overrightarrow{AV}$, $\overrightarrow{TD}$, $\overrightarrow{GQ}$ et $\overrightarrow{RO}$

b) Déterminer et justifier si les vecteurs des ensembles suivants
- sont linéairement indépendants ;
- engendrent une droite de $\mathbb{R}^3$, un plan de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^3$;
- forment une base de $\mathbb{R}^3$.

i) $\{\overrightarrow{CU}, \overrightarrow{JR}\}$ ii) $\{\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{UT}\}$

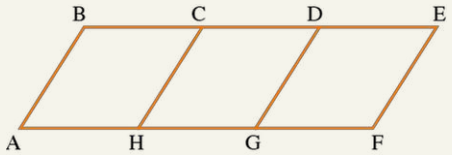
iii) $\{\overrightarrow{EI}, \overrightarrow{VT}, \overrightarrow{JR}\}$ iv) $\{\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{JU}, \overrightarrow{AA}\}$

v) $\{\overrightarrow{NS}, \overrightarrow{KS}, \overrightarrow{QS}\}$ vi) $\{\overrightarrow{FJ}, \overrightarrow{LW}, \overrightarrow{EA}\}$

vii) $\{\overrightarrow{NI}, \overrightarrow{OV}, \overrightarrow{JT}, \overrightarrow{AO}\}$ viii) $\{\overrightarrow{UV}, \overrightarrow{RG}, \overrightarrow{EF}\}$

7. Soit OBC, un triangle où $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Les points P et R sont tels que $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\vec{b}$ et $\overrightarrow{BR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Exprimer $\overrightarrow{PR}$ comme combinaison linéaire de $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

8. Soit la figure suivante composée de trois parallélogrammes identiques.



Exprimer

a) $\overrightarrow{AE}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$;

b) $\overrightarrow{GE}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{AE}$;

c) $\overrightarrow{EF}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{AD}$;

d) $\overrightarrow{FB}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{FC}$.

9. Déterminer si les ensembles suivants, munis des opérations usuelles, sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Dans le cas où un ensemble n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, donner une propriété qui n'est pas satisfaite.

a) $V = \{(a, a + 1) \in \mathbb{R}^2\}$

b) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 0\}$

c) $V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid abc = 0\}$

d) L'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices $M_{3\times 2}$.

e) L'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices scalaires $M_{3\times 3}$.

f) L'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices.

g) L'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices $M_{n\times n}$ triangulaires supérieures.

h) $V = \{(a, ar, ar^2) \mid a \in \mathbb{R}$ et r constant$\}$

i) $V = \{(a, ar, ar^2) \mid a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}\}$

j) $P = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c$ et $d \in \mathbb{R}$ et $p(1) = 0\}$

k) $P = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c$ et $d \in \mathbb{Z}\}$

10. Déterminer si les ensembles suivants, munis des opérations données, sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Dans le cas où un ensemble n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, donner une propriété qui n'est pas satisfaite.

a) $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
Addition : $(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$
Multiplication : $r * (a, b) = (ra, rb)$

b) $V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$
Addition : $(a, b, c) \oplus (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f)$
Multiplication : $r * (a, b, c) = (ra, b, rc)$

c) $V = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$
Addition : $a \oplus b = ab$
Multiplication : $r * a = a^r$

d) $V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$
Addition : $(a, b, c) \oplus (d, e, f) = (a + d, b + e, 0)$
Multiplication : $r * (a, b, c) = (ra, rb, 0)$

11. Soit V, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni des opérations usuelles, et W, un sous-ensemble non vide de V, muni des mêmes opérations. Déterminer si W est un sous-espace vectoriel de V dans les cas suivants.

a) $V = \mathbb{R}^2$; $W = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid ab \geq 0\}$

b) $V = \mathbb{R}^2$; $W = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b = 2a\}$

c) $V = \mathbb{R}^2$; $W = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b = 2a + 1\}$

d) $V = \{M_{2\times 2}\}$; $W = \{A_{2\times 2} \in V \mid \det A_{2\times 2} = 0\}$

e) $V = \{M_{n\times n}\}$; $W = \{A_{n\times n} \in V \mid A_{n\times n}$ est une matrice diagonale$\}$

f) $V = \mathbb{R}^6$;
$W = \{(a_1, a_2, \ldots, a_6) \in \mathbb{R}^6 \mid a_2 = a_4 = a_6 = 0\}$

g) $V = \mathbb{R}^5$; $W = \left\{(a_1, a_2, \ldots, a_5) \in \mathbb{R}^5 \middle| \sum_{i=1}^{5} a_i > 0\right\}$

h) $V = \mathbb{R}^2$; $W = \{(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 | \theta \in [0, 2\pi]\}$

i) $V = \{ax^2 + bx + c | a, b \text{ et } c \in \mathbb{R}\}$;
$W = \{ax^2 + bx + c | a, b \text{ et } c \in \mathbb{Q}\}$

12. Soit V, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni des opérations usuelles, et W, un ensemble non vide tel que $W \subseteq V$, muni des mêmes opérations.

a) Démontrer que W est un sous-espace vectoriel de V si et seulement si, pour tout $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v} \in W$ et pour tout r et $s \in \mathbb{R}$, nous avons $(r * \boldsymbol{u} \oplus s * \boldsymbol{v}) \in W$.

b) Utiliser la proposition énoncée en a) pour vérifier si W est un sous-espace vectoriel de V.

i) $V = \mathbb{R}^3$;
$W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | b = 3a \text{ et } c = -a\}$

ii) $V = \mathbb{R}^2$; $W = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | b = |a|\}$

13. Déterminer si chaque ensemble suivant est une base de l'espace vectoriel donné. Justifier.

a) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, où $\vec{u} = (2, 6)$ et $\vec{v} = (6, -2)$, pour $\mathbb{R}^2$

b) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, où $\vec{u} = (8, -12)$ et $\vec{v} = (10, -15)$, pour $\mathbb{R}^2$

c) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, où $\vec{u} = \left(\frac{5}{13}, \frac{-12}{13}\right)$ et $\vec{v} = \left(\frac{-12}{13}, \frac{-5}{13}\right)$, pour $\mathbb{R}^2$

d) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, où $\vec{u} = (-1, 0)$, $\vec{v} = (0, 4)$ et $\vec{w} = (5, 3)$, pour $\mathbb{R}^2$

e) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, où $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $\vec{v} = (-4, 5, 1)$, pour $\mathbb{R}^3$

f) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, où $\vec{u} = (1, -3, 7)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ et $\vec{w} = (6, -6, 16)$, pour $\mathbb{R}^3$

g) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}\}$, où $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$, $\vec{v} = \left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}, 0\right)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$, pour $\mathbb{R}^3$

h) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, où $\vec{u} = (1, 2, 5)$, $\vec{v} = (4, 0, 2)$ et $\vec{w} = (-6, 4, 8)$, pour $\mathbb{R}^3$

i) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\}$, où $\vec{u} = (2, 4, -2)$, $\vec{v} = (1, -6, 7)$, $\vec{w} = (1, 0, 2)$ et $\vec{t} = (5, -2, 9)$, pour $\mathbb{R}^3$

14. Soit $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$, où $\vec{v_1} = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{v_2} = (0, 1, 1, 1)$, $\vec{v_3} = (0, 0, 1, 1)$ et $\vec{v_4} = (0, 0, 0, 1)$.

a) Déterminer si les vecteurs $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ et $\vec{v_4}$ forment une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Exprimer $\vec{u} = (x, y, z, w)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ et $\vec{v_4}$.

c) Exprimer $\vec{w} = (1, -2, 3, -4)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ et $\vec{v_4}$.

15. Soit $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}, \vec{r}\}$, où $\vec{u} = (2, -3, 5)$, $\vec{v} = (8, -12, 20)$, $\vec{w} = (1, 0, -2)$, $\vec{t} = (1, -9, 25)$ et $\vec{r} = (7, 2, 0)$. Déterminer un sous-ensemble de S qui est une base de $\mathbb{R}^3$.

16. Soit les points A(1, 2), B(4, -2), C(2, -1) et D(6, 2).

a) Démontrer que $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$.

b) Utiliser des vecteurs parallèles à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{CD}$ pour former une base $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ orthonormée de $\mathbb{R}^2$. Exprimer la réponse à l'aide des composantes des vecteurs.

17. Répondre par vrai (V) ou faux (F) et justifier les réponses.

a) Si $\vec{w} = k_1\vec{v_1} + k_2\vec{v_2}$, alors $\{\vec{w}, \vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ peut être une base.

b) Toute base orthonormée est orthogonale.

c) Trois vecteurs colinéaires non nuls de $\mathbb{R}^2$ sont linéairement dépendants.

d) Trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ ils sont linéairement dépendants.

e) Deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ ils sont linéairement dépendants.

f) Les vecteurs d'un ensemble contenant le vecteur $\vec{O}$ sont linéairement dépendants.

g) Deux vecteurs non nuls sont linéairement indépendants $\Leftrightarrow$ ils sont parallèles.

h) Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont linéairement dépendants $\Leftrightarrow$ $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base du plan.

i) Trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants $\Leftrightarrow$ ils sont dans un même plan lorsqu'on fait coïncider leur origine.

j) Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement indépendants $\Leftrightarrow$ $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base de l'espace.

18. Soit $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, une base de $\mathbb{R}^3$. Répondre par vrai (V) ou faux (F) et justifier les réponses.

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.

b) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont perpendiculaires deux à deux.

c) $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont linéairement dépendants, $\forall\, \vec{t} \in \mathbb{R}^3$.

d) $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

e) $\left\{\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}, \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}, \frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w}\right\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

f) $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ est une autre base de $\mathbb{R}^3$.

g) Si $\vec{t}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, alors $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$.

19. Soit $V = \mathbb{R}^n$, un espace vectoriel, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants, et où $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont également linéairement indépendants. Répondre par vrai (V) ou faux (F) et justifier les réponses.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$

a) sont linéairement indépendants si $n \leq 3$;

b) sont linéairement indépendants si $n > 3$;

c) peuvent être linéairement indépendants si $n \leq 3$;

d) peuvent être linéairement indépendants si $n > 3$.

Problèmes de synthèse

1. Déterminer si les vecteurs suivants engendrent une droite de $\mathbb{R}^2$, le plan cartésien $\mathbb{R}^2$, une droite de $\mathbb{R}^3$, un plan de $\mathbb{R}^3$ ou l'espace cartésien $\mathbb{R}^3$.

a) $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$

b) $\vec{u} = (-6, 4)$ et $\vec{v} = (15, -10)$

c) $\vec{u} = (1, 2)$ et $\vec{v} = (2, 1)$

d) $\vec{u} = (1, 2, -1)$ et $\vec{v} = (2, -4, 5)$

e) $\vec{u} = (0, 4, 5)$, $\vec{v} = (-1, 2, 3)$ et $\vec{w} = (4, -1, 2)$

f) $\vec{u} = (6, -18, 12)$, $\vec{v} = (-3, 9, -6)$ et $\vec{w} = (2, -6, 4)$

g) $\vec{u} = (4, 6, -2)$, $\vec{v} = (3, -15, 9)$, $\vec{w} = (-2, 10, -6)$ et $\vec{t} = (-10, -15, 5)$

h) $\vec{i} = (1, 0, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1, 0)$

2. Déterminer le nombre minimal de vecteurs nécessaires pour engendrer

a) le plan cartésien $\mathbb{R}^2$; b) une droite de $\mathbb{R}^2$;

c) une droite de $\mathbb{R}^3$; d) un plan de $\mathbb{R}^3$;

e) l'espace cartésien $\mathbb{R}^3$.

3. Soit $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, un vecteur non nul, où a, b et $c \in \mathbb{R}$. Déterminer $\vec{w}$ en spécifiant les contraintes sur a, b et c si

a) $\vec{w}$ est parallèle à l'axe des x ;

b) $\vec{w}$ est parallèle à l'axe des z ;

c) $\vec{w}$ est parallèle au plan XOY ;

d) $\vec{w}$ est parallèle au plan YOZ ;

e) $\vec{w}$ est perpendiculaire au plan XOZ ;

f) $\vec{w}$ est perpendiculaire à l'axe des y.

4. a) Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, linéairement indépendants. Déterminer si les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{t}$ suivants sont linéairement dépendants ou linéairement indépendants.

i) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{t} = \vec{u} - \vec{v}$

ii) $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{t} = \vec{u} + 5\vec{v}$

iii) $\vec{w} = 6\vec{u} - 2\vec{v}$ et $\vec{t} = -9\vec{u} + 3\vec{v}$

b) Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, des vecteurs linéairement indépendants, et $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$, où a, b et $c \in \mathbb{R}$. Déterminer les contraintes sur a, b et c qui nous assurent que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$ sont linéairement indépendants.

5. Soit $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$ et $\vec{t}_3$, trois vecteurs linéairement indépendants et les vecteurs

$\vec{u} = \vec{t}_1 - 5\vec{t}_2 + \vec{t}_3$ $\quad$ $\vec{v} = \vec{t}_1 + 2\vec{t}_2 + 3\vec{t}_3$

$\vec{w} = 3\vec{t}_1 + \vec{t}_2 + 4\vec{t}_3$ $\quad$ $\vec{r} = \vec{t}_1 - 12\vec{t}_2 - \vec{t}_3$

a) Exprimer, si c'est possible,

i) $\vec{r}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$;

ii) $\vec{w}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{r}$;

iii) $\vec{u}$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{r}$.

b) Déterminer si les vecteurs suivants sont linéairement indépendants.

i) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ $\quad$ ii) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{r}$

6. Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que

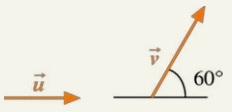
$\|\vec{u}\| = 6$, $\theta_{(\vec{u})} = 60°$, sens N.-E.,

$\|\vec{v}\| = 9$, $\theta_{(\vec{v})} = 45°$, sens N.-E., et

$\|\vec{w}\| = 2$, $\theta_{(\vec{w})} = 30°$, sens N.-E.

Exprimer $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{w}$.

7. Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-contre, tels que $\|\vec{u}\| = 25$ et $\|\vec{v}\| = 35$.



a) Représenter graphiquement $\vec{w}$, où $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.

b) Calculer $\|\vec{w}\|$, et déterminer la direction et le sens de $\vec{w}$.

c) Soit $\vec{t}$, un vecteur tel que $\|\vec{t}\| = 10\sqrt{39}$, dont la direction est de 104° et le sens N.-O. Déterminer algébriquement k_1 et k_2 si $\vec{t} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$.

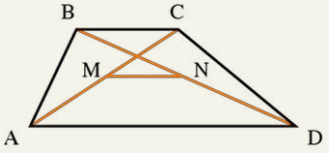
8. Soit le parallélogramme ABCD ci-dessous, où $2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, $4\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BC}$ et $3\overrightarrow{RC} = \overrightarrow{DR}$.



Déterminer la valeur de k, où $k \in \mathbb{R}$, si

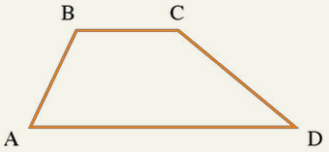
a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC}$.

9. Soit M et N, les points milieux des diagonales du trapèze ABCD suivant.



Exprimer $\overrightarrow{MN}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$.

10. Soit le trapèze ABCD ci-dessous.



M_1 est le point milieu de $\overline{AB}$; M_2 est le point milieu de $\overline{CD}$; M_3 est le point milieu de $\overline{AM_1}$; M_4 est le point milieu de $\overline{DM_2}$; M_5 est le point milieu de $\overline{M_1B}$; M_6 est le point milieu de $\overline{M_2C}$; M_7 est le point milieu de $\overline{M_1M_3}$; et M_8 est le point milieu de $\overline{M_2M_4}$. Exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$, le vecteur

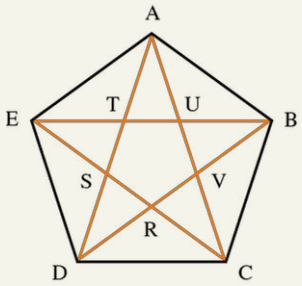
a) $\overrightarrow{M_3M_4}$; **b)** $\overrightarrow{M_5M_6}$; **c)** $\overrightarrow{M_7M_8}$.

11. Soit le triangle équilatéral ABC, où M est le point milieu du segment de droite $\overline{BC}$. À partir de M, nous abaissons une perpendiculaire au segment de droite $\overline{AB}$. Soit H, le point d'intersection de la perpendiculaire et du segment de droite $\overline{AB}$. Déterminer une valeur de k_1 et de k_2 telle que $k_1\overrightarrow{AB} + k_2\overrightarrow{BH} = \vec{O}$.

12. Soit le pentagone régulier ABCDE, et M, le point de rencontre des segments de droite joignant chaque sommet au milieu du côté opposé. Effectuer la somme suivante.

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}$

13. Soit le pentagone régulier ABCDE.

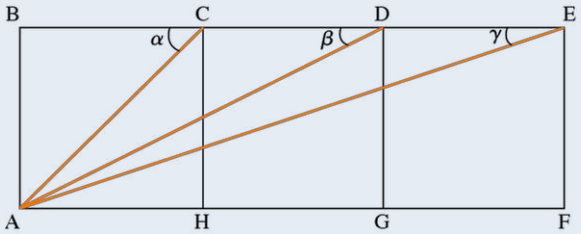


Déterminer

a) k_1, k_2 et k_3 si $\overrightarrow{ST} = k_1\overrightarrow{DC} + k_2\overrightarrow{CB} + k_3\overrightarrow{BA}$;

b) k_4 et k_5 si $\overrightarrow{ST} = k_4\overrightarrow{DE} + k_5\overrightarrow{EA}$.

14. Soit les trois carrés juxtaposés ci-dessous.



a) Exprimer $\overrightarrow{AE}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Déterminer la relation entre α, β et γ.

15. Déterminer si les ensembles suivants, munis des opérations usuelles, sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

a) L'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices $M_{3\times3}$ telles que $M_{3\times3}$ sont des matrices singulières.

b) L'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices $M_{2\times2}$ telles que $M_{2\times2}$ sont des matrices antisymétriques.

c) L'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices $M_{n\times n}$ telles que $M_{n\times n}$ sont des matrices inversibles.

d) L'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices $M_{3\times3}$ telles que $M_{3\times3}$ sont des matrices symétriques.

16. Soit les matrices

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{I}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer si $\{\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3, \boldsymbol{M}_4\}$ est une base pour l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{2\times2}$.

b) Exprimer comme combinaison linéaire de $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$, $\boldsymbol{M}_3$ et $\boldsymbol{M}_4$ les matrices

i) A; ii) $O_{2\times2}$; iii) $I_{2\times2}$.

c) Expliquer pourquoi les matrices de $\{\boldsymbol{I}_{2\times 2}, \boldsymbol{M}_2, \boldsymbol{M}_3\}$ ne sont pas des éléments générateurs de l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

17. La base $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$, où tous les éléments de chaque matrice sont 0, à l'exception d'un élément qui est 1, est appelée la base canonique de $\mathcal{M}_{2\times 2}$. Déterminer, si c'est possible, la base canonique et la dimension des espaces vectoriels suivants.

a) $\mathrm{W} = \{\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}_{2\times 3}\}$

b) $\mathrm{W} = \left\{\begin{bmatrix}0&b\\a&0\end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}\right\}$

c) $\mathrm{W} = \left\{\begin{bmatrix}0&a\\a&0\end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$

d) $\mathrm{W} = \{\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}_{2\times 2} \mid \boldsymbol{M} \text{ est triangulaire supérieure}\}$

e) $\mathrm{W} = \{\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}_{3\times 3} \mid \boldsymbol{M} \text{ est diagonale}\}$

f) $\mathrm{W} = \{\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}_{3\times 3} \mid \boldsymbol{M} \text{ est diagonale et } m_{22} = 0\}$

g) $\mathrm{W} = \{\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}_{3\times 3} \mid m_{ij} = 0 \text{ si } (i+j) \text{ est paire}\}$

h) $\mathrm{W} = \{\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}_{2\times 3} \mid m_{ij} = 0 \text{ si } i \geq j\}$

i) $\mathrm{W} = \{\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}_{3\times 2} \mid m_{ij} = 0 \text{ si } i = j\}$

j) $\mathrm{W} = \left\{\begin{bmatrix}a&0&0&0\\0&2a&0&0\\0&0&3a&0\\0&0&0&4a\end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$

k) $\mathrm{W} = \left\{\begin{bmatrix}a+b&b\\-b&a-b\end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}\right\}$

18. Soit $\mathrm{P}_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b \text{ et } c \in \mathbb{R}\}$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 muni des opérations usuelles.

a) Soit $\mathrm{A} = \{x^2, x, 1\}$.

i) Démontrer que A est une base de P_2. Cette base est appelée base canonique de P_2.

ii) Déterminer dim P_2.

b) Soit $\mathrm{B} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$, où $\boldsymbol{u} = 2x + 3$, $\boldsymbol{v} = 3x^2 - 1$ et $\boldsymbol{w} = 5 - x$.

i) Déterminer si $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ est une base de P_2.

ii) Exprimer, si c'est possible, le polynôme $6x^2 + 37$ comme combinaison linéaire de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$.

c) Soit $\mathrm{C} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$, où $\boldsymbol{u} = (x+1)^2$, $\boldsymbol{v} = (x-1)^2$ et $\boldsymbol{w} = (x+5)(5x+1)$.

i) Déterminer si $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ est une base de P_2.

ii) Exprimer, si c'est possible, le polynôme $x^2 + x + 2$ comme combinaison linéaire de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$.

iii) Exprimer, si c'est possible, le polynôme $3x^2 + 10x + 3$ comme combinaison linéaire de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$.

iv) Déterminer la forme générale des vecteurs engendrés par $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$.

19. Soit $\mathrm{P}_3 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c \text{ et } d \in \mathbb{R}\}$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 muni des opérations usuelles.

Soit $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$, où $\boldsymbol{u} = x^3 - 2x^2 - 5x - 3$ et $\boldsymbol{v} = 3x^3 - 5x^2 - 4x - 9$.

a) Exprimer, si c'est possible, les polynômes suivants comme combinaison linéaire de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$.

i) $p_1(x) = 2x^3 - 2x^2 + 12x - 6$

ii) $p_2(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7x + 8$

b) Déterminer une base de P_3.

20. Soit V, un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni des opérations usuelles, et W, un sous-ensemble de V, muni des mêmes opérations. Déterminer si W est un sous-espace vectoriel de V dans les cas suivants.

a) $\mathrm{V} = \{M_{2\times 2}\}$; $\mathrm{W} = \{A_{2\times 2} \in \mathrm{V} \mid A = A^{-1}\}$

b) V est l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$; $\mathrm{W} = \{f \in \mathrm{V} \mid f(a) = f(b)\}$

c) V est l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$; $\mathrm{W} = \{f \in \mathrm{V} \mid f(a) = 0\}$

d) V est l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$; $\mathrm{W} = \{f \in \mathrm{V} \mid f(a) = 1\}$

e) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^\infty$; $\mathrm{W} = \{(2, 0, 2, 0, \ldots)\}$

f) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^\infty$; $\mathrm{W} = \{(a, 0, a, 0, \ldots) \mid a \in \mathbb{R}\}$

g) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^\infty$; W est l'ensemble des suites géométriques, c'est-à-dire que $\mathrm{W} = \{(a, ar, ar^2, \ldots) \mid a \text{ et } r \in \mathbb{R}\}$

h) $\mathrm{V} = \mathbb{R}^\infty$; W est l'ensemble des suites arithmétiques, c'est-à-dire que $\mathrm{W} = \{(a, a + r, a + 2r, \ldots) \mid a \text{ et } r \in \mathbb{R}\}$

21. Soit le système d'équations suivant.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

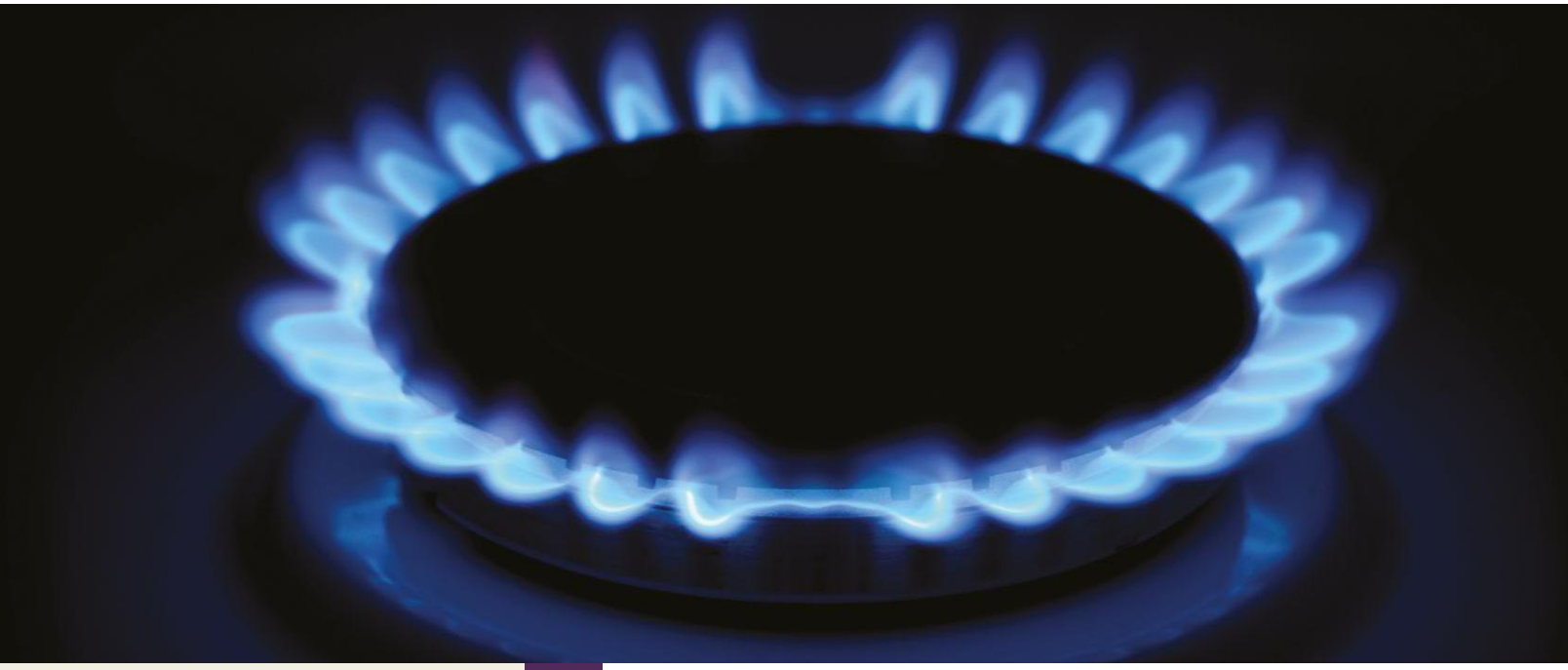
L'ensemble-solution de ce système est un sous-espace W de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer une base B de W.

b) Déterminer la dimension de W.

c) Décrire le sous-espace W.

6 Produits de vecteurs



Perspective historique 298
Exercices préliminaires 299
6.1 Produit scalaire de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ 300
6.2 Produit vectoriel de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ 320
6.3 Produit mixte de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ 332
Révision des concepts 339
Exercices récapitulatifs 340
Problèmes de synthèse 343

Dans le chapitre 4, nous avons défini les opérations addition de vecteurs et soustraction de vecteurs, ainsi que la multiplication d'un vecteur par un scalaire. Dans le présent chapitre, nous définirons trois nouvelles opérations sur les vecteurs, soit le produit scalaire, qui est défini pour des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, le produit vectoriel et le produit mixte, qui sont définis uniquement pour des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le produit scalaire permet, entre autres, de déterminer le travail effectué sur un objet et de calculer l'angle formé par deux vecteurs. Le produit vectoriel permet de déterminer des vecteurs orthogonaux à deux vecteurs non parallèles donnés et de calculer des aires de polygones. Le produit mixte permet de calculer le volume de parallélépipèdes et de tétraèdres.

En particulier, l'étudiant pourra résoudre le problème suivant (qui se trouve au n° 7 des problèmes de synthèse, à la page 344).

Nous pouvons construire une représentation géométrique de la molécule de méthane CH_4 (C pour carbone, H pour hydrogène) en plaçant C au centre d'un tétraèdre régulier dont les sommets sont définis par les quatre atomes d'hydrogène. Si les quatre atomes d'hydrogène sont situés aux points O(0, 0, 0), P(1, 1, 0), Q(1, 0, 1) et R(0, 1, 1),

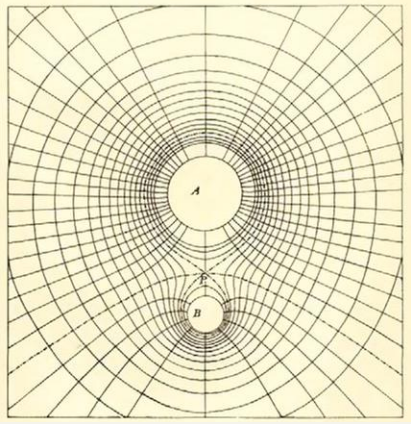
a) déterminer la position de C ;

b) vérifier que le tétraèdre est régulier ;

[…]

De deux approches, algébrique et géométrique, à une vision unifiée, celle des vecteurs

En 1827, avant même d'avoir terminé ses études au Trinity College de Dublin, le mathématicien irlandais **William Rowan Hamilton** (1805-1865) est nommé astronome royal d'Irlande, poste qu'il conservera jusqu'à sa mort. Quelques années auparavant, un premier amour déçu l'avait affecté au point de le rendre malade et de le conduire au bord du suicide. Grâce à la poésie, il reprit goût à la vie. Par la suite, dans les moments difficiles, il se réfugie dans la poésie. Toutefois, à ses yeux, le langage mathématique est aussi artistique que celui de la poésie. C'est dans cet esprit qu'il travaille à généraliser les nombres complexes.



Une illustration tirée de *Treatise on Electricity and Magnetism* de James Clerk Maxwell

Puisqu'il est possible de multiplier deux nombres complexes ensemble, en généralisant aux quaternions, Hamilton en vient tout naturellement à définir la multiplication de deux quaternions (1843). Cette opération conserve toutes les propriétés de la multiplication des nombres, à l'exception de la commutativité. Par exemple, jk est différent de kj. En fait, on a $kj = -jk = i$. De plus, on a $kj = -jk = -i$, $ki = -ik = j$ et $ji = -ij = -k$. On trouve ici la règle de la main droite dont il sera question à la page 326, règle que vous avez sans doute déjà vue en physique. En partant de ces règles et de celle donnant les carrés de i, j et k, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, on obtient, dans le cas de la multiplication de deux quaternions n'ayant pas de partie scalaire :

$$(ai + bj + ck)(xi + yj + sk) =$$
$$-(ax + by + cz) + (bz - cy)i + (cx - az)j + (ay - bx)k \quad (1)$$

La partie scalaire du produit, le premier terme du membre de droite, correspond au signe près à ce qu'on appelle maintenant le « produit scalaire ». La partie vectorielle, la somme des trois derniers termes du membre de droite, correspond à ce qu'on appelle maintenant le « produit vectoriel ». L'approche purement algébrique de Hamilton l'a amené à définir, pour la première fois, ces deux produits, qui font l'objet du présent chapitre.

Hamilton exploite par la suite toutes les ressources de sa riche personnalité pour promouvoir l'utilisation des quaternions en physique. Au début, ses efforts sont récompensés.

Disciple de Hamilton, Peter Guthrie Tait (1831-1901) publie en 1867 un ouvrage intitulé *Elementary Treatise on Quaternions* dans lequel il utilise la notation $\alpha\beta = S\alpha\beta + V\alpha\beta$, où α et β sont des quaternions ; $S\alpha\beta$ correspond à la partie scalaire, et $V\alpha\beta$, à la partie vectorielle du produit $\alpha\beta$. Tait démontre alors que, dans les conditions de l'équation (1), c'est-à-dire lorsque α et β n'ont pas de partie scalaire, $S\alpha\beta = -T\alpha T\beta \cos\theta$, où θ est l'angle formé par α et β, que $T\alpha$ et $T\beta$ sont les longueurs respectives de α et β, et que $V\alpha\beta = T\alpha T\beta \sin\theta\eta$, où η est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs α et β dont la direction est déterminée par la règle de la main droite. Le lien entre la définition algébrique des produits de quaternions vectoriels et une interprétation géométrique est ainsi clairement établi. En dimension trois, le produit scalaire peut être vu comme lié à la projection d'un vecteur sur un autre, et le produit vectoriel, comme la mesure d'un volume. La vision géométrique de Grassmann et l'approche algébrique de Hamilton se trouvent de la sorte unifiées (*voir le chapitre 4*).

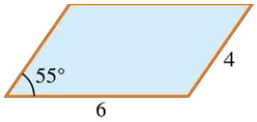
Dans un ouvrage intitulé *Treatise on Electricity and Magnetism* publié en 1873, le physicien britannique James Clerk Maxwell (1831-1879) utilise les quaternions pour établir, pour la première fois, la théorie des champs magnétiques et électromagnétiques. Toutefois, dans les faits, ce traité montre que, pour représenter ces nouveaux éléments physiques, il suffit, dans les calculs, de traiter indépendamment les parties scalaires et les parties vectorielles des quaternions.

À partir des années 1880, le physicien américain Josiah Willard Gibbs (1839-1903), professeur de physique mathématique à l'Université Yale, et le physicien britannique Oliver Heaviside (1850-1925) réécrivent sous une forme purement vectorielle les résultats de Hamilton, de Tait et de Maxwell. Le calcul vectoriel se libère alors entièrement des quaternions et revêt une forme semblable à celle qu'on retrouvera dans le présent chapitre. Une vive controverse s'engage alors entre les tenants des quaternions et ceux du calcul purement vectoriel. Cette controverse prendra fin au début du xx^{e} siècle avec la publication, en 1901, de l'ouvrage intitulé *Vector Analysis* de Gibbs et Wilson.

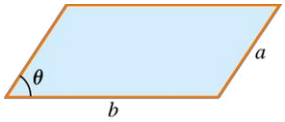
Exercices préliminaires

1. Calculer l'aire des parallélogrammes suivants.

a)

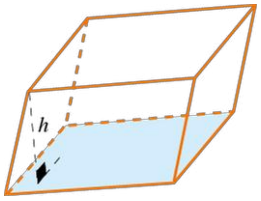


b)

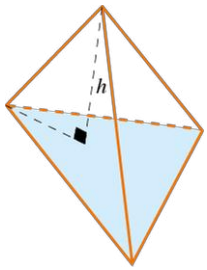


2. Exprimer le volume V des solides suivants en fonction de l'aire A de la base et de la hauteur h du solide.

a) Parallélépipède

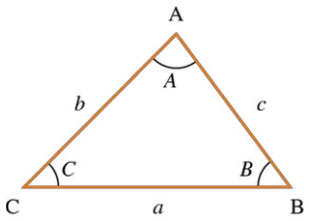


b) Tétraèdre (polyèdre composé de quatre faces triangulaires)



3. Soit le triangle ABC suivant.

Compléter :



a) Loi des cosinus

$a^2 =$ ____

$b^2 =$ ____

$c^2 =$ ____

b) Loi des sinus

$\dfrac{\sin A}{a} =$ ____

4. Compléter :

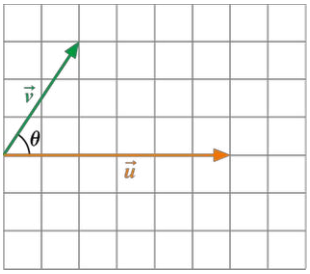
a) $\cos(A - B) =$ ____

b) $\cos(180° - \theta) =$ ____

c) $\sin(A - B) =$ ____

d) $\sin(\pi - \theta) =$ ____

5. Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants.



a) Représenter $\vec{u} + \vec{v}$.

b) Représenter $\vec{u} - \vec{v}$.

c) Exprimer $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ en fonction de $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

6. Soit $\vec{u} = (-1, 2, 4)$, $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$, où A(1, 0, -3) et B(-3, 2, 1). Déterminer

a) $\|\vec{u}\|$;

b) $\|3\vec{u} - 2\vec{v}\|$;

c) deux vecteurs unitaires parallèles à $\vec{w}$.

7. Calculer les déterminants suivants.

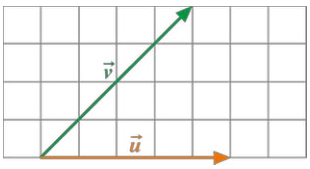
a) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

8. Soit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants.



Représenter :

a) $\vec{u}_{\vec{v}}$ b) $\vec{v}_{\vec{u}}$

9. Déterminer l'équation du cercle de centre

a) C(3, -4) et de rayon 2 ;

b) $C(x_1, y_1)$ et de rayon r.

10. Déterminer l'équation de la droite, sous la forme $y = ax + b$, passant par

a) les points P(1, -4) et Q(-3, 2) ;

b) le point R(5, -3) et perpendiculaire à la droite passant par R(5, -3) et C(2, 1).

6.1 Produit scalaire de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra utiliser le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ pour résoudre certains problèmes.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de donner la définition du produit scalaire de deux vecteurs ;
- d'effectuer le produit scalaire de deux vecteurs ;
- de donner l'expression algébrique du produit scalaire de deux vecteurs ;
- de déterminer l'angle formé par deux vecteurs ;
- de déterminer si deux vecteurs sont orthogonaux ;
- d'énoncer les propriétés du produit scalaire de deux vecteurs ;
- de démontrer certaines propriétés du produit scalaire de deux vecteurs ;
- d'exprimer la projection d'un vecteur sur un autre vecteur en fonction de produits scalaires de vecteurs ;
- de déterminer la projection orthogonale d'un vecteur sur un autre vecteur ;
- d'utiliser les propriétés du produit scalaire de deux vecteurs pour résoudre des problèmes de géométrie ;
- d'utiliser les propriétés du produit scalaire de deux vecteurs pour résoudre certains problèmes de physique ;
- d'utiliser les propriétés du produit scalaire de deux vecteurs pour résoudre certains problèmes d'économie.

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, alors

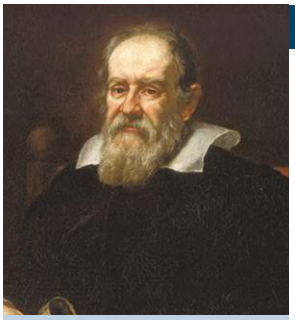
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos \theta$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Dans ce chapitre, les composantes de $\mathbb{R}^2$ sont données en fonction des vecteurs de la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, et les composantes de $\mathbb{R}^3$ sont données en fonction des vecteurs de la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

6

Définition du produit scalaire



Galileo Galilei, dit Galilée (1564-1642)

IL Y A ENVIRON 375 ANS...

« Et pourtant elle tourne », aurait dit **Galilée** en 1633, au terme de son procès où on le condamne à vivre en résidence surveillée. Dans son *Dialogue sur les deux grands systèmes du Monde* publié l'année précédente, Galilée présente plusieurs arguments tendant à montrer que la Terre tourne. En fait, ce qu'il a vraiment montré, c'est que, si la Terre tourne, on ne peut pas s'en rendre compte. Le cœur de son argumentation repose sur le fait que le mouvement vertical d'un corps est indépendant de son mouvement horizontal. La voie est ainsi ouverte à l'étude du mouvement par le parallélogramme de forces. Le produit scalaire, dont bien sûr Galilée n'avait aucune idée, est en fait un moyen de connaître jusqu'à quel point deux forces (vecteurs) sont indépendantes l'une de l'autre.

DÉFINITION 6.1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est défini par

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos \theta$, si $\vec{u} \neq \vec{O}$ et $\vec{v} \neq \vec{O}$,
où θ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ramenés à une même origine ($0 \leq \theta \leq \pi$ rad) ou ($0° \leq \theta \leq 180°$) ;

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{O}$ ou $\vec{v} = \vec{O}$.

Remarque : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos \theta$ est l'expression géométrique du produit scalaire.

Il est important de constater que le produit scalaire de deux vecteurs de même dimension est un scalaire et non un vecteur, d'où le nom de produit scalaire.

Exemple 1

a) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 7$ et $\theta = 60°$.

Calculons $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos \theta \qquad \text{(définition 6.1)}$$
$$= (4)(7) \cos 60°$$
$$= 14 \qquad \left(\text{car } \cos 60° = \frac{1}{2}\right)$$

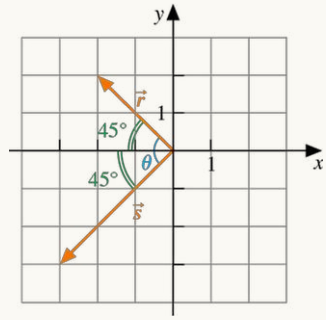
b) Soit $\vec{r} = (-2, 2)$ et $\vec{s} = (-3, -3)$.

Représentons les deux vecteurs et calculons $\vec{r} \cdot \vec{s}$.

$\|\vec{r}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

$\|\vec{s}\| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$

$$\vec{r} \cdot \vec{s} = \|\vec{r}\| \, \|\vec{s}\| \cos \theta \qquad \text{(définition 6.1)}$$
$$= \sqrt{8}\sqrt{18} \cos 90°$$
$$= 0 \qquad \text{(car } \cos 90° = 0\text{)}$$



$\theta = 45° + 45° = 90°$

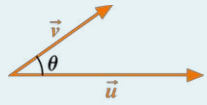
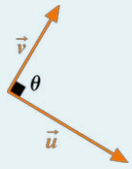
6

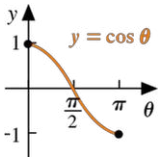
Exercices de compréhension 6.1

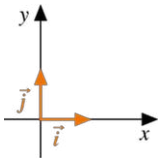
1. Soit $\vec{w} = (\sqrt{3}, 1)$ et $\vec{t} = (-2, -2)$.

Représenter les vecteurs et calculer $\vec{w} \cdot \vec{t}$.

La valeur du produit scalaire peut être positive, nulle ou négative, selon la valeur de l'angle θ, où $\theta \in [0°, 180°]$.

Angle θ	Produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos \theta$	Représentation graphique
$0° \leq \theta < 90°$	$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ (car $\cos \theta > 0$)	
$\theta = 90°$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (car $\cos \theta = 0$)	
$90° < \theta \leq 180°$	$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ (car $\cos \theta < 0$)	





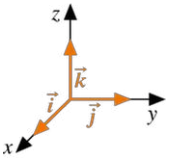
Exemple 2 Soit $\vec{i}$ et $\vec{j} \in \mathbb{R}^2$. Calculons les produits scalaires suivants.

a) $\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\| \, \|\vec{i}\| \cos 0° = (1)(1)(1) = 1$

b) $\vec{j} \cdot \vec{j} = \|\vec{j}\| \, \|\vec{j}\| \cos 0° = (1)(1)(1) = 1$

c) $\vec{i} \cdot \vec{j} = \|\vec{i}\| \, \|\vec{j}\| \cos 90° = (1)(1)(0) = 0$

d) $\vec{j} \cdot \vec{i} = \|\vec{j}\| \, \|\vec{i}\| \cos 90° = (1)(1)(0) = 0$



$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$

$\vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

$\vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$

Exemple 3 Soit $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$. Calculons les produits scalaires suivants.

a) $\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\| \, \|\vec{i}\| \cos 0° = (1)(1)(1) = 1$; de même, $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ et $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

b) $\vec{i} \cdot \vec{j} = \|\vec{i}\| \, \|\vec{j}\| \cos 90° = (1)(1)(0) = 0$; de même, $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ et $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

c) $(3\vec{i}) \cdot (-4\vec{i}) = \|3\vec{i}\| \, \|-4\vec{i}\| \cos 180°$

$= |3| \, \|\vec{i}\| \, |-4| \, \|\vec{i}\| \cos 180°$ $\quad (\|k\vec{v}\| = |k| \, \|\vec{v}\|)$

$= 3(1)\,4(1)\,(-1)$

$= -12$

d) $(-5\vec{k}) \cdot (2\vec{i}) = \|-5\vec{k}\| \, \|2\vec{i}\| \cos 90°$

$= |-5| \, \|\vec{k}\| \, |2| \, \|\vec{i}\| \cos 90°$ $\quad (\|k\vec{v}\| = |k| \, \|\vec{v}\|)$

$= 5(1)\,2(1)\,0$

$= 0$

Exercices de compréhension 6.1

2. Soit $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$. Calculer les produits scalaires suivants.

a) $(7\vec{j}) \cdot (3\vec{j})$ b) $(-3\vec{j}) \cdot (-\vec{k})$

Le théorème 6.1 nous permettra de calculer le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ à partir des composantes de ces deux vecteurs.

THÉORÈME 6.1

Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, exprimés dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

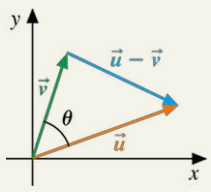
Preuve

1) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas parallèles

Cas où $\vec{u} \neq k\vec{v}$:

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $(\vec{u} - \vec{v})$ représentés sur le graphique ci-contre.



Par la loi des cosinus, nous avons

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \qquad (\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta, \text{ définition 6.1})$$

En isolant $\vec{u} \cdot \vec{v}$, nous obtenons

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2}{2}$$

$$= \frac{(u_1^2 + u_2^2) + (v_1^2 + v_2^2) - [(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2]}{2} \qquad \text{(théorème 4.6)}$$

$$= \frac{u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - [u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2]}{2}$$

$$= \frac{2u_1v_1 + 2u_2v_2}{2}$$

$$= u_1v_1 + u_2v_2$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles et de même sens

Cas où $\vec{u} = k\vec{v}$ et $k > 0$:

Puisque $\vec{u} = k\vec{v}$, nous avons

$$(u_1, u_2) = k(v_1, v_2) \qquad (\text{car } \vec{u} = (u_1, u_2) \text{ et } \vec{v} = (v_1, v_2))$$

$$= (kv_1, kv_2)$$

ainsi, $u_1 = kv_1$ et $u_2 = kv_2$

Par la définition 6.1, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$

$$= \|k\vec{v}\|\|\vec{v}\| \cos 0° \qquad (\text{car } \vec{u} = k\vec{v} \text{ et } k > 0)$$

$$= |k|\|\vec{v}\|^2$$

$$= k\|\vec{v}\|^2 \qquad (\text{car } k > 0)$$

$$= k(v_1^2 + v_2^2) \qquad \text{(théorème 4.6)}$$

$$= kv_1^2 + kv_2^2$$

$$= (kv_1)v_1 + (kv_2)v_2$$

$$= u_1v_1 + u_2v_2 \qquad (\text{car } u_1 = kv_1 \text{ et } u_2 = kv_2)$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles et de sens opposé

Cas où $\vec{u} = k\vec{v}$ et $k < 0$:

La preuve est laissée à l'étudiant.

2) Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.

La preuve est laissée à l'étudiant.

D'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$

Remarque : $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$ est l'expression algébrique du produit scalaire.

Exemple 4 Soit $\vec{r} = (-2, 2)$, $\vec{s} = (-3, -3)$, $\vec{w} = (\sqrt{3}, 1)$ et $\vec{t} = (-2, -2)$.

Calculons les produits scalaires suivants à l'aide du théorème 6.1.

a) $\vec{r} \cdot \vec{s} = (-2, 2) \cdot (-3, -3) = -2(-3) + 2(-3) = 0$ (voir l'exemple 1 b))

b) $\vec{w} \cdot \vec{t} = (\sqrt{3}, 1) \cdot (-2, -2) = \sqrt{3}(-2) + 1(-2) = -5{,}464\ldots$

(voir le nº 1 des exercices de compréhension 6.1)

Le théorème 6.2 nous permettra de calculer le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ à partir des composantes de ces deux vecteurs.

THÉORÈME 6.2

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, exprimés dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

La preuve est analogue à celle du théorème 6.1 et est laissée à l'étudiant.

Exemple 5 Soit $\vec{u} = (2, -7, 0)$, $\vec{v} = (-3, -1, 4)$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$, où A(-2, 2, 3) et B(-1, 7, 5). Calculons les produits scalaires suivants à l'aide du théorème 6.2.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, -7, 0) \cdot (-3, -1, 4) = 2(-3) + (-7)(-1) + 0(4) = 1$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w} = (2, -7, 0) \cdot (1, 5, 2) = 2(1) + (-7)(5) + 0(2) = -33$

c) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (-3, -1, 4) \cdot (1, 5, 2) = -3(1) + (-1)(5) + 4(2) = 0$

d) $\vec{u} \cdot \vec{u} = (2, -7, 0) \cdot (2, -7, 0) = 2(2) + (-7)(-7) + 0(0) = 53$

6

$\vec{w} = (1, 5, 2)$

Exercices de compréhension 6.1

3. Soit $\vec{u} = (-1, 0, 4)$ et $\vec{v} = (-3, 2, -4)$. Calculer :

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $\vec{v} \cdot \vec{u}$

On peut généraliser la notion de produit scalaire pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 6.2

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, exprimés dans la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$.

Le **produit scalaire** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n, \text{ c'est-à-dire } \vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i.$$

Ainsi, le produit scalaire de deux vecteurs de même dimension correspond à la somme des produits de leurs composantes respectives.

Exemple 6 Calculons les produits scalaires suivants.

a) Si $\vec{u} = (2, -1, 3, 0, 4)$ et $\vec{v} = (-3, 2, 4, 2, -2)$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(-3) + (-1)(2) + 3(4) + 0(2) + 4(-2) = -4$$

b) Si $\vec{e}_3$ et $\vec{e}_5$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^6$, alors

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_5 = (0, 0, 1, 0, 0, 0) \cdot (0, 0, 0, 0, 1, 0) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Angle formé par deux vecteurs

Nous pouvons utiliser la définition 6.1 du produit scalaire combiné avec les théorèmes 6.1 ou 6.2 pour déterminer l'angle formé par deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$.

Puisque $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos \theta$, (définition 6.1)

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|},$$

ainsi nous avons la définition suivante.

DÉFINITION 6.3

L'angle θ formé par deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ est donné par

$$\theta = \text{Arc cos}\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}\right),$$

où $0° \leq \theta \leq 180°$ (en degrés) ou $0 \leq \theta \leq \pi$ (en radians).

Remarque : Dans la définition précédente, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ doit être calculé en utilisant l'expression algébrique du produit scalaire.

Exemple 1 Déterminons l'angle θ formé par les vecteurs suivants.

a) $\vec{u} = (-5, 3)$ et $\vec{v} = (4, 5)$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{(-5)(4) + (3)(5)}{\sqrt{34}\sqrt{41}} = \frac{-5}{\sqrt{34}\sqrt{41}}, \text{ donc}$$

$$\theta = \text{Arc cos}\left(\frac{-5}{\sqrt{34}\sqrt{41}}\right)$$

d'où $\theta \approx 97{,}7°$.

b) $\vec{u} = (3, 5)$ et $\vec{v} = (-10, 6)$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{3(-10) + 5(6)}{\sqrt{34}\sqrt{136}} = \frac{0}{\sqrt{34}\sqrt{136}}, \text{ donc}$$

$$\theta = \text{Arc cos } 0$$

d'où $\theta = 90°$, ainsi, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

c) $\vec{u} = (2, -7, 0)$ et $\vec{v} = (-3, -1, 4)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{2(-3) + (-7)(-1) + 0(4)}{\sqrt{53}\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{53}\sqrt{26}}, \text{ donc}$$

$$\theta = \text{Arc cos}\left(\frac{1}{\sqrt{53}\sqrt{26}}\right)$$

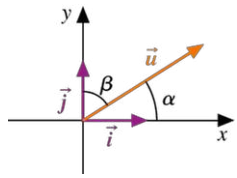
d'où $\theta \approx 88{,}5°$.

Exercices de compréhension 6.1

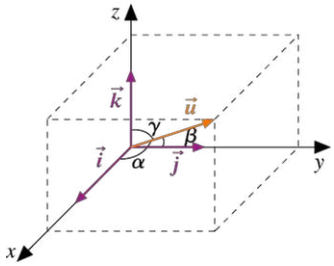
4. Soit $\vec{u} = (6, -8, 2)$ et $\vec{v} = (-9, 12, -3)$. Déterminer l'angle θ formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

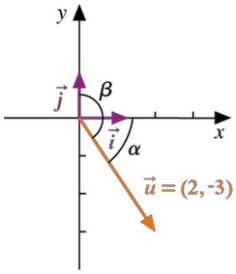
DÉFINITION 6.4

1) Les angles α et β que forme respectivement dans le plan cartésien un vecteur $\vec{u}$ avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont appelés les **angles directeurs du vecteur $\vec{u}$**.



2) Les angles α, β et γ que forme respectivement dans l'espace cartésien un vecteur $\vec{u}$ avec $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont appelés les **angles directeurs du vecteur $\vec{u}$**.





$\alpha \approx 56{,}3°$
$\beta \approx 146{,}3°$

Exemple 2 Déterminons les angles directeurs

a) du vecteur $\vec{u} = (2, -3)$;

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{i}}{\|\vec{u}\|\|\vec{i}\|} = \frac{(2, -3) \cdot (1, 0)}{\sqrt{13}\,(1)} = \frac{2(1) + (-3)(0)}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

d'où $\alpha \approx 56{,}3°$

$$\cos\beta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{j}}{\|\vec{u}\|\|\vec{j}\|} = \frac{(2, -3) \cdot (0, 1)}{\sqrt{13}\,(1)} = \frac{2(0) + (-3)(1)}{\sqrt{13}} = \frac{-3}{\sqrt{13}}$$

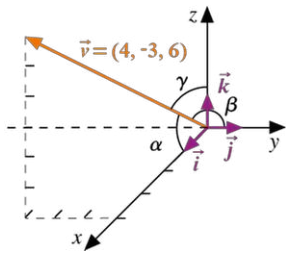
d'où $\beta \approx 146{,}3°$

b) du vecteur $\vec{v} = (4, -3, 6)$.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{\|\vec{v}\|\|\vec{i}\|} = \frac{(4, -3, 6) \cdot (1, 0, 0)}{\sqrt{61}\,(1)} = \frac{4(1) + (-3)(0) + 6(0)}{\sqrt{61}}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{61}}$$

d'où $\alpha \approx 59{,}2°$



$\alpha \approx 59{,}2°$
$\beta \approx 112{,}6°$
$\gamma \approx 39{,}8°$

$$\cos\beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{\|\vec{v}\|\|\vec{j}\|} = \frac{(4, -3, 6) \cdot (0, 1, 0)}{\sqrt{61}\,(1)} = \frac{4(0) + (-3)(1) + 6(0)}{\sqrt{61}}$$

$$\cos\beta = \frac{-3}{\sqrt{61}}$$

d'où $\beta \approx 112{,}6°$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{\|\vec{v}\|\|\vec{k}\|} = \frac{(4, -3, 6) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{61}\,(1)} = \frac{4(0) + (-3)(0) + 6(1)}{\sqrt{61}}$$

$$\cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{61}}$$

d'où $\gamma \approx 39{,}8°$

THÉORÈME 6.3

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$ ou deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$, alors

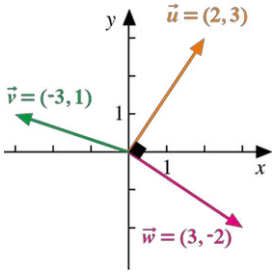
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ($\vec{u} \perp \vec{v}$).

Preuve

($\Leftarrow$) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta \qquad \text{(définition 6.1)}$$
$$= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos 90° \qquad (\theta = 90° \text{ car } \vec{u} \perp \vec{v})$$
$$= 0 \qquad \text{(car } \cos 90° = 0)$$

($\Rightarrow$) La preuve est laissée à l'étudiant.



Exemple 3 Soit $\vec{u} = (2, 3)$, $\vec{v} = (-3, 1)$ et $\vec{w} = (3, -2)$. Déterminons, parmi les vecteurs précédents, les vecteurs orthogonaux.

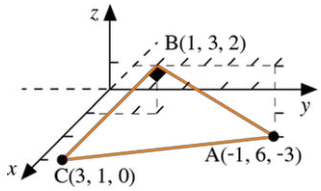
$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3) \cdot (-3, 1) = -6 + 3 = -3$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (2, 3) \cdot (3, -2) = 6 - 6 = 0$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = (-3, 1) \cdot (3, -2) = -9 - 2 = -11$

D'où $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{w}$. (car $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$)

Exemple 4 Soit A(-1, 6, -3), B(1, 3, 2) et C(3, 1, 0), les sommets d'un triangle. Déterminons, à l'aide du théorème 6.3, si le triangle ABC est rectangle.



Pour déterminer si ce triangle est rectangle, il suffit de vérifier si un des produits scalaires des vecteurs issus d'un même sommet est égal à zéro.

Sommet A : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (2, -3, 5) \cdot (4, -5, 3) = 8 + 15 + 15 = 38$

donc, $\overrightarrow{AB}$ n'est pas perpendiculaire à $\overrightarrow{AC}$.

Sommet C : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-4, 5, -3) \cdot (-2, 2, 2) = 8 + 10 - 6 = 12$

donc, $\overrightarrow{CA}$ n'est pas perpendiculaire à $\overrightarrow{CB}$.

Sommet B : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-2, 3, -5) \cdot (2, -2, -2) = -4 - 6 + 10 = 0$

donc, $\overrightarrow{BA}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{BC}$.

D'où le triangle ABC est rectangle au sommet B.

L'étudiant peut vérifier que $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{BA}\|^2$. (Pythagore)

Propriétés du produit scalaire

Énonçons maintenant certaines propriétés du produit scalaire.

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et si r et $s \in \mathbb{R}$, nous avons alors :

Propriété 1	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$	(commutativité du produit scalaire)
Propriété 2	$(r\vec{u}) \cdot (s\vec{v}) = rs(\vec{u} \cdot \vec{v})$	(pseudo-associativité)
Propriété 3	$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$	(distributivité du produit scalaire sur une somme de vecteurs)
Propriété 4	$\vec{O} \cdot \vec{u} = 0$	

Démontrons la propriété 2.

PROPRIÉTÉ 2

$(r\vec{u}) \cdot (s\vec{v}) = rs(\vec{u} \cdot \vec{v})$, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et r et $s \in \mathbb{R}$

Preuve

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, ainsi

$$(r\vec{u}) \cdot (s\vec{v}) = (r(u_1, u_2, \ldots, u_n)) \cdot (s(v_1, v_2, \ldots, v_n))$$

$$= (ru_1, ru_2, \ldots, ru_n) \cdot (sv_1, sv_2, \ldots, sv_n)$$ (définition de la multiplication d'un vecteur par un scalaire)

$$= (ru_1)(sv_1) + (ru_2)(sv_2) + \ldots + (ru_n)(sv_n)$$ (définition 6.2)

$$= (rs)u_1v_1 + (rs)u_2v_2 + \ldots + (rs)u_nv_n$$ (propriétés des nombres réels)

$$= rs(u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n)$$ (mise en évidence)

$$= rs(\vec{u} \cdot \vec{v})$$ (définition 6.2)

Dans le cas particulier où $s = 1$, nous avons $(r\vec{u}) \cdot \vec{v} = r(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

La preuve des autres propriétés est laissée à l'étudiant.

THÉORÈME 6.4

Si $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, alors

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, c'est-à-dire $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Preuve

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, ainsi

$$\begin{aligned}
\vec{u} \bullet \vec{u} &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) \bullet (u_1, u_2, \ldots, u_n) \\
&= u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 && \text{(définition 6.2)} \\
&= \|\vec{u}\|^2 && \text{(définition 4.18)}
\end{aligned}$$

Du théorème précédent, nous avons $\vec{u} \bullet \vec{u} \geq 0$.

COROLLAIRE du théorème 6.4

Si $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, alors $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{O}$.

La preuve est laissée à l'étudiant.

THÉORÈME 6.5 Inégalité de Cauchy[1]-Schwarz[2]

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors

$$|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|.$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\vec{u} \bullet \vec{v} &= \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta && \text{(définition 6.1)} \\
|\vec{u} \bullet \vec{v}| &= |\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta| \\
|\vec{u} \bullet \vec{v}| &= |\|\vec{u}\|| \, |\|\vec{v}\|| \, |\cos\theta| && (|ABC| = |A||B||C|) \\
|\vec{u} \bullet \vec{v}| &= \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, |\cos\theta| && (\text{car } \|\vec{u}\| \geq 0 \text{ et } \|\vec{v}\| \geq 0) \\
\text{d'où } |\vec{u} \bullet \vec{v}| &\leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| && (\text{car } |\cos\theta| \leq 1)
\end{aligned}$$

THÉORÈME 6.6 Inégalité de Minkowski[3] (inégalité du triangle)

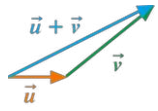
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

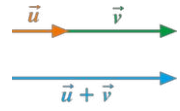
La preuve est laissée à l'étudiant (*voir le problème de synthèse n° 17, page 346*).

Nous pouvons illustrer l'inégalité de Minkowski de la façon suivante.

Inégalité du triangle



$$\|\vec{u} + \vec{v}\| < \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$



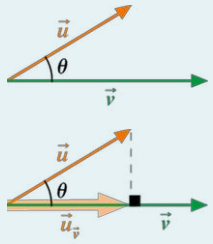
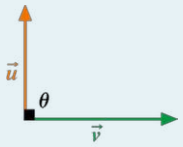
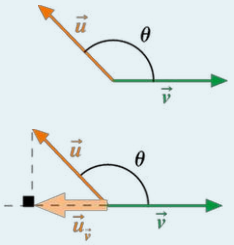
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

D'où $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

1. Du nom du mathématicien français Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).
2. Du nom du mathématicien allemand Hermann Amandus Schwarz (1843-1921).
3. Du nom du mathématicien allemand Hermann Minkowski (1864-1909).

Projection orthogonale

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$ ou deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. Nous voulons exprimer le vecteur $\vec{u}_{\vec{v}}$, qui est la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$, en fonction du vecteur $\vec{v}$.

		
Lorsque $0° \leq \theta < 90°$, $\vec{u}_{\vec{v}}$ est de même sens que $\vec{v}$.	Lorsque $\theta = 90°$, $\vec{u}_{\vec{v}} = \vec{O}$.	Lorsque $90° < \theta \leq 180°$, $\vec{u}_{\vec{v}}$ est de sens opposé à $\vec{v}$.

THÉORÈME 6.7

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que $\vec{v} \neq \vec{O}$, alors

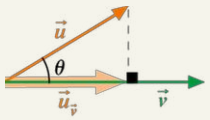
la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ est le vecteur, noté $\vec{u}_{\vec{v}}$, donné par

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\vec{v} \bullet \vec{v}} \vec{v}.$$

6

Preuve

Cas 1 : Lorsque $0° \leq \theta < 90°$



$$\left(\cos\theta = \frac{\|\vec{u}_{\vec{v}}\|}{\|\vec{u}\|}\right)$$

$\vec{u}_{\vec{v}}$ est parallèle à $\vec{v}$ et est de même sens que $\vec{v}$.

$$\vec{u}_{\vec{v}} = k\vec{v}, \text{ où } k > 0$$

Ainsi, $\|\vec{u}_{\vec{v}}\| = \|k\vec{v}\|$

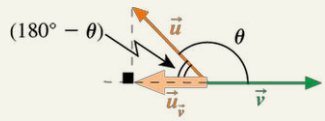
$$\|\vec{u}_{\vec{v}}\| = |k|\,\|\vec{v}\| \qquad \text{(définition 4.9)}$$

$$\|\vec{u}_{\vec{v}}\| = k\|\vec{v}\| \qquad (\text{car } k > 0)$$

donc, $k = \dfrac{\|\vec{u}_{\vec{v}}\|}{\|\vec{v}\|}$

$$k = \frac{\|\vec{u}\|\cos\theta}{\|\vec{v}\|} \qquad \left(\text{car } \|\vec{u}_{\vec{v}}\| = \|\vec{u}\|\cos\theta\right)$$

Cas 2 : Lorsque $90° < \theta \leq 180°$



$$\left(\cos(180° - \theta) = \frac{\|\vec{u}_{\vec{v}}\|}{\|\vec{u}\|}\right)$$

$\vec{u}_{\vec{v}}$ est parallèle à $\vec{v}$ et est de sens opposé à $\vec{v}$.

$$\vec{u}_{\vec{v}} = k\vec{v}, \text{ où } k < 0$$

Ainsi, $\|\vec{u}_{\vec{v}}\| = \|k\vec{v}\|$

$$\|\vec{u}_{\vec{v}}\| = |k|\,\|\vec{v}\| \qquad \text{(définition 4.9)}$$

$$\|\vec{u}_{\vec{v}}\| = -k\|\vec{v}\| \qquad (\text{car } k < 0)$$

donc, $k = \dfrac{-\|\vec{u}_{\vec{v}}\|}{\|\vec{v}\|}$

$$k = \frac{-\|\vec{u}\|\cos(180° - \theta)}{\|\vec{v}\|} \qquad \left(\text{car } \|\vec{u}_{\vec{v}}\| = \|\vec{u}\|\cos(180° - \theta)\right)$$

$$k = \frac{-\|\vec{u}\|(-\cos\theta)}{\|\vec{v}\|} \qquad (\cos(180° - \theta) = -\cos\theta)$$

$$k = \frac{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\| \cos\theta}{\|\vec{v}\|\|\vec{v}\|} \quad \text{(en multipliant le numérateur et le dénominateur par } \|\vec{v}\|\text{)}$$

$$k = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad \text{(définition 6.1 et théorème 6.4)}$$

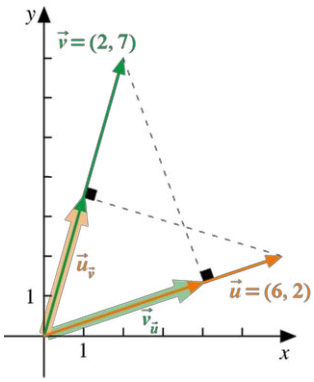
$$k = \frac{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\| \cos\theta}{\|\vec{v}\|\|\vec{v}\|} \quad \text{(en multipliant le numérateur et le dénominateur par } \|\vec{v}\|\text{)}$$

$$k = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \quad \text{(définition 6.1 et théorème 6.4)}$$

D'où $\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$, car $\vec{u}_{\vec{v}} = k\vec{v}$ et $k = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

Cas 3 : Lorsque $\theta = 90°$

La preuve est laissée à l'étudiant.



Exemple 1 Soit $\vec{u} = (6, 2)$ et $\vec{v} = (2, 7)$.

a) Calculons $\vec{u}_{\vec{v}}$ et $\vec{v}_{\vec{u}}$ en utilisant le théorème 6.7.

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{(6, 2) \cdot (2, 7)}{(2, 7) \cdot (2, 7)} (2, 7) = \frac{26}{53} (2, 7) = \left(\frac{52}{53}, \frac{182}{53}\right)$$

$$\vec{v}_{\vec{u}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} = \frac{(2, 7) \cdot (6, 2)}{(6, 2) \cdot (6, 2)} (6, 2) = \frac{26}{40} (6, 2) = \left(\frac{39}{10}, \frac{13}{10}\right)$$

Nous constatons que $\vec{u}_{\vec{v}} \neq \vec{v}_{\vec{u}}$.

b) Calculons $\vec{v} \cdot \vec{u}_{\vec{v}}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}_{\vec{u}}$.

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_{\vec{v}} = (2, 7) \cdot \left(\frac{52}{53}, \frac{182}{53}\right) = \frac{104}{53} + \frac{1274}{53} = \frac{1378}{53} = 26$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v}_{\vec{u}} = (6, 2) \cdot \left(\frac{39}{10}, \frac{13}{10}\right) = \frac{234}{10} + \frac{26}{10} = \frac{260}{10} = 26$$

Remarque : De façon générale, nous pouvons démontrer que $\vec{u} \cdot \vec{v}_{\vec{u}} = \vec{v} \cdot \vec{u}_{\vec{v}}$ (*voir l'exercice récapitulatif n° 31 a), page 343*).

Exemple 2 Soit $\vec{u} = (2, -1, 4)$, $\vec{v} = (-1, 2, 3)$ et $\vec{w} = (-2, 5, -4)$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Calculons $\vec{u}_{\vec{v}}$, $\vec{v}_{\vec{u}}$, $\vec{v}_{\vec{w}}$ et $\vec{w}_{\vec{v}}$ en utilisant le théorème 6.7.

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{(2, -1, 4) \cdot (-1, 2, 3)}{(-1, 2, 3) \cdot (-1, 2, 3)} (-1, 2, 3)$$

$$= \frac{-2 - 2 + 12}{1 + 4 + 9} (-1, 2, 3)$$

$$= \frac{8}{14} (-1, 2, 3)$$

$$= \left(\frac{-4}{7}, \frac{8}{7}, \frac{12}{7}\right)$$

$$\vec{v}_{\vec{u}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\vec{u} = \frac{(-1, 2, 3) \cdot (2, -1, 4)}{(2, -1, 4) \cdot (2, -1, 4)}(2, -1, 4)$$
$$= \frac{8}{21}(2, -1, 4)$$
$$= \left(\frac{16}{21}, \frac{-8}{21}, \frac{32}{21}\right)$$
$$\vec{v}_{\vec{w}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}\vec{w} = \frac{(-1, 2, 3) \cdot (-2, 5, -4)}{(-2, 5, -4) \cdot (-2, 5, -4)}(-2, 5, -4)$$
$$= \frac{0}{45}(-2, 5, -4)$$
$$= (0, 0, 0)$$
$$= \vec{O}, \text{ ainsi } \vec{v} \perp \vec{w}.$$
$$\vec{w}_{\vec{v}} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\vec{v} = \frac{(-2, 5, -4) \cdot (-1, 2, 3)}{(-1, 2, 3) \cdot (-1, 2, 3)}(-1, 2, 3)$$
$$= \frac{0}{14}(-1, 2, 3)$$
$$= (0, 0, 0)$$
$$= \vec{O}, \text{ ainsi } \vec{w} \perp \vec{v}.$$

Exercices de compréhension 6.1

5. Soit $\vec{u} = (3, 0, -4)$ et $\vec{v} = (-4, 5, 2)$. Calculer :

a) i) $\vec{u}_{\vec{v}}$ ii) $\|\vec{u}_{\vec{v}}\|$

b) i) $\vec{v}_{\vec{u}}$ ii) $\|\vec{v}_{\vec{u}}\|$

Applications du produit scalaire en géométrie

Nous utilisons le produit scalaire pour résoudre certains problèmes de géométrie.

Exemple 1 Soit le cercle d'équation $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$. À l'aide du produit scalaire, déterminons l'équation, sous la forme $y = ax + b$, de la tangente au cercle, au point R(5, -3).

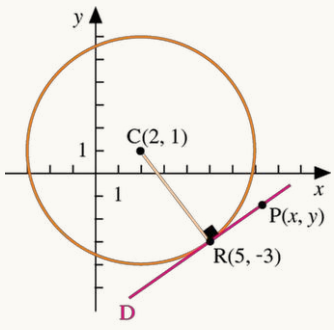
Équation d'une tangente à un cercle

Soit D, la tangente, et P(x, y), un point de D.

Puisque $\overrightarrow{RC} \perp \overrightarrow{RP}$,

$$\overrightarrow{RC} \cdot \overrightarrow{RP} = 0$$
$$(-3, 4) \cdot (x - 5, y + 3) = 0$$
$$-3(x - 5) + 4(y + 3) = 0$$
$$-3x + 4y + 27 = 0$$

d'où $y = \frac{3}{4}x - \frac{27}{4}$ est l'équation cherchée de D.



Exemple 2 Démontrons qu'un angle inscrit sur le diamètre d'un cercle est un angle droit.

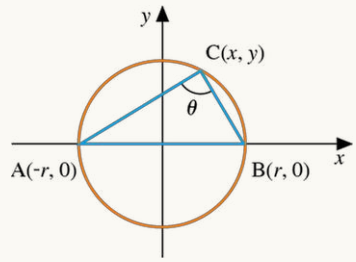
Soit le cercle d'équation $x^2 + y^2 = r^2$ et les points A$(-r, 0)$, B$(r, 0)$ et C(x, y) ci-dessous, où le segment $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle.

Angle inscrit sur un diamètre

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= (-r - x, 0 - y) \cdot (r - x, 0 - y)\\ &= (-r - x)(r - x) + (-y)(-y)\\ &= -r^2 + x^2 + y^2\\ &= 0 \qquad (\text{car } x^2 + y^2 = r^2)\end{aligned}$$

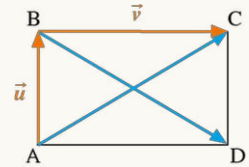
donc, $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$ (théorème 6.3)

d'où $\theta = 90°$.



Exemple 3 Démontrons que les diagonales d'un rectangle sont perpendiculaires si et seulement si le rectangle est un carré.

Soit le rectangle ABCD ci-contre,
où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.



$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$
$\overrightarrow{BD} = \vec{v} - \vec{u}$

($\Rightarrow$) Si $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$, alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= 0 && (\text{théorème 6.3})\\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) &= 0\\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v} + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (-\vec{u}) &= 0 && (\text{propriété 3 du produit scalaire})\\ \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{u} &= 0 && (\text{propriété 3 du produit scalaire})\\ 0 + \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} - 0 &= 0 && (\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ et } \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \text{ car } = \vec{u} \perp \vec{v})\\ \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 &= 0 && (\text{théorème 6.4})\end{aligned}$$

donc, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

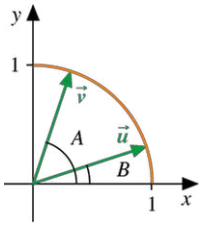
d'où ABCD est un carré.

($\Leftarrow$) Si ABCD est un carré, alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})\\ &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v} + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (-\vec{u}) && (\text{propriété 3 du produit scalaire})\\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot (-\vec{u}) + \vec{v} \cdot (-\vec{u}) && (\text{propriété 3 du produit scalaire})\\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{u} && (\text{propriété 2 du produit scalaire})\\ &= 0 + \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} - 0 && (\text{car } \vec{u} \perp \vec{v})\\ &= \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 && (\text{théorème 6.4})\\ &= 0 && (\text{car } \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|)\end{aligned}$$

d'où les diagonales sont perpendiculaires.

Trigonométrie



Développement de cos $(A - B)$

Exemple 4 Utilisons le produit scalaire pour démontrer que $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

Cas où $A \geq B$:

Soit $\vec{u} = (\cos B, \sin B)$ et $\vec{v} = (\cos A, \sin A)$, deux vecteurs unitaires.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(A - B) \qquad \text{(définition 6.1)}$$

$$(\cos B, \sin B) \cdot (\cos A, \sin A) = \sqrt{\cos^2 B + \sin^2 B}\ \sqrt{\cos^2 A + \sin^2 A} \cos(A - B)$$

$$\cos B \cos A + \sin B \sin A = 1(1) \cos(A - B) \qquad \text{(théorème 6.1)}$$

d'où $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

Cas où $A < B$:

La preuve est laissée à l'étudiant.

Applications du produit scalaire en physique

Physique

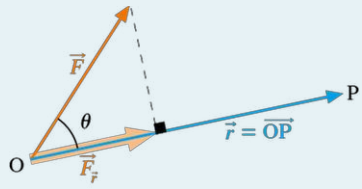
En physique, le produit scalaire est utilisé notamment afin de définir la notion de travail pour un objet O, soumis à une force $\vec{F}$, exprimée en newtons (N), qui subit un déplacement $\vec{r}$ rectiligne, exprimé en mètres (m).

Travail effectué par une force

Sachant que le travail effectué par une force constante est égal au produit de sa composante orientée dans le sens du déplacement par la grandeur du déplacement, exprimons le travail W, c'est-à-dire $\|\vec{F}_{\vec{r}}\|\|\vec{r}\|$, à l'aide d'un produit scalaire.

$$W = \|\vec{F}_{\vec{r}}\|\|\vec{r}\|$$
$$= \|\vec{F}\| \cos\theta \|\vec{r}\| \qquad \left(\|\vec{F}_{\vec{r}}\| = \|\vec{F}\| \cos\theta\right)$$
$$= \|\vec{F}\|\|\vec{r}\| \cos\theta$$

d'où $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$ (définition 6.1)

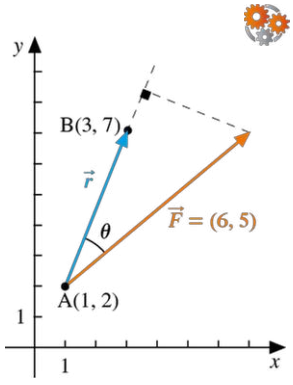


$$\cos\theta = \frac{\|\vec{F}_{\vec{r}}\|}{\|\vec{F}\|}$$

Ainsi, W, exprimé en joules[4], peut être défini à l'aide du produit scalaire : $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$.

1 J = 1 N-m

Remarque : L'unité du travail est le newton-mètre (N-m), appelée « joule ». Un joule est équivalent au travail produit par une force de 1 newton dont le point d'application se déplace de 1 mètre dans la direction de la force.



Exemple 1 Calculons le travail W effectué si on déplace un objet du point A(1, 2) au point B(3, 7) en appliquant une force $\vec{F}$ telle que $\vec{F} = (6, 5)$, où $\vec{F}$ est en newtons, et le déplacement, en mètres.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r}$$
$$= (6, 5) \cdot (2, 5) \qquad (\text{car } \vec{r} = \overrightarrow{AB} = (2, 5))$$
$$= 37$$

d'où $W = 37$ joules.

4. Du nom du physicien anglais James Prescott Joule (1818-1889).

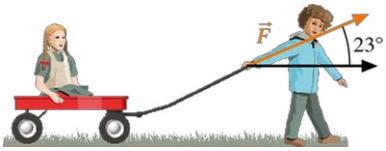
Exemple 2 Un cycliste parcourt 600 mètres en montant une colline qui forme un angle de 6° par rapport à l'horizontale. Si le cycliste applique une force constante horizontale $\vec{F}$ de 700 N, déterminons le travail W effectué par le cycliste.

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \bullet \vec{r} \\ &= 700(600) \cos 6° \qquad (\text{car } \vec{F} \bullet \vec{r} = \|\vec{F}\|\|\vec{r}\| \cos\theta) \\ &= 417\,699{,}196\ldots \end{aligned}$$

d'où $W \approx 417\,699{,}2$ joules.

Exercices de compréhension 6.1

6. Guillaume tire une voiturette avec une force de 14 N sur une surface horizontale. La force $\vec{F}$ est orientée selon un angle de 23° par rapport à l'horizontale.



Déterminer le travail effectué par Guillaume sur la voiturette lorsque cette dernière est déplacée sur une distance de 40 mètres.

Le calcul de la différence de potentiel ΔV entre deux points A et B dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$ est un autre exemple d'application du produit scalaire en physique.

En effet, $\Delta V = -\vec{E} \bullet \vec{d}$, où $\vec{d}$ est le vecteur de déplacement entre A et B.

Applications du produit scalaire en économie

En économie, le produit scalaire peut être utilisé notamment pour déterminer le profit P de certains articles vendus et le coût total.

Exemple 1 Un magasin d'électronique a vendu le mois dernier 35 téléviseurs de 53 cm, 62 téléviseurs de 77 cm, 21 téléviseurs de 96 cm et 15 téléviseurs de 132 cm. Ces téléviseurs se vendent respectivement 300 $, 700 $, 1500 $ et 2500 $. Le magasin paie ces mêmes articles 175 $, 425 $, 850 $ et 1675 $.

a) Déterminons trois vecteurs algébriques $\vec{n}$, $\vec{p}$ et $\vec{c}$, représentant respectivement le nombre d'unités vendues pendant cette période, le prix de vente des téléviseurs et leur coût d'achat.

$$\vec{n} = (35, 62, 21, 15)$$
$$\vec{p} = (300, 700, 1500, 2500)$$
$$\vec{c} = (175, 425, 850, 1675)$$

b) Effectuons $\vec{n} \cdot \vec{p}$ et interprétons le résultat.

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{p} &= (35, 62, 21, 15) \cdot (300, 700, 1500, 2500)\\ &= 35(300) + 62(700) + 21(1500) + 15(2500)\\ &= 122\,900\end{aligned}$$

Le produit scalaire représente le montant total des ventes des quatre types de téléviseurs pour le mois, c'est-à-dire 122 900 $.

c) Déterminons, à l'aide du produit scalaire, le coût d'achat C des téléviseurs vendus.

$$C = \vec{n} \cdot \vec{c} = (35, 62, 21, 15) \cdot (175, 425, 850, 1675) = 75\,450$$

d'où $C = 75\,450$ $.

d) Déterminons, à l'aide d'un produit scalaire, le profit P.

$P = \vec{n} \cdot \vec{p} - \vec{n} \cdot \vec{c}$
$= 122\,900 - 75\,450$
$= 47\,450$

$$\begin{aligned}P &= \vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{c}) \qquad (\text{car } P = \vec{n} \cdot \vec{p} - \vec{n} \cdot \vec{c} = \vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{c}), \text{ propriété 3})\\ &= (35, 62, 21, 15) \cdot (300 - 175, 700 - 425, 1500 - 850, 2500 - 1675)\\ &= 47\,450\end{aligned}$$

d'où $P = 47\,450$ $.

6

Applications du produit scalaire aux combinaisons linéaires

Utilisons le produit scalaire pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs.

Combinaison linéaire

Exemple 1 Soit $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, une base de $\mathbb{R}^3$, où $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (3, -2, 1)$ et $\vec{w} = (2, 1, -4)$.

a) Vérifions si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2, 1) \cdot (3, -2, 1) = 3 - 4 + 1 = 0$, donc $\vec{u} \perp \vec{v}$.

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (1, 2, 1) \cdot (2, 1, -4) = 2 + 2 - 4 = 0$, donc $\vec{u} \perp \vec{w}$.

$\vec{v} \cdot \vec{w} = (3, -2, 1) \cdot (2, 1, -4) = 6 - 2 - 4 = 0$, donc $\vec{v} \perp \vec{w}$.

D'où $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

b) Exprimons le vecteur $\vec{t} = (4, 10, -6)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, à l'aide de la notion de produit scalaire.

Soit $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

$(4, 10, -6) = a(1, 2, 1) + b(3, -2, 1) + c(2, 1, -4)$

En effectuant $\vec{t} \cdot \vec{u}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\vec{t} \cdot \vec{u} &= (a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}) \cdot \vec{u}\\ &= (a\vec{u}) \cdot \vec{u} + (b\vec{v}) \cdot \vec{u} + (c\vec{w}) \cdot \vec{u} \qquad (\text{distributivité})\\ &= a(\vec{u} \cdot \vec{u}) + b(\vec{v} \cdot \vec{u}) + c(\vec{w} \cdot \vec{u}) \qquad (\text{pseudo-associativité})\\ &= a(\vec{u} \cdot \vec{u}) + 0 + 0 \qquad (\text{car } \vec{v} \perp \vec{u} \text{ et } \vec{w} \perp \vec{u})\end{aligned}$$

donc $a = \dfrac{\vec{t} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

ainsi, $a = \dfrac{(4, 10, -6) \cdot (1, 2, 1)}{(1, 2, 1) \cdot (1, 2, 1)} = \dfrac{4 + 20 - 6}{1 + 4 + 1} = \dfrac{18}{6} = 3$

De façon analogue, on trouve $b = \dfrac{\vec{t} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ et $c = \dfrac{\vec{t} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}$.

Ainsi, $b = \dfrac{\vec{t} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \dfrac{(4, 10, -6) \cdot (3, -2, 1)}{(3, -2, 1) \cdot (3, -2, 1)} = \dfrac{-14}{14} = -1$ et

$$c = \frac{\vec{t} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} = \frac{(4, 10, -6) \cdot (2, 1, -4)}{(2, 1, -4) \cdot (2, 1, -4)} = \frac{42}{21} = 2$$

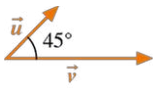
donc $(4, 10, -6) = 3(1, 2, 1) - (3, -2, 1) + 2(2, 1, -4)$ (car $a = 3$, $b = -1$ et $c = 2$)

d'où $\vec{t} = 3\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$

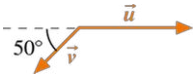
De façon générale, si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$, où a, b et $c \in \mathbb{R}$, alors $a = \dfrac{\vec{t} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$, $b = \dfrac{\vec{t} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ et $c = \dfrac{\vec{t} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}$.

EXERCICES 6.1

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ si :

a) 

, où $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 4$

b) 

, où $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = 3$

c) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, où A(-3, 3) et B(-7, 7), $\|\vec{v}\| = 2$ et $\theta = 105°$

d) $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$, où A(-3, 3) et B(-7, 7), $\|\vec{v}\| = 2$ et l'angle formé par $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ est de 105°

e) $\vec{u} = (-2, 3)$ et $\vec{v} = (1, 5)$

f) $\vec{u} = (4, 1, -2)$ et $\vec{v} = (2, 2, 5)$

g) $\vec{u} = (5, 4, -3, 1)$ et $\vec{v} = (1, -3, 4, 6)$

h) $\vec{u} = \vec{v}$, où $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$

i) $\vec{u} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_4$ et $\vec{v} = (2, 3, -1, 5)$

j) $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (-b, a)$

2. Déterminer l'angle θ formé par les vecteurs suivants.

a) $\vec{u} = (-1, 0)$ et $\vec{v} = (3, 3)$

b) $\vec{u} = (-5, -2)$ et $\vec{v} = (4, -10)$

c) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, où A(-3, 7), B(-2, 5) et C(-5, 11)

d) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $\vec{v} = (3, 2, 1)$

e) $\vec{u} = (4, -5, 6)$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, où A(2, -3, 1) et B(10, -13, 13)

f) $\vec{u} = (-a, -a, a)$ et $\vec{v} = (a, -a, -a)$, où $a \neq 0$

3. Déterminer les angles directeurs des vecteurs suivants.

a) $\vec{u} = (-12, 5)$

b) $\vec{v} = (-1, 2, -3)$

4. Déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants sont orthogonaux.

a) $\vec{u} = (1, -2, 5)$ et $\vec{v} = (-2, 4, 2)$

b) $\vec{u} = (1, -1, 0)$ et $\vec{v} = (0, 1, -1)$

c) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, où A(-2, 4, 1), B(3, -1, 0) et C(-1, 4, 6)

d) $\vec{u} = (4, 0, -4)$ et $\vec{v}$ est un vecteur parallèle à l'axe des y.

5. À l'aide du produit scalaire, déterminer si le triangle ABC est rectangle ; si oui, préciser en quel sommet et déterminer si le triangle rectangle est isocèle.

a) A(1, 0), B(2, 3) et C(6, 0)

b) A(6, 5), B(1, 3) et C(3, -2)

c) A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) et C(0, 0, 1)

d) A(1, 2, 3), B(-1, -3, 2) et C(5, 0, 5)

6. Déterminer, si c'est possible, les valeurs de a et b pour que les vecteurs suivants soient non nuls et perpendiculaires entre eux.

a) $\vec{u} = (a, 2)$ et $\vec{v} = (4, -9)$

b) $\vec{u} = (4, 1, -3)$ et $\vec{v} = (-5, -a, a)$

c) $\vec{u} = (a, 1, 2)$ et $\vec{v} = (a, 3, -1)$

d) $\vec{u} = (3, 4, a)$ et $\vec{v} = (a, 0, -3)$

e) $\vec{u} = (a, 0, -4b)$ et $\vec{v} = (a, 2, -b)$

f) $\vec{u} = (a, 3, -4b)$ et $\vec{v} = (a, 2, -b)$

g) $\vec{u} = (4, a, -5)$ et $\vec{v} = (b, 5, a)$

h) $\vec{u} = (a, 4, b)$ et $\vec{v} = (a, 0, -b)$

7. Soit $\vec{u} = (1, 5, -2)$ et $\vec{v} = (-3, 1, 4)$. Vérifier que :

a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

b) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
(inégalité de Cauchy-Schwarz)

c) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
(inégalité de Minkowski ou inégalité du triangle)

d) $\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|$

8. Soit $\vec{u} = (-1, 3)$, $\vec{v} = (2, 4)$ et $\vec{w} = (-6, -7)$.
Déterminer $\vec{u}_{\vec{v}}$, $\vec{w}_{\vec{v}}$ et représenter dans un même système d'axes les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{u}_{\vec{v}}$ et $\vec{w}_{\vec{v}}$.

9. Soit $\vec{u} = (1, 2, -4)$, $\vec{v} = (-4, 1, 2)$ et $\vec{w} = (3, 5, 1)$.

a) Déterminer $\vec{u}_{\vec{w}}$.

b) Déterminer $\vec{w}_{\vec{u}}$.

c) Déterminer $\vec{w}_{\vec{i}}$.

d) Déterminer la projection de $\vec{u}$ sur l'axe des z.

e) Démontrer que $\vec{t}$, où $\vec{t} = \vec{v} - \vec{v}_{\vec{i}} - \vec{v}_{\vec{j}}$, est perpendiculaire à $\vec{i}$ et à $\vec{j}$.

10. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs tels que $\vec{u} \perp \vec{v}$ et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 3$. Soit
$\overrightarrow{w_1} = 2\vec{u} - \vec{v}$, $\overrightarrow{w_2} = \vec{u} + 4\vec{v}$, $\overrightarrow{w_3} = \vec{u} + \vec{v}$,
$\overrightarrow{w_4} = \vec{u} - \vec{v}$, $\overrightarrow{w_5} = \vec{u} - 5\vec{v}$ et $\overrightarrow{w_6} = 5\vec{u} + \vec{v}$.
Déterminer si :

a) $\overrightarrow{w_1}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{w_2}$

b) $\overrightarrow{w_3}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{w_4}$

c) $\overrightarrow{w_5}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{w_6}$

11. **TANGENTE À UN CERCLE**

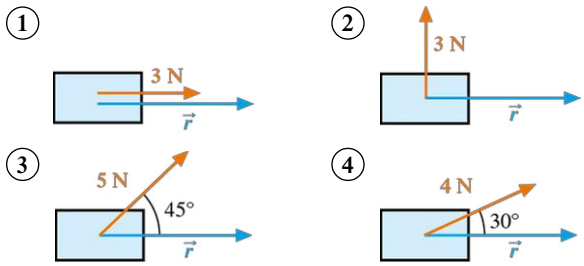
Soit le cercle de centre C(-8, 12) et de rayon 13 unités.

a) À l'aide du produit scalaire, déterminer l'équation de la tangente D au cercle, au point A(-3, 24).

b) Déterminer l'équation des tangentes D_1 et D_2 aux points où le cercle coupe l'axe des x, et représenter graphiquement le cercle et les tangentes D_1 et D_2.

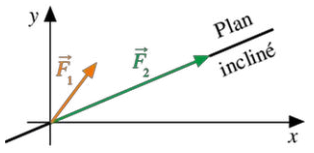
12. **APPLICATION | TRAVAIL**

Les figures ci-dessous illustrent quatre situations où une force est appliquée sur un objet. Dans les quatre cas, l'objet a le même déplacement $\vec{r}$. Classer les situations ①, ②, ③ et ④ dans l'ordre croissant du travail effectué par la force.



13. **APPLICATION | FORCE ET TRAVAIL**

Pour déplacer un objet sur un plan incliné, nous appliquons à cet objet les forces $\overrightarrow{F_1} = (3, 4)$ et $\overrightarrow{F_2} = (12, 5)$. Les forces sont exprimées en newtons, et les déplacements, en mètres.



a) Déterminer $\overrightarrow{F_{1_{\overrightarrow{F_2}}}}$.

b) Calculer la force $\vec{F}$ appliquée à l'objet dans la direction du plan incliné.

c) Déterminer le travail W_1 effectué par $\vec{F}$ si l'objet se déplace de trois mètres.

d) Déterminer le travail W_2 effectué par $\vec{F}$ si l'objet se déplace de (12, 5) à (36, 15).

14. **APPLICATION | TRAVAIL**

Nicolas tire son traîneau vers le sommet d'une colline sur une distance de 125 mètres.



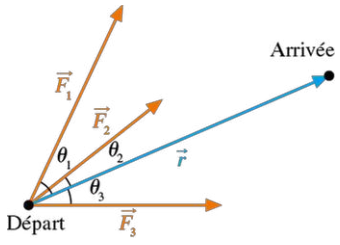
S'il utilise une force constante de 16 newtons à un angle de 15° par rapport à la surface de la colline, déterminer le travail qu'il effectue.

15. **APPLICATION | TRAVAIL ET DÉPLACEMENT**

Lors d'un entraînement, un joueur de football applique une force à 50° par rapport à l'horizontale pour faire reculer un mannequin d'entraînement. Si la grandeur de la force employée est de 300 newtons et le travail effectué est de 650 joules, déterminer le déplacement du mannequin.

16. **APPLICATION | TRAVAIL**

Lorsque plusieurs forces effectuent un travail sur un objet, le travail total est la somme de tous les travaux effectués par les forces sur l'objet, qui se déplace de façon rectiligne.

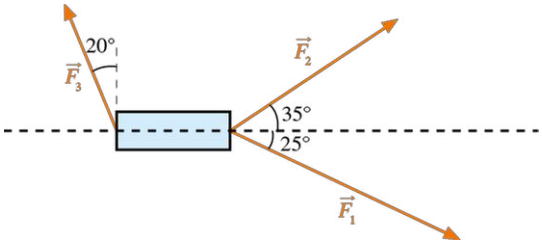


a) Exprimer le travail total W_{tot} en fonction

i) de trois produits scalaires ;

ii) des angles θ_i et des normes des vecteurs correspondants.

b) Un chariot soumis à trois forces se déplace le long d'un rail rectiligne. Le schéma ci-dessous présente une vue en plongée de la situation.



Déterminer le travail total W_{tot} effectué pour déplacer le chariot de 3,6 m, sachant que $\|\vec{F}_1\| = 2{,}1$ N, $\|\vec{F}_2\| = 1{,}6$ N et $\|\vec{F}_3\| = 1{,}2$ N.

17. a) Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que $(\vec{u} + \vec{v})_{\vec{w}} = \vec{u}_{\vec{w}} + \vec{v}_{\vec{w}}$.

b) Représenter graphiquement le résultat précédent pour des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

18. **PARALLÉLOGRAMME**

Démontrer que les diagonales d'un parallélogramme ABCD sont perpendiculaires si et seulement si le parallélogramme est un losange.

19. **PARALLÉLOGRAMME**

a) Démontrer que la somme des carrés des longueurs des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs des diagonales de ce parallélogramme.

b) Utiliser le résultat précédent pour démontrer que, dans un carré ABCD, $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}\|\overrightarrow{AB}\|$.

c) Sachant que les diagonales d'un parallélogramme mesurent respectivement 12 cm et 8 cm, et qu'un des côtés mesure 5 cm, déterminer le périmètre p du parallélogramme.

20. **COMBINAISON LINÉAIRE**

Soit $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, une base de $\mathbb{R}^3$, où $\vec{u} = (1, -2, 2)$, $\vec{v} = (4, 2, 0)$ et $\vec{w} = (-4, 8, 10)$.

a) Démontrer que la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base orthogonale.

b) En utilisant la notion de produit scalaire, exprimer le vecteur $\vec{t} = (-4, -2, 9)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

6.2 Produit vectoriel de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra utiliser le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ pour résoudre certains problèmes.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de donner la définition du produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$;
- d'effectuer le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$;
- de trouver un vecteur perpendiculaire à deux vecteurs donnés de $\mathbb{R}^3$;
- d'énoncer les propriétés du produit vectoriel de vecteurs de $\mathbb{R}^3$;
- de démontrer certaines propriétés du produit vectoriel de vecteurs de $\mathbb{R}^3$;
- de déterminer le sens du vecteur résultant du produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$;
- d'utiliser les propriétés du produit vectoriel de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ pour résoudre certains problèmes géométriques ;
- de calculer l'aire d'un parallélogramme à l'aide d'un produit vectoriel ;
- de calculer l'aire d'un triangle à l'aide d'un produit vectoriel ;
- d'utiliser les propriétés du produit vectoriel pour résoudre certains problèmes de physique.

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, alors

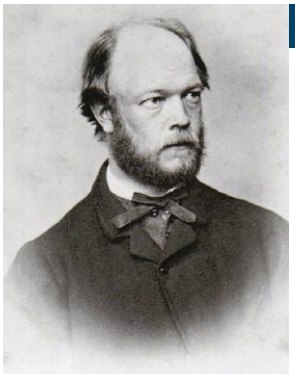
$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\theta \, \vec{U},$$

où $\vec{U}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

6

Dans cette section, nous définirons le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$, dont le résultat est un vecteur $\vec{w}$, qui est perpendiculaire à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.



Peter Guthrie Tait
(1831-1901)

IL Y A ENVIRON 150 ANS...

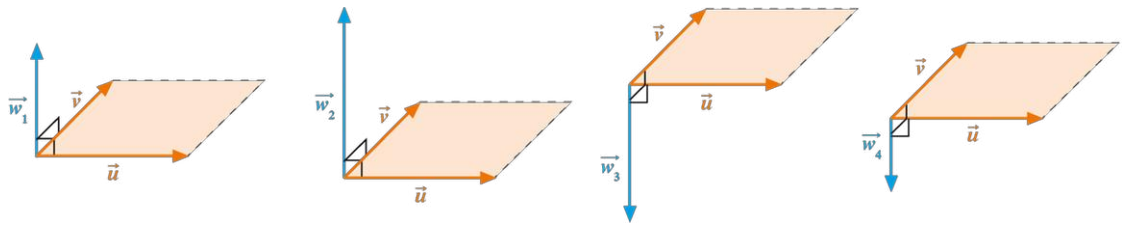
Peter Guthrie Tait, professeur à l'université d'Edimbourg, a toujours eu à cœur d'employer les mathématiques pour mieux étudier les phénomènes de la nature. Ainsi s'explique son intérêt pour les quaternions, qu'il utilise pour récrire l'hydrodynamique, l'électrodynamique et l'électromagnétisme. Pourtant, ses intérêts ne s'arrêtent pas là. Il écrit abondamment sur la théorie des nœuds. Un de ses articles, publié en 1896, porte même sur la trajectoire d'une balle de golf. Tait a toutefois un défaut. Intensément patriotique, il déforme parfois les faits pour soutenir, par exemple, que certaines découvertes sont d'origine britannique… et non allemande. Tait n'apprécie pas du tout la réécriture de la physique en termes vectoriels que font Josiah Willard Gibbs, le premier Américain à obtenir, en 1863, un doctorat en génie dans son pays, et l'Anglais Oliver Heaviside, un spécialiste des télécommunications, naissantes à l'époque.

Définition du produit vectoriel

Soit $\vec{u} = (a, b, c)$ et $\vec{v} = (d, e, f)$, deux vecteurs non nuls et non parallèles de $\mathbb{R}^3$. Nous cherchons un vecteur $\vec{w} = (x, y, z)$ perpendiculaire à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, c'est-à-dire perpendiculaire au plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

En faisant varier la norme et le sens du vecteur $\vec{w}$, nous pouvons constater qu'il existe une infinité de vecteurs ayant cette caractéristique. Par exemple :

$\vec{w}_1 /\!/ \vec{w}_2$
$\vec{w}_1 /\!/ \vec{w}_3$
$\vec{w}_1 /\!/ \vec{w}_4$



En appliquant le théorème 6.3, nous obtenons $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$. Nous pouvons alors établir le système d'équations linéaires suivant.

$\vec{u} \perp \vec{w}$
$\vec{v} \perp \vec{w}$

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 & (1) \\ dx + ey + fz = 0 & (2) \end{cases}$$

(car $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, où $\vec{u} = (a, b, c)$ et $\vec{w} = (x, y, z)$)

(car $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, où $\vec{v} = (d, e, f)$ et $\vec{w} = (x, y, z)$)

Dans ce système homogène d'équations linéaires, le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations. Par conséquent, ce système admet une infinité de solutions.

Résolvons ce système par la méthode de Gauss si $a \neq 0$.

Méthode de Gauss

$$\begin{bmatrix} x & y & z & \\ a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x & y & z & \\ a & b & c & 0 \\ 0 & ae - bd & af - cd & 0 \end{bmatrix} \qquad aL_2 - dL_1 \to L_2$$

En posant $z = s$, où $s \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$(ae - bd)y + (af - cd)s = 0$$

$$y = \frac{(cd - af)}{(ae - bd)}s, \text{ si } (ae - bd) \neq 0.$$

Solution particulière

En remplaçant s par $(ae - bd)$, nous obtenons $y = cd - af$.

En remplaçant ces valeurs dans l'équation (1) $ax + by + cz = 0$, nous obtenons

$$ax + b(cd - af) + c(ae - bd) = 0$$
$$ax = abf - bcd + cbd - cae$$
$$ax = a(bf - ce)$$
$$x = bf - ce, \text{ car } a \neq 0$$

Nous obtenons donc la solution particulière suivante.

$$x = bf - ce,\ y = cd - af \text{ et } z = ae - bd$$

En écrivant ces valeurs sous forme de déterminants d'ordre 2, nous obtenons

$$x = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix},\quad y = \begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad z = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$

d'où $\vec{w} = (x, y, z) = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \right)$

L'étudiant peut vérifier que $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

DÉFINITION 6.5

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Le **produit vectoriel** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \times \vec{v}$, est défini par

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Il est important de constater que le produit vectoriel, uniquement défini pour deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, est un vecteur, d'où le nom de produit vectoriel.

Voici une façon visuelle de retenir l'expression algébrique servant à définir le produit vectoriel.

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, alors

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} \cancel{u_1} & u_2 & u_3 \\ \cancel{v_1} & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & \cancel{u_2} & u_3 \\ v_1 & \cancel{v_2} & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cancel{u_3} \\ v_1 & v_2 & \cancel{v_3} \end{vmatrix} \right)$$

Les colonnes ombrées en jaune doivent être enlevées pour calculer les déterminants.

Exemple 1

a) Calculons $\vec{u} \times \vec{v}$ si $\vec{u} = (2, -1, 3)$ et $\vec{v} = (-4, 6, 5)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} \cancel{2} & -1 & 3 \\ \cancel{-4} & 6 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & \cancel{-1} & 3 \\ -4 & \cancel{6} & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 & \cancel{3} \\ -4 & 6 & \cancel{5} \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} \right) \quad \text{(en enlevant les colonnes ombrées)}$$

$$= (-23, -22, 8)$$

b) À l'aide du produit scalaire, vérifions que $(\vec{u} \times \vec{v})$ est perpendiculaire à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (-23, -22, 8) \cdot (2, -1, 3)$$
$$= -46 + 22 + 24 \quad \text{(théorème 6.2)}$$
$$= 0$$

d'où $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$

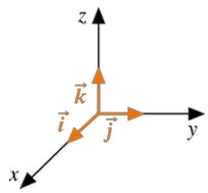
$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = (-23, -22, 8) \cdot (-4, 6, 5)$$
$$= 92 - 132 + 40 \quad \text{(théorème 6.2)}$$
$$= 0$$

d'où $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$

Exercices de compréhension 6.2

1. Soit $\vec{u} = (-2, 1, 3)$ et $\vec{v} = (4, 0, 5)$. À l'aide du produit vectoriel, déterminer un vecteur $\vec{w}$ perpendiculaire à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.



Exemple 2 Soit $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Calculons :

a) $\vec{i} \times \vec{j} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1)$

d'où $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

b) $\vec{i} \times \vec{k} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (0, -1, 0)$

d'où $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

c) $\vec{j} \times \vec{k} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1, 0, 0)$

d'où $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$

d) $\vec{i} \times \vec{i} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 0)$

d'où $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{O}$

Exercices de compréhension 6.2

2. Compléter le tableau suivant.

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{O}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$			$\vec{i}$
$\vec{k}$			

Un moyen mnémotechnique pour calculer $(\vec{u} \times \vec{v})$ est de l'associer au calcul d'un pseudo-déterminant, $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$, car les éléments de la première ligne sont les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$, au lieu d'être des scalaires. Ainsi, en développant le déterminant suivant selon les éléments de la pemière ligne, nous avons

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Ainsi, si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, alors

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Exemple 3 Soit $\vec{u} = (-2, 4, 5)$ et $\vec{v} = (0, -2, 7)$. Calculons $\vec{u} \times \vec{v}$ et $\vec{v} \times \vec{u}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 38\vec{i} + 14\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$= (38, 14, 4)$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= -38\vec{i} - 14\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$= (-38, -14, -4)$$

$\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$

Nous constatons que $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$.

Propriétés du produit vectoriel

Énonçons maintenant certaines propriétés relatives au produit vectoriel.

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et si r et $s \in \mathbb{R}$, nous avons alors :

Propriété 1	$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$	(anticommutativité)
Propriété 2	$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$	(distributivité à gauche)
Propriété 3	$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$	(distributivité à droite)
Propriété 4	$(r\vec{u}) \times (s\vec{v}) = rs(\vec{u} \times \vec{v})$	(pseudo-associativité)
Propriété 5	$\vec{u} \times \vec{O} = \vec{O}$ et $\vec{O} \times \vec{u} = \vec{O}$	
Propriété 6	$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{O}$	

Démontrons les propriétés 1 et 6 précédentes.

PROPRIÉTÉ 1

$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Preuve

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \quad \text{(définition 6.5)}$$

$$= \left(-\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} \right) \quad \text{(théorème 3.9, en permutant } L_1 \text{ et } L_2\text{)}$$

$$= -\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} \right) \quad \text{(vecteurs opposés)}$$

$$= -(\vec{v} \times \vec{u})$$

$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

PROPRIÉTÉ 6

$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{O}$, où $\vec{u}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$

Preuve

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{u} &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ u_1 & u_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}\right) \\ &= (0, 0, 0) && \text{(théorème 3.10)} \\ &= \vec{O}\end{aligned}$$

Le théorème suivant est une généralisation de la propriété précédente.

THÉORÈME 6.8

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$.

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{O}$ si et seulement si $\vec{u}$ est parallèle à $\vec{v}$.

La preuve est laissée à l'étudiant (*voir le problème de synthèse n° 21 a), page 346*).

THÉORÈME 6.9 Identité de Lagrange

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2$.

La preuve est laissé à l'étudiant (*voir le problème de synthèse n° 21 b), page 346*).

Le théorème suivant nous permet d'exprimer la norme du produit vectoriel de deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$ en fonction de la norme de chacun de ces vecteurs et de l'angle formé par ces vecteurs.

THÉORÈME 6.10

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$, alors

$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin\theta$, où $\theta \in [0, \pi]$ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Preuve

Nous savons que

$$\begin{aligned}\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2 && \text{(théorème 6.9)} \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \left(\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta\right)^2 && \text{(définition 6.1)} \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2\theta \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2\theta) && \text{(mise en évidence)} \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2\theta && \text{(car } (1 - \cos^2\theta) = \sin^2\theta\text{)} \\ \|\vec{u} \times \vec{v}\| &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \, |\sin\theta|\end{aligned}$$

d'où $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin\theta$ (puisque $\theta \in [0, \pi]$, $|\sin\theta| = \sin\theta$)

Remarque : Il est facile de vérifier que, pour des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ est maximale lorsque $\theta = 90°$, car $\sin\theta \leq 1$ et $\sin 90° = 1$.

Le théorème précédent nous permet d'exprimer le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, à l'aide d'une expression géométrique.

Nous pouvons exprimer le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et non parallèles de $\mathbb{R}^3$ de la façon suivante.

$\vec{u} \times \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\theta \, \vec{U}$, où θ est l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et

$\vec{U}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$0° < \theta < 180°$
$0 < \theta < \pi$

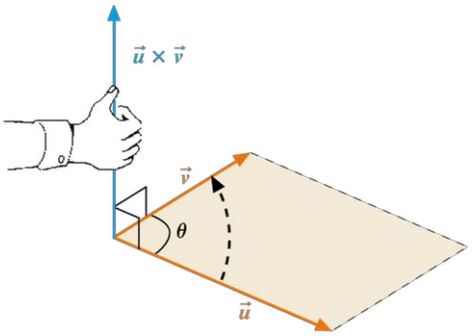
Le sens de $\vec{U}$ est déterminé par la règle de la main droite ou règle de la vis, où la rotation s'effectue du premier vecteur vers le deuxième vecteur.

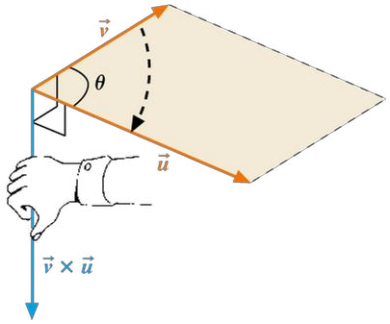
Lorsque les doigts de la main droite

s'enroulent du vecteur $\vec{u}$ vers le vecteur $\vec{v}$, le pouce donne le sens de $\vec{u} \times \vec{v}$.

s'enroulent du vecteur $\vec{v}$ vers le vecteur $\vec{u}$, le pouce donne le sens de $\vec{v} \times \vec{u}$.

Règle de la main droite



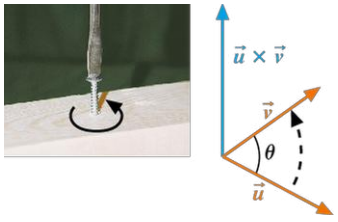


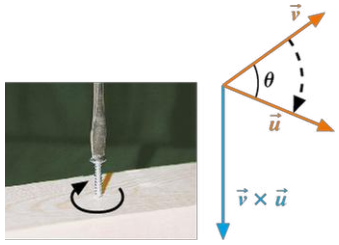
En tournant une vis

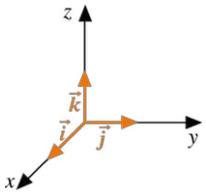
dans le sens antihoraire, celle-ci sort du bois, donnant le sens de $\vec{u} \times \vec{v}$.

dans le sens horaire, celle-ci s'enfonce dans le bois, donnant le sens de $\vec{v} \times \vec{u}$.

Règle de la vis







Exemple 1 À l'aide de l'expression géométrique du produit vectoriel, calculons :

a) $\vec{i} \times \vec{j} = \|\vec{i}\| \, \|\vec{j}\| \sin 90° \, \vec{U} = (1)(1)(1)\vec{k} = \vec{k}$ (car $\vec{U} = \vec{k}$)

b) $\vec{k} \times \vec{j} = \|\vec{k}\| \, \|\vec{j}\| \sin 90° \, \vec{U} = (1)(1)(1)(-\vec{i}) = -\vec{i}$ (car $\vec{U} = -\vec{i}$)

c) $\vec{i} \times \vec{k} = \|\vec{i}\| \, \|\vec{k}\| \sin 90° \, \vec{U} = (1)(1)(1)(-\vec{j}) = -\vec{j}$ (car $\vec{U} = -\vec{j}$)

Applications du produit vectoriel en géométrie

Le produit vectoriel peut être utilisé pour calculer l'aire de figures géométriques.

THÉORÈME 6.11

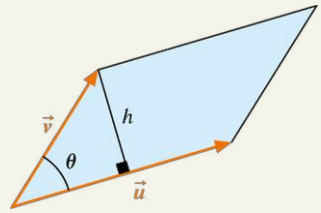
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$, alors l'aire A du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donnée par

$$A = \|\vec{u} \times \vec{v}\|.$$

Preuve

Cas où $0° \leq \theta < 90°$:

Soit le parallélogramme ci-contre.



$$A = \|\vec{u}\|\, h \qquad \text{(aire = (base)(hauteur))}$$

$$= \|\vec{u}\|\, \|\vec{v}\| \sin\theta \qquad \left(\text{car } \sin\theta = \frac{h}{\|\vec{v}\|}\right)$$

$$= \|\vec{u} \times \vec{v}\| \qquad \text{(théorème 6.10)}$$

d'où $A = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$

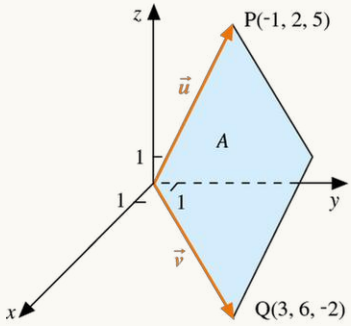
Cas où $90° \leq \theta \leq 180°$:

La preuve est laissée à l'étudiant.

6

Exemple 1

a) Calculons l'aire A du parallélogramme engendré par $\vec{u} = (-1, 2, 5)$ et $\vec{v} = (3, 6, -2)$.



En calculant $\vec{u} \times \vec{v}$, nous obtenons

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-34, 13, -12)$$

Aire d'un parallélogramme de $\mathbb{R}^3$

Puisque $A = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$ (théorème 6.11)

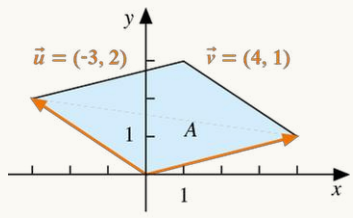
$$A = \sqrt{(-34)^2 + (13)^2 + (-12)^2}$$

$$= \sqrt{1469}$$

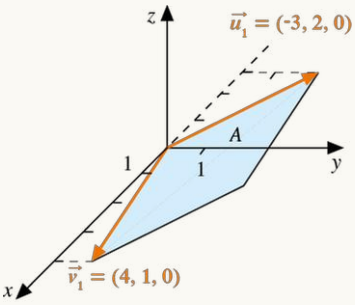
d'où $A \approx 38{,}33$ u^2.

b) Calculons l'aire A du parallélogramme engendré par $\vec{u} = (-3, 2)$ et $\vec{v} = (4, 1)$.

Puisque le produit vectoriel est défini seulement pour des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, il suffit d'ajouter à chaque vecteur une troisième composante égale à 0.



Soit $\vec{u}_1 = (-3, 2, 0)$ et $\vec{v}_1 = (4, 1, 0)$, les vecteurs obtenus en ajoutant à chaque vecteur une troisième composante égale à zéro.



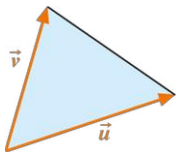
$$\vec{u}_1 \times \vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -11)$$

Aire d'un parallélogramme de $\mathbb{R}^2$

Puisque $A = \|\vec{u}_1 \times \vec{v}_1\|$ (théorème 6.11)

$$A = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-11)^2} = 11$$

d'où $A = 11$ u^2.



COROLLAIRE du théorème 6.11

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$, alors l'aire A du triangle engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donnée par

$$A = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{2}.$$

La preuve est laissée à l'étudiant.

6

Aire d'un triangle dans $\mathbb{R}^3$

Exemple 2 Calculons l'aire A du triangle dont les sommets sont P(4, -1, 2), Q(5, 3, -1) et R(-3, 1, 2).

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (1, 4, -3)$ et $\vec{v} = \overrightarrow{PR} = (-7, 2, 0)$.

Ainsi, $\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} \right) = (6, 21, 30)$

Par le corollaire du théorème 6.11,

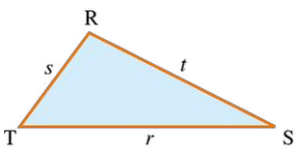
$$A = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{2} = \frac{\sqrt{6^2 + 21^2 + 30^2}}{2} = \frac{\sqrt{1377}}{2}$$

d'où $A \approx 18{,}55$ u^2.

Exercices de compréhension 6.2

3. Calculer l'aire A du triangle dont les sommets sont B(2, 1), C(4, 5) et D(8, 4).

Nous acceptons sans démonstration le théorème suivant permettant de calculer l'aire d'un triangle en fonction de la longueur des côtés et du demi-périmètre du triangle.



THÉORÈME 6.12 Formule de Héron

Soit R, S et T, les sommets d'un triangle. Si r, s et t sont les longueurs des côtés du triangle, et $p = \frac{r + s + t}{2}$, le demi-périmètre du triangle, alors l'aire A du triangle RST est donnée par

$$A = \sqrt{p(p - r)(p - s)(p - t)}.$$

Exemple 3 Calculons l'aire A du triangle RST, où R(-1, 2, 5), S(3, 6, 7) et T(15, 3, 3), à l'aide de la formule de Héron.

Soit $r = \|\overrightarrow{ST}\| = 13$, $s = \|\overrightarrow{RT}\| = \sqrt{261}$ et $t = \|\overrightarrow{RS}\| = 6$.

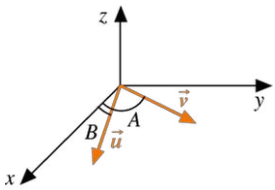
Ainsi, $p = \dfrac{13 + 6 + \sqrt{261}}{2} = \dfrac{19 + \sqrt{261}}{2}$ (le demi-périmètre)

donc, $A = \sqrt{\dfrac{19 + \sqrt{261}}{2}\left(\dfrac{19 + \sqrt{261}}{2} - 13\right)\left(\dfrac{19 + \sqrt{261}}{2} - \sqrt{261}\right)\left(\dfrac{19 + \sqrt{261}}{2} - 6\right)}$

d'où $A \approx 36{,}4$ u^2.

Trigonométrie

Exemple 4 Utilisons le produit vectoriel pour démontrer que $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$.



Cas où $A \geq B$:

Soit $\vec{u} = (\cos B, \sin B, 0)$ et $\vec{v} = (\cos A, \sin A, 0)$, deux vecteurs unitaires.

En calculant $\vec{u} \times \vec{v}$ de deux façons différentes, nous obtenons

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos B & \sin B & 0 \\ \cos A & \sin A & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0, 0, \cos B \sin A - \cos A \sin B)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin(A - B)\, \vec{k}$$
$$= 1(1) \sin(A - B)\, \vec{k}$$
$$= \sin(A - B)\, (0, 0, 1)$$
$$= (0, 0, \sin(A - B))$$

Développement de $\sin(A - B)$

d'où $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

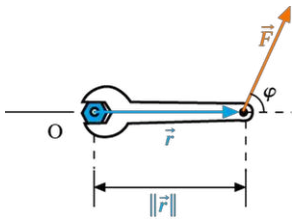
Cas où $A < B$:
La preuve est laissée à l'étudiant.

6

Applications du produit vectoriel en physique

Moment de force

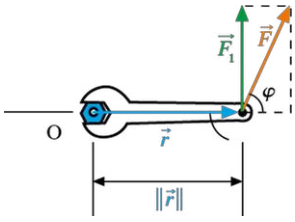
Le moment de force $\vec{\tau}$, également appelé « couple » ou « moment de torsion », mesure la capacité d'une force à imprimer un mouvement de rotation à un corps.



Ainsi, le moment de force $\vec{\tau}$ produit par une force $\vec{F}$, exprimée en newtons (N), exercée à un angle φ par rapport à une clé plate mixte pour faire tourner un écrou est donnée par

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad \textit{(voir l'exercice récapitulatif n}^{\text{o}}\textit{ 17, page 342)}$$

La norme du moment de force est exprimée en joules (J) et dépend de la distance $\|\vec{r}\|$, exprimée en mètres (m), entre le centre de l'écrou et le point où est appliquée la force, ainsi que de la grandeur de la force $\vec{F}_1$ appliquée perpendiculairement à la clé. D'après le diagramme ci-contre, la grandeur de la force $\vec{F}_1$ est $\|\vec{F}\| \sin \varphi$.



$\|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}\| \sin \varphi$

Règle de la vis

Si le moment de force est orienté vers l'intérieur de la surface, l'écrou se serre. Si la force est appliquée en sens inverse, le moment de force est orienté vers l'extérieur de la surface et l'écrou se desserre.

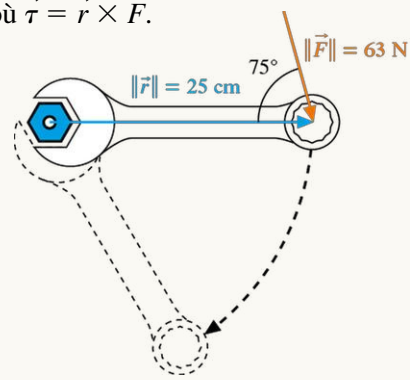
Exemple 1 On serre un écrou à l'aide d'une clé. On applique une force de 63 N, dans le sens horaire, à 25 cm du centre de l'écrou et exercée à un angle de 75° par rapport à la clé.

a) Calculons la norme du moment de force $\vec{\tau}$, où $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Moment de force

$$\begin{aligned} \|\vec{\tau}\| &= \|\vec{r}\| \, \|\vec{F}\| \sin \varphi \\ &= (0{,}25)(63) \sin 75° \qquad (\varphi = 75°) \\ &= 15{,}21\ldots \end{aligned}$$

d'où environ 15,21 joules.



b) Déterminons le sens du vecteur moment de force, qui est le même que celui de l'écrou.

Selon la règle de la vis, le vecteur moment de force se dirige vers l'intérieur du matériau.

Le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est utilisé pour analyser le comportement de certains phénomènes physiques, par exemple :

- Le taux d'écoulement de l'énergie à travers une unité d'aire est donné par le vecteur de Poynting $\vec{S}$ tel que

  $$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B}),$$

  où μ_0 est une constante donnée,
  $\vec{E}$ est le champ électrique le long d'un fil et
  $\vec{B}$ est le champ magnétique total créé en un point quelconque par un conducteur de dimension finie.
- La force magnétique $\vec{F}$ qui agit sur une charge q en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}$ est donnée par

  $$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$
- Le moment de force $\vec{\tau}$ sur une boucle de courant placée dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B}$ est donné par

  $$\vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B},$$

  où I est l'intensité du courant et
  $\vec{A}$ est un vecteur perpendiculaire au plan de la boucle, tel que $\|\vec{A}\|$ est égal à l'aire de la boucle.
- La force totale $\vec{F}$, appelée « force de Lorentz », enregistrée par une particule q chargée qui se déplace à une vitesse $\vec{v}$ dans une région où se trouvent un champ magnétique $\vec{B}$ et un champ électrique $\vec{E}$, est donnée par

  $$\vec{F} = q\vec{E} + (q\vec{v} \times \vec{B}).$$

EXERCICES 6.2

1. Calculer $\vec{u} \times \vec{v}$ et $\vec{v} \times \vec{u}$ si :

a) $\vec{u} = (-4, 0, 5)$ et $\vec{v} = (2, -1, 3)$

b) $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ et $\vec{v} = (-1, 5, -3)$

c) $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ et $\vec{v} = (2, 4, -6)$

d) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, où A(-1, 2, 3) et B(3, 1, 9), et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, où C(0, 3, -2) et D(2, 8, 1)

2. Calculer les produits vectoriels suivants.

a) $(\vec{i} \times \vec{k}) \times \vec{k}$

b) $\vec{i} \times (\vec{k} \times \vec{k})$

c) $(\vec{i} \times \vec{j}) \times (\vec{j} \times \vec{k})$

d) $\vec{i} \times ((\vec{j} \times \vec{j}) \times \vec{k})$

e) $((\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j}) \times \vec{k}$

3. Déterminer les deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_2}$ qui sont perpendiculaires aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants.

a) $\vec{u} = (2, 1, -2)$ et $\vec{v} = (1, 1, 3)$

b) $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{k}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, où A(2, -5, 7) et B(3, 0, 6)

4. Déterminer deux vecteurs $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ perpendiculaires aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants.

a) $\vec{u} = (-3, 4, 2)$ et $\vec{v} = (4, 3, -2)$ tels que $\|\overrightarrow{w_1}\| = \|\overrightarrow{w_2}\| = 4$

b) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, où A(3, -4, 2) et B(0, 3, 4), et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, où C(-1, 4, 6) et D(4, 0, 5), tels que $\|\overrightarrow{w_1}\| = \|\overrightarrow{w_2}\| = \sqrt{193}$

5. Pour les vecteurs $\vec{u} = (3, -2, 1)$, $\vec{v} = (0, 4, -3)$ et $\vec{w} = (1, 3, 5)$, vérifier si les égalités suivantes sont vraies.

a) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

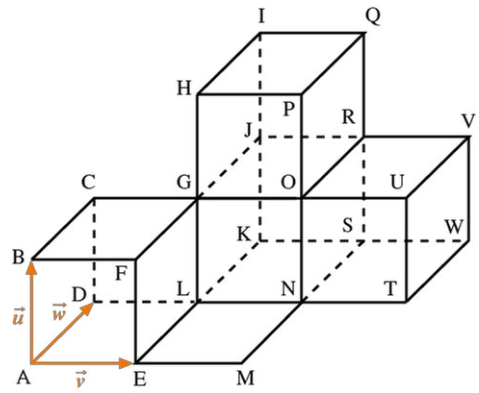
b) $\vec{v} \times (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{v} \times \vec{u}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

d) $(5\vec{u}) \times (2\vec{w}) = 10(\vec{u} \times \vec{w})$

e) $\vec{u} \times (k\vec{u}) = \vec{O}$

6. Sur la représentation ci-dessous, nous avons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$, $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{w}$ et $\vec{v} \perp \vec{w}$.



Calculer les produits vectoriels suivants en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ou $\vec{O}$.

a) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE}$ b) $\overrightarrow{LN} \times \overrightarrow{GH}$

c) $\overrightarrow{RO} \times \overrightarrow{QI}$ d) $\overrightarrow{DL} \times \overrightarrow{VR}$

e) $\overrightarrow{LH} \times \overrightarrow{NS}$ f) $\overrightarrow{CU} \times \overrightarrow{JK}$

g) $\overrightarrow{WK} \times \overrightarrow{PN}$ h) $\overrightarrow{DT} \times \overrightarrow{FJ}$

i) $\overrightarrow{MM} \times \overrightarrow{KW}$ j) $(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CU}) \times \overrightarrow{KE}$

k) $(\overrightarrow{LH} - \overrightarrow{PN}) \times (\overrightarrow{EK} - \overrightarrow{TW})$

l) $\overrightarrow{AF} \times \overrightarrow{LI}$

7. a) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \times \vec{v} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Soit $\vec{w}$ et $\vec{t}$, deux vecteurs tels que $\|\vec{w}\| = 5$, $\vec{t} = (1, 1, 1)$ et $\vec{w} \times \vec{t} = (-1, 2, -2)$. Calculer $\vec{w} \cdot \vec{t}$.

8. **AIRE D'UN PARALLÉLOGRAMME**

Calculer l'aire A du parallélogramme

a) engendré par $\vec{u} = (5, -1, 2)$ et $\vec{v} = (-1, 3, 5)$;

b) engendré par $\vec{u} = (5, 1)$ et $\vec{v} = (5, -4)$;

c) dont les sommets sont A(-2, 1), B(1, 4), C(5, 3) et D(8, 6) ;

d) dont les sommets sont A(1, 1, 1), B(2, 3, 4), C(5, 4, 2) et D(6, 6, 5).

9. AIRE D'UN TRIANGLE

a) Calculer l'aire A du triangle

i) engendré par $\vec{u} = (5, 2, -7)$ et $\vec{v} = (4, 2, 2)$;

ii) dont les sommets sont les points B(-1, 5), C(6, -2) et D(0, 1) ;

iii) dont les sommets sont les points P(1, -5, 4), Q(3, -1, 3) et R(-3, -13, 6).

Que peut-on conclure à propos de la position des points P, Q et R ?

b) Calculer l'aire d'un triangle dont les côtés mesurent 3 cm, 7 cm et 8 cm.

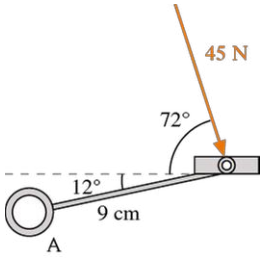
10. AIRE D'UN QUADRILATÈRE

Calculer l'aire du quadrilatère dont les sommets sont les points A(-2, -2), B(-1, 1), C(2, 3) et D(5, -1).

11. APPLICATION | MOMENT DE FORCE

Nicolas exerce une force de 45 N sur la pédale d'un tricycle, où la manivelle de la pédale mesure 9 cm de longueur.

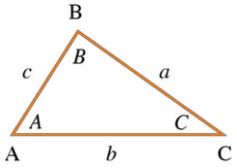




Déterminer la norme du moment de force, exprimée en joules, autour du point A.

12. LOI DES SINUS

Soit le triangle ABC ci-dessous.



Utiliser le produit vectoriel pour démontrer la loi des sinus :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

6

6.3 Produit mixte de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra utiliser le produit mixte de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ pour résoudre certains problèmes.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de donner la définition du produit mixte de vecteurs de $\mathbb{R}^3$;
- d'effectuer le produit mixte de vecteurs de $\mathbb{R}^3$;
- d'énoncer les propriétés du produit mixte de vecteurs de $\mathbb{R}^3$;
- de démontrer certaines propriétés du produit mixte de vecteurs de $\mathbb{R}^3$;
- d'utiliser les propriétés du produit mixte de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ pour résoudre certains problèmes géométriques ;
- de calculer le volume d'un parallélépipède à l'aide du produit mixte de vecteurs de $\mathbb{R}^3$;
- de calculer le volume d'un tétraèdre à l'aide du produit mixte de vecteurs de $\mathbb{R}^3$;
- de vérifier si trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont coplanaires.

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, alors

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Nous terminons ce chapitre en définissant le produit mixte, uniquement défini pour trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, dans lequel interviennent le produit vectoriel et le produit scalaire.

Définition du produit mixte

DÉFINITION 6.6

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Le **produit mixte** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est défini par $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})$.

Le résultat du produit mixte est un scalaire.

Remarque : Il est également possible de noter, sans parenthèses, le produit mixte par $\vec{u} \bullet \vec{v} \times \vec{w}$.

En effet, le seul regroupement possible est $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})$, puisque $(\vec{u} \bullet \vec{v}) \times \vec{w}$ n'est pas défini, $(\vec{u} \bullet \vec{v})$ étant un scalaire.

Exemple 1 Soit $\vec{u} = (2, -1, 4)$, $\vec{v} = (1, 0, 5)$ et $\vec{w} = (-3, 6, -8)$. Calculons $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})$ et $\vec{v} \bullet (\vec{u} \times \vec{w})$.

$$\begin{aligned}
\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) &= (2, -1, 4) \bullet ((1, 0, 5) \times (-3, 6, -8)) \\
&= (2, -1, 4) \bullet \left(\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} \right) \\
&= (2, -1, 4) \bullet (-30, -7, 6) \\
&= 2(-30) + (-1)(-7) + 4(6) \\
&= -29
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v} \bullet (\vec{u} \times \vec{w}) &= (1, 0, 5) \bullet ((2, -1, 4) \times (-3, 6, -8)) \\
&= (1, 0, 5) \bullet \left(\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} \right) \\
&= (1, 0, 5) \bullet (-16, 4, 9) \\
&= 1(-16) + 0(4) + 5(9) \\
&= 29
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{w} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) &= (-3, 6, -8) \bullet ((2, -1, 4) \times (1, 0, 5)) \\
&= (-3, 6, -8) \bullet \left(\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \\
&= (-3, 6, -8) \bullet (-5, -6, 1) \\
&= (-3)(-5) + 6(-6) + (-8)(1) \\
&= -29
\end{aligned}$$

THÉORÈME 6.13

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Preuve

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = (u_1, u_2, u_3) \bullet ((v_1, v_2, v_3) \times (w_1, w_2, w_3))$$

$$= (u_1, u_2, u_3) \bullet \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Exemple 2 Soit $\vec{u} = (-2, -1, 0)$, $\vec{v} = (5, 0, 1)$, $\vec{w} = (-3, 4, 7)$ et $\vec{t} = (6, -2, 2)$. Calculons $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})$ et $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{t})$.

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 46$$

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{t}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{v} \bullet (\vec{t} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -92$$

Exercices de compréhension 6.3

1. Soit $\vec{u} = (-1, 2, 5)$, $\vec{v} = (3, -4, 6)$, $\vec{w} = (0, -1, -5)$ et $\vec{t} = (3, -2, 4)$. Calculer les produits mixtes suivants.

a) $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})$ b) $\vec{v} \bullet (\vec{t} \times \vec{v})$

Propriétés du produit mixte

Énonçons maintenant certaines propriétés relatives au produit mixte.

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et si r, s et $t \in \mathbb{R}$, nous avons alors :

Propriété 1 $\vec{u} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ et $\vec{v} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

Propriété 2 $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \bullet (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \bullet (\vec{u} \times \vec{v})$

Propriété 3 $r\vec{u} \bullet (s\vec{v} \times t\vec{w}) = rst(\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}))$

Démontrons les propriétés 1 et 3 précédentes.

PROPRIÉTÉ 1

$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ et $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Preuve

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad \text{(théorème 6.13)}$$

$$= 0 \quad \text{(théorème 3.10)}$$

De la même façon, on démontre que $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$.

PROPRIÉTÉ 3

$r\vec{u} \cdot (s\vec{v} \times t\vec{w}) = rst(\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}))$, où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et r, s et $t \in \mathbb{R}$

Preuve

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

$$r\vec{u} \cdot (s\vec{v} \times t\vec{w}) = r\vec{u} \cdot (st(\vec{v} \times \vec{w})) \quad \text{(propriété 4 du produit vectoriel)}$$

$$= rst(\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})) \quad \text{(propriété 2 du produit scalaire)}$$

6

Applications du produit mixte en géométrie

Le produit mixte peut être utilisé pour calculer le volume de certains solides.

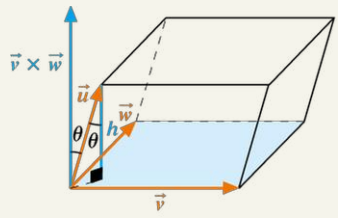
THÉORÈME 6.14

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Le volume V du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est donné par $V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$, c'est-à-dire la valeur absolue du produit mixte.

Preuve

Soit le parallélépipède ci-contre. Nous savons que



$V =$ (aire de la base)(hauteur)

$$= \|\vec{v} \times \vec{w}\| h \quad (\text{car aire de la base} = \|\vec{v} \times \vec{w}\|)$$

$$= \|\vec{v} \times \vec{w}\| \|\vec{u}\| |\cos\theta| \quad \left(\text{car } |\cos\theta| = \frac{h}{\|\vec{u}\|}\right)$$

$$= \|\vec{u}\| \|\vec{v} \times \vec{w}\| |\cos\theta|$$

$$= \left|\|\vec{u}\| \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cos\theta\right|$$

d'où $V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$ (définition 6.1)

Exemple 1 Calculons le volume V du parallélépipède engendré par $\vec{u} = (1, 4, -1)$, $\vec{v} = (3, 6, 7)$ et $\vec{w} = (-3, 2, -2)$.

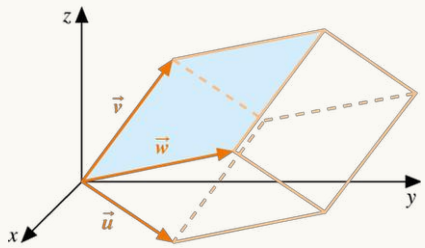
Calculons $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})$.

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -110$$

Puisque $V = |\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})|$ (théorème 6.14)

$= |-110|$

d'où $V = 110$ u^3.



Remarque : Nous aurions également pu obtenir le volume V du parallélépipède précédent en calculant un produit mixte quelconque impliquant les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Par exemple, $|\vec{u} \bullet (\vec{w} \times \vec{v})|$, $|\vec{w} \bullet (\vec{u} \times \vec{v})|$, etc.

COROLLAIRE du théorème 6.14

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Le volume V du tétraèdre engendré par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est donné par

$$V = \frac{1}{6}|\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})|.$$

Preuve

Soit V, le volume du tétraèdre engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

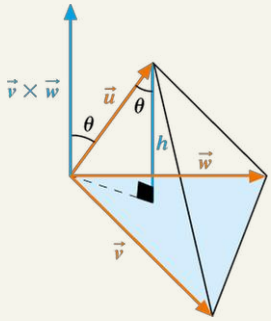
Nous savons que $V = \frac{1}{3}$ (aire de la base)(hauteur). Ainsi,

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{\|\vec{v} \times \vec{w}\|}{2}\right)h \qquad \left(\text{aire de la base} = \frac{\|\vec{v} \times \vec{w}\|}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\|\vec{v} \times \vec{w}\|\|\vec{u}\|\,|\cos\theta| \qquad \left(|\cos\theta| = \frac{h}{\|\vec{u}\|}\right)$$

$$= \frac{1}{6}|(\|\vec{u}\|\|\vec{v} \times \vec{w}\|)\cos\theta| \qquad \text{(commutativité dans } \mathbb{R})$$

$$= \frac{1}{6}|\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w})| \qquad \text{(définition du produit scalaire)}$$



Exemple 2

a) Calculons le volume V du tétraèdre engendré par $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

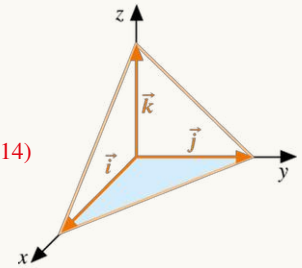
Calculons d'abord $\vec{i} \bullet (\vec{j} \times \vec{k})$.

$$\vec{i} \bullet (\vec{j} \times \vec{k}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \text{ ainsi}$$

$$V = \frac{1}{6}|\vec{i} \bullet (\vec{j} \times \vec{k})| \qquad \text{(théorème 6.14)}$$

$$= \frac{1}{6} \qquad (\text{car } |\vec{i} \bullet (\vec{j} \times \vec{k})| = 1)$$

d'où $V = \frac{1}{6}$ u^3.



b) Calculons le volume V du tétraèdre dont les sommets sont les points A(2, 6, 3), B(-1, 3, 5), C(2, 5, 6) et D(-2, 4, -6).

Déterminons d'abord trois vecteurs issus d'un même sommet.

Soit $\overrightarrow{AB} = (-3, -3, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (0, -1, 3)$ et $\overrightarrow{AD} = (-4, -2, -9)$.

Calculons ensuite $\overrightarrow{AB} \bullet (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})$.

$$\overrightarrow{AB} \bullet (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -4 & -2 & -9 \end{vmatrix} = -17$$

Corollaire du théorème 6.14

Donc, $V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB} \bullet (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})\right| = \frac{1}{6}\left|-17\right| = \frac{17}{6}$

d'où $V = 2{,}8\overline{3}\ \text{u}^3$.

Exercices de compréhension 6.3

2. Calculer le volume V du tétraèdre engendré par $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

THÉORÈME 6.15

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

La preuve est laissée à l'étudiant.

COROLLAIRE du théorème 6.15

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

Exemple 3 Soit $\vec{u} = (1, -2, 0)$, $\vec{v} = (-2, 1, 3)$, $\vec{w} = (-1, 4, 0)$ et $\vec{t} = (-7, 8, 6)$.

a) Déterminons si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -6$$

Théorème 6.15

d'où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires. (car $\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) \neq 0$)

b) Déterminons si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$ sont linéairement dépendants.

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{t}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -7 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

Corollaire du théorème 6.15

d'où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$ sont linéairement dépendants. (car $\vec{u} \bullet (\vec{u} \times \vec{t}) = 0$)

Le tableau suivant résume les principales caractéristiques des produits scalaire, vectoriel et mixte dans $\mathbb{R}^3$.

Notation	Produit scalaire	Produit vectoriel	Produit mixte
$\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$ et θ, l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$	$\vec{u} \times \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta\, \vec{U}$	
$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$	$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$	$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$
$\vec{u} = \vec{O}$ ou $\vec{v} = \vec{O}$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{O}$	$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$
$\vec{u} /\!/ \vec{v}$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$	$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{O}$	$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$
$\vec{u} \perp \vec{v}$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$		
Résultat	Scalaire	Vecteur	Scalaire
Applications géométriques	Calcul de l'angle θ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $\theta = \text{Arc cos}\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)$	Calcul de l'aire A du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $A = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$	Calcul du volume V du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ $V = \lvert\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})\rvert$

Notons que le produit vectoriel et le produit mixte sont définis uniquement dans $\mathbb{R}^3$, tandis que le produit scalaire est défini dans $\mathbb{R}^n$, où $n \geq 2$.

EXERCICES 6.3

1. Soit $\vec{u} = (-1, 2, 5)$, $\vec{v} = (3, -4, 6)$, $\vec{w} = (0, -1, -5)$ et $\vec{t} = (3, -2, 4)$. Calculer les produits mixtes suivants en calculant d'abord le produit vectoriel pour a) et b), et en utilisant le théorème 6.13 pour c) et d).

a) $\vec{t} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ b) $\vec{u} \cdot (\vec{t} \times \vec{w})$

c) $\vec{w} \cdot (\vec{t} \times \vec{u})$ d) $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{u})$

2. VOLUME D'UN PARALLÉLÉPIPÈDE

Calculer le volume V du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$; déterminer si ces vecteurs sont linéairement indépendants ou linéairement dépendants.

a) $\vec{u} = (1, 2, 4)$, $\vec{v} = (-2, 4, -1)$ et $\vec{w} = (4, 5, 3)$

b) $\vec{u} = \overrightarrow{PR}$, $\vec{v} = \overrightarrow{PS}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{PQ}$, où P(1, -3, 2), R(5, 0, 1), S(0, 2, -3) et Q(7, 0, -1)

c) $\vec{u} = (-1, 4, 3)$, $\vec{v} = (4, 0, -1)$ et $\vec{w} = (2, 8, 5)$

3. VOLUME D'UN TÉTRAÈDRE

Calculer le volume V du tétraèdre dont les sommets sont les points P, Q, R et S ; et déterminer si ces points sont coplanaires.

a) P(-1, 2, 0), Q(0, 0, 6), R(1, 1, 0) et S(1, -3, 0)

b) P(1, 3, -4), Q(1, -1, 0), R(3, -2, -1) et S(-2, 1, 1)

4. VOLUME D'UN TÉTRAÈDRE

Soit O(0, 0, 0), P(2, 0, 0), Q(0, 2, 0) et R(0, 0, 2), les sommets d'un tétraèdre.

a) Représenter ce tétraèdre et calculer son volume.

b) Soit D, l'aire du triangle PQR, A, l'aire du triangle OQR, B, l'aire du triangle OPR, et C, l'aire du triangle OPQ. Vérifier que $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$.

Révision des concepts

Produits de vecteurs

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, des vecteurs non nuls, et θ, l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Produit scalaire

Expression algébrique

$\vec{u} \cdot \vec{v} =$ _____

Expression géométrique

$\vec{u} \cdot \vec{v} =$ _____

Propriétés du produit scalaire

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et si r et $s \in \mathbb{R}$, alors

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} =$ _____
2) $(r\vec{u}) \cdot (s\vec{v}) =$ _____
3) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) =$ _____
4) $\vec{O} \cdot \vec{u} =$ _____

Produit mixte

Propriétés du produit mixte

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et si r, s et $t \in \mathbb{R}$, alors

1) $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) =$ _____
2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) =$ _____
3) $r\vec{u} \cdot (s\vec{v} \times t\vec{w}) =$ _____

Produit vectoriel

Expression algébrique

$\vec{u} \times \vec{v} =$ _____

Expression géométrique

$\vec{u} \times \vec{v} =$ _____

Propriétés du produit vectoriel

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et si r et $s \in \mathbb{R}$, alors

1) $\vec{u} \times \vec{v} =$ _____
2) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) =$ _____
3) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} =$ _____
4) $(r\vec{u}) \times (s\vec{v}) =$ _____
5) $\vec{u} \times \vec{O} =$ _____
6) $\vec{u} \times \vec{u} =$ _____

Applications

Angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$\theta =$ _____

Vecteurs orthogonaux

$\vec{u} \cdot \vec{v} =$ _____

Projection orthogonale

$\vec{u}_{\vec{v}} =$ _____

Physique

Travail $W =$ _____

Économie

Page 315

Géométrie

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$.

L'aire A_1 du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donnée par $A_1 =$ _____

L'aire A_2 du triangle engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donnée par $A_2 =$ _____

Le volume V_1 du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est donné par $V_1 =$ _____

Le volume V_2 du tétraèdre engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est donné par $V_2 =$ _____

Exercices récapitulatifs

Administration | Biologie | Chimie | Géométrie | Physique | Sciences humaines | Outil technologique

Les réponses aux exercices récapitulatifs et aux problèmes de synthèse, à l'exception de ceux notés en **rouge**, sont fournies à la fin du manuel.

1. Pour les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants, calculer :

a) $\vec{i} \cdot \vec{j}$; $\vec{i} \times \vec{j}$

b) $\vec{j} \cdot \vec{i}$; $\vec{j} \times \vec{i}$

c) $\vec{i} \cdot \vec{i}$; $\vec{i} \times \vec{i}$

d) $\vec{i} \cdot \vec{k}$; $\vec{i} \times \vec{k}$

e) $\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k})$; $\vec{i} \cdot (\vec{k} \times \vec{j})$

f) $\vec{i} \cdot (\vec{i} \times \vec{j})$; $\vec{j} \cdot (\vec{j} \times \vec{j})$

g) $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{k})$; $(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{k}$

h) $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{k})$; $(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{k}$

i) $\vec{i} \times (3\vec{i} + 2\vec{k})$; $\vec{i} \cdot (3\vec{i} + 2\vec{k})$

j) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{v})$; $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{v})$

k) $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$; $(\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}))\vec{u}$

2. Soit $\vec{v_1} = (3, -4)$, $\vec{v_2} = (5, 2)$, $\vec{v_3} = (-2, 5)$, $\vec{v_4} = (4, 5, -2)$, $\vec{v_5} = (3, -7, 1)$, $\vec{v_6} = (2, -3, 1)$, $\vec{v_7} = (0, -4, 5, 6)$ et $\vec{v_8} = (-2, 4, -1, 0)$. Calculer, si c'est possible, les expressions suivantes.

a) $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}$

b) $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$

c) $\vec{v_2} \cdot \vec{v_3}$

d) $\vec{v_4} \cdot \vec{v_8}$

e) $\vec{v_4} \times \vec{v_5}$

f) $\vec{v_5} \times \vec{v_4}$

g) $(\vec{v_4} \times \vec{v_5}) \cdot \vec{v_6}$

h) $\vec{v_4} \cdot (\vec{v_5} \times \vec{v_6})$

i) $\vec{v_5} \cdot (\vec{v_5} \times \vec{v_6})$

j) $\vec{v_4} \times (\vec{v_5} \times \vec{v_6})$

k) $\vec{v_4} \times (\vec{v_5} \times \vec{v_5})$

l) $(\vec{v_4} \times \vec{v_5}) \times \vec{v_5}$

m) $\vec{v_7} \cdot \vec{v_8}$

n) $\vec{v_7} \times \vec{v_8}$

3. Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, des vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la nature (scalaire ou vecteur) des expressions suivantes si elles sont définies.

a) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

b) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

d) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \times (\vec{u} \times \vec{v})$

e) $(\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{u} \times \vec{v})$

f) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (2\vec{v} + 4\vec{w})$

g) $(\vec{v} \times \vec{w}) \times (\vec{O} \times \vec{u})$

h) $(\vec{v} \times \vec{w}) \times (0\vec{u})$

i) $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (0\vec{u})$

j) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{w} \times \vec{v})$

k) $(\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \cdot \vec{w}$

l) $\|\vec{v} \times \vec{w}\| + \vec{v} \cdot \vec{w}$

m) $\dfrac{1}{\|\vec{v}\|}(\vec{u} \cdot \vec{v})$

n) $\dfrac{1}{\|\vec{v}\|}(\vec{u} \times \vec{v})$

4. Soit $\vec{u} = (3, -4, 2)$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$, où A(1, 0, -3) et B(2, 3, 1). Déterminer :

a) $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{w}\|$

b) $|\vec{u} \cdot \vec{w}|$

c) $\|\vec{u} \times \vec{w}\|$

d) $|\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})|$

5. Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$, des vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$, et θ, l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Répondre par vrai (V) ou faux (F). Justifier votre réponse.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

b) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$

c) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$

e) $\vec{u} \times \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta$

f) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta$

g) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

h) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \times (\vec{u} \cdot \vec{w})$

i) $\dfrac{1}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta}(\vec{u} \times \vec{v})$, où $0 < \theta < \pi$, est un vecteur unitaire.

j) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$

k) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} /\!/ \vec{v}$

l) Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont quatre vecteurs coplanaires, alors $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{w} \times \vec{t}) = \vec{O}$.

6. a) Calculer l'angle θ formé par les vecteurs suivants.

i) $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ et $\vec{v} = -12\vec{i} + 5\vec{j}$

ii) $(\vec{u} - \vec{v})$ et $(\vec{u} + \vec{v})$ si $\vec{u} = (-3, 2)$ et $\vec{v} = (3, 10)$

iii) $\overrightarrow{PQ}$, où P(7, 6, -3) et Q(3, 9, 2), et $\overrightarrow{RS}$, où R(-1, 0, 7) et S(-3, 4, 3)

iv) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = |\vec{u} \cdot \vec{v}|$

b) Calculer les angles directeurs des vecteurs suivants.

i) $\overrightarrow{PQ}$, où P(-2, 9) et Q(-4, 5)

ii) $\vec{u} = (a, 2a, -3a)$, où $a > 0$

7. Soit $\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 5\vec{i} + r\vec{j}$. Déterminer r tel que

a) $\vec{u} \perp \vec{v}$; b) $\vec{u} /\!/ \vec{v}$;

c) l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est de 60° ;

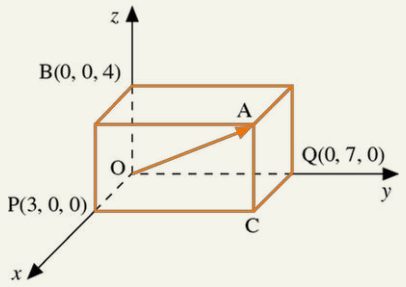
d) l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est de 120° ;

e) l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est de 30° ;

f) $\vec{u} = r(5\vec{i} - 2\vec{j})$ est parallèle à l'axe des x ;

g) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{90}$.

8. Soit le parallélépipède droit suivant.



Déterminer l'angle formé par $\overrightarrow{OA}$ et

a) l'axe des x ; **b)** l'axe des y ; **c)** l'axe des z ;

d) $\overrightarrow{BA}$; **e)** $\overrightarrow{CB}$; **f)** $\overrightarrow{OC}$.

9. Soit $\vec{u} = (3, 4, 6)$, $\vec{v} = (2, 1, 4)$ et $\vec{w} = (2, 3, c)$.

a) Déterminer les valeurs de c telles que

i) $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux ;

ii) l'angle formé par $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est de 45° ;

iii) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ engendrent un parallélépipède de volume égal à 25 u^3 ;

iv) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ engendrent un tétraèdre de volume égal à 25 u^3 ;

v) l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{w}$ est de $\sqrt{14}$ u^2 ;

vi) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ;

vii) $(\vec{u} \times \vec{w})$ et $(\vec{u} \times \vec{v})$ sont parallèles ;

viii) $(\vec{u} \times \vec{w})$ et $(\vec{v} \times \vec{w})$ sont parallèles.

b) Déterminer deux vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$

i) unitaires perpendiculaires à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;

ii) de longueur 5, perpendiculaires à $\vec{u}$ et à l'axe des x.

10. Soit $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{w} = (-1, 2, 5)$, $\vec{r} = (-2, 3)$ et $\vec{t} = (5, -7)$. Calculer :

a) $\vec{r}_{\vec{i}}$ et $\vec{t}_{\vec{r}}$ b) $\vec{u}_{\vec{v}}$ et $\|\vec{v}_{\vec{u}}\|$

c) $\vec{w}_{\vec{u}}$ et $\|\vec{u}_{\vec{w}}\|$ d) $\vec{w}_{(\vec{u}+\vec{v})}$ et $(\vec{w}_{\vec{u}} + \vec{w}_{\vec{v}})$

e) $(\vec{u} + \vec{v})_{\vec{w}}$ et $(\vec{u}_{\vec{w}} + \vec{v}_{\vec{w}})$ f) $\vec{u}_{\vec{i}}$ et $\vec{i}_{\vec{u}}$

g) $(\vec{v}_{\vec{i}} + \vec{v}_{\vec{j}} + \vec{v}_{\vec{k}})$ et $\vec{v}_{(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})}$ **h)** $\vec{u}_{(\vec{u}\times\vec{w})}$ et $(\vec{u} \times \vec{w})_{\vec{v}}$

11. Si $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = -5$, calculer :

a) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

b) $(2\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{v}$

c) $3\vec{u} \cdot (2\vec{w} \times (-4\vec{v}))$

12. LIEU GÉOMÉTRIQUE

Soit les points O(0, 0) et P(4, 4). Déterminer et représenter graphiquement le lieu géométrique L des points Q(x, y) tels que

a) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ **b)** $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 12$

c) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = -8$ d) $\|\overrightarrow{PQ}\| = 3$

e) $\|\overrightarrow{OQ}\| = \|\overrightarrow{PQ}\|$ **f)** $\|\overrightarrow{PQ}\| = y$

13. APPLICATION | COÛT ET PROFIT

Le mois dernier, un magasin a vendu 152 paires de chaussures de course, 97 paires de chaussures de golf, 264 paires de chaussures de soccer et 145 paires de chaussures de tennis. Ces chaussures sont vendues respectivement 79,99 $, 132,49 $, 99,99 $ et 118,39 $ la paire (sans les taxes), et coûtent respectivement au détaillant 40 $, 59 $, 51 $ et 60 $ la paire.

a) Déterminer un vecteur algébrique

i) $\vec{n}$, qui représente le nombre de paires de chaussures vendues ;

ii) $\vec{p}$, qui représente le prix des chaussures vendues (sans les taxes) ;

iii) $\vec{c}$, qui représente le coût des chaussures.

b) Effectuer $\vec{n} \cdot \vec{p}$ et interpréter le résultat.

c) Exprimer, sous forme de produit scalaire, le coût C de toutes les paires de chaussures vendues par le détaillant le mois dernier et calculer ce coût.

d) i) Exprimer, sous forme de produit scalaire, le profit P réalisé sur la vente de chaussures le mois dernier.

ii) Déterminer ce profit.

14. APPLICATION | GÉNÉTIQUE

Le tableau suivant contient les fréquences relatives de quatre allèles (caractères héréditaires) dans quatre populations.

Allèle	Population britannique	Population canadienne	Population française	Population vietnamienne
a_1	0,26	0,41	0,37	0,32
a_2	0,30	0,27	0,23	0,20
a_3	0,18	0,14	0,21	0,29
a_4	0,25	0,16	0,18	0,17

La distance génétique entre deux populations étant définie comme l'angle formé par les vecteurs correspondant aux populations, déterminer les populations qui sont

a) les plus rapprochées génétiquement ;

b) les plus éloignées génétiquement.

15. Soit $\vec{u} = (4, 3)$ et $\vec{v} = (7, 3)$.

a) Déterminer l'angle θ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) Déterminer $\vec{u}_{(\vec{u}+\vec{v})}$ et $\vec{v}_{(\vec{u}+\vec{v})}$.

c) Comparer $(\vec{u} + \vec{v})$ avec $(\vec{u}_{(\vec{u}+\vec{v})} + \vec{v}_{(\vec{u}+\vec{v})})$.

d) Déterminer l'angle α entre $\vec{u}$ et $(\vec{u} + \vec{v})$.

e) Déterminer l'angle β entre $\vec{v}$ et $(\vec{u} + \vec{v})$.

16. APPLICATION | TRAVAIL

a) On déplace un objet du point A(3, 7) au point B(5, 10) en appliquant une force $\vec{F}$ telle que $\vec{F} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$, où $\vec{F}$ est exprimée en newtons, et le déplacement est exprimé en mètres.

i) Calculer le travail W effectué par $\vec{F}$.

ii) Déterminer l'angle formé par le déplacement effectué et $\vec{F}$.

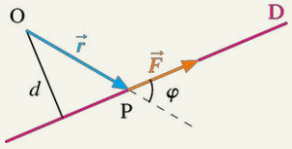
b) Déterminer le travail W, en joules, effectué par une force $\vec{F} = (2, -3, 4)$ pour déplacer un objet

i) le long du vecteur $\vec{r}$, où $\vec{r} = (1, 5, 6)$;

ii) du point P(1, -2, 5) au point Q(6, 4, 8).

17. APPLICATION | MOMENT DE FORCE

Soit une force $\vec{F}$ appliquée à l'extrémité P d'une tige qui pivote en son origine O. La norme du moment de force τ de cette force $\vec{F}$ est définie par $\|\vec{\tau}\| = \|\vec{F}\| d$, où d est la distance, en mètres, entre le point O et la droite d'action D de $\vec{F}$. Démontrer que $\|\vec{\tau}\| = \|\vec{r} \times \vec{F}\|$.



18. APPLICATION | MOMENT DE FORCE

En tournant une clé plate, on veut que la norme du moment de force soit de 12 joules. Si on applique une force de 75 N à 18 cm de l'axe de rotation, déterminer à quel angle par rapport à la clé on doit appliquer cette force.

19. APPLICATION | MOMENT DE FORCE ET FORCE

Daphné veut desserrer un écrou d'une roue de voiture. À l'aide d'une clé de 30 cm de longueur, il faut exercer une force de 455 N selon un angle de 90°.



a) Calculer la norme du moment de force τ.

b) Déterminer la force, en newtons, que Daphné doit appliquer à chacune des extrémités de deux segments opposés d'une clé en forme de croix pour desserrer cet écrou, si chaque segment mesure

i) 17 cm ;

ii) 24 cm.

20. APPLICATION | ÉLECTRICITÉ : PUISSANCE

La puissance P, en watts, nécessaire au fonctionnement d'un moteur électrique est donnée par la formule $P = VI \cos \theta$, où V représente la tension en volts, I, l'intensité du courant en ampères, et θ, l'angle de phase entre la tension et l'intensité.

a) Déterminer la formule de P sous forme de produit scalaire.

b) Un moteur électrique branché à une alimentation de 120 V, tire un courant de 4 A avec un angle de phase de 14°. Déterminer la puissance électrique de ce moteur.

21. PARALLÉLOGRAMME

Calculer l'aire A

a) du parallélogramme engendré par

i) $\vec{u} = (-2, 3, 1)$ et $\vec{v} = (1, 5, -4)$;

ii) $\vec{u} = (3, 4)$ et $\vec{v} = (4, 3)$;

iii) les diagonales $\vec{u} = (10, 2)$ et $\vec{v} = (2, -2)$;

b) du rectangle PQRS, où P(19, -22), Q(2019, 178) et R(21, y), où $y \in \mathbb{R}$;

c) des parallélogrammes déterminés par les sommets P(2, -1, 3), Q(1, 5, 4) et R(-5, 0, 6).

22. AIRE D'UN TRIANGLE

Déterminer l'aire A, les angles et la nature du triangle dont les sommets sont

a) P(5, 2), Q(1, 1) et R(-4, 3) ;

b) P(3, 2, 6), Q(5, -1, 11) et R(4, 6, 8) ;

c) P(1, 1, 1), Q(1, 1, 0) et R(1, 0, 1).

23. TRIANGLE RECTANGLE

Déterminer s'il est possible de former un triangle rectangle en utilisant des vecteurs équipollents aux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ suivants.

a) $\vec{u} = (4, 5, 2)$, $\vec{v} = (3, 2, 1)$ et $\vec{w} = (1, 3, 1)$

b) $\vec{u} = (1, -3, 5)$, $\vec{v} = (3, -2, 1)$ et $\vec{w} = (2, 1, -4)$

c) $\vec{u} = (1, 2, -4)$, $\vec{v} = (-13, b, c)$ et $\vec{w} = (a, 3, -2)$

24. TANGENTE À UN CERCLE

Soit le cercle de centre C(12, -5) et de rayon $r = 13$ unités.

a) Déterminer le point de rencontre R des deux tangentes au cercle, aux points d'intersection du cercle et de l'axe des x.

b) Déterminer l'angle aigu θ formé par ces deux tangentes.

25. VOLUME D'UN PARALLÉLÉPIPÈDE

Calculer le volume V du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ suivants et déterminer si ces vecteurs sont coplanaires.

a) $\vec{u} = (-2, 2, 1)$, $\vec{v} = (5, 0, 1)$ et $\vec{w} = (4, -2, 1)$

b) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{j} + \vec{k}$

c) $\vec{u} = (3, -2, 1)$, $\vec{v} = (-1, 4, 3)$ et $\vec{w} = (1, 1, 2)$

26. VOLUME D'UN TÉTRAÈDRE

Calculer le volume V du tétraèdre

a) engendré par $\vec{u} = (-2, 2, 1)$, $\vec{v} = (5, 0, 1)$ et $\vec{w} = (4, -2, 1)$;

b) dont les sommets sont les points P(1, 2, 0), Q(-2, 1, 2), R(3, -2, 0) et S(-1, 3, -4).

27. AIRE D'UN TRIANGLE ET VOLUME D'UN TÉTRAÈDRE

a) Représenter le triangle dont les sommets sont les points P(0, 4, 4), R(4, 0, 4) et S(4, 4, 0), et représenter le triangle dont les sommets A, B et C sont respectivement les points milieux des segments de droite $\overline{PR}$, $\overline{PS}$ et $\overline{RS}$.

b) Calculer l'aire des triangles PRS et ABC.

c) Calculer le volume des tétraèdres OPRS et OABC.

28. TRIANGLE RECTANGLE

À l'aide du produit scalaire, démontrer que, dans un triangle rectangle, le point milieu de l'hypoténuse est à égale distance des trois sommets du triangle.

29. Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$, des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que :

a) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

b) $(\vec{w} \times \vec{t}) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = ((\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{t})\vec{u} - ((\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{t})\vec{v}$

c) si $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ et si $\vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$, alors $\vec{w} = \vec{O}$ et $\vec{v} = \vec{O}$

d) $\vec{u} \cdot ((\vec{v} - \vec{u}) \times (\vec{w} - \vec{u})) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

30. a) Exprimer $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ en fonction de $\|\vec{u}\|^2$ et de $\|\vec{v}\|^2$.

b) Démontrer que, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non nuls et non parallèles, $(\vec{u} - \vec{v})$ est perpendiculaire à $(\vec{u} + \vec{v})$ si et seulement si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

31. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

a) Démontrer que $\vec{u} \cdot \vec{v}_{\vec{u}} = \vec{v} \cdot \vec{u}_{\vec{v}}$.

b) Démontrer que $\|\vec{u}_{\vec{v}}\| = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{v}\|}$.

Problèmes de synthèse

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs non nuls. Compléter les énoncés suivants.

a) L'angle formé par $\vec{u}_{\vec{v}}$ et $\vec{v}$ est égal à…

b) Si $\vec{u}_{\vec{v}} = \vec{O}$, alors…

c) $(\vec{u} \times \vec{v})_{\vec{u}} = \ldots$

d) Si $\vec{u}_{\vec{v}} = \vec{v}$ et $\vec{u} \neq \vec{v}$, alors le triangle engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un triangle…

e) Si $\vec{u}_{\vec{v}} = \vec{O}$, alors le parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un…

f) $(\vec{u} - \vec{u}_{\vec{v}})$ est un vecteur orthogonal à…

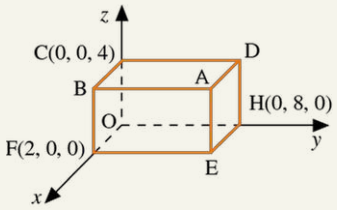
g) Si $\vec{u}_{\vec{v}} = \vec{v}_{\vec{u}}$, alors…

h) Si $(\vec{u}_{\vec{v}})_{\vec{u}} = \vec{u}$, alors…

i) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs unitaires et si θ est l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \ldots$

2. VOLUME D'UN PARALLÉLÉPIPÈDE

Soit le parallélépipède droit ci-dessous.



P_1 est le point de rencontre des segments de droite $\overline{AF}$ et $\overline{BE}$; P_2 est le point de rencontre des segments de droite $\overline{ED}$ et $\overline{AH}$; P_3 est le point de rencontre des segments de droite $\overline{OB}$ et $\overline{CF}$; P_4 est le point de rencontre des segments de droite $\overline{BD}$ et $\overline{AC}$. Calculer le volume V du parallélépipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ et $\overrightarrow{P_1P_4}$.

3. DIAGONALES D'UN PARALLÉLÉPIPÈDE

a) Soit un cube dont les arêtes mesurent a cm.

i) Calculer l'angle aigu entre deux diagonales, situées sur les faces du cube, issues d'un même sommet.

ii) Calculer l'angle aigu entre deux diagonales issues d'un même sommet, dont l'une est située sur une face du cube et l'autre est la grande diagonale.

iii) Calculer l'angle aigu entre les grandes diagonales du cube.

b) Déterminer les trois angles aigus que forment deux grandes diagonales d'un parallélépipède droit dont les arêtes mesurent a, $2a$ et $3a$.

4. TRIANGLE ET TÉTRAÈDRE

Soit le triangle dont les sommets sont P(1, -3, 2), Q(-2, 0, 4) et R(3, 6, 6).

a) Représenter le triangle PQR et déterminer les angles intérieurs de ce triangle.

b) Calculer l'aire A de ce triangle.

c) Calculer le volume V du tétraèdre dont la base est le triangle PQR et dont le quatrième sommet est D(5, -2, 4).

d) Calculer l'aire A_z du triangle obtenu en projetant le triangle PQR sur le plan XOY.

e) Calculer l'aire A_x du triangle obtenu en projetant le triangle PQR sur le plan YOZ.

f) Calculer l'aire A_y du triangle obtenu en projetant le triangle PQR sur XOZ.

g) Exprimer A en fonction de A_x, de A_y et de A_z.

5. PARALLÉLOGRAMME

Soit le parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{OA} = (4, 0)$ et $\overrightarrow{OB} = (3, 3\sqrt{3})$.

a) Calculer l'aire du parallélogramme.

b) Calculer l'aire du rectangle

i) de plus petite aire contenant le parallélogramme précédent ;

ii) de plus grande aire contenu dans le parallélogramme précédent.

6. POLYÈDRE

Soit les points coplanaires P(2, 1, 0), Q(3, -2, 2), R(-1, -3, 7) et S(-2, 2, 3).

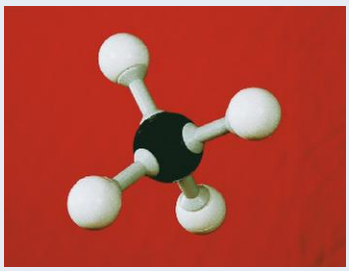
a) Calculer l'aire A du quadrilatère PQRS.

b) Calculer le volume V du polyèdre dont la base est le quadrilatère PQRS et dont le cinquième sommet est le point T(5, 2, 7).

c) Déterminer la hauteur h du polyèdre précédent.

7. APPLICATION | MOLÉCULE DE MÉTHANE

Nous pouvons construire une représentation géométrique de la molécule de méthane CH_4 (C pour carbone, H pour hydrogène) en plaçant C au centre d'un tétraèdre régulier dont les sommets sont définis par les quatre atomes d'hydrogène.
Si les quatre atomes d'hydrogène sont situés aux points O(0, 0, 0), P(1, 1, 0), Q(1, 0, 1) et R(0, 1, 1),



a) déterminer la position de C ;

b) vérifier que le tétraèdre est régulier ;

c) déterminer les angles formés par les quatre valences prises deux par deux consécutivement, c'est-à-dire l'angle formé par les segments de droite joignant C à deux sommets consécutifs.

8. APPLICATION | PROFIT

Un magasin de jouets prévoit vendre 150 camions, 130 poupées, 400 balles, 160 ballons et 90 autos téléguidées au cours de la semaine prochaine. Le prix

de vente respectif de chaque article est de 40 $, 30 $, 15 $, 45 $ et 80 $; le coût d'achat respectif de chaque article par le détaillant est de 17 $, 13 $, 6 $, 19 $ et 35 $. Les dirigeants du magasin estiment que, s'ils baissent le prix de chacun des articles de 20 %, les ventes de chaque article augmenteront de 50 % et le fournisseur leur allouera un rabais de 5 % sur le coût d'achat de chaque article.

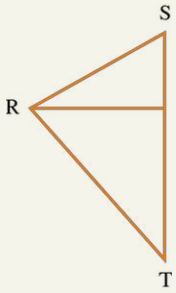
a) Déterminer six vecteurs représentant cette situation.

b) i) Calculer, à l'aide du produit scalaire, la variation V_P des profits si les dirigeants décident de réduire les prix de 20 % et si le fournisseur alloue le rabais de 5 %.

ii) Cette décision est-elle rentable ?

9. APPLICATION | SIGNAL D'UNE STATION DE RADIO

La représentation ci-contre nous informe sur la position relative des villes R, S et T. Nous savons que S est à 39 km de R et à 63 km au nord de T. De plus, nous savons que R est à 36 km à l'ouest de la route reliant S et T.



a) Déterminer $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$.

b) Le propriétaire d'une petite station de radio amateur située au point S émet un signal qui peut être capté en un seul point P sur la route reliant les villes R à T.
Soit d, la distance entre R et P. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{PS}$ en fonction de d.

c) Déterminer d en calculant $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{PS}$.

d) Déterminer le rayon d'émission de la station émettrice.

e) Le propriétaire de la station décide de s'installer à l'intérieur du triangle RST en un point C situé à égale distance des villes R, S et T. Démontrer que $\angle SCT = 2(\angle SRT)$.

f) Le signal émis par la station installée au point C pourra-t-il être capté par les trois villes ?

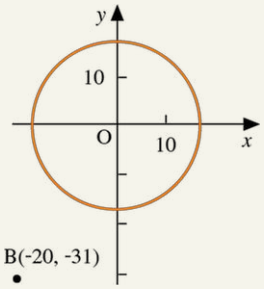
10. APPLICATION | TRAJECTOIRE D'UN BATEAU

Le vecteur $\vec{e} = (1, 0)$ représente un déplacement de un kilomètre vers l'est, et le vecteur $\vec{n} = (0, 1)$ représente un déplacement de un kilomètre vers le nord.

Un phare entouré entièrement d'eau est situé au point O ; ce phare n'est pas visible à une distance supérieure à 17 kilomètres.

Un bateau est situé en un point B, à 20 kilomètres à l'ouest et à 31 kilomètres au sud du phare. Ce bateau se déplace parallèlement au vecteur $\vec{u} = (3, 4)$ à une vitesse de 25 km/h.





a) Déterminer la position P_1 du bateau après 30 minutes et vérifier si le phare est visible de P_1.

b) Déterminer la position P_2 du bateau après 1 heure et vérifier si le phare est visible de P_2.

c) Déterminer après combien de temps à partir de B le phare devient visible et donner la position P_3 du bateau à cet instant.

d) Déterminer la distance minimale entre la trajectoire du bateau et le phare.

e) Déterminer la position P_4 du bateau quand le phare redevient invisible.

11. AIRE D'UN TRIANGLE

Soit le triangle PQR où $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$ et $R(r_1, r_2)$.

a) Démontrer que la valeur absolue de

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix}$$

est égale à l'aire A du triangle PQR.

b) Calculer l'aire A du triangle PQR dont les sommets sont P(3, 4), Q(6, 3) et R(-1, 2).

12. AIRE D'UN TRIANGLE

Soit $\overrightarrow{AB} = (6, -2, 3)$ et $\overrightarrow{AC} = (-2, -3, 2)$.

a) Déterminer $\overrightarrow{BC}$.

b) Déterminer les coordonnées du point Q, tel que $\overrightarrow{PQ}$ est un vecteur unitaire parallèle à $\overrightarrow{BC}$, où P(1, -3, 5).

c) Déterminer l'angle formé par les vecteurs

i) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$;

ii) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

d) Déterminer l'aire du triangle ABC de deux façons différentes.

13. VOLUME D'UN TÉTRAÈDRE

Soit le tétraèdre ABCD, où A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3) et D(d_1, d_2, d_3).

a) Démontrer que la valeur absolue de

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{vmatrix}$$

est égale au volume V du tétraèdre ABCD.

b) Calculer le volume V du tétraèdre dont les sommets sont A(-1, 3, 2), B(5, 0, -2), C(0, -3, 4) et D(2, 5, -3).

14. APPLICATION | POIDS D'UN TÉTRAÈDRE

Un sculpteur taille dans un cube de pierre de 0,5 mètre d'arête un tétraèdre dont les 6 arêtes sont des diagonales du cube. Sachant que le cube de densité uniforme pèse 80 kilogrammes, déterminer le poids en kilogrammes du tétraèdre.

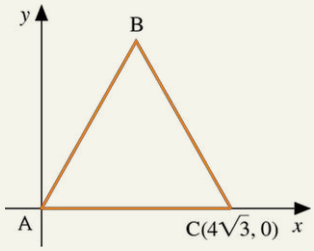
15. ORTHOCENTRE

a) Démontrer que les trois hauteurs d'un triangle équilatéral ABC se rencontrent en un point P, appelé **orthocentre**, au tiers de leur longueur.

b) Soit M, un point quelconque du plan contenant les trois sommets du triangle précédent. Exprimer $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{MP}$.

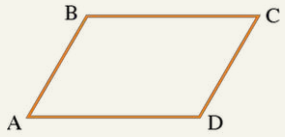
c) Démontrer que $\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 + \|\overrightarrow{MC}\|^2 = 3\|\overrightarrow{MP}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2$.

d) Dans le triangle équilatéral ABC ci-contre, déterminer les coordonnées du point P, point de rencontre des trois hauteurs.



16. PARALLÉLOGRAMME

Soit le parallélogramme ABCD ci-contre.



a) Démontrer, à l'aide du produit scalaire, que $\cos \angle ABC = -\cos \angle BCD$.

b) Si les coordonnées des points A, B, C et D sont des entiers, déterminer si l'aire du parallélogramme ABCD est un entier lorsque

i) A, B, C et D $\in \mathbb{R}^2$;

ii) A, B, C et D $\in \mathbb{R}^3$.

17. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Démontrer :

a) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (inégalité de Minkowski)

b) $\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|$

18. a) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, des vecteurs non nuls tels que $\vec{u} \perp \vec{v}$ et $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Exprimer a et b en fonction de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

b) Démontrer que si $\vec{v} \perp \vec{u}$ et $\vec{v} \perp \vec{w}$, alors $\vec{v} \perp (a\vec{u} + b\vec{w})$, où a et $b \in \mathbb{R}$.

c) Soit $\vec{u} = (2, -3, 4)$, $\vec{v} = (1, 2, 1)$ et $\vec{w} = (8, 4, -1)$. Démontrer que $\vec{u}$ est perpendiculaire à tout vecteur engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

19. Soit $\vec{u} = (6, -1, 5)$, $\vec{v} = (3, -2, -4)$ et $\vec{t} = (1, 1, 1)$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminer

a) l'angle θ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

b) un vecteur $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, où $w_1 > 0$, tel que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ et exprimer le vecteur $\vec{s} = (7, -47, 7)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en utilisant la notion de produit scalaire.

c) une base orthonormée $\{\vec{u_1}, \vec{v_1}, \vec{w_1}\}$ de $\mathbb{R}^3$ à partir de la base trouvée en b);

d) une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ contenant $\vec{t}$.

20. Soit $\boldsymbol{u} = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{v} = (2, -1, -1, 0)$, $\boldsymbol{w} = (1, 1, 1, -3)$ et $\boldsymbol{t} = (a, b, 1, c)$. Déterminer les valeurs de a, b et c telles que $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{t}\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^4$, sachant que deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$ sont orthogonaux lorsque le produit scalaire des deux vecteurs est nul.

21. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$.

a) Démontrer que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{O}$ si et seulement si $\vec{u}$ est parallèle à $\vec{v}$ (théorème 6.8).

b) Démontrer l'identité de Lagrange :

$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ (théorème 6.9)

c) Démontrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants, alors $\{\vec{u}, (\vec{u} \times \vec{v}), \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

d) Soit $\vec{u} = (-1, 0, 2)$ et $\vec{v} = (3, -2, 5)$. À l'aide de c), déterminer une base orthogonale obtenue à partir de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

7 La droite dans le plan cartésien



Perspective historique 348
Exercices préliminaires 349
7.1 Équations de la droite dans le plan cartésien 350
7.2 Position relative de deux droites et angle formé par deux droites dans le plan cartésien 363
7.3 Distance entre un point et une droite, et distance entre deux droites parallèles dans le plan cartésien 372
Révision des concepts 382
Exercices récapitulatifs 383
Problèmes de synthèse 387

Dans ce chapitre, nous étudierons la droite dans le plan cartésien et nous déterminerons différents types d'équations pouvant définir cette même droite. Ces équations seront obtenues en utilisant les vecteurs ainsi que certaines de leurs propriétés. Nous verrons également les positions relatives possibles de deux droites. De plus, nous calculerons la distance entre un point et une droite en utilisant la notion de projection.

En particulier, l'étudiant pourra résoudre le problème suivant (qui se trouve au n° 14 des problèmes de synthèse, à la page 390).

Soit les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ représentant respectivement un déplacement de un kilomètre vers l'est et un déplacement de un kilomètre vers le nord. Un signal émis à partir de la position O(0, 0) peut être capté à l'intérieur d'un cercle dont le rayon est de 75 km. Un bateau, qui se trouve en un point P à 61 kilomètres à l'ouest de O et à 72 kilomètres au nord de O, se déplace parallèlement au vecteur (4, -3) à une vitesse de 10 km/h.

a) Déterminer une équation vectorielle de la trajectoire rectiligne B du bateau, où le paramètre t est exprimé en heures.

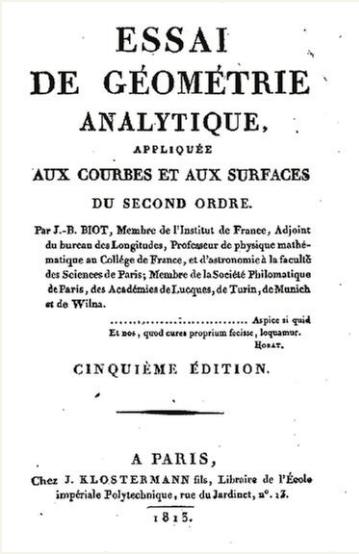
b) Soit R, la position du bateau deux heures après avoir quitté le point P. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{OR}$.

c) Le bateau peut-il capter le signal lorsqu'il atteint le point R ?

[…]

De la géographie à l'équation de la droite dans le plan

Les origines de la géométrie analytique sont souvent associées à **René Descartes** (1596-1650) parce que le plan cartésien, qualifié ainsi en l'honneur de ce dernier, est à la base de l'étude des coordonnées des points. Pourtant, l'idée d'utiliser deux nombres, que nous appelons aujourd'hui coordonnées, pour déterminer la position d'un point dans un plan remonte à l'Antiquité grecque alors que les géographes parlaient déjà de longitude et de latitude pour définir la position d'une ville. Toutefois, il faut beaucoup plus que le plan cartésien pour faire de la géométrie. Un langage symbolique et une méthode pour traduire dans un tel langage les propriétés géométriques des objets étudiés constituent aussi des éléments essentiels de la géométrie analytique. Dans un appendice au *Discours de la méthode* (1637), Descartes explique comment utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes de géométrie et démontre la puissance de sa nouvelle méthode en résolvant des problèmes qui, jusque-là, avaient résisté aux tentatives des mathématiciens les plus talentueux. En fait, dès 1629, Pierre de Fermat (1601-1665) avait avancé des idées semblables à celles de Descartes, mais lorsqu'elles sont finalement publiées, après sa mort, le nom de Descartes est déjà fermement associé à ce qu'on appelle alors « l'application de l'algèbre à la géométrie ».


ESSAI
DE GÉOMÉTRIE
ANALYTIQUE,
APPLIQUÉE
AUX COURBES ET AUX SURFACES
DU SECOND ORDRE.
Par J.-B. BIOT, Membre de l'Institut de France, Adjoint du bureau des Longitudes, Professeur de physique mathématique au Collége de France, et d'astronomie à la faculté des Sciences de Paris; Membre de la Société Philomatique de Paris, des Académies de Lucques, de Turin, de Munich et de Wilna.
..... Aspice si quid
Et nos, quod cures proprium fecisse, loquamur.
HORAT.
CINQUIÈME ÉDITION.
A PARIS,
Chez J. KLOSTERMANN fils, Libraire de l'École impériale Polytechnique, rue du Jardinet, n°. 13.
1815.

Page titre de la cinquième édition du manuel de Jean-Baptiste Biot dans lequel l'expression « géométrie analytique » apparaît pour la première fois dans le titre d'un livre.

Dans son ouvrage, Descartes n'étudie pas la droite. Fermat, pour sa part, avait établi que l'équation de la droite passant par l'origine était *D in A aequatur B in E*, qui se traduirait aujourd'hui par $y = ax$. La droite, facile à étudier en utilisant simplement les proportions, restera plus ou moins absente de tous les traités publiés jusqu'à la seconde moitié du XVIII^e siècle. Dans son œuvre posthume *A Treatise of Algebra* (1748), **Colin Maclaurin** (1698-1746) s'intéresse vraiment à la droite et donne pour la première fois une présentation qui repose sur l'idée de pente. Toutefois, comme à l'époque en algèbre une lettre représente encore uniquement une quantité positive, l'équation générale de la droite prend une forme plutôt lourde. Ainsi, dans son traité de 1750, lorsqu'il décrit la règle de Cramer, Gabriel Cramer (1704-1752) traduit l'équation générale de la droite par $a = \pm by \pm cx$, où a, b, y, c, x ne peuvent prendre que des valeurs positives et où les signes doivent être ajustés en conséquence.

Ce ne sont pas des impératifs mathématiques qui amèneront les mathématiciens à aborder la droite de façon systématique, mais plutôt des impératifs pédagogiques. En effet, 1789 marque les débuts de la Révolution française. Or, parmi les idées sous-jacentes à ce grand mouvement social, celle de l'importance de l'enseignement pour l'ensemble de la population se matérialisera par la création d'un nouveau système d'éducation. Pour chapeauter ce système, on crée de grandes écoles, dont l'École polytechnique de Paris, fondée en 1794. Le gouvernement révolutionnaire compte dans ses rangs plusieurs scientifiques qui veulent s'assurer que les sciences et les mathématiques occupent une place importante dans l'enseignement. Aussi, le programme de la nouvelle École polytechnique accorde-t-il une large place aux mathématiques.

Cependant, à cette époque, il n'existe pas de manuels pouvant convenir à un jeune public. Gaspard Monge (1746-1818), membre du gouvernement, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) et **Sylvestre François Lacroix** (1765-1843) publient alors plusieurs manuels de mathématiques dans lesquels ils cherchent à présenter, d'une façon claire et compréhensible pour un jeune esprit, les bases des mathématiques de l'époque. Cette exigence pédagogique les amène à étudier les courbes correspondant aux expressions de tous les degrés et particulièrement à celles du premier degré, les droites. Les diverses formes que peut prendre l'équation de la droite, la perpendicularité des droites, en somme tout ce que comprend le programme de mathématiques actuel au secondaire par rapport aux droites est alors présenté sous une forme qui nous semble encore familière. En 1797, Lacroix propose l'expression « géométrie analytique » pour remplacer l'ancienne appellation « algèbre appliquée à la géométrie ». En 1802, Jean-Baptiste Biot (1774-1862), un des premiers élèves de l'École polytechnique de Paris, publie un manuel intitulé *Essai de géométrie analytique, appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre.* L'expression restera.

Avec la victoire des vecteurs sur les quaternions au début du XX^e siècle, la géométrie de la droite est traduite en termes vectoriels. Ce n'est plus la pente qui caractérise une droite, mais plutôt la direction de celle-ci et un point par lequel elle passe.

Exercices préliminaires

1. Déterminer, si c'est possible, la pente de la droite

a) passant par les points P(-2, 3) et R(3, -4) ;

b) passant par les points P(-5, 4) et R(7, 4) ;

c) d'équation $x = 3$;

d) d'équation $-3(x + 2) = y + 5$;

e) d'équation $y = 3$;

f) perpendiculaire à la droite $y = 3x + 1$.

2. Trouver l'équation de la droite qui passe par

a) P(-3, 7) et Q(3, 7) ;

b) P(-3, 7) et Q(-3, -7) ;

c) P(1, 7) et est parallèle à la droite d'équation $2y - 12x = -4$;

d) P(1, 7) et est perpendiculaire à la droite d'équation $2y - 12x = -4$.

3. Déterminer, si c'est possible, le ou les points de rencontre des droites suivantes en utilisant, s'il y a lieu, la méthode suggérée.

a) $D_1 : y = 5$ et $D_2 : x = -3$

b) $D_1 : 3x + 2y = 4$ et $D_2 : 4x + 5y = 3$ (méthode de Cramer)

c) $D_1 : y = 3x + 1$

D_2 passe par P(0, -1) et Q(1, 2)

d) $D_1 : 3x = y - 2$

D_2 passe par P(1, 5) et Q(0, 2) (méthode de Gauss)

4. a) Résoudre $|x - 3| = 7$.

b) Résoudre $|2x - 5| = |7 - 3x|$.

c) Déterminer l'ensemble-solution de $|x + 4y + 1| = |3x - 2y - 5|$ et représenter graphiquement cet ensemble.

5. Déterminer la distance séparant les points suivants.

a) A(2, -1) et B(-3, 4)

b) $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$

6. Compléter les équations suivantes.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} =$ ____

b) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CB} =$ ____

7. Soit $\vec{u} = (3, -5)$, $\vec{v} = (2, 2)$ et $\vec{w} = (5, 3)$.

a) Déterminer l'angle entre les vecteurs suivants.

i) $\vec{u}$ et $\vec{v}$

ii) $\vec{u}$ et $\vec{w}$

b) Déterminer un vecteur perpendiculaire à

i) $\vec{u}$;

ii) $\vec{v}$.

8. Soit P(4, -5), Q(-1, 2), $\vec{u} = (1, 4)$ et $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.

a) Déterminer $\vec{u}_{\vec{v}}$ et $\vec{u}_{-\vec{v}}$.

b) Calculer $\left\|\vec{v}_{\vec{u}}\right\|$ et $\left\|\vec{v}_{-3\vec{u}}\right\|$.

c) Calculer l'aire du triangle engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

d) Déterminer deux vecteurs unitaires perpendiculaires à $\overrightarrow{PQ}$.

7.1 Équations de la droite dans le plan cartésien

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra déterminer différentes équations pour une même droite du plan cartésien.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de déterminer un vecteur directeur d'une droite ;
- de déterminer une équation vectorielle d'une droite (É.V.) ;
- de déterminer des équations paramétriques d'une droite (É.P.) ;
- de déterminer une équation symétrique d'une droite (É.S.) ;
- de déterminer un vecteur normal à une droite ;
- de déterminer une équation cartésienne d'une droite (É.C.) ;
- de déterminer si un point appartient à une droite ;
- de déterminer l'équation d'une droite de régression exprimée sous la forme $y = a + bx$.

Soit $P(x_1, y_1)$, un point de D,
$\vec{u} = (c, d)$, un vecteur directeur de D, et
$\vec{n} = (a, b)$, un vecteur normal à D.

	Équations de la droite D
É.V.	$(x, y) = (x_1, y_1) + k(c, d)$, où $k \in \mathbb{R}$
É.P.	$\begin{cases} x = x_1 + kc \\ y = y_1 + kd \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$
É.S.	$\dfrac{x - x_1}{c} = \dfrac{y - y_1}{d}$, si $c \neq 0$ et $d \neq 0$
É.C.	$ax + by - c = 0$, où $c = ax_1 + by_1$

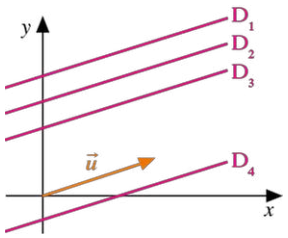
Dans cette section, nous utiliserons certaines propriétés des vecteurs pour déterminer une équation vectorielle, des équations paramétriques et une équation symétrique d'une droite dans le plan cartésien.

7

Équation vectorielle d'une droite dans le plan

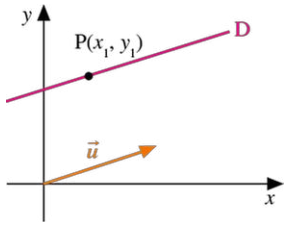
Il existe une infinité de droites parallèles à un vecteur non nul $\vec{u}$ donné.

$D_1 /\!/ D_2 /\!/ D_3 /\!/ D_4 /\!/ \vec{u}$



Il existe une seule droite D qui passe par le point $P(x_1, y_1)$ et qui est parallèle à un vecteur non nul $\vec{u}$ donné.

$D /\!/ \vec{u}$



Pour définir une droite dans le plan cartésien, il faut

- soit un vecteur directeur de cette droite et les coordonnées d'un point de cette droite ;
- soit les coordonnées de deux points distincts de cette droite.

DÉFINITION 7.1

Tout vecteur non nul $\vec{u}$ parallèle à une droite D du plan cartésien est appelé **vecteur directeur** de cette droite D.

Remarque : Si une droite D passe par les points $P(x_1, y_1)$ et $Q(x_2, y_2)$, alors

$\vec{u} = r(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$\vec{u} = r\overrightarrow{PQ}$, où $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, est un vecteur directeur de D.

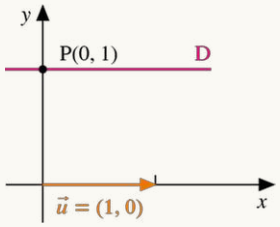
Exemple 1 Déterminons un vecteur directeur $\vec{u}$ pour chacune des droites D suivantes et représentons la droite et le vecteur directeur.

a) D passe par P(0, 1) et est parallèle à l'axe des x.

Soit $\vec{u} = \vec{i}$,

un vecteur directeur de D.

(car D // axe des x et $\vec{i}$ // axe des x)

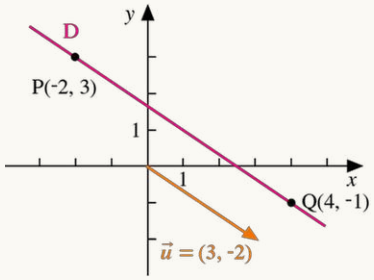


b) D passe par P(-2, 3) et Q(4, -1).

$\overrightarrow{PQ} = (6, -4)$.

Soit $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = (3, -2)$,

un vecteur directeur de D.



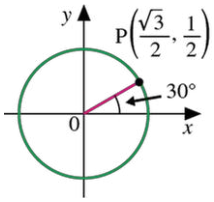
c) D passe par Q(2, 0) et forme un angle de 30° avec l'axe des x.

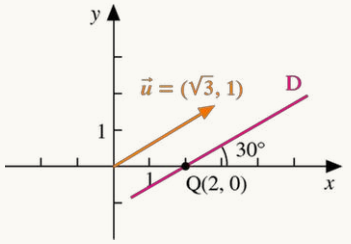
Les coordonnées du point P(30°), situé sur le cercle trigonométrique,

sont $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2}$, ainsi $\overrightarrow{OP} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Soit $\vec{u} = 2\overrightarrow{OP} = (\sqrt{3}, 1)$,

un vecteur directeur de D.



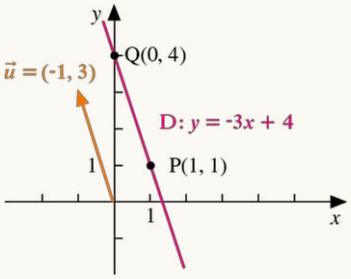


d) D dont l'équation est $y = -3x + 4$.

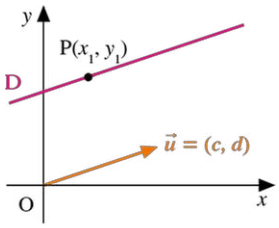
Soit P(1, 1) et Q(0, 4), deux points de D,

et soit $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-1, 3)$,

un vecteur directeur de D.

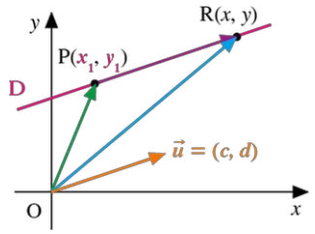


En utilisant certaines propriétés des vecteurs, déterminons une équation vectorielle de la droite D passant par le point $P(x_1, y_1)$ donné et ayant $\vec{u} = (c, d)$ comme vecteur directeur.



$\vec{u}$ est un vecteur directeur de D.

Soit $R(x, y)$, un point quelconque de la droite D.



Par la loi de Chasles, nous avons

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + k\vec{u}, \text{ où } k \in \mathbb{R} \qquad (\text{car } \overrightarrow{PR} /\!/ \vec{u})$$

$$(x - 0, y - 0) = (x_1 - 0, y_1 - 0) + k(c, d)$$

$$(x, y) = (x_1, y_1) + k(c, d)$$

DÉFINITION 7.2

Une **équation vectorielle** de la droite D du plan cartésien passant par le point $P(x_1, y_1)$ et ayant $\vec{u} = (c, d)$ comme vecteur directeur est donnée par

$$(x, y) = (x_1, y_1) + k(c, d), \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

Dans l'équation précédente, (x, y) est le vecteur $\overrightarrow{OR}$, où $R(x, y)$ est un point quelconque de la droite D, qui dépend de la valeur du paramètre k.

Nous identifions fréquemment la droite D de la façon suivante :

$$D : (x, y) = (x_1, y_1) + k(c, d), \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

L'équation vectorielle précédente peut également s'écrire sous la forme

$$D : (x, y) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + k(c, d), \text{ où } k \in \mathbb{R}.$$

7

Exemple 2

Équation vectorielle

a) Déterminons une équation vectorielle de la droite D passant par $P(3, -4)$ et ayant $\vec{u} = (-5, 2)$ comme vecteur directeur.

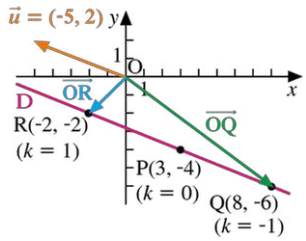
Par définition, $D : (x, y) = (3, -4) + k(-5, 2)$, où $k \in \mathbb{R}$, que nous pouvons également écrire

$$D : (x, y) = 3\vec{i} - 4\vec{j} + k(-5, 2), \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

Autres points de D

b) Déterminons d'autres points de la droite D.

En attribuant différentes valeurs à k, nous déterminons des vecteurs $\overrightarrow{OR}$ dont l'extrémité R est sur la droite D. Les composantes de ces vecteurs $\overrightarrow{OR}$ sont également les coordonnées des points R situés sur la droite. Par exemple :



i) en posant $k = 1$ dans l'équation $D : (x, y) = (3, -4) + k(-5, 2)$, nous obtenons

$$(x, y) = (3, -4) + 1(-5, 2) = (-2, -2). \text{ Ainsi, } \overrightarrow{OR} = (-2, -2),$$

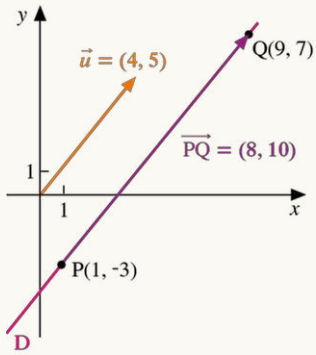
d'où $R(-2, -2)$ est un point de la droite D.

ii) en posant $k = -1$ dans l'équation de D, nous obtenons

$$(x, y) = (3, -4) + (-1)(-5, 2) = (8, -6). \text{ Ainsi, } \overrightarrow{OQ} = (8, -6),$$

d'où $Q(8, -6)$ est un autre point de la droite D.

Exemple 3 Déterminons une équation vectorielle de la droite D passant par les points P(1, -3) et Q(9, 7).



Soit $\overrightarrow{PQ} = (8, 10)$, un vecteur directeur de D.

Nous pouvons poser $\vec{u} = 0{,}5\overrightarrow{PQ}$, ainsi $\vec{u} = (4, 5)$ est un vecteur directeur de D.

Nous pouvons donc écrire

$$D : (x, y) = (1, -3) + k(4, 5), \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

Remarque : Il existe une infinité d'équations vectorielles de cette même droite selon le choix du point et du vecteur directeur de la droite.
Par exemple,

$$D : (x, y) = (1, -3) + r(-4, -5), \text{ où } r \in \mathbb{R}$$

$$D : (x, y) = (1, -3) + c(-12, -15), \text{ où } c \in \mathbb{R}$$

$$D : (x, y) = (9, 7) + s(4, 5), \text{ où } s \in \mathbb{R}$$

$$D : (x, y) = (9, 7) + t(8, 10), \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

Exercices de compréhension 7.1

1. Déterminer une équation vectorielle de la droite d'équation $y = 5x + 7$ en choisissant les points d'abscisse 0 et 1.

7

Équations paramétriques d'une droite dans le plan

À partir d'une équation vectorielle de la droite D,

$(x, y) = (x_1, y_1) + k(c, d)$, où $k \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$(x, y) = (x_1, y_1) + (kc, kd)$ (définition de la multiplication d'un vecteur par un scalaire)

$(x, y) = (x_1 + kc, y_1 + kd)$ (définition de l'addition de deux vecteurs)

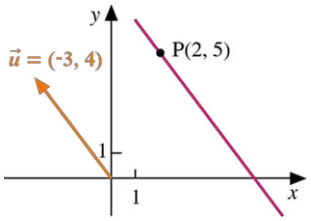
Par définition de l'égalité de vecteurs, nous obtenons

$$x = x_1 + kc \quad \text{et} \quad y = y_1 + kd$$

DÉFINITION 7.3

Des **équations paramétriques** de la droite D du plan cartésien passant par $P(x_1, y_1)$ et ayant $\vec{u} = (c, d)$ comme vecteur directeur sont données par

$$\begin{cases} x = x_1 + kc \\ y = y_1 + kd \end{cases}, \text{ où } k \in \mathbb{R} \text{ est le paramètre des équations paramétriques.}$$



Exemple 1 Déterminons des équations paramétriques de la droite D passant par P(2, 5) et ayant $\vec{u} = (-3, 4)$ comme vecteur directeur.

Nous avons D : $\begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = 5 + 4k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$

Exemple 2 Soit la droite D passant par les points P(-3, 3) et Q(-1, -2).

a) Déterminons des équations paramétriques de la droite D.

Puisque $\overrightarrow{PQ} = (2, -5)$ est un vecteur directeur de la droite D, nous avons

$$D : \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 3 - 5k \end{cases}, \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

(il existe une infinité d'équations paramétriques de cette droite)

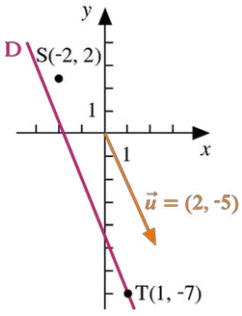
b) Déterminons si le point S(-2, 2) appartient à la droite D.

Il suffit de déterminer s'il existe une valeur unique $k \in \mathbb{R}$ telle que

$$-2 = -3 + 2k \quad \text{et} \quad 2 = 3 - 5k$$
$$k = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad k = \frac{1}{5}$$

(en résolvant chaque équation)

Ainsi, les valeurs de k sont différentes dans les deux équations, d'où $S(-2, 2) \notin D$.



c) Déterminons si le point T(1, -7) appartient à la droite D.

Il suffit de déterminer s'il existe une valeur unique $k \in \mathbb{R}$ telle que

$$1 = -3 + 2k \quad \text{et} \quad -7 = 3 - 5k$$
$$k = 2 \quad \text{et} \quad k = 2$$

(en résolvant chaque équation)

Ainsi, les valeurs de k sont identiques dans les deux équations, d'où $T(1, -7) \in D$.

Exercices de compréhension 7.1

2. Déterminer des équations paramétriques de la droite D qui passe par les points P(9, -6) et Q(7, -2).

Équation symétrique d'une droite dans le plan

À partir des équations paramétriques d'une droite D, nous pouvons obtenir une équation symétrique de cette droite lorsque les deux composantes du vecteur directeur sont différentes de zéro.

Pour ce faire, on isole le paramètre k des deux équations, puis on égalise les deux expressions obtenues.

Ainsi, de $\begin{cases} x = x_1 + kc \\ y = y_1 + kd \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$k = \frac{x - x_1}{c}, \text{ si } c \neq 0, \text{ et } k = \frac{y - y_1}{d}, \text{ si } d \neq 0$$

d'où $\frac{x - x_1}{c} = \frac{y - y_1}{d}$, si $c \neq 0$ et $d \neq 0$

DÉFINITION 7.4

Une **équation symétrique** de la droite D du plan cartésien passant par $P(x_1, y_1)$ et ayant $\vec{u} = (c, d)$ comme vecteur directeur est donnée par

$$\frac{x - x_1}{c} = \frac{y - y_1}{d}, \text{ si } c \neq 0 \text{ et } d \neq 0.$$

Sous cette forme, pour déterminer si un point appartient à la droite, il suffit de vérifier, en remplaçant les coordonnées du point dans l'équation de la droite, si ces coordonnées satisfont l'équation symétrique de la droite.

Équation symétrique

Exemple 1 Soit la droite D passant par P(2, -11) et Q(-4, 10).

a) Déterminons une équation symétrique de la droite D.

Trouvons d'abord un vecteur directeur de D.

Puisque $\overrightarrow{PQ} = (-6, 21) = 3(-2, 7)$, nous pouvons choisir $\vec{u} = (-2, 7)$ comme vecteur directeur de D.

Ainsi, D : $\frac{x - 2}{-2} = \frac{y - (-11)}{7}$, c'est-à-dire D : $\frac{x - 2}{-2} = \frac{y + 11}{7}$

b) Déterminons si le point R(1, 8) appartient à la droite D.

En remplaçant x par 1 et y par 8 dans l'équation de la droite D, nous obtenons,

d'une part, $\frac{1 - 2}{-2} = \frac{1}{2}$, et d'autre part, $\frac{8 + 11}{7} = \frac{19}{7}$,

ainsi $\frac{1 - 2}{-2} \neq \frac{8 + 11}{7}$.

D'où $R(1, 8) \notin D$

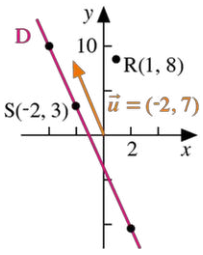
c) Déterminons si le point S(-2, 3) appartient à la droite D.

En remplaçant x par -2 et y par 3 dans l'équation de la droite D, nous obtenons,

d'une part, $\frac{-2 - 2}{-2} = 2$, et d'autre part, $\frac{3 + 11}{7} = 2$,

ainsi $\frac{-2 - 2}{-2} = \frac{3 + 11}{7}$.

D'où $S(-2, 3) \in D$



Exemple 2

a) Trouvons un point P_1 et un vecteur directeur $\vec{u}_1$ de la droite $D_1 : \dfrac{x+4}{5} = \dfrac{y-6}{2}$.

Par définition, cette droite passe par $P_1(-4, 6)$, et $\vec{u}_1 = (5, 2)$ est un vecteur directeur de D_1.

b) Trouvons un point P_2 et un vecteur directeur $\vec{u}_2$ de la droite $D_2 : \dfrac{5-x}{-4} = \dfrac{-y}{3}$.

Transformons d'abord l'équation précédente pour obtenir une équation symétrique de D_2.

De $\dfrac{5-x}{-4} = \dfrac{-y}{3}$, nous obtenons $\dfrac{-(x-5)}{-4} = \dfrac{y}{-3}$.

Ainsi, $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y-0}{-3}$ est une équation symétrique de D_2.

D'où nous trouvons $P_2(5, 0)$ et $\vec{u}_2 = (4, -3)$.

Exercices de compréhension 7.1

3. Trouver un point P et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $D : \dfrac{2x-5}{4} = \dfrac{-9-3y}{8}$.

Équation cartésienne d'une droite dans le plan



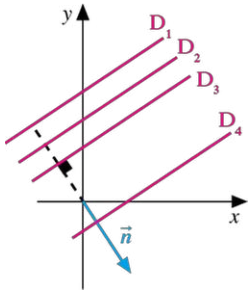
René Descartes (1596-1650)

IL Y A ENVIRON 400 ANS...

René Descartes a toujours été de santé fragile. C'est pourquoi, au cours de ses années d'études au collège jésuite de La Flèche où il est pensionnaire de 1604 à 1612, on lui permet de rester au lit jusque vers 11 h. Après ses études de droit à Poitiers, il s'enrôle dans l'armée d'un prince hollandais. C'est à cette époque que, par d'heureuses rencontres, il décide de consacrer ses pensées en particulier aux mathématiques, qu'il voit comme le cœur de toute connaissance vraiment scientifique. Toutefois, ses incursions dans les sciences physiques ne sont pas toujours réussies. Considérant qu'il ne peut y avoir d'actions à distance, il construit un système complexe, basé sur des tourbillons et par lequel il tente d'expliquer les mouvements des corps célestes. Pendant une centaine d'années, les milieux scientifiques français défendent l'approche cartésienne, résistant même à la remarquable efficacité et à l'économie de la mécanique newtonienne.

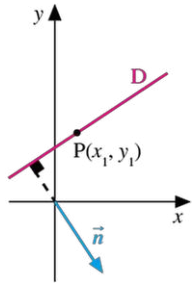
Il existe une infinité de droites perpendiculaires à un vecteur non nul $\vec{n}$ donné.

$D_1 \perp \vec{n}$, $D_2 \perp \vec{n}$, $D_3 \perp \vec{n}$ et $D_4 \perp \vec{n}$



Il existe une seule droite qui passe par le point $P(x_1, y_1)$ et qui est perpendiculaire à un vecteur non nul $\vec{n}$ donné.

$D \perp \vec{n}$

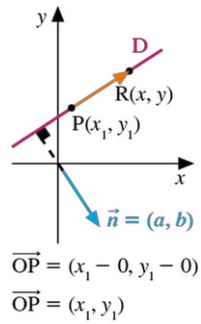


DÉFINITION 7.5

Tout vecteur non nul $\vec{n}$ perpendiculaire à une droite D du plan cartésien est appelé **vecteur normal** à cette droite.

Déterminons une équation cartésienne de la droite D passant par le point $P(x_1, y_1)$ et ayant $\vec{n} = (a, b)$ comme vecteur normal.

Soit $R(x, y)$, un point quelconque de D.



Puisque $\vec{n} \perp D$, $\vec{n} \perp \overrightarrow{PR}$, ainsi nous avons

$\vec{n} = (a, b)$
$\overrightarrow{PR} = (x - x_1, y - y_1)$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \qquad \text{(théorème 6.3)}$$
$$(a, b) \cdot (x - x_1, y - y_1) = 0$$
$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0 \qquad \text{(théorème 6.1)}$$
$$ax - ax_1 + by - by_1 = 0$$
$$ax + by - (ax_1 + by_1) = 0$$

d'où D : $ax + by - c = 0$, où $c = ax_1 + by_1$, c'est-à-dire $c = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} = (a, b) \cdot (x_1, y_1)$

DÉFINITION 7.6

Une **équation cartésienne** de la droite D du plan cartésien passant par le point $P(x_1, y_1)$ et ayant $\vec{n} = (a, b)$ comme vecteur normal est donnée par

$ax + by - c = 0$, où $c = ax_1 + by_1$.

L'équation précédente peut également s'écrire sous la forme

$ax + by = c$, où $c = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}$.

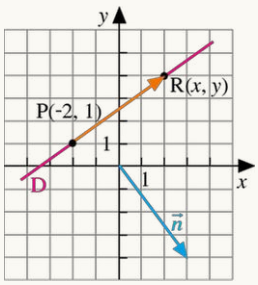
7

Équation cartésienne

Exemple 1 Déterminons une équation cartésienne de la droite D passant par P(-2, 1) et ayant $\vec{n} = (3, -4)$ comme vecteur normal.

Façon 1

Soit $R(x, y)$, un point de la droite D. Ainsi,



$\vec{n} = (3, -4)$
$\overrightarrow{PR} = (x + 2, y - 1)$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \qquad \text{(théorème 6.3)}$$
$$(3, -4) \cdot (x + 2, y - 1) = 0$$
$$3x + 6 - 4y + 4 = 0 \qquad \text{(théorème 6.1)}$$

d'où D : $3x - 4y + 10 = 0$ ou D : $3x - 4y = -10$

Façon 2

En utilisant la définition précédente, $ax + by - c = 0$, où $c = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} = ax_1 + by_1$, nous obtenons

$$3x + (-4)y - (3(-2) + (-4)(1)) = 0 \qquad \text{(car } a = 3 \text{ et } b = -4\text{)}$$

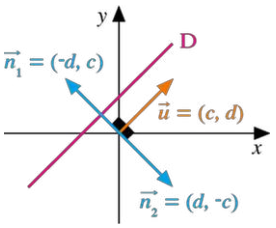
d'où D : $3x - 4y + 10 = 0$

Forme fonctionnelle d'une droite

De plus, en isolant y dans l'équation $3x - 4y + 10 = 0$, nous trouvons $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$.

Cette dernière forme est appelée forme fonctionnelle d'une droite.

Remarque : Si $\vec{u} = (c, d)$ est un vecteur directeur d'une droite D, alors $\vec{n_1} = (-d, c)$ et $\vec{n_2} = (d, -c)$ sont deux vecteurs normaux à cette droite.



En effet,

$$\vec{u} \cdot \vec{n_1} = -cd + cd = 0 \text{ et}$$
$$\vec{u} \cdot \vec{n_2} = cd - cd = 0$$

Exemple 2

a) Déterminons une équation cartésienne de la droite $D_1 : (x, y) = (2, -1) + k(-7, 8)$, où $k \in \mathbb{R}$.

Puisque $\vec{u_1} = (-7, 8)$ est un vecteur directeur de la droite D_1, alors $\vec{n_1} = (8, 7)$ est un vecteur normal à cette droite.

$c = \vec{n_1} \cdot \overrightarrow{OP}$
$= (8, 7) \cdot (2, -1)$
$= 9$

Ainsi, nous obtenons $8x + 7y - (8(2) + 7(-1)) = 0$,

d'où $D_1 : 8x + 7y - 9 = 0$

b) Déterminons une équation vectorielle de la droite $D_2 : 3x - 5y + 40 = 0$.

Puisque $\vec{n_2} = (3, -5)$ est un vecteur normal à la droite D_2, alors $\vec{u_2} = (5, 3)$ est un vecteur directeur de la droite D_2.

En choisissant le point $P_2(0, 8) \in D_2$, nous obtenons

$$D_2 : (x, y) = (0, 8) + k(5, 3), \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

7

Exercices de compréhension 7.1

4. Déterminer une équation cartésienne de la droite D qui passe par les points P(-1, 4) et Q(2, -1).

Voici un résumé et deux exemples des différentes formes d'équations d'une droite D du plan cartésien passant par un point P donné ayant $\vec{u}$ comme vecteur directeur et $\vec{n}$ comme vecteur normal.

	$P(x_1, y_1)$ $\vec{u} = (c, d), \vec{n} = (a, b)$	$P(3, -7)$ $\vec{u} = (-2, 5), \vec{n} = (5, 2)$	$P(-5, 3)$ $\vec{u} = (0, -4), \vec{n} = (4, 0)$
Équation vectorielle (É.V.)	$(x, y) = (x_1, y_1) + k(c, d)$, où $k \in \mathbb{R}$	$(x, y) = (3, -7) + k(-2, 5)$, où $k \in \mathbb{R}$	$(x, y) = (-5, 3) + k(0, -4)$, où $k \in \mathbb{R}$
Équations paramétriques (É.P.)	$\begin{cases} x = x_1 + kc \\ y = y_1 + kd \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} x = 3 + k(-2) \\ y = -7 + k5 \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} x = -5 \\ y = 3 + k(-4) \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$
Équation symétrique (É.S.)	$\frac{x - x_1}{c} = \frac{y - y_1}{d}$, si $c \neq 0$ et $d \neq 0$	$\frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 7}{5}$	Non définie, car une des composantes de $\vec{u}$ est 0
Équation cartésienne (É.C.)	$ax + by - c = 0$, où $c = ax_1 + by_1$	$5x + 2y - 1 = 0$	$4x + 20 = 0$

Application en statistique

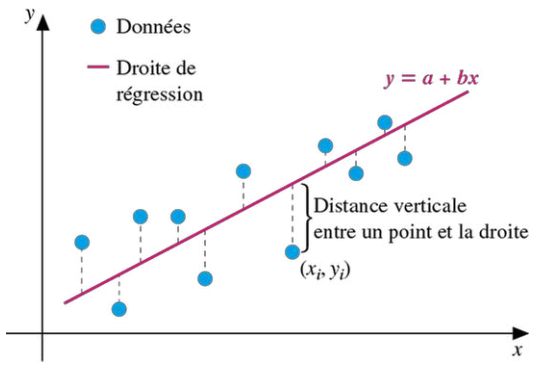
Droite de régression

En statistique, plusieurs problèmes consistent à définir la relation qui existe entre deux variables dans une même population. Par exemple, le poids et la taille des étudiants, le nombre d'heures de sommeil et les résultats scolaires, les ventes trimestrielles et les dépenses de publicité, la taille des parents et celle de leurs enfants. Nous verrons, à partir de paires de données (x_i, y_i), comment déterminer l'équation de la droite qui représente le mieux la relation entre les variables x_i et y_i. Une telle droite est appelée droite de régression, ou encore droite des moindres carrés. Son équation est déterminée de manière à minimiser la somme des carrés des distances verticales entre chaque point et la droite.

L'équation de la droite de régression est donnée par

$y = a + bx$, où

y représente la variable dépendante,
x représente la variable indépendante,
a est l'ordonnée à l'origine et
b est la pente de la droite.



La principale utilité de la droite de régression est d'estimer la valeur de la variable dépendante, à partir de la valeur prise par la variable indépendante.

Nous acceptons sans démonstration que la résolution du système S d'équations linéaires suivant permet de déterminer la valeur de a et celle de b.

$$S\begin{cases} na + (\Sigma x)b = \Sigma y \\ (\Sigma x)a + (\Sigma x^2)b = \Sigma xy \end{cases}$$

où n est le nombre de paires de données,

Σx est la somme des valeurs de x,

Σy est la somme des valeurs de y,

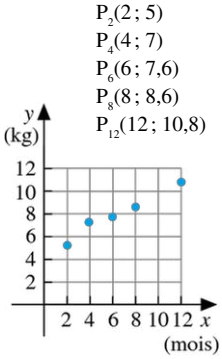
Σx^2 est la somme des carrés de x, et

Σxy est la somme des produits xy.

(2 mois ; 5 kg)
(4 mois ; 7 kg)
(6 mois ; 7,6 kg)
(8 mois ; 8,6 kg)
(12 mois ; 10,8 kg)

Exemple 1 Un jeune garçon est pesé régulièrement de l'âge de 2 à 12 mois. À 2 mois, son poids est de 5 kg ; à 4 mois, il est de 7 kg ; à 6 mois, il est de 7,6 kg ; à 8 mois, il est de 8,6 kg ; et à 12 mois, il est de 10,8 kg.

a) Déterminons l'équation de la droite de régression représentant les paires de données.



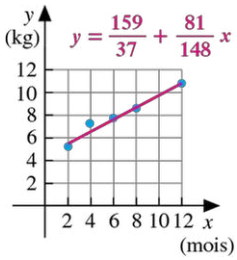
x	y	x^2	xy
2	5	4	10
4	7	16	28
6	7,6	36	45,6
8	8,6	64	68,8
12	10,8	144	129,6
$\Sigma x = 32$	$\Sigma y = 39$	$\Sigma x^2 = 264$	$\Sigma xy = 282$

7

Puisque nous avons cinq paires de données, $n = 5$,
$\Sigma x = 32$, $\Sigma y = 39$, $\Sigma x^2 = 264$ et $\Sigma xy = 282$.

Ainsi, nous avons le système d'équations linéaires suivant.

$$S\begin{cases} 5a + 32b = 39 \\ 32a + 264b = 282 \end{cases} \qquad \left(\text{car S}\begin{cases} na + (\Sigma x)b = \Sigma y \\ (\Sigma x)a + (\Sigma x^2)b = \Sigma xy \end{cases}\right)$$

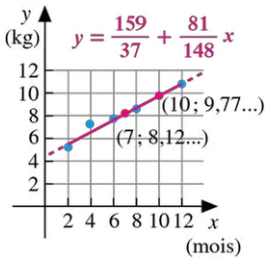


Par la règle de Cramer, nous avons

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 39 & 32 \\ 282 & 264 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 32 \\ 32 & 264 \end{vmatrix}} = \frac{1272}{296} = \frac{159}{37} \text{ et } b = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 39 \\ 32 & 282 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 32 \\ 32 & 264 \end{vmatrix}} = \frac{162}{296} = \frac{81}{148}$$

d'où $y = \frac{159}{37} + \frac{81}{148}x$ (car $y = a + bx$)

b) Estimons, à l'aide de l'équation de la droite de régression, le poids de ce bébé



i) à 7 mois ;

$$y = \frac{159}{37} + \frac{81}{148}(7) = 8{,}128\ldots$$

d'où environ 8,1 kg

ii) à 10 mois.

$$y = \frac{159}{37} + \frac{81}{148}(10) = 9{,}770\ldots$$

d'où environ 9,8 kg

Remarque : De façon générale, la droite de régression fournit une estimation pour des valeurs situées à l'intérieur du domaine de la variable indépendante.

Dans l'exemple précédent, la droite de régression donne un poids d'environ 4,3 kg à la naissance du bébé, alors que ce bébé pesait en réalité 2,9 kg à sa naissance.

Remarque : Dans certains problèmes, la variable indépendante est donnée en unités de temps (années, mois, jours, etc.). Il est alors possible de coder cette variable à l'aide d'entiers tout en respectant un intervalle adéquat.

Par exemple,

Année	2009	2011	2013	2015	2017
Code	1	3	5	7	9

Mois	Janvier	Février	Mars	Mai	Août
Code	1	2	3	5	8

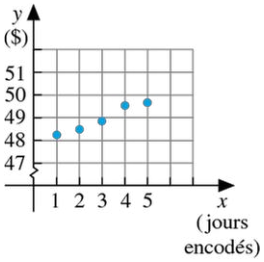
Cette façon de procéder simplifie beaucoup les calculs.

Exemple 2 La cote des actions de la Banque Nationale à la fermeture de la Bourse de Toronto pendant cinq jours ouvrables consécutifs est donnée par la série suivante.

Cote boursière

Jour	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Lundi
Cote en $	48,20	48,50	48,90	49,50	49,60

a) Après avoir encodé la variable « Jour », représentons le nuage de points et déterminons l'équation de la droite de régression.



Jour	x	y	x^2	xy
Mardi	1	48,20	1	48,20
Mercredi	2	48,50	4	97,00
Jeudi	3	48,90	9	146,70
Vendredi	4	49,50	16	198,00
Lundi	5	49,60	25	248,00
	$\Sigma x = 15$	$\Sigma y = 244{,}70$	$\Sigma x^2 = 55$	$\Sigma xy = 737{,}90$

Le système d'équations linéaires correspondant, où $n = 5$, est

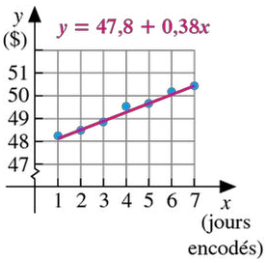
$$S\begin{cases} 5a + 15b = 244{,}70 \\ 15a + 55b = 737{,}90 \end{cases} \qquad \left(\text{car } S\begin{cases} na + (\Sigma x)b = \Sigma y \\ (\Sigma x)a + (\Sigma x^2)b = \Sigma xy \end{cases}\right)$$

Par la règle de Cramer, nous avons

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 244{,}70 & 15 \\ 737{,}90 & 55 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{vmatrix}} = \frac{2390}{50} = 47{,}8 \text{ et } b = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 244{,}70 \\ 15 & 737{,}90 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{vmatrix}} = \frac{19}{50} = 0{,}38$$

d'où $y = 47{,}8 + 0{,}38x$ (car $y = a + bx$)

Remarque : Il est possible d'utiliser la droite de régression pour estimer des valeurs situées à l'extérieur du domaine de la variable indépendante, à condition de préciser que cette estimation est valide tant que la tendance se maintient pour la période concernée.



b) Si la tendance boursière se maintient pendant quelques jours, estimons la cote à la fermeture des actions de la Banque Nationale pour les deux prochains jours et représentons le nuage de points et la droite de régression trouvée en a) sur un intervalle adéquat.

En remplaçant successivement x par 6 et x par 7 dans l'équation $y = 47{,}8 + 0{,}38x$, nous obtenons

$$y_6 = 47{,}8 + 0{,}38(6) = 50{,}08$$
$$y_7 = 47{,}8 + 0{,}38(7) = 50{,}46$$

d'où nous estimons que la cote à la fermeture du mardi serait de 50,08 $, et celle du mercredi, de 50,46 $.

EXERCICES 7.1

1. Soit D : $(x, y) = (5, -3) + k(2, 7)$, où $k \in \mathbb{R}$.

a) Trouver un vecteur directeur $\vec{u}$ de cette droite.

b) Trouver deux points P et Q de cette droite.

c) Déterminer une autre équation vectorielle de la droite D.

2. Déterminer une équation vectorielle de la droite passant par le point

a) P(3, -2) et ayant $\vec{u} = (-2, 4)$ comme vecteur directeur ;

b) P(0, 0) et ayant $\vec{i}$ comme vecteur directeur ;

c) P(6, -8) et par le point Q(8, -6) ;

d) P(2, -3) si la droite est verticale ;

e) P(-3, 4) et perpendiculaire à la droite d'équation $D_1 : (x, y) = (1, -5) + k(-2, 9)$, où $k \in \mathbb{R}$;

f) P(1, 4) et dont la pente est $\frac{-2}{3}$.

3. Déterminer des équations paramétriques de la droite passant par le point

a) P(-2, 4) et ayant $\vec{u} = (5, -7)$ comme vecteur directeur ;

b) P(4, 1) et ayant $\vec{j}$ comme vecteur directeur ;

c) P(0, 7) et par le point Q(1, 9) ;

d) P(5, -2) si la droite est horizontale.

4. Soit D : $\begin{cases} x = 5 - 2k \\ y = -4 + 3k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Déterminer

a) si le point Q(11, -13) appartient à la droite D ;

b) si le point R(3, -7) appartient à la droite D ;

c) la valeur de s si $S(s, 8) \in D$;

d) en quel point T cette droite coupe l'axe des y.

5. Déterminer, si c'est possible, une équation symétrique de la droite passant par le point

a) P(-4, 7) et ayant $\vec{u} = (7, -4)$ comme vecteur directeur ;

b) O(0, 0) et parallèle à la droite D : $(x, y) = (1, 1) + k(-3, 7)$, où $k \in \mathbb{R}$;

c) P(4, 5) et ayant $\vec{u} = 7\vec{i}$ comme vecteur directeur ;

d) P(10, -8) et par le point Q(7, -2) ;

e) P(3, -6) et perpendiculaire à $D_1 : 5 - 2x = \frac{3y + 7}{4}$.

6. Soit D : $\frac{x - 4}{7} = \frac{y + 5}{-3}$. Déterminer si les points suivants appartiennent à la droite D.

a) O(0, 0) b) P(18, -11)

c) Q(11, -2) d) R(4, -5)

7. Trouver un point P et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite D si :

a) D : $\frac{x - 4}{2} = \frac{y + 3}{-5}$ b) D : $\frac{5 - x}{4} = 7 + y$

c) D : $\frac{x}{4} = \frac{-3y}{6}$ d) D : $\frac{2x + 8}{9} = \frac{5 - 3y}{10}$

8. Déterminer une équation cartésienne de la droite qui passe par le point

a) P(0, 4) et qui a $\vec{n} = (-3, -2)$ comme vecteur normal ; représenter graphiquement ;

b) P(-4, 3) et qui a $\vec{j}$ comme vecteur normal ;

c) P(4, 5) et qui est parallèle à l'axe des y ;

d) P(-2, 7) et qui a $\vec{v} = (5, -3)$ comme vecteur directeur ;

e) P(3, 0) et par le point Q(0, 4) ;

f) P(8, 3) et qui est parallèle à D : $\frac{x}{5} = \frac{y}{7}$;

g) P(8, 3) et qui est perpendiculaire à D : $\frac{x}{5} = \frac{y}{7}$;

h) P(-1, 5) et qui est parallèle à la droite D : $y = 5x - 9$;

i) O(0, 0) et qui est perpendiculaire à la droite $\frac{7x - 5}{3} = \frac{5 - 8y}{4}$;

j) P(1, 1) et dont la pente est $\frac{1}{2}$.

9. Soit D : $3x - 7y - 8 = 0$. Déterminer

a) un vecteur normal $\vec{n}$ à la droite D ;

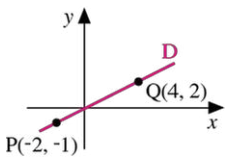
b) un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite D ;

c) p si $P(p, 2) \in D$;

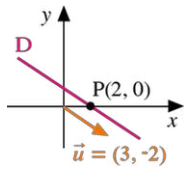
d) le point d'intersection de D et de $D_1 : x = 5$.

10. Déterminer, si c'est possible, une équation vectorielle (É.V.), des équations paramétriques (É.P.), une équation symétrique (É.S.) et une équation cartésienne (É.C.) des droites D suivantes.

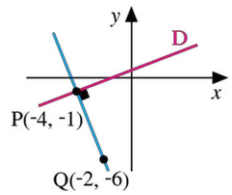
a)



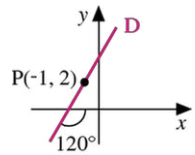
b)



c)



d)



e) D qui passe par P(2, -7) et qui est parallèle à l'axe des x.

f) D qui passe par P(-4, 1) et qui est perpendiculaire à la droite $y = 7x + 3$.

11. Déterminer si les trois points suivants sont situés sur une même droite.

a) P(2, 3), Q(4, 5) et R(6, 7)

b) P(-3, 4), Q(4, -3) et O(0, 0)

12. **DROITE DE RÉGRESSION**

Soit les paires de données suivantes : $P_1(2, 1)$, $P_2(3, 6)$, $P_3(4, 8)$, $P_4(5, 13)$ et $P_5(6, 11)$. Déterminer l'équation de la droite de régression des cinq paires précédentes, et représenter graphiquement le nuage de points ainsi que la droite de régression.

13. **APPLICATION | TAUX D'ALCOOLÉMIE**

Soit le tableau suivant illustrant, pour une femme, le taux d'alcoolémie selon le poids de celle-ci après trois consommations en deux heures.

x : Poids en kg	52	59	66	73	80
y : Taux d'alcoolémie en %	0,097	0,083	0,071	0,062	0,054

a) Déterminer l'équation de la droite de régression et représenter graphiquement le nuage de points ainsi que la droite de régression.

b) Estimer, à l'aide de l'équation de la droite de régression, le taux d'alcoolémie d'une femme dont le poids est de

i) 61 kg ; ii) 70 kg.

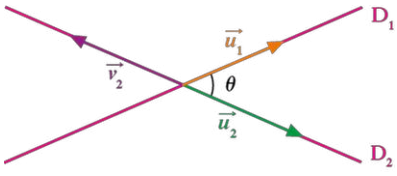
7.2 Position relative de deux droites et angle formé par deux droites dans le plan cartésien

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra donner la position relative de deux droites dans le plan cartésien.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de déterminer si deux droites sont parallèles distinctes ;
- de déterminer si deux droites sont parallèles confondues ;
- de déterminer si deux droites sont concourantes ;
- de trouver le point d'intersection de deux droites concourantes ;
- de calculer l'angle entre deux droites ;
- de donner la définition d'angles directeurs d'une droite ;
- de déterminer des angles directeurs d'une droite ;
- de donner la définition de cosinus directeurs d'une droite ;
- de déterminer les cosinus directeurs d'une droite ;
- de déterminer un vecteur directeur unitaire d'une droite ;
- de déterminer une équation du faisceau de droites défini par deux droites concourantes ;
- de déterminer une équation d'une droite particulière d'un faisceau.



$$\cos\theta = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{\|\vec{u}_1\|\|\vec{u}_2\|} ; \quad \cos\theta = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2|}{\|\vec{u}_1\|\|\vec{v}_2\|}$$

$\theta \in [0°, 90°]$

Dans cette section, nous étudierons d'abord les positions relatives possibles de deux droites dans le plan cartésien pour ensuite déterminer l'angle formé par deux droites.

Position relative de deux droites dans le plan

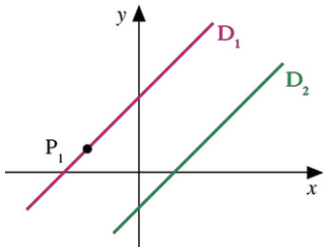
Les trois représentations graphiques suivantes illustrent les trois positions relatives possibles de deux droites dans le plan cartésien ainsi que certaines caractéristiques de ces droites.

Soit $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$, des vecteurs directeurs respectifs des droites D_1 et D_2.

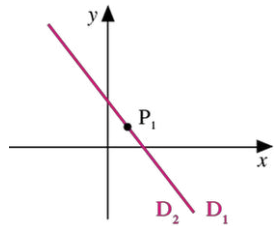
Soit $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$, des vecteurs normaux respectifs aux droites D_1 et D_2.

Cas 1 : Droites parallèles

a) Droites parallèles distinctes



b) Droites parallèles confondues



Caractéristiques

① $\vec{u_1} /\!/ \vec{u_2}$ (il existe un $r \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u_1} = r\vec{u_2}$)

② $\vec{n_1} /\!/ \vec{n_2}$ (il existe un $s \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{n_1} = s\vec{n_2}$)

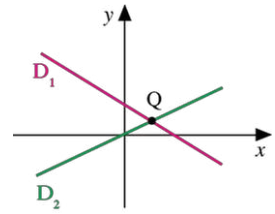
③ $\vec{u_1} \perp \vec{n_2}$ $(\vec{u_1} \cdot \vec{n_2} = 0)$ et $\vec{u_2} \perp \vec{n_1}$ $(\vec{u_2} \cdot \vec{n_1} = 0)$

④ Aucun point d'intersection

④ Infinité de points d'intersection

Cas 2 : Droites non parallèles

Droites concourantes



Caractéristiques

① $\vec{u_1} \not/\!/ \vec{u_2}$ $(\vec{u_1} \neq r\vec{u_2}, \forall\, r \in \mathbb{R})$

② $\vec{n_1} \not/\!/ \vec{n_2}$ $(\vec{n_1} \neq s\vec{n_2}, \forall\, s \in \mathbb{R})$

③ $\vec{u_1} \not\perp \vec{n_2}$ $(\vec{u_1} \cdot \vec{n_2} \neq 0)$ et $\vec{u_2} \not\perp \vec{n_1}$ $(\vec{u_2} \cdot \vec{n_1} \neq 0)$

④ Un seul point d'intersection Q

Exemple 1 Déterminons la position relative des droites suivantes, ainsi que le point d'intersection de ces droites lorsque celles-ci sont concourantes.

a) $D_1 : (x, y) = 3\vec{i} + 2\vec{j} + k(1, 4)$, où $k \in \mathbb{R}$, et $D_2 : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+5}{-8}$.

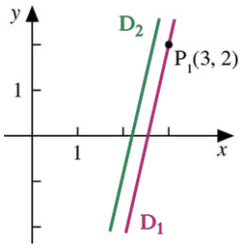
Soit $\vec{u_1} = (1, 4)$ et $\vec{u_2} = (-2, -8)$, des vecteurs directeurs des droites D_1 et D_2.

Puisque $\vec{u_2} = -2\vec{u_1}$, $\vec{u_1} /\!/ \vec{u_2}$. Donc, $D_1 /\!/ D_2$.

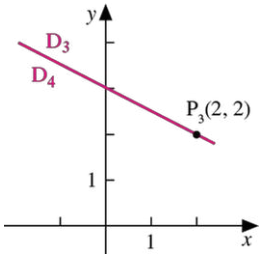
Pour déterminer si les droites sont distinctes ou confondues, il suffit de choisir un point appartenant à une des droites et de vérifier si ce même point appartient également à l'autre droite.

Soit $P_1(3, 2) \in D_1$. Or, $\dfrac{3-1}{-2} \neq \dfrac{2+5}{-8}$. Donc, $P_1 \notin D_2$.

D'où les deux droites sont parallèles distinctes.



Droites parallèles distinctes



Droites parallèles confondues

b) $D_3 : \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 2 - k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$, et $D_4 : x + 2y - 6 = 0$.

Soit $\vec{u_3} = (2, -1)$, un vecteur directeur de la droite D_3, et $\vec{n_4} = (1, 2)$, un vecteur normal à la droite D_4.

Puisque $\vec{u_3} \cdot \vec{n_4} = 0$, $\vec{u_3} \perp \vec{n_4}$. Donc, $D_3 \parallel D_4$.

Soit $P_3(2, 2) \in D_3$. Or, $(2) + 2(2) - 6 = 0$. Donc, $P_3 \in D_4$.

D'où les deux droites sont parallèles confondues.

c) $D_5 : (x, y) = (2, 3) + k(1, 6)$, où $k \in \mathbb{R}$, et $D_6 : (x, y) = (2, -5) + t(2, -2)$, où $t \in \mathbb{R}$.

Soit $\vec{u_5} = (1, 6)$ et $\vec{u_6} = (2, -2)$, des vecteurs directeurs des droites D_5 et D_6.

Puisque $\vec{u_5} \neq r\vec{u_6}$, $\vec{u_5} \nparallel \vec{u_6}$. Donc, $D_5 \nparallel D_6$.

D'où les deux droites sont concourantes.

Déterminons le point d'intersection Q des droites D_5 et D_6 de deux façons.

Façon 1

En transformant les équations de D_5 et de D_6 sous forme paramétrique, nous obtenons

$$D_5 : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 + 6k \end{cases}, \text{ où } k \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad D_6 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -5 - 2t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

Nous cherchons les coordonnées du point $Q(x_0, y_0)$ qui vérifient simultanément les équations paramétriques des droites D_5 et D_6. Ainsi, il faut déterminer k et t tels que

$$\begin{cases} x_0 = 2 + k \\ y_0 = 3 + 6k \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_0 = 2 + 2t \\ y_0 = -5 - 2t \end{cases} \quad \text{Donc,} \quad \begin{cases} 2 + k = 2 + 2t \\ 3 + 6k = -5 - 2t \end{cases}$$

En résolvant le système $\begin{cases} k - 2t = 0 \\ 6k + 2t = -8 \end{cases}$

par la règle de Cramer, nous obtenons

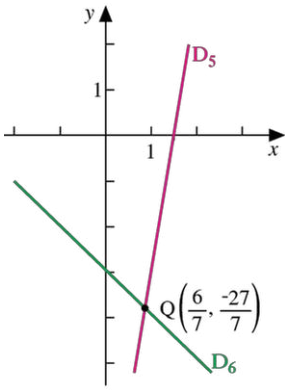
$$k = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-16}{14} = \frac{-8}{7} \quad \text{et} \quad t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{14} = \frac{-4}{7}$$

En remplaçant k par $\frac{-8}{7}$ dans $x_0 = 2 + k$ et dans $y_0 = 3 + 6k$, nous obtenons

$$x_0 = 2 + \left(\frac{-8}{7}\right) = \frac{6}{7} \quad \text{et} \quad y_0 = 3 + 6\left(\frac{-8}{7}\right) = \frac{-27}{7}$$

Nous pouvons également trouver x_0 et y_0 en remplaçant t par $\frac{-4}{7}$ dans les équations appropriées.

D'où $Q\left(\frac{6}{7}, \frac{-27}{7}\right)$ est le point d'intersection des droites D_5 et D_6.



Droites concourantes

Façon 2

En transformant les équations de D_5 sous forme paramétrique et celles de D_6 sous forme cartésienne, nous avons

$\vec{u}_6 = (2, -2)$
$\vec{n}_6 = (1, 1)$

$$D_5 : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 + 6k \end{cases}, \text{ où } k \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad D_6 : x + y + 3 = 0.$$

En remplaçant x par $(2 + k)$ et y par $(3 + 6k)$ dans l'équation de D_6, nous obtenons

$$(2 + k) + (3 + 6k) + 3 = 0$$
$$k = \frac{-8}{7}$$

En remplaçant k par $\frac{-8}{7}$ dans les équations paramétriques de D_5, nous obtenons

$$x = \frac{6}{7} \text{ et } y = \frac{-27}{7}$$

d'où $Q\left(\frac{6}{7}, \frac{-27}{7}\right)$ est le point d'intersection des droites D_5 et D_6.

Exercices de compréhension 7.2

1. Soit les droites
$D_1 : -2x + 3y + 17 = 0$ et D_2 passant par P(1, -4) et Q(7, -2).

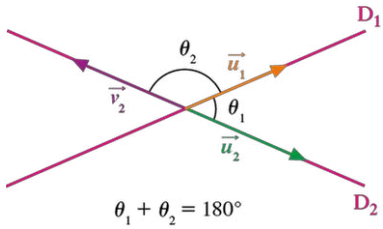
Déterminer la position relative de D_1 et de D_2 et leur point d'intersection, s'il y a lieu.

7

Angle formé par deux droites dans le plan

Soit $\vec{u}_1$, un vecteur directeur de la droite D_1, et soit $\vec{u}_2$ et $\vec{v}_2$, deux vecteurs directeurs de sens contraire de la droite D_2.

Ainsi, l'angle θ_1 entre D_1 et D_2 correspond à l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, et l'angle θ_2 entre D_1 et D_2 correspond à l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_2$.



Nous avons vu dans le chapitre 6 que nous pouvons déterminer les angles θ_1 et θ_2 en utilisant les équations suivantes :

Produit scalaire

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\| \cos \theta_1 \quad \text{et} \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{u}_1\| \|\vec{v}_2\| \cos \theta_2.$$

DÉFINITION 7.7

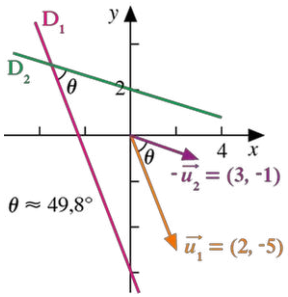
L'**angle θ, formé par les droites** D_1 et D_2 dans le plan cartésien, correspond au plus petit des deux angles formés par des vecteurs directeurs de D_1 et de D_2, ainsi $\theta \in [0°, 90°]$.

THÉORÈME 7.1

Soit D_1 et D_2, deux droites dans le plan cartésien. Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont des vecteurs directeurs respectifs de D_1 et de D_2, alors l'angle θ, formé par les droites D_1 et D_2, est obtenu à partir de l'équation $\cos\theta = \dfrac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{\|\vec{u}_1\|\|\vec{u}_2\|}$,

d'où $\theta = \text{Arc cos}\dfrac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{\|\vec{u}_1\|\|\vec{u}_2\|}$.

La preuve est laissée à l'étudiant.



Exemple 1 Déterminons l'angle θ formé par les droites $D_1 : (x, y) = (-2, -1) + k(2, -5)$, où $k \in \mathbb{R}$, et $D_2 : \dfrac{x-3}{-3} = y - 1$.

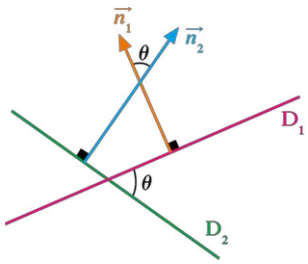
Soit $\vec{u}_1 = (2, -5)$ et $\vec{u}_2 = (-3, 1)$, des vecteurs directeurs respectifs de D_1 et de D_2.

Ainsi, nous avons $\cos\theta = \dfrac{|(2, -5) \cdot (-3, 1)|}{\sqrt{29}\sqrt{10}} = \dfrac{|-11|}{\sqrt{29}\sqrt{10}}$

$$\theta = \text{Arc cos}\left(\frac{11}{\sqrt{29}\sqrt{10}}\right) \qquad \text{(théorème 7.1)}$$

$$= 49{,}76\ldots$$

d'où $\theta \approx 49{,}8°$



COROLLAIRE du théorème 7.1

Soit D_1 et D_2, deux droites dans le plan cartésien. Si $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont des vecteurs normaux respectifs à D_1 et à D_2, alors θ, l'angle formé par les droites D_1 et D_2, où $\theta \in [0°, 90°]$, est obtenu à partir de l'équation $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}$,

d'où $\theta = \text{Arc cos}\dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}$.

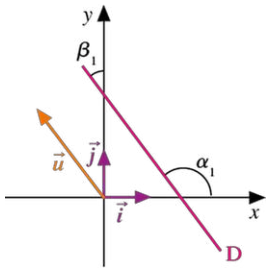
La preuve est laissée à l'étudiant.

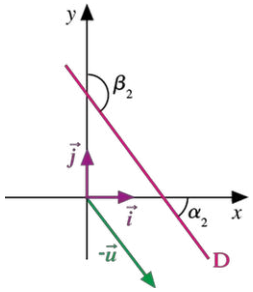
Exercices de compréhension 7.2

2. Utiliser le corollaire du théorème 7.1 pour déterminer l'angle entre les droites $D_1 : 3x - 2y = 0$ et $D_2 : -x + 4y + 1 = 0$.

DÉFINITION 7.8

Les angles α et β que forment respectivement dans le plan cartésien un vecteur directeur $\vec{u}$ d'une droite D avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont appelés des **angles directeurs** de la droite D.





Exemple 2 Soit D : $\frac{x-4}{-3} = \frac{y+3}{4}$. Déterminons les angles directeurs de D.

En choisissant $\vec{u} = (-3, 4)$ comme vecteur directeur de D, nous obtenons

$$\cos\alpha_1 = \frac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{\|\vec{u}\|\|\vec{i}\|} = \frac{(-3,4)\cdot(1,0)}{5(1)} = \frac{-3}{5}, \text{ d'où } \alpha_1 \approx 126{,}9°,$$

$$\cos\beta_1 = \frac{\vec{u}\cdot\vec{j}}{\|\vec{u}\|\|\vec{j}\|} = \frac{(-3,4)\cdot(0,1)}{5(1)} = \frac{4}{5}, \text{ d'où } \beta_1 \approx 36{,}9°.$$

En choisissant comme vecteur directeur de D le vecteur opposé à $\vec{u}$, c'est-à-dire $-\vec{u} = (3, -4)$, nous obtenons

$$\cos\alpha_2 = \frac{-\vec{u}\cdot\vec{i}}{\|\vec{u}\|\|\vec{i}\|} = \frac{(3,-4)\cdot(1,0)}{5(1)} = \frac{3}{5}, \text{ d'où } \alpha_2 \approx 53{,}1°,$$

$$\cos\beta_2 = \frac{-\vec{u}\cdot\vec{j}}{\|\vec{u}\|\|\vec{j}\|} = \frac{(3,-4)\cdot(0,1)}{5(1)} = \frac{-4}{5}, \text{ d'où } \beta_2 \approx 143{,}1°.$$

Nous constatons que les angles directeurs dépendent du sens du vecteur directeur choisi. De plus,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 180° \text{ et } \beta_1 + \beta_2 = 180°.$$

DÉFINITION 7.9

Les **cosinus directeurs** d'une droite D dans le plan cartésien, associés à un vecteur directeur $\vec{u} = (c, d)$ de D, sont donnés par $\cos\alpha$ et $\cos\beta$, où

$$\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}} \text{ et } \cos\beta = \frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}.$$

Remarque : Les cosinus directeurs d'une droite sont définis au signe près selon le sens du vecteur directeur de cette droite.

THÉORÈME 7.2

Si α et β sont des angles directeurs d'une droite D du plan cartésien, alors

$$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) = 1.$$

Preuve

Soit $\vec{u} = (c, d)$, un vecteur directeur de D.

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha + \cos^2\beta &= \left(\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}\right)^2 + \left(\frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}\right)^2 \quad \text{(définition 7.9)}\\ &= \frac{c^2}{c^2+d^2} + \frac{d^2}{c^2+d^2}\\ &= \frac{c^2+d^2}{c^2+d^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

d'où $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) = 1$

COROLLAIRE du théorème 7.2

Si α et β sont des angles directeurs d'une droite D du plan cartésien, alors $\vec{U} = (\cos \alpha, \cos \beta)$ est un vecteur directeur unitaire de D.

La preuve est laissée à l'étudiant.

Exemple 3 Soit D : $\begin{cases} x = 4 - 5k \\ y = -1 + 2k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$. Déterminons les cosinus directeurs, les angles directeurs de D associés aux vecteurs directeurs suivants et vérifions que $(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) = 1$.

Cosinus directeurs

a) Soit $\vec{u}_1 = (-5, 2)$, un vecteur directeur de D.

Les cosinus directeurs de D sont : $\cos \alpha_1 = \frac{-5}{\sqrt{29}}$ et $\cos \beta_1 = \frac{2}{\sqrt{29}}$. (définition 7.9)

Les angles directeurs correspondants sont : $\alpha_1 \approx 158{,}2°$ et $\beta_1 \approx 68{,}2°$.

$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 = \left(\frac{-5}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right)^2 = \frac{25}{29} + \frac{4}{29}$, ainsi $(\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1) = 1$

b) Soit $\vec{u}_2 = (5, -2)$, un autre vecteur directeur de D.

Les cosinus directeurs de D sont : $\cos \alpha_2 = \frac{5}{\sqrt{29}}$ et $\cos \beta_2 = \frac{-2}{\sqrt{29}}$. (définition 7.9)

Les angles directeurs correspondants sont : $\alpha_2 \approx 21{,}8°$ et $\beta_2 \approx 111{,}8°$.

$\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 = \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{29}}\right) = \frac{25}{29} + \frac{4}{29}$, ainsi $(\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2) = 1$

c) Déterminons deux vecteurs directeurs unitaires $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ de D.

Si $\vec{u}_1 = (-5, 2)$, alors $\vec{U}_1 = (\cos \alpha_1, \cos \beta_1)$. (corollaire du théorème 7.2)

Si $\vec{u}_2 = (5, -2)$, alors $\vec{U}_2 = (\cos \alpha_2, \cos \beta_2)$. (corollaire du théorème 7.2)

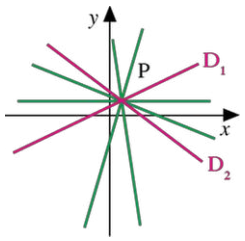
D'où $\vec{U}_1 = \left(\frac{-5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right)$ et $\vec{U}_2 = \left(\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{-2}{\sqrt{29}}\right)$ (voir a) et b))

Faisceau de droites dans le plan

DÉFINITION 7.10

On appelle **faisceau de droites**, défini par deux droites non parallèles du plan cartésien, l'ensemble des droites passant par le point d'intersection de ces deux droites.

Représentation graphique du faisceau de droites passant par le point d'intersection P des droites non parallèles D_1 et D_2



DÉFINITION 7.11

Soit $D_1 : a_1x + b_1y - c_1 = 0$ et $D_2 : a_2x + b_2y - c_2 = 0$, deux droites non parallèles du plan cartésien.

Une équation du **faisceau F de droites**, défini par D_1 et D_2, est donnée par

$$F : k_1(a_1x + b_1y - c_1) + k_2(a_2x + b_2y - c_2) = 0,$$

où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$, et au moins un des deux scalaires est non nul ($k_1 \neq 0$ ou $k_2 \neq 0$).

Exemple 1 Soit les droites $D_1 : 2x - 3y + 12 = 0$ et $D_2 : 4x + 5y + 2 = 0$ dont l'intersection est le point Q(-3, 2).

a) Déterminons une équation du faisceau F de droites, défini par D_1 et D_2.

$F : k_1(2x - 3y + 12) + k_2(4x + 5y + 2) = 0$, où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ ($k_1 \neq 0$ ou $k_2 \neq 0$)

Pour chaque valeur de k_1 et de k_2, nous obtenons une droite du faisceau.

b) Déterminons, pour les valeurs de k_1 et de k_2 suggérées, l'équation de la droite du faisceau.

i) Si $k_1 = 1$ et $k_2 = 0$, nous obtenons

$$1(2x - 3y + 12) + 0(4x + 5y + 2) = 0$$
$$2x - 3y + 12 = 0, \text{ c'est-à-dire } D_1$$

ii) Si $k_1 = 0$ et $k_2 = 1$, nous obtenons

$$0(2x - 3y + 12) + 1(4x + 5y + 2) = 0$$
$$4x + 5y + 2 = 0, \text{ c'est-à-dire } D_2$$

iii) Si $k_1 = -4$ et $k_2 = 5$, nous obtenons

$$-4(2x - 3y + 12) + 5(4x + 5y + 2) = 0$$
$$12x + 37y - 38 = 0, \text{ que nous appelons } D_3$$

c) Déterminons la droite du faisceau F qui passe par le point P(-2, 5).

Pour obtenir une droite particulière du faisceau, il suffit de déterminer une valeur de k_1 et une valeur de k_2 satisfaisant à la contrainte de notre droite particulière.

Les coordonnées du point P(-2, 5) doivent vérifier l'équation de F.
En remplaçant x par -2 et y par 5 dans F, nous obtenons

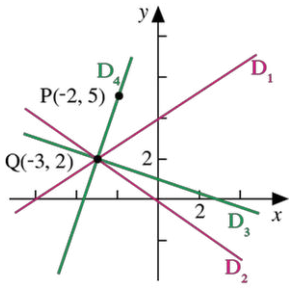
$$k_1(2(-2) - 3(5) + 12) + k_2(4(-2) + 5(5) + 2) = 0$$
$$-7k_1 + 19k_2 = 0$$
$$k_1 = \frac{19}{7}k_2$$

En posant, par exemple, $k_2 = 7$, nous obtenons $k_1 = 19$.

Ainsi, $D_4 : 19(2x - 3y + 12) + 7(4x + 5y + 2) = 0$

$$D_4 : 66x - 22y + 242 = 0$$

d'où $D_4 : 3x - y + 11 = 0$



$D_1 : 2x - 3y + 12 = 0$
$D_2 : 4x + 5y + 2 = 0$
$D_3 : 12x + 37y - 38 = 0$
$D_4 : 3x - y + 11 = 0$

EXERCICES 7.2

1. Déterminer la position relative des droites D_1 et D_2 données, et l'angle formé par D_1 et D_2. Dans le cas où D_1 et D_2 sont concourantes, déterminer le point d'intersection.

a) $D_1 : (x, y) = (2, 5) + k(-3, 1)$, où $k \in \mathbb{R}$

$D_2 : (x, y) = \vec{i} + 2\vec{j} + t(1, 3)$, où $t \in \mathbb{R}$

b) $D_1 : \dfrac{3x - 6}{6} = \dfrac{5 - y}{-3}$ et $D_2 : 6x - 4y + 8 = 0$

c) $D_1 : \begin{cases} x = 3 - 10k \\ y = 2 - 6k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$

$D_2 : 3x - 5y - 1 = 0$

d) $D_1 : 2x - 3y + 7 = 0$

D_2 passant par P(-1, -1) et perpendiculaire à $D : x + 2y + 3 = 0$

2. Soit $D : \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{3}$.

Déterminer, si c'est possible, les valeurs de a, si :

a) $D \parallel D_1$, où $D_1 : (x, y) = (5, 7) + k(5, -2)$, où $k \in \mathbb{R}$

b) $D \perp D_2$, où $D_2 : \begin{cases} x = -3 - k \\ y = 4 + 4k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$

c) $D \parallel D_3$, où $D_3 : 2x - 6y + 1 = 0$

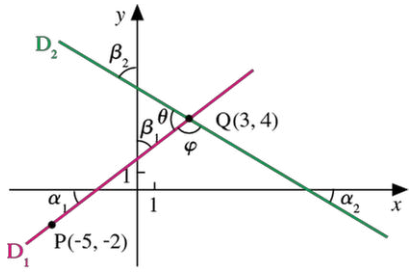
d) $D \perp D_4$, où $D_4 : 5x + 7y - 2 = 0$

e) $D \perp D_5$, où D_5 est la droite passant par P(2, 3) et par Q(2, 5)

f) $D \parallel D_6$, où D_6 est la droite passant par P(5, -2) et par Q(5, 4)

g) $D \parallel D_7$, où $D_7 : \dfrac{3 - x}{4} = \dfrac{3y + 5}{15}$

3. Déterminer les angles α_1, α_2, β_1, β_2, θ et φ suivants si la pente de la droite D_2 est égale à $\dfrac{-2}{3}$.



4. Après avoir déterminé un vecteur directeur des droites suivantes, donner les cosinus directeurs, les angles directeurs et le vecteur directeur unitaire associé au vecteur directeur choisi.

a) $D : \dfrac{x - 6}{5} = \dfrac{y + 4}{12}$

b) $D : (x, y) = (-4, 8) + k(-2, 9)$, où $k \in \mathbb{R}$

c) $D : \begin{cases} x = 4 \\ y = k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$

d) $D : 6x - 5y + 1 = 0$

5. Soit $D_1 : 2x - 3y - 8 = 0$ et $D_2 : 10x + y - 8 = 0$.

a) Déterminer le point d'intersection P des droites D_1 et D_2, et représenter graphiquement les droites D_1 et D_2.

b) Déterminer une équation du faisceau F de droites défini par D_1 et D_2.

c) Déterminer une équation de la droite D_3 du faisceau F, si $k_1 = 0$ et $k_2 = 1$.

d) Quelles valeurs faut-il attribuer à k_1 et k_2 pour obtenir D_1 ?

e) Déterminer une équation de la droite D_4 du faisceau F passant par l'origine.

f) Déterminer une équation de la droite D_5 du faisceau F qui est verticale.

g) Déterminer une équation de la droite D_6 du faisceau F qui est horizontale.

h) Déterminer une valeur de k_1 et de k_2 pour obtenir une droite D_7 du faisceau F telle que $D_7 \perp D_4$. Déterminer également une équation de D_7.

i) Déterminer une valeur de k_1 et de k_2 pour obtenir une droite D_8 du faisceau F telle que $D_8 \parallel D$, où $D : x - y + 1 = 0$. Déterminer également une équation de D_8.

j) Déterminer si les droites D_9 et D_{10} suivantes appartiennent au faisceau F.

$D_9 : 3x - y + 5 = 0$

$D_{10} : (x, y) = (11, -7) + k(2, -1)$, où $k \in \mathbb{R}$

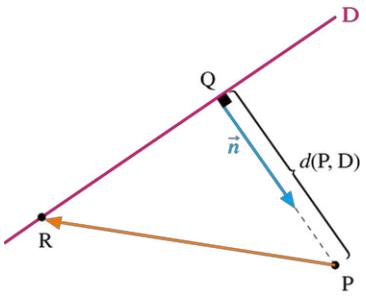
7.3 Distance entre un point et une droite, et distance entre deux droites parallèles dans le plan cartésien

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra résoudre des problèmes de distance dans le plan cartésien.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de démontrer des formules permettant de calculer la distance entre un point et une droite ;
- de calculer la distance entre un point et une droite ;
- de démontrer une formule permettant de calculer la distance entre deux droites parallèles ;
- de calculer la distance entre deux droites parallèles ;
- de déterminer des lieux géométriques en utilisant la notion de distance.



$$d(\mathrm{P}, \mathrm{D}) = \left\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right\| = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}} \cdot \vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$$

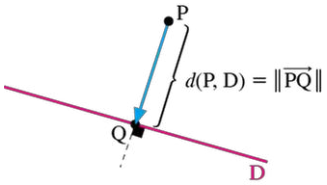
Dans cette section, nous calculerons la distance entre un point et une droite ainsi que la distance entre deux droites parallèles.

Ces calculs de distance permettent de résoudre certains problèmes géométriques.

Distance entre un point et une droite dans le plan

DÉFINITION 7.12

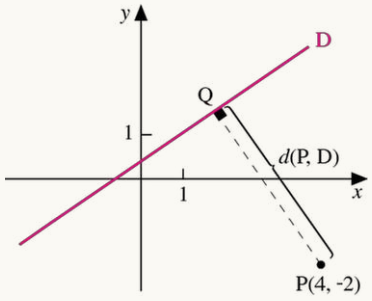
La **distance** entre un point P et une droite D du plan cartésien, notée $d(\mathrm{P}, \mathrm{D})$, est la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, où $\mathrm{Q} \in \mathrm{D}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \mathrm{D}$.



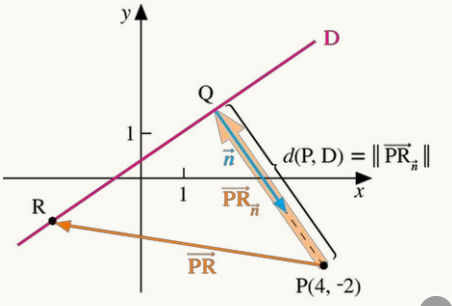
Exemple 1 Calculons la distance $d(\mathrm{P}, \mathrm{D})$ entre le point P(4, -2) et la droite $\mathrm{D} : (x, y) = (-2, -1) + k(3, 2)$, où $k \in \mathbb{R}$.

Nous constatons que la distance $d(\mathrm{P}, \mathrm{D})$ que nous cherchons est la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$. Ainsi,

$$d(\mathrm{P}, \mathrm{D}) = \left\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right\|.$$



Or, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{PR}}_{\vec{n}}$, où R est un point quelconque de D, $\vec{n}$, un vecteur normal à D, et $\overrightarrow{\mathrm{PR}}_{\vec{n}}$, la projection orthogonale de $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ sur $\vec{n}$.



$\vec{u} \cdot \vec{n} = (3, 2) \cdot (2, -3)$
$= 0$

Puisque $\vec{u} = (3, 2)$ est un vecteur directeur de D, nous avons que $\vec{n} = (2, -3)$ est un vecteur normal à D.

En posant $k = 0$ dans l'équation de D, nous obtenons le point R(-2, -1) $\in$ D.

P(4, -2) ; R(-2, -1)
$\overrightarrow{PR} = (-6, 1)$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}_{\vec{n}} = \frac{\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} \qquad \text{(théorème 6.7)}$$

$$= \frac{(-6, 1) \cdot (2, -3)}{(2, -3) \cdot (2, -3)} (2, -3) \qquad \text{(car } \overrightarrow{PR} = (-6, 1) \text{ et } \vec{n} = (2, -3)\text{)}$$

$$= \frac{-15}{13}(2, -3)$$

$$= \left(\frac{-30}{13}, \frac{45}{13}\right)$$

Donc, $d(P, D) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\left(\frac{-30}{13}\right)^2 + \left(\frac{45}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{900}{169} + \frac{2025}{169}} = \frac{\sqrt{2925}}{13}$

d'où $d(P, D) \approx 4{,}16$ unités.

Remarque : Soit un point P et une droite D de $\mathbb{R}^2$.

1) Si $d(P, D) \neq 0$, alors P $\notin$ D ;
2) si $d(P, D) = 0$, alors P $\in$ D.

Démontrons, à l'aide du produit scalaire, une formule permettant de calculer la distance entre un point P et une droite D du plan cartésien.

7

THÉORÈME 7.3

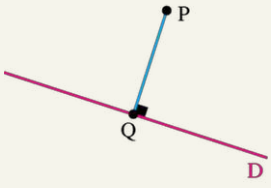
Soit $\vec{n}$, un vecteur normal à une droite D, et P, un point du plan cartésien.

Si R est un point quelconque de la droite D, alors la distance entre le point P et la droite D est donnée par

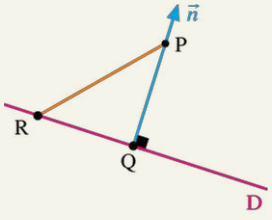
$$d(P, D) = \frac{|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

Preuve

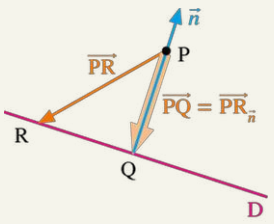
Du point P, abaissons une perpendiculaire à D qui rencontre D au point Q.



Soit $\vec{n}$, un vecteur normal à D passant par Q et P, et soit R, un point quelconque de D.



En projetant $\overrightarrow{PR}$ sur $\vec{n}$, nous obtenons $\overrightarrow{PQ}$.



$$d(P, D) = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$$

$$= \left\|\overrightarrow{PR}_{\vec{n}}\right\| \qquad \left(\text{car } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}_{\vec{n}}\right)$$

$$= \left\|\left(\frac{\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\right)\vec{n}\right\| \qquad \text{(théorème 6.7)}$$

$$= \left|\frac{\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\right| \left\|\vec{n}\right\| \qquad \left(\text{car } \left\|k\vec{u}\right\| = |k|\left\|\vec{u}\right\|\right)$$

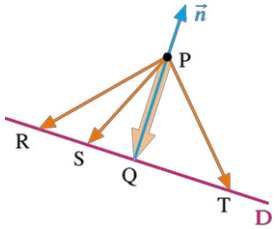
$$= \frac{\left|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\vec{n} \cdot \vec{n}\right|} \left\|\vec{n}\right\| \qquad \left(\text{car } \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\right)$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|^2} \left\|\vec{n}\right\| \qquad \left(\text{car } \vec{n} \cdot \vec{n} = \left\|\vec{n}\right\|^2, \text{ théorème 6.4}\right)$$

d'où $d(P, D) = \dfrac{\left|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$

Remarque : La distance $d(P, D)$ est indépendante du choix du vecteur normal et du choix du point sur la droite D. Soit $\vec{n}$, un vecteur normal à la droite D, et R, S et T, des points de D.

$$\overrightarrow{PR}_{\vec{n}} = \overrightarrow{PS}_{\vec{n}} = \overrightarrow{PT}_{\vec{n}} = \overrightarrow{PQ}$$



7

Exercice de compréhension 7.3

1. Soit D : $(x, y) = (-2, 5) + k(-3, 4)$, où $k \in \mathbb{R}$, et P(1, 7). Calculer $d(P, D)$.

Exemple 2 Soit la droite D passant par les points S(1, 1) et T(5, 3).

a) Calculons la distance $d(P, D)$ entre le point P(2, 4) et la droite D.

Soit $\overrightarrow{ST} = (4, 2)$, ainsi $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ST} = (2, 1)$ est un vecteur directeur de D, et $\vec{n} = (-1, 2)$ est un vecteur normal à D, car $\vec{n} \cdot \overrightarrow{ST} = 0$.

$(-1, 2) \cdot (4, 2) = 0$

$$d(P, D) = \frac{\left|\overrightarrow{PS} \cdot \vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|} \qquad \text{(théorème 7.3)}$$

$$= \frac{\left|(-1, -3) \cdot (-1, 2)\right|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} \qquad \left(\text{car } \overrightarrow{PS} = (-1, -3) \text{ et } \vec{n} = (-1, 2)\right)$$

$$= \frac{|-5|}{\sqrt{5}}$$

d'où $d(P, D) = \sqrt{5}$ unités, c'est-à-dire $d(P, D) \approx 2{,}24$ unités.

Point le plus près d'une droite

b) Déterminons le point Q ∈ D le plus près de P.

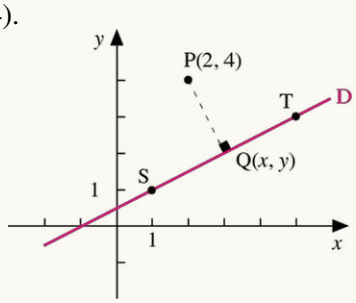
Trouvons d'abord des équations paramétriques de D.

En choisissant S(1, 1) et $\vec{u} = (2, 1)$, nous avons D : $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$.

$x = 1 + 2k$ et $y = 1 + k$

Soit Q(x, y), le point de D le plus près de P(2, 4).

Puisque $\overrightarrow{PQ} \perp D$, $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}$. Ainsi,



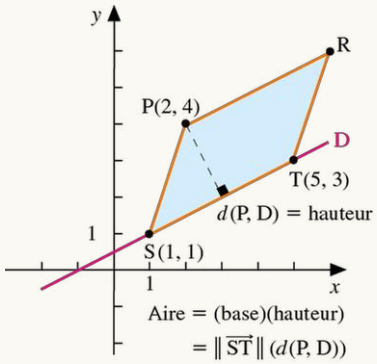
$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} &= 0 \\ (x - 2, y - 4) \cdot (2, 1) &= 0 \\ (1 + 2k - 2, 1 + k - 4) \cdot (2, 1) &= 0 \\ 2 + 4k - 4 + 1 + k - 4 &= 0 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

En remplaçant k par 1 dans $x = 1 + 2k$ et dans $y = 1 + k$, nous obtenons Q(3, 2).

c) Vérifions que $d(P, Q) = \sqrt{5}$ unités.

$d(P, Q) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{5}$, d'où $\sqrt{5}$ unités.

d) Vérifions que la distance $d(P, D)$ peut également être obtenue en divisant l'aire du parallélogramme, engendré par les vecteurs $\overrightarrow{SP}$ et $\overrightarrow{ST}$, par la longueur de la base du parallélogramme.



$$\begin{aligned} d(P, D) &= \frac{\text{Aire SPRT}}{\|\overrightarrow{ST}\|} \\ &= \frac{\|\overrightarrow{SP} \times \overrightarrow{ST}\|}{\|\overrightarrow{ST}\|} \quad \text{(théorème 6.11)} \\ &= \frac{\|(1, 3, 0) \times (4, 2, 0)\|}{\|(4, 2, 0)\|} \\ &= \frac{\|(0, 0, -10)\|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 0^2}} \\ &= \frac{10}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{SP} = (1, 3, 0)$
$\overrightarrow{ST} = (4, 2, 0)$

$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -10)$

d'où $d(P, D) = \sqrt{5}$ unités.

Lorsque l'équation de la droite D est donnée sous forme cartésienne, nous pouvons utiliser le théorème suivant pour calculer la distance entre un point P et la droite D.

THÉORÈME 7.4

La distance $d(\text{P, D})$ entre le point $\text{P}(x_0, y_0)$ et la droite D du plan cartésien, où $\text{D} : ax + by - c = 0$, est donnée par

$$d(\text{P, D}) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Preuve

Soit $\text{R}(x, y)$, un point de D.

$$d(\text{P, D}) = \frac{|\overrightarrow{\text{PR}} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \qquad \text{(théorème 7.3)}$$

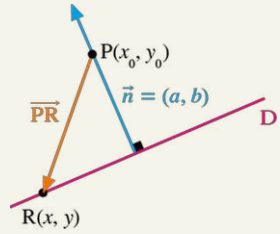
$$= \frac{|(x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b)|}{\|\vec{n}\|}$$

$$= \frac{|ax - ax_0 + by - by_0|}{\|\vec{n}\|}$$

$$= \frac{|ax + by - (ax_0 + by_0)|}{\|\vec{n}\|}$$

$$= \frac{|c - (ax_0 + by_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \text{(car } ax + by = c \text{ et } \vec{n} = (a, b)\text{)}$$

d'où $d(\text{P, D}) = \dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\qquad \left(\text{car } |c - (ax_0 + by_0)| = |ax_0 + by_0 - c|\right)$



$\text{P}(x_0, y_0)$ et $\text{R}(x, y)$
$\overrightarrow{\text{PR}} = (x - x_0, y - y_0)$
$\vec{n} = (a, b)$

7

Remarque : Dans le cas particulier où P est l'origine, la distance $d(\text{O, D})$ entre $\text{O}(0, 0)$ et la droite D, où $\text{D} : ax + by - c = 0$, est donnée par

$$d(\text{O, D}) = \frac{|a(0) + b(0) - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ ainsi}$$

$$d(\text{O, D}) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (\text{car } |-c| = |c|)$$

$|-c| = |c|$

Exemple 3 Soit la droite $\text{D} : 3x + 2y - 5 = 0$. Calculons la distance entre D et les points suivants, et déterminons si le point appartient à la droite D.

a) $\text{P}(5, -5)$

$$d(\text{P, D}) = \frac{|3(5) + 2(-5) - 5|}{\sqrt{13}} = \frac{0}{\sqrt{13}}$$

d'où $d(\text{P, D}) = 0$ unité, ainsi $\text{R} \in \text{D}$.

$d(\text{P, D}) = \dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

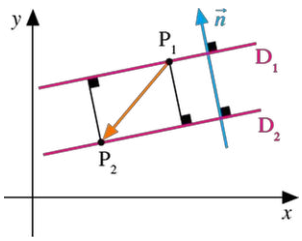
b) $\text{O}(0, 0)$

$$d(\text{O, D}) = \frac{|5|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

d'où $d(\text{O, D}) \approx 1{,}39$ unité, ainsi $\text{O} \notin \text{D}$.

$d(\text{O, D}) = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Distance entre deux droites parallèles dans le plan



Calculer la distance $d(D_1, D_2)$ entre deux droites parallèles D_1 et D_2 du plan cartésien équivaut

- à calculer la distance $d(P_1, D_2)$, où $P_1 \in D_1$, ou
- à calculer la distance $d(P_2, D_1)$, où $P_2 \in D_2$.

Ainsi, si $\vec{n}$ est un vecteur normal à D_1 et à D_2, alors

$$d(D_1, D_2) = d(P_1, D_2) = d(P_2, D_1) = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|} \qquad \text{(théorème 7.3)}$$

Remarque : Si D_1 et D_2 sont deux droites parallèles telles que

1) $d(D_1, D_2) \neq 0$, alors D_1 et D_2 sont parallèles distinctes ;
2) $d(D_1, D_2) = 0$, alors D_1 et D_2 sont parallèles confondues.

Exemple 1 Calculons la distance entre les droites parallèles suivantes.

$$D_1 : (x, y) = (4, -5) + k(3, -7), \text{ où } k \in \mathbb{R}, \text{ et } D_2 : \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{7}$$

Soit $P_1(4, -5) \in D_1$, $P_2(2, -1) \in D_2$ et $\vec{n} = (7, 3)$, un vecteur normal à D_1 et à D_2.

$$\begin{aligned} d(D_1, D_2) &= \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|} \qquad \text{(car } d(D_1, D_2) = d(P_1, D_2)\text{)} \\ &= \frac{\left|(-2, 4) \cdot (7, 3)\right|}{\left\|(7, 3)\right\|} \\ &= \frac{\left|-2\right|}{\sqrt{7^2 + 3^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{58}} \end{aligned}$$

d'où $d(D_1, D_2) \approx 0,26$ unité.

Lorsque les équations des droites D_1 et D_2 sont données sous la forme cartésienne telle que $\vec{n_1} = \vec{n_2}$, nous pouvons utiliser le théorème suivant pour calculer $d(D_1, D_2)$.

THÉORÈME 7.5

Soit D_1 et D_2, deux droites parallèles du plan cartésien ayant le même vecteur normal.

Si $D_1 : ax + by - c_1 = 0$ et $D_2 : ax + by - c_2 = 0$, où $\vec{n} = (a, b)$ est le vecteur normal, alors la distance entre les droites D_1 et D_2 est donnée par

$$d(D_1, D_2) = \frac{\left|c_1 - c_2\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

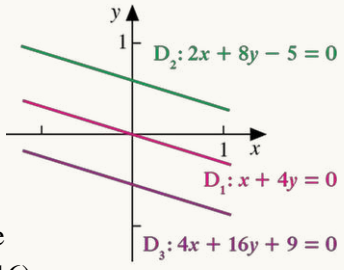
La preuve est laissée à l'étudiant.

Exemple 2 Calculons la distance entre les droites parallèles suivantes.

$D_1 : x + 4y = 0$,

$D_2 : 2x + 8y - 5 = 0$ et

$D_3 : 4x + 16y + 9 = 0$



Transformons d'abord D_1 et D_2 pour obtenir le même vecteur normal que celui de D_3, c'est-à-dire $\vec{n} = (4, 16)$.

Ainsi, $D_1 : 4x + 16y = 0$ et $D_2 : 4x + 16y - 10 = 0$.

En utilisant le théorème 7.5, nous obtenons

$$d(D_1, D_2) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d(D_1, D_2) = \frac{|0 - 10|}{\sqrt{4^2 + 16^2}} \quad \text{(car } c_1 = 0,\ c_2 = 10 \text{ et } \vec{n} = (4, 16)\text{)}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{272}}$$

d'où $d(D_1, D_2) \approx 0{,}61$ unité.

$$d(D_1, D_3) = \frac{|0 - (-9)|}{\sqrt{4^2 + 16^2}} \quad \text{(car } c_1 = 0,\ c_3 = -9 \text{ et } \vec{n} = (4, 16)\text{)}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{272}}$$

d'où $d(D_1, D_3) \approx 0{,}55$ unité.

$$d(D_2, D_3) = \frac{|10 - (-9)|}{\sqrt{4^2 + 16^2}} \quad \text{(car } c_2 = 10,\ c_3 = -9 \text{ et } \vec{n} = (4, 16)\text{)}$$

$$= \frac{19}{\sqrt{272}}$$

d'où $d(D_2, D_3) \approx 1{,}15$ unité.

7

Applications en géométrie

IL Y A ENVIRON 200 ANS...

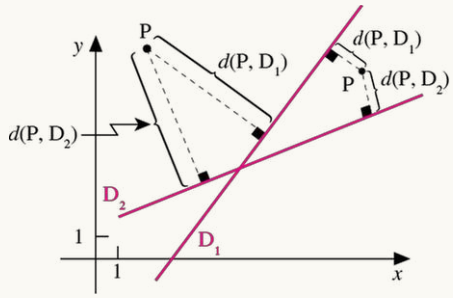
Nous avons dit, dans la perspective historique du début de ce chapitre, que c'est après la Révolution française que l'étude de la droite s'insère de façon définitive dans l'enseignement secondaire. En fait, non seulement la Révolution française permet-elle un changement politique de première importance, mais elle apporte aussi un changement fondamental dans la façon d'enseigner les mathématiques et les sciences. En effet, c'est à l'École polytechnique de Paris, fondée en 1794, qu'on ajoute pour la première fois des périodes de résolution de problèmes aux cours de mathématiques et des laboratoires aux cours de sciences. En quelques années, plusieurs phénomènes physiques sont mathématisés par les premiers élèves de l'École et l'ingénierie prend la teinte fortement mathématique qu'elle a encore aujourd'hui.

Dans les exemples suivants, nous allons déterminer des lieux géométriques à l'aide de la notion de distance.

Exemple 1 Déterminons et représentons graphiquement les lieux géométriques des points P(x, y) qui sont à une distance égale des droites D_1 et D_2 suivantes.

$$D_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{4} \text{ et}$$

$$D_2 : 5x - 12y + 20 = 0$$



$\vec{u_1} = (3, 4)$
$\vec{n_1} = (-4, 3)$

Soit $P_1(2, -3) \in D_1$, $\vec{n_1} = (-4, 3)$, $P_2(-4, 0) \in D_2$ et $\vec{n_2} = (5, -12)$, où $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont des vecteurs normaux à D_1 et à D_2.

$$d(P, D_1) = d(P, D_2)$$

$$\frac{|\overrightarrow{PP_1} \cdot \vec{n_1}|}{\|\vec{n_1}\|} = \frac{|\overrightarrow{PP_2} \cdot \vec{n_2}|}{\|\vec{n_2}\|} \quad \text{(théorème 7.3)}$$

$\vec{n_1} = (-4, 3)$
$\vec{n_2} = (5, -12)$

$$\frac{|(2 - x, -3 - y) \cdot (-4, 3)|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{|(-4 - x, 0 - y) \cdot (5, -12)|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}}$$

$$\frac{|-8 + 4x - 9 - 3y|}{5} = \frac{|-20 - 5x + 12y|}{13}$$

donc,

$$\frac{4x - 3y - 17}{5} = \frac{-5x + 12y - 20}{13}$$

$$52x - 39y - 221 = -25x + 60y - 100$$

$$77x - 99y - 121 = 0$$

ou

$$\frac{4x - 3y - 17}{5} = \frac{-(-5x + 12y - 20)}{13}$$

$$52x - 39y - 221 = 25x - 60y + 100$$

$$27x + 21y - 321 = 0$$

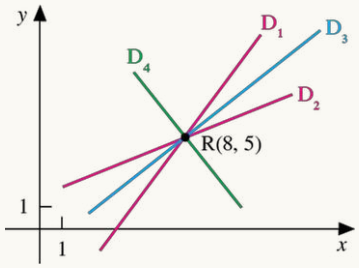
d'où $D_3 : 7x - 9y - 11 = 0$ et

$D_4 : 9x + 7y - 107 = 0$

sont les lieux géométriques cherchés.

Les droites D_3 et D_4 sont les droites bissectrices des angles formés par D_1 et D_2.

L'étudiant peut vérifier que le point d'intersection des droites D_1, D_2, D_3 et D_4 est le point R(8, 5).



7

Exemple 2 Déterminons l'équation du cercle de centre C(1, 2) qui est tangent à la droite D : $\dfrac{x-8}{3} = \dfrac{y-3}{4}$.

Nous savons que l'équation générale d'un cercle de centre C(x_0, y_0) et de rayon r est donnée par $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

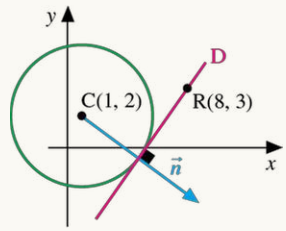
Trouvons le rayon r du cercle cherché.

$$r = d(\text{C, D})$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{\text{CR}} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} \quad \text{(où R(8, 3) et } \vec{n} = (4, -3), \text{ car } \vec{u} = (3, 4))$$

$$= \frac{\left|(7, 1) \cdot (4, -3)\right|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{25}{5}$$



d'où l'équation du cercle est $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$, car $r = 5$.

Exemple 3 Déterminons et représentons graphiquement le lieu géométrique des points P(x, y) qui sont équidistants du point F(2, 3) et de la droite D : $y - 1 = 0$.

$$d(\text{F, P}) = d(\text{P, D})$$

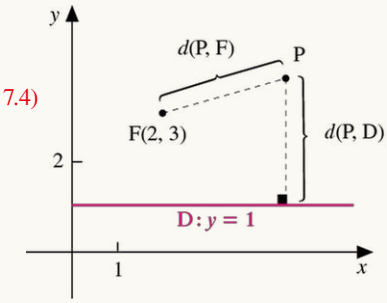
$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \frac{|y-1|}{1} \quad \text{(théorème 7.4)}$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (y-1)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = y^2 - 2y + 1$$

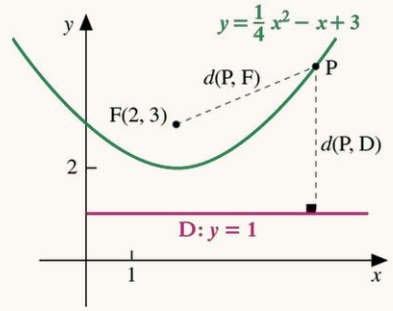
$$-4y = -x^2 + 4x - 12$$

$$y = \frac{1}{4}x^2 - x + 3$$



d'où $y = \dfrac{1}{4}x^2 - x + 3$
est le lieu géométrique cherché.

Ce lieu géométrique est une parabole ouverte vers le haut.



EXERCICES 7.3

1. Calculer la distance $d(P, D)$ entre le point P et la droite D, et interpréter le résultat.

a) P(-7, -4) et D : $\begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 5 + 3k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$

b) P(0, 0) et D passant par A(-4, 7) et B(3, 16)

c) P(2, -3) et D : $5x - 4y + 1 = 0$

2. Soit P(3, 7) et D : $12x - 5y + k = 0$. Déterminer les valeurs de k telles que $d(P, D) = 1$.

3. Calculer la distance $d(D_1, D_2)$ entre les droites parallèles suivantes et interpréter le résultat.

a) $D_1 : \dfrac{x - 4}{3} = \dfrac{y + 1}{5}$

$D_2 : \dfrac{x + 4}{6} = \dfrac{y - 1}{10}$

b) $D_1 : \begin{cases} x = 4 - 2k \\ y = -6 + 3k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$

$D_2 : (x, y) = (-6, 9) + t(2, -3)$, où $t \in \mathbb{R}$

c) $D_1 : 3x - 4y + 2 = 0$

$D_2 : 6x - 8y - 1 = 0$

4. Calculer la distance entre O(0, 0) et la droite

a) $D_1 : x + y + 1 = 0$;

b) $D_2 : \dfrac{x - 5}{2} = \dfrac{3 - y}{7}$;

c) $D_3 : (x, y) = (1, 5) + k(1, 0)$, où $k \in \mathbb{R}$;

d) $D_4 : \begin{cases} x = 3 + 3k \\ y = 2 + 2k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$.

5. Soit D : $5x - 2y + 1 = 0$.

a) Déterminer le point $Q(x, y)$ de la droite D le plus près de P(-3, 7).

b) Déterminer $d(P, Q)$.

6. **LIEU GÉOMÉTRIQUE**

Soit les points P(-4, 1) et Q(2, 5). Déterminer le lieu géométrique des points $R(x, y)$ situés à égale distance de P et de Q. Représenter et identifier ce lieu.

7. **LIEU GÉOMÉTRIQUE**

Soit les droites
$D_1 : (x, y) = (3, 2) + k(2, 1)$, où $k \in \mathbb{R}$, et

$D_2 : x - 1 = \dfrac{y - 1}{2}$.

Déterminer le lieu géométrique de tous les points $P(x, y)$ qui sont à une distance égale des droites D_1 et D_2. Représenter graphiquement D_1, D_2 et le lieu géométrique.

8. **LIEU GÉOMÉTRIQUE**

a) Déterminer le lieu géométrique des points $P(x, y)$ qui sont équidistants du point F(4, -5) et de l'axe des y.

b) Représenter graphiquement et identifier ce lieu.

9. **CERCLE TANGENT**

a) Soit les droites suivantes.

$D_1 : 3x + 4y + 5 = 0$,

$D_2 : 3x + 4y + 15 = 0$ et

$D_3 : 4x - 3y = 0$.

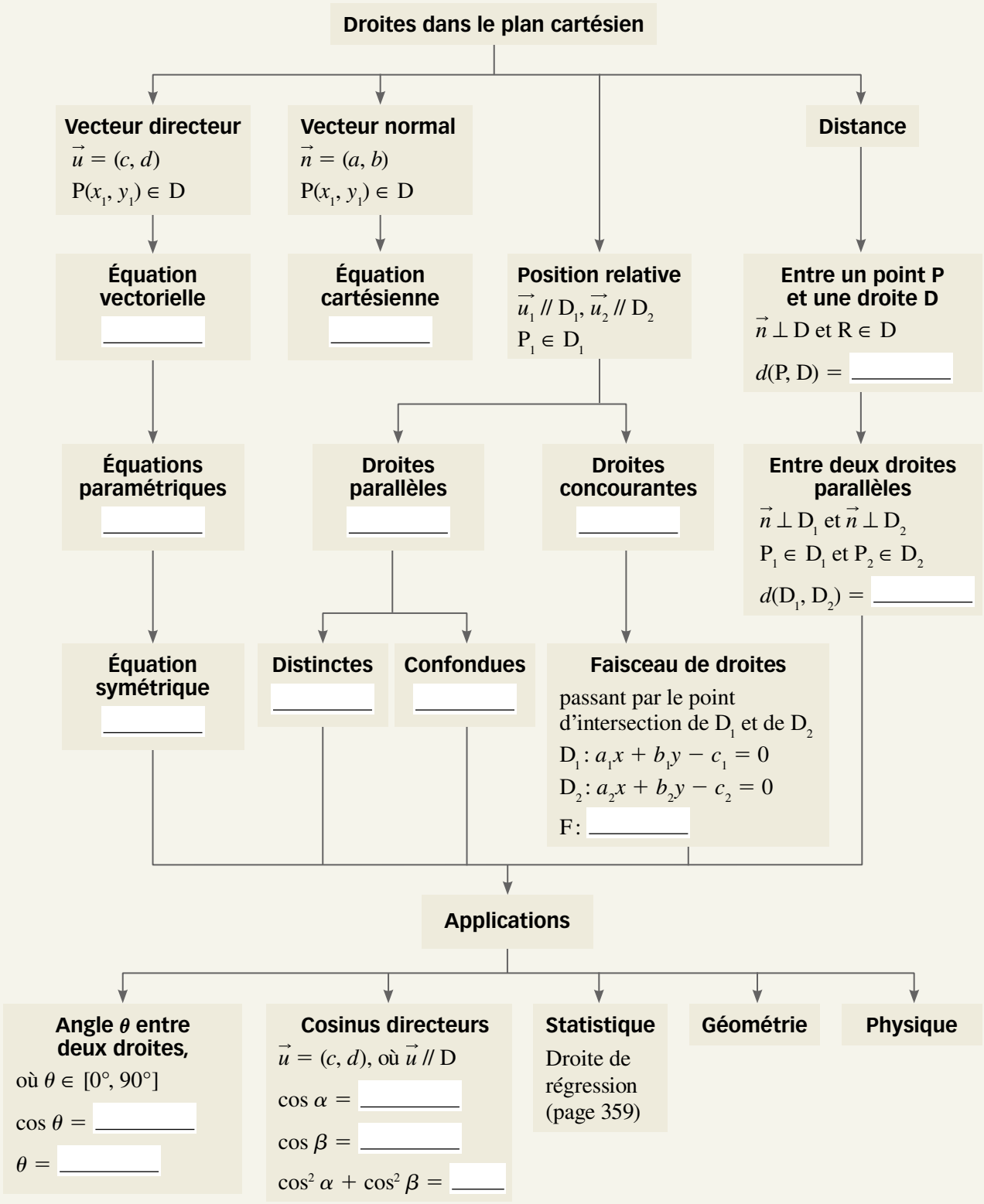
i) Déterminer le centre des cercles tangents aux trois droites données.

ii) Donner les équations des cercles tangents à ces droites.

iii) Représenter graphiquement les droites et les cercles.

b) Combien y a-t-il, dans le plan cartésien, de cercles tangents à trois droites concourantes deux à deux ?

Révision des concepts



Exercices récapitulatifs

Administration | Biologie | Chimie | Géométrie | Physique | Sciences humaines | Outil technologique

Les réponses aux exercices récapitulatifs et aux problèmes de synthèse, à l'exception de ceux notés en **rouge**, sont fournies à la fin du manuel.

1. Déterminer, si c'est possible, une équation vectorielle (É.V.), des équations paramétriques (É.P.), une équation symétrique (É.S.) et une équation cartésienne (É.C.) des droites suivantes.

a) D_1 passe par P(3, -7) et a $\vec{u} = (-2, 1)$ comme vecteur directeur.

b) D_2 passe par P(0, 3) et par Q(-4, 3).

c) D_3 passe par P(5, -1) et est perpendiculaire à la droite passant par R(5, -6) et S(7, -2).

d) D_4 est tangente au cercle de centre C(-4, 3) au point P(2, 5).

e) D_5 passe par P(8, -7) et est perpendiculaire à l'axe des x.

f) D_6 passe par P(-2, 8) et est parallèle à la droite $y = \frac{x}{3} + 6$.

2. Soit les droites

$D_1 : (x, y) = (3, -7) + k(-2, 1)$, où $k \in \mathbb{R}$,

$D_2 : y - 3 = 0$,

$D_3 : \begin{cases} x = 5 + 4k \\ y = -1 - 2k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$,

$D_4 : x - 8 = 0$,

$D_5 : \frac{x - 2}{2} = \frac{5 - y}{6}$ et

$D_6 : x - 3y + 26 = 0$.

a) Parmi les droites précédentes, déterminer celles qui

i) sont parallèles ;

ii) sont perpendiculaires.

b) Déterminer, si c'est possible, le point d'intersection des droites

i) D_1 et D_2 ; ii) D_1 et D_3 ; iii) D_1 et D_4.

c) Déterminer l'angle formé par

i) D_1 et D_2 ; ii) D_1 et D_3 ; iii) D_1 et D_4.

d) Calculer la distance entre

i) P(-3, 7) et D_5 ; ii) R(4, -1) et D_5.

e) Calculer la distance entre D_1 et D_3.

3. Soit D_1, la droite passant par P(4, 5) et par Q(-2, -1), D_2, la droite passant par R(-1, 4) et par S(5, 2), et $D_3 : 3x - 6y - 185 = 0$.

a) Déterminer

i) le point d'intersection A des droites D_1 et D_2 ;

ii) le point d'intersection B des droites D_1 et D_3.

b) Représenter graphiquement les droites et les points d'intersection.

c) Déterminer

i) l'angle θ formé par D_1 et D_2 ;

ii) l'angle φ formé par D_1 et D_3.

d) Déterminer

i) les angles directeurs de D_1 et les cosinus directeurs associés ;

ii) les angles directeurs de D_2 et les cosinus directeurs associés.

4. Soit $D_1 : (x, y) = (3, 4) + k(2, -5)$, où $k \in \mathbb{R}$, et $D_2 : \frac{x - 5}{2} = y + 7$. Déterminer une équation

a) du faisceau F de droites, défini par D_1 et D_2 ;

b) de la droite D_3 du faisceau si $k_1 = 2$ et $k_2 = -3$;

c) de la droite D_4 du faisceau qui passe par l'origine ;

d) de la droite D_5 du faisceau, qui est verticale ;

e) de la droite D_6 du faisceau, qui est horizontale ;

f) de la droite D_7 du faisceau, qui est parallèle à la droite définie par $(x, y) = (2, -1) + k(4, 5)$, où $k \in \mathbb{R}$;

g) de la droite D_8 du faisceau, qui est perpendiculaire à la droite définie par $(x, y) = (2, -1) + k(4, 5)$, où $k \in \mathbb{R}$.

5. Soit les faisceaux F_1 et F_2 tels que

$F_1 : k_1(2x - 5y + 15) + k_2(x + y + 4) = 0$,

où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$ ($k_1 \neq 0$ ou $k_2 \neq 0$) et

$F_2 : k_3(-x + 2y + 10) + k_4(3x + y - 2) = 0$,

où k_3 et $k_4 \in \mathbb{R}$ ($k_3 \neq 0$ ou $k_4 \neq 0$).

a) Quelles valeurs faut-il attribuer à k_1, k_2, k_3 et k_4 pour obtenir la droite D commune aux deux faisceaux ?

b) Représenter graphiquement les droites qui engendrent F_1, F_2 et la droite D.

6. Soit la droite D : $\frac{x-5}{4} = y - 3$ et le point P(-5, 9).

a) Calculer la distance d(P, D).

b) Déterminer le point Q de D le plus près de P(-5, 9).

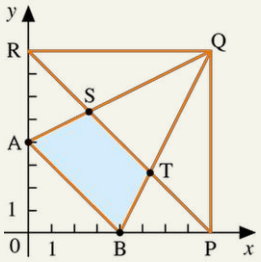
c) Calculer d(O, D).

d) Déterminer le point R de D le plus près de l'origine.

e) Représenter graphiquement la droite D, tracer le quadrilatère OQPR et calculer l'aire A de ce quadrilatère.

7. AIRE D'UN TRAPÈZE

Soit le carré OPQR suivant, dont chaque côté mesure 8 cm, et où A et B sont respectivement les points milieux de $\overline{OR}$ et de $\overline{OP}$.



Déterminer l'aire du trapèze ASTB.

8. AIRE D'UN QUADRILATÈRE

Soit les droites D_1 : $(x, y) = (-1, 2) + k(1, 3)$, où $k \in \mathbb{R}$, et D_2 : $x - 5y - 3 = 0$, et le point P(4, 2).

a) Déterminer le point $Q_1 \in D_1$ le plus près de P.

b) Déterminer le point $Q_2 \in D_2$ le plus près de P.

c) Calculer l'aire du quadrilatère délimité par les points Q_1, Q_2, P et le point d'intersection R de D_1 et de D_2.

9. Soit P(6, 9) et Q(10, 3), les coordonnées de deux sommets d'un carré. Déterminer les coordonnées des deux autres sommets de chacun des carrés possibles.

10. APPLICATION | ESTIMATION DE DISTANCES

Les paires de données suivantes indiquent le nombre de minutes écoulées et de kilomètres parcourus en bicyclette par Pierre lors de diverses randonnées.

(63, 20) (78, 28) (85, 29) (95, 31) (100, 32)
(110, 35) (130, 37) (143, 50) (160, 53) (199, 65)

a) Représenter graphiquement le nuage de points.

b) Déterminer l'équation de la droite de régression.

c) Représenter graphiquement le nuage de points et la droite de régression.

d) Estimer, à l'aide de la droite de régression, le nombre de kilomètres que pourrait parcourir Pierre pendant une randonnée de

i) 90 minutes ;

ii) 120 minutes ;

iii) 150 minutes ;

iv) 180 minutes.

11. APPLICATION | ESTIMATION DE QUANTITÉS

Un vendeur de crème glacée pense qu'il existe un lien entre la quantité de crème glacée vendue et la température extérieure. Il recueille les données suivantes.

Température extérieure (en °C)	Quantité de crème glacée vendue (en litres)
21,5	57,6
28,8	74,7
24,6	64,5
21,9	58,9
29,1	74,2
25,8	68,1
28,1	71,5
23,0	59,0
23,9	62,1
27,3	71,4

a) Réécrire les données en ordonnant les températures par ordre croissant tout en conservant la relation entre la température et le nombre de litres de crème glacée vendus, puis représenter le nuage de points correspondant.

b) Déterminer l'équation de la droite de régression et représenter la droite de régression ainsi que le nuage de points.

c) Estimer, à l'aide de la droite de régression, la quantité de crème glacée vendue pour les températures suivantes.

i) 22,5 °C ii) 23,5 °C iii) 25 °C

d) Estimer la quantité supplémentaire de crème glacée vendue pour chaque augmentation de un degré de la température.

e) À partir de la réponse trouvée en a), fractionner le nuage de points en deux sous-nuages en utilisant les cinq premiers couples de données et les cinq derniers couples de données pour déterminer l'équation de la droite de régression dans chacun des sous-nuages.

f) Représenter graphiquement sur un même graphique

i) les deux droites de régression déterminées en e) ;

ii) les deux droites de régression déterminées en e) et celle trouvée en b).

12. APPLICATION | DISTANCE ET VITESSE

Soit le vecteur $\vec{i} = (1, 0)$ représentant un déplacement de 1 kilomètre vers l'est et le vecteur $\vec{j} = (0, 1)$ représentant un déplacement de 1 kilomètre vers le nord. Dans le nord du Québec, deux équipes de travailleurs posent des tuyaux pour la construction d'un oléoduc qui se déploie selon une orientation ouest-est. À 7 h, l'équipe A et l'équipe B partent de leur camp de base, respectivement dans un véhicule A et un véhicule B. Le camp de l'équipe A est situé au point O(0, 0) et celui de l'équipe B est situé au point P(10, 0). Les deux véhicules ont des vitesses moyennes différentes, exprimées en km/h. Le véhicule A a pour vecteur vitesse $\overrightarrow{v_A} = (-36, 16)$ et le véhicule B a pour vecteur vitesse $\overrightarrow{v_B} = (18, 24)$.

a) Déterminer la vitesse v_A du véhicule A et la vitesse v_B du véhicule B.

b) Déterminer l'équation vectorielle des trajectoires rectilignes T_A et T_B de chaque équipe, où les paramètres utilisés pour définir les trajectoires sont exprimés en heures.

c) Déterminer la distance entre les véhicules à 7 h 30.

d) À ce moment (7 h 30), le véhicule B s'arrête et son équipe commence à poser des tuyaux dans la direction ouest. Le véhicule A continue à rouler, sans changer de direction ni de vitesse, jusqu'à ce qu'il soit exactement à l'ouest de l'équipe B. L'équipe A commence alors à poser des tuyaux dans la direction est. Déterminer l'heure à laquelle l'équipe A commence à poser des tuyaux ainsi que sa position à ce moment.

e) L'équipe A pose en moyenne 120 m de tuyaux par heure, et l'équipe B, 100 m de tuyaux par heure. Si les deux équipes travaillent jusqu'à 16 h, en incluant une interruption d'une heure, déterminer à cet instant la distance $d_{16\,h}$ entre l'équipe A et l'équipe B.

f) Déterminer approximativement le temps, en minutes, qu'il faudrait à chaque équipe pour revenir à son camp de base depuis sa position à 16 h, en supposant que chacune roule en ligne droite et avec la même vitesse moyenne que pour le trajet du matin.

13. APPLICATION | DISTANCE ET VITESSE

Soit les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ représentant respectivement un déplacement de 1 kilomètre vers l'est et de 1 kilomètre vers le nord. La position par rapport à un point d'observation O(0, 0) d'un bateau B qui se déplace en ligne droite à partir de 8 h est donnée par $(x, y) = (0, 28) + t(6, -8)$, où t est exprimé en heures.

a) Trouver la position P_{10} du bateau à 10 h.

b) Déterminer

i) le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_B}$;

ii) la vitesse v_B du bateau.

c) Un bateau C est ancré au point Q(27, -8) par rapport au point d'observation O(0, 0). Déterminer si le bateau B entrera en collision avec le bateau C. Si oui, déterminer l'heure de la collision.

d) Pour éviter la collision, le bateau C commence à se déplacer à 11 h 30 avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{v_C} = (-3, 10)$, exprimé en km/h. Déterminer la distance qui sépare les bateaux B et C

i) à 11 h 30 ;

ii) à 14 h.

e) Dans les conditions précédentes, calculer la distance minimale qui sépare les deux bateaux.

14. APPLICATION | DISTANCE ET VITESSE

La position d'une automobile miniature rouge, qui se déplace en ligne droite, est donnée par $(x, y) = (3, 0) + t\left(\frac{4}{3}, 1\right)$, où $t \in [0 \text{ sec}, t_c \text{ sec}]$.

À l'instant où l'automobile miniature rouge quitte son point de départ R, une automobile miniature bleue, se déplaçant également en ligne droite, part du point B(1, 3) avec une vitesse constante. L'équation du trajet de l'automobile bleue est donnée par $\frac{x-1}{3} = y - 3$.



Dans les questions suivantes, un vecteur unité représente un déplacement de 1 mètre.

a) À quelle distance du point O(0, 0) se trouve l'automobile rouge après 3 secondes ?

b) Déterminer la vitesse de l'automobile rouge.

c) Déterminer les coordonnées du point C, où les automobiles entrent en collision.

d) Déterminer la vitesse de l'automobile bleue sur [0 sec, t_c sec], où t_c est l'instant où les automobiles entrent en collision.

e) Déterminer la distance séparant les automobiles une seconde avant la collision.

f) Déterminer à quel temps la distance entre les automobiles était de

i) 3 mètres ; ii) 2 mètres ; iii) 1 mètre.

15. Soit la droite D : $12x + 5y - 10 = 0$.

a) Déterminer, sur l'axe des y, les points qui sont à une distance 5 de la droite D. Représenter graphiquement la droite D et les points trouvés.

b) Déterminer les points de D qui sont à une distance 5 de l'axe des y. Représenter graphiquement la droite D et les points trouvés.

16. Soit $D_1 : 9x + ky = 7$ et $D_2 : kx + y - 2 = 0$.

Déterminer k, où $k \in \mathbb{R}$, tel que

a) $D_1 /\!/ D_2$; dans ce cas, calculer $d(D_1, D_2)$;

b) $D_1 \perp D_2$; dans ce cas, déterminer le point d'intersection entre les droites D_1 et D_2.

17. Soit les droites suivantes, où $a \in \mathbb{R}$.

$D_1 : \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 1 - a + ak \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$, et

$D_2 : 4x + ay - 2 = 0$.

Déterminer a pour que les deux droites soient

a) i) parallèles confondues ;

ii) parallèles distinctes ;

b) concourantes ;

c) perpendiculaires.

18. Déterminer a, où $a \in \mathbb{R}$, tel que

a) $d(P, D) = 4$ si P(0, 0) et

$D : 5x + ay + 20 = 0$;

b) $d(P, D) = 2$ si P(2, 2) et

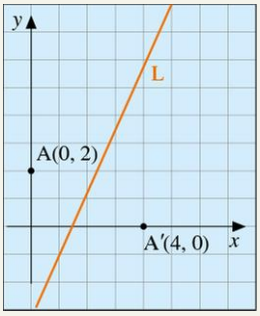
$D : ax + 3y - 15 = 0$;

c) $d(P, D) = 5$ si P(3, -1) et

$D : 6x + ay + 24 = 0$.

19. **LIEU GÉOMÉTRIQUE**

On plie selon la droite L, tel qu'illustré, une feuille de papier quadrillé de manière à ce que le point A(0, 2) soit superposé au point A′(4, 0).



a) Déterminer à quel point B′ est superposé le point B(0, 6).

b) Déterminer à quel point C est superposé le point C′(7, 3).

c) Déterminer le lieu géométrique des points qui sont superposés à eux-mêmes.

20. **LIEU GÉOMÉTRIQUE**

Soit la droite $D_1 : 3x - 4y + 3 = 0$ et la droite $D_2 : ax + by - c = 0$. Déterminer les lieux géométriques des points situés à une distance

a) 2 de D_1 ; b) k de D_1 ; c) k de D_2.

21. **LIEU GÉOMÉTRIQUE**

Soit $D_1 : 3x + 5y + 2 = 0$ et $D_2 : 6x + 10y + 29 = 0$, deux droites parallèles. Déterminer les lieux géométriques des points qui sont quatre fois plus près de D_2 que de D_1.

22. **LIEU GÉOMÉTRIQUE**

Déterminer et identifier le lieu géométrique des points situés à égale distance du point P(3, 4) et de la droite $D : (x, y) = (5 + k)\vec{i} + 2\vec{j}$, où $k \in \mathbb{R}$. Représenter graphiquement le lieu géométrique.

23. **LIEU GÉOMÉTRIQUE**

Soit $D : \begin{cases} x = 2k \\ y = 2 - k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$.

a) Représenter graphiquement la droite D.

b) Représenter graphiquement les lieux géométriques obtenus lorsque $k = 0$, $k = 2$ et $k = -1$. Comment s'appellent ces lieux ?

c) Représenter graphiquement le lieu géométrique obtenu lorsque $k \in [-2, 3[$.

d) Représenter graphiquement le lieu géométrique obtenu lorsque $k \in [-1, +\infty[$.

e) Déterminer les limites entre lesquelles k doit varier pour obtenir tous les points du segment de droite joignant $A\left(-5, \frac{9}{2}\right)$ à $B\left(\frac{18}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Problèmes de synthèse

1. Déterminer, si c'est possible, une équation vectorielle (É.V.), des équations paramétriques (É.P.), une équation symétrique (É.S.), une équation cartésienne (É.C.) et l'équation de la forme fonctionnelle (É.F.) $y = ax + b$ de la (des) droite(s) passant

a) par le point milieu du segment de droite $\overline{PQ}$, où P(-1, 5) et Q(3, 7), et perpendiculaire(s) à ce segment de droite ;

b) par P et par Q, où P est l'intersection des droites D_1 et D_2, et Q est l'intersection des droites D_3 et D_4 ;

$D_1 : \dfrac{x+3}{2} = y + 5,$

$D_2 : (x, y) = (2, 2) + r(1, 2)$, où $r \in \mathbb{R}$,

$D_3 : 5x - 2y - 3 = 0,$

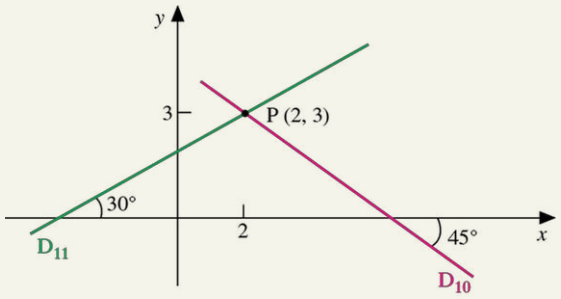
$D_4 : \begin{cases} x = 7 + 6t \\ y = -4 - 5t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$;

c) par P(-2, 7) et formant un angle de 45° avec la droite $x - y + 2 = 0$;

d) par P(2, 0) et tangente(s) au cercle C : $x^2 + y^2 = 2$;

e) par P(-1, -3) et perpendiculaire à une droite D dont la pente est 5 ;

f) par P(2, 3) telles que représentées ci-dessous.



2. HAUTEUR, MÉDIANE ET MÉDIATRICE

Soit les droites $D_1 : x - 2y + 4 = 0$,

$D_2 : \dfrac{x+9}{7} = \dfrac{y-3}{-2}$ et

$D_3 : (x, y) = (-1, 7) + k(3, -4)$, où $k \in \mathbb{R}$.

Soit A, B et C, les points d'intersection respectifs de D_1 et D_2, de D_1 et D_3, et de D_2 et D_3.

a) Déterminer A, B et C.

b) Calculer les angles du triangle ABC.

c) Calculer l'aire de ce triangle.

d) Calculer les trois hauteurs du triangle.

e) Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment de droite $\overline{AB}$.

f) Déterminer une équation vectorielle de la médiane issue de C.

3. AIRE D'UN QUADRILATÈRE

Soit les points A(-1, 2) et B(7, 3), et deux droites D_1 et D_2 telles que D_1 est la droite perpendiculaire en C(3, 0) à la droite passant par A et C, et D_2 est la droite perpendiculaire en B à la droite passant par A et B. Calculer l'aire du quadrilatère AEBC, où E est le point d'intersection des droites D_1 et D_2.

4. Soit l'ensemble des droites définies par $L_a : 4x + (2 + a)y - 2a = 0$, où $a \in \mathbb{R}$.

a) Soit $D_1 : x + y + 1 = 0$.

Déterminer une équation cartésienne de L_a, telle que L_a

i) est parallèle à D_1 ;

ii) est perpendiculaire a D_1.

b) Déterminer le point d'intersection P de toutes les droites définies par L_a.

c) Déterminer a pour laquelle L_a passe par le point

i) Q(2, 3), et déterminer des équations paramétriques de cette droite ;

ii) R(-2, -3), et déterminer une équation symétrique de cette droite.

d) Déterminer l'aire A_1 du triangle PQR.

e) i) Déterminer le point S tel que $\overrightarrow{PQ} /\!/ \overrightarrow{RS}$ et PQRS forme un trapèze isocèle, et représenter graphiquement ce trapèze.

ii) Déterminer l'aire A_2 du trapèze PQRS.

5. SECTION CONIQUE

Soit la section conique définie par l'équation $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 24 = 0$.

a) i) Déterminer, à l'aide de déterminants, la nature possible de cette conique.

ii) Identifier cette section conique.

b) Les droites D_1 et D_2 sont tangentes à cette section conique et sont parallèles à la droite d'équation D : $x - 2y + 2 = 0$.

i) Déterminer les points P_1 et P_2, les points d'intersection respectifs de D_1 et D_2 avec cette section conique.

ii) Déterminer une équation cartésienne de D_1 et de D_2.

c) Représenter graphiquement cette section conique et les droites D, D_1 et D_2.

6. LIEU GÉOMÉTRIQUE

a) Déterminer le lieu géométrique L des points P(x, y) qui sont équidistants du point F(1, 3) et de la droite D : $x - y = 0$.

b) Déterminer la nature de ce lieu en calculant les déterminants appropriés. Représenter graphiquement L.

7. AIRE D'UN QUADRILATÈRE

Soit la droite D : $(x, y) = (2, 7) + k(1, 5)$, où $k \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer une équation symétrique des droites D_i telles que $D_i \perp D$ et telles que l'aire entre D_i, l'axe des x et l'axe des y est de 40 u^2.

b) Calculer l'aire du quadrilatère dont les sommets sont les points d'intersection des droites D_i avec les axes.

c) Déterminer les points d'intersection entre les droites D_i et D.

8. CERCLES

a) Soit les cercles $C_1 : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ et $C_2 : (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 16$.

i) Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par les points d'intersection de C_1 et de C_2.

ii) Déterminer la distance maximale entre D et $C_1 \cup C_2$.

b) Soit les cercles $C_3 : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ et $C_4 : (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 4$.

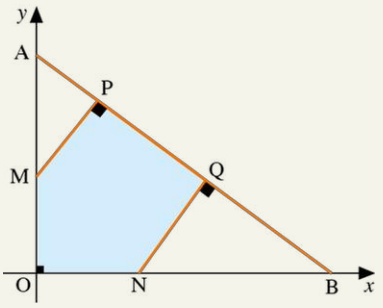
i) Déterminer le point $P_3 \in C_3$ et le point $P_4 \in C_4$, tels que $d(P_3, P_4)$ est maximale, et calculer cette distance.

ii) Calculer l'aire du triangle OP_3P_4.

c) Déterminer l'équation de chaque cercle qui est tangent à l'axe des x, à l'axe des y et à la droite L passant par P(-3, -24) et Q(18, 4). Représenter graphiquement les cercles et la droite L.

9. AIRE D'UN PENTAGONE

Dans le triangle rectangle OAB suivant, $\|\overrightarrow{OA}\| = 9$ cm et $\|\overrightarrow{OB}\| = 12$ cm. Les points M et N sont situés à 4 cm de O(0, 0) ; $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NQ}$ sont perpendiculaires à $\overrightarrow{AB}$.



a) Déterminer k tel que $k\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$.

b) Déterminer les coordonnées

i) du point P, en utilisant la notion de projection orthogonale ;

ii) du point Q, de deux façons différentes.

c) Calculer l'aire du pentagone OMPQN.

10. APPLICATION | RISQUE D'INFARCTUS

Selon une recherche scientifique, il existe un lien entre la quantité de neige tombée, en centimètres, et un accroissement du risque de subir une crise cardiaque, surtout chez les hommes. Le tableau ci-dessous indique le risque accru de subir une crise cardiaque, en pourcentage, par rapport à la quantité de neige tombée, en centimètres.

Quantité de neige (en cm)	5	15	30	40	50
Risque accru de crise cardiaque (en %)	1,1	2,5	5,1	6,3	7,8

a) Représenter graphiquement le nuage de points.

b) Déterminer l'équation de la droite de régression.

c) Représenter graphiquement le nuage de points et la droite de régression.

d) Estimer, à l'aide de la droite de régression, le risque accru de subir une crise cardiaque lorsqu'il tombe

i) 10 cm de neige ;

ii) 25 cm de neige ;

iii) 45 cm de neige.

11. APPLICATION | PRESSION ARTÉRIELLE

La pression artérielle idéale chez un adulte est de 115 / 75.



Le tableau ci-dessous indique le résultat d'un moniteur ambulatoire de pression artérielle (MAPA), qui mesure les pressions systolique et diastolique sur une période donnée. Les 25 données suivantes ont été prises à chaque heure sur une période de 24 heures.

Pression systolique	143	145	130	119	123	125	131	134	133	148	140	…
Pression diastolique	98	91	81	83	72	78	90	81	74	94	92	…

…	119	117	121	98	127	102	115	110	106	96	104	120	99	115
…	71	74	74	53	79	57	75	65	60	54	57	70	57	76

a) Représenter le nuage de points et déterminer l'équation de la droite de régression.

b) Représenter sur un même graphique le nuage de points ainsi que la droite de régression.

c) Calculer la différence d entre la mesure diastolique du tableau et celle obtenue à partir de la droite de régression pour une pression systolique de

i) 119 ; ii) 143 ; iii) 110.

12. APPLICATION | TAXES MUNICIPALES

Le montant des taxes municipales et scolaires payées par un résidant d'une ville québécoise est donné dans le tableau suivant.

Année	2009	2011	2013	2015	2017
Montant des taxes municipales	2601 $	2774 $	2796 $	2907 $	2946 $
Montant des taxes scolaires	660 $	676 $	734 $	854 $	930 $

a) Après avoir encodé les années, représenter sur un même graphique le nuage de points pour le montant des taxes municipales et celui des taxes scolaires.

b) Déterminer l'équation de la droite de régression $y_1 = a_1 + b_1x$ pour le montant des taxes municipales et $y_2 = a_2 + b_2x$ pour le montant des taxes scolaires.

c) Représenter dans un même système d'axes les nuages de points et les droites de régression.

d) Estimer, à l'aide des droites de régression (*voir b)*), le montant

i) des taxes municipales en 2014 ;

ii) des taxes scolaires en 2014.

e) Si la tendance de l'augmentation des taxes se maintient pendant quelques années, estimer le montant

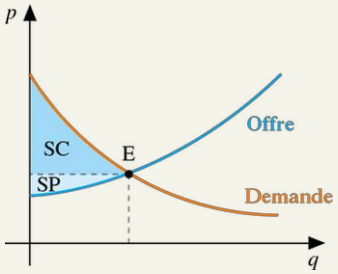
i) des taxes municipales en 2019 ;

ii) des taxes scolaires en 2019.

f) Interpréter la valeur de b_2 trouvée en b).

13. APPLICATION | OFFRE ET DEMANDE

En économie, le point d'équilibre est le point de rencontre entre la fonction représentant la demande d'un produit et la fonction représentant l'offre d'un produit (*voir la représentation suivante*).



Le tableau ci-dessous présente l'offre et la demande de sacs de 9 kg de pommes de terre en fonction du prix, en dollars, pour une période donnée.

Prix	5,00 $	5,40 $	5,60 $	5,80 $	6,00 $	6,20 $
Offre	2300	2450	2570	2720	2780	2900
Demande	2800	2700	2530	2400	2350	2280

a) Représenter sur un même graphique le nuage de points pour la demande et pour l'offre.

b) Déterminer l'équation de la droite de régression $y_1 = a_1 + b_1x$ pour la demande et $y_2 = a_2 + b_2x$ pour l'offre.

c) Déterminer le point d'équilibre $E(x_e, y_e)$ des droites y_1 et y_2 trouvées en b), en arrondissant la quantité à l'unité près et le prix au centième près.

d) Représenter les nuages de points, les droites y_1 et y_2, et identifier le point d'équilibre.

e) Déterminer

i) le surplus du consommateur SC, qui correspond à l'aire de la région SC ;

ii) le surplus du producteur SP, qui correspond à l'aire de la région SP ;

iii) le surplus total ST, où ST = SC + SP.

14. APPLICATION | POSITION ET DISTANCE

Soit les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ représentant respectivement un déplacement de un kilomètre vers l'est et un déplacement de un kilomètre vers le nord. Un signal émis à partir de la position O(0, 0) peut être capté à l'intérieur d'un cercle dont le rayon est de 75 km. Un bateau, qui se trouve en un point P à 61 kilomètres à l'ouest de O et à 72 kilomètres au nord de O, se déplace parallèlement au vecteur (4, -3) à une vitesse de 10 km/h.



a) Déterminer une équation vectorielle de la trajectoire rectiligne B du bateau, où le paramètre t est exprimé en heures.

b) Soit R, la position du bateau deux heures après avoir quitté le point P. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{OR}$.

c) Le bateau peut-il capter le signal lorsqu'il atteint le point R ?

d) Soit T, la position du bateau t heures après avoir quitté le point P. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{PT}$ et $\overrightarrow{OT}$.

e) Déterminer la position du bateau et la distance qui le sépare du point O lorsqu'il en est le plus près.

f) Déterminer la position du bateau lorsque le signal cesse d'être capté.

15. AIRE D'UN QUADRILATÈRE

Soit une droite D_1 passant par P(a, 0) et Q(0, b), où $a > 0$ et $b > 0$. Soit une droite D_2, parallèle à D_1, passant par R($a + 5$, 0) et S(0, $b + 12$).

a) Déterminer l'aire du quadrilatère délimité par D_1, D_2, l'axe des x et l'axe des y.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite D, passant par O(0, 0), qui sépare le quadrilatère en deux régions de même aire.

16. QUADRILATÈRE : ANGLES ET AIRES

Soit A, le point d'intersection des droites

$D_1 : 4x - 3y + 1 = 0$ et

$D_2 : 5x + 12y - 46 = 0$.

a) Déterminer les points P_1 et $Q_1 \in D_1$ tels que $d(A, P_1) = d(A, Q_1) = 5$.

b) Déterminer les points P_2 et $Q_2 \in D_2$ tels que $d(A, P_2) = d(A, Q_2) = 26$.

c) Comment s'appelle le quadrilatère $P_1Q_1P_2Q_2$?

d) Calculer l'aire du quadrilatère $P_1Q_1P_2Q_2$.

e) Déterminer les angles du quadrilatère $P_1Q_1P_2Q_2$.

17. CERCLE, MÉDIANE ET BARYCENTRE

Soit les droites D_1, D_2 et D_3 suivantes.

$D_1 : (x, y) = (-3, -3) + t(2, 3)$, où $t \in \mathbb{R}$

$D_2 : x - 7 = 7 - y$

$D_3 : \begin{cases} x = s \\ y = 3 \end{cases}$, où $s \in \mathbb{R}$

Soit P, le point d'intersection de D_1 et D_3 ;
Q, le point d'intersection de D_1 et D_2 ;
R, le point d'intersection de D_2 et D_3.

a) Sachant que les médiatrices d'un triangle se rencontrent en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle, déterminer l'équation du cercle C passant par P, Q et R.

b) Calculer l'aire du triangle EFG délimité par les tangentes au cercle C aux points P, Q et R. Représenter graphiquement le triangle PQR, le cercle C et le triangle EFG.

c) i) Déterminer le point de rencontre A des médianes du triangle PQR.

ii) Calculer la longueur exacte des médianes du triangle PQR.

d) i) Déterminer les coordonnées du point B, appelé **barycentre**, tel que $\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BR} = \vec{O}$.

ii) Déterminer la caractéristique du point B.

18. Soit F, un faisceau de droites passant par P(-5, 2).

a) Déterminer une équation de F.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite de F qui est parallèle à la droite $3x - 5y + 7 = 0$.

c) Déterminer une équation vectorielle de la droite de F qui est perpendiculaire à la droite $(x, y) = (3, 4) + k(-4, 3)$, où $k \in \mathbb{R}$.

d) Déterminer une équation cartésienne de chaque droite de F située à une distance 5 du point R(2, 1).

19. a) Soit la droite D, qui passe par P(1, 1) et Q(89, 889). Déterminer le nombre de points sur le segment de droite $\overline{PQ}$ qui possèdent des coordonnées entières.

b) Soit $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x - 15$. Déterminer les points du segment de droite D_1 reliant les points P(-8, f(-8)) et Q(11, f(11)), dont les coordonnées sont des entiers.

20. Soit la droite D : $\frac{\sqrt{3}x - 4}{3} = \frac{2y - 7}{2}$. Trouver des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ respectivement parallèles et perpendiculaires à D tels que :

a) $\vec{u} + \vec{n} = 2\vec{j}$

b) $\vec{u} + \vec{n} = \vec{i} + \vec{j}$

c) $\vec{u} + \vec{n} = k\vec{i}$

21. **COMBINAISON LINÉAIRE**

La droite $D_1 : 3x + y - 12 = 0$ rencontre l'axe des abscisses au point A, l'axe des ordonnées au point B, la droite $D_2 : x - y = 0$ au point C et la droite $D_3 : x + y = 0$ au point D.

a) Écrire $\overrightarrow{BA}$ comme combinaison linéaire des vecteurs

i) $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$; ii) $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

b) Calculer

i) l'aire A_1 du triangle COD ;

ii) l'aire A_2 du triangle BOD.

22. **AIRE D'UN TRIANGLE**

Soit $D_1 : x + 2 = \frac{y - 9}{7}$, $D_2 : x - y - 3 = 0$ et P(-3, 2) $\in D_1$.

a) Déterminer le point Q $\in D_2$ le plus près de P.

b) Déterminer le point R $\in D_2$ tel que $\overrightarrow{PR} \perp D_1$.

c) Représenter graphiquement les droites D_1 et D_2, tracer le triangle PQR et calculer l'aire A de ce triangle.

23. **PARABOLE, TANGENTE ET CERCLE**

Soit la parabole d'équation $y^2 = 4x$, où $0 \leq x \leq 16$, et P(9, y), un point sur la courbe de la parabole tel que $y > 0$.

a) Représenter la courbe de la parabole et le point P, en indiquant ses coordonnées.

b) Soit T, la tangente à la parabole au point P. Donner sous la forme vectorielle une équation de T en utilisant le calcul différentiel.

c) Déterminer l'équation du cercle C_1, tangent à la parabole aux points P(9, y) et Q(9, -y). Représenter graphiquement la parabole et le cercle C_1.

d) Déterminer l'équation du cercle C_2, tangent à la parabole au point P(9, y) et à l'axe des x.

24. Soit les points A(-1, 1) et B(3, 6).

a) Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{BC} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$.

b) Déterminer les coordonnées du point R tel que $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$.

c) Démontrer que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

d) Soit M, le point milieu du segment de droite $\overline{AC}$, et H, le point correspondant à la projection orthogonale de M sur le segment de droite $\overline{AB}$. Déterminer $\overrightarrow{AH}$ et les coordonnées de H.

e) Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ à la droite passant par A et B tel que $\|\vec{n}\| = 5$.

25. **TRIANGLE, PARABOLE ET CERCLE**

Soit les droites D_1 et D_2 suivantes.

$D_1 : \frac{1 - 2x}{6} = \frac{3y + 7}{12}$

$D_2 : (x, y) = (10, 3) + k(3, 2)$, où $k \in \mathbb{R}$

Les points A et B sont respectivement l'intersection des droites D_1 et D_2 avec l'axe des x, et C est le point d'intersection des deux droites.

a) Trouver les coordonnées des points A, B et C.

b) Calculer l'aire du triangle ABC.

c) Déterminer l'angle θ entre les droites D_1 et D_2.

d) Déterminer l'équation de la parabole passant par A, B et C.

e) Déterminer l'équation du cercle passant par A, B et C.

f) Représenter dans un même système d'axes les points A, B, C, la parabole trouvée en d) et le cercle trouvé en e).

26. Soit les droites D_1, D_2 et D_3 suivantes.

$D_1 : (x, y) = (5, 22) + k(7, 11)$, où $k \in \mathbb{R}$

$D_2 : x - 2 = \frac{3 - y}{2}$

$D_3 : x + 3y + 9 = 0$

Les points A, B et C sont respectivement l'intersection des droites D_1 et D_2, D_1 et D_3, et D_2 et D_3.

Soit les points D et F tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{8}\overrightarrow{AC}$ et

$\overrightarrow{BF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$. Soit le point P, l'intersection de la droite passant par B et D et de la droite passant par A et F. Calculer les expressions suivantes en donnant votre réponse sous forme rationnelle.

a) $\dfrac{\|\overrightarrow{PD}\|}{\|\overrightarrow{PB}\|}$ b) $\dfrac{\|\overrightarrow{PF}\|}{\|\overrightarrow{PA}\|}$

27. AIRE D'UN QUADRILATÈRE

Soit les deux triangles ARQ et BRQ tels que $d(R, Q) = \sqrt{3}$ cm, $d(A, Q) = d(B, Q) = \sqrt{2}$ cm et $\angle ARQ = \angle BRQ = 45°$. Soit également les deux triangles SRQ et TRQ tels que $d(R, Q) = \sqrt{3}$ cm, $d(S, Q) = d(T, Q) = 1$ cm et $\angle SRQ = \angle TRQ = 30°$.

a) Représenter les quatre triangles précédents et ombrer le quadrilatère ABTS.

b) Calculer $d(A, B)$.

c) Calculer $d(S, D)$ et $d(T, D)$, où D est la droite passant par les points A et B, et où S est le point le plus près de R.

d) Déterminer la valeur exacte de l'aire du quadrilatère ABTS.

28. TANGENTE À UNE PARABOLE

Soit $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$, le point P(0, 1) et la droite D d'équation $y = -1$.

a) Représenter dans un plan cartésien la courbe de f, le point P et la droite D.

b) Soit T(p, q), un point sur la courbe de f. Démontrer que la distance entre T et D est la même que la distance entre T et P.

c) Représenter la tangente à la courbe de f au point T(p, q) et déterminer la pente de cette tangente.

d) Représenter la droite normale N à la tangente précédente et déterminer l'équation de N sous la forme $y = ax + b$.

e) Soit Q, le point d'intersection de la droite N et de l'axe des y, et le point R tel que $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OT} + \vec{v}$, où $\vec{v} = (0, 2)$.

i) Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{TP}$ et $\overrightarrow{TQ}$.

ii) Effectuer $\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{TQ}$ et donner la réponse en fonction de p.

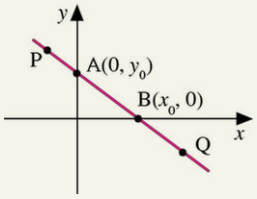
iii) Déterminer $\cos(\angle PTQ)$ et donner la réponse en fonction de p.

29. a) Soit D, une droite passant par les points P(a, b) et Q(c, d), où $a \neq c$ et $b \neq d$.

Démontrer que

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}{a - c} \text{ et que}$$

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}{d - b}.$$



b) Utiliser le résultat précédent pour déterminer l'intersection, avec les axes, de la droite passant par les points P(-5, 8) et Q(-7, -3).

30. Soit les points P(3, 7), Q(2, -1) et R(x, y).

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par P et Q.

b) Déterminer l'équation correspondant à

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$ interpréter le résultat et donner la caractéristique des points R(x, y).

c) Déterminer, en calculant le déterminant approprié, si S(2, 3) et T(1, -9) appartiennent à D (*voir a)*).

d) Démontrer qu'une équation d'une droite passant par les points A(x_1, y_1) et B(x_2, y_2) est donnée par

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

e) Démontrer que les points P$_1(x_1, y_1)$, P$_2(x_2, y_2)$ et P$_3(x_3, y_3)$ sont situés sur la même droite si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

31. Soit les droites distinctes

$D_1: a_1x + b_1y - c_1 = 0,$

$D_2: a_2x + b_2y - c_2 = 0$ et

$D_3: a_3x + b_3y - c_3 = 0.$

a) Démontrer que les droites sont concourantes si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

b) En utilisant le résultat précédent, vérifier si les trois droites

$D_1: -x - 3y + 10 = 0,$

$D_2: 3x + 2y - 9 = 0$ et

$D_3: x + y - 4 = 0$

sont concourantes. Si oui, déterminer le point d'intersection.

8 La droite dans l'espace cartésien



Perspective historique 394
Exercices préliminaires 395
8.1 Équations de la droite dans l'espace cartésien 395
8.2 Position relative de deux droites et angle formé par deux droites dans l'espace cartésien 404
8.3 Distance entre un point et une droite, et distance entre deux droites dans l'espace cartésien 413
Révision des concepts 422
Exercices récapitulatifs 423
Problèmes de synthèse 425

Dans le plan cartésien, on peut définir toute droite non verticale par sa pente et par son ordonnée à l'origine. Dans l'espace cartésien, la pente d'une droite n'est pas définie. Il faut donc recourir à d'autres méthodes pour définir une droite de $\mathbb{R}^3$.

Dans ce chapitre, nous étudierons la droite dans l'espace cartésien et nous déterminerons différents types d'équations pouvant définir cette même droite. Nous verrons les positions relatives possibles de deux droites dans l'espace. Nous calculerons également la distance entre un point et une droite, ainsi que la distance entre deux droites.

En particulier, l'étudiant pourra résoudre le problème suivant (qui se trouve au n° 10 des problèmes de synthèse, à la page 427).

Dans ce problème, les distances sont en mètres et le temps est en minutes. Deux drones volent chacun en ligne droite. À 8 h exactement, le premier drone est au point P(3, 2, 7) et son vecteur vitesse est $\vec{v}_1 = (3, 4, 10)$. Au même moment, le second drone est au point Q(-5, 10, -23) et, après deux minutes, il est au point R(3, 16, 39).

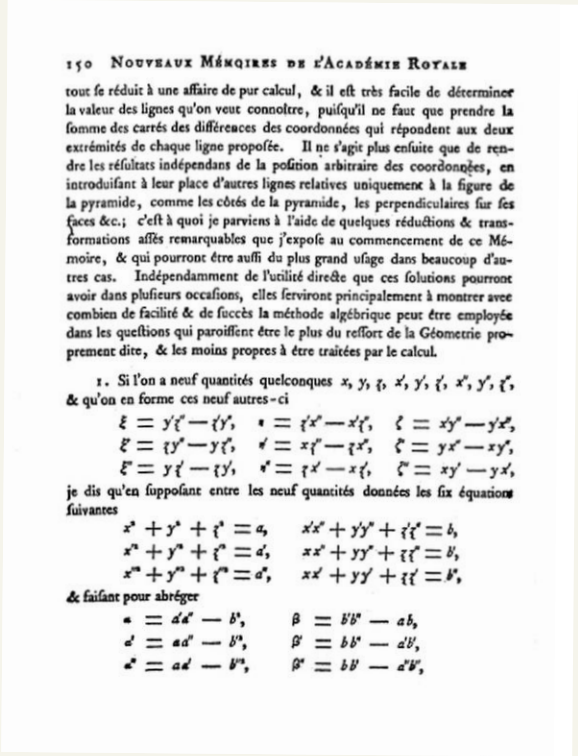
a) Déterminer une équation vectorielle de D_1, la trajectoire du premier drone.
b) Déterminer la vitesse v_1 du premier drone.
c) Déterminer une équation vectorielle de D_2, la trajectoire du second drone.

[…]

Des figures dans le plan à l'espace sans figure

Dès qu'il est question de géométrie, on pense à Euclide. *Les Éléments*, probablement écrits vers 300 av. J.-C., recèlent des trésors qui impressionnent encore les lecteurs modernes. Les derniers chapitres de cet ouvrage sont consacrés en bonne partie à la géométrie dans l'espace.

Il n'y a rien d'étonnant à ce que cette notion soit reléguée à la fin du traité, puisqu'elle présente des difficultés particulières. En effet, le géomètre doit être capable de se représenter mentalement les objets tridimensionnels. Cette difficulté devient manifeste lorsqu'on tente de dessiner un solide simple, comme le cube ou une pyramide. Dans ce contexte, l'étude des objets à trois dimensions présente des limites évidentes. Aussi, jusqu'au XVI^e siècle, l'étude de la géométrie dans l'espace piétine-t-elle. Elle reste essentiellement dans l'état où l'avaient laissée les Grecs. Au XVII^e siècle, lorsque « l'algèbre appliquée à la géométrie » se développe, on étudie d'abord les courbes dans le plan.



150 NOUVEAUX MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

tout se réduit à une affaire de pur calcul, & il eſt très facile de déterminer la valeur des lignes qu'on veut connoître, puiſqu'il ne faut que prendre la ſomme des carrés des différences des coordonnées qui répondent aux deux extrémités de chaque ligne propoſée. Il ne s'agit plus enſuite que de rendre les réſultats indépendans de la poſition arbitraire des coordonnées, en introduiſant à leur place d'autres lignes relatives uniquement à la figure de la pyramide, comme les côtés de la pyramide, les perpendiculaires ſur ſes faces &c.; c'eſt à quoi je parviens à l'aide de quelques réductions & transformations aſſés remarquables que j'expoſe au commencement de ce Mémoire, & qui pourront être auſſi du plus grand uſage dans beaucoup d'autres cas. Indépendamment de l'utilité directe que ces ſolutions pourront avoir dans pluſieurs occaſions, elles ſerviront principalement à montrer avec combien de facilité & de ſuccès la méthode algébrique peut être employée dans les queſtions qui paroiſſent être le plus du reſſort de la Géometrie proprement dite, & les moins propres à être traitées par le calcul.

1. Si l'on a neuf quantités quelconques $x, y, \zeta, x', y', \zeta', x'', y'', \zeta''$, & qu'on en forme ces neuf autres-ci

$$\xi = y'\zeta'' - \zeta'y'', \quad \eta = \zeta'x'' - x'\zeta'', \quad \zeta = x'y'' - y'x'',$$
$$\xi' = \zeta y'' - y\zeta'', \quad \eta' = x\zeta'' - \zeta x'', \quad \zeta' = yx'' - xy'',$$
$$\xi'' = y\zeta' - \zeta y', \quad \eta'' = \zeta x' - x\zeta', \quad \zeta'' = xy' - yx',$$

je dis qu'en ſuppoſant entre les neuf quantités données les ſix équations ſuivantes

$$x^2 + y^2 + \zeta^2 = a, \quad x'x'' + y'y'' + \zeta'\zeta'' = b,$$
$$x''^2 + y''^2 + \zeta''^2 = a', \quad xx'' + yy'' + \zeta\zeta'' = b',$$
$$x'^2 + y'^2 + \zeta'^2 = a'', \quad xx' + yy' + \zeta\zeta' = b'',$$

& faiſant pour abréger

$$\alpha = a'a'' - b'^2, \quad \beta = b'b'' - ab,$$
$$\alpha' = aa'' - b''^2, \quad \beta' = bb'' - a'b',$$
$$\alpha'' = aa' - b''^2, \quad \beta'' = bb' - a''b'',$$

Deuxième page de l'article de Lagrange publié en 1775. On y remarque l'absence de figures et la lourdeur des calculs qu'implique le fait d'être dans l'espace.

Au siècle suivant, les mathématiciens prennent conscience de la puissance de l'outil algébrique pour étudier les objets géométriques dans l'espace. Un article au titre banal, écrit par le grand **Joseph Louis Lagrange** (1736-1813), en fera la démonstration. Intitulé « Solution analytique de quelques problèmes sur la pyramide triangulaire » (1775), cet article aborde un sujet simple en apparence. Toutefois, pour bien étudier la pyramide à partir des coordonnées des quatre sommets, il faut déterminer les équations des plans contenant les faces, des droites dont les segments sont des arêtes, des angles entre ces droites et entre ces droites et les faces, etc. Lagrange se félicite de ce que les solutions qu'il propose puissent être comprises sans qu'on ait à se référer à des figures. Selon lui, l'usage du symbolisme algébrique élimine les difficultés inhérentes aux représentations en trois dimensions.

À bien des égards, Lagrange, originaire de Turin, en Italie, est représentatif des scientifiques de son époque. En 1775, il est membre de l'Académie des sciences de Berlin où il dirige la section mathématique. Au XVIII^e siècle, les rois européens, soucieux de leur renommée et de celle de leur royaume, veulent avoir dans leur capitale les plus grands scientifiques d'Europe. Frédéric le Grand avait attiré Lagrange en lui offrant des conditions très avantageuses, mais Lagrange n'aime pas le climat de la capitale prussienne. À la mort du roi, en 1787, le climat intellectuel devenant lui aussi difficile, il accepte l'offre du roi de France, Louis XVI, et déménage à Paris. Deux ans plus tard, lorsque la Révolution française éclate et provoque un changement de régime, Lagrange pense à retourner à Berlin. La mort du grand chimiste Lavoisier, guillotiné en 1794, ne peut que le conforter dans son projet. Toutefois, la fondation des grandes écoles, dont l'École polytechnique de Paris avec son idéal de former une élite scientifique et mathématique, l'incite à rester. Il y enseignera et aura pour collègues Gaspard Monge (1746-1818) et Sylvestre François Lacroix (1765-1843). Dans le manuel écrit par Lacroix et dont nous avons parlé dans la perspective historique du chapitre 7, on trouve, réuni et organisé de façon pédagogique, l'ensemble des connaissances de l'époque non seulement sur les droites dans le plan, mais aussi sur les droites et sur les plans dans l'espace.

Au début du XX^e siècle, toute cette partie de la géométrie analytique sera réécrite en langage vectoriel. Pour la droite, le passage de la vision vectorielle dans le plan à celle dans l'espace est pour ainsi dire direct. Toutefois, si on compare cette approche à celle de Lagrange, par exemple, on constate une grande simplification des calculs.

Exercices préliminaires

1. Déterminer une équation vectorielle, des équations paramétriques et une équation symétrique de la droite D passant par P(-1, 5) et par R(3, -2).

2. Soit les droites suivantes.

$D_1 : \begin{cases} x = 4t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

$D_2 : \dfrac{x+5}{3} = 4 - y$

$D_3 : (x, y) = (5, -2) + s(-3, 4)$, où $s \in \mathbb{R}$

a) Déterminer l'angle formé par D_1 et D_2.

b) Parmi les droites précédentes, déterminer celles qui sont perpendiculaires, et, dans ce cas, déterminer leur point d'intersection.

c) Déterminer des cosinus directeurs de D_3.

3. Soit $\vec{u} = (3, -2, 0)$ et $\vec{v} = (-4, 5, 1)$.

a) Déterminer $\vec{u}_{\vec{v}}$.

b) Déterminer $\left\| \vec{u}_{\vec{v}} \right\|$.

c) Déterminer les vecteurs unitaires $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ perpendiculaires à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

4. Soit le parallélogramme dont les sommets sont A(-4, -4), B(-2, 1), C(5, 3) et D(3, -2).

a) Calculer l'aire du parallélogramme ABCD.

b) Dans ce parallélogramme, déterminer la hauteur joignant le point B et la base AD.

5. Déterminer l'ensemble-solution des systèmes suivants.

a) $\begin{cases} x - 4y = 3 \\ 2x - y = 7 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 9y = -6 \\ -3x + 4y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

8.1 Équations de la droite dans l'espace cartésien

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra déterminer différentes équations pour une même droite dans l'espace cartésien.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de trouver un vecteur directeur d'une droite ;
- de déterminer une équation vectorielle d'une droite (É.V.) ;
- de déterminer des équations paramétriques d'une droite (É.P.) ;
- de déterminer des équations symétriques d'une droite (É.S.) ;
- de déterminer des équations sous forme ensembliste d'une droite ;
- de déterminer si un point appartient à une droite.

Soit $P(x_1, y_1, z_1)$, un point de la droite D, et $\vec{u} = (a, b, c)$, un vecteur directeur de D.

	Équations de la droite D
É.V.	$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$, où $t \in \mathbb{R}$
É.P.	$\begin{cases} x = x_1 + ta \\ y = y_1 + tb, \text{ où } t \in \mathbb{R} \\ z = z_1 + tc \end{cases}$
É.S.	$\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$

Dans cette section, nous utiliserons certaines propriétés des vecteurs pour déterminer une équation vectorielle, des équations paramétriques et des équations symétriques d'une droite dans l'espace cartésien.

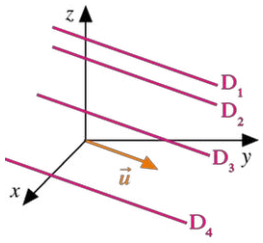
Tout comme pour la droite dans le plan cartésien, pour définir une droite dans l'espace cartésien, il faut :

- soit un vecteur directeur et les coordonnées d'un point de cette droite ;
- soit les coordonnées de deux points distincts de cette droite.

Équation vectorielle d'une droite dans l'espace

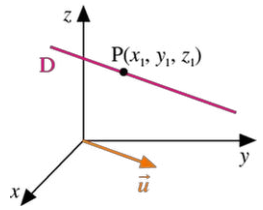
Il existe dans l'espace une infinité de droites parallèles à un vecteur non nul $\vec{u}$ donné.

$D_1 /\!/ D_2 /\!/ D_3 /\!/ D_4 /\!/ \vec{u}$



Il existe une seule droite D qui passe par le point $P(x_1, y_1, z_1)$ et qui est parallèle à un vecteur non nul $\vec{u}$ donné.

$D /\!/ \vec{u}$



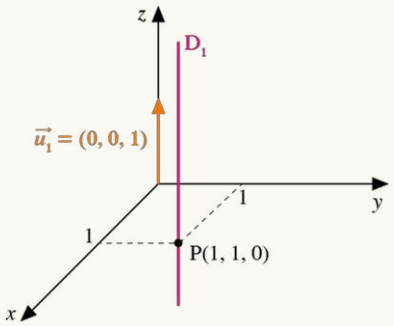
DÉFINITION 8.1

Tout vecteur non nul $\vec{u}$ parallèle à une droite D de l'espace cartésien est appelé **vecteur directeur** de cette droite D.

Exemple 1 Déterminons un vecteur directeur pour chacune des droites D_1 et D_2 suivantes et représentons la droite et le vecteur directeur.

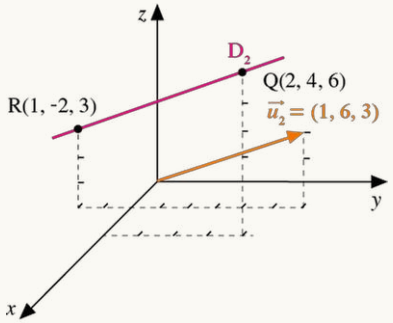
a) D_1 passe par P(1, 1, 0) et est parallèle à l'axe des z.

Soit $\vec{u_1} = \vec{k} = (0, 0, 1)$, un vecteur directeur de D_1.



b) D_2 passe par R(1, -2, 3) et Q(2, 4, 6).

Soit $\vec{u_2} = \overrightarrow{RQ} = (1, 6, 3)$, un vecteur directeur de D_2.



Remarque : Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D, alors $r\vec{u}$, où $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, est également un vecteur directeur de D, car $r\vec{u} /\!/ \vec{u}$.

En utilisant certaines propriétés des vecteurs, déterminons une équation vectorielle de la droite D passant par le point $P(x_1, y_1, z_1)$ donné et ayant $\vec{u} = (a, b, c)$ comme vecteur directeur.

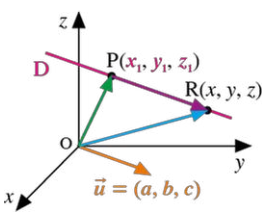
Soit $R(x, y, z)$, un point quelconque de D. Ainsi,

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}$ (loi de Chasles)

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t\vec{u}$, où $t \in \mathbb{R}$ (car $\overrightarrow{PR} /\!/ \vec{u}$)

$(x - 0, y - 0, z - 0) = (x_1 - 0, y_1 - 0, z_1 - 0) + t(a, b, c)$

$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$



$\vec{u} = (a, b, c)$
$R(x, y, z)$
$P(x_1, y_1, z_1)$

DÉFINITION 8.2

Une **équation vectorielle** de la droite D passant par le point $P(x_1, y_1, z_1)$ et ayant $\vec{u} = (a, b, c)$ comme vecteur directeur est donnée par

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c), \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

Dans l'équation précédente, (x, y, z) est le vecteur $\overrightarrow{OR}$, où $R(x, y, z)$ est un point quelconque de la droite D, qui dépend de la valeur du paramètre t. Nous identifions fréquemment la droite D de la façon suivante :

$$D : (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c), \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

L'équation vectorielle précédente peut également s'écrire sous la forme

$$D : (x, y, z) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} + t(a, b, c), \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2 Soit la droite D de l'espace cartésien passant par P(2, 5, 4) et ayant $\vec{u} = (3, -2, 8)$ comme vecteur directeur.

a) Déterminons une équation vectorielle de D.

Équation vectorielle

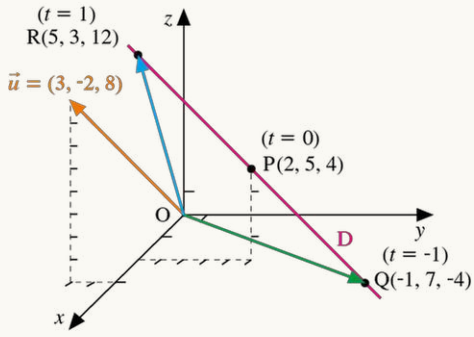
$$D : (x, y, z) = (2, 5, 4) + t(3, -2, 8), \text{ où } t \in \mathbb{R} \qquad \text{(définition 8.2)}$$

b) Déterminons d'autres points de la droite D.

Autres points de D

En attribuant différentes valeurs au paramètre t, nous déterminons des vecteurs $\overrightarrow{OR}$ dont l'extrémité R est sur la droite D.

Les composantes de ces vecteurs $\overrightarrow{OR}$ sont également les coordonnées des points R situés sur la droite D.



Par exemple,

i) en posant $t = 1$ dans l'équation

$$(x, y, z) = (2, 5, 4) + t(3, -2, 8),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (2, 5, 4) + 1(3, -2, 8)\\ &= (5, 3, 12)\end{aligned}$$

ainsi, $\overrightarrow{OR} = (5, 3, 12)$

d'où R(5, 3, 12) est un point de la droite D ;

ii) en posant $t = -1$ dans l'équation

$$(x, y, z) = (2, 5, 4) + t(3, -2, 8)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (2, 5, 4) + (-1)(3, -2, 8)\\ &= (-1, 7, -4)\end{aligned}$$

ainsi, $\overrightarrow{OQ} = (-1, 7, -4)$

d'où Q(-1, 7, -4) est un point de la droite D.

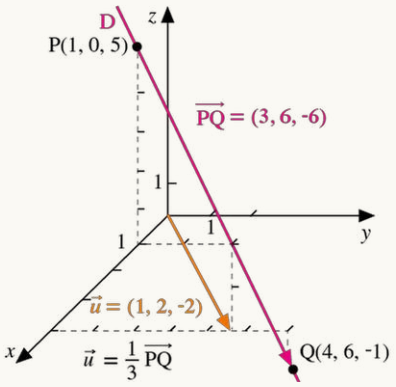
Exemple 3 Déterminons une équation vectorielle de la droite D passant par les points P(1, 0, 5) et Q(4, 6, -1).

Soit $\overrightarrow{PQ} = (3, 6, -6)$, un vecteur directeur de D.

Pour obtenir un autre vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite D, nous pouvons poser $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$.

$\vec{u} = \frac{1}{3}(3, 6, -6)$
$= (1, 2, -1)$

Ainsi, $\vec{u} = (1, 2, -2)$.



Nous pouvons donc écrire

D : $(x, y, z) = (1, 0, 5) + t(1, 2, -2)$, où $t \in \mathbb{R}$.

En fait, il existe une infinité d'équations vectorielles de cette même droite selon le choix du point et du vecteur directeur de la droite D.

Par exemple,

D : $(x, y, z) = (1, 0, 5) + c(-1, -2, 2)$, où $c \in \mathbb{R}$

D : $(x, y, z) = (4, 6, -1) + r(1, 2, -2)$, où $r \in \mathbb{R}$

D : $(x, y, z) = (4, 6, -1) + s(3, 6, -6)$, où $s \in \mathbb{R}$

Exercices de compréhension 8.1

1. a) Déterminer une équation vectorielle de la droite D passant par les points P(3, 5, -1) et Q(7, 3, 5).

b) Déterminer le point R de D tel que son abscisse est nulle.

8

Équations paramétriques d'une droite dans l'espace

À partir d'une équation vectorielle de la droite D,

$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$, où $t \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + (ta, tb, tc)$ (définition de la multiplication d'un vecteur par un scalaire)

$(x, y, z) = (x_1 + ta, y_1 + tb, z_1 + tc)$ (définition de l'addition de deux vecteurs)

Par définition de l'égalité de vecteurs, nous obtenons

$x = x_1 + ta, \quad y = y_1 + tb \quad$ et $\quad z = z_1 + tc$

DÉFINITION 8.3

Des **équations paramétriques** de la droite D passant par $P(x_1, y_1, z_1)$ et ayant $\vec{u} = (a, b, c)$ comme vecteur directeur sont données par

$$\begin{cases} x = x_1 + ta \\ y = y_1 + tb \\ z = z_1 + tc \end{cases}$$, où $t \in \mathbb{R}$ est le paramètre des équations paramétriques.

Équations paramétriques

Exemple 1 Déterminons des équations paramétriques de la droite D passant par les points P(0, 2, 4) et Q(3, 2, $^-$5).

Soit $\overrightarrow{PQ} = (3, 0, -9)$, ainsi $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} = (1, 0, -3)$, un vecteur directeur de D.

Par la définition 8.3, $D : \begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 2 + 0t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$,

d'où $D : \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 4 - 3t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 Soit la droite $D : \begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.

a) Déterminons si le point P(1, 0, 5) appartient à la droite D.

Pour vérifier si P(1, 0, 5) $\in$ D, il suffit de déterminer s'il existe une valeur unique de t telle que

(1)	$1 = -3 - 2t$	De (1), $t = -2$
(2)	$0 = 4 + 2t$	De (2), $t = -2$
(3)	$5 = -1 + 3t$	De (3), $t = 2$

Puisque les valeurs de t ne sont pas toutes identiques, P(1, 0, 5) $\notin$ D.

b) Déterminons si le point Q(-1, 2, -4) appartient à la droite D.

(1)	$-1 = -3 - 2t$	De (1), $t = -1$
(2)	$2 = 4 + 2t$	De (2), $t = -1$
(3)	$-4 = -1 + 3t$	De (3), $t = -1$

Puisque les valeurs de t sont identiques, Q(-1, 2, -4) $\in$ D.

8

Exercices de compréhension 8.1

2. Déterminer des équations paramétriques de la droite D passant par le point P(-2, 0, 4) et par l'origine.

Équations symétriques d'une droite dans l'espace

À partir des équations paramétriques d'une droite D, nous pouvons obtenir des équations symétriques de cette droite lorsque toutes les composantes du vecteur directeur sont différentes de zéro.

Pour ce faire, on isole le paramètre t des trois équations, puis on égalise les trois expressions obtenues.

Ainsi, de $\begin{cases} x = x_1 + ta \\ y = y_1 + tb \\ z = z_1 + tc \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$t = \frac{x - x_1}{a}, \text{ si } a \neq 0,\ t = \frac{y - y_1}{b}, \text{ si } b \neq 0, \text{ et } t = \frac{z - z_1}{c}, \text{ si } c \neq 0.$$

D'où $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$, si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$

DÉFINITION 8.4

Des **équations symétriques** de la droite D passant par $P(x_1, y_1, z_1)$ et ayant $\vec{u} = (a, b, c)$ comme vecteur directeur sont données par

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}, \text{ si } a \neq 0,\ b \neq 0 \text{ et } c \neq 0.$$

Exemple 1

Équations symétriques

a) Déterminons des équations symétriques de la droite D qui passe par P(-1, 0, 4) et qui est parallèle à $\vec{u} = (5, -2, 7)$.

Par la définition 8.4, $D: \frac{x - (-1)}{5} = \frac{y - 0}{-2} = \frac{z - 4}{7}$,

d'où $D: \frac{x + 1}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z - 4}{7}$

b) Déterminons si les points R(9, -4, 18) et $S\left(0, \frac{-2}{5}, \frac{13}{5}\right)$ appartiennent à D.

Pour déterminer si un point appartient à une droite, il suffit de vérifier si les égalités sont respectées en remplaçant x, y, z par les valeurs appropriées dans les équations symétriques de la droite.

R(9, -4, 18)

$$\frac{9 + 1}{5} = 2,\ \frac{-4}{-2} = 2,\ \frac{18 - 4}{7} = 2, \text{ ainsi } \frac{9 + 1}{5} = \frac{-4}{-2} = \frac{18 - 4}{7},$$

d'où $R(9, -4, 18) \in D$

$S\left(0, \frac{-2}{5}, \frac{13}{5}\right)$

$$\frac{0 + 1}{5} = \frac{1}{5},\ \frac{\left(\frac{-2}{5}\right)}{-2} = \frac{1}{5},\ \frac{\left(\frac{13}{5}\right) - 4}{7} = \frac{-1}{5}, \text{ ainsi } \frac{0 + 1}{5} = \frac{\left(\frac{-2}{5}\right)}{-2} \neq \frac{\left(\frac{13}{5}\right) - 4}{7},$$

d'où $S\left(0, \frac{-2}{5}, \frac{13}{5}\right) \notin D$

Exemple 2 Déterminons une équation vectorielle de la droite

$$D: \frac{2x + 10}{4} = \frac{12 - 3y}{6} = z.$$

En transformant les équations précédentes, nous obtenons

$$D: \frac{2(x + 5)}{4} = \frac{-3(y - 4)}{6} = \frac{z - 0}{1}, \quad \text{donc} \quad D: \frac{x - (-5)}{2} = \frac{y - 4}{-2} = z$$

où $P(-5, 4, 0) \in D$ et $\vec{u} = (2, -2, 1)$ est un vecteur directeur de D.

D'où $D: (x, y, z) = (-5, 4, 0) + t(2, -2, 1)$, où $t \in \mathbb{R}$, est une équation vectorielle de D.

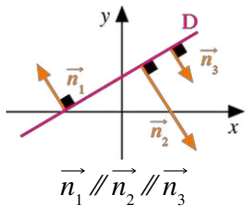
Exercices de compréhension 8.1

3. a) Déterminer des équations symétriques de la droite D passant par les points P(-2, 2, 1) et Q(1, 1, 6).

b) Déterminer le point R de D tel que son ordonnée est nulle.

Remarquons que, dans l'espace cartésien, il n'y a pas d'équation cartésienne d'une droite.

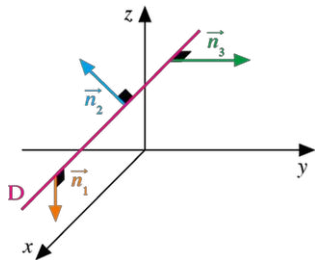
En effet, dans le plan, une équation cartésienne d'une droite D est obtenue à partir d'un point de D et d'un vecteur normal à cette droite, car tous les vecteurs normaux à cette droite sont parallèles entre eux.



$\vec{n}_1 /\!/ \vec{n}_2 /\!/ \vec{n}_3$

Par contre, dans l'espace cartésien, il existe une infinité de vecteurs non parallèles entre eux, qui sont perpendiculaires à une droite D.

Dans la représentation ci-contre, $\vec{n}_1 \perp$ D, $\vec{n}_2 \perp$ D et $\vec{n}_3 \perp$ D. Cependant, $\vec{n}_1 \not/\!/ \vec{n}_2$, $\vec{n}_1 \not/\!/ \vec{n}_3$ et $\vec{n}_2 \not/\!/ \vec{n}_3$.



$\vec{n}_1 \not/\!/ \vec{n}_2$, $\vec{n}_1 \not/\!/ \vec{n}_3$ et $\vec{n}_2 \not/\!/ \vec{n}_3$

Nous ne pouvons donc pas déterminer une équation de cette droite D à partir d'un vecteur normal à cette droite.

Voici un résumé et deux exemples des différentes formes d'équations d'une droite D dans l'espace cartésien, passant par un point P et ayant $\vec{u}$ comme vecteur directeur.

	$P(x_1, y_1, z_1), \vec{u} = (a, b, c)$	$P(3, -2, 5), \vec{u} = (-2, 4, 7)$	$P(-3, -2, 4), \vec{u} = (2, 0, -3)$
É.V.	$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$, où $t \in \mathbb{R}$	$(x, y, z) = (3, -2, 5) + t(-2, 4, 7)$, où $t \in \mathbb{R}$	$(x, y, z) = (-3, -2, 4) + t(2, 0, -3)$, où $t \in \mathbb{R}$
É.P.	$\begin{cases} x = x_1 + ta \\ y = y_1 + tb \\ z = z_1 + tc \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -2 + 4t \\ z = 5 + 7t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 \\ z = 4 - 3t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$
É.S.	$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$ si $a \neq 0, b \neq 0$ et $c \neq 0$	$\frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 2}{4} = \frac{z - 5}{7}$	Non définies, car une des composantes de $\vec{u}$ est 0

Forme ensembliste d'une droite dans l'espace

Nous pouvons utiliser une forme ensembliste pour décrire une droite dans l'espace cartésien, particulièrement lorsqu'une des composantes du vecteur directeur est nulle.

Exemple 1 Donnons sous forme ensembliste la droite

$$\text{D}: \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 \\ z = 4 - 6t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

$\vec{u} = (4, 0, -6)$

Nous pouvons écrire D sous la forme ensembliste suivante.

Forme ensembliste

$$\text{D}: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -3 + 4t,\ y = 2 \text{ et } z = 4 - 6t, \text{ où } t \in \mathbb{R}\}$$

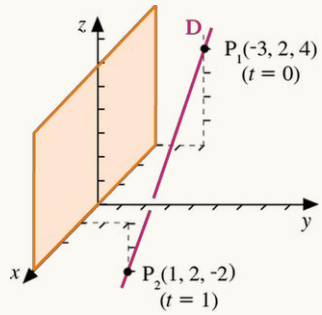
En isolant t de $x = -3 + 4t$ et de $z = 4 - 6t$,

nous trouvons $t = \dfrac{x + 3}{4}$ et $t = \dfrac{z - 4}{-6}$,

donc $\dfrac{x + 3}{4} = \dfrac{z - 4}{-6}$

Forme ensembliste

ainsi $\text{D}: \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x + 3}{4} = \dfrac{z - 4}{-6} \text{ et } y = 2\right\}$



D est parallèle au plan XOZ, car $y = 2, \forall\, x$ et $z \in \mathbb{R}$.

En transformant $\dfrac{x + 3}{4} = \dfrac{z - 4}{-6}$, nous avons

$$-6x - 18 = 4z - 16$$

$$-6x - 4z - 2 = 0$$

$$3x + 2z + 1 = 0 \qquad \text{(en divisant chaque membre de l'équation par -2)}$$

Forme ensembliste

La droite peut également s'écrire $\text{D}: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2z + 1 = 0 \text{ et } y = 2\}$

8

Exercices de compréhension 8.1

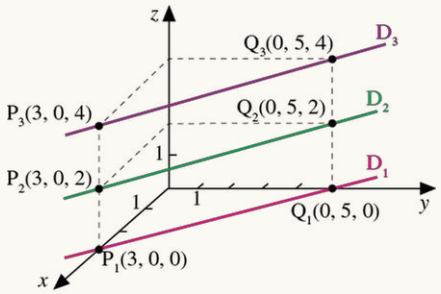
4. Déterminer sous forme ensembliste la droite D passant par les points P(2, -1, 7) et Q(2, -1, 5).

Exemple 2 Représentons graphiquement les droites suivantes.

$$\text{D}_1: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + 3y - 15 = 0 \text{ et } z = 0\}$$

$$\text{D}_2: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + 3y - 15 = 0 \text{ et } z = 2\}$$

$$\text{D}_3: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + 3y - 15 = 0 \text{ et } z = 4\}$$



D_1 appartient au plan XOY.

D_2 et D_3 sont parallèles au plan XOY.

EXERCICES 8.1

1. Déterminer une équation vectorielle de la droite qui passe par

a) P(7, -8, 5) et dont un vecteur directeur est $\vec{u} = (3, 4, -1)$;

b) O(0, 0, 0) et dont un vecteur directeur est $\vec{k}$;

c) P(-3, 7, -9) et qui est parallèle à l'axe des y ;

d) O(0, 0, 0), qui est située dans le plan XOZ et qui forme des angles de 45° avec l'axe des x et l'axe des z.

2. Déterminer des équations paramétriques de la droite qui passe par

a) P(1, -5, 9) et dont un vecteur directeur est $\vec{u} = (-5, 1, 8)$;

b) P(0, 3, 5) et dont un vecteur directeur est $\vec{u} = (-9, 7, 0)$;

c) P(4, -5, 7) et qui est parallèle à l'axe des z ;

d) P(2, 3, 4) et qui est perpendiculaire au plan YOZ.

3. Déterminer, si c'est possible, des équations symétriques de la droite qui passe par

a) P(0, -1, 2) et dont un vecteur directeur est $\vec{u} = (5, -6, 9)$;

b) P(4, -3, 2) et dont un vecteur directeur est $\vec{u} = (1, 0, -3)$;

c) P(3, -5, 8) et par Q(-2, 5, 10) ;

d) P(5, -6, 2) et qui est parallèle à l'axe des z.

4. Déterminer sous forme ensembliste

a) la droite D_1 qui passe par P(4, 3, 1) et Q(4, -3, 6) ;

b) la droite D_2 qui passe par P(3, 7, 8) et qui est parallèle à la droite passant par Q(2, 4, 0) et R(4, 10, 0).

5. Trouver un point P et un vecteur directeur $\vec{u}$ de D si :

a) $D : \dfrac{3x + 4}{7} = \dfrac{-7 + y}{-2} = \dfrac{5 - 9z}{8}$

b) $D : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - 2z - 33 = 0 \text{ et } y = 8\}$

c) $D : \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{2y + 4}{-8} = \dfrac{4 - z}{5} \text{ et } x + 9 = 0\right\}$

6. Après avoir déterminé un point P de D et un vecteur directeur de D, représenter graphiquement P, le vecteur directeur, et la droite si :

a) $D : \dfrac{x + 1}{5} = \dfrac{y - 2}{10} = \dfrac{z + 4}{-15}$

b) $D : \dfrac{-x}{2} = y - 4 = -z$

c) $D : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \text{ et } z = 0\}$

d) $D : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3 \text{ et } z = 5\}$

7. Soit les plans XOY, XOZ et YOZ, et les droites suivantes.

$D_1 : (x, y, z) = (4, -6, 7) + s(2, 1, -4)$, où $s \in \mathbb{R}$

$D_2 : \begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = -9 + 3t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

$D_3 : \dfrac{x - 1}{2} = y = \dfrac{z + 4}{-5}$

a) Déterminer

i) le point A qui appartient à D_1 obtenu en posant $s = -2$;

ii) à quel plan donné appartient ce point.

b) Déterminer

i) le point B qui appartient à D_1 obtenu en posant $s = 6$;

ii) à quel plan donné appartient ce point.

c) Déterminer si les points

i) $P_1(0, -8, 15)$ et $Q_1(2, -7, 3)$ appartiennent à D_1 ;

ii) $P_2(2, 8, -18)$ et O(0, 0, 0) appartiennent à D_2 ;

iii) $P_3(5, 2, 6)$ et $Q_3\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{-11}{4}\right)$ appartiennent à D_3.

d) Déterminer, si c'est possible, la valeur de y_1 et celle de z_1 si $R(0, y_1, z_1) \in D_2$.

e) Déterminer, si c'est possible, le point d'intersection S de la droite D_2 et du plan XOY.

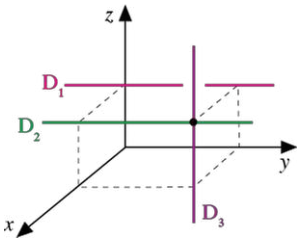
f) Déterminer, si c'est possible, le point d'intersection T de la droite D_2 et de l'axe des y.

8.2 Position relative de deux droites et angle formé par deux droites dans l'espace cartésien

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra donner la position relative de deux droites dans l'espace cartésien.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure
- de déterminer si deux droites sont parallèles distinctes ;
- de déterminer si deux droites sont parallèles confondues ;
- de déterminer si deux droites sont concourantes ;
- de déterminer si deux droites sont gauches ;
- de trouver le point d'intersection de deux droites concourantes ;
- de calculer l'angle entre deux droites ;
- de donner la définition d'angles directeurs d'une droite ;
- de déterminer des angles directeurs d'une droite ;
- de donner la définition de cosinus directeurs d'une droite ;
- de déterminer des cosinus directeurs d'une droite.



D_1 et D_2 sont des droites parallèles distinctes.

D_2 et D_3 sont des droites concourantes.

D_1 et D_3 sont des droites gauches.

Dans cette section, nous étudierons d'abord les positions relatives possibles de deux droites dans l'espace cartésien pour ensuite déterminer l'angle formé par deux droites.

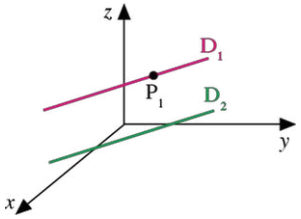
Position relative de deux droites dans l'espace

De même que dans le plan cartésien, les positions relatives possibles de deux droites dans l'espace cartésien se divisent en deux catégories : les droites parallèles et les droites non parallèles, comme illustré dans les quatre représentations graphiques suivantes.

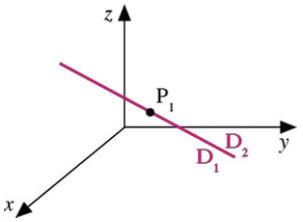
Soit $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, des vecteurs directeurs respectifs de D_1 et de D_2.

Cas 1 : Droites parallèles

a) Droites parallèles distinctes



b) Droites parallèles confondues



Caractéristiques

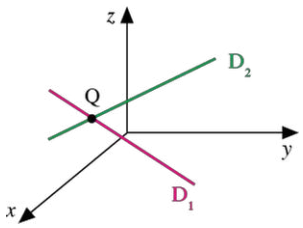
① $\vec{u}_1 /\!/ \vec{u}_2$ (il existe un $r \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u}_1 = r\vec{u}_2$)

② Aucun point d'intersection

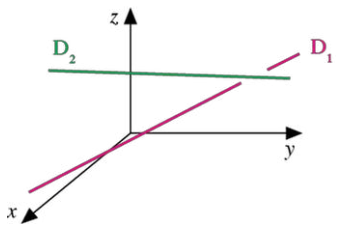
② Infinité de points d'intersection

Cas 2 : Droites non parallèles

a) Droites concourantes



b) Droites gauches



Caractéristiques

① $\vec{u_1} \not\parallel \vec{u_2}$ $(\vec{u_1} \neq r\vec{u_2}, \forall\, r \in \mathbb{R})$

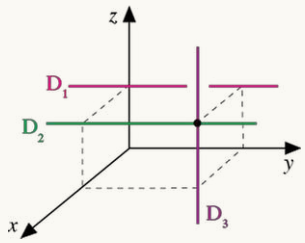
② Un seul point d'intersection, Q

② Aucun point d'intersection

DÉFINITION 8.5

Deux droites de l'espace cartésien sont dites **droites gauches** si elles ne sont ni parallèles ni concourantes.

Exemple 1 Soit les droites D_1, D_2 et D_3 qui passent par les arêtes d'un parallélépipède droit.



D_1 et D_2 sont des droites parallèles distinctes.

D_2 et D_3 sont des droites concourantes.

D_1 et D_3 sont des droites gauches.

Exemple 2 Déterminons la position relative des droites suivantes.

a) $D_1 : (x, y, z) = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k} + s(3, 0, -2)$, où $s \in \mathbb{R}$, et

$$D_2 : \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 5 \\ z = 2t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

Soit $\vec{u_1} = (3, 0, -2)$ et $\vec{u_2} = (-3, 0, 2)$, des vecteurs directeurs respectifs de D_1 et de D_2.

Puisque $\vec{u_1} = -\vec{u_2}$, $\vec{u_1} /\!/ \vec{u_2}$. Donc, $D_1 /\!/ D_2$.

Pour déterminer si les droites sont distinctes ou confondues, il suffit de choisir un point appartenant à une des droites et de vérifier si ce même point appartient également à l'autre droite.

Soit $P_1(2, 5, -4) \in D_1$.

Vérifions si $P_1(2, 5, -4) \in D_2$ en résolvant le système d'équations suivant.

$$\begin{cases} 2 = 3 - 3t & (1) \\ 5 = 5 & (2) \\ -4 = 2t & (3) \end{cases}$$

De (1), nous obtenons $t = \frac{1}{3}$, et de (3), nous obtenons $t = -2$.

Puisque le système est incompatible, $P_1 \notin D_2$.

Droites parallèles distinctes

D'où D_1 et D_2 sont parallèles distinctes.

b) $D_3 : x + 1 = \frac{y - 2}{3} = \frac{z + 4}{2}$ et $D_4 : 2x + 1 = \frac{2y - 7}{3} = z + 3$

En transformant D_3 et D_4 sous forme d'équations symétriques, nous obtenons

$$D_3 : \frac{x + 1}{1} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z + 4}{2} \text{ et } D_4 : \frac{x + \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{y - \frac{7}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{z + 3}{1}$$

Ainsi, $\vec{u_3} = (1, 3, 2)$ et $\vec{u_4} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$ sont des vecteurs directeurs respectifs de D_3 et de D_4.

Puisque $\vec{u_3} = 2\vec{u_4}$, $\vec{u_3} /\!/ \vec{u_4}$. Donc, $D_3 /\!/ D_4$.

Soit $P_3(-1, 2, -4) \in D_3$.

Vérifions si $P_3(-1, 2, -4) \in D_4$.

En remplaçant x par -1, y par 2 et z par -4 dans l'équation de D_4, nous obtenons $2(-1) + 1 = \frac{2(2) - 7}{3} = -4 + 3$. Donc, $P_3 \in D_4$.

8

Droites parallèles confondues

D'où D_3 et D_4 sont parallèles confondues.

Exemple 3 Déterminons la position relative des droites suivantes.

a) $D_1 : \frac{x - 5}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 13}{5}$ et $D_2 : (x, y, z) = (4, -5, 5) + t(3, -1, 2)$, où $t \in \mathbb{R}$

Soit $\vec{u_1} = (2, 3, 5)$ et $\vec{u_2} = (3, -1, 2)$, des vecteurs directeurs respectifs de D_1 et de D_2.

Puisqu'il n'existe pas de $r \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u_1} = r\vec{u_2}$, $\vec{u_1} \not/\!/ \vec{u_2}$. Donc, $D_1 \not/\!/ D_2$.

Déterminons si les droites sont concourantes (un point d'intersection) ou gauches (aucun point d'intersection).

Pour ce faire, vérifions s'il existe un point $P(x_0, y_0, z_0)$ appartenant à la fois à D_1 et à D_2. Un tel point satisferait les équations de D_1 et de D_2.

Équations sous forme paramétrique

En écrivant les équations de D_1 et de D_2 sous forme paramétrique, nous avons

$$D_1 : \begin{cases} x = 5 + 2s \\ y = 2 + 3s \\ z = 13 + 5s \end{cases}, \text{ où } s \in \mathbb{R}, \text{ et } D_2 : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -5 - t \\ z = 5 + 2t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

Nous cherchons les coordonnées d'un point $P(x_0, y_0, z_0)$ qui vérifieraient les équations paramétriques de D_1 et de D_2.

Il faut donc déterminer s et t tels que

$$\begin{cases} x_0 = 5 + 2s \\ y_0 = 2 + 3s \\ z_0 = 13 + 5s \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_0 = 4 + 3t \\ y_0 = -5 - t \\ z_0 = 5 + 2t \end{cases}$$

Nous obtenons alors le système d'équations linéaires suivant.

$$\begin{cases} 5 + 2s = 4 + 3t \\ 2 + 3s = -5 - t \\ 13 + 5s = 5 + 2t \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} 2s - 3t = -1 \\ 3s + t = -7 \\ 5s - 2t = -8 \end{cases}$$

La matrice augmentée correspondant à ce système est

Méthode de Gauss

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -7 \\ 5 & -2 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 11 & -11 \\ 0 & 11 & -11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Donc, $t = -1$ et $s = -2$.

En remplaçant s par -2 dans les équations associées à D_1, nous obtenons

$$x_0 = 5 + 2(-2) = 1,\ y_0 = 2 + 3(-2) = -4 \text{ et } z_0 = 13 + 5(-2) = 3$$

Nous pouvons également trouver x_0, y_0 et z_0 en remplaçant t par -1 dans les équations associées à D_2.

Droites concourantes

D'où les droites sont concourantes et P(1, -4, 3) est le point d'intersection.

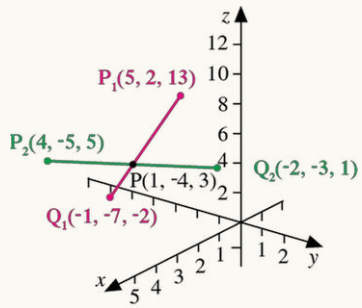
Représentation graphique à l'aide de Maple

Soit $P_1(5, 2, 13)$ et $Q_1(-1, -7, -2)$, deux points de D_1, et $P_2(4, -5, 5)$ et $Q_2(-2, -3, 1)$, deux points de D_2.

```
with(plottools):
with(plots):

c1 := display(line([5, 2, 13], [-1, -7, -2]), axes = normal, color = magenta, linestyle = solid):
c2 := display(line([4, -5, 5], [-2, -3, 1]), axes = normal, color = green, linestyle = solid):
pq1 := point([[5, 2, 13], [-1, -7, -2]], color = magenta, symbol = circle, symbolsize = 10):
pq2 := point([[4, -5, 5], [-2, -3, 1]], color = green, symbol = circle, symbolsize = 10):
p := point([1, -4, 3], color = black, symbol = circle, symbolsize = 10):

display(c1, c2, p, pq1, pq2, orientation = [36, 67, -1], view = [-2 ..5, -7 ..2, -1 ..12]);
```



b) $D_3 : (x, y, z) = (-1, 2, 5) + s(-3, 4, -2)$, où $s \in \mathbb{R}$, et $D_4 : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -4 - t \\ z = 2 + 5t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

Soit $\vec{u_3} = (-3, 4, -2)$ et $\vec{u_4} = (2, -1, 5)$, des vecteurs directeurs respectifs de D_3 et de D_4.

Puisqu'il n'existe pas de $r \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u_3} = r\vec{u_4}$, $\vec{u_3} \not\parallel \vec{u_4}$. Donc, $D_3 \not\parallel D_4$.

Déterminons si les droites sont concourantes ou gauches. Pour y arriver, vérifions s'il existe un point $P(x_0, y_0, z_0)$ appartenant à la fois à D_3 et à D_4.

Il faut déterminer s et t tels que

Équations sous forme paramétrique

$$\begin{cases} x_0 = -1 - 3s \\ y_0 = 2 + 4s \\ z_0 = 5 - 2s \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_0 = 3 + 2t \\ y_0 = -4 - t \\ z_0 = 2 + 5t \end{cases}$$

Nous obtenons alors le système d'équations linéaires suivant.

$$\begin{cases} -1 - 3s = 3 + 2t \\ 2 + 4s = -4 - t \\ 5 - 2s = 2 + 5t \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} 3s + 2t = -4 \\ 4s + t = -6 \\ 2s + 5t = 3 \end{cases}$$

8

Méthode de Gauss

Ainsi, $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -6 \\ 2 & 5 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -4 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 11 & 17 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -4 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 63 \end{array}\right]$

Ce système n'admet aucune solution ; il n'y a donc aucun point appartenant à la fois à D_3 et à D_4.

Droites gauches

D'où les droites sont des droites gauches.

Exercices de compréhension 8.2

1. Soit les droites non parallèles suivantes.

$D_1 : (x, y, z) = (3, 2, -4) + s(1, 2, -3)$, où $s \in \mathbb{R}$,

$D_2 : (x, y, z) = (2, 1, -1) + r(3, -1, 5)$, où $r \in \mathbb{R}$, et

$D_3 : (x, y, z) = (0, 8, -1) + t(-1, 4, 0)$, où $t \in \mathbb{R}$

Déterminer la position relative des droites

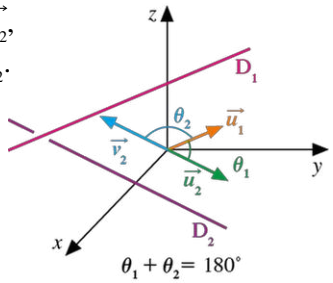
a) D_1 et D_2 ; b) D_1 et D_3.

Angle formé par deux droites dans l'espace

Soit $\vec{u}_1$, un vecteur directeur de la droite D_1, et soit $\vec{u}_2$ et $\vec{v}_2$, deux vecteurs directeurs de sens contraire de la droite D_2.

Ainsi, l'angle θ_1 entre D_1 et D_2 correspond à l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, et l'angle θ_2 entre D_1 et D_2 correspond à l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_2$.

Les angles θ_1 et θ_2 sont définis même si les droites D_1 et D_2 sont des droites gauches.



Nous définissons l'angle entre deux droites de l'espace cartésien de la façon suivante.

DÉFINITION 8.6

L'angle θ, formé par les droites D_1 et D_2 dans l'espace cartésien, correspond au plus petit des deux angles formés par des vecteurs directeurs de D_1 et de D_2, ainsi

$\theta \in [0°, 90°]$.

THÉORÈME 8.1

Soit D_1 et D_2, deux droites dans l'espace cartésien. Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont des vecteurs directeurs respectifs de D_1 et de D_2, alors l'angle θ, formé par les droites D_1 et D_2, est obtenu à partir de l'équation $\cos\theta = \dfrac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{\|\vec{u}_1\|\|\vec{u}_2\|}$,

d'où $\theta = \text{Arc cos}\dfrac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{\|\vec{u}_1\|\|\vec{u}_2\|}$.

La preuve est laissée à l'étudiant.

Exemple 1 Calculons l'angle θ formé par les droites suivantes.

$D_1 : (x, y, z) = (3, 0, 4) + t(-1, 0, 5)$, où $t \in \mathbb{R}$, et

$D_2 : \dfrac{x+4}{2} = y = \dfrac{z-5}{-4}$

Soit $\vec{u}_1 = (-1, 0, 5)$ et $\vec{u}_2 = (2, 1, -4)$, des vecteurs directeurs respectifs de D_1 et de D_2.

Ainsi, $\cos\theta = \dfrac{|(-1, 0, 5) \cdot (2, 1, -4)|}{\|(-1, 0, 5)\|\|(2, 1, -4)\|} = \dfrac{|-22|}{\sqrt{26}\sqrt{21}} = \dfrac{22}{\sqrt{26}\sqrt{21}}$

d'où $\theta \approx 19{,}7°$ $\left(\text{car } \theta = \text{Arc cos}\left(\dfrac{22}{\sqrt{26}\sqrt{21}}\right) = 19{,}69\ldots\right)$

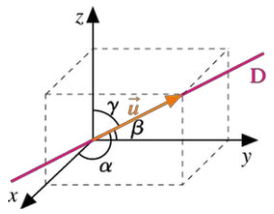
Exercices de compréhension 8.2

2. Calculons l'angle θ formé par les droites suivantes.

$D_1 : (x, y, z) = (0, 0, 0) + t(2, -1, 6)$ et $D_2 : x - 4 = \dfrac{2y-1}{6} = \dfrac{5-4z}{8}$

DÉFINITION 8.7

Les angles α, β et γ que forment respectivement dans l'espace cartésien un vecteur directeur $\vec{u}$ d'une droite D avec $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont appelés des **angles directeurs** de la droite.



Remarque : En choisissant un vecteur directeur $\vec{v}$ de D tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, où $k < 0$, nous obtenons des angles directeurs α_1, β_1 et γ_1 respectivement supplémentaires à α, à β et à γ.

Exemple 2 Calculons des angles directeurs, α, β et γ, de la droite

$$\text{D} : \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-2} = z.$$

En choisissant $\vec{u} = (4, -2, 1)$ comme vecteur directeur de D, nous obtenons

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \bullet \vec{i}}{\|\vec{u}\|\|\vec{i}\|} = \frac{(4, -2, 1) \bullet (1, 0, 0)}{\sqrt{21}\sqrt{1}} = \frac{4}{\sqrt{21}}, \text{ ainsi } \alpha \approx 29{,}2° ;$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{j}}{\|\vec{u}\|\|\vec{j}\|} = \frac{(4, -2, 1) \bullet (0, 1, 0)}{\sqrt{21}\sqrt{1}} = \frac{-2}{\sqrt{21}}, \text{ ainsi } \beta \approx 115{,}9° ;$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{u} \bullet \vec{k}}{\|\vec{u}\|\|\vec{k}\|} = \frac{(4, -2, 1) \bullet (0, 0, 1)}{\sqrt{21}\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{21}}, \text{ ainsi } \gamma \approx 77{,}4°.$$

$\alpha + \alpha_1 = 180°$
$\beta + \beta_1 = 180°$
$\gamma + \gamma_1 = 180°$

En choisissant $\vec{u_1} = (-4, 2, -1)$, nous obtenons

$\alpha_1 \approx 150{,}8°$, $\beta_1 \approx 64{,}1°$ et $\gamma_1 \approx 102{,}6°$.

8

DÉFINITION 8.8

Les **cosinus directeurs** d'une droite D dans l'espace cartésien, associés à un vecteur directeur $\vec{u} = (a, b, c)$ de D, sont donnés par $\cos\alpha$, $\cos\beta$ et $\cos\gamma$, où

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ et } \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Remarque : Les cosinus directeurs d'une droite sont définis au signe près selon le choix du vecteur directeur de cette droite.

THÉORÈME 8.2

Si α, β et γ sont les angles directeurs associés à un vecteur directeur $\vec{u}$ d'une droite D, alors

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

La preuve est laissée à l'étudiant.

Exemple 3 Soit la droite D passant par P(4, -5, 2) et par Q(-5, 2, 0). Déterminons les cosinus directeurs de D associés aux vecteurs directeurs de D suivants et vérifions que $(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 1$.

a) Soit $\vec{u_1} = \overrightarrow{PQ} = (-9, 7, -2)$, un vecteur directeur de D.

Les cosinus directeurs de D associés à $\vec{u_1}$ sont :

Cosinus directeurs

$$\cos \alpha_1 = \frac{-9}{\sqrt{134}}, \cos \beta_1 = \frac{7}{\sqrt{134}} \text{ et } \cos \gamma_1 = \frac{-2}{\sqrt{134}} \qquad \text{(définition 8.8)}$$

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = \left(\frac{-9}{\sqrt{134}}\right)^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{134}}\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{134}}\right)^2$$

$$= \frac{81}{134} + \frac{49}{134} + \frac{4}{134}$$

$$= 1$$

$\vec{u_2} = -\vec{u_1}$

b) Soit $\vec{u_2} = \overrightarrow{QP} = (9, -7, 2)$, un autre vecteur directeur de D.

Les cosinus directeurs de D associés à $\vec{u_2}$ sont :

$$\cos \alpha_2 = \frac{9}{\sqrt{134}}, \cos \beta_2 = \frac{-7}{\sqrt{134}} \text{ et } \cos \gamma_2 = \frac{2}{\sqrt{134}} \qquad \text{(définition 8.8)}$$

$$\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 = \left(\frac{9}{\sqrt{134}}\right)^2 + \left(\frac{-7}{\sqrt{134}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{134}}\right)^2$$

$$= \frac{81}{134} + \frac{49}{134} + \frac{4}{134}$$

$$= 1$$

Exemple 4 Déterminons s'il existe une droite D formant

a) un angle α de 55° avec l'axe des x et un angle β de 56° avec l'axe des y.

Sachant que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, nous avons

$$\cos^2 55° + \cos^2 56° + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\cos^2 \gamma = 0{,}3583\ldots$$

Ainsi, $\cos \gamma = \pm\sqrt{0{,}3583\ldots}$

Cette équation a deux solutions réelles.

D'où il existe au moins une droite D ayant les caractéristiques précédentes.

b) un angle α de 30° avec l'axe des x et un angle γ de 40° avec l'axe des z.

Sachant que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, nous avons

$$\cos^2 30° + \cos^2 \beta + \cos^2 40° = 1$$

Ainsi, $\cos^2 \beta = -0{,}3368\ldots$

Cette équation n'a pas de solution réelle.

D'où il n'existe aucune droite formant un angle α de 30° avec l'axe des x et un angle γ de 40° avec l'axe des z.

EXERCICES 8.2

1. Répondre par vrai (V) ou faux (F) en supposant que toutes les droites suivantes sont des droites de l'espace cartésien.

a) Si $D_1 /\!/ D_2$ et si $D_2 /\!/ D_3$, alors $D_1 /\!/ D_3$.

b) Si $D_1 /\!/ D_2$ et si $D_2 \perp D_3$, alors $D_1 \perp D_3$.

c) Si $D_1 \perp D_2$ et si $D_2 \perp D_3$, alors $D_1 \perp D_3$.

d) Si $D_1 \perp D_2$ et si $D_2 \perp D_3$, alors $D_1 /\!/ D_3$.

e) Si $D_1 \perp D_2$, alors il existe un point P tel que $P \in D_1$ et $P \in D_2$.

f) Si D_1 et D_2 n'ont aucun point d'intersection, alors $D_1 /\!/ D_2$.

g) Si D_1 et D_2 sont concourantes et si D_1 et D_3 sont concourantes, alors D_2 et D_3 sont concourantes.

h) Si D_1 et D_2 sont concourantes, si D_1 et D_3 sont concourantes et si D_2 et D_3 sont concourantes, alors les trois droites sont situées dans un même plan.

2. Déterminer la position relative des droites D_1 et D_2 données et déterminer l'angle formé par ces droites. Dans le cas où D_1 et D_2 sont concourantes, déterminer le point d'intersection.



a) $D_1 : (x, y, z) = (1, -3, -2) + s(1, 2, -1)$, où $s \in \mathbb{R}$

$D_2 : (x, y, z) = (20, 5, -9) + t(3, 1, -1)$, où $t \in \mathbb{R}$

b) $D_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

$D_2 : \dfrac{2x - 6}{6} = \dfrac{y - 1}{6} = \dfrac{3 - z}{-9}$

c) $D_1 : \dfrac{x - 10}{-3} = \dfrac{y + 13}{7} = \dfrac{z + 18}{-8}$

$D_2 : x - 5 = 3 - y = \dfrac{z - 1}{2}$

d) $D_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = -5 + 2t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

$D_2 : (x, y, z) = (-5, 4, -1) + s(-3, 1, -2)$, où $s \in \mathbb{R}$

e) $D_1 : (x, y, z) = \vec{i} + 2\vec{k} + t(3, 0, -4)$, où $t \in \mathbb{R}$

$D_2 : \begin{cases} x = -3 - 6s \\ y = 5 \\ z = 9 + 8s \end{cases}$, où $s \in \mathbb{R}$

f) $D_1 : x - 2 = \dfrac{y + 1}{2} = \dfrac{z - 3}{4}$

$D_2 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 3z - 49 = 0 \text{ et } y = 3\}$

g) $D_1 : \begin{cases} x = 4 - s \\ y = 7 - 5s \\ z = 2 - 3s \end{cases}$, où $s \in \mathbb{R}$

$D_2 : x - 1 = \dfrac{6 - y}{2} = \dfrac{z - 10}{3}$

h) D_1 passe par P(1, -3, 5) et Q(-5, -21, 35).

$D_2 : (x, y, z) = (-5, -21, 35) + t(1, 3, -5)$, où $t \in \mathbb{R}$

3. Après avoir déterminé un vecteur directeur de chacune des droites suivantes, calculer les cosinus directeurs et les angles directeurs associés à ce vecteur directeur.

a) $D : (x, y, z) = (0, 0, 0) + t(-1, 3, 4)$, où $t \in \mathbb{R}$

b) $D : \begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 6 \\ z = -4 \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

c) D passe par P(-1, 3, 7) et par Q(2, 2, -1).

4. Déterminer s'il est possible qu'une droite D forme les angles α, β et γ suivants avec respectivement l'axe des x, l'axe des y et l'axe des z. Justifier les réponses.

a) $\alpha = 30°$, $\beta = 30°$ et $\gamma = 30°$

b) $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$ et $\gamma = 60°$

c) $\alpha = 25°$, $\beta = 115°$ et $\gamma = 90°$

d) $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$ et $\gamma = 60°$

5. Déterminer s'il est possible qu'une droite D forme les angles directeurs suivants et, si oui, déterminer les angles directeurs non donnés.

a) $\alpha = 30°$ et $\gamma = 45°$

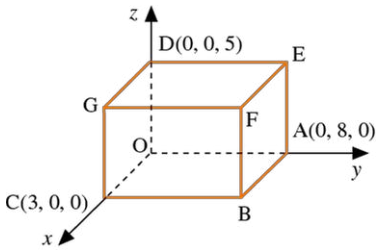
b) $\beta = 60°$ et $\gamma = 45°$

c) $\alpha = 50°$ et $\beta = \gamma$

d) $\alpha = 0°$ et $\beta \neq \gamma$

e) $\alpha = \beta = \gamma$

6. Soit le parallélépipède droit suivant.



Déterminer l'angle θ formé par les droites passant par

a) OF et OC ;

b) OF et l'axe des y ;

c) OF et OD ;

d) OF et CE ;

e) BG et DA ;

f) CF et GD ;

g) FA et BE ;

h) CM et BM, où M est le point milieu du segment de droite $\overline{GF}$;

i) CN et BN, où N est le point milieu du segment de droite $\overline{DE}$;

j) CP et BP, où P est le point d'intersection des diagonales du rectangle GDEF ;

k) CR et BR, où R est le point de rencontre des droites passant par GA et par OF.

8.3 Distance entre un point et une droite, et distance entre deux droites dans l'espace cartésien

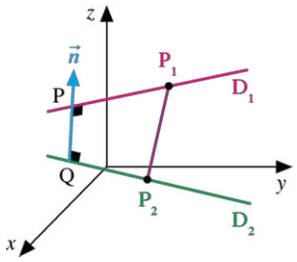
Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra résoudre des problèmes de distance dans l'espace cartésien.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de démontrer des formules permettant de calculer la distance entre un point et une droite ;
- de calculer la distance entre un point et une droite ;
- de démontrer une formule permettant de calculer la distance entre deux droites parallèles ;
- de calculer la distance entre deux droites parallèles ;
- de démontrer une formule permettant de calculer la distance entre deux droites non parallèles ;
- de calculer la distance entre deux droites non parallèles ;
- de déterminer des lieux géométriques en utilisant la notion de distance.

Soit $\vec{u}_1$, un vecteur directeur de D_1, et $\vec{u}_2$, un vecteur directeur de D_2.



$$d(D_1, D_2) = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)\right|}{\left\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\right\|}, \text{ où } \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{n}$$

8

Dans cette section, nous calculerons la distance entre un point et une droite, la distance entre deux droites parallèles, ainsi que la distance entre deux droites non parallèles.

Ces calculs de distance permettent de résoudre certains problèmes géométriques.

Distance entre un point et une droite dans l'espace

Démontrons maintenant une formule permettant de calculer, à l'aide du produit vectoriel, la distance, notée $d(\text{P, D})$, entre un point P et une droite D de l'espace cartésien.

THÉORÈME 8.3

Soit $\vec{u}$, un vecteur directeur d'une droite D, et P, un point de l'espace cartésien.

Si R est un point quelconque de la droite D, alors la distance entre le point P et la droite D est donnée par

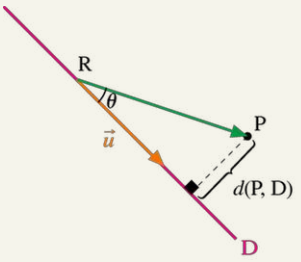
$$d(\text{P, D}) = \frac{\left\|\overrightarrow{\text{RP}} \times \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}.$$

Preuve

$$d(\text{P, D}) = \left\|\overrightarrow{\text{RP}}\right\| \sin\theta \qquad \left(\text{car } \sin\theta = \frac{d(\text{P, D})}{\left\|\overrightarrow{\text{RP}}\right\|}\right)$$

$$= \frac{\left\|\vec{u}\right\| \left\|\overrightarrow{\text{RP}}\right\| \sin\theta}{\left\|\vec{u}\right\|} \qquad (\text{car } \left\|\vec{u}\right\| \neq 0)$$

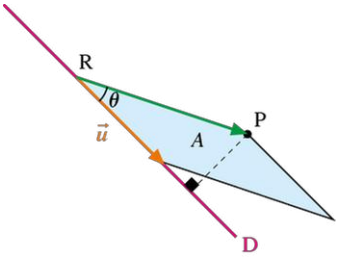
$$= \frac{\left\|\overrightarrow{\text{RP}} \times \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|} \qquad (\text{théorème 6.10})$$



d'où $d(\text{P, D}) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{\text{RP}} \times \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

Remarque : Nous constatons que $d(\text{P, D})$ correspond à la hauteur du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{\text{RP}}$ et $\vec{u}$.

Ainsi, $d(\text{P, D})$ est égale à l'aire A du parallélogramme divisée par la longueur de la base du parallélogramme.



$$\text{Ainsi } d(\text{P, D}) = \frac{\text{Aire } A}{\text{Longueur de la base}}$$

$$\text{D'où } d(\text{P, D}) = \frac{\left\|\overrightarrow{\text{RP}} \times \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$$

Exemple 1 Calculons la distance $d(P, D)$ entre le point P(-3, 2, 1) et la droite $D: x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-10}{-5}$.

Soit $\vec{u} = (1, 2, -5)$, un vecteur directeur de D, et R(0, -1, 10), un point de D.

Distance entre un point et une droite

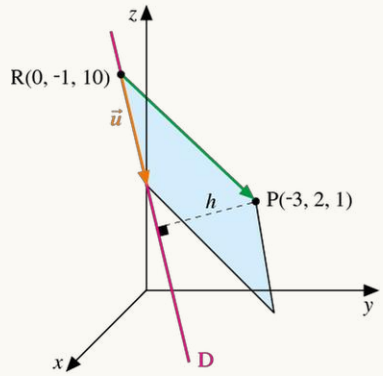
$$d(P, D) = \frac{\left\|\overrightarrow{RP} \times \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|} \quad \text{(théorème 8.3)}$$

$$= \frac{\left\|(-3, 3, -9) \times (1, 2, -5)\right\|}{\left\|(1, 2, -5)\right\|}$$

$$= \frac{\left\|(3, -24, -9)\right\|}{\left\|(1, 2, -5)\right\|}$$

$$= \frac{\sqrt{3^2 + (-24)^2 + (-9)^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{666}}{\sqrt{30}}$$



d'où $d(P, D) \approx 4{,}71$ unités.

Distance entre deux droites parallèles

Calculer la distance $d(D_1, D_2)$ entre deux droites parallèles D_1 et D_2 de l'espace cartésien équivaut à calculer la distance $d(P_1, D_2)$, où $P_1 \in D_1$, ou à calculer la distance $d(P_2, D_1)$, où $P_2 \in D_2$. Ainsi,

$$d(D_1, D_2) = d(P_1, D_2) = d(P_2, D_1), \text{ où } P_1 \in D_1 \text{ et } P_2 \in D_2$$

THÉORÈME 8.4

Soit $\vec{u}$, un vecteur directeur des droites parallèles D_1 et D_2.

Si $P_1 \in D_1$ et si $P_2 \in D_2$, alors la distance entre D_1 et D_2 est donnée par

$$d(D_1, D_2) = \frac{\left\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}.$$

La preuve est laissée à l'étudiant.

Remarque : Si D_1 et D_2 sont deux droites parallèles telles que

1) $d(D_1, D_2) \neq 0$, alors D_1 et D_2 sont parallèles distinctes ;
2) $d(D_1, D_2) = 0$, alors D_1 et D_2 sont parallèles confondues.

Exemple 1 Calculons la distance $d(D_1, D_2)$ entre les droites parallèles suivantes.

$D_1: (x, y, z) = (-2, 1, 4) + t(-6, 3, 1)$, où $t \in \mathbb{R}$, et

$D_2: \frac{x+5}{6} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{-1}$

Soit $\vec{u} = (6, -3, -1)$, un vecteur directeur de D_1 et de D_2, $P_1(-2, 1, 4) \in D_1$ et $P_2(-5, 1, 0) \in D_2$.

Distance entre deux droites parallèles

$$d(D_1, D_2) = \frac{\left\| \overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{u} \right\|}{\left\| \vec{u} \right\|} \quad \text{(théorème 8.4)}$$

$$= \frac{\left\| (-3, 0, -4) \times (6, -3, -1) \right\|}{\left\| (6, -3, -1) \right\|}$$

$$= \frac{\left\| (-12, -27, 9) \right\|}{\sqrt{46}}$$

$$= \frac{\sqrt{954}}{\sqrt{46}}$$

d'où $d(D_1, D_2) \approx 4{,}55$ unités.

Exercices de compréhension 8.3

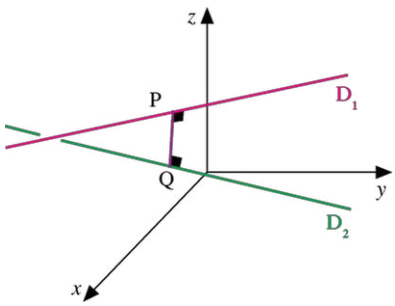
1. a) Calculer la distance entre les droites parallèles D_1 et D_2, où D_1 passe par le point A(3, -2, 2) et D_2 passe par les points B(1, -1, 1) et C(-3, 1, -1).

b) Déterminer si les droites sont parallèles distinctes ou confondues.

Distance entre deux droites non parallèles

DÉFINITION 8.9

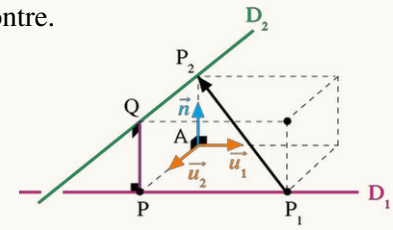
La **distance** $d(D_1, D_2)$ **entre deux droites non parallèles** D_1 et D_2 est égale à la longueur du segment de droite $\overline{PQ}$, où $P \in D_1$, $Q \in D_2$, $\overrightarrow{PQ} \perp D_1$ et $\overrightarrow{PQ} \perp D_2$.



Les points P et Q sont respectivement les points les plus près entre les deux droites non parallèles D_1 et D_2.

Déterminons la distance entre deux droites non parallèles dans le cas suivant.

Exemple 1 Soit le parallélépipède droit ci-contre. Déterminons la distance entre les droites D_1 et D_2, notée $d(D_1, D_2)$.



Soit $\vec{u_1}$, un vecteur directeur de D_1, $\vec{u_2}$, un vecteur directeur de D_2, et $\vec{n} = \vec{u_1} \times \vec{u_2}$.

$$d(D_1, D_2) = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| \qquad \text{(car P et Q sont les points les plus rapprochés entre } D_1 \text{ et } D_2\text{)}$$

$$= \left\|\overrightarrow{AP_2}\right\| \qquad (\text{car } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AP_2})$$

$$= \left\|(\overrightarrow{P_1P_2})_{\vec{n}}\right\| \qquad (\text{car } \overrightarrow{AP_2} = (\overrightarrow{P_1P_2})_{\vec{n}})$$

$$= \left\|\left(\frac{\overrightarrow{P_1P_2} \bullet \vec{n}}{\vec{n} \bullet \vec{n}}\right)\vec{n}\right\| \qquad \text{(théorème 6.7)}$$

$\vec{n} \bullet \vec{n} = \|\vec{n}\|^2$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \bullet \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|^2}\|\vec{n}\| \qquad (\text{car } \|k\vec{n}\| = |k|\|\vec{n}\|)$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \bullet \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \bullet (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)\right|}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|} \qquad (\text{car } \vec{n} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2)$$

$$\text{d'où } d(D_1, D_2) = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \bullet (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)\right|}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|}$$

De façon générale, nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 8.5

Soit $\vec{u}_1$, un vecteur directeur de D_1, et $\vec{u}_2$, un vecteur directeur de D_2, où D_1 et D_2 sont des droites non parallèles.

Si $P_1 \in D_1$ et si $P_2 \in D_2$, alors la distance entre D_1 et D_2 est donnée par

$$d(D_1, D_2) = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \bullet (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)\right|}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|}.$$

8

La preuve est laissée à l'étudiant au nº 19 des exercices récapitulatifs, à la page 425.

Remarque : Si D_1 et D_2 sont deux droites non parallèles telles que

1) $d(D_1, D_2) \neq 0$, alors D_1 et D_2 sont des droites gauches ;
2) $d(D_1, D_2) = 0$, alors D_1 et D_2 sont des droites concourantes.

Exemple 2 Calculons la distance entre les droites non parallèles suivantes et déterminons si elles sont gauches ou concourantes.

$D_1 : (x, y, z) = (2, 0, -1) + s(-1, 3, 5)$, où $s \in \mathbb{R}$, et

$D_2 : (x, y, z) = -4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} + t(2, -1, -6)$, où $t \in \mathbb{R}$

Soit $\vec{u}_1 = (-1, 3, 5)$ et $\vec{u}_2 = (2, -1, -6)$, des vecteurs directeurs respectifs de D_1 et de D_2, $P_1(2, 0, -1) \in D_1$ et $P_2(-4, 3, 2) \in D_2$.

Ainsi, $\overrightarrow{P_1P_2} = (-6, 3, 3)$ et $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = (-13, 4, -5)$. Nous obtenons

$$d(D_1, D_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|} = \frac{|(-6, 3, 3) \cdot (-13, 4, -5)|}{\|(-13, 4, -5)\|} = \frac{75}{\sqrt{210}}$$

Droites gauches

d'où $d(D_1, D_2) \approx 5{,}18$ unités.

Par conséquent, les droites D_1 et D_2 sont des droites gauches. (car $d(D_1, D_2) \neq 0$)

Exercices de compréhension 8.3

2. a) Calculer la distance $d(D_1, D_2)$ entre les deux droites non parallèles suivantes.

$D_1 : (x, y, z) = (-1, 5, 2) + s(-2, 3, 3)$, où $s \in \mathbb{R}$, et

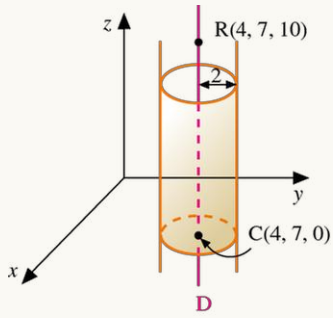
$D_2 : \dfrac{x + 7}{-3} = -y - 8 = \dfrac{z - 1}{2}$

b) Déterminer si les droites sont gauches ou concourantes.

c) Déterminer, s'il y a lieu, le point de rencontre Q de D_1 et de D_2.

Applications en géométrie

Exemple 1 Déterminons le lieu géométrique L de tous les points $P(x, y, z)$ qui sont à une distance de 2 unités de la droite $D : (x, y, z) = (4, 7, 10) + t(0, 0, 1)$, où $t \in \mathbb{R}$.



Soit $\vec{u} = (0, 0, 1)$, un vecteur directeur de D, $R(4, 7, 10) \in D$ et $P(x, y, z)$, un point de l'espace cartésien tel que $d(P, D) = 2$.

Puisque $d(P, D) = \dfrac{\|\overrightarrow{RP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ (théorème 8.3)

Lieu géométrique

$$2 = \frac{\|(x - 4, y - 7, z - 10) \times (0, 0, 1)\|}{\|(0, 0, 1)\|}$$

$$2 = \frac{\left\|\left(\begin{vmatrix} y - 7 & z - 10 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x - 4 & z - 10 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x - 4 & y - 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right)\right\|}{1}$$ (définition 6.5)

$$2 = \|(y - 7, -(x - 4), 0)\|$$

$$2 = \sqrt{(y - 7)^2 + (-(x - 4))^2 + 0^2}$$

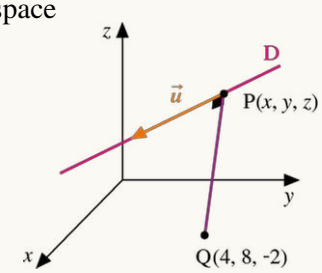
$$4 = (x - 4)^2 + (y - 7)^2$$ (en élevant au carré les deux membres de l'équation)

d'où $L : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 4\}$

Ce lieu est un cylindre circulaire droit dont l'axe est la droite D et dont le rayon est de 2 unités.

Exemple 2 Soit D : $(x, y, z) = (7, -2, 3) + t(11, -7, -1)$, où $t \in \mathbb{R}$, et Q(4, 8, -2), un point de l'espace cartésien.

Déterminons le point P(x, y, z) de la droite D qui est le plus près du point Q.



Le point d'une droite le plus près d'un point donné

Soit $\vec{u} = (11, -7, -1)$, un vecteur directeur de D, et P$(7 + 11t, -2 - 7t, 3 - t)$, le point de la droite D le plus près de Q(4, 8, -2).

Puisque $\overrightarrow{PQ} \perp$ D, nous avons

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0 \qquad (\text{car } \overrightarrow{PQ} \perp \vec{u})$$
$$(-3 - 11t, 10 + 7t, -5 + t) \cdot (11, -7, -1) = 0$$
$$-171t - 98 = 0$$
$$t = \frac{-98}{171}$$

D'où, en remplaçant t par $\frac{-98}{171}$ dans les coordonnées de P, nous obtenons

P$\left(\frac{119}{171}, \frac{344}{171}, \frac{611}{171}\right)$, le point de la droite D le plus près de Q(4, 8, -2).

Exemple 3 Soit les droites gauches D_1 et D_2 suivantes.

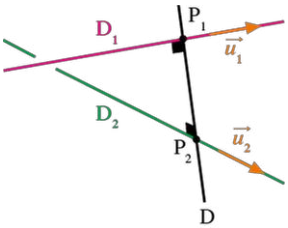
$D_1 : (x, y, z) = (-1, -5, 8) + t(2, 3, -4)$, où $t \in \mathbb{R}$, et

$D_2 : \frac{x - 2}{-3} = \frac{y - 14}{-7} = z - 1$

a) Déterminons $P_1 \in D_1$ et $P_2 \in D_2$ tels que $d(P_1, P_2)$ est minimale.

Soit $\vec{u}_1 = (2, 3, -4)$, un vecteur directeur de D_1,

et $\vec{u}_2 = (-3, -7, 1)$, un vecteur directeur de D_2.



En transformant les équations de D_1 et de D_2 sous forme paramétrique, nous avons

$$D_1 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 8 - 4t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R} \qquad D_2 : \begin{cases} x = 2 - 3r \\ y = 14 - 7r \\ z = 1 + r \end{cases}, \text{ où } r \in \mathbb{R}$$

Soit $P_1(-1 + 2t, -5 + 3t, 8 - 4t)$, un point de D_1,

et $P_2(2 - 3r, 14 - 7r, 1 + r)$, un point de D_2.

Nous cherchons les points P_1 et P_2 tels que $\overrightarrow{P_1P_2} \perp \vec{u}_1$ et $\overrightarrow{P_1P_2} \perp \vec{u}_2$.

Il faut donc que $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{u}_1 = 0$ et $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{u}_2 = 0$.

$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{u}_1 = 0$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{u}_1 = 0$$
$$(2 - 3r - (-1 + 2t), 14 - 7r - (-5 + 3t), 1 + r - (8 - 4t)) \cdot (2, 3, -4) = 0$$
$$(3 - 3r - 2t, 19 - 7r - 3t, -7 + r + 4t) \cdot (2, 3, -4) = 0$$
$$6 - 6r - 4t + 57 - 21r - 9t + 28 - 4r - 16t = 0$$
$$91 - 31r - 29t = 0$$

$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{u}_2 = 0$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{u}_2 = 0$$
$$(3 - 3r - 2t, 19 - 7r - 3t, -7 + r + 4t) \cdot (-3, -7, 1) = 0$$
$$-9 + 9r + 6t - 133 + 49r + 21t - 7 + r + 4t = 0$$
$$-149 + 59r + 31t = 0$$

Le système d'équations correspondant est $\begin{cases} 29t + 31r = 91 \\ 31t + 59r = 149 \end{cases}$

Règle de Cramer

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 91 & 31 \\ 149 & 59 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 29 & 31 \\ 31 & 59 \end{vmatrix}} = \frac{750}{750} = 1 \text{ et } r = \frac{\begin{vmatrix} 29 & 91 \\ 31 & 149 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 29 & 31 \\ 31 & 59 \end{vmatrix}} = \frac{1500}{750} = 2$$

D'où, en remplaçant t par 1 dans $P_1(-1 + 2t, -5 + 3t, 8 - 4t)$ et r par 2 dans $P_2(2 - 3r, 14 - 7r, 1 + r)$, nous obtenons $P_1(1, -2, 4)$ et $P_2(-4, 0, 3)$, les points tels que $d(P_1, P_2)$ est minimale.

b) Calculons $d(D_1, D_2)$.

$$\begin{aligned} d(D_1, D_2) &= d(P_1, P_2) && \text{(voir a))} \\ &= \sqrt{(-4 - 1)^2 + (0 - (-2))^2 + (3 - 4)^2} \\ &= \sqrt{30} \end{aligned}$$

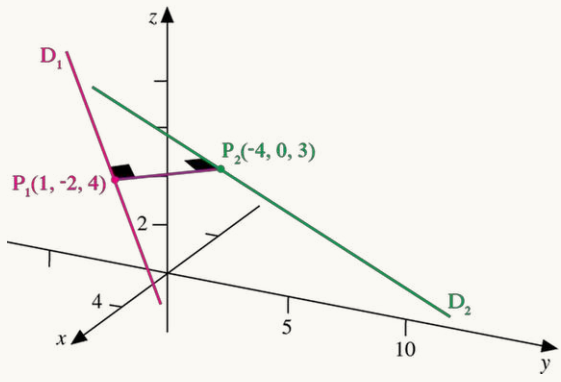
d'où $d(D_1, D_2) \approx 5{,}48$ unités.

Représentation graphique à l'aide de Maple

```
with(plottools):
with(plots):

c1 := display(line([-1, -5, 8], [3, 1, 0]), axes = normal, color = magenta, linestyle = solid):
c2 := display(line([2, 14, 1], [-7, -7, 4]), axes = normal, color = green, linestyle = solid):
p1 := point([1, -2, 4], symbol = circle, symbolsize = 10, color = magenta):
p2 := point([-4, 0, 3], symbol = circle, symbolsize = 10, color = green):
c3 := display(line([1, -2, 4], [-4, 0, 3]), axes = normal, color = purple, linestyle = solid):

display(c1, c2, c3, p1, p2, orientation = [27, 68], scaling = constrained);
```



EXERCICES 8.3

1. Calculer la distance entre le point P et la droite D.

a) P(2, -5, 7) et

D : $(x, y, z) = (3, 0, -5) + t(-1, 2, 7)$, où $t \in \mathbb{R}$

b) P(4, 0, 5) et D : $2x = -y = 4z$

2. Calculer la distance entre les droites parallèles suivantes et déterminer si les droites sont distinctes ou confondues.

a) $D_1 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-4}{5} = \dfrac{-z}{2}$

$D_2 : \dfrac{6x-12}{3} = \dfrac{4y}{5} = \dfrac{4-4z}{2}$

b) D_1 passe par P(4, 0, -3) et est parallèle à la droite D_2 qui passe par les points A(0, -2, 1) et B(-1, 0, 4).

c) $D_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

$D_2 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y = 4 \text{ et } z = 1\}$

3. Calculer la distance entre les droites non parallèles suivantes et déterminer si les droites sont gauches ou concourantes. Dans le cas où les droites sont concourantes, déterminer le point d'intersection.

a) $D_1 : (x, y, z) = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} + t(-1, 0, 4)$, où $t \in \mathbb{R}$

$D_2 : \dfrac{x+4}{2} = \dfrac{-3-2y}{6} = \dfrac{z}{4}$

b) $D_1 : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 - t \\ z = 15 + 3t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

D_2 passe par les points P(-2, 0, 7) et R(4, 4, -1).

c) $D_1 : 2x = 3y = -z$

$D_2 : (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(1, 0, 0)$, où $t \in \mathbb{R}$

4. Que peut-on conclure, si

a) i) $d(P, D) = 0$?

ii) $d(P, D) \neq 0$?

b) i) $d(D_1, D_2) = 0$?

ii) $d(D_1, D_2) \neq 0$?

5. Calculer la distance entre les droites suivantes.

a) $D_1 : (x, y, z) = \vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k} + s(1, 2, -1)$, où $s \in \mathbb{R}$

$D_2 : (x, y, z) = (20, 5, -9) + t(3, 1, -1)$, où $t \in \mathbb{R}$

b) $D_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = -5 + 2t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

$D_2 : (x, y, z) = (-5, 4, 1) + s(-3, 1, -2)$, où $s \in \mathbb{R}$

c) $D_1 : \dfrac{x-10}{-3} = \dfrac{y+13}{7} = \dfrac{z+18}{-8}$

$D_2 : x - 5 = 3 - y = \dfrac{z-1}{2}$

d) $D_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

$D_2 : \dfrac{2x-6}{6} = \dfrac{y-1}{6} = \dfrac{3-z}{-9}$

6. Déterminer le point P de la droite D qui est le plus près du point Q si :

a) D : $(x, y, z) = (2, -3, 4) + t(-1, 3, 5)$, où $t \in \mathbb{R}$, et Q(5, -2, -1)

b) D : $x - 1 = y - 2 = z - 3$ et Q(0, 0, 0)

7. **LIEU GÉOMÉTRIQUE**

a) Déterminer le lieu géométrique L de tous les points P(x, y, z) qui sont à une distance de 5 unités de la droite D passant par les points R(7, 4, 5) et S(-2, 4, 5).

b) Décrire et représenter ce lieu géométrique.

c) Déterminer l'intersection du lieu géométrique précédent avec les plans XOY, XOZ et YOZ.

d) Déterminer l'intersection du lieu géométrique précédent avec l'axe des x, l'axe des y et l'axe des z.

8. Soit les droites suivantes.

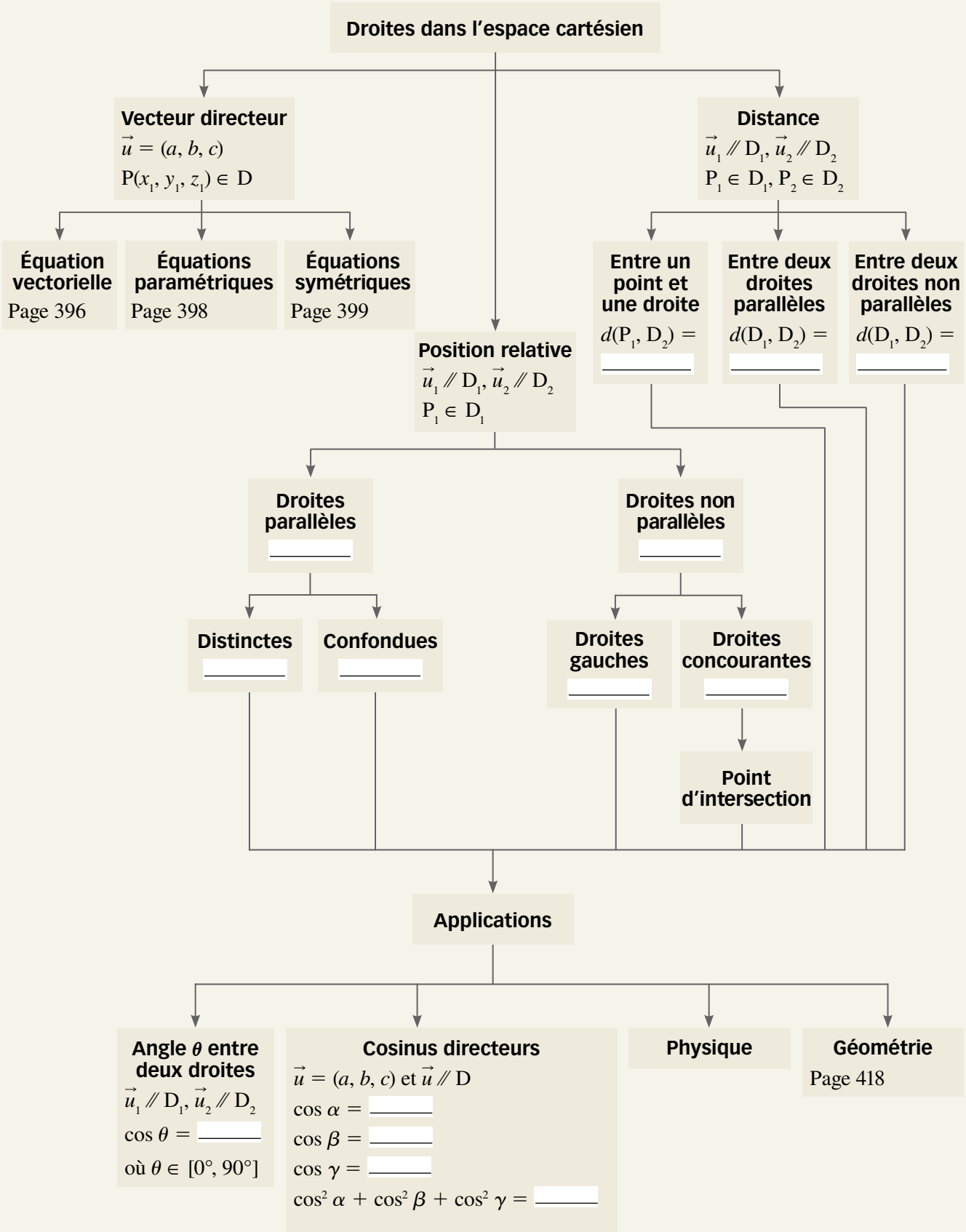
$D_1 : (x, y, z) = (1, -2, 3) + t(-1, 3, -2)$, où $t \in \mathbb{R}$

$D_2 : 2x - 6 = -4y = z + 1$

a) Déterminer $P_1 \in D_1$ et $P_2 \in D_2$ tels que $d(P_1, P_2)$ est minimale.

b) Vérifier que $d(P_1, P_2) = d(D_1, D_2)$.

Révision des concepts

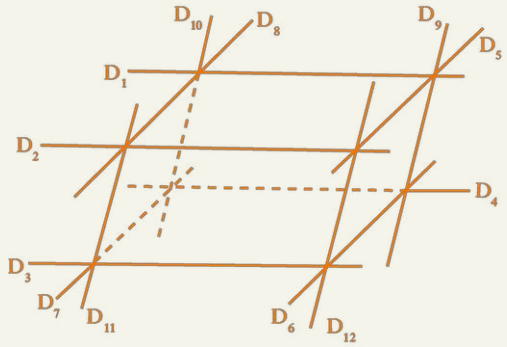


Exercices récapitulatifs

Administration | Biologie | Chimie | Géométrie | Physique | Sciences humaines | Outil technologique

Les réponses aux exercices récapitulatifs et aux problèmes de synthèse, à l'exception de ceux notés en **rouge**, sont fournies à la fin du manuel.

1. Soit le parallélépipède ci-dessous et les droites D_1, D_2, …, D_{12} suivantes.



Parmi les droites précédentes, déterminer celles qui sont

a) parallèles distinctes à D_1 ;

b) concourantes à D_4 ;

c) gauches à D_8.

2. Soit D_1, D_2 et D_3, trois droites de l'espace cartésien telles que D_1 et D_2 sont des droites concourantes et telles que D_1 et D_3 sont aussi des droites concourantes. Déterminer si les situations suivantes sont possibles et donner une représentation graphique justifiant votre réponse.

a) D_2 et D_3 sont des droites concourantes.

b) D_2 et D_3 sont des droites gauches.

c) D_2 et D_3 sont des droites parallèles.

d) D_2 et D_3 sont des droites perpendiculaires.

3. Soit les droites suivantes.

D_1 passant par P(3, 2, -7) et ayant $\vec{u}_1 = (1, -2, 7)$ comme vecteur directeur.

D_2 passant par P(4, 0, 2) et ayant $\vec{u}_2 = \vec{i} + \vec{j}$ comme vecteur directeur.

D_3 passant par P(4, -3, 1) et par Q(6, 5, 3).

D_4 passant par P(2, 4, -14) et parallèle à la droite $D: 2x = 4 - y = \dfrac{1 + 2z}{7}$.

D_5 passant par P(-4, 5, 3) et perpendiculaire au plan XOZ.

Déterminer

a) pour les droites D_1, D_2, D_3, D_4 et D_5, une équation vectorielle (É.V.), des équations paramétriques (É.P.) et des équations symétriques (É.S.), si c'est possible, sinon donner la droite sous forme ensembliste ;

b) quelles sont les droites parallèles ;

c) quelles sont les droites perpendiculaires ;

d) la position relative des droites D_1 et D_4 ; D_1 et D_2 ; D_2 et D_3 ; dans le cas où les droites sont concourantes, trouver le point d'intersection ;

e) $d(D_1, D_2)$; $d(D_2, D_3)$; $d(D_2, D_5)$;

f) l'angle formé par D_1 et D_4 ; D_2 et D_5 ;

g) des cosinus directeurs de D_1 ; D_2 ; D_5 ;

h) des angles directeurs de D_1 ; D_2 ; D_5 ;

i) la distance entre P(6, 5, 3) et D_1 ; entre P(6, 5, 3) et D_3 ;

j) à quelle(s) droite(s) appartiennent les points A(-1, -5, 2) ; O(0, 0, 0).

4. Déterminer si les trois droites suivantes sont concourantes. Si oui, déterminer le point d'intersection.

$D_1: (x, y, z) = (-6, -3, 9) + s(2, 1, -3)$, où $s \in \mathbb{R}$

$$D_2: \begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = -6 + 5t \\ z = 6 - 3t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

$$D_3: \frac{x + 16}{7} = y + 3 = \frac{z - 9}{-3}$$

5. **a)** Soit la droite D passant par les points A(3, 2, 0) et B(-3, 6, 0).

i) Représenter cette droite graphiquement et déterminer dans quel plan passant par l'origine cette droite est située.

ii) Écrire la droite précédente sous la forme ensembliste.

b) Représenter graphiquement les droites suivantes.

i) $D: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + z = 4 \text{ et } y = 0\}$

Déterminer dans quel plan passant par l'origine cette droite est située.

ii) $D: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2 \text{ et } y = 5\}$

Déterminer à quel axe elle est parallèle.

iii) $D_1: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 2y = -6\}$

$D_2: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y = -6 \text{ et } z = 0\}$

Déterminer dans quel plan passant par l'origine se trouve la droite D_2.

iv) $D_1: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3y + 4z = 12 \text{ et } x = 0\}$

$D_2: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3y + 4z = 12 \text{ et } x = 3\}$

Représenter les droites sur le même système d'axes. Calculer $d(D_1, D_2)$.

6. Soit $D: \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = -2 + 3t, \text{ où } t \in \mathbb{R}. \\ z = 7 - 7t \end{cases}$

Représenter graphiquement et identifier le lieu obtenu

a) lorsque $t \in [0, 2]$;

b) lorsque $t \leq 1$;

c) lorsque $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

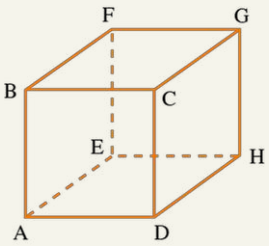
7. Soit le cube ci-contre et les droites suivantes.

D_1 passant par A et G.

D_2 passant par A et F.

D_3 passant par C et H.

D_4 passant par B et D.



a) Si les côtés du cube mesurent 10 cm, calculer :

i) $d(D_2, D_3)$ ii) $d(D_1, D_3)$

iii) $d(D_1, D_4)$ iv) $d(D_3, D_4)$

b) Si les côtés du cube mesurent x cm, calculer :

i) $d(D_2, D_3)$ ii) $d(D_1, D_3)$

iii) $d(D_1, D_4)$ iv) $d(D_3, D_4)$

8. Soit $D_1: (x, y, z) = (2, -1, 4) + s(1, -3, 1)$, où $s \in \mathbb{R}$, et $D_2: (x, y, z) = (6, -3, 1) + t(-3, 4, 0)$, où $t \in \mathbb{R}$, et $A(0, 5, 2) \in D_1$.

a) Déterminer le point $P_2 \in D_2$ qui est le plus près de A(0, 5, 2).

b) Déterminer le point $P_1 \in D_1$ qui est le plus près de P_2.

c) Calculer

i) $d(A, D_2)$; ii) $d(P_2, D_1)$; iii) $d(D_1, D_2)$.

d) Déterminer la nature du triangle AP_2P_1 et calculer son aire.

9. Soit $D_1: (x, y, z) = (1, -4, 2) + k(-2, 1, -3)$, où $k \in \mathbb{R}$,

$D_2: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z - 13 = 0 \text{ et } y = -6\}$,

$D_3: \dfrac{x - 1}{2} = 3 - y = \dfrac{2z + 3}{6}$ et

D_4, la droite passant par $P_4(-1, 2, -3)$ et $Q_4(1, -2, 2)$.

a) Déterminer la position relative des droites suivantes. Dans le cas où les droites sont concourantes, déterminer le point d'intersection.

i) D_1 et D_2 ii) D_1 et D_3 iii) D_2 et D_4

b) Calculer la distance entre :

i) D_1 et D_3; ii) D_2 et D_4.

c) Déterminer le point R_2, où $R_2 \in D_2$, et le point R_4, où $R_4 \in D_4$, de telle manière que R_2 et R_4 sont les plus rapprochés.

10. Répondre par vrai (V) ou faux (F) en justifiant votre réponse. Une droite de l'espace cartésien peut avoir les angles directeurs suivants.

a) $\alpha = 45°, \beta = 45°$ et $\gamma = 45°$

b) $\alpha = 0°, \beta = 0°$ et $\gamma = 90°$

c) $\alpha = 0°, \beta = 90°$ et $\gamma = 90°$

d) $\alpha = \dfrac{\pi}{6}, \beta = \dfrac{\pi}{3}$ et $\gamma = \dfrac{\pi}{4}$

e) $\alpha = 60°, \beta = 60°$ et $\gamma = 45°$

f) $\alpha = 30°$ et $\beta = 30°$

11. Déterminer une équation vectorielle de la droite

a) D_1 qui passe par le point R(-3, 2, 5) et qui a des angles directeurs $\alpha = \beta = 60°$ et $\gamma \in [0°, 90°]$;

b) D_2 qui passe par le point T(0, -7, 9) et qui a des angles directeurs $\beta = 90°$ et $\alpha = \gamma$, où $\alpha \in [0°, 90°]$.

12. Soit la droite D qui passe par l'origine et qui a des angles directeurs égaux.

a) Déterminer des équations symétriques de D.

b) Déterminer $d(P_0, D)$ si $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

c) Soit A(1, 0, 0), B(1, 1, 0) et C(1, 1, 1). Déterminer

i) $d(A, D)$; ii) $d(B, D)$; iii) $d(C, D)$.

13. **AIRE D'UN PARALLÉLOGRAMME**

Soit le point P(8, 1, 0) situé sur la droite D_1 qui est parallèle à l'axe des z et soit la droite $D_2: (x, y, z) = (2, 4, -1) + s(2, -1, 5)$, où $s \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer si le point Q(6, 2, 9) est un point de D_2.

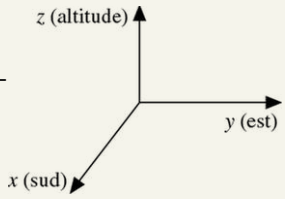
b) Déterminer le point d'intersection R de D_1 et D_2.

c) Soit le point S(2, 1, -4). Déterminer les coordonnées des points T_i tels que Q, R, S et T_i sont les sommets d'un parallélogramme et calculer l'aire des différents parallélogrammes possibles.

14. **APPLICATION | DISTANCE MINIMALE**

Un avion en phase d'atterrissage se déplace de l'ouest vers l'est avec un angle de descente de 30°. La tour de contrôle, haute de 35 m, se trouve à 300 m à l'ouest et à 150 m au nord du point d'atterrissage O(0, 0, 0).

a) Déterminer les coordonnées du sommet T de la tour et représenter graphiquement la tour ainsi que la trajectoire de l'avion dans le système d'axes ci-contre.



b) Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la trajectoire de l'avion.

c) Calculer la distance minimale d_{min} entre l'avion et le sommet de la tour.

d) Calculer la distance d entre l'avion et O(0, 0, 0) lorsque l'avion est à une distance minimale du sommet de la tour.

15. **a)** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que le vecteur $\vec{r}$, où $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$, est un vecteur qui sépare l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en deux parties égales.

b) Soit les points P(2, 5, 4), Q(1, 3, 2) et R(5, 5, 6) de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une équation vectorielle de la droite D passant par Q, qui est bissectrice de $\angle$PQR.

c) Déterminer le point d'intersection A de la droite D précédente et de la droite D_1 qui passe par les points P et R.

16. Soit $D_1 : \dfrac{x-d}{3} = \dfrac{2y-4}{b} = \dfrac{z+3}{c}$;

$D_2 : \dfrac{3x+6}{a} = \dfrac{4-y}{2} = \dfrac{4z+8}{b}$.

a) Déterminer toutes les valeurs possibles de a, de b et de c telles que $D_1 /\!/ D_2$.

b) Si $a = 9$, déterminer la valeur de la constante d pour que D_1 et D_2 soient parallèles distinctes.

17. Soit $D_1 : (x, y, z) = (1, 3, 2) + s(2, -1, -3)$, où $s \in \mathbb{R}$, et $D_2 : (x, y, z) = (6, 4, a) + t(-5, 2, 1)$, où $t \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer la valeur de la constante a pour que D_1 et D_2 soient concourantes.

b) Trouver, dans ce cas, le point d'intersection P de D_1 et de D_2.

18. Soit la droite D_1 passant par les points A(-3, 0, -4) et B(a, a, 5), et la droite $D_2 : \dfrac{x+3}{2} = y - 1 = \dfrac{z+2}{a}$.

Déterminer la valeur de la constante a pour que

a) $D_1 /\!/ D_2$; **b)** $D_1 \perp D_2$;

c) D_1 et D_2 soient concourantes, et trouver le point d'intersection P.

19. Soit $\vec{u_1}$, un vecteur directeur de D_1, et $\vec{u_2}$, un vecteur directeur de D_2, où D_1 et D_2 sont des droites non parallèles. Démontrer que si $P_1 \in D_1$ et $P_2 \in D_2$, alors

$$d(D_1, D_2) = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u_1} \times \vec{u_2})\right|}{\left\|\vec{u_1} \times \vec{u_2}\right\|}.$$

8

Problèmes de synthèse

1. Décrire et représenter graphiquement les lieux géométriques suivants.

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = -1\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -1\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -1 \text{ et } y = 3\}$

d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -1 \text{ et } y = 3\}$

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$

f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \text{ et } z = 0\}$

2. **VOLUME D'UNE PYRAMIDE**

Soit les droites suivantes.

$D_1 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 1 = 0 \text{ et } z = 0\}$

$D_2 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z - 1 = 0 \text{ et } y = 0\}$

$D_3 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z - 1 = 0 \text{ et } x = 0\}$

a) Déterminer les points A, B et C qui sont respectivement les points d'intersection des droites D_1 et D_2, des droites D_1 et D_3, et des droites D_2 et D_3.

b) Représenter graphiquement D_1, D_2 et D_3.

c) Déterminer une équation symétrique de la droite D qui passe par O(0, 0, 0) et qui est perpendiculaire aux trois droites précédentes.

d) Calculer l'aire du triangle ABC.

e) Calculer le volume de la pyramide OABC.

3. **HAUTEUR D'UNE PYRAMIDE**

Soit les droites suivantes.

$D_1 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - 14 = 0 \text{ et } z = 0\}$

$D_2 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 8x + 9y - 22 = 0 \text{ et } z = 0\}$

$D_3 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 8 = 0 \text{ et } z = 0\}$

$D_4 : \frac{x+7}{-3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-9}{3}$

$D_5 : \frac{x+4}{-3} = \frac{y-6}{4} = \frac{-z}{3}$

$D_6 : \frac{x-11}{6} = \frac{y+6}{-4} = \frac{z+3}{-3}$

a) Déterminer le point d'intersection

i) A des droites D_1, D_3 et D_4 ;

ii) B des droites D_1, D_2 et D_5 ;

iii) C des droites D_2, D_3 et D_6 ;

iv) E des droites D_4, D_5 et D_6.

b) Calculer le volume de la pyramide dont les sommets sont A, B, C et E.

c) Calculer la hauteur de la pyramide issue de E.

4. Soit $D_1 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \text{ et } z = 0\}$;

$D_2 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z \text{ et } x = 0\}$.

a) Déterminer une équation vectorielle de la droite D_3 qui passe par P(-4, 3, 10) et qui est perpendiculaire aux droites D_1 et D_2.

b) Déterminer les points A, B et C qui sont respectivement les points d'intersection de D_3 avec les plans XOY, XOZ et YOZ.

5. Soit la droite D passant par $P(x_1, y_1, z_1)$ et ayant $\vec{u} = (a, b, c)$ comme vecteur directeur. Déterminer les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ et les plans XOY, XOZ, YOZ qui sont perpendiculaires ou parallèles à D lorsque

a) $a = 0, b \neq 0$ et $c \neq 0$; **b)** $a \neq 0, b \neq 0$ et $c = 0$;

c) $a = 0, b = 0$ et $c \neq 0$; **d)** $a \neq 0, b = 0$ et $c = 0$;

e) $a \neq 0, b \neq 0$ et $c \neq 0$.

6. Soit les droites suivantes.

$D_1 : \frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-2}{2}$

$D_2 : x - 2 = \frac{y+6}{3} = \frac{z+3}{3}$

a) Déterminer des équations symétriques de la droite D_3 qui est perpendiculaire à D_1 et à D_2, et qui passe par A(2, 1, -1).

b) Déterminer des équations symétriques de la droite D_4 qui est perpendiculaire à D_1 et à D_2, et qui passe par l'origine.

c) Déterminer des équations symétriques de la droite D_5 qui est perpendiculaire à D_1 et à D_2, et qui passe par l'intersection des droites D_1 et D_2.

d) Déterminer la position relative des droites D_3, D_4 et D_5.

7. a) Soit la droite $D : x - 1 = \frac{3-y}{2} = z - 5$.

Déterminer des équations paramétriques de la droite D_1, qui passe par le point P(2, 3, -4), qui est concourante à D, et qui est perpendiculaire au vecteur $\vec{v} = (-8, 9, 4)$.

b) Soit les droites

$D_2 : (x, y, z) = (-2, 7, 9) + t(-1, 3, 2)$, où $t \in \mathbb{R}$;

$D_3 : 3x - 9 = y - 4 = \frac{2z + 24}{-5}$.

Déterminer une équation vectorielle de la droite D_4 qui est perpendiculaire aux droites D_2 et D_3, et qui passe par l'intersection des droites D_2 et D_3.

c) Soit la droite $D_5 : (x, y, z) = (1, 1, 3) + s(1, -2, 1)$, où $s \in \mathbb{R}$. Déterminer une équation vectorielle sous la forme $(x, y, z) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} + t\vec{u}$, où $t \in \mathbb{R}$, de la droite D_6 qui passe par P(6, -1, 12) et qui rencontre perpendiculairement la droite D_5.

8. **TRIANGLE**

Soit les droites suivantes.

$D_1 : \frac{x-13}{8} = y - 4 = \frac{z+2}{-3}$

$D_2 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - 7z - 18 = 0 \text{ et } y = 3\}$

$D_3 : \begin{cases} x = 57 + 15t \\ y = 6 + t \\ z = 12 + 2t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

Soit A, B, C, les points d'intersection respectifs des droites D_1 et D_2, des droites D_1 et D_3, et des droites D_2 et D_3.

a) Déterminer A, B et C.

b) Calculer les angles du triangle ABC.

c) Déterminer la nature de ce triangle.

d) Calculer l'aire de ce triangle.

e) Calculer les trois hauteurs de ce triangle.

f) Déterminer une équation vectorielle de la droite D_a qui passe par A et qui rencontre perpendiculairement la droite passant par B et C.

9. Soit la droite

$D : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.

Déterminer les coordonnées du point P, situé sur D, le plus près de l'origine.

a) en utilisant les notions étudiées dans ce chapitre ;

b) en utilisant le calcul différentiel.

10. APPLICATION | VITESSE

Dans ce problème, les distances sont en mètres et le temps est en minutes. Deux drones volent chacun en ligne droite. À 8 h exactement, le premier drone est au point P(3, 2, 7) et son vecteur vitesse est $\vec{v}_1 = (3, 4, 10)$. Au même moment, le second drone est au point Q(-5, 10, -23) et, après deux minutes, il est au point R(3, 16, 39).



a) Déterminer une équation vectorielle de D_1, la trajectoire du premier drone.

b) Déterminer la vitesse v_1 du premier drone.

c) Déterminer une équation vectorielle de D_2, la trajectoire du second drone.

d) Déterminer la vitesse v_2 du second drone.

e) Déterminer l'angle θ entre les trajectoires des deux drones.

f) Si les deux drones se rencontrent en un point, déterminer ce point de rencontre P_0 et l'heure de la rencontre.

11. APPLICATION | VITESSE ET DISTANCE

Dans ce problème, les distances sont en mètres et le temps est en secondes. Hugo, au point d'observation O(0, 0, 0), fait décoller son avion téléguidé A selon une trajectoire déterminée par
$A: (x, y, z) = (2, 5, 0) + t(7, 4, 3)$, où $t \in [0\text{ s}, 60\text{ s}]$.
Après huit secondes, il aperçoit un autre avion téléguidé B, dont la trajectoire est donnée par
$B: (x, y, z) = (190, 125, 100) + k(-6, -5, -4)$,
où $k \in [0\text{ s}, 25\text{ s}]$.

a) Déterminer la distance qui sépare

i) Hugo de son avion au départ ;

ii) Hugo de son avion après 8 secondes ;

iii) les deux avions après 8 secondes ;

iv) les deux avions après 12 secondes ;

b) Déterminer le vecteur vitesse et la vitesse de chaque avion.

c) Déterminer la distance entre les deux trajectoires.

d) Déterminer si les avions se rencontrent.

e) Déterminer la distance minimale entre les deux avions.

12. APPLICATION | VITESSE ET DISTANCE

Une montgolfière, partant du point M(0 ; 0 ; 0,08), se déplace à une hauteur constante à la vitesse de 2 km/h, dans la direction du vecteur $\vec{u}_m = (4, 3, 0)$.



Un dirigeable situé au point $E(x_1, y_1, 0)$ part livrer un message à un passager de la montgolfière. Le vecteur vitesse $\vec{v}_d$ du dirigeable est $\vec{v}_d = (-11 ; -6 ; 0{,}24)$.

Considérant que les distances sont en kilomètres, et le temps, en heures, déterminer

a) le vecteur position $\vec{p}_m$ de la montgolfière en fonction du temps t ;

b) la vitesse du dirigeable ;

c) le temps nécessaire pour que le dirigeable atteigne la montgolfière ;

d) les coordonnées du point de rencontre R du dirigeable et de la montgolfière ;

e) les coordonnées du point de départ $E(x_1, y_1, 0)$ du dirigeable ;

f) les distances respectives parcourues par la montgolfière et le dirigeable entre leur point de départ et leur point de rencontre.

13. TRIANGLE ET PYRAMIDE

Soit le point P(-2, 5, 4).

a) Déterminer les points A, B et C qui sont respectivement les projections orthogonales de P sur l'axe des x, l'axe des y et l'axe des z.

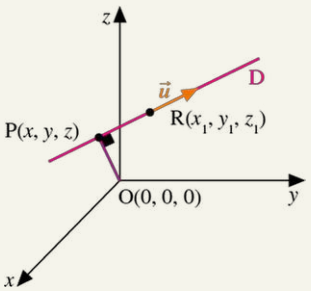
b) Calculer l'aire du triangle ABC.

c) Calculer l'aire du triangle $M_1M_2M_3$, où M_1, M_2 et M_3 sont respectivement les points milieux des segments de droite AB, AC et BC.

d) Déterminer la hauteur issue de P de la pyramide ABCP.

14. Soit α, β et γ, des angles directeurs d'une droite D. Si $\beta = \gamma = 2\alpha$, déterminer α, où $\alpha \in [0°, 90°]$.

15. Soit la droite
$D: (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + r(a, b, c)$, où $r \in \mathbb{R}$, représentée dans le graphique suivant.

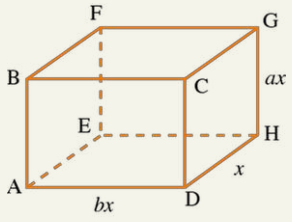


a) Déterminer r tel que $\overrightarrow{OP} \perp \vec{u}$, où $P \in D$.

b) Déterminer r si D est définie par
$D: (x, y, z) = (1, -2, 3) + r(-1, 5, -3)$, où $r \in \mathbb{R}$.

c) Sur la droite D définie en b), déterminer le point P le plus près de l'origine.

16. Soit le parallélépipède droit ci-dessous dont les arêtes mesurent x, ax et bx unités.



Soit les quatre droites suivantes.

D_1 passant par A et G.

D_2 passant par A et F.

D_3 passant par C et H.

D_4 passant par B et D.

a) Calculer :

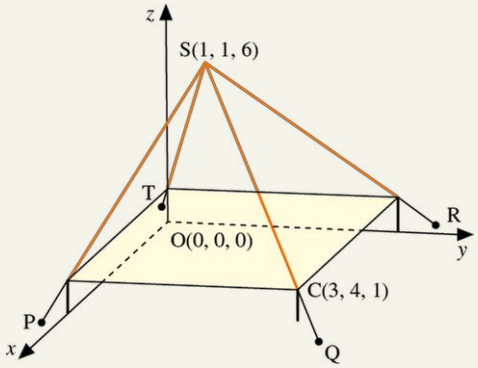
i) $d(D_2, D_3)$ ii) $d(D_1, D_3)$

iii) $d(D_1, D_4)$ iv) $d(D_3, D_4)$

b) Calculer les distances demandées en a) si
$\|\overrightarrow{AE}\| = 9$ m, $\|\overrightarrow{EF}\| = 3$ m et $\|\overrightarrow{AD}\| = 12$ m.

17. AIRE D'UN QUADRILATÈRE

Une source lumineuse S est installée au-dessus d'une table opaque tel qu'illustré ci-dessous.



Déterminer l'aire de la région PQRT non éclairée dans le plan XOY, les unités de mesure étant en mètres.

18. Soit la droite D_1 passant par le point P(2, 3, 1) et ayant $\vec{u} = (1, 2, -3)$ comme vecteur directeur. Soit la droite D_2 passant par le point Q(4, 2, 0) et ayant $\vec{v} = (3, -1, 1)$ comme vecteur directeur.

a) En utilisant respectivement s et t comme paramètres, donner une équation de D_1 et de D_2 sous forme paramétrique.

b) Déterminer $d(D_1, D_2)$.

c) Déterminer le point $Q_2(x, y, z) \in D_2$ qui est le plus près de P(2, 3, 1).

d) i) Déterminer les points $A \in D_1$ et $B \in D_2$ tels que $d(A, B)$ est minimale.

ii) Calculer $d(A, B)$.

iii) À quoi correspond $d(A, B)$?

e) i) Soit R, un point de la droite D_2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w}$, où $\vec{w} = \overrightarrow{RP}$.

ii) Exprimer $\|\vec{u} \times \vec{w}\|$ en fonction de t et interpréter le résultat.

iii) Déterminer la valeur minimale M de $\|\vec{u} \times \vec{w}\|$ et interpréter le résultat.

19. AIRE MINIMALE D'UN TRIANGLE

Soit les droites suivantes.

$$D_1 : x - 1 = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 2}{3}$$

$D_2: (x, y, z) = (7, 3, 2) + t(1, 2, 3)$, où $t \in \mathbb{R}$

D_3 qui passe par P(3, 2, 4) et Q(2, 0, 1).

Calculer l'aire minimale du triangle ABC, où $A \in D_1$, $B \in D_2$ et $C \in D_3$.

20. SPHÈRE

Soit une sphère S_1 de centre $C_1(1, -6, 1)$ et une sphère S_2 de centre $C_2(8, -5, 7)$. Déterminer un point $P(a, b, 2)$ de la sphère S_1 et un point $Q(2a, 2b, 4)$ de la sphère S_2, où a et b sont des entiers naturels tels que la droite, passant par les points P et Q, est tangente aux sphères S_1 et S_2 en P et en Q.

21. DISTANCE ENTRE DEUX SPHÈRES

Soit les sphères S_1 de centre (1, 2, 5) et de rayon 12, et S_2 de centre (6, -1, 8) et de rayon 3. Déterminer la distance maximale et la distance minimale séparant ces deux sphères.

9 Le plan dans l'espace cartésien



Perspective historique	430
Exercices préliminaires	431
9.1 Équations du plan dans l'espace cartésien	431
9.2 Position relative de deux plans et position relative d'une droite et d'un plan dans l'espace cartésien	445
9.3 Distances relatives aux plans dans l'espace cartésien	456
Révision des concepts	466
Exercices récapitulatifs	467
Problèmes de synthèse	470

Dans ce chapitre, nous étudierons les plans dans l'espace cartésien et nous donnerons différents types d'équations pouvant définir ces plans. Ces équations seront obtenues en utilisant certaines propriétés des vecteurs. Nous verrons également les positions relatives possibles de plans dans l'espace et les positions relatives possibles d'une droite et d'un plan dans l'espace. De plus, nous calculerons la distance entre un point et un plan en utilisant la notion de projection.

En particulier, l'étudiant pourra résoudre le problème suivant (qui se trouve au n° 7 des exercices récapitulatifs, à la page 468).

Quelque temps après son décollage, un avion suit une trajectoire donnée par $(x, y, z) = (11\,;\, 22\,;\, 2{,}6) + t(5\,;\, 6\,;\, 0{,}4)$, où $t \in [0{,}5 \text{ min}\,;\, 12 \text{ min}]$. L'avion croise un nuage limité par les plans π_1 et π_2, où

$\pi_1 : 9x + 10y - 6z = 406$ et

$\pi_2 : 10x + 9y + 5z = 1010$,

où $z \in [2 \text{ km}, 6 \text{ km}]$, x et y sont en kilomètres.

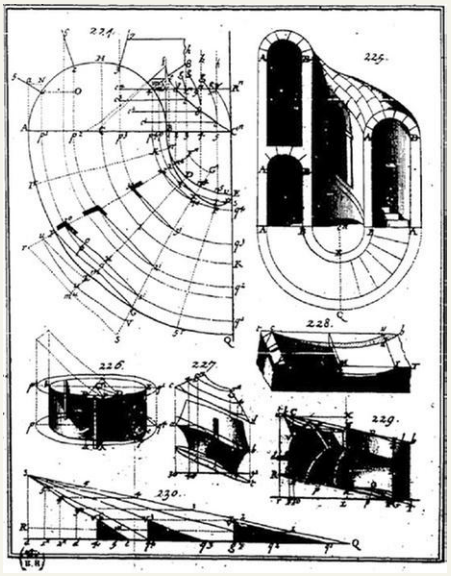
a) Déterminer le temps t_N que prend l'avion pour traverser ce nuage.

b) Déterminer la vitesse moyenne v_A de l'avion, en km/h, pendant qu'il traverse ce nuage.

Des allusions de Descartes à une véritable géométrie analytique dans l'espace

Lorsque René Descartes (1596-1650) publie l'ouvrage intitulé *Géométrie* en 1637 et lance ce qui deviendra la géométrie analytique, son objectif mathématique est clair : utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes géométriques. C'est d'ailleurs pourquoi la géométrie analytique a d'abord été appelée « algèbre appliquée à la géométrie ». Dans son livre, Descartes fait allusion à la géométrie à trois dimensions, mais sans plus. Plusieurs décennies s'écoulent avant qu'aboutissent des tentatives sérieuses d'utiliser les idées de Descartes dans l'espace. En 1705, Antoine Parent (1666-1716) publie une première étude d'une surface dans l'espace, en l'occurrence la sphère. Il n'y a pas encore les trois axes x, y et z que nous connaissons. Pour déterminer les coordonnées d'un point, un plan de référence, notre plan π_{XOY}, est donné et on détermine la hauteur d'un point par rapport à ce plan en abaissant une perpendiculaire sur celui-ci. Le pied de cette perpendiculaire fournit les deux autres coordonnées. Les coordonnées sont positives.

Dix ans plus tard, Jean Bernoulli (1667-1748) propose d'obtenir les coordonnées d'un point en abaissant des perpendiculaires sur trois plans orthogonaux, nos plans π_{XOY}, π_{XOZ} et π_{YOZ}. La méthode d'Antoine Parent restera cependant la plus utilisée jusqu'au troisième tiers du XVIII^e siècle. C'est ce que fait le grand mathématicien Leonhard Euler (1707-1783) dans un mémoire de 1728 considéré comme le véritable coup d'envoi de l'étude des surfaces dans l'espace à l'aide de la géométrie analytique. Il n'y parle toutefois pas du plan ni de la droite.



La géométrie dans l'espace a été intimement liée aux techniques de coupe de pierre.

L'étude du plan débute avec le mémoire d'**Alexis Clairaut** (1713-1765) présenté à l'Académie des sciences de Paris en 1729. Pour la première fois, une équation du plan est donnée explicitement, sous la forme $\left(\frac{ax}{b}\right) + \left(\frac{ay}{c}\right) + z = a$. Clairaut considère les valeurs positives et négatives des coordonnées. Pour la première fois aussi, la formule de la distance entre deux points dans le plan et dans l'espace est donnée explicitement. Puis Jacob Hermann (1678-1733), probablement sans connaître les travaux de Clairaut, donne l'équation « cartésienne » du plan, soit $ax + by + cz - d = 0$, et une formule pour déterminer l'angle formé par un tel plan avec le plan des coordonnées x et y. Tous ces travaux seront systématisés par Euler en 1748 alors qu'il réoriente l'objectif de l'algèbre appliquée à la géométrie en la considérant plutôt comme un outil pour diriger l'intuition dans le cadre d'études algébriques. En effet, au cours du XVIII^e siècle, les développements en algèbre sont tels que l'étude de surfaces dans l'espace peut maintenant profiter pleinement de l'algèbre pour surmonter la difficulté de la représentation de situations géométriques dans l'espace. C'est d'ailleurs ce que font Joseph Louis Lagrange (1736-1813) et Gaspard Monge (1746-1818) dans leurs travaux sur le sujet, parmi lesquels l'article de Lagrange dont nous avons parlé dans la perspective historique du chapitre 8.

Lagrange le dit explicitement dans l'introduction de son célèbre *Mécanique analytique* (1788) lorsqu'il annonce fièrement aux lecteurs qu'ils ne trouveront aucune figure dans ce livre. Pour sa part, Monge systématise la présentation de la géométrie analytique dans l'espace, notamment en commençant par l'étude du plan. Plusieurs problèmes du présent chapitre y sont abordés. Monge rendra son travail accessible aux élèves de l'École polytechnique de Paris, dont il a été un des fondateurs, en publiant ses *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie* entre 1795 et 1801. Notons que le titre se réfère encore à l'ancienne appellation. Pourtant, comme nous l'avons dit dans le chapitre 7, déjà le nom de *géométrie analytique* devient populaire.

S'inspirant fortement de Monge et de Lagrange en ce qui a trait à la géométrie analytique dans l'espace, **Sylvestre François Lacroix** (1765-1843) présente, sous une forme hautement pédagogique, dans ses manuels de la première décennie du XIX^e siècle, les bases de la géométrie analytique dans l'espace en commençant justement avec l'étude de la droite et du plan.

Comme nous l'avons dit dans les chapitres précédents, toute cette partie de la géométrie analytique sera réécrite en langage vectoriel au début du XX^e siècle.

Exercices préliminaires

1. a) Déterminer l'équation de la sphère de centre C(-7, 5, 8) et de rayon 4.

b) Transformer les équations suivantes sous la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ et identifier le lieu géométrique.

i) $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 6y - 8z = 0$

ii) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 8z + 17 = 0$

2. Représenter les droites suivantes dans l'espace cartésien.

D_1 : $(x, y, z) = (2, 0, 0) + r(2, 0, -3)$, où $r \in \mathbb{R}$

D_2 : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4s \\ z = 3 - 3s \end{cases}$, où $s \in \mathbb{R}$

D_3 : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 4 = 0 \text{ et } z = 0\}$

3. Soit P(1, -2, 5), Q(-1, 3, 0) et R(2, -4, -3).

a) Calculer $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$.

b) Calculer $\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}$.

c) Déterminer un vecteur unitaire $\vec{u}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{PR}$ et à $\overrightarrow{PQ}$.

d) Déterminer $\angle PQR$ du triangle PQR.

e) Calculer l'aire A du triangle PQR.

4. Soit $\vec{u} = (4, -1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 1, 3)$ et $\vec{w} = (5, 0, -6)$.

a) Déterminer $\vec{u}_{\vec{v}}$.

b) Déterminer $\left\| \vec{u}_{\vec{v}} \right\|$.

c) Calculer $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

5. Compléter (théorème 7.3).
Soit $\vec{n}$, un vecteur normal à une droite D, et P, un point du plan cartésien. Si R est un point quelconque de la droite D, alors la distance entre le point P et la droite D est donnée par $d(P, D) =$ ____

9.1 Équations du plan dans l'espace cartésien

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra déterminer différentes équations pour un même plan dans l'espace cartésien.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de trouver deux vecteurs directeurs d'un plan ;
- de déterminer une équation vectorielle (É.V.) d'un plan ;
- de déterminer des équations paramétriques (É.P.) d'un plan ;
- de trouver un vecteur normal à un plan ;
- de déterminer une équation cartésienne (É.C.) d'un plan ;
- de déterminer une équation normale (É.N.) d'un plan ;
- de déterminer une équation réduite (É.R.) d'un plan ;
- de déterminer si un point appartient à un plan.

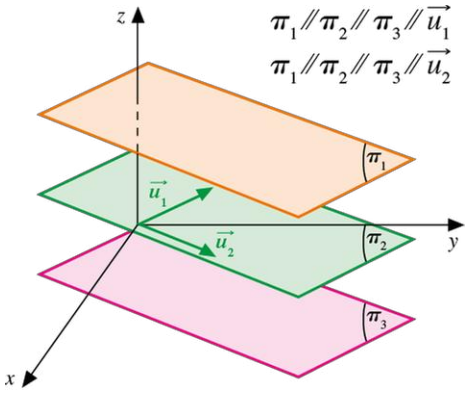
Soit $P(x_1, y_1, z_1)$, un point du plan π, $\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, des vecteurs directeurs de π, et $\vec{n} = (a, b, c)$, un vecteur normal à π.

	Équations du plan π
É.V.	$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k_1(a_1, b_1, c_1) + k_2(a_2, b_2, c_2)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$
É.P.	$\begin{cases} x = x_1 + k_1a_1 + k_2a_2 \\ y = y_1 + k_1b_1 + k_2b_2, \text{ où } k_1, k_2 \in \mathbb{R} \\ z = z_1 + k_1c_1 + k_2c_2 \end{cases}$
É.C.	$ax + by + cz - d = 0$, où $d = ax_1 + by_1 + cz_1$

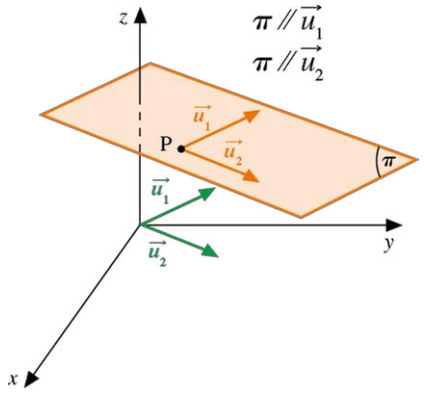
Dans cette section, nous utiliserons certaines propriétés des vecteurs pour déterminer différents types d'équations d'un plan dans l'espace cartésien.

Équation vectorielle d'un plan dans l'espace

Il existe dans l'espace une infinité de plans parallèles à deux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ non nuls et non parallèles.



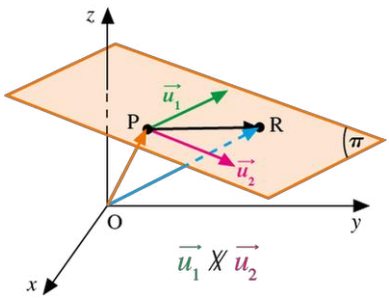
Il existe un seul plan π qui passe par le point $P(x_1, y_1, z_1)$ et qui est parallèle à deux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ non nuls et non parallèles.



DÉFINITION 9.1

Tout vecteur non nul $\vec{u}$ parallèle à un plan π est appelé **vecteur directeur** de ce plan.

En utilisant certaines propriétés des vecteurs, déterminons une équation vectorielle du plan π passant par le point $P(x_1, y_1, z_1)$ donné et ayant $\vec{u_1} = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{u_2} = (a_2, b_2, c_2)$ comme vecteurs directeurs, où $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ ne sont pas parallèles.



Soit $R(x, y, z)$, un point quelconque du plan π.
Par la loi de Chasles, nous avons

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + k_1\vec{u_1} + k_2\vec{u_2}, \text{ où } k_1 \text{ et } k_2 \in \mathbb{R}$$

(car $\overrightarrow{PR}$, $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont coplanaires et $\vec{u_1} \not/\!/ \vec{u_2}$)

$$(x - 0, y - 0, z - 0) = (x_1 - 0, y_1 - 0, z_1 - 0) + k_1\vec{u_1} + k_1\vec{u_2}$$

donc, $$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k_1(a_1, b_1, c_1) + k_2(a_2, b_2, c_2)$$

DÉFINITION 9.2

Une **équation vectorielle** du plan π passant par $P(x_1, y_1, z_1)$ et ayant $\vec{u_1} = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{u_2} = (a_2, b_2, c_2)$, où $\vec{u_1} \not/\!/ \vec{u_2}$, comme vecteurs directeurs est donnée par

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k_1(a_1, b_1, c_1) + k_2(a_2, b_2, c_2), \text{ où } k_1 \text{ et } k_2 \in \mathbb{R}.$$

Dans l'équation précédente, (x, y, z) est le vecteur $\overrightarrow{OR}$, où $R(x, y, z)$ est un point quelconque du plan π qui dépend de la valeur des paramètres k_1 et k_2.

Nous désignons fréquemment le plan π de la façon suivante :

$\pi : (x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k_1(a_1, b_1, c_1) + k_2(a_2, b_2, c_2)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

L'équation précédente peut également s'écrire sous la forme

$\pi : (x, y, z) = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} + k_1(a_1, b_1, c_1) + k_2(a_2, b_2, c_2)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

Exemple 1

a) Déterminons une équation vectorielle du plan passant par le point P(4, -5, 1) et ayant $\vec{u_1} = (-2, 3, 5)$ et $\vec{u_2} = (7, -4, 8)$ comme vecteurs directeurs.

$\pi : (x, y, z) = (4, -5, 1) + k_1(-2, 3, 5) + k_2(7, -4, 8)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$,

que nous pouvons également écrire comme suit :

$\pi : (x, y, z) = 4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k} + k_1(-2, 3, 5) + k_2(7, -4, 8)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

b) Déterminons les coordonnées d'un point R de π différent de P(4, -5, 1).

En attribuant différentes valeurs à k_1 et à k_2, nous déterminons des vecteurs $\overrightarrow{OR}$ dont l'extrémité R est un point situé dans le plan π. Les composantes de ces vecteurs $\overrightarrow{OR}$ sont également les coordonnées des points R. Par exemple, en posant $k_1 = 2$ et $k_2 = -3$ dans l'équation de π, nous obtenons

$$(x, y, z) = (4, -5, 1) + 2(-2, 3, 5) + (-3)(7, -4, 8) = (-21, 13, -13)$$

Ainsi, $\overrightarrow{OR} = (-21, 13, -13)$ est un vecteur dont l'extrémité R(-21, 13, -13) est située dans le plan π.

D'où R(-21, 13, -13) est un autre point de π.

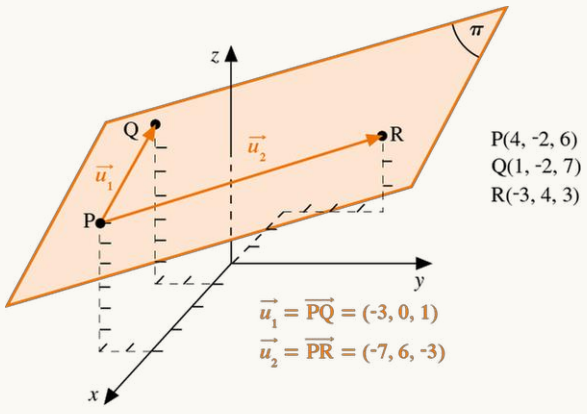
Puisqu'il existe un seul plan passant par trois points non colinéaires, nous pouvons déterminer une équation vectorielle de ce plan.

Exemple 2 Déterminons une équation vectorielle du plan π passant par les points non colinéaires P(4, -2, 6), Q(1, -2, 7) et R(-3, 4, 3).

Il suffit de trouver, par exemple, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ pour obtenir deux vecteurs directeurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ du plan π.

Ainsi, $\vec{u_1} = \overrightarrow{PQ} = (-3, 0, 1)$ et $\vec{u_2} = \overrightarrow{PR} = (-7, 6, -3)$ $\quad (\vec{u_1} \neq t\vec{u_2}$, alors $\vec{u_1} \not\parallel \vec{u_2})$

d'où $\pi : (x, y, z) = (1, -2, 7) + k_1(-3, 0, 1) + k_2(-7, 6, -3)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$



En fait, il existe une infinité d'équations vectorielles de ce même plan selon le choix du point et des vecteurs directeurs du plan.

Par exemple,

$\pi: (x, y, z) = (4, -2, 6) + s_1(-3, 0, 1) + s_2(-7, 6, -3)$, où s_1 et $s_2 \in \mathbb{R}$;

$\pi: (x, y, z) = (-3, 4, 3) + t_1(-4, 6, -4) + t_2(7, -6, 3)$, où t_1 et $t_2 \in \mathbb{R}$,

où $\vec{v_1} = \overrightarrow{QR}$ et $\vec{v_2} = \overrightarrow{RP}$ sont des vecteurs directeurs de π.

$\overrightarrow{QR} = (-4, 6, -4)$
$\overrightarrow{RP} = (7, -6, 3)$

Exemple 3

a) i) Déterminons une équation vectorielle du plan π_{XOY}.

Soit $\vec{u_1} = \vec{i} = (1, 0, 0)$ et $\vec{u_2} = \vec{j} = (0, 1, 0)$, deux vecteurs directeurs du plan π_{XOY}, et O(0, 0, 0), un point de ce plan.

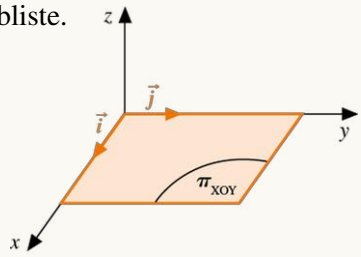
Ainsi, $\pi_{XOY}: (x, y, z) = (0, 0, 0) + k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\pi_{XOY}: (x, y, z) = k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0), \text{ où } k_1 \text{ et } k_2 \in \mathbb{R}$$

Forme ensembliste d'un plan

ii) Exprimons le plan π_{XOY} sous la forme ensembliste.

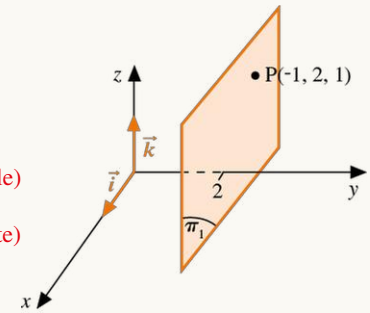
$$\pi_{XOY}: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$$



b) Déterminons une équation vectorielle et une forme ensembliste du plan π_1 passant par le point P(-1, 2, 1) et parallèle aux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{k}$.

$\pi_1: (x, y, z) = (-1, 2, 1) + t_1\vec{i} + t_2\vec{k}$,
où t_1 et $t_2 \in \mathbb{R}$ (équation vectorielle)

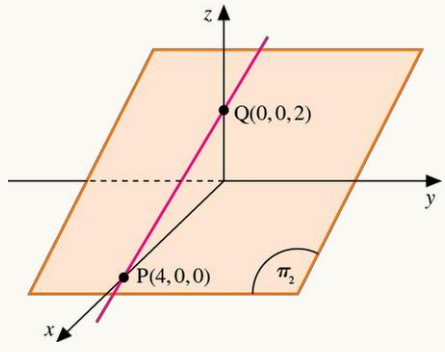
$\pi_1: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2\}$ (forme ensembliste)



c) Représentons graphiquement le plan π_2 suivant.

Forme ensembliste

$$\pi_2: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2z = 4\}$$



Équations paramétriques d'un plan dans l'espace

À partir d'une équation vectorielle du plan π,

$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k_1(a_1, b_1, c_1) + k_2(a_2, b_2, c_2)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + (k_1a_1, k_1b_1, k_1c_1) + (k_2a_2, k_2b_2, k_2c_2)$ (définition de la multiplication d'un vecteur par un scalaire)

$(x, y, z) = (x_1 + k_1a_1 + k_2a_2, y_1 + k_1b_1 + k_2b_2, z_1 + k_1c_1 + k_2c_2)$ (définition de l'addition de vecteurs)

Par définition de l'égalité de vecteurs, nous obtenons

$$x = x_1 + k_1a_1 + k_2a_2, \quad y = y_1 + k_1b_1 + k_2b_2 \quad \text{et} \quad z = z_1 + k_1c_1 + k_2c_2$$

DÉFINITION 9.3

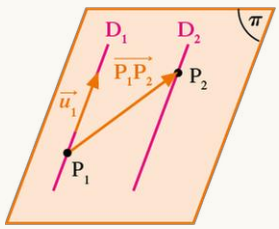
Des **équations paramétriques** du plan π passant par $P(x_1, y_1, z_1)$ et ayant $\vec{u_1} = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{u_2} = (a_2, b_2, c_2)$, où $\vec{u_1} \not\parallel \vec{u_2}$, comme vecteurs directeurs sont données par

$$\begin{cases} x = x_1 + k_1a_1 + k_2a_2 \\ y = y_1 + k_1b_1 + k_2b_2 \\ z = z_1 + k_1c_1 + k_2c_2 \end{cases}, \text{ où } k_1 \text{ et } k_2 \in \mathbb{R},$$

k_1 et k_2 étant les paramètres des équations paramétriques.

Exemple 1 Soit $D_1 : (x, y, z) = (2, 7, -1) + k(3, -4, 5)$, où $k \in \mathbb{R}$, et $D_2 : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z-3}{5}$, deux droites parallèles distinctes, ainsi que le plan π contenant les droites D_1 et D_2.

a) Déterminons des équations paramétriques de π.
Soit $\vec{u_1} = (3, -4, 5)$, un vecteur directeur de π.
En choisissant le point $P_1(2, 7, -1) \in D_1$ et le point $P_2(1, 2, 3) \in D_2$, nous obtenons $\vec{u_2} = \overrightarrow{P_1P_2} = (-1, -5, 4)$, un deuxième vecteur directeur de π.



D'où $\pi : \begin{cases} x = 2 + 3k_1 - k_2 \\ y = 7 - 4k_1 - 5k_2 \\ z = -1 + 5k_1 + 4k_2 \end{cases}$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

b) Vérifions si le point $S(5, -2, 0)$ appartient à π.
Pour faire cette vérification, il suffit de déterminer s'il existe un k_1 et un $k_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} 5 = 2 + 3k_1 - k_2 \\ -2 = 7 - 4k_1 - 5k_2 \\ 0 = -1 + 5k_1 + 4k_2 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 3k_1 - k_2 = 3 \\ 4k_1 + 5k_2 = 9 \\ 5k_1 + 4k_2 = 1 \end{cases}$$

Méthode de Gauss

Ainsi, $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 9 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 19 & 15 & \\ 0 & 17 & -12 & \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} 3L_2 - 4L_1 \to L_2 \\ 3L_3 - 5L_1 \to L_3 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 19 & 15 & \\ 0 & 0 & -483 & \end{array}\right]$ $19L_3 - 17L_2 \to L_3$

Puisque ce système n'a pas de solution, $S(5, -2, 0) \notin \pi$.

c) Vérifions si le point $T(13, 24, -11)$ appartient à π.

Pour faire cette vérification, il suffit de déterminer s'il existe un k_1 et un $k_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} 13 = 2 + 3k_1 - k_2 \\ 24 = 7 - 4k_1 - 5k_2 \\ -11 = -1 + 5k_1 + 4k_2 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 3k_1 - k_2 = 11 \\ 4k_1 + 5k_2 = -17 \\ 5k_1 + 4k_2 = -10 \end{cases}$$

Méthode de Gauss

Ainsi, $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 11 & \\ 4 & 5 & -17 & \\ 5 & 4 & -10 & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 11 & \\ 0 & 19 & -95 & \\ 0 & 17 & -85 & \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} 3L_2 - 4L_1 \to L_2 \\ 3L_3 - 5L_1 \to L_3 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 11 & \\ 0 & 19 & -95 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right]$ $19L_3 - 17L_2 \to L_3$

De L_2, $k_2 = \frac{-95}{19} = -5$ et, de L_1, $3k_1 - (-5) = 11$, donc $k_1 = 2$.

Puisque ce système a une solution, $T(13, 24, -11) \in \pi$.

Exercices de compréhension 9.1

1. Soit le plan π passant par les points $P(0, 4, -9)$, $Q(2, 4, -1)$ et $R(5, 7, -9)$.

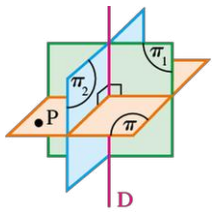
a) Déterminer une équation vectorielle de π.

b) Déterminer une équation paramétrique de π.

c) Vérifier si $O(0, 0, 0)$ est un point de π.

Équation cartésienne d'un plan dans l'espace

Il y a environ 250 ans...

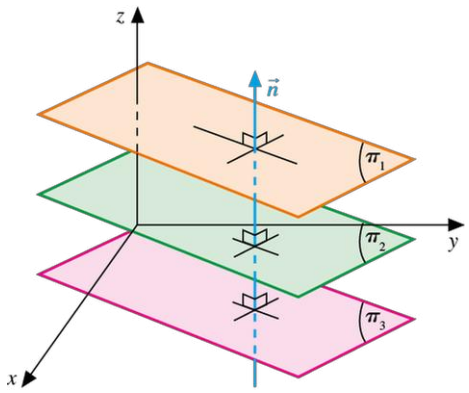


Dans l'*Encyclopédie* publiée au milieu du XVIII^e siècle, sous l'article « géométrie », le mathématicien français Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) mentionne que le calcul algébrique ne devrait pas être appliqué à la géométrie élémentaire, la droite et le plan faisant partie de cette dernière. Néanmoins, dans un mémoire achevé en 1771 mais publié en 1785, Gaspard Monge (1746-1818) pose et résout le problème qui consiste à déterminer une équation d'un plan π contenant un point P donné et perpendiculaire à la droite d'intersection de deux plans π_1 et π_2 donnés. Même si les calculs nécessaires pour résoudre ce problème sont assez simples, leur réécriture sous forme de vecteurs par Gibbs à la fin du XIX^e siècle les simplifiera encore davantage.

Il existe dans l'espace une infinité de plans parallèles qui sont perpendiculaires à un vecteur non nul $\vec{n}$.

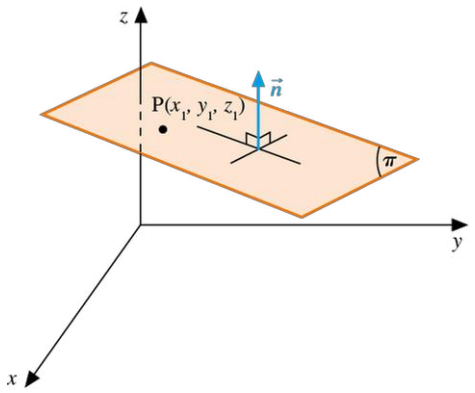
$$\vec{n} \perp \pi_1 ; \vec{n} \perp \pi_2 ; \vec{n} \perp \pi_3$$

$$\pi_1 /\!/ \pi_2 /\!/ \pi_3$$



Il existe un seul plan qui passe par le point $P(x_1, y_1, z_1)$ et qui est perpendiculaire à un vecteur non nul $\vec{n}$.

$$\vec{n} \perp \pi$$

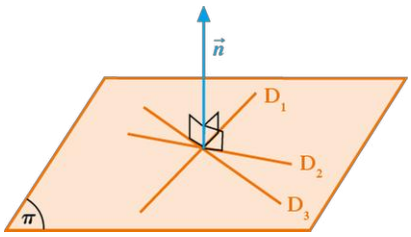


DÉFINITION 9.4

Tout vecteur non nul $\vec{n}$ perpendiculaire à toutes les droites d'un plan π est appelé **vecteur normal** à ce plan.

Vecteur normal

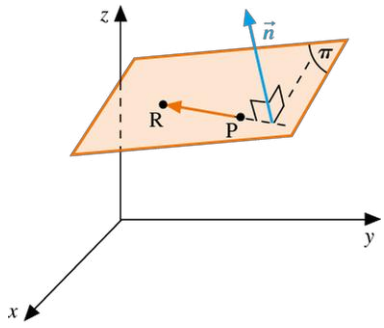
Le vecteur $\vec{n}$ ci-contre est un vecteur normal au plan π.



En utilisant certaines propriétés des vecteurs, déterminons une équation cartésienne du plan π passant par le point $P(x_1, y_1, z_1)$ donné et ayant $\vec{n} = (a, b, c)$ comme vecteur normal.

Soit $R(x, y, z)$, un point quelconque de π.

Puisque $\vec{n} \perp \overrightarrow{PR}$, nous avons



$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$$

$$(a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$ax - ax_1 + by - by_1 + cz - cz_1 = 0$$

$$ax + by + cz - (ax_1 + by_1 + cz_1) = 0$$

$$ax + by + cz - d = 0, \quad \text{où } d = ax_1 + by_1 + cz_1$$

DÉFINITION 9.5

Une **équation cartésienne** du plan π passant par le point $P(x_1, y_1, z_1)$ et ayant $\vec{n} = (a, b, c)$ comme vecteur normal est donnée par

$$ax + by + cz - d = 0, \text{ où } d = ax_1 + by_1 + cz_1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad d = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}.$$

Exemple 1

a) Soit le plan π passant par le point P(5, -3, 4) et ayant $\vec{n} = (6, 2, -7)$ comme vecteur normal.

i) Déterminons une équation cartésienne de π.

$$6x + 2y + (-7)z - (6(5) + 2(-3) + (-7)(4)) = 0 \qquad \text{(définition 9.5)}$$

d'où $\pi: 6x + 2y - 7z + 4 = 0$

ii) Vérifions si les points S(1, 2, 2) et T(2, 3, 2) appartiennent au plan π.

Pour déterminer si un point appartient au plan π, il suffit de remplacer les valeurs respectives de x, y et z dans l'équation cartésienne de π et de vérifier si l'équation est satisfaite. Ainsi,

pour S(1, 2, 2), nous avons

$$6(1) + 2(2) - 7(2) + 4 = 0$$

d'où $S(1, 2, 2) \in \pi$

pour T(2, 3, 2), nous avons

$$6(2) + 2(3) - 7(2) + 4 = 8 \neq 0$$

d'où $T(2, 3, 2) \notin \pi$

b) Déterminons une équation cartésienne du plan π passant par O(0, 0, 0) et ayant $\vec{n} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$ comme vecteur normal.

Puisque $\vec{n} = (2, -4, 7)$,

$$2x - 4y + 7z - (2(0) - 4(0) + 7(0)) = 0 \qquad \text{(définition 9.5)}$$

d'où $\pi: 2x - 4y + 7z = 0$

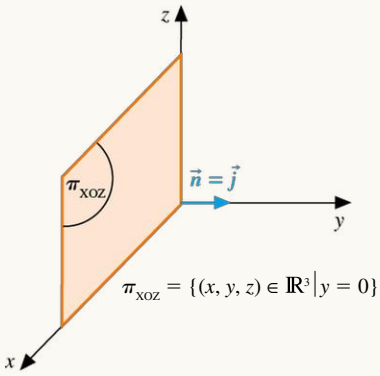
c) Déterminons une équation cartésienne du plan π_{XOZ}.

Soit $\vec{n} = \vec{j} = (0, 1, 0)$, un vecteur normal à ce plan, et O(0, 0, 0), un point de ce plan.

$$0x + 1y + 0z - (0(0) + 1(0) + 0(0)) = 0 \qquad \text{(définition 9.5)}$$

$$y = 0$$

d'où $\pi_{XOZ}: y = 0$



Remarque : Pour éviter de confondre $y = 0$, l'équation du plan de $\mathbb{R}^3$, avec l'équation de la droite de $\mathbb{R}^2$, il est préférable de donner l'équation du plan π_{XOZ} sous forme ensembliste, c'est-à-dire

Forme ensembliste

$$\pi_{XOZ} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}.$$

Exemple 2

a) Déterminons une équation cartésienne du plan

$\pi: (x, y, z) = (5, 7, -6) + k_1(1, 1, 0) + k_2(1, -1, 2)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$.

Pour déterminer un vecteur normal au plan cherché, il suffit d'effectuer $\vec{u_1} \times \vec{u_2}$, où $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont des vecteurs directeurs non parallèles de π.

$$\text{Ainsi, } \vec{n} = (1, 1, 0) \times (1, -1, 2) = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right)$$
$$= (2, -2, -2)$$

Une équation cartésienne de π, où $P(5, 7, -6) \in \pi$, est donnée par

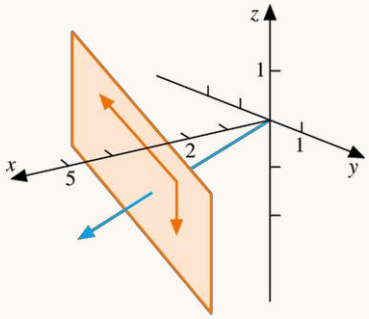
$$2x - 2y - 2z - (2(5) - 2(7) - 2(-6)) = 0$$
$$2x - 2y - 2z - 8 = 0$$

d'où $\pi: x - y - z - 4 = 0$ (en simplifiant)

b) Représentons le plan π précédent à l'aide de Maple.

with(Student[LinearAlgebra]):

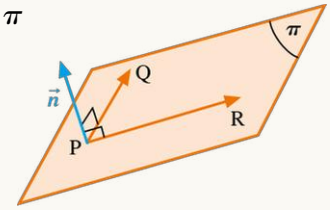
PlanePlot$(x - y - z = 4, [x, y, z]$, *showbasis, orientation* $= [38, 72, -14]$, *transparency* $= 0.4)$;



Exemple 3 Déterminons, de deux façons différentes, une équation cartésienne du plan π passant par les points non colinéaires P(1, 1, 1), Q(3, -7, -2) et R(-2, -9, 0).

a) **Façon 1 :** En utilisant un vecteur normal $\vec{n}$ au plan π

Pour déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan, il suffit d'effectuer $\vec{u_1} \times \vec{u_2}$, où $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont des vecteurs directeurs non parallèles de π.



$$\text{Ainsi, } \vec{u_1} \times \vec{u_2} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$$
$$= (2, -8, -3) \times (-3, -10, -1)$$
$$= (-22, 11, -44)$$

$$\vec{u_1} \times \vec{u_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -8 & -3 \\ -3 & -10 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (-22, 11, -44)$$

En choisissant $\vec{n} = \frac{-1}{11}(\vec{u_1} \times \vec{u_2}) = \frac{-1}{11}(-22, 11, -44)$,

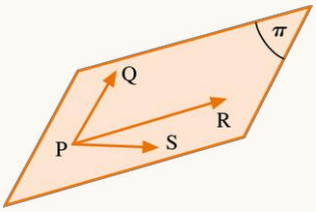
nous obtenons $\vec{n} = (2, -1, 4)$

ainsi, $2x - y + 4z - (2(1) - 1(1) + 4(1)) = 0$

d'où $\pi: 2x - y + 4z - 5 = 0$

$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

b) **Façon 2 :** En utilisant la notion de produit mixte



Soit S(x, y, z), un point quelconque de π.

P(1, 1, 1)
Q(3, -7, -2)
R(-2, -9, 0)

Ainsi, $\overrightarrow{PS} = (x - 1, y - 1, z - 1)$,

$\overrightarrow{PQ} = (2, -8, -3)$ et

$\overrightarrow{PR} = (-3, -10, -1)$

sont trois vecteurs du plan π.

Puisque les vecteurs sont coplanaires, le produit mixte des vecteurs est égal à zéro.

$$\overrightarrow{PS} \cdot (\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) = 0 \qquad \text{(théorème 6.15)}$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 2 & -8 & -3 \\ -3 & -10 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(théorème 6.13)}$$

$$(x - 1)(-22) - (y - 1)(-11) + (z - 1)(-44) = 0$$

$$-22x + 11y - 44z + 55 = 0$$

d'où $\pi : 2x - y + 4z - 5 = 0$ (en simplifiant)

Exercices de compréhension 9.1

2. a) Déterminer une équation cartésienne du plan
$\pi : (x, y, z) = (5, -2, 1) + k_1(5, 6, -2) + k_2(0, 1, -3)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$.

b) Vérifier si le point P(0, -6, -3) est un point de π.

c) Vérifier si le point O(0, 0, 0) est un point de π.

De façon générale, nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 9.1

Une équation cartésienne du plan π passant par $P(x_1, y_1, z_1)$ et ayant $\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, où $\vec{u}_1 \not\parallel \vec{u}_2$, comme vecteurs directeurs, est donnée par

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

La preuve est laissée à l'étudiant.

Voici un résumé et un exemple des différentes formes d'équations d'un plan de l'espace cartésien passant par un point P donné, ayant $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ($\vec{u}_1 \not\parallel \vec{u}_2$) comme vecteurs directeurs et $\vec{n}$ comme vecteur normal, où $\vec{n} = k(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)$, où $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

	$P(x_1, y_1, z_1)$ $\overrightarrow{u_1} = (a_1, b_1, c_1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (a_2, b_2, c_2)$	$P(-1, 7, 5)$ $\overrightarrow{u_1} = (4, -3, 4)$ et $\overrightarrow{u_2} = (0, 5, -8)$
	$\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2} = (a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2)$ En choisissant k de façon adéquate, nous obtenons $\vec{n} = k(\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2}) = (a, b, c)$.	$\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2} = (4, -3, 4) \times (0, 5, -8) = (4, 32, 20)$ En choisissant $k = \frac{1}{4}$, nous obtenons $\vec{n} = \frac{1}{4}(4, 32, 20) = (1, 8, 5)$.
É.V.	$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k_1(a_1, b_1, c_1) + k_2(a_2, b_2, c_2)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$	$(x, y, z) = (-1, 7, 5) + k_1(4, -3, 4) + k_2(0, 5, -8)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$
É.P.	$\begin{cases} x = x_1 + k_1a_1 + k_2a_2 \\ y = y_1 + k_1b_1 + k_2b_2, \text{ où } k_1 \text{ et } k_2 \in \mathbb{R} \\ z = z_1 + k_1c_1 + k_2c_2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = -1 + 4k_1 \\ y = 7 - 3k_1 + 5k_2, \text{ où } k_1 \text{ et } k_2 \in \mathbb{R} \\ z = 5 + 4k_1 - 8k_2 \end{cases}$
É.C.	$ax + by + cz - d = 0$, où $d = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} = ax_1 + by_1 + cz_1$	$x + 8y + 5z - 80 = 0$, car $d = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} = 1(-1) + 8(7) + 5(5) = 80$

Équation normale et équation réduite d'un plan dans l'espace

IL Y A ENVIRON 200 ANS...

Simon L'Huillier (1750-1840) propose une nouvelle forme de l'équation du plan, forme qui correspond à la forme normale vue dans le présent chapitre. Il s'agit de l'équation $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = d$, où α, β et γ sont les angles que font la normale au plan avec, respectivement, les trois axes. Dès lors, lorsque, à la fin du siècle, on réécrira cette partie de la géométrie analytique en termes vectoriels, le saut sera facile à faire.

Une équation cartésienne d'un plan π est construite à partir d'un vecteur normal à ce plan. Si nous construisons l'équation d'un plan à partir d'un vecteur normal unitaire, nous obtenons une équation normale du plan.

DÉFINITION 9.6

Soit $ax + by + cz - d = 0$, une équation cartésienne du plan π ayant $\vec{n} = (a, b, c)$ comme vecteur normal, où $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Une **équation normale** de ce plan π est donnée par

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}z - \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0,$$

où $\vec{N} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right)$,

est un vecteur normal unitaire à π.

Exemple 1 Déterminons une équation normale du plan π : $5x - 3y + z + 7 = 0$.

Soit $\vec{n} = (5, -3, 1)$, un vecteur normal à π, où $\|\vec{n}\| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{35}$.

Ainsi, $\vec{N} = \left(\frac{5}{\sqrt{35}}, \frac{-3}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}\right)$ est un vecteur normal unitaire à π.

D'où $\frac{5}{\sqrt{35}}x - \frac{3}{\sqrt{35}}y + \frac{1}{\sqrt{35}}z + \frac{7}{\sqrt{35}} = 0$ est une équation normale du plan π.

Exemple 2 Soit P(4, 1, -2) et Q(0, 3, 2). Déterminons une équation normale du plan π passant par P et perpendiculaire à la droite passant par P et Q.

Soit $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} = (-4, 2, 4)$, un vecteur normal à π.
Donc, une équation cartésienne de π est

$$-4x + 2y + 4z - (-4(4) + 2(1) + 4(-2)) = 0$$
$$-4x + 2y + 4z + 22 = 0$$

Puisque $\vec{n} = (-4, 2, 4)$, $\|\vec{n}\| = \sqrt{36} = 6$, nous avons $\frac{-4}{6}x + \frac{2}{6}y + \frac{4}{6}z + \frac{22}{6} = 0$

d'où π : $\frac{-2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{11}{3} = 0$ (en simplifiant)

Exemple 3 Soit le plan π : $6x + 3y + 4z - 12 = 0$.

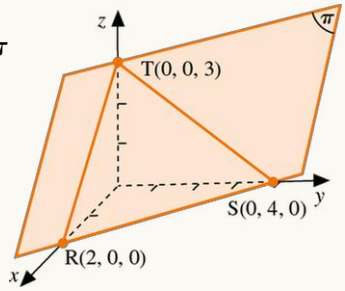
a) Déterminons les points d'intersection du plan π avec les axes.

Axe des x : En posant $y = 0$ et $z = 0$, nous trouvons $x = 2$.

Axe des y : En posant $x = 0$ et $z = 0$, nous trouvons $y = 4$.

Axe des z : En posant $x = 0$ et $y = 0$, nous trouvons $z = 3$.

D'où R(2, 0, 0), S(0, 4, 0) et T(0, 0, 3) sont respectivement les points d'intersection du plan π avec l'axe des x, l'axe des y et l'axe des z.



b) Transformons l'équation du plan π sous la forme $\frac{x}{r} + \frac{y}{s} + \frac{z}{t} = 1$ qui nous permettra d'obtenir directement les points d'intersection du plan π avec les axes.

$$6x + 3y + 4z - 12 = 0$$
$$6x + 3y + 4z = 12$$
$$\frac{6}{12}x + \frac{3}{12}y + \frac{4}{12}z = \frac{12}{12}$$ (en divisant les deux membres de l'équation par 12)

d'où $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$

Nous constatons que, exprimés sous cette forme, les dénominateurs des variables x, y et z correspondent respectivement aux coordonnées non nulles des points d'intersection R(2, 0, 0), S(0, 4, 0) et T(0, 0, 3) avec l'axe des x, l'axe des y et l'axe des z.

DÉFINITION 9.7

Soit le plan π passant par les points R(r, 0, 0), S(0, s, 0) et T(0, 0, t), qui sont respectivement les points d'intersection du plan π avec l'axe des x, l'axe des y et l'axe des z, où r, s et t sont non nuls.

L'**équation réduite** de ce plan π est donnée par

$$\pi : \frac{x}{r} + \frac{y}{s} + \frac{z}{t} = 1.$$

Exemple 4

a) Déterminons l'équation réduite du plan π passant par les points (5, 0, 0), $\left(0, \frac{3}{2}, 0\right)$ et $\left(0, 0, \frac{-5}{4}\right)$.

Équation réduite

$$\pi : \frac{x}{5} + \frac{y}{\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{z}{\left(\frac{-5}{4}\right)} = 1$$

b) Soit $\pi : x - 3y + 4z + 6 = 0$.

Déterminons l'équation réduite de π et trouvons les points d'intersection du plan π avec les axes.

Puisque $x - 3y + 4z = -6$, en divisant chaque terme de l'équation par -6, nous obtenons

$$\pi : \frac{x}{-6} + \frac{y}{2} + \frac{z}{\left(\frac{-3}{2}\right)} = 1, \text{ qui est l'équation réduite du plan } \pi.$$

Ainsi, R(-6, 0, 0), S(0, 2, 0) et $T\left(0, 0, \frac{-3}{2}\right)$ sont respectivement les points d'intersection du plan π avec l'axe des x, l'axe des y et l'axe des z.

EXERCICES 9.1

1. Répondre par vrai (V) ou faux (F). Les éléments suivants déterminent un et un seul plan.

a) Trois points colinéaires.

b) Deux vecteurs non parallèles ayant la même origine.

c) Deux vecteurs parallèles et un point.

d) Deux droites parallèles distinctes.

e) Un point et un vecteur normal au plan.

f) Deux droites gauches.

g) Un vecteur normal.

h) Deux droites concourantes.

2. Déterminer une équation vectorielle du plan π

a) passant par le point P(3, 0, 7) et ayant les vecteurs $\vec{u_1} = (1, 4, -2)$ et $\vec{u_2} = 3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ comme vecteurs directeurs ;

b) passant par les points P(6, -2, 0), Q(3, 0, -4) et R(0, 2, 3) ;

c) passant par l'origine et ayant les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ comme vecteurs directeurs.

3. Déterminer des équations paramétriques du plan π

a) passant par le point P(-7, 1, 2) et ayant les vecteurs $\vec{u_1} = (3, -2, 1)$ et $\vec{u_2} = (-5, -3, -7)$ comme vecteurs directeurs ;

b) passant par l'origine et ayant les vecteurs $\vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{j} - \vec{k}$ comme vecteurs directeurs ;

c) passant par le point P(4, -2, 5) et qui contient la droite D : $(x, y, z) = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} + t(-7, 3, 0)$, où $t \in \mathbb{R}$.

4. Déterminer une équation cartésienne du plan

a) passant par le point P(-4, 3, 1) et ayant $\vec{n} = (2, -4, 5)$ comme vecteur normal ;

b) qui passe par le point P(3, 7, -2) et qui est parallèle au plan $\pi_1 : -x + 2y - 2z + 7 = 0$;

c) qui passe par l'origine et qui est perpendiculaire à la droite D : $\frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-3}$;

d) passant par les points P(-1, 1, 0), Q(0, 4, 5) et R(-2, 0, 1) ;

e) qui passe par le point P(0, 4, 5) et qui contient la droite D : $(x, y, z) = (3, -2, 0) + t(1, 5, -4)$, où $t \in \mathbb{R}$;

f) passant par les deux droites parallèles distinctes suivantes :
$D_1 : (x, y, z) = (2, -5, 0) + s(5, 6, -1)$, où $s \in \mathbb{R}$;
$D_2 : (x, y, z) = (4, 3, -2) + t(5, 6, -1)$, où $t \in \mathbb{R}$.

5. Déterminer, sous forme ensembliste, les plans suivants.

a) π_{YOZ}

b) Le plan π_1 qui passe par le point P(4, -3, 5) et qui est parallèle au plan π_{YOZ}.

c) Le plan π_2 passant par les points P(3, 0, 0), Q(0, 4, 0) et R(0, 4, 5).

6. Déterminer une équation normale et, si c'est possible, l'équation réduite des plans suivants.

a) $\pi_1 : 2x - 4y + 5z + 15 = 0$

b) $\pi_2 : (x, y, z) = -\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k} + k_1(1, -2, 3) + k_2(-2, 1, 4)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

c) Le plan passant par O(0, 0, 0), P(2, 1, 0) et R(2, 0, 1).

7. Soit les plans π_1, π_2, π_3 et π_4 suivants.

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 3 + s + 4t \\ y = 1 - 2s - 3t \\ z = -4 + 5s + t \end{cases}, \text{ où } s \text{ et } t \in \mathbb{R}$$

$\pi_2 : (x, y, z) = (-5, 5, -6) + k_1(-1, 3, 4) + k_2(2, -1, 5)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

$\pi_3 : x - 3y + 9z + 74 = 0$

$\pi_4 : 25x + 73y + 3z = 0$

Déterminer si les points suivants appartiennent respectivement aux plans π_1, π_2, π_3 et π_4.

a) P(4, -1, -9)

b) Q(13, -4, -11)

c) O(0, 0, 0)

d) R(1, 1, 1)

8. Soit le plan π_{XOZ}. Déterminer

a) une équation vectorielle de ce plan ;

b) des équations paramétriques de ce plan ;

c) une équation cartésienne de ce plan ;

d) une équation de ce plan sous forme ensembliste ;

e) une équation normale de ce plan ;

f) la forme générale des points de ce plan.

9. Soit $\pi : 3x - 2y + 4z - 1 = 0$.

a) Trouver un vecteur normal et un vecteur normal unitaire à π.

b) Trouver deux vecteurs directeurs de π, non parallèles.

c) Déterminer x si P$(x, -5, 3) \in \pi$.

d) Déterminer z si Q$(3, -2, z) \in \pi$.

e) Trouver les points d'intersection des trois axes avec ce plan.

10. a) Déterminer une équation vectorielle (É.V.), des équations paramétriques (É.P.), une équation cartésienne (É.C.), une équation normale (É.N.) et l'équation réduite (É.R.) du plan π passant par les points P(4, 0, 0), Q(0, 5, 0) et R(0, 0, 3).

b) Représenter graphiquement ce plan.

11. Soit le plan π passant par P(4, -2, 7) et ayant les vecteurs $\vec{u_1} = (1, -3, 0)$ et $\vec{u_2} = (-3, 2, 1)$ comme vecteurs directeurs. Déterminer une équation cartésienne de ce plan en utilisant le théorème 9.1.

12. Soit le plan π passant par les points P(3, 0, -1), Q(0, -2, 4) et R(1, -1, 2).

a) Déterminer une équation cartésienne de ce plan en utilisant un déterminant.

b) Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ et un vecteur normal unitaire $\vec{N}$ au plan π.

c) Déterminer une équation normale de π.

d) Déterminer l'équation réduite de π.

e) Déterminer les points P_x, P_y et P_z qui sont respectivement les points d'intersection de π avec l'axe des x, l'axe des y et l'axe des z.

f) Représenter graphiquement le plan π.

13. Déterminer si les points suivants sont coplanaires.

a) P(1, 4, 3), Q(-2, -11, 0), R(5, 12, 1) et S(0, 3, 4)

b) P(1, 2, 3), Q(8, -1, 4), R(9, 0, 7) et S(-2, 1, -3)

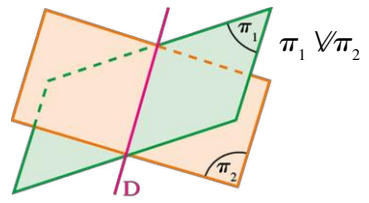
9.2 Position relative de deux plans et position relative d'une droite et d'un plan dans l'espace cartésien

Objectifs d'apprentissage

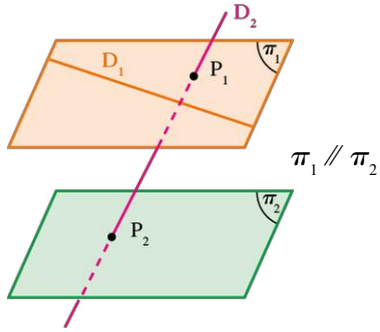
À la fin de cette section, l'étudiant pourra donner la position relative de deux plans et la position relative d'une droite et d'un plan dans l'espace cartésien.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de déterminer si deux plans sont parallèles distincts ;
- de déterminer si deux plans sont parallèles confondus ;
- de déterminer une équation de la droite d'intersection de deux plans non parallèles ;
- de calculer l'angle entre deux plans ;
- de déterminer si une droite est parallèle à un plan ;
- de déterminer si une droite est non parallèle à un plan ;
- de déterminer le point d'intersection d'une droite et d'un plan non parallèle à cette droite ;
- de calculer l'angle que forment une droite et un plan ;
- de déterminer une équation du faisceau de plans défini par deux plans non parallèles ;
- de déterminer une équation d'un plan particulier d'un faisceau.



L'intersection de π_1 et de π_2 est une droite D.



$D_1 /\!/ \pi_1$ et $D_1 \subset \pi_1$
$D_1 /\!/ \pi_2$ et $D_1 \not\subset \pi_2$
D_2 sécante à π_1 et à π_2

Dans cette section, nous étudierons d'abord les positions relatives possibles de deux plans dans l'espace cartésien et nous déterminerons l'angle formé par deux plans, appelé « angle dièdre ». Ensuite, nous étudierons les positions relatives possibles d'une droite et d'un plan.

Position relative de deux plans dans l'espace

Les positions relatives possibles de deux plans dans l'espace cartésien se divisent en deux catégories : les plans parallèles et les plans non parallèles.

DÉFINITION 9.8

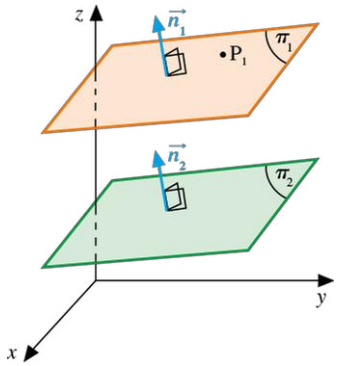
Deux **plans** π_1 et π_2 sont **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs normaux sont parallèles.

Les trois représentations graphiques suivantes illustrent les trois positions relatives possibles de deux plans dans l'espace ainsi que certaines caractéristiques de ces plans.

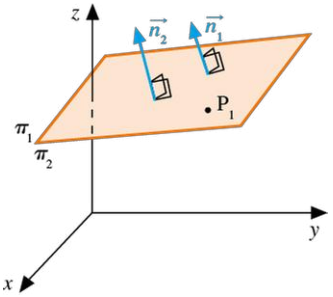
Soit $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$, des vecteurs normaux respectifs à π_1 et à π_2.

Cas 1 : Plans parallèles

a) Plans parallèles distincts



b) Plans parallèles confondus



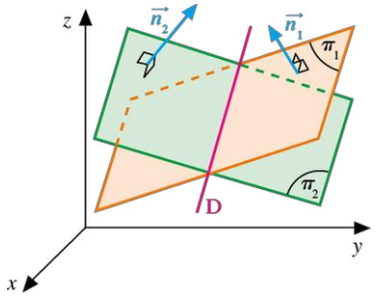
Caractéristiques

① $\vec{n_1} /\!/ \vec{n_2}$ (il existe un $r \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{n_1} = r\vec{n_2}$)

② Aucun point d'intersection

② Infinité de points d'intersection

Cas 2 : Plans non parallèles



Caractéristiques

① $\vec{n_1} /\!/\backslash \vec{n_2}$ $(\vec{n_1} \neq r\vec{n_2}, \forall\, r \in \mathbb{R})$

② L'intersection de π_1 et de π_2 ($\pi_1 \cap \pi_2$) est une droite D.
Infinité de points d'intersection π_1 et π_2 sont dits sécants.

Exemple 1 Déterminons la position relative des plans suivants ainsi que l'équation de la droite d'intersection lorsque les plans sont sécants.

a) $\pi_1 : x + 2y + 3z - 2 = 0$ et

$\pi_2 : (x, y, z) = (1, 5, -3) + s(4, 1, -2) + t(3, -3, 1)$, où s et $t \in \mathbb{R}$

Soit $\vec{n_1} = (1, 2, 3)$, un vecteur normal à π_1,

et $\vec{n_2} = (4, 1, -2) \times (3, -3, 1) = (-5, -10, -15)$, un vecteur normal à π_2.

$$\vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-5, -10, -15)$$

Puisque $\vec{n_2} = -5\vec{n_1}$, $\vec{n_1} /\!/ \vec{n_2}$. Donc, $\pi_1 /\!/ \pi_2$.

Soit $P_2(1, 5, -3) \in \pi_2$. Vérifions si $P_2(1, 5, -3) \in \pi_1$.

Puisque $1 + 2(5) + 3(-3) - 2 = 0$, $P_2 \in \pi_1$.

D'où les plans π_1 et π_2 sont parallèles confondus.

Plans parallèles confondus

b) $\pi_3 : 2x + 4y + 16z - 3 = 0$ et

$$\pi_4 : \begin{cases} x = 5 + 4k_3 - 2k_4 \\ y = 2k_3 + k_4 \\ z = 3 - k_3 \end{cases}, \text{ où } k_3 \text{ et } k_4 \in \mathbb{R}$$

Soit $\vec{n_3} = (2, 4, 16)$, un vecteur normal à π_3,

et $\vec{n_4} = (4, 2, -1) \times (-2, 1, 0) = (1, 2, 8)$, un vecteur normal à π_4.

$$\vec{n_4} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 2, 8)$$

Puisque $\vec{n_3} = 2\vec{n_4}$, $\vec{n_3} /\!/ \vec{n_4}$, donc $\pi_3 /\!/ \pi_4$.

Soit $P_4(5, 0, 3) \in \pi_4$. Vérifions si $P_4(5, 0, 3) \in \pi_3$.

Puisque $2(5) + 4(0) + 16(3) - 3 = 55 \neq 0$, $P_4 \notin \pi_3$.

D'où les plans π_3 et π_4 sont parallèles distincts.

Plans parallèles distincts

c) $\pi_5 : (x, y, z) = (0, 1, 0) + k_1(1, 1, 0) + k_2(1, 0, 1)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

$\pi_6 : x + 2y + 8z - 29 = 0$

Soit $\vec{n_5} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 1) = (1, -1, -1)$, un vecteur normal à π_5,

et $\vec{n_6} = (1, 2, 8)$, un vecteur normal à π_6.

$$\vec{n_5} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, -1)$$

Puisque $\vec{n_5} \neq r\vec{n_6}$, $\forall\, r \in \mathbb{R}$, $\vec{n_5} \not/\!/ \vec{n_6}$, donc $\vec{\pi_5} \not/\!/ \vec{\pi_6}$.

D'où les plans π_5 et π_6 sont sécants et l'intersection de ces deux plans est une droite.

Plans sécants

Pour déterminer une équation de la droite d'intersection de deux plans non parallèles, il est préférable que les équations des plans soient sous forme cartésienne.

Droite d'intersection de deux plans

En transformant π_5 sous forme cartésienne, où $\vec{n} = (1, -1, -1)$, nous obtenons $\pi_5 : x - y - z + 1 = 0$.

Il suffit de résoudre le système d'équations S suivant obtenu des équations cartésiennes de π_5 et de π_6.

$$S \begin{cases} x - y - z = -1 \\ x + 2y + 8z = 29 \end{cases}$$

Méthode de Gauss

Voici trois méthodes pour résoudre ce système.

Méthode 1 : Méthode de Gauss

La matrice augmentée qui correspond au système est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 8 & 29 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 9 & 30 \end{array}\right] \qquad L_2 - L_1 \to L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right] \qquad (1/3)L_2 \to L_2$$

Ce système admet une infinité de solutions.

En posant $z = t$, où $t \in \mathbb{R}$, nous obtenons $y = 10 - 3t$ et $x = 9 - 2t$.

D'où $D : \begin{cases} x = 9 - 2t \\ y = 10 - 3t \\ z = t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$ (équations paramétriques de D)

Méthode 2 : Recherche de deux points quelconques de D

En posant $z = 0$ dans S, nous obtenons le système $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + 2y = 29 \end{cases}$

En résolvant ce système, nous trouvons $x = 9$ et $y = 10$. Donc $P(9, 10, 0) \in D$.

En posant $y = 0$ dans S, nous obtenons le système $\begin{cases} x - z = -1 \\ x + 8z = 29 \end{cases}$

En résolvant ce système, nous trouvons $x = \frac{7}{3}$ et $z = \frac{10}{3}$. Donc $Q\left(\frac{7}{3}, 0, \frac{10}{3}\right) \in D$.

Soit $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{-20}{3}, -10, \frac{10}{3}\right)$, un vecteur directeur de D, et $\vec{u} = \frac{3}{10}\overrightarrow{PQ}$, c'est-à-dire $\vec{u} = (-2, -3, 1)$, également un vecteur directeur de D.

D'où $D : \begin{cases} x = 9 - 2t \\ y = 10 - 3t \\ z = t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$ (équations paramétriques de D)

Méthode 3 : Règle de Cramer

Soit le système équivalent $\begin{cases} x - y = z - 1 \\ x + 2y = -8z + 29 \end{cases}$, où $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

En posant $z = t$, où $t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$x = \frac{\begin{vmatrix} t - 1 & -1 \\ -8t + 29 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2t - 2 - 8t + 29}{3} = \frac{27 - 6t}{3} = 9 - 2t$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & t - 1 \\ 1 & -8t + 29 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-8t + 29 - t + 1}{3} = \frac{30 - 9t}{3} = 10 - 3t$$

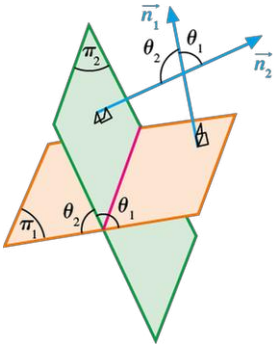
D'où $D : \begin{cases} x = 9 - 2t \\ y = 10 - 3t \\ z = t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$ (équations paramétriques de D)

Exercices de compréhension 9.2

1. Déterminer la position relative des plans π_1 et π_2 suivants.

$\pi_1 : (x, y, z) = (4, -3, 3) + k_1(-2, -3, 0) + k_2(4, 8, 1)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

$\pi_2 : \dfrac{x}{12} - \dfrac{y}{18} + \dfrac{z}{9} = 1$



$\theta_1 + \theta_2 = 180°$

Angle formé par deux plans dans l'espace

Soit $\vec{n}_1$, un vecteur normal au plan π_1, et soit $\vec{n}_2$ et $-\vec{n}_2$, deux vecteurs normaux, de sens contraire au plan π_2.

Ainsi, l'angle θ_1 entre π_1 et π_2 correspond à l'angle formé par les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$, et l'angle θ_2 entre π_1 et π_2 correspond à l'angle formé par les vecteurs $\vec{n}_1$ et $-\vec{n}_2$.

DÉFINITION 9.9

L'angle dièdre θ formé par **les plans** π_1 et π_2 dans l'espace cartésien correspond au plus petit des deux angles formés par des vecteurs normaux à π_1 et à π_2.

THÉORÈME 9.2

Soit π_1 et π_2, deux plans de l'espace cartésien. Si $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont des vecteurs normaux respectifs à π_1 et à π_2, alors l'angle θ formé par les plans π_1 et π_2 est obtenu à partir de l'équation $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}$,

d'où $\theta = \text{Arc cos}\dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}$.

La preuve est laissée à l'étudiant.

Exemple 1 Déterminons l'angle θ formé par les plans

$\pi_1 : (x, y, z) = (4, 5, -1) + s(-1, 3, 2) + t(0, -4, 1)$, où s et $t \in \mathbb{R}$, et

$\pi_2 : 5x + y - 2z + 1 = 0$.

$\vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$
$= (11, 1, 4)$

Soit $\vec{n}_1 = (-1, 3, 2) \times (0, -4, 1) = (11, 1, 4)$ et $\vec{n}_2 = (5, 1, -2)$, des vecteurs normaux à π_1 et à π_2.

Donc, $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|} = \dfrac{|(11, 1, 4) \cdot (5, 1, -2)|}{\sqrt{11^2 + 1^2 + 4^2}\sqrt{5^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{48}{\sqrt{138}\sqrt{30}}$

$\theta = \text{Arc cos}\left(\dfrac{48}{\sqrt{138}\sqrt{30}}\right) = 41{,}754\ldots$

d'où $\theta \approx 41{,}8°$

Position relative d'une droite et d'un plan dans l'espace

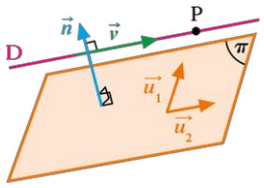
Les positions relatives possibles d'une droite et d'un plan dans l'espace cartésien se divisent en deux catégories : une droite parallèle à un plan et une droite non parallèle à un plan. Les trois représentations graphiques suivantes illustrent les trois positions possibles.

Soit $\vec{v}$, un vecteur directeur de D, P $\in$ D, $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$, deux vecteurs directeurs de π ($\vec{u_1} \not\parallel \vec{u_2}$), et $\vec{n}$, un vecteur normal à π.

Cas 1 : Droite parallèle à un plan

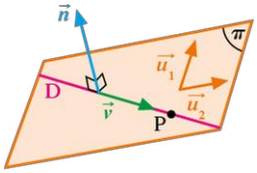
a) D n'est pas incluse dans π

$D \not\subset \pi$



b) D est incluse dans π

$D \subset \pi$

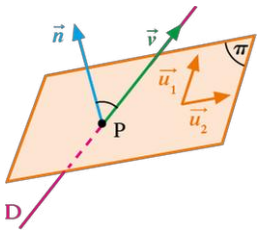


Caractéristiques

1. $\vec{v} \perp \vec{n}$ $\quad (\vec{v} \cdot \vec{n} = 0)$
2. $\vec{v} = k_1\vec{u_1} + k_2\vec{u_2}$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$
3. Aucun point d'intersection ($D \cap \pi = \emptyset$)

3. Infinité de points d'intersection ($D \cap \pi = D$)

Cas 2 : Droite non parallèle à un plan



Caractéristiques

1. $\vec{v} \not\perp \vec{n}$ $\quad (\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0)$
2. $\vec{v} \neq k_1\vec{u_1} + k_2\vec{u_2}$, $\forall$ k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$
3. Un point d'intersection P, où P $\in$ D et P $\in \pi$

   D est sécante à π.

Exemple 1 Soit π : $7x - 6y + 5z + 16 = 0$. Déterminons la position relative des droites D_1, D_2 et D_3 suivantes et du plan π.

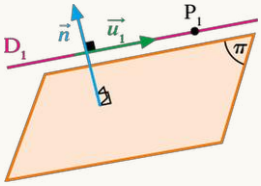
Pour déterminer la position relative d'une droite D et d'un plan π, il faut calculer $\vec{u} \cdot \vec{n}$, où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D et $\vec{n}$ est un vecteur normal à π.

a) $D_1 : \begin{cases} x = -1 + 5s \\ y = 2 + 5s \\ z = -s \end{cases}$, où $s \in \mathbb{R}$

Soit $\vec{u}_1 = (5, 5, -1)$ et $\vec{n} = (7, -6, 5)$. Ainsi,

$\vec{u}_1 \cdot \vec{n} = (5, 5, -1) \cdot (7, -6, 5) = 0$.

Donc, $\vec{u}_1 \perp \vec{n}$ et $D_1 /\!/ \pi$.



Soit $P_1(-1, 2, 0) \in D_1$. Vérifions si $P_1 \in \pi$.

Puisque $7(-1) - 6(2) + 5(0) + 16 = -3 \neq 0$, $P_1 \notin \pi$.

Droite parallèle non incluse dans le plan

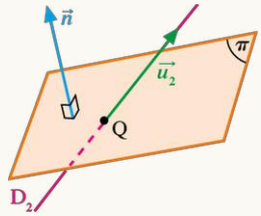
D'où $D_1 /\!/ \pi$ et $D_1 \not\subset \pi$.

b) $D_2 : \dfrac{x - 7}{-2} = \dfrac{y + 3}{9} = \dfrac{z + 8}{5}$

Soit $\vec{u}_2 = (-2, 9, 5)$ et $\vec{n} = (7, -6, 5)$. Ainsi,

$\vec{u}_2 \cdot \vec{n} = (-2, 9, 5) \cdot (7, -6, 5) = -43 \neq 0$.

Donc $D_2 /\!\!\!\!\diagup \pi$.



Droite sécante au plan

D'où la droite D est sécante au plan π.

Dans ce cas, nous pouvons déterminer le point d'intersection.

Pour déterminer le point d'intersection Q, il est préférable d'exprimer la droite D sous la forme d'équations paramétriques, et le plan π, sous la forme d'une équation cartésienne.

Ainsi, $D : \begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = -3 + 9t \\ z = -8 + 5t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

En remplaçant x par $7 - 2t$, y par $-3 + 9t$ et z par $-8 + 5t$ dans l'équation de π, nous obtenons

$\pi : 7x - 6y + 5z + 16 = 0$

$$7(7 - 2t) - 6(-3 + 9t) + 5(-8 + 5t) + 16 = 0$$

Donc, $t = 1$. Ainsi,

$$x = 7 - 2(1) = 5, \quad y = -3 + 9(1) = 6 \quad \text{et} \quad z = -8 + 5(1) = -3$$

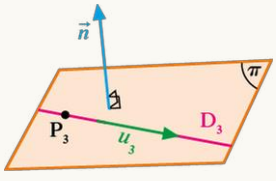
D'où Q(5, 6, -3) est le point d'intersection de la droite D et du plan π.

c) $D_3 : (x, y, z) = (6, 3, -8) + t(3, 1, -3)$, où $t \in \mathbb{R}$

Soit $\vec{u}_3 = (3, 1, -3)$ et $\vec{n} = (7, -6, 5)$. Ainsi,

$\vec{u}_3 \cdot \vec{n} = (3, 1, -3) \cdot (7, -6, 5) = 0$.

Donc, $\vec{u}_3 \perp \vec{n}$ et $D_3 /\!/ \pi$.



Soit $P_3(6, 3, -8) \in D_3$. Vérifions si $P_3 \in \pi$.

Puisque $7(6) - 6(3) + 5(-8) + 16 = 0$, $P_3 \in \pi$.

Droite parallèle incluse dans le plan

D'où $D_3 /\!/ \pi$ et $D_3 \subset \pi$.

Angle formé par une droite et un plan dans l'espace

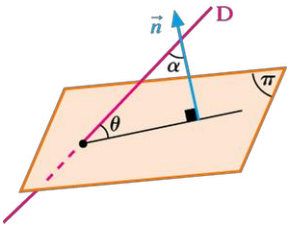
DÉFINITION 9.10

Soit une droite D et un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan π.

Soit $\alpha \in [0°, 90°]$, l'angle que forme un vecteur de la droite D avec $\vec{n}$.

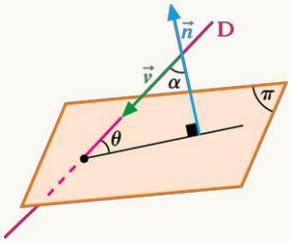
L'**angle** $\theta \in [0°, 90°]$ **entre la droite** D **et le plan** π est donné par

$$\theta = 90° - \alpha.$$



Exemple 1 Soit $D: \dfrac{x-7}{-2} = \dfrac{y+3}{9} = \dfrac{z+8}{4}$ et $\pi: 7x - 6y + 5z + 16 = 0$.

Déterminons l'angle entre la droite D et le plan π.



Soit $\vec{v} = (-2, 9, 4)$, un vecteur directeur de D, et $\vec{n} = (7, -6, 5)$, un vecteur normal à π.

Déterminons α, où $\alpha \in [0°, 90°]$, l'angle formé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{n}$.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{v}\|\|\vec{n}\|} = \frac{|(-2, 9, 4) \cdot (7, -6, 5)|}{\sqrt{(-2)^2 + 9^2 + 4^2}\sqrt{7^2 + (-6)^2 + 5^2}} = \frac{|-48|}{\sqrt{101}\sqrt{110}}$$

$$\alpha = \text{Arc cos}\left(\frac{48}{\sqrt{101}\sqrt{110}}\right) = 62{,}909\ldots$$

ainsi $\theta = 90° - 62{,}909\ldots°$ (car $\theta = 90° - \alpha$)

d'où $\theta \approx 27{,}1°$

Exercices de compréhension 9.2

2. Soit la droite D et le plan π suivants.

$D: (x, y, z) = (-2, 1, 7) + t(3, -4, 1)$, où $t \in \mathbb{R}$

$\pi: 3x - y + 3z + 2 = 0$

a) Déterminer la position relative de D et de π, et déterminer, s'il y a lieu, le point d'intersection P.

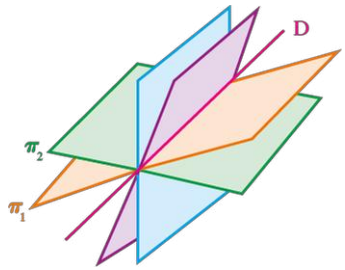
b) Déterminer l'angle entre D et π.

Faisceau de plans

DÉFINITION 9.11

L'ensemble des plans passant par la droite d'intersection de deux plans non parallèles est appelé **faisceau de plans**.

Représentation graphique du faisceau de plans passant par la droite D d'intersection des plans π_1 et π_2.



DÉFINITION 9.12

Soit $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z - d_1 = 0$ et $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z - d_2 = 0$, deux plans non parallèles.

Une **équation du faisceau F de plans**, défini par π_1 et π_2, est donnée par

$$F : k_1(a_1x + b_1y + c_1z - d_1) + k_2(a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0,$$

où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$, et où au moins un des deux scalaires est non nul ($k_1 \neq 0$ ou $k_2 \neq 0$).

Pour chaque valeur de k_1 et de k_2, l'équation

$$k_1(a_1x + b_1y + c_1z - d_1) + k_2(a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0$$

représente un des plans du faisceau. Pour obtenir un plan particulier du faisceau, il suffit de déterminer une valeur de k_1 et une valeur de k_2 satisfaisant la contrainte de ce plan particulier.

Exemple 1 Soit $\pi_1 : 3x - y + 2z - 5 = 0$ et $\pi_2 : 2x + y - z + 4 = 0$.

a) Déterminons une équation du faisceau F de plans, défini par π_1 et π_2.

$$F : k_1(3x - y + 2z - 5) + k_2(2x + y - z + 4) = 0,$$
où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$ ($k_1 \neq 0$ ou $k_2 \neq 0$)

b) Déterminons une équation du plan π_3 du faisceau F pour $k_1 = 1$ et $k_2 = -3$.

$$1(3x - y + 2z - 5) + (-3)(2x + y - z + 4) = 0,$$

d'où $\pi_3 : -3x - 4y + 5z - 17 = 0$.

c) Déterminons une équation du plan π_4 du faisceau F qui passe par le point P(2, -1, 1), où P $\notin \pi_1 \cap \pi_2$. Les coordonnées du point P(2, -1, 1) doivent vérifier l'équation de F.

$$k_1(3(2) - (-1) + 2(1) - 5) + k_2(2(2) + (-1) - 1 + 4) = 0$$
$$4k_1 + 6k_2 = 0$$

Ainsi, $k_2 = \dfrac{-2k_1}{3}$

En posant, par exemple, $k_1 = 3$, nous obtenons $k_2 = -2$.

Ainsi, $\pi_4 : 3(3x - y + 2z - 5) - 2(2x + y - z + 4) = 0$,

d'où $\pi_4 : 5x - 5y + 8z - 23 = 0$.

EXERCICES 9.2

1. Répondre par vrai (V) ou faux (F), sachant que les droites D et les plans π sont dans l'espace cartésien.

a) Si $\pi_1 /\!/ \pi_2$ et $\pi_2 /\!/ \pi_3$, alors $\pi_1 /\!/ \pi_3$.

b) Si $\pi_1 /\!/ \pi_2$ et $\pi_2 \perp \pi_3$, alors $\pi_1 \perp \pi_3$.

c) Si $\pi_1 \perp \pi_2$ et $\pi_2 \perp \pi_3$, alors $\pi_1 \perp \pi_3$.

d) Si $D_1 /\!/ D_2$ et $D_1 \subset \pi$, alors $D_2 /\!/ \pi$.

e) Si $D_1 /\!/ \pi$ et $D_2 \subset \pi$, alors $D_1 /\!/ D_2$.

f) Si $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, alors $\pi_1 /\!/ \pi_2$.

g) Si $D_1 \perp \pi$ et $D_2 \subset \pi$, alors $D_1 \perp D_2$.

h) Si $D_1 \perp D_2$ et $D_2 \subset \pi$, alors $D_1 \perp \pi$.

2. Déterminer des équations paramétriques de la droite D d'intersection des plans sécants suivants à l'aide de la méthode suggérée.

a) $\pi_1 : 3x + 2y - z - 1 = 0$
$\pi_2 : x - 2y + 4z + 1 = 0$

i) méthode de Gauss

ii) règle de Cramer

b) $\pi_1 : 7x + 15y + 7z - 7 = 0$
π_2 : plan passant par les points A(4, 0, -1), B(-2, 3, 0) et C(1, 1, 1)

méthode de la recherche de deux points de D

3. Déterminer la position relative des plans π_1 et π_2 suivants, et une équation vectorielle de la droite D d'intersection si les plans sont sécants.

a) $\pi_1 : 3x - y + 4z - 1 = 0$
$\pi_2 : -x + 4y - 3z - 1 = 0$

b) $\pi_1 : (x, y, z) = (4, 0, 1) + k_1(0, 5, 3) + k_2(1, 4, 2)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$
$\pi_2 : 2x - 3y + 5z - 13 = 0$

c) $\pi_1 : \begin{cases} x = 3 - 2k_1 + 3k_2 \\ y = -2 + 4k_1 + k_2 \\ z = 1 + 5k_1 + 3k_2 \end{cases}$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$
π_2 : plan qui passe par les points A(4, -1, 2), B(-9, 4, 3) et C(3, 2, 6)

4. Déterminer l'angle θ formé par les plans suivants.

a) $\pi_1 : 3x - y - 2z + 1 = 0$
$\pi_2 : x + 2y + 5z - 2 = 0$

b) $\pi_1 : (x, y, z) = (1, 1, 1) + k_1(0, 2, 3) + k_2(3, 4, 0)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$
$\pi_2 : 4x - 3y + 2z + 6 = 0$

c) $\pi_1 : 2x - y + 5z - 6 = 0$
π_2 : plan qui passe par les points A(0, 0, 6), B(0, 3, 0) et C(-4, 0, 0)

d) π_{XOY} et $\pi_2 : -x + 3y - 4z = 0$

e) π_{XOZ} et $\pi_2 : x + y - 4 = 0$

5. Soit les plans suivants.
$\pi_1 : ax + 2y + 4z - 1 = 0$
$\pi_2 : 3x - 4y - 8z + b = 0$

Déterminer les valeurs des constantes a et b telles que

a) $\pi_1 \perp \pi_2$;

b) π_1 et π_2 sont parallèles confondus ;

c) π_1 et π_2 sont parallèles distincts.

6. Soit les systèmes d'équations suivants.

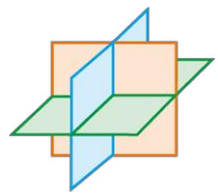
a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 3y - 2z = 4 \\ 8x + 3y + 5z = 11 \end{cases}$

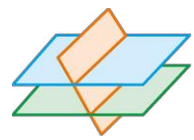
b) $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 15 \\ 4x - z = -1 \end{cases}$

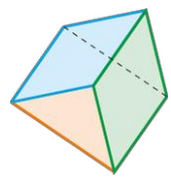
c) $\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 5 \\ 3x - y - 3z = 6 \\ 12x + 13y = 20 \end{cases}$

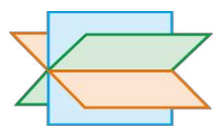
d) $\begin{cases} 2x - 4y + 8z = 3 \\ x + 2y + 4z = 0 \\ -x + 2y - 4z = 2 \end{cases}$

Associer à chaque système la représentation graphique des plans la plus appropriée.

i) 

ii) 

iii) 

iv) 

7. Déterminer la position relative des droites et des plans suivants. Dans le cas où la droite est sécante au plan, déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite et du plan. Réprésenter graphiquement

a) $D: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3 \text{ et } y = 4\}$
$\pi: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 6\}$

b) $D: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2z = 6 \text{ et } y = 0\}$
π_{XOZ}

c) $D: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 4 \text{ et } z = 0\}$
$\pi: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 2\}$

8. Déterminer la position relative des droites et des plans suivants. Dans le cas où la droite est sécante au plan, déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite et du plan.

a) $D: \begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = -4 + t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$
$\pi: 5x + 2y + 6z - 4 = 0$

b) D : droite qui passe par les points A(5, -1, -1) et B(-3, 4, 2)
π : plan qui passe par les points P(2, 0, 0), Q(1, 5, 1) et R(9, -7, -3)

c) $D: \dfrac{4 - x}{2} = y + 2 = \dfrac{z + 6}{3}$
$\pi: 5x + 7y - z = 0$

9. Déterminer l'angle θ, où $\theta \in [0°, 90°]$, formé par les droites et les plans suivants.

a) $D: (x, y, z) = (-1, 4, 7) + s(-5, 4, 2)$, où $s \in \mathbb{R}$
$\pi: 3x - 4y + 2z - 1 = 0$

b) $D: \dfrac{x - 1}{4} = y = \dfrac{z + 5}{-2}$
$\pi: 2x + 2y + 5z + 1 = 0$

c) $D: (x, y, z) = (-1, 4, 7) + t(2, -3, 4)$, où $t \in \mathbb{R}$
π : plan qui passe par les points A(3, 2, 3), B(5, -2, -1) et C(0, 0, 3)

10. Soit la droite $D: \dfrac{x}{a} = -y = \dfrac{z}{3}$ et le plan $\pi: 12x - 2y + az - d = 0$. Déterminer les valeurs des constantes a et d telles que

a) $D \perp \pi$ et D rencontre π au point O(0, 0, 0) ;

b) $D /\!/ \pi$ et $D \subset \pi$;

c) $D /\!/ \pi$ et $D \not\subset \pi$.

11. Soit le plan $\pi: 2x + y + 5z - 10 = 0$.

a) Déterminer P, Q et R, les points d'intersection respectifs de π avec l'axe des x, l'axe des y et l'axe des z.

b) Déterminer, sous forme ensembliste, les droites D_1, D_2 et D_3 qui sont respectivement les droites d'intersection de π avec π_{XOY}, π_{XOZ} et π_{YOZ}.

c) Représenter graphiquement D_1, D_2, D_3 et π.

12. Soit $\pi_1: 2x - y + 5z - 1 = 0$;
$\pi_2: 3x + 2y - z - 4 = 0$;
$\pi_3: 2x - y + 4z - 1 = 0$.

Déterminer une équation cartésienne du plan qui passe par

a) P(4, -2, 1) et Q(2, 3, -3) et qui est perpendiculaire à π_1 ;

b) R(-5, 1, 3) et qui est perpendiculaire à π_2 et à π_3.

13. Soit $\pi_1: x - 2y + 4z - 1 = 0$ et
$\pi_2: 2x + y - 3z + 5 = 0$.

a) Déterminer une équation F du faisceau de plans défini par π_1 et π_2.

b) Déterminer une équation du plan π du faisceau si $k_1 = 1$ et $k_2 = 0$.

c) Quelles valeurs faut-il attribuer à k_1 et k_2 pour obtenir π_2 ?

d) Déterminer une équation cartésienne du plan

i) π_3 du faisceau qui passe par l'origine ;

ii) π_4 du faisceau qui passe par le point P(2, -12, 5) ;

iii) π_5 du faisceau qui est perpendiculaire à π_{XOY} ;

iv) π_6 du faisceau qui est perpendiculaire à π_1.

e) Déterminer, si c'est possible, une équation du plan π_7 du faisceau qui est perpendiculaire à l'axe des y.

f) Déterminer si le plan $\pi_8: 7x + 11y - 27z + 28 = 0$ est un plan du faisceau F.

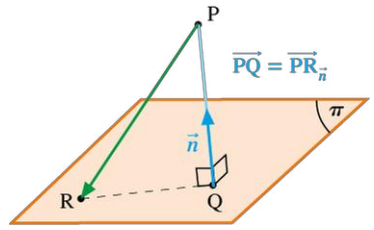
9.3 Distances relatives aux plans dans l'espace cartésien

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra résoudre des problèmes de distance dans l'espace cartésien.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de démontrer certaines formules permettant de calculer la distance entre un point et un plan ;
- de calculer la distance entre un point et un plan ;
- de démontrer une formule permettant de calculer la distance entre deux plans parallèles ;
- de calculer la distance entre deux plans parallèles ;
- de calculer la distance entre un plan et une droite parallèle à ce plan ;
- de déterminer des lieux géométriques en utilisant la notion de distance.



$$d(P, \pi) = \frac{|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Dans cette section, nous calculerons

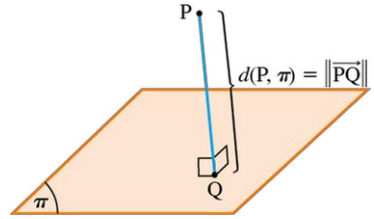
- la distance entre un point et un plan ;
- la distance entre deux plans parallèles ;
- la distance entre un plan et une droite parallèle à celui-ci.

Nous résoudrons également certains problèmes géométriques à l'aide de notions déjà étudiées.

Distance entre un point et un plan dans l'espace

DÉFINITION 9.13

La **distance** entre un point P et un plan π, notée $d(P, \pi)$, est la longueur du segment de droite $\overline{PQ}$, où $Q \in \pi$ et $\overline{PQ} \perp \pi$.



Exemple 1 Calculons la distance $d(P, \pi)$ entre le point P(-1, 3, 5) et le plan π : $2x - y + 4z - 1 = 0$.

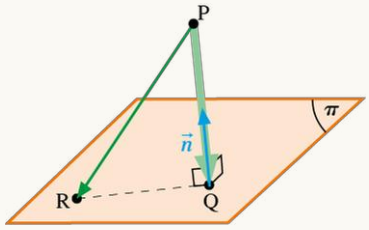
Soit $\vec{n} = (2, -1, 4)$, un vecteur normal à π, R(0, -1, 0), un point de π, et $Q \in \pi$ tel que $\overrightarrow{PQ} \perp \pi$.

$d(P, \pi) = \|\overrightarrow{PQ}\|$

Puisque $\overrightarrow{PQ} /\!/ \vec{n}$, $d(P, \pi)$ est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{PR}_{\vec{n}}$, c'est-à-dire $\|\overrightarrow{PR}_{\vec{n}}\|$.

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}_{\vec{n}}$

$$\overrightarrow{PR}_{\vec{n}} = \frac{\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} \qquad \text{(théorème 6.7)}$$
$$= \frac{(1, -4, -5) \cdot (2, -1, 4)}{(2, -1, 4) \cdot (2, -1, 4)} (2, -1, 4)$$
$$= \frac{-14}{21} (2, -1, 4)$$
$$= \left(\frac{-4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-8}{3}\right)$$



donc $\left\|\overrightarrow{PR}_{\vec{n}}\right\| = \sqrt{\left(\frac{-4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{84}{9}}$

$d(P, \pi) = \left\|\overrightarrow{PR}_{\vec{n}}\right\|$

d'où $d(P, \pi) \approx 3{,}06$ unités.

THÉORÈME 9.3

Soit $\vec{n}$, un vecteur normal à un plan π, et P, un point de l'espace cartésien.

Si R est un point quelconque du plan π, alors la distance entre le point P et le plan π est donnée par

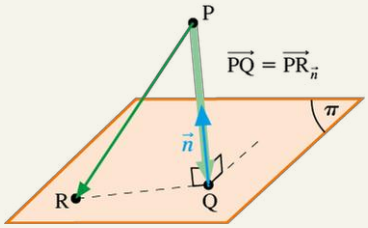
$$d(P, \pi) = \frac{\left|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}.$$

Preuve

Du point P, abaissons une perpendiculaire à π qui rencontre π au point Q.

Soit $\vec{n}$, un vecteur normal à π, et R, un point quelconque de π.

En projetant $\overrightarrow{PR}$ sur $\vec{n}$, nous obtenons $\overrightarrow{PQ}$.



$$d(P, \pi) = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$$
$$= \left\|\overrightarrow{PR}_{\vec{n}}\right\| \qquad (\text{car } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}_{\vec{n}})$$
$$= \left\|\left(\frac{\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\right)\vec{n}\right\| \qquad \text{(théorème 6.7)}$$
$$= \left|\left(\frac{\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}}\right)\right| \|\vec{n}\| \qquad (\text{car } \|k\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\|)$$
$$= \frac{\left|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\vec{n} \cdot \vec{n}\right|} \|\vec{n}\| \qquad \left(\text{car } \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\right)$$
$$= \frac{\left|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|^2} \|\vec{n}\| \qquad (\text{car } |\vec{n} \cdot \vec{n}| = \|\vec{n}\|^2)$$

d'où $d(P, \pi) = \frac{\left|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$

Exemple 2 Soit le plan π : $2x - y + 4z - 1 = 0$ de l'exemple 1 précédent.

Utilisons le théorème 9.3 pour recalculer $d(P, \pi)$, où P(-1, 3, 5).
Soit $\vec{n} = (2, -1, 4)$, un vecteur normal à π, et R(0, -1, 0), un point de π.

$\overrightarrow{PR} = (1, -4, -5)$

$$d(P, \pi) = \frac{|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(1, -4, -5) \cdot (2, -1, 4)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{|-14|}{\sqrt{21}} = \frac{14}{\sqrt{21}}$$

d'où $d(P, \pi) \approx 3{,}06$ unités.

Exercices de compréhension 9.3

1. Soit π : $(x, y, z) = (1, 2, -5) + k_1(-1, 3, 7) + k_2(0, 3, 5)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$.

a) Calculer $d(P, \pi)$, où P est le point P(3, -2, 7).

b) Calculer $d(Q, \pi)$, où Q est le point Q(-1, 5, 4).

THÉORÈME 9.4

La distance $d(P, \pi)$ entre le point $P(x_0, y_0, z_0)$ et le plan π, où π : $ax + by + cz - d = 0$, est donnée par

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

La preuve est laissée à l'étudiant.

COROLLAIRE du théorème 9.4

La distance entre l'origine O(0, 0, 0) et le plan π, où π : $ax + by + cz - d = 0$, est donnée par

$$d(O, \pi) = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

La preuve est laissée à l'étudiant.

Exemple 3 Soit π : $2x - 4y + 4z - 5 = 0$.

a) Calculons la distance entre P(3, -4, 2) et π.

$$d(P, \pi) = \frac{|2(3) + (-4)(-4) + 4(2) - 5|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{25}{6}$$ (théorème 9.4)

d'où $d(P, \pi) = 4{,}1\overline{6}$ unités.

b) Calculons la distance entre l'origine et π.

$$d(O, \pi) = \frac{|5|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{5}{6}$$ (corollaire du théorème 9.4)

d'où $d(O, \pi) = 0{,}8\overline{3}$ unité.

Distance entre deux plans parallèles dans l'espace

Calculer la distance $d(\pi_1, \pi_2)$ entre deux plans parallèles π_1 et π_2 équivaut à calculer la distance $d(P_1, \pi_2)$, où $P_1 \in \pi_1$, ou à calculer la distance $d(P_2, \pi_1)$, où $P_2 \in \pi_2$.

Ainsi,

$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) = d(P_2, \pi_1)$, où $P_1 \in \pi_1$ et $P_2 \in \pi_2$. Donc,

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}, \text{ où } \vec{n} \text{ est un vecteur normal à } \pi_1 \text{ et à } \pi_2, P_1 \in \pi_1 \text{ et } P_2 \in \pi_2.$$

Exemple 1 Calculons la distance entre les deux plans parallèles suivants.

$\pi_1 : (x, y, z) = (-5, 3, -1) + k_1(-2, 1, 0) + k_2(-3, 4, 5)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

$\pi_2 : (x, y, z) = (6, 1, 4) + t_1(-2, 3, 4) + t_2(-4, 2, 0)$, où t_1 et $t_2 \in \mathbb{R}$

Soit $\vec{n} = (-2, 1, 0) \times (-3, 4, 5) = (5, 10, -5)$, un vecteur normal à π_1 et à π_2, car $\pi_1 /\!/ \pi_2$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (5, 10, -5)$$

Soit $P_1(-5, 3, -1)$, un point de π_1, et $P_2(6, 1, 4)$, un point de π_2, ainsi $\overrightarrow{P_1P_2} = (11, -2, 5)$.

Donc $d(\pi_1, \pi_2) = \dfrac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|(11, -2, 5) \cdot (5, 10, -5)|}{\sqrt{5^2 + 10^2 + (-5)^2}} = \dfrac{|10|}{\sqrt{150}}$

d'où $d(\pi_1, \pi_2) \approx 0{,}82$ unité.

Dans le cas particulier où les plans parallèles π_1 et π_2 sont donnés sous forme cartésienne ayant le même vecteur normal $\vec{n}$, nous pouvons utiliser le théorème suivant pour déterminer $d(\pi_1, \pi_2)$.

THÉORÈME 9.5

Soit π_1 et π_2, deux plans parallèles ayant le même vecteur normal $\vec{n}$, où $\vec{n} = (a, b, c)$.

Si $\pi_1 : ax + by + cz - d_1 = 0$ et $\pi_2 : ax + by + cz - d_2 = 0$, alors la distance entre les plans π_1 et π_2 est donnée par

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

La preuve est laissée à l'étudiant.

Exemple 2 Calculons la distance entre les plans parallèles suivants.

$\pi_1 : x + 3y - 2z - 1 = 0$ et $\pi_2 : 4x + 12y - 8z + 3 = 0$

Transformons d'abord π_1 pour obtenir le même vecteur normal pour π_1 et π_2, c'est-à-dire $\vec{n} = (4, 12, -8)$.

Soit $\pi_1 : 4x + 12y - 8z - 4 = 0$.

Ainsi, $d(\pi_1, \pi_2) = \dfrac{|4 - (-3)|}{\sqrt{4^2 + 12^2 + (-8)^2}}$ (théorème 9.5, où $d_1 = 4$ et $d_2 = -3$)

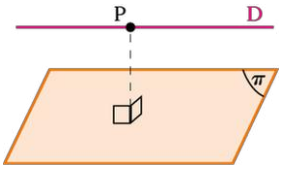
$= \dfrac{7}{\sqrt{224}}$

d'où $d(\pi_1, \pi_2) \approx 0{,}47$ unité.

Distance entre un plan et une droite parallèle au plan dans l'espace

Calculer la distance $d(D, \pi)$ entre un plan π et une droite D parallèle à π équivaut à calculer la distance $d(P, \pi)$, où $P \in D$. Ainsi,

$d(D, \pi) = d(P, \pi)$, où $P \in D$.



Exemple 1 Soit la droite D et le plan π suivants.

$D : (x, y, z) = (3, -3, 1) + t(3, -7, 6)$, où $t \in \mathbb{R}$

$\pi : (x, y, z) = (1, 2, -5) + k_1(2, -1, 4) + k_2(1, 5, 2)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

a) Vérifions si D est parallèle à π.

Soit $\vec{n} = (2, -1, 4) \times (1, 5, 2) = (-22, 0, 11)$, un vecteur normal à π, et $\vec{v} = (3, -7, 6)$, un vecteur directeur de D.

$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$
$= (-22, 0, 11)$

Puisque $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, la droite D est parallèle au plan π.

b) Calculons $d(D, \pi)$.

Soit $P(3, -3, 1) \in D$ et $R(1, 2, -5) \in \pi$, ainsi $\overrightarrow{PR} = (-2, 5, -6)$.

Donc $d(D, \pi) = \dfrac{|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|(-2, 5, -6) \cdot (-22, 0, 11)|}{\sqrt{(-22)^2 + 0^2 + 11^2}} = \dfrac{|-22|}{\sqrt{605}}$

d'où $d(D, \pi) \approx 0{,}89$ unité.

Exercices de compréhension 9.3

2. Calculer $d(\pi_1, \pi_2)$, où $\pi_1 /\!/ \pi_2$, si
$\pi_1 : 3x - 6y + 6z - 1 = 0$ et $\pi_2 : x - 2y + 2z + 1 = 0$.

Applications en géométrie

Utilisons certaines notions vues précédemment pour résoudre des problèmes géométriques.

Exemple 1 Soit la sphère S de centre C(4, 2, -6), qui est tangente au plan $\pi: 9x + y - 9z + 71 = 0$.

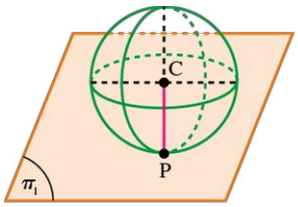
a) Déterminons l'équation de cette sphère sous la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$.

Pour déterminer le rayon r de cette sphère, il faut calculer la distance entre le point C(4, 2, -6) et le plan π.

Soit $\vec{n} = (9, 1, -9)$, un vecteur normal à π, et A(0, -71, 0), un point de π, ainsi $\overrightarrow{CA} = (-4, -73, 6)$.

$$\text{Donc } r = d(C, \pi) = \frac{|\overrightarrow{CA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(-4, -73, 6) \cdot (9, 1, -9)|}{\sqrt{9^2 + 1^2 + (-9)^2}} = \frac{|163|}{\sqrt{163}} = \sqrt{163}$$

d'où S : $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z + 6)^2 = 163$



$\overrightarrow{PC} \perp \pi_1$

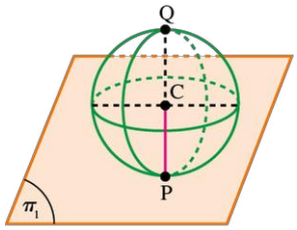
b) Déterminons une équation cartésienne du plan π_1 tangent à la sphère S au point P(5, -7, 3).

Nous savons que $\overrightarrow{PC} \perp \pi_1$. Ainsi,

$\vec{n_1} = \overrightarrow{PC} = (-1, 9, -9)$ est un vecteur normal à π_1.

Donc π_1 : $-1x + 9y - 9z - (-1(5) + 9(-7) + (-9)3) = 0$ (définition 9.5)

d'où π_1 : $-x + 9y - 9z + 95 = 0$



$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{CQ}$

c) Déterminons une équation cartésienne du plan π_2, tangent à la sphère S et parallèle à π_1.

Trouvons d'abord le point de tangence $Q(q_1, q_2, q_3)$ tel que

$$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{PC}$$

$$(q_1 - 4, q_2 - 2, q_3 + 6) = (-1, 9, -9)$$

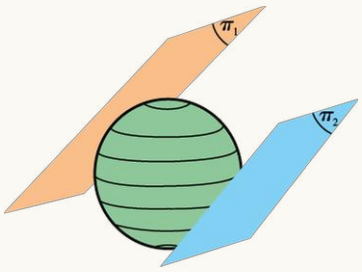
ainsi $q_1 = 3$, $q_2 = 11$ et $q_3 = -15$, et nous obtenons Q(3, 11, -15).

Donc π_2 : $-1x + 9y - 9z - (-1(3) + 9(11) - 9(-15)) = 0$ (définition 9.5)

d'où π_2 : $-x + 9y - 9z - 231 = 0$

d) Représentons π_1, S et π_2 à l'aide de Maple.

```
with(plots):
p1 := implicitplot3d({-x + 9 • y − 9 • z + 95 = 0}, x = -20 ..20, y = -20 ..20, z = -20 ..20,
   color = orange, style = patchnogrid):
s := implicitplot3d({(x − 4)^2 + (y − 2)^2 + (z + 6)^2 = 163}, x = -20 ..20, y = -20 ..20,
   z = -20 ..20, color = green, style = patchcontour):
p2 := implicitplot3d({-x + 9 • y − 9 • z − 231 = 0}, x = -20 ..20, y = -20 ..20, z = -20 ..20,
   color = blue, style = patchnogrid):
display(p1, s, p2, scaling = constrained, orientation = [26, 81, -5]);
```



Exemple 2

a) Déterminons le lieu géométrique des points P(x, y, z) équidistants des plans π_1 et π_2, où $\pi_1 : 2x - 3y + 6z - 5 = 0$ et $\pi_2 : 4x + 4y - 2z + 7 = 0$.

Puisque les points P(x, y, z) doivent être à une distance égale de π_1 et de π_2, nous avons

$$d(\mathrm{P}, \pi_1) = d(\mathrm{P}, \pi_2)$$

$$\frac{|2x - 3y + 6z - 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|4x + 4y - 2z + 7|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2}}$$

$$\frac{2x - 3y + 6z - 5}{7} = \frac{\pm(4x + 4y - 2z + 7)}{6}$$

$$12x - 18y + 36z - 30 = \pm(28x + 28y - 14z + 49)$$

donc $16x + 46y - 50z + 79 = 0$ ou $40x + 10y + 22z + 19 = 0$

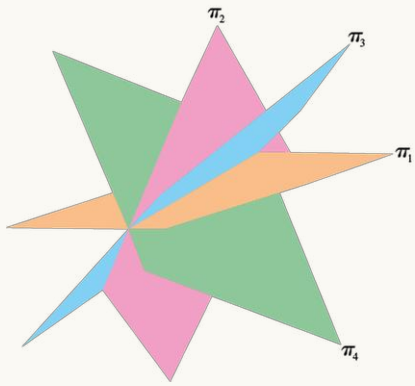
d'où les points équidistants des plans π_1 et π_2 sont situés sur un des plans suivants.

$\pi_3 : 16x + 46y - 50z + 79 = 0$ ou $\pi_4 : 40x + 10y + 22z + 19 = 0$

Les plans π_3 et π_4 sont les plans bissecteurs des angles formés par les plans π_1 et π_2.

b) Représentons π_1, π_2, π_3 et π_4 à l'aide de Maple.

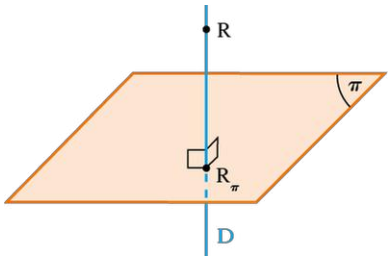
```
with(plots):
p1 := implicitplot3d({2 • x − 3 • y + 6 • z − 5 = 0}, x = -20 ..20, y = -20 ..20, z = -20 ..20,
   color = orange):
p2 := implicitplot3d({4 • x + 4 • y − 2 • z + 7 = 0}, x = -20 ..20, y = -20 ..20, z = -20 ..20,
   color = magenta):
p3 := implicitplot3d({16 • x + 46 • y − 50 • z + 79 = 0}, x = -20 ..20, y = -20 ..20,
   z = -20 ..20, color = cyan):
p4 := implicitplot3d({40 • x + 10 • y + 22 • z + 19 = 0}, x = -20 ..20, y = -20 ..20,
   z = -20 ..20, color = green):
display(p1, p2, p3, p4, scaling = constrained, orientation = [-34, 111, 0], style =
   patchnogrid);
```



Dans certaines circonstances, il peut être utile de déterminer la projection orthogonale d'un point sur un plan.

DÉFINITION 9.14

La **projection orthogonale** d'un point R sur un plan π, notée R_π, correspond au point d'intersection du plan π et de la droite D qui passe par R et qui est perpendiculaire à π.

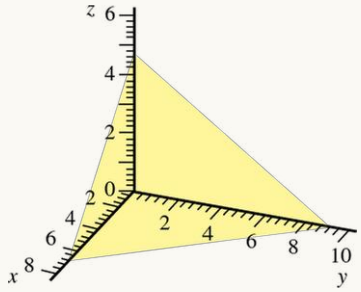


Remarque : La projection orthogonale d'un point R sur le plan π correspond au point R_π du plan π situé le plus proche du point R. De plus, $d(R, \pi) = d(R, R_\pi)$.

Exemple 3 Soit $\pi: 4x + 3y + 6z - 28 = 0$.

a) Représentons, à l'aide de Maple, le plan π dans le premier octant.

```
with(plots):
p := implicitplot3d({4*x + 3*y + 6*z - 28 = 0}, x = 0..7, y = 0..28/3, z = 0..14/3):
display(p, orientation = [28, 74, 0], axes = normal, color = yellow, style = patchnogrid,
  transparency = 0.5, view = [0..8, 0..10, 0..6]);
```

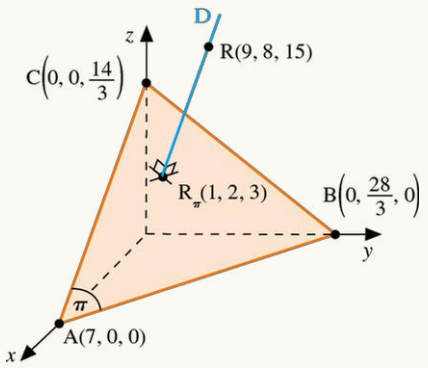


b) Déterminons la projection du point R(9, 8, 15) sur π.

Soit $\vec{v} = (4, 3, 6)$, un vecteur directeur de la droite D qui passe par R et qui est perpendiculaire à π.

Ainsi, sous forme paramétrique, nous avons

$$D: \begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = 8 + 3t \\ z = 15 + 6t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$



Déterminons le point d'intersection de D et de π.

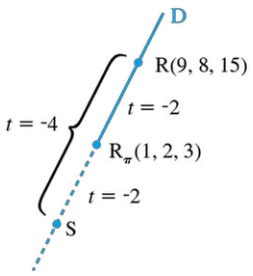
En remplaçant les valeurs de x, y et z dans l'équation de π, nous obtenons

$$4(9 + 4t) + 3(8 + 3t) + 6(15 + 6t) - 28 = 0, \text{ donc } t = -2$$

En remplaçant t par -2 dans les équations paramétriques de D, nous obtenons

$$x = 9 + 4(-2) = 1,\ y = 8 + 3(-2) = 2 \text{ et } z = 15 + 6(-2) = 3$$

d'où $R_\pi(1, 2, 3)$ est la projection de R sur π.



c) Calculons la distance $d(R, \pi)$ entre le point R et le plan π.

$$d(R, \pi) = d(R, R_\pi) = \sqrt{(9-1)^2 + (8-2)^2 + (15-3)^2} = \sqrt{244}$$

d'où $d(R, \pi) \approx 15{,}62$ unités.

d) Déterminons le point symétrique S de R par rapport à π.

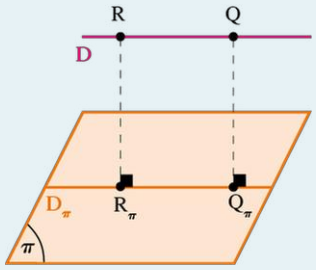
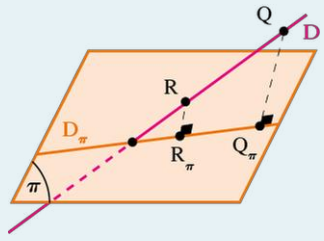
Pour déterminer S, il suffit de poser $t = 2(-2)$ (*voir b)*) dans les équations paramétriques de D. Ainsi,

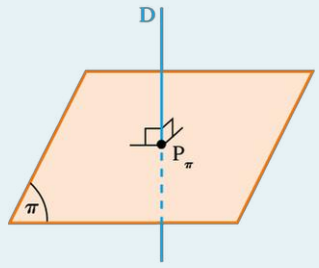
$$x = 9 + 4(-4) = -7,\ y = 8 + 3(-4) = -4 \text{ et } z = 15 + 6(-4) = -9$$

d'où S(-7, -4, -9) est le point symétrique de R par rapport à π.

En utilisant le principe de projection d'un point sur un plan, nous pouvons déterminer la projection d'une droite D sur un plan π.

Les trois représentations graphiques suivantes illustrent les trois cas possibles.

<table>
<tr><th colspan="2">Lorsque D n'est pas perpendiculaire à π et que…</th><th>Lorsque D est perpendiculaire à π…</th></tr>
<tr><td>… D est parallèle à π…</td><td>… D est non parallèle à π…</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td> 
</td><td> 
</td></tr>
<tr><td colspan="2">… la projection de D sur π est une droite notée D$_\pi$.</td><td>… la projection de D sur π est un point noté P$_\pi$.</td></tr>
</table>



Exemple 4 Déterminons la projection de la droite D sur le plan π, où

D : $(x, y, z) = (6, -1, 5) + t(11, -7, 13)$, où $t \in \mathbb{R}$, et

π : $7x - 3y + 2z + 7 = 0$.

Vérifions d'abord la position relative de D et de π.

Soit $\vec{u} = (11, -7, 13)$, un vecteur directeur de D, et $\vec{n} = (7, -3, 2)$, un vecteur normal à π.

Puisque $\vec{u} \neq k\vec{n}$, $\forall\ k \in \mathbb{R}$, D n'est pas perpendiculaire à π.

Donc, la projection de D sur π sera une droite, notée D$_\pi$.

Soit R(6, -1, 5) et Q(-5, 6, -8), deux points de D obtenus en attribuant respectivement à t les valeurs 0 et -1.

L'étudiant peut vérifier qu'en projetant R sur π on obtient R$_\pi$(-1, 2, 3) et qu'en projetant Q sur π on obtient Q$_\pi$(2, 3, -6).

Ainsi, la droite D$_\pi$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{R_\pi Q_\pi} = (3, 1, -9)$.

D'où D$_\pi$: $(x, y, z) = (-1, 2, 3) + r(3, 1, -9)$, où $r \in \mathbb{R}$.

EXERCICES 9.3

1. Calculer la distance $d(P, \pi)$ entre le point P et le plan π, et déterminer si $P \in \pi$.

a) $P(7, -1, 7)$ et $\pi: 2x - y + 4z - 1 = 0$

b) $P(-1, 5, 18)$ et $\pi: 3x + 6y - 2z + 9 = 0$

c) $P(0, 0, 0)$ et $\pi: 7x - 6y + 6z - 2 = 0$

d) $P(3, 3, 5)$ et π, le plan qui passe par les points $A(2, 5, 6)$, $B(-1, 5, 3)$ et $C(0, 4, 3)$

e) $P(-4, 2, 5)$ et $\pi: x - 3 = 0$

f) $P(6, -3, 7)$ et π, le plan passant par $O(0, 0, 0)$ et ayant $\vec{n} = \vec{j}$ comme vecteur normal

2. Calculer $d(\pi_1, \pi_2)$, où $\pi_1 /\!/ \pi_2$.

a) $\pi_1: 3x + 9y - 6z - 2 = 0$

$\pi_2: 2x + 6y - 4z - 3 = 0$

b) $\pi_1: (x, y, z) = (3, -2, 5) + k_1(2, -3, 4) + k_2(4, 5, -3)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

$$\pi_2: \begin{cases} x = 4 + 8t_1 + 4t_2 \\ y = 7t_1 + t_2 \\ z = -1 - 3t_1 + t_2 \end{cases}, \text{ où } t_1 \text{ et } t_2 \in \mathbb{R}$$

3. Calculer la distance $d(D, \pi)$, où D est parallèle à π, et déterminer si la droite D est incluse dans le plan π.

a) $D: (x, y, z) = (4, -1, 2) + t(-2, 16, 11)$, où $t \in \mathbb{R}$

$\pi: (x, y, z) = (5, 1, -2) + k_1(-1, 5, 4) + k_2(0, 2, 1)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

b) $D: x - 1 = \dfrac{6 - y}{7} = \dfrac{4 - z}{5}$

$\pi: 3x - y + 2z - 5 = 0$

4. Déterminer d si la distance entre

a) le point $P(2, -4, 3)$ et le plan $\pi: 3x - 2y + 6z - d = 0$ est de 5 unités ;

b) l'origine et le plan $\pi: 4x - 8y + z - d = 0$ est de 2 unités.

5. **LIEU GÉOMÉTRIQUE**

Soit $A(1, -1, 3)$ et $B(7, 5, -3)$, deux points de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer et identifier le lieu géométrique des points équidistants de A et de B.

b) Déterminer et identifier le lieu géométrique des points deux fois plus près de A que de B.

c) Déterminer une équation du plan perpendiculaire au segment de droite $\overline{AB}$ si le plan passe par le point N du segment de droite $\overline{AB}$, où N est deux fois plus près de A que de B.

6. Déterminer une équation cartésienne

a) de chaque plan parallèle à $\pi: 6x - 2y + 3z - 1 = 0$ situé à une distance de 1 unité de π ;

b) du plan π situé à la même distance de π_1 et de π_2, où $\pi_1 /\!/ \pi_2$ et $\pi_1: 2x - 4y + 4z - 5 = 0$, $\pi_2: 3x - 6y + 6z + 5 = 0$;

c) des plans bissecteurs des angles formés par les plans π_3 et π_4, où $\pi_3: x - 2y + 2z - 1 = 0$, $\pi_4: 3x - 2y + 6z - 4 = 0$.

7. **SPHÈRE**

a) i) Déterminer l'équation de la sphère S de centre $C(3, -5, 7)$ telle que le plan $\pi: 6x - 7y - 6z - 132 = 0$ est tangent à cette sphère.

ii) Déterminer l'équation du plan π_1 passant par C et qui est parallèle à π.

b) Déterminer d si le plan $\pi: x + 2y - 2z - d = 0$ est tangent à la sphère définie par $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + 10 = 0$.

8. **PLAN TANGENT**

Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la sphère

a) centrée à l'origine, au point $P(2, -4, 5)$;

b) centrée à l'origine, au point $P(a, b, c)$;

c) centrée en $C(x_0, y_0, z_0)$, au point $P(a, b, c)$.

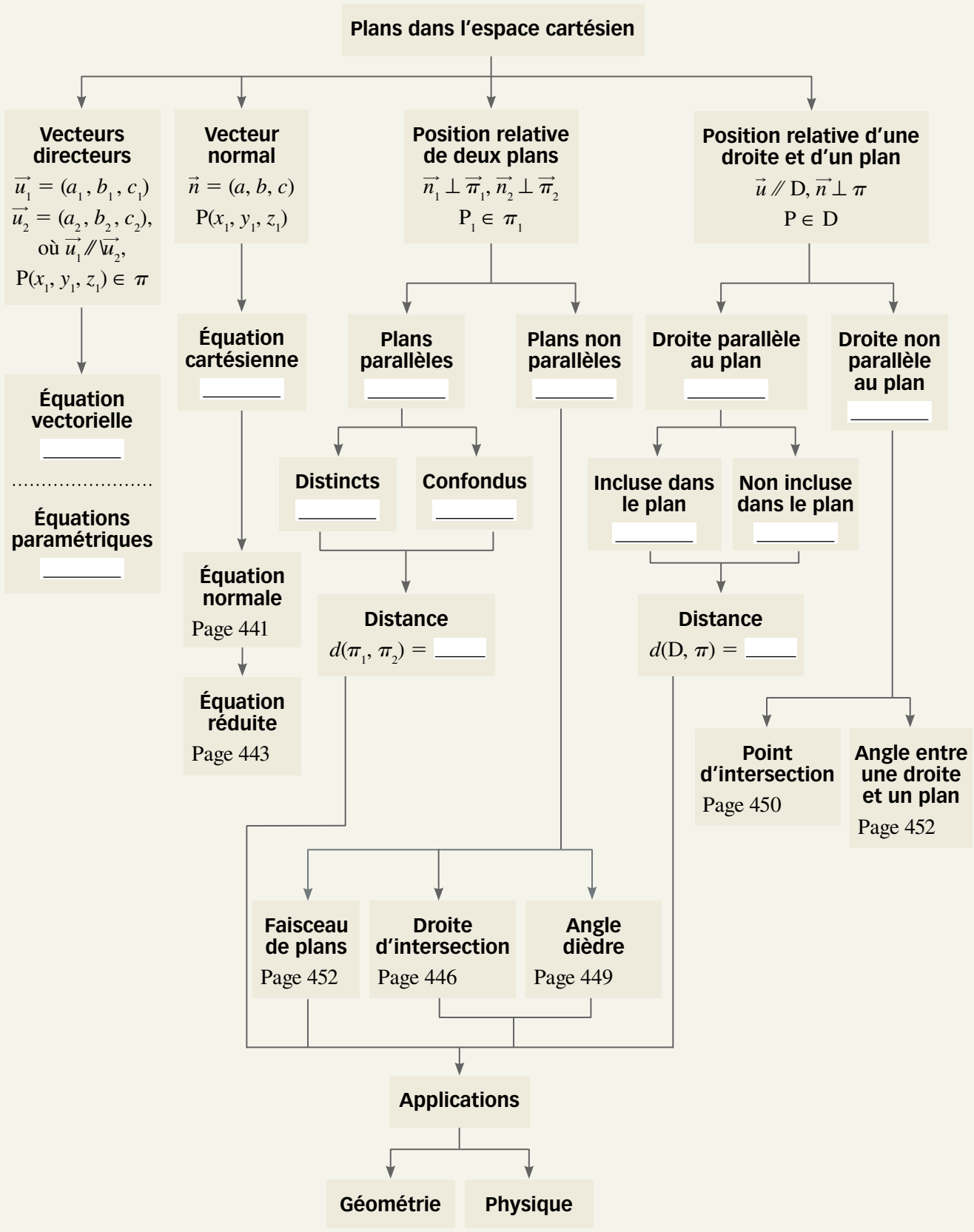
9. Soit la droite $D: x - 5 = \dfrac{y + 5}{2} = \dfrac{12 - 2z}{3}$ et le plan $\pi: 3x - 2y + 7z - 5 = 0$.

a) Déterminer le point du plan π le plus près du point $R(5, -5, 6)$ de D et calculer $d(R, \pi)$.

b) Déterminer le point symétrique S de R par rapport au plan π.

c) Déterminer la projection de la droite D sur le plan π.

Révision des concepts



Exercices récapitulatifs

Administration Biologie Chimie Géométrie Physique Sciences humaines Outil technologique

Les réponses aux exercices récapitulatifs et aux problèmes de synthèse, à l'exception de ceux notés en **rouge**, sont fournies à la fin du manuel.

1. Déterminer une équation vectorielle (É.V.), des équations paramétriques (É.P.) et une équation cartésienne (É.C.) des plans suivants.

a) π passe par l'origine et par les points P(1, -4, 6) et Q(5, 0, 2).

b) π passe par les deux droites parallèles distinctes suivantes.

$D_1: (x, y, z) = (-1, 4, 3) + t_1(2, 5, -3)$, où $t_1 \in \mathbb{R}$

$D_2: (x, y, z) = (1, 7, 0) + t_2(2, 5, -3)$, où $t_2 \in \mathbb{R}$

c) π passe par les deux droites concourantes suivantes.

$D_1: \dfrac{x-3}{2} = y + 4 = \dfrac{z-1}{5}$

$D_2: x - 3 = \dfrac{y+4}{5} = \dfrac{z-1}{2}$

d) π passe par P(-3, 8, 5) et contient la droite $D: (x, y, z) = (5, -2, 1) + t(1, -3, 4)$, où $t \in \mathbb{R}$.

e) π passe par P(5, -1, 3) et est parallèle au plan XOZ.

f) π passe par les points P(1, 1, 1), R(4, 3, 0) et S(2, -1, -6).

g) π passe par les points P(0, 0, 1) et Q(3, 0, 0), et est perpendiculaire au plan $\pi_1: 6x + 2y - z + 5 = 0$.

2. Déterminer une équation cartésienne (É.C.), une équation normale (É.N.) et, si c'est possible, l'équation réduite (É.R.) des plans suivants.

a) π passe par P(-2, 5, 4) et a $\vec{n} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ comme vecteur normal.

b) π passe par l'origine et est parallèle au plan $\pi_2: 7x - 6y + 6z + 1 = 0$.

3. Utiliser le théorème 9.1 pour déterminer une équation cartésienne du plan π passant par Q(2, 1, 0), par R(1, 1, 1) et par

a) l'origine ; **b)** A(-7, 6, 3).

4. Soit les plans suivants.

$\pi_1: x + 2y + z = 0$

$\pi_2: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - 8 = 0\}$

$\pi_3: (x, y, z) = (5, -1, 1) + k_1(5, 1, -1) + k_2(5, 4, 1)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

$\pi_4: \dfrac{x}{2} + y + \dfrac{z}{2} = 1$

$\pi_5: x - 2y + 3z - 10 = 0$

a) Déterminer la position relative des paires de plans suivants et donner une équation vectorielle de la droite d'intersection lorsque les plans sont sécants. Illustrer le schéma correspondant.

i) π_1 et π_2 ii) π_1 et π_4 **iii)** π_3 et π_5

b) Déterminer l'intersection des trois plans suivants. Illustrer le schéma correspondant.

i) π_1, π_2 et π_3 ii) π_1, π_3 et π_5 **iii)** π_1, π_4 et π_5

c) Déterminer l'angle θ formé par les plans suivants.

i) π_1 et π_2 ii) π_1 et π_3 iii) π_2 et π_3

5. Déterminer la position relative des droites et des plans suivants (si la droite est sécante au plan, déterminer le point P d'intersection) et déterminer l'angle θ formé par la droite et le plan. Illustrer le schéma correspondant.

a) $D: 4x - 32 = y + 7 = 6 - 2z$
$\pi: x + 4y - 2z + 5 = 0$

b) $D: (x, y, z) = (5, -2, -2) + t(3, 0, -1)$, où $t \in \mathbb{R}$
$\pi: 2x - y + 5z - 1 = 0$

c) $D: (x, y, z) = (2, -3, 1) + t(-2, 7, -4)$, où $t \in \mathbb{R}$
$\pi: (x, y, z) = (0, 4, -3) + r(-3, 3, 4) + s(-1, -4, 8)$, où r et $s \in \mathbb{R}$

d) $D: \begin{cases} 5x + 2y + z - 15 = 0 \\ 2x + 3y - 4z + 27 = 0 \end{cases}$
$\pi: 3x + 2y - z = 0$

6. Soit les plans suivants.

$\pi_1: 3x + y - 1 = 0$

$\pi_2: 15x + 4y - 3z + 5 = 0$

$\pi_3: 13x + 6y + 5z - 21 = 0$

$\pi_4: x - y - 4z + 13 = 0$

Vérifier si les quatre plans précédents passent par une même droite D ; si oui, déterminer une équation de D.

7. APPLICATION | VITESSE

Quelque temps après son décollage, un avion suit une trajectoire donnée par $(x, y, z) = (11\,;\,22\,;\,2{,}6) + t(5\,;\,6\,;\,0{,}4)$, où $t \in [0{,}5\text{ min}\,;\,12\text{ min}]$. L'avion croise un nuage limité par les plans π_1 et π_2, où

$\pi_1 : 9x + 10y - 6z = 406$ et

$\pi_2 : 10x + 9y + 5z = 1010$,

où $z \in [2\text{ km}, 6\text{ km}]$, x et y sont en kilomètres.

a) Déterminer le temps t_N que prend l'avion pour traverser ce nuage.

b) Déterminer la vitesse moyenne v_A de l'avion, en km/h, pendant qu'il traverse ce nuage.

8. Répondre par vrai (V) ou faux (F), sachant que les droites suivantes sont des droites de l'espace cartésien.

a) Si une droite est perpendiculaire à une droite d'un plan, alors elle est perpendiculaire à ce plan.

b) Si une droite est perpendiculaire à deux droites parallèles non confondues d'un plan, alors cette droite est perpendiculaire au plan.

c) Si une droite est perpendiculaire à deux droites non parallèles d'un plan, alors cette droite est perpendiculaire au plan.

d) Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est perpendiculaire à tout plan parallèle à ce plan.

e) Deux droites perpendiculaires à un même plan peuvent être perpendiculaires entre elles.

f) Par un point, il passe une seule droite perpendiculaire à un plan donné.

g) Si un plan contient une droite perpendiculaire à un autre plan, alors ces deux plans sont obligatoirement perpendiculaires.

h) Si deux plans sont perpendiculaires, alors toute droite parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.

i) Trois points distincts de l'espace cartésien définissent un seul plan.

j) Si deux droites sont non coplanaires, alors elles n'ont aucun point commun.

k) Il existe un seul plan contenant deux droites parallèles.

l) Si deux droites n'ont aucun point commun, alors elles sont non coplanaires.

m) Si une droite et un plan n'ont aucun point commun, alors ils sont parallèles.

9. Calculer la distance entre les éléments donnés et interpréter le résultat.

a) P(-4, 5, 1) et $\pi : 6x - 2y + 3z - 4 = 0$

b) P(2, -15, 8) et

$\pi : (x, y, z) = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k} + k_1(2, 0, -3) + k_2(1, 4, -3)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

c) $\text{D} : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-5}{3} = z$ et $\pi : x - y + z = 0$

d) $\text{D} : (x, y, z) = 3\vec{i} + 8\vec{j} - 6\vec{k} + t(5, 2, -3)$, où $t \in \mathbb{R}$, et

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - 2k_1 + 3k_2 \\ y = 3 + k_1 \\ z = -2 - k_2 \end{cases}, \text{ où } k_1 \text{ et } k_2 \in \mathbb{R}$$

e) $\pi_1 : (x, y, z) = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} + k_1(-2, 1, 1) + k_2(1, 1, -2)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$, et

$$\pi_2 : \begin{cases} x = 5 + 9k_3 + 5k_4 \\ y = -1 - 3k_3 - k_4 \\ z = -2 - 6k_3 - 4k_4 \end{cases}, \text{ où } k_3 \text{ et } k_4 \in \mathbb{R}$$

f) $\pi_1 : x + y - z + 4 = 0$ et

$\pi_2 : 3x + 3y - 3z - 1 = 0$

10. Soit le plan $\pi : 2x + by + cz - 12 = 0$. Déterminer, si c'est possible, les valeurs de b et c si

a) π coupe l'axe des y en 3 ;

b) π coupe l'axe des x en 4 ;

c) π coupe l'axe des z en -2 ;

d) π coupe l'axe des x et des y à la même valeur ;

e) π coupe l'axe des y et des z à la même valeur ;

f) π coupe l'axe des x, des y et des z à la même valeur ;

g) π est parallèle au plan $\pi_1 : x - 2y + 4z + 2 = 0$;

h) π est perpendiculaire à $\vec{n} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$;

i) π passe par l'origine ;

j) π passe par A(-3, 1, 5) ;

k) π est parallèle à l'axe des z ;

l) π est parallèle au plan π_{XOZ} ;

m) π est parallèle au plan π_{YOZ} ;

n) π contient l'axe des x.

11. Déterminer, si c'est possible, les valeurs de a telles que

a) $\pi_1 \perp \pi_2$, où $\pi_1 : x - y + az = 0$ et

$\pi_2 : 3x - 4y + 5z - 1 = 0$;

b) la distance entre le point P(3, -4, 1) et le plan $\pi : 2x - 4y + 4z - a = 0$ est de 3,5 unités ;

c) la droite $D \subset \pi$, où

$$D: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + 5t \\ z = -1 + t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}, \text{ et}$$

$\pi: 2x + y - 9z - a = 0$;

d) $\pi_1 /\!\!/ \pi_2$, où $\pi_1: 3x - 4y + 3z + 5 = 0$ et $\pi_2: ax + 8y - az + 2 = 0$;

e) le plan $\pi: 2x - y + 2z - a = 0$ est tangent à la sphère définie par $(x - 3)^2 + y^2 + (z + 4)^2 = 16$.

12. Soit $\pi_1: 4x - 6y - 3z - 3 = 0$ et $\pi_2: 6x - 9y + cz - d = 0$.

Déterminer les valeurs de c et d

a) si $\pi_1 \perp \pi_2$;

b) si π_1 et π_2 sont parallèles confondus;

c) si $d(\pi_1, \pi_2) = 4$ unités;

d) si la droite d'intersection D des plans π_1 et π_2 est définie par

$D: (x, y, z) = (0, -1, 1) + t(3, 2, 0)$, où $t \in \mathbb{R}$.

13. Soit $\pi_1: 2x - y + 2z + 3 = 0$ et $\pi_2: 6x + 2y - 3z - 4 = 0$.

Déterminer, si c'est possible, une équation

a) du faisceau F de plans, défini par π_1 et π_2;

b) du plan π_3 du faisceau F si $k_1 = 1$ et $k_2 = -1$;

c) du plan π_4 du faisceau F si $k_1 = 2$ et $k_2 = 1$, et préciser à quel axe π_4 est parallèle et à quel plan il est perpendiculaire;

d) du plan π_5 du faisceau F qui est parallèle à l'axe des z;

e) du plan π_6 du faisceau F qui passe par le point P(6, 3, 1);

f) du plan π_7 du faisceau F qui passe par l'origine;

g) du plan π_8 du faisceau F qui est perpendiculaire à π_1;

h) des plans π_9 et π_{10} du faisceau F qui sont bissecteurs des angles formés par π_1 et π_2;

i) du plan π_{11} du faisceau F qui est parallèle au plan $\pi: 2x - 11y + 20z + 9 = 0$;

j) du plan π_{12} du faisceau F qui est parallèle au plan π_{XOY};

k) symétrique de la droite D définie par l'intersection des plans du faisceau F.

14. Soit $\pi_1: x + 2y + 3z = 1$, $\pi_2: ax - y - 9z = 7$ et $\pi_3: 2x + y - 3z = b$.

a) Déterminer les valeurs de a et b si les trois plans engendrent un faisceau F de plans.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan π qui passe par l'origine et qui est perpendiculaire à tous les plans de F.

15. Soit $\pi: 2x - 3y + z + 2 = 0$. Déterminer la projection orthogonale sur π du point P et des droites D_1 et D_2 suivantes. Illustrer chaque cas.

a) P(8, -4, -2)

b) $D_1: (x, y, z) = (8, -4, -2) + t(10, -9, 9)$, où $t \in \mathbb{R}$

c) $D_2: (x, y, z) = (3, -2, 0) + s(2, -3, 1)$, où $s \in \mathbb{R}$

16. **LIEU GÉOMÉTRIQUE**

Déterminer et identifier le lieu géométrique des points situés

a) à égale distance des points P(-3, 5, 7) et Q(5, -3, 9);

b) à 5 unités au-dessus du plan π_{XOY};

c) à 7 unités derrière le plan π_{YOZ};

d) à 4 unités du plan $y - 1 = 0$;

e) à égale distance des plans $\pi_1: x - 2y - 2z - 1 = 0$ et $\pi_2: x + y + 4z + 1 = 0$.

17. Déterminer l'équation des sphères de rayon 2 tangentes au plan $\pi: x + 2y - 2z + 4 = 0$ au point P(-2, 3, 4).

18. **SPHÈRE**

Soit la sphère S, définie par $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 8z - 23 = 0$. Déterminer

a) le centre C et le rayon r de S;

b) une équation cartésienne du plan π_1 tangent à la sphère au point P(3, -3, -1);

c) une équation cartésienne du plan π_2 tangent à la sphère au point Q(-1, 9, -7);

d) $d(\pi_1, \pi_2)$;

e) en quel point P de la sphère le plan $\pi: 3x + 2y + 6z + 64 = 0$ est tangent à la sphère;

f) $S \cap \pi_{XOY}$;

g) $S \cap \pi$, où $\pi: y - 10 = 0$;

h) $S \cap \pi$, où $\pi: z - 4 = 0$;

i) l'intersection de S avec l'axe des x; l'axe des y; l'axe des z.

19. Donner les huit positions relatives de trois plans dans l'espace cartésien, représenter graphiquement ces positions et déterminer le nombre de régions engendrées dans chaque cas.

20. Répondre par vrai (V) ou faux (F) et justifier la réponse, sachant que les droites D et les plans π sont dans l'espace cartésien.

a) Si $\pi_1 \perp \pi$ et $\pi_2 \perp \pi$, alors $\pi_1 /\!/ \pi_2$.

b) Si $\pi_1 \perp \pi$ et $\pi_2 \perp \pi$, alors $\pi_1 \perp \pi_2$.

c) Si $D /\!/ \pi_1$ et $D /\!/ \pi_2$, alors $\pi_1 /\!/ \pi_2$.

d) Si $D \perp \pi_1$ et $D \perp \pi_2$, alors $\pi_1 /\!/ \pi_2$.

e) Si $D_1 \perp \pi$ et $D_2 \perp \pi$, alors $D_1 /\!/ D_2$.

f) Si $\pi_1 /\!/ \pi_2$ et $D \subset \pi_1$, alors $D /\!/ \pi_2$.

g) Si $\pi_1 /\!/ \pi_2$, $D_1 \subset \pi_1$ et $D_2 \subset \pi_2$, alors $D_1 /\!/ D_2$.

h) Si $\pi_1 \perp \pi_2$, $D_1 \subset \pi_1$ et $D_2 \subset \pi_2$, alors $D_1 \perp D_2$.

i) Si $\pi_1 /\!/ \pi_2$, alors il existe une droite D telle que $D /\!/ \pi_1$ et $D /\!/ \pi_2$.

j) Si D_1 et D_2 sont gauches, alors il existe un plan π tel que $D_1 \subset \pi$ et $D_2 \subset \pi$.

21. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan π ayant $\vec{n} = (a, b, c)$ comme vecteur normal est donnée par $ax + by + cz = 0$ si et seulement si le plan passe par O(0, 0, 0).

Problèmes de synthèse

1. Déterminer une équation des plans suivants sous la forme demandée.

É.C. : équation cartésienne

É.V. : équation vectorielle

É.P. : équations paramétriques

É.N. : équation normale

É.R. : équation réduite

a) π passe par l'origine, où $\overrightarrow{u_1} = \vec{i} - \vec{k}$ et $\overrightarrow{u_2} = \vec{j} + \vec{k}$ sont des vecteurs directeurs de π. (É.P.)

b) π contient les deux droites suivantes.

$D_1 : 3 - x = \dfrac{y + 5}{2} = \dfrac{11 - z}{5}$

$D_2 : (x, y, z) = (8, -5, 20) + s(3, -1, 7)$, où $s \in \mathbb{R}$ (É.R.)

c) π passe par les points A(2, -1, 5) et B(0, 4, 7), et est perpendiculaire au plan $\pi_2 : 2x - 3y + 4z - 1 = 0$. (É.V.)

d) π passe par le point A(1, -2, 3) et est perpendiculaire à la droite passant par les points P(-2, 0, 4) et Q(5, 1, -2). (É.N.)

e) π passe par le point milieu du segment de droite AB, où A(6, 0, -1) et B(8, -10, 5), et est perpendiculaire au plan

$\pi_1 : 2x - 3y - z - 1 = 0$ et au plan

$\pi_2 : 5x - 6y - 2z + 4 = 0$. (É.C.)

f) π passe par l'origine, par le point P(4, -5, 2) et par le point d'intersection des plans π_1, π_2 et π_3 suivants.

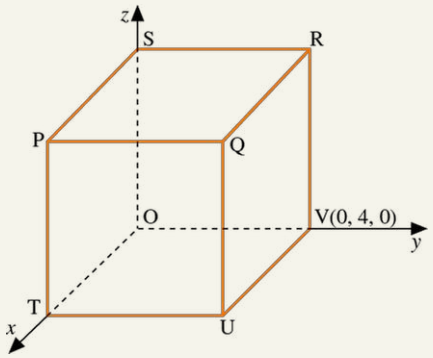
$\pi_1 : 4x - z - 1 = 0$

$\pi_2 : 2x - 3y + 4 = 0$

$\pi_3 : 5y - 2z - 4 = 0$ (É.N.)

g) π passe par les points P(a, b, c), Q(b, c, a) et R(c, a, b), trois points d'un plan tels que $(a + b + c) > 0$. (É.R.)

2. Soit le cube ci-dessous.



Soit les plans π_1 et π_2. Le plan π_1 passe par le point P, par le centre C_1 du quadrilatère OTUV et par le centre C_2 du quadrilatère RQUV. Il coupe en un point A la droite D_1 passant par le point U et le point V. Le plan π_2 passe par le point S, par le point milieu M_1 du segment de droite $\overline{PT}$ et par le point milieu M_2 du segment de droite $\overline{RV}$.

a) Déterminer s si $\overrightarrow{UA} = s\overrightarrow{AV}$.

b) Déterminer une équation vectorielle de la droite d'intersection D_2 de π_1 et π_2.

c) Déterminer l'angle θ entre π_1 et π_2.

d) Déterminer l'angle α entre la droite D_2 et le plan π_3 qui passe par les points P, Q et A.

3. CUBE DE RUBIK

a) Soit un cube de 27 u³ formé de 27 petits cubes de 1 u³ et le plan π_1 qui passe par le centre du cube et qui est perpendiculaire à la grande diagonale passant par O(0, 0, 0) et A(3, 3, 3).



i) Déterminer l'équation cartésienne du plan π_1.

ii) Déterminer le nombre M de petits cubes de 1 u³ que ce plan π_1 rencontre.

b) Soit un cube de 64 u³ formé de 64 petits cubes de 1 u³ et le plan π_2 qui passe par le centre du cube et qui est perpendiculaire à la grande diagonale passant par O(0, 0, 0) et B(4, 4, 4).

i) Déterminer l'équation du plan π_2.

ii) Déterminer le nombre N de petits cubes de 1 u³ que le plan π_2 rencontre.

4. Décrire et représenter graphiquement les lieux géométriques suivants.

a) $x = 3$, dans $\mathbb{R}$

b) $x = 3$, dans $\mathbb{R}^2$

c) $x = 3$, dans $\mathbb{R}^3$

d) $x = 3$ et $y = 2$, dans $\mathbb{R}^2$

e) $x = 3$ et $y = 2$, dans $\mathbb{R}^3$

f) $x = y$, dans $\mathbb{R}^2$

g) $x = y$, dans $\mathbb{R}^3$

h) $x^2 = 1$, dans $\mathbb{R}$

i) $x^2 + y^2 = 1$, dans $\mathbb{R}^2$

j) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, dans $\mathbb{R}^3$

5. Répondre par vrai (V) ou faux (F), sachant que les droites suivantes sont des droites de l'espace cartésien.

a) Si une droite est parallèle à deux droites parallèles d'un plan, alors elle est parallèle à ce plan.

b) Deux droites parallèles chacune à un même plan sont parallèles entre elles.

c) Si D_1 et D_2 sont deux droites parallèles à un même plan, alors D_1 et D_2 peuvent être concourantes.

d) Il existe une seule droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée.

e) Il existe une seule droite passant par un point donné et parallèle à un plan donné.

f) Il existe un seul plan contenant un point donné et parallèle à une droite donnée.

g) Il existe un seul plan contenant un point donné et parallèle à un plan donné.

h) Si deux droites contenues dans deux plans distincts sont concourantes, alors ces deux plans sont non parallèles.

i) Si deux droites non parallèles sont contenues dans deux plans distincts, alors ces deux droites sont concourantes.

j) Si deux droites gauches sont contenues dans deux plans distincts, alors ces deux plans peuvent être parallèles.

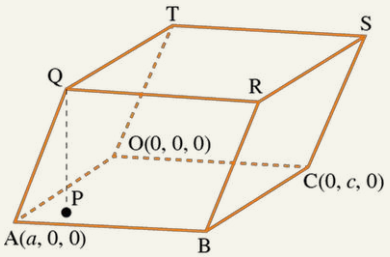
k) Si deux droites distinctes d'un plan π_1 sont parallèles à un plan π_2, alors les deux droites sont parallèles.

l) Deux plans ayant trois points en commun sont confondus.

m) Une droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur intersection.

6. PARALLÉLÉPIPÈDE

Soit le parallélépipède suivant, où OABC est dans le plan π_{XOY}, $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$, $\|\overrightarrow{AO}\| = 4$, $\|\overrightarrow{AQ}\| = 3$, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AO}$, $\angle QAB = \angle QAO = 60°$ et P est la projection du point Q dans le plan π_{XOY}.

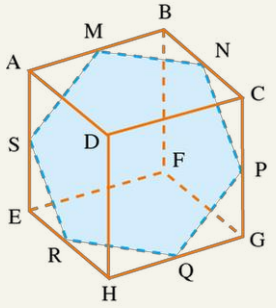


a) Déterminer les coordonnées du point Q.

b) Démontrer que P est sur la bissectrice de $\angle OAB$.

c) Calculer le volume V du parallélépipède.

7. Soit le cube de sommets A, B, C, D, E, F, G et H. Soit M, N, P, Q, R et S, les points milieux respectifs des arêtes AB, BC, CG, GH, HE et EA.



a) Démontrer que les points M, N, P, Q, R et S sont situés dans un même plan.

b) Si le volume du cube précédent est de 8 cm^3,

i) calculer l'aire de l'hexagone SMNPQR ;

ii) calculer le volume du solide dont la base est l'hexagone précédent et dont le sommet est le point D.

8. VOLUME D'UN TÉTRAÈDRE

Vérifier si les points A, B, C et D ci-dessous sont coplanaires. Si oui, calculer l'aire du quadrilatère ABCD ; sinon, calculer le volume du tétraèdre ABCD et donner la hauteur h_A issue du sommet A de ce tétraèdre.

a) A(2, -3, 3), B(7, -1, 6), C(5, 0, -4) et D(10, 2, -1)

b) A(3, -2, 0), B(1, 5, -2), C(-2, 4, 4) et D(2, 1, 1)

9. VOLUME D'UN TÉTRAÈDRE

Soit les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

a) Déterminer l'équation normale (É.N.) et l'équation réduite (É.R.) du plan π_1 qui passe par P(1, -1, 1), où π_1 est perpendiculaire à $\vec{v}$.

b) i) Déterminer les points d'intersection A, B et C du plan π_1 qui coupe respectivement les axes x, y et z.

ii) Calculer l'aire du triangle ABC.

iii) Calculer le volume V du tétraèdre OABC et représenter ce tétraèdre.

c) Déterminer de deux façons différentes la hauteur h, issue de O, du tétraèdre précédent.

10. LIEUX GÉOMÉTRIQUES

Soit $\pi_1 : x + y + z - 1 = 0$ et

$\pi_2 : x + y + z - 2 = 0$.

Soit L_1 et L_2, les lieux définis respectivement par π_1 et par π_2 lorsque $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$.

a) Calculer le volume V de la région comprise entre L_1 et L_2 et représenter graphiquement L_1 et L_2.

b) Déterminer l'équation cartésienne du plan π_3 situé à égale distance de π_1 et de π_2.

c) Déterminer l'équation cartésienne du plan π_4, où π_4 est parallèle à π_1, qui divise le volume V trouvé en a) en deux parties égales.

11. Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Déterminer l'inverse de la matrice A.

b) Utiliser la méthode de la matrice inverse pour résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ 2x + 2y - z = 4 \\ x - 5y + 3z = 6 \end{cases}$$

et donner la position relative des trois plans.

c) Déterminer les valeurs de a telles que le plan d'équation $ax + 10y + 3z = a^2$ passe par l'intersection des plans donnés en b).

12. a) Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants et interpréter le résultat.

i) $\begin{cases} x - z = 0 \\ x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + 2y - 2z = 5 \end{cases}$

b) Soit les plans suivants.

$\pi_1 : 2x + ky + z = 51$

$\pi_2 : 3x + y - 2z = -4$

$\pi_3 : -x + 2y + z = 9$

Déterminer la position relative de ces trois plans, selon la valeur de k.

13. AIRE D'UN TRIANGLE

Soit les points P(2, -3, 4), Q(1, 3, 2) et R(4, 1, 1). Calculer l'aire

a) du triangle PQR ;

b) du triangle formé par les points de projection orthogonale de P, Q et R dans le plan

i) π_{YOZ} ;

ii) $\pi_1 : 10x + 7y + 16z = 0$;

iii) $\pi_2 : 3x - 2y - z - 1 = 0$.

14. TÉTRAÈDRE

Soit $\pi_1 : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ et $\pi_2 : 5x + 4y + 10z = 20$.

a) Déterminer l'équation vectorielle de la droite D d'intersection des plans π_1 et π_2.

b) Représenter π_1, π_2 et D dans le premier octant.

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection,

i) P, du plan π_{XOZ} avec D ;

ii) Q, du plan π_{YOZ} avec D ;

iii) R, de π_2 et de l'axe des z ;

iv) S, de π_1 et de l'axe des z.

d) Calculer le volume V du tétraèdre de sommets P, Q, R et S.

15. VOLUME D'UN TÉTRAÈDRE

a) Soit le point Q(-2, 1, -5) et les droites D_1 et D_2.

$D_1 : (x, y, z) = (1, 2, 0) + s(-1, 3, -4)$, où $s \in \mathbb{R}$

$D_2 : (x, y, z) = (1, 2, 0) + t(1, -2, 3)$, où $t \in \mathbb{R}$

Déterminer le point

i) $P_1 \in D_1$ le plus près de Q ;

ii) $P_2 \in D_2$ le plus près de Q ;

iii) $P_3 \in \pi$ le plus près de Q, où π est le plan contenant D_1 et D_2.

b) Calculer l'aire A du triangle $P_1P_2P_3$.

c) Calculer le volume V du tétraèdre $OP_1P_2P_3$.

16. VOLUME D'UNE PYRAMIDE

Soit les points P(1, -1, 2), Q(3, 0, 1) et R(2, b, 0), où $-2 < b < 2$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan π contenant P, Q et R, sachant que

$$\angle PQR = \text{Arc cos}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right).$$

b) Calculer l'aire A du triangle PQR.

c) Déterminer une équation vectorielle de la droite D passant par P et qui est perpendiculaire au plan π.

d) Soit S(5, -7, 4), un point de D. Déterminer le volume de la pyramide PQRS.

17. Soit π_1 et π_2, deux plans sécants, où

$\pi_1 : (x, y, z) = (2, 1, 1) + a(-2, 1, 8) + b(1, -3, -9)$, où a et $b \in \mathbb{R}$, et

$\pi_2 : (x, y, z) = (2, 0, 1) + c(1, 2, 1) + d(1, 1, 1)$, où c et $d \in \mathbb{R}$.

a) Soit P, un point de π_1. Déterminer la relation entre a et b telle que $P \in \pi_1 \cap \pi_2$.

b) À partir du résultat obtenu en a), déterminer l'équation vectorielle de la droite d'intersection D de π_1 et π_2.

c) Soit π_3, le plan contenant la droite d'équation $D_1 : \frac{2 - x}{3} = \frac{-y}{4} = z + 1$ et qui est perpendiculaire à $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Déterminer si π_3 contient la droite D trouvée en b).

18. Soit les plans π_1 et π_2.

$$\pi_1 : \begin{cases} x = -4 - 5t_1 - s_1 \\ y = 8 + 4s_1 \\ z = 10 + 10t_1 + 3s_1 \end{cases}, \text{ où } t_1 \text{ et } s_1 \in \mathbb{R}$$

$$\pi_2 : \begin{cases} x = 4 + 5t_2 + 2s_2 \\ y = 1 - 3s_2 \\ z = -2 - 10t_2 + s_2 \end{cases}, \text{ où } t_2 \text{ et } s_2 \in \mathbb{R}$$

a) Donner une équation du faisceau F de plans défini par π_1 et π_2.

b) Déterminer un vecteur directeur unitaire de la droite D d'intersection des plans π_1 et π_2.

c) Donner une équation du plan du faisceau si ce plan passe par P(-1, 3, 5).

d) Existe-t-il un plan du faisceau qui soit parallèle au plan π_{XOY} ?

19. Soit π_1 et π_2, deux plans parallèles.

$\pi_1 : 6x - 9y + 15z - 1 = 0$

$\pi_2 : 4x - 6y + 10z - 1 = 0$

Donner une équation du plan

a) π_3 parallèle à π_1 et qui passe par l'origine ;

b) π_4 parallèle à π_2 et qui passe par $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$;

c) π_5 parallèle à π_1 tel que $d(\pi_1, \pi_5) = d(\pi_2, \pi_5)$.

20. LIEU GÉOMÉTRIQUE

Soit $D_1 : (x, y, z) = (-4, 1, 0) + s(2, 1, -6)$, où $s \in \mathbb{R}$, et $D_2 : \frac{x + 1}{-4} = y - 1 = \frac{z + 4}{3}$.

Déterminer et identifier le lieu géométrique de tous les points P(x, y, z) tel que le vecteur $\overrightarrow{QP}$, où Q(1, -2, 5), est perpendiculaire

a) aux droites D_1 et D_2 ;

b) à la droite D_1.

21. LIEU GÉOMÉTRIQUE

Déterminer et identifier le lieu géométrique

a) engendré par une combinaison linéaire de $\overrightarrow{PQ}$ et de $\overrightarrow{PR}$ si P(-4, 2, 5), Q(0, 8, 3) et R(-14, -13, 10) ;

b) engendré par une combinaison linéaire de $\overrightarrow{PQ}$ et de $\overrightarrow{PR}$ si P(-4, 2, 5), Q(0, 8, 3) et R(-13, -14, 10) ;

c) défini par $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$;

d) des points situés à 5 unités de chacune des droites suivantes ;

$D_1 : (x, y, z) = (0, 0, 7) + t_1(0, 0, 1)$, où $t_1 \in \mathbb{R}$

$D_2 : (x, y, z) = (-1, 7, 3) + t_2(0, 0, 1)$, où $t_2 \in \mathbb{R}$

$D_3 : (x, y, z) = (6, 8, -2) + t_3(0, 0, 1)$, où $t_3 \in \mathbb{R}$

e) défini par les points P(3, -1, 2), Q(-2, 0, 5) et R(x, y, z) tels que

i) $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{PQ}$;

ii) $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{PQ}$ et $\|\overrightarrow{PR}\| = 1$;

iii) $\|\overrightarrow{PR}\| = \|\overrightarrow{PQ}\|$;

iv) $\|\overrightarrow{PR}\| = \|\overrightarrow{RQ}\|$;

f) des points situés à égale distance de chacun des plans suivants.

$\pi_1 : x - 1 = 0$

$\pi_2 : y - 2 = 0$

$\pi_3 : z - 3 = 0$

22. LIEU GÉOMÉTRIQUE

a) Déterminer l'équation du lieu géométrique L des points P(x, y, z) situés à égale distance du point F(3, -4, 5) et du plan

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 2k_1 - k_2 \\ y = -2 - k_1 + k_2 \\ z = 1 \end{cases}, \text{ où } k_1 \text{ et } k_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Représenter graphiquement le lieu géométrique L et l'identifier.

23. Déterminer l'expression générale des vecteurs $\vec{v}$ parallèles au plan défini par les vecteurs $\vec{u_1} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ et $\vec{u_2} = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ telle que $\vec{v}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{s} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

24. Déterminer une équation de la droite D passant par le point P(4, 0, -3), qui est parallèle au plan $\pi : -2x + y - 5z - 4 = 0$ et qui est perpendiculaire à la droite $D_1 : (x, y, z) = (3, 5, -1) + t(3, 1, -1)$, où $t \in \mathbb{R}$.

25. Soit les droites suivantes.

$$D_1 : \frac{x-1}{4} = \frac{1-y}{5} = \frac{z+1}{2}$$

$$D_2 : \frac{x+3}{4} = \frac{-y}{2} = \frac{3-z}{1}$$

a) Déterminer le point d'intersection P des deux droites.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan π contenant les droites D_1 et D_2.

c) Trouver les coordonnées de Q, le point d'intersection du plan π et de la droite D_3 suivante.

$D_3 : (x, y, z) = (1, -2, 13) + t(1, -1, 3)$, où $t \in \mathbb{R}$

d) Trouver les coordonnées des points S si le triangle PQS est perpendiculaire à π et que $\|\overrightarrow{PS}\| = \|\overrightarrow{QS}\| = 13$ unités.

26. Soit les droites D_1 et D_2 suivantes.

$D_1 : (x, y, z) = (1, 2, -1) + t(2, -1, 3)$, où $t \in \mathbb{R}$

$$D_2 : \begin{cases} x = 2 - 3s \\ y = 2s \\ z = 1 - s \end{cases}, \text{ où } s \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer la position relative de D_1 et de D_2.

b) Déterminer l'équation du plan π contenant D_2 et qui est parallèle à D_1.

c) Calculer $d(D_1, \pi)$.

d) Déterminer $\overrightarrow{AB}$, où A est un point quelconque de D_1 et B est un point quelconque de D_2.

e) Déterminer A et B tels que $\overrightarrow{AB} /\!/ (\vec{v_1} \times \vec{v_2})$, où $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont des vecteurs directeurs de D_1 et de D_2.

f) Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ et interpréter le résultat.

27. SPHÈRES TANGENTES

Soit $S_1 : (x - 8)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$ et

$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 14y + 6z + 47 = 0$.

a) Vérifier que les deux sphères sont tangentes.

b) Déterminer le point d'intersection P des deux sphères.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan π tangent aux deux sphères au point d'intersection de S_1 et de S_2.

28. Soit le plan $\pi : x - y + z = 0$.

a) Trouver une base orthonormée $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ de π.

b) Déterminer un vecteur $\vec{v_3}$ tel que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

c) Soit $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, une base de $\mathbb{R}^3$. En enlevant un vecteur de B, est-il possible de former une base de π ? Justifier la réponse.

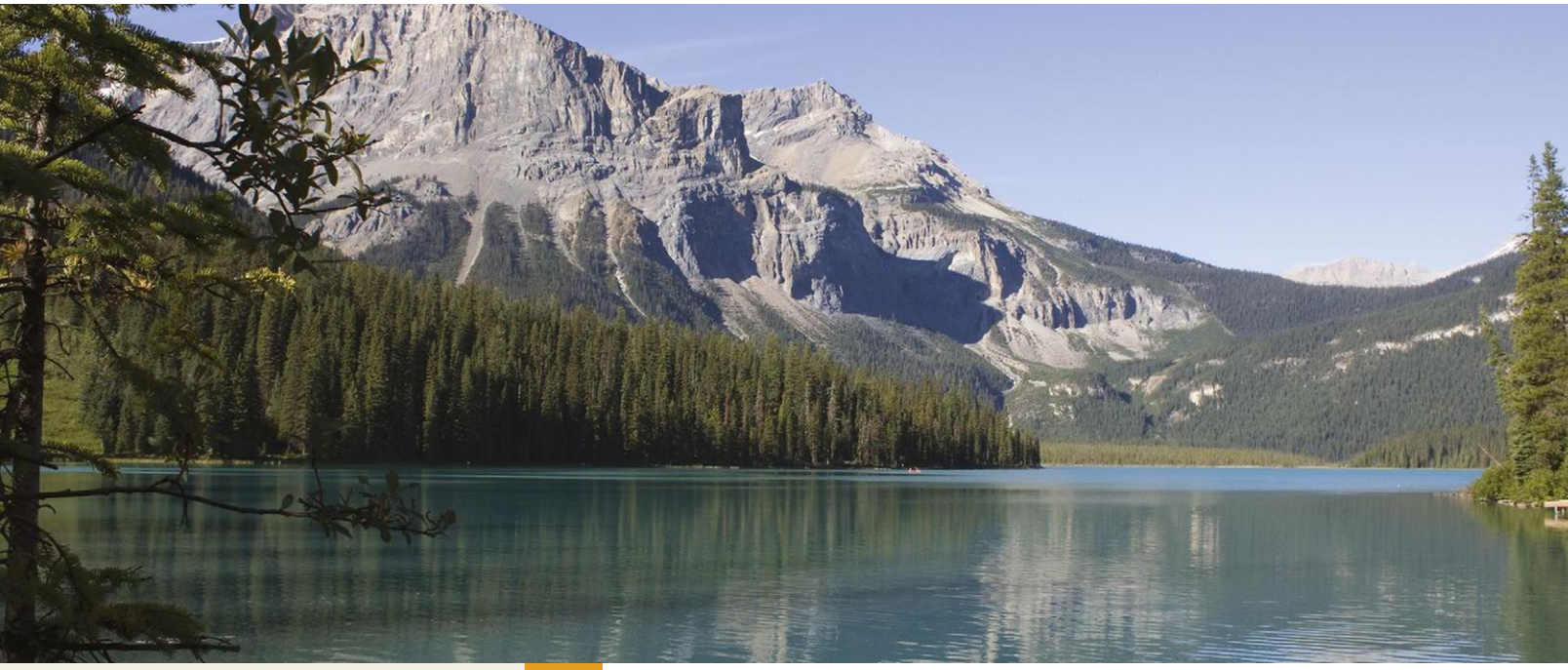
d) Démontrer que $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

29. Soit les plans $\pi_1 : ax + by + cz - d_1 = 0$ et $\pi_2 : ax + by + cz - d_2 = 0$.

Démontrer le théorème 9.5, c'est-à-dire

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

10 Nombres complexes



Perspective historique	476
Exercices préliminaires	477
10.1 Forme binomiale et opérations sur les nombres complexes	477
10.2 Forme trigonométrique et forme exponentielle de nombres complexes	486
10.3 Formule de Moivre et racines *n*-ièmes de nombres complexes	495
Révision des concepts	506
Exercices récapitulatifs	507
Problèmes de synthèse	509

Dans ce chapitre, nous étudierons les nombres complexes, qui sont une extension des nombres réels. Avec ces nombres, nous pouvons résoudre certaines équations algébriques, telles que $x^2 + 1 = 0$, qui n'ont pas de zéro réel. Nous étudierons d'abord les nombres complexes sous la forme binomiale $a + bi$, où a et b sont des nombres réels quelconques et $i^2 = -1$, et nous représenterons ces nombres complexes dans le plan d'Argand. Après avoir défini le module et l'argument d'un nombre complexe, nous présenterons les nombres complexes sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle.

En particulier, l'étudiant pourra résoudre le problème suivant (qui se trouve au n° 14 des exercices récapitulatifs, à la page 508).

Déterminer et représenter graphiquement

a) les racines cubiques de -27 ;

b) les racines cinquièmes de 1024 ;

c) les racines sixièmes de -64 ;

d) les racines quatrièmes de $-i$;

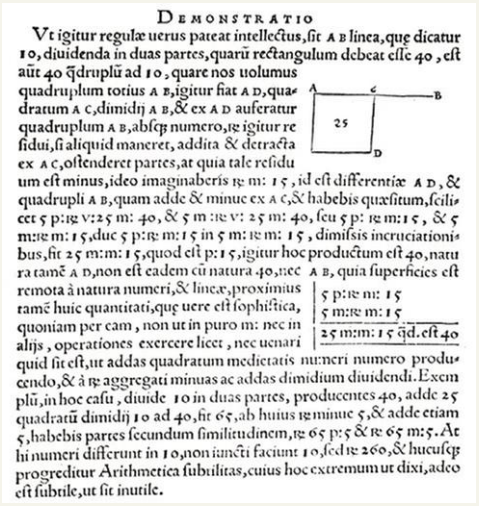
e) les racines cubiques de $(-1 - \sqrt{3}i)$;

f) les racines cubiques de $(-4\sqrt{3} + 4i)$.

De l'impensable à l'imaginaire, puis à une certaine réalité géométrique

Depuis le début de notre ère, les mathématiciens savent que certaines équations du 2e degré n'ont pas de solutions réelles. Que ce soit Diophante (v. 325 - v. 410) à la fin de l'Antiquité, al-Khârizmi (v. 780 - v. 850) dans le monde arabe, Bhaskara (1114-1185) en Inde, Luca Pacioli (1445-1517) ou Nicolas Chuquet (1445-1488) au début de la Renaissance en Europe, tous connaissent les conditions qui font qu'une équation du 2e degré n'a pas de zéros réels. Toutefois, contrairement à ce qu'on entend souvent, ce n'est pas dans le cadre de la résolution des équations du 2e degré que les nombres complexes apparaissent comme entités mathématiques. Il fallait avoir un besoin et un avantage évidents pour regarder de plus près ces solutions impossibles qui impliquaient la racine carrée d'un nombre négatif.

L'occasion s'est d'abord présentée au médecin et mathématicien **Jérôme Cardan** (1501-1576) dans son étude de 1545 sur la résolution des équations du 3e degré. Le procédé qu'il met au point pour déterminer les racines nécessite, à une certaine étape, de trouver deux nombres dont on connaît la différence et le produit, eux-mêmes calculés à partir des coefficients de l'équation. En faisant l'étude de ce type de problèmes, Cardan donne un exemple où il faut trouver deux nombres dont la somme est 10 et le produit, 40. Ces deux nombres se révèlent être $5 + \sqrt{-15}$ et son conjugué, $5 - \sqrt{-15}$. « Mettant de côté les tortures mentales impliquées », Cardan vérifie par un calcul direct que la somme et le produit de ces nombres sont bien respectivement 10 et 40. Selon sa méthode de résolution des équations du 3e degré, ce genre de calculs peut mener à au moins une solution réelle.



DEMONSTRATIO

Vt igitur regulæ uerus pateat intellectus, sit A B linea, quę dicatur 10, diuidenda in duas partes, quarũ rectangulum debeat esse 40, est aũt 40 q̃druplũ ad 10, quare nos uolumus quadruplum totius A B, igitur fiat A D, quadratum A C, dimidij A B, & ex A D auferatur quadruplum A B, absq; numero, rę igitur residui, si aliquid maneret, addita & detracta ex A C, ostenderet partes, at quia tale residuum est minus, ideo imaginaberis rę m: 15, id est differentiæ A D, & quadrupli A B, quam adde & minue ex A C, & habebis quæsitum, scilicet 5 p:rę v:25 m: 40, & 5 m:rę v: 25 m: 40, seu 5 p: rę m:15, & 5 m:rę m: 15, duc 5 p:rę m:15 in 5 m:rę m: 15, dimissis incriuationibus, fit 25 m:m: 15, quod est p:15, igitur hoc productum est 40, natura tamẽ A D, non est eadem cũ natura 40, nec A B, quia superficies est remota à natura numeri, & lineæ, proximius tamẽ huic quantitati, quę uere est sophistica, quoniam per eam, non ut in puro m: nec in alijs, operationes exercere licet, nec uenari quid sit est, ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo, & à rę aggregati minuas ac addas dimidium diuidendi. Exemplũ, in hoc casu, diuide 10 in duas partes, producentes 40, adde 25 quadratũ dimidij 10 ad 40, fit 65, ab huius rę minue 5, & adde etiam 5, habebis partes secundum similitudinem, rę 65 p:5 & rę 65 m:5. At hi numeri differunt in 10, non iamẽti faciunt 10, sed rę 260, & hucusq; progreditur Arithmetica subtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeo est subtile, ut sit inutile.

5 p:rę m: 15
5 m:rę m: 15
25 m:m: 15 q̃d. est 40

La page de l'*Ars Magna* (1545) de Cardan où ce dernier se prononce sur les tortures mentales associées à l'utilisation des nombres complexes.

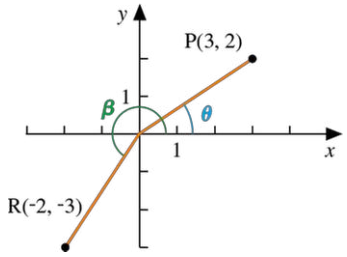
Quelques années plus tard, Rafael Bombelli (v. 1526 - v. 1572), un compatriote de Cardan, le montre explicitement en s'intéressant à l'équation $x^3 = 15x + 4$ dont la racine réelle est 4. Ainsi, le calcul sur ces nombres, qui, *a priori*, n'ont pas de sens, permet tout de même d'obtenir une solution sensée. Bombelli suggère même d'accepter ces nombres comme solutions possibles des équations du 2e degré. Son approche est purement algébrique et symbolique. En 1629, Albert Girard (1590-1633) accepte ces solutions impossibles afin de pouvoir dire que toute équation algébrique a autant de racines que le degré de l'équation : « On pourroit dire à quoy sert ces solutions qui sont impossibles, je respond pour trois choises, pour la certitude de la règle générale, et qu'il ny (*sic*) a point d'autres solutions, et pour son utilité. » Il est tout de même révélateur qu'il appelle ces solutions des solutions « inexplicables ». En 1637, René Descartes (1596-1650) qualifiera ces solutions d'« imaginaires ». Le terme « nombres complexes » sera introduit par Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en 1832 pour distinguer les nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$ de ceux de la forme $a\sqrt{-1}$ qui, eux, garderont l'appellation de nombres imaginaires.

Tout au long du XVIIIe siècle, les nombres complexes seront étudiés dans un cadre purement formel, par des manipulations symboliques. Ainsi, des relations surprenantes s'établissent entre les fonctions trigonométriques, l'exponentiation et les nombres complexes.

Malgré tous ces progrès remarquables à bien des égards, la légitimité de l'usage des nombres complexes en tant que nombres reste en suspens. Les nombres réels prennent leur sens dans la mesure des grandeurs géométriques. La légitimation de l'usage des nombres complexes ne peut se faire uniquement en précisant des règles de manipulations symboliques. Dans cet esprit, les travaux de **Jean-Robert Argand** (1768-1822) suscitent beaucoup d'intérêt et de discussions. Argand voit $\sqrt{-1}$ comme la moyenne proportionnelle entre 1 et -1, autrement dit $\sqrt{-1}$ est tel que 1 est à $\sqrt{-1}$ ce que $\sqrt{-1}$ est à -1. Dès lors, en représentant $\sqrt{-1}$ comme un segment unitaire perpendiculaire à l'origine de l'axe des x, au-dessus de l'axe, et en interprétant le « est à » comme une relation angulaire, on a que 1 est à $\sqrt{-1}$ ce que $\sqrt{-1}$ est à -1. Autrement dit, l'angle de 1 à $\sqrt{-1}$ est le même que celui de $\sqrt{-1}$ à -1. Ainsi prend forme ce que nous appelons dans ce chapitre le plan d'Argand. Ce qui semble étonnant au premier abord, c'est que toutes les formules trouvées de façon purement symbolique au XVIIIe siècle sont cohérentes avec la représentation géométrique.

Exercices préliminaires

1. Soit les points P(3, 2) et R(-2, -3) ci-dessous.



Déterminer :

a) l'angle θ en degrés

b) l'angle β en degrés

c) i) $\|\overrightarrow{OP}\|$ ii) $\|\overrightarrow{OR}\|$

2. Compléter :

a) $\sin(A + B) =$ _____

b) $\sin(A - B) =$ _____

c) $\cos(A + B) =$ _____

d) $\cos(A - B) =$ _____

3. Résoudre, si c'est possible, les équations suivantes, où $x \in \mathbb{R}$.

a) $x^2 - 1 = 0$ b) $x^2 + 1 = 0$

4. Résoudre, si c'est possible, les équations suivantes avec la formule quadratique, où $x \in \mathbb{R}$.

a) $x^2 - 8x + 6 = 0$ b) $x^2 - 4x + 6 = 0$

5. Résoudre les systèmes d'équations suivants.

a) $\begin{cases} 5x - y = 4 \\ 7x - 3y = -4 \end{cases}$ (à l'aide de la méthode de Cramer)

b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 3 = 0 \\ 2y(x + 1) = 0 \end{cases}$

6. Effectuer les divisions suivantes.

a) $\dfrac{x^3 - 4x^2 + 14x - 20}{x^2 - 2x + 10}$

b) $\dfrac{x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 8x - 39}{x^2 - 6x + 13}$

7. Représenter graphiquement et décrire les lieux géométriques suivants.

a) $L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x - 1)^2 + (y + 2)^2 < 4\}$

b) $L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - 4x + y^2 \leq 12 \text{ et } x + 3y - 6 \geq 0\}$

c) $L_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$

8. Déterminer les sommes suivantes.

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, en fonction de n

b) $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$, où $|r| < 1$, en fonction de a, r et n

c) $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$, où $|r| < 1$, en fonction de a, r et n

10.1 Forme binomiale et opérations sur les nombres complexes

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra effectuer différentes opérations sur les nombres complexes.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de donner la définition du nombre i ;
- de donner la définition d'un nombre complexe sous forme binomiale ;
- de représenter un nombre complexe dans le plan d'Argand ;
- d'effectuer les opérations suivantes : addition, soustraction, multiplication et division de deux nombres complexes.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Dans cette section, nous définirons les nombres complexes sous forme binomiale et les opérations addition, soustraction, multiplication et division effectuées sur ces nombres.

Le résultat de ces opérations est un nombre complexe que nous exprimons sous forme binomiale.

Définition et représentation graphique de nombres complexes

DÉFINITION 10.1

Le **nombre *i*** est un nombre tel que $i^2 = -1$.

Exemple 1 Simplifions les puissances de i suivantes en les exprimant en fonction d'un des nombres suivants : 1, -1, i, $-i$.

$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$
$i^5 = i$

a) $i^3 = i^2 i = -1i = -i$

b) $i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$

c) $i^5 = i^4 i = (i^2)^2 i = (-1)^2 i = i$

d) $i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$

e) $i^{19} = (i^2)^9 i = (-1)^9 i = -i$

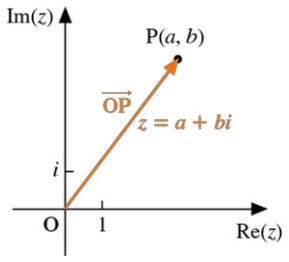
f) $i^{70} = (i^2)^{35} = (-1)^{35} = -1$

DÉFINITION 10.2

Un nombre de la forme $\boldsymbol{z = a + bi}$, où a et $b \in \mathbb{R}$, est appelé **nombre complexe**, où $\boldsymbol{a}$ **est la partie réelle**, notée Re(z), et $\boldsymbol{b}$ **est la partie imaginaire**, notée Im(z), du nombre complexe z.

Cette forme $z = a + bi$, est appelée **forme binomiale** (ou forme algébrique) du nombre complexe z.

À chaque nombre complexe $z = a + bi$, où a et $b \in \mathbb{R}$, nous pouvons associer le point P(a, b) et le vecteur $\overrightarrow{OP}$, que nous pouvons représenter dans le plan complexe ci-contre, appelé plan d'Argand.



La partie réelle a est portée sur l'axe horizontal, qui est appelé « axe des réels » et est noté Re(z), et la partie imaginaire b est portée sur l'axe vertical, dont l'unité est i, et qui est appelé « axe des imaginaires » et est noté Im(z).

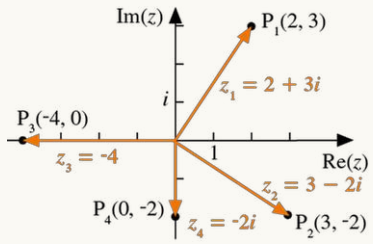
Exemple 2 Représentons, dans le plan d'Argand, les nombres complexes suivants.

$z_1 = 2 + 3i$

$z_2 = 3 - 2i$

$z_3 = -4$

$z_4 = -2i$



Remarque : La nature du nombre complexe $z = a + bi$ dépend de la valeur de a et de celle de b.

1) Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors $z = a + bi$ est un nombre imaginaire.
2) Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $z = bi$ est un nombre imaginaire pur.
3) Si $b = 0$, alors $z = a$ est un nombre réel.

Dans le cas particulier où $a = 0$ et $b = 0$, nous avons $z = 0 + 0i = 0$.

L'ensemble $\mathbb{C}$ de tous les nombres complexes, exprimés sous forme binomiale, est défini par

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a \text{ et } b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$$

À moins d'avis contraire, lorsque $z = a + bi$, nous avons a et $b \in \mathbb{R}$.

Diagramme des ensembles de nombres

Le diagramme suivant présente la relation entre les ensembles de nombres.

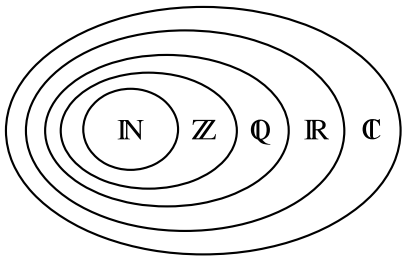
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ et } b \neq 0\right\}$

$\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels

$\mathbb{C}$ = ensemble des nombres complexes



Exemple 3 Déterminons la nature des nombres complexes de l'exemple 2 précédent.

z_i	**Re**(z_i)	**Im**(z_i)	**Nature de** z_i
$z_1 = 2 + 3i$	2	3	Nombre imaginaire
$z_2 = 3 - 2i$	3	-2	Nombre imaginaire
$z_3 = -4$	-4	0	Nombre réel, car $\text{Im}(z_3) = 0$
$z_4 = -2i$	0	-2	Nombre imaginaire pur, car $\text{Re}(z_4) = 0$

DÉFINITION 10.3

Les nombres complexes $z = a + bi$ et $w = c + di$ sont **égaux** si et seulement si

$\text{Re}(z) = \text{Re}(w)$ et $\text{Im}(z) = \text{Im}(w)$, c'est-à-dire $a = b$ et $c = d$.

Exemple 4 Déterminons les valeurs réelles de x et de y telles que

a) $(x - 4) + (3 - 2y)i = 0$

$0 = 0 + 0i$

$x - 4 = 0$ et $3 - 2y = 0$ (définition 10.3)

d'où $x = 4$ et $y = \frac{3}{2}$

b) $(5x - y + 4) + (7x - 3y - 1)i = 8 - 5i$

$$\begin{cases} 5x - y + 4 = 8 \\ 7x - 3y - 1 = -5 \end{cases} \text{ ainsi } \begin{cases} 5x - y = 4 \\ 7x - 3y = -4 \end{cases}$$

Règle de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-16}{-8} = 2 \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-48}{-8} = 6$$

d'où $x = 2$ et $y = 6$

Addition, soustraction, multiplication et division de nombres complexes

Les opérations s'effectuent dans $\mathbb{C}$ de la même façon que les opérations s'effectuent pour les binômes réels.

Exemple 1

Addition

a) Effectuons les additions suivantes.

i) $(4 + 5i) + (2 + 7i) = (4 + 2) + 5i + 7i = 6 + 12i$

ii) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + bi + di = (a + c) + (b + d)i$

Soustraction

b) Effectuons les soustractions suivantes.

i) $(5 + 8i) - (4 + 9i) = (5 - 4) + 8i - 9i = 1 - i$

ii) $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + bi - di = (a - c) + (b - d)i$

10

Ainsi, pour additionner et pour soustraire deux nombres complexes, nous procédons comme suit.

DÉFINITION 10.4

Soit $z = a + bi$ et $w = c + di$, deux nombres complexes.

1) La **somme** $z + w$ est définie par

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

2) La **différence** $z - w$ est définie par

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Exercices de compréhension 10.1

1. Effectuer les opérations suivantes.

a) $(3 + 2i) + (5 - 4i)$

b) $(-2 + 5i) - (3 - 7i)$

Pour effectuer la multiplication de nombres complexes, il faut appliquer la règle de distributivité de la multiplication sur l'addition et exprimer la réponse sous forme binomiale, c'est-à-dire $a + bi$.

Multiplication

Exemple 2 Effectuons les multiplications suivantes.

a) $(2 - 5i)(4 + 3i) = 2(4 + 3i) - 5i(4 + 3i)$ (distributivité de la multiplication sur l'addition)

$= 8 + 6i - 20i - 15i^2$ (en effectuant)

$= 8 - 14i - 15(-1)$ (car $i^2 = -1$)

La réponse est exprimée sous forme binomiale

d'où $(2 - 5i)(4 + 3i) = 23 - 14i$

b) $(a + bi)(c + di) = a(c + di) + bi(c + di)$ (distributivité de la multiplication sur l'addition)

$= ac + adi + bci + bdi^2$ (en effectuant)

$= ac + (ad + bc)i + bd(-1)$ (car $i^2 = -1$)

d'où $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Ainsi, pour multiplier deux nombres complexes, nous procédons comme suit.

DÉFINITION 10.5

Soit $z = a + bi$ et $w = c + di$, deux nombres complexes.

Le **produit** zw est défini par

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Remarque : Il n'est pas nécessaire de mémoriser la formule de la définition précédente ; il suffit d'effectuer les étapes de la multiplication telles qu'elles ont été expliquées dans l'exemple 2 précédent.

10

Exercices de compréhension 10.1

2. Effectuer les multiplications suivantes.

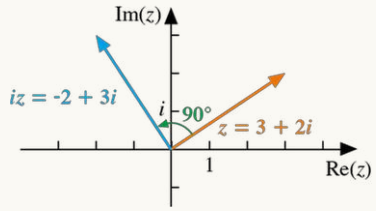
a) $(7 + 5i)(3 + 4i)$

b) $8i(-4 + 3i)$

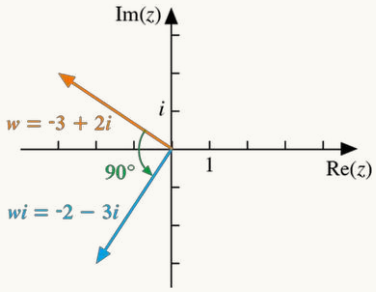
Exemple 3 Soit $z = 3 + 2i$ et $w = -3 + 2i$.

Calculons et représentons graphiquement iz et wi.

a) $iz = i(3 + 2i) = 3i + 2i^2 = -2 + 3i$



b) $wi = (-3 + 2i)i = -3i + 2i^2 = -2 - 3i$



Remarque : La multiplication d'un nombre complexe par i fait subir au vecteur correspondant une rotation de 90° dans le sens antihoraire.

Exemple 4 Effectuons les opérations suivantes.

a) $(3 - 2i)^3 = (3 - 2i)^2(3 - 2i)$

$= ((3 - 2i)(3 - 2i))(3 - 2i)$

$= (9 - 6i - 6i + 4i^2)(3 - 2i)$

$= (5 - 12i)(3 - 2i)$ (car $i^2 = -1$)

$= 15 - 10i - 36i + 24i^2$

$= -9 - 46i$ (car $i^2 = -1$)

b) $(2 + 5i)^4 = (2 + 5i)^2(2 + 5i)^2$

$= (4 + 10i + 10i + 25i^2)(4 + 10i + 10i + 25i^2)$

$= (-21 + 20i)(-21 + 20i)$ (car $i^2 = -1$)

$= 441 - 420i - 420i + 400i^2$

$= 41 - 840i$ (car $i^2 = -1$)

DÉFINITION 10.6

Soit $z = a + bi$, un nombre complexe.

Le **conjugué** de z, noté $\overline{z}$, est le nombre complexe défini par

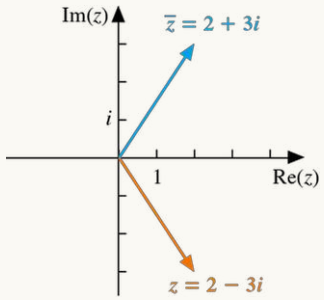
$\overline{z} = a - bi$, c'est-à-dire $\overline{a + bi} = a - bi$.

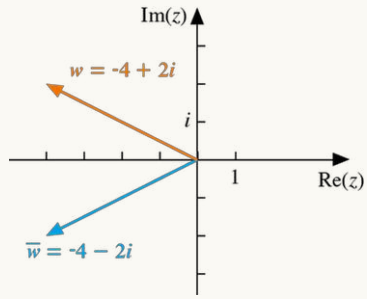
Exemple 5

a) Soit $z = 2 - 3i$ et $w = -4 + 2i$.

Représentons z, $\overline{z}$, w et $\overline{w}$.

$\overline{z} = \overline{2 - 3i} = 2 + 3i$





$\overline{w} = \overline{-4 + 2i} = -4 - 2i$

Conjugué

b) Déterminons les conjugués suivants.

i) $\overline{7i} = \overline{0 + 7i} = 0 - 7i = -7i$

ii) $\overline{5} = \overline{5 + 0i} = 5 - 0i = 5$

Exemple 6 Soit $z = 7 + 2i$. Effectuons les opérations suivantes et déterminons la nature du résultat.

a) $z + \overline{z} = (7 + 2i) + (7 - 2i) = 14$; nombre réel

b) $z - \overline{z} = (7 + 2i) - (7 - 2i) = 4i$; nombre imaginaire pur

$i^2 = -1$

c) $z\overline{z} = (7 + 2i)(7 - 2i) = 49 - 14i + 14i - 4i^2 = 53$; nombre réel

De façon générale, pour $z = a + bi$, nous avons

$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$; nombre réel ;

$z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi$; nombre imaginaire pur ;

$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$; nombre réel.

Nous pouvons utiliser la notion de conjugué pour effectuer la division de deux nombres complexes.

Exemple 7 Effectuons les divisions suivantes.

Division de nombres complexes

a) $\dfrac{8 - 3i}{5 + 4i} = \left(\dfrac{8 - 3i}{5 + 4i}\right)\left(\dfrac{5 - 4i}{5 - 4i}\right)$ (en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur)

$= \dfrac{40 - 32i - 15i + 12i^2}{25 - 20i + 20i - 16i^2}$ (en effectuant)

$= \dfrac{28 - 47i}{41}$ (car $i^2 = -1$)

La réponse est exprimée sous forme binomiale

d'où $\dfrac{8 - 3i}{5 + 4i} = \dfrac{28}{41} - \dfrac{47}{41}i$

b) $\dfrac{a+bi}{c+di}$, où $(c+di) \neq (0+0i)$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \left(\frac{a+bi}{c+di}\right)\left(\frac{c-di}{c-di}\right)$$ (en multipliant le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur)

$$= \frac{ai - adi + bci - bdi^2}{c^2 - cdi + cdi - di^2}$$ (en effectuant)

$$= \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2}$$ (car $i^2 = -1$)

d'où $\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i$

Ainsi, pour diviser deux nombres complexes, nous procédons comme suit.

DÉFINITION 10.7

Soit $z = a + bi$ et $w = c + di$, où $w \neq 0$, deux nombres complexes.

Le **quotient** $\dfrac{z}{w}$ est défini par

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

Remarque : Il n'est pas nécessaire de mémoriser la formule de la définition précédente ; il suffit d'effectuer les étapes de la division telles qu'elles ont été expliquées dans l'exemple 7 précédent.

Exercices de compréhension 10.1

3. Effectuer $\dfrac{5-2i}{3+6i}$.

Exemple 8 Effectuons les divisions suivantes.

a) $\dfrac{4}{7i}$ (de deux façons différentes)

Façon 1 : $\dfrac{4}{7i} = \left(\dfrac{4}{7i}\right)\left(\dfrac{-7i}{-7i}\right) = \dfrac{-28i}{-49i^2} = \dfrac{-28i}{49} = \dfrac{-4}{7}\,i$

Façon 2 : $\dfrac{4}{7i} = \left(\dfrac{4}{7i}\right)\left(\dfrac{i}{i}\right) = \dfrac{4i}{7i^2} = \dfrac{-4}{7}\,i$

b) $\dfrac{1}{i^3} = \dfrac{1}{i^2 i} = \dfrac{1}{-i} = \left(\dfrac{1}{-i}\right)\left(\dfrac{i}{i}\right) = \dfrac{i}{-i^2} = \dfrac{i}{1} = i$

Remarque : Il est toujours possible d'exprimer i^n, où $n \in \mathbb{Z}$, en fonction de $\pm i$ ou de ± 1.

Exemple 9 Exprimons $\dfrac{i}{(2+i)^4} - i(2+i)$ sous la forme binomiale.

$$\begin{aligned}
\frac{i}{(2+i)^4} - i(2+i) &= \frac{i}{(2+i)^2(2+i)^2} - 2i - i^2 \\
&= \frac{i}{(3+4i)(3+4i)} - 2i + 1 && \text{(car } (2+i)^2 = 3+4i \text{ et } i^2 = -1\text{)} \\
&= \frac{i}{-7+24i} - 2i + 1 && \text{(car } (3+4i)(3+4i) = -7+24i\text{)} \\
&= \left(\frac{i}{-7+24i}\right)\left(\frac{-7-24i}{-7-24i}\right) - 2i + 1 \\
&= \frac{24-7i}{625} - 2i + 1 && \text{(car } i(-7-24i) = 24-7i \text{ et} \\
&&& (-7+24i)(-7-24i) = 625\text{)} \\
&= \frac{24}{625} - \frac{7}{625}i - 2i + 1 \\
&= \frac{649}{625} - \frac{1257}{625}i
\end{aligned}$$

Énonçons maintenant certaines propriétés relatives au conjugué de nombres complexes.

Soit $z = a + bi$ et $w = c + di$, deux nombres complexes.

Propriété 1 $\overline{\overline{z}} = z$

Propriété 2 $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

Propriété 3 $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

Propriété 4 $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$, si $w \neq 0$

La démonstration de ces propriétés est demandée à l'exercice récapitulatif n° 18, à la page 509.

EXERCICES 10.1

1. Pour chacun des nombres complexes z suivants, déterminer la partie réelle (Re(z)), la partie imaginaire (Im(z)) et la nature de ces nombres. Représenter graphiquement ces nombres.

a) $z_1 = -3 + 2i$ b) $z_2 = 3i$

c) $z_3 = 4$ d) $z_4 = 2 - 3i$

2. Simplifier les puissances de i suivantes.

a) i^6 b) i^{13} c) $(-i)^{85}$ d) $(-i)^{11}i^{27}$

3. Déterminer les valeurs réelles de x et de y si :

a) $3x + 5yi + 2y - 4xi = 23i$

b) $(x + 1 + yi)(4 + 6i) = -10 - 2i$

4. Effectuer les opérations suivantes en exprimant la réponse sous forme binomiale.

a) $(3 - 4i) + (5 + 9i)$

b) $(7 + 5i) - (9 - 2i)$

c) $(2 + i) + (1 - 2i) - (4 + 3i)$

d) $(3 - 6i)(2 - 4i)$

e) $4(2 + i) - 5i(4 - 2i)$

f) $(2 + 5i)(8 + 2i) + 1 - 4i$

g) $(2 + 9i)(1 - 2i)(3 - 6i)$

h) $(1 + i)^3 + (1 - i)^2$

i) $(1 + i)^2 - (1 + i)^4$

5. Pour chacun des nombres z suivants, déterminer $\overline{z}$, puis calculer $z + \overline{z}$, $z - \overline{z}$, $z\overline{z}$ et $\overline{\overline{z}}$.

a) $z = 3 - 4i$

b) $z = (3 + 16i) + (3 - 4i)$

c) $z = (4 - 4i)^2$

d) $z = (2 + 5i)(2 - 2i)$

6. Effectuer les opérations suivantes en donnant la réponse sous forme binomiale.

a) $\dfrac{6 + 8i}{3i - 1}$ b) $\dfrac{3 + i}{5 - i}$

c) $\dfrac{(5 + 2i)(1 - i)}{(2 - 4i) + (4 + 2i)}$ d) $3 + i + \dfrac{5 - i}{3 - i}$

e) $\dfrac{6 - i}{2 + i} - \dfrac{1 - i}{4 - i}$ f) $2 + 3i - \dfrac{(2 + 5i)^2}{1 - i}$

7. Transformer les nombres suivants sous forme binomiale.

a) i^{-1} b) i^{-2} c) i^{-17} d) $3i^{-3} + 4i^{-4}$

8. Soit $z = 4 - 5i$ et $w = -3 + 2i$. Vérifier que :

a) $\overline{2z} = 2\overline{z}$ b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

c) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ d) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$

9. Soit $z = a + bi$, où $z \neq 0$. Effectuer les opérations suivantes et déterminer la nature du résultat.

a) $\overline{z} - z$ b) $\dfrac{1}{z\overline{z}}$ c) $\dfrac{z + \overline{z}}{z - \overline{z}}$

10. Soit $z = a + bi$. Déterminer les valeurs de a et b si :

a) $z = \overline{z}$ b) $z + \overline{z} = 0$ c) $z\overline{z} = 0$

10.2 Forme trigonométrique et forme exponentielle de nombres complexes

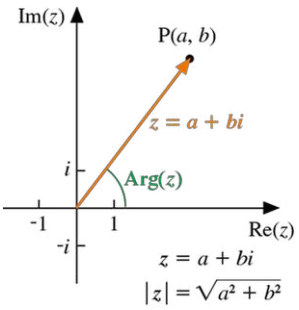
Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra exprimer un nombre complexe sous différentes formes.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de déterminer le module d'un nombre complexe ;
- de déterminer l'argument principal d'un nombre complexe ;
- d'exprimer un nombre complexe sous forme trigonométrique ;
- d'exprimer un nombre complexe sous forme exponentielle ;
- d'effectuer la multiplication et la division de nombres complexes en utilisant les formes trigonométrique et exponentielle.

Plan d'Argand





Jean-Robert Argand (1768-1822)

Il y a environ 200 ans...

Nous ne savons presque rien de la vie de **Jean-Robert Argand**, sinon qu'il était comptable à Paris. Son petit livre sur la représentation géométrique des nombres complexes, publié à compte d'auteur et sans que son nom y apparaisse, serait probablement passé complètement inaperçu si Argand ne l'avait envoyé au géomètre académicien Adrien-Marie Legendre (1752-1833) qui, lui-même, le fait parvenir à une de ses connaissances, le professeur de mathématiques François Français (1768-1810). À la mort de ce dernier, en 1810, son frère, Jacques Français (1775-1833), découvre le livre parmi les papiers du défunt. Ce livre lui inspire un article qui est publié en 1813 dans les *Annales de mathématiques*, la première revue entièrement consacrée aux mathématiques. Dans son article, Français mentionne le livre d'un auteur inconnu et demande à ce dernier de se manifester pour recevoir la reconnaissance qu'il mérite. Argand répond. Il s'ensuit une série d'articles dans lesquels Argand et Français favorisent l'usage de la représentation géométrique des nombres complexes alors qu'un autre mathématicien, François Joseph Servois (1768-1847), préconise plutôt une approche purement algébrique.

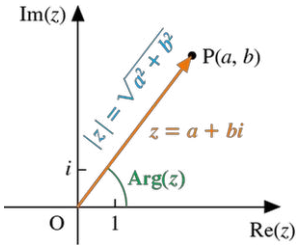
Forme trigonométrique de nombres complexes

DÉFINITION 10.8

Soit $z = a + bi$, et le vecteur $\overrightarrow{OP}$, où P(a, b).

1) Le **module** de z, noté $|z|$, est la distance entre les points O$(0, 0)$ et P(a, b) qui correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{OP}$.
   Ainsi, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2) L'**argument principal** de z, noté Arg(z), est l'angle mesuré de l'axe Re(z) vers le vecteur $\overrightarrow{OP}$ dans le sens antihoraire, où $0 \leq \text{Arg}(z) < 2\pi$.
   Un **argument** de z, noté arg(z), est un angle θ, où
   $\theta \in \{\text{Arg}(z) + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z} \text{ et Arg}(z) \in [0, 2\pi[\}$.
   Dans le cas où $z = 0 + 0i$, l'argument de z n'est pas défini.



Remarque : Les angles peuvent également être exprimés en degrés.
Dans ce cas, $\theta \in \{\text{Arg}(z) + k360° \,|\, k \in \mathbb{Z} \text{ et Arg}(z) \in [0°, 360°[\}$.

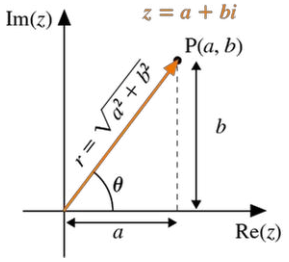
Soit $z = a + bi$ et $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Du graphique ci-contre, nous avons

$$\cos\theta = \frac{a}{r}, \text{ donc } a = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{b}{r}, \text{ donc } b = r\sin\theta$$

donc $z = r\cos\theta + r\sin\theta\, i$.

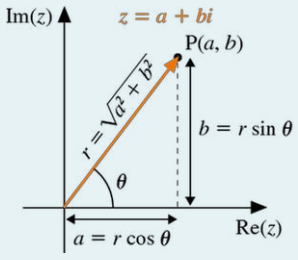


De façon générale, $z = a + bi$ s'écrit sous forme trigonométrique, aussi appelée forme polaire, comme suit.

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = r\,\text{cis}\,\theta \qquad \text{(abréviation de } r(\cos\theta + i\sin\theta))$$

où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$

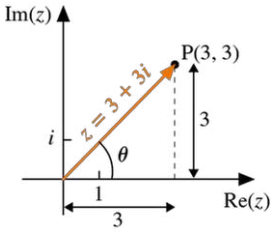


Exemple 1 Déterminons le module, l'argument principal et la forme trigonométrique des nombres complexes suivants, et représentons ces nombres complexes dans le plan d'Argand.

a) Soit $z = 3 + 3i$.

$$r = |z| = \sqrt{3^2 + 3^2}$$
$$= \sqrt{18}$$
$$= 3\sqrt{2}$$

Forme binomiale



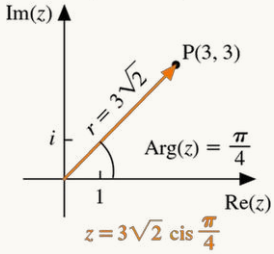
Puisque $\tan\theta = \frac{3}{3}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$,

donc $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$ (car $\text{Arg}(z) = \theta$)

d'où $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ou

$z = 3\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}$

Forme trigonométrique



b) Soit $w = 3 - 4i$.

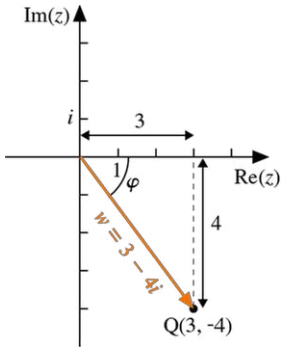
$r = |w| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$

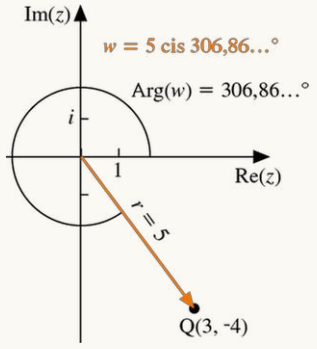
Puisque $\tan\varphi = \frac{4}{3}$, $\varphi = 53{,}13\ldots°$

donc $\text{Arg}(w) = 306{,}86\ldots°$ (car $\text{Arg}(w) = 360° - \varphi$)

d'où $w = 5(\cos 306{,}86\ldots° + i\sin 306{,}86\ldots°)$ ou

$w = 5\,\text{cis}\,306{,}86\ldots°$



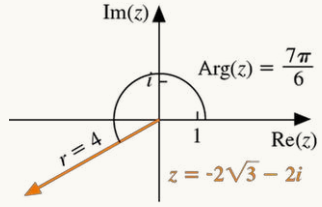


Exemple 2 Écrivons le nombre complexe z suivant sous la forme $a + bi$ et représentons ce nombre complexe dans le plan d'Argand.

$$z = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$= 4\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

d'où $z = -2\sqrt{3} - 2i$



Exercices de compréhension 10.2

1. Écrire le nombre complexe z suivant sous la forme $a + bi$ et représenter ce nombre dans le plan d'Argand.

$z = 5\,\text{cis}\,130°$

10

DÉFINITION 10.9

Les **nombres complexes** non nuls $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ sont **égaux** si et seulement si

$r_1 = r_2$ et $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, ou $\theta_1 = \theta_2 + k360°$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 3 Les nombres complexes suivants sont égaux.

a) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{25\pi}{4} + i\sin\frac{25\pi}{4}\right)$ $\left(\text{car } \frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 3(2\pi)\right)$

b) $4(\cos 37° + i\sin 37°) = 4(\cos(-323°) + i\sin(-323°))$ (car $37° = -323° + 1(360°)$)

Forme exponentielle de nombres complexes

Dans le cours de calcul intégral [1], il est démontré que, pour toute valeur réelle de x,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

En utilisant les développements précédents, nous acceptons sans démonstration que, pour tout nombre complexe z, nous avons

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots$$

En posant $z = ix$, où $x \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \ldots \\ &= 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \ldots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \ldots \qquad (\text{car } i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ \ldots) \\ &= \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right] + i\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right] \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

d'où $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Ainsi, pour un angle θ quelconque, exprimé en radians, nous obtenons la formule d'Euler suivante.

Formule d'Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$



Leonhard Euler (1707-1783)

Il y a environ 275 ans...

La formule précédente a été démontrée par **Leonhard Euler**. Les travaux de ce mathématicien portèrent entre autres sur la recherche d'une bonne définition des logarithmes des nombres complexes, alors même que le logarithme d'un nombre négatif semble *a priori* ne pas avoir de sens. Ici l'imaginaire dépasse la réalité, et cela, à l'aide de la mise en évidence de relations entre les nombres complexes et les fonctions trigonométriques, pourtant aussi en apparence sans lien. Euler fut l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Né à Bâle, en Suisse, il y termine ses études universitaires à l'âge de 15 ans. En 1726, le tsar Pierre le Grand le nomme membre de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg. En 1741, le roi de Prusse, Frédéric II le Grand, le convainc d'accepter un poste à l'Académie de Berlin. C'est là qu'Euler travaille notamment sur les nombres complexes, introduisant au passage le symbole i pour $\sqrt{-1}$. En 1771, il devient presque aveugle, mais, grâce à sa mémoire prodigieuse, il continue à travailler assidûment.

1. G. CHARRON et P. PARENT, *Calcul intégral*, 5e édition, Montréal, Beauchemin, 2016, section 6.6.

Exemple 1

a) En remplaçant θ par π dans la formule d'Euler, nous avons

$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$ (car $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$)

$e^{i\pi} = -1 + i(0)$ (car $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$)

Ainsi, nous obtenons les égalités suivantes.

$e^{i\pi} = -1$

Dans cette égalité, nous retrouvons un nombre irrationnel « e » à une puissance imaginaire « $i\pi$ », qui donne un entier « -1 ».

$e^{i\pi} + 1 = 0$

L'égalité ci-dessus relie entre elles cinq constantes fondamentales, soit e, i, π, 1 et 0.

b) En remplaçant θ par $\frac{\pi}{2}$ dans la formule d'Euler, nous obtenons $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$.

c) En remplaçant θ par 2π dans la formule d'Euler, nous obtenons $e^{2i\pi} = 1$.

En utilisant la formule d'Euler, nous pouvons écrire z sous forme exponentielle à partir de z exprimé sous forme trigonométrique.

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ (forme trigonométrique)

$z = re^{i\theta}$ ($e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$)

Forme exponentielle

Forme exponentielle :

$z = re^{i\theta}$, où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, exprimé en radians

Exemple 2 Soit $z = -2 + 2i$ et $w = 4e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

a) Exprimons z sous forme exponentielle.

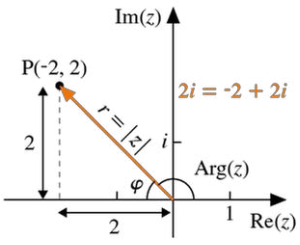
$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Puisque $\tan \varphi = \frac{2}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$

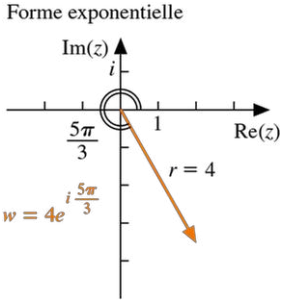
donc $\text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{4}$ $\left(\text{car } \text{Arg}(z) = \pi - \frac{\pi}{4}\right)$

d'où $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

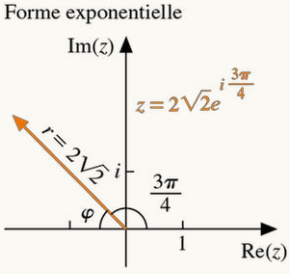
Forme binomiale



Forme exponentielle



Forme exponentielle



b) Exprimons w sous forme binomiale.

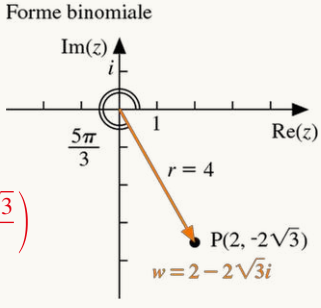
$w = 4e^{i\frac{5\pi}{3}}$

$= 4\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$ ($e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$)

$= 4\left(\frac{1}{2} + i\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ $\left(\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ et } \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

d'où $w = 2 - 2\sqrt{3}i$

Forme binomiale



Multiplication et division de nombres complexes sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle

THÉORÈME 10.1

1) Multiplication sous la forme trigonométrique :

Si $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, alors

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)).$$

2) Multiplication sous la forme exponentielle :

Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, alors

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Preuve

1) $z_1 z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)\, r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

$= r_1 r_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2)$

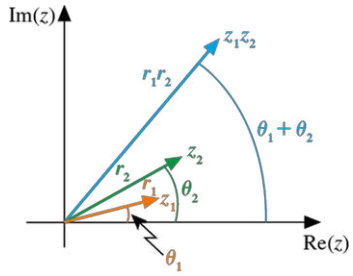
$= r_1 r_2((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2))$ (car $i^2 = -1$)

$= r_1 r_2(\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2))$ (car $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ et $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$)

Le théorème 10.1 signifie que lorsque nous multiplions deux nombres complexes exprimés sous forme trigonométrique ou sous forme exponentielle, leurs modules se multiplient et leurs arguments s'additionnent.

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2| = r_1 r_2 \text{ et}$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \theta_1 + \theta_2$$



En généralisant le théorème 10.1 à un produit de n nombres complexes, nous obtenons le corollaire suivant, que nous acceptons sans démonstration.

COROLLAIRE du théorème 10.1

1) Multiplication sous la forme trigonométrique :

Si $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, …, $z_n = r_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$, où $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n(\cos (\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i \sin (\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)).$$

2) Multiplication sous la forme exponentielle :

Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, …, $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)}.$$

THÉORÈME 10.2

1) Division sous la forme trigonométrique :

Si $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, où $r_2 \neq 0$, alors

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

2) Division sous la forme exponentielle :

Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, où $r_2 \neq 0$, alors

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

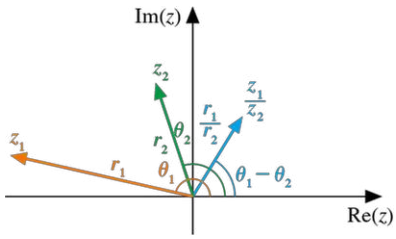
Preuve

2) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} e^{i\theta_1 - i\theta_2} \qquad \left(\text{car } \frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}, \text{ si } b \neq 0\right)$$

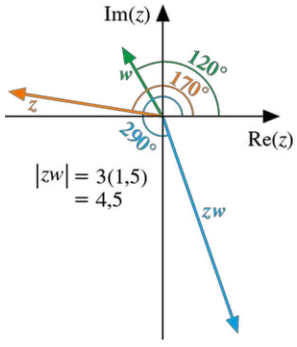
$$= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Le théorème 10.2 signifie que lorsque nous divisons deux nombres complexes exprimés sous forme trigonométrique ou sous forme exponentielle, leurs modules se divisent et leurs arguments se soustraient.



$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2} \text{ et}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \theta_1 - \theta_2$$



Exemple 1 Soit $z = 3(\cos 170° + i\sin 170°)$ et $w = 1{,}5(\cos 120° + i\sin 120°)$.

a) Effectuons zw et représentons z, w et zw dans le plan d'Argand.

$$zw = (3(\cos 170° + i\sin 170°))(1{,}5(\cos 120° + i\sin 120°))$$

$$= 3(1{,}5)((\cos(170° + 120°) + i\sin(170° + 120°)) \qquad \text{(théorème 10.1)}$$

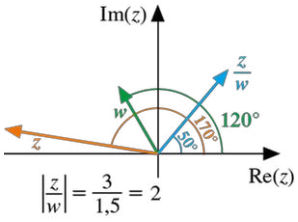
$$= 4{,}5(\cos 290° + i\sin 290°)$$

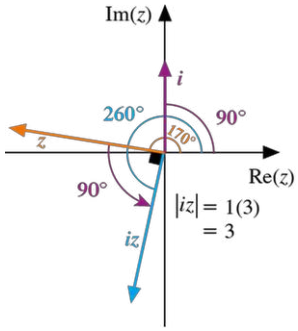
b) Effectuons $\frac{z}{w}$ et représentons z, w et $\frac{z}{w}$ dans le plan d'Argand.

$$\frac{z}{w} = \frac{3(\cos 170° + i\sin 170°)}{1{,}5(\cos 120° + i\sin 120°)}$$

$$= \frac{3}{1{,}5}(\cos(170° - 120°) + i\sin(170° - 120°)) \qquad \text{(théorème 10.2)}$$

$$= 2(\cos 50° + i\sin 50°)$$





c) Vérifions que la multiplication du nombre complexe z par i correspond graphiquement à une rotation de 90° du nombre z dans le sens antihoraire.

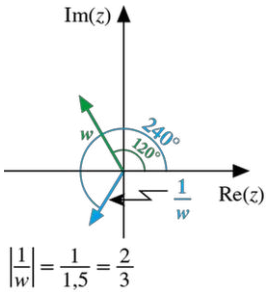
En écrivant $i = 0 + 1i$ sous forme trigonométrique, nous obtenons $i = 1(\cos 90° + i \sin 90°)$.

Ainsi, $iz = (1(\cos 90° + i \sin 90°))(3(\cos 170° + i \sin 170°))$

$= 1(3)(\cos (90° + 170°) + i \sin (90° + 170°))$

$= 3(\cos 260° + i \sin 260°)$

d) Effectuons $\frac{1}{w}$ et représentons w et $\frac{1}{w}$ dans le plan d'Argand.



En écrivant $1 = 1 + 0i$ sous forme trigonométrique, nous obtenons

$1 = 1(\cos 0° + i \sin 0°)$

Ainsi, $\frac{1}{w} = \frac{1(\cos 0° + i \sin 0°)}{1{,}5(\cos 120° + i \sin 120°)}$

$= \frac{1}{1{,}5}(\cos (0° - 120°) + i \sin (0° - 120°))$

$= \frac{2}{3}(\cos (-120°) + i \sin (-120°))$

Nous pouvons également écrire :

$\frac{1}{w} = \frac{2}{3}(\cos 240° + i \sin 240°)$. (car $240° = -120° + 1(360°)$)

Exercices de compréhension 10.2

2. Soit $z = 6 \text{ cis } 200°$ et $w = 2 \text{ cis } 300°$. Effectuer les opérations suivantes en donnant la réponse sous forme trigonométrique en utilisant l'argument principal.

a) zw b) $\frac{z}{w}$

Exemple 2 Soit $z = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $w = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

a) Calculons zw et $\frac{z}{w}$.

$zw = 4e^{i\frac{\pi}{6}} 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$= 4(3)e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)}$ (théorème 10.1)

$= 12e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$\frac{z}{w} = \frac{4e^{i\frac{\pi}{6}}}{3e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

$= \frac{4}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)}$ (théorème 10.2)

$= \frac{4}{3}e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}$

Nous pouvons également écrire :

$\frac{z}{w} = \frac{4}{3}e^{i\frac{3\pi}{2}}$ $\left(\text{car } \frac{3\pi}{2} = \frac{-\pi}{2} + 1(2\pi)\right)$

b) Calculons $z + w$.

$z + w = 4e^{i\frac{\pi}{6}} + 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Pour effectuer l'opération $z + w$, il faut transformer z et w sous forme binomiale.

$$z + w = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) + 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \qquad (e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 3\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \left(2\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) + \left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i$$

d'où $z + w = \left(\frac{4\sqrt{3} - 3}{2}\right) + \left(\frac{4 + 3\sqrt{3}}{2}\right)i$

Exercices de compréhension 10.2

3. Soit $z = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $w = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Effectuer les opérations suivantes en donnant la réponse sous forme exponentielle en utilisant l'argument principal.

a) zw b) $\frac{z}{w}$

EXERCICES 10.2

1. Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique, où $\text{Arg}(z_i)$ est exprimé en degrés, et sous forme exponentielle.

a) $z_1 = -1$ b) $z_2 = -i$

c) $z_3 = \sqrt{3} + i$ d) $z_4 = -2 + 2i$

e) $z_5 = -1 - \sqrt{3}i$ f) $z_6 = 1 - 2i$

2. Écrire les nombres complexes suivants sous trois formes : binomiale, trigonométrique et exponentielle.

a) $z = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

b) $z = \sqrt{3}\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

c) $|z| = 4$ et $\text{Arg}(z) = 30°$

d) $\text{Re}(z) = -4$ et $\text{Im}(z) = -4\sqrt{3}$

e) $z = 5e^{i\left(\frac{19\pi}{10}\right)}$

3. Soit $z = 12\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$,

$w_1 = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$,

$w_2 = 3\,\text{cis}\,\pi$,

$w_3 = 0{,}5e^{i\frac{\pi}{9}}$ et

$w_4 = 1{,}5(\cos 40° + i\sin 40°)$.

a) Déterminer sous forme trigonométrique :

i) zw_1 et $\frac{z}{w_1}$

ii) zw_2 et $\frac{z}{w_2}$

iii) zw_3 et $\frac{z}{w_3}$

b) Déterminer sous forme exponentielle : $w_1w_2w_3w_4$

4. Écrire les nombres suivants sous forme binomiale.

a) $z = \frac{2e^{i\frac{7\pi}{6}}}{3e^{i\frac{\pi}{3}}}$ b) $z = \left(8e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2$

c) $z = \left(2e^{i\frac{\pi}{16}}\right)^8$ d) $z = 6e^{i\frac{\pi}{3}} - 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

10.3 Formule de Moivre et racines *n*-ièmes de nombres complexes

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra résoudre différentes équations.

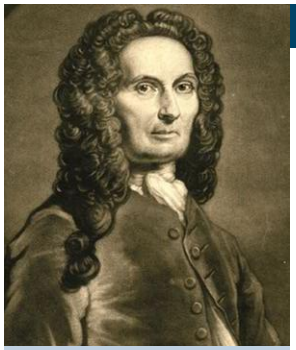
Plus précisément, l'étudiant sera en mesure
- d'utiliser la formule de Moivre ;
- de déterminer les n racines n-ièmes de nombres complexes ;
- de résoudre des équations où les variables sont des nombres complexes ;
- de déterminer des lieux géométriques.

Formule de Moivre

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, où $n \in \mathbb{Z}$

Formule de Moivre



Abraham de Moivre
(1667-1754)

IL Y A ENVIRON 300 ANS...

Abraham de Moivre naît d'une famille huguenote (c'est-à-dire protestante calviniste) dans un petit village à l'est de l'Île-de-France. Par l'édit de Nantes de 1598, les huguenots avaient obtenu du roi Henri IV, lui-même huguenot converti, le droit de pratiquer leur religion. Toutefois, en 1685, Louis XIV révoque cet édit. Moivre est alors emprisonné pendant deux ou trois ans. Dès sa libération, il quitte définitivement la France pour l'Angleterre. Il y vit très modestement comme professeur privé et comme consultant pour les joueurs et les spéculateurs. En effet, Moivre se spécialise alors dans l'étude des probabilités. C'est d'ailleurs pour ces travaux qu'il est élu à la Royal Society de Londres en 1697 et qu'il est surtout connu aujourd'hui. La France ne l'oubliera toutefois pas totalement, car, l'année de sa mort, il sera nommé correspondant étranger de l'Académie des sciences de Paris.

L'exemple suivant est une introduction à la formule de Moivre.

Exemple 1 Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Effectuons les opérations suivantes.

a) $z^2 = r(\cos\theta + i\sin\theta)\, r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$ (théorème 10.1)

b) $z^3 = z^2 z$

$= r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)\, r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$ (théorème 10.1)

c) $z^4 = z^3 z$

$= r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)\, r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$ (théorème 10.1)

d) $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$

$= \dfrac{1(\cos 0 + i \sin 0)}{r(\cos \theta + i \sin \theta)}$ $(1 = 1(1 + i\,0) = 1(\cos 0 + i \sin 0))$

$= \dfrac{1}{r}(\cos (0 - \theta) + i \sin (0 - \theta))$ (théorème 10.2)

$= r^{-1}(\cos (-1\theta) + i \sin (-1\theta))$

e) $z^{-2} = \dfrac{1}{z^2}$

$= \dfrac{1(\cos 0 + i \sin 0)}{r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)}$

$= \dfrac{1}{r^2}(\cos (0 - 2\theta) + i \sin (0 - 2\theta))$ (théorème 10.2)

$= r^{-2}(\cos (-2\theta) + i \sin (-2\theta))$

Le théorème suivant, que nous acceptons sans démonstration, est dû en réalité à Euler qui l'énonce, plus qu'il ne le démontre, dans son *Introduction à l'analyse infinitésimale* (1748) en l'observant sur les premières puissances puis en le généralisant à tout $n \in \mathbb{Z}$.

THÉORÈME 10.3 Formule de Moivre

Si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, alors

$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$, où $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 2 Soit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.
Déterminons et représentons z, z^2, z^3 et z^4

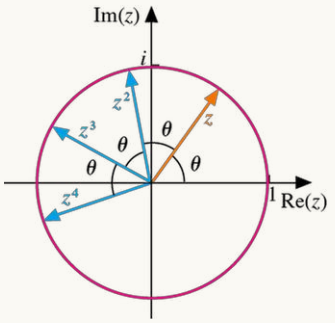
a) dans le cas où $r = 1$.

$z = \cos \theta + i \sin \theta$

$z^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ (formule de Moivre)

$z^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$ (formule de Moivre)

$z^4 = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$ (formule de Moivre)



b) dans le cas où $r = 2$ et $\theta = 79°$.

$z = 2(\cos 79° + i \sin 79°)$

$z^2 = 2^2(\cos 2(79°) + i \sin 2(79°))$ (formule de Moivre)

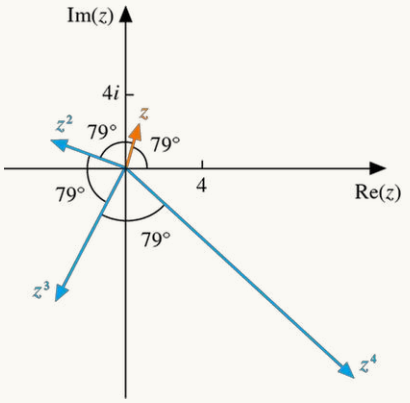
$= 4(\cos 158° + i \sin 158°)$

$z^3 = 2^3(\cos 3(79°) + i \sin 3(79°))$ (formule de Moivre)

$= 8(\cos 237° + i \sin 237°)$

$z^4 = 2^4(\cos 4(79°) + i \sin 4(79°))$ (formule de Moivre)

$= 16(\cos 316° + i \sin 316°)$

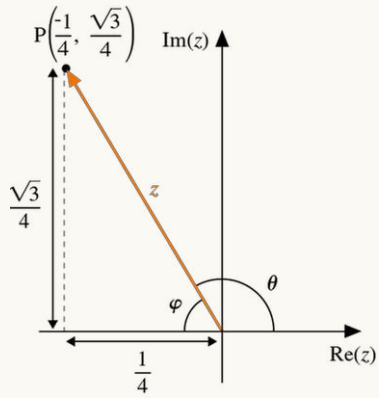


Exercices de compréhension 10.3

1. Soit $z = \sqrt{2}(\cos 10° + i \sin 10°)$. Exprimer sous forme binomiale

a) z^9; b) z^{12}.

Exemple 3 Soit $z = \frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.



a) Représentons et transformons z sous forme trigonométrique.

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

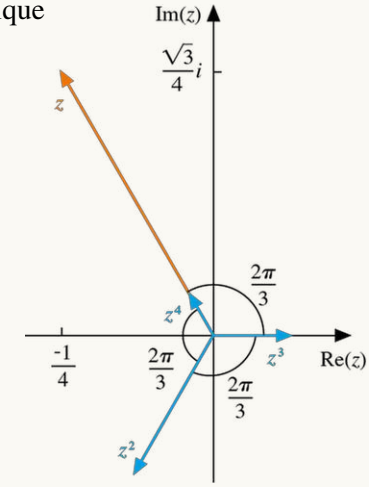
Puisque $\tan \varphi = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} = \sqrt{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$,

$\theta = \pi - \varphi$

ainsi $\theta = \frac{2\pi}{3}$ $\left(\text{car } \theta = \pi - \frac{\pi}{3}\right)$

d'où $z = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

b) Déterminons z^2, z^3 et z^4 sous forme trigonométrique et représentons z, z^2, z^3 et z^4.



$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$

$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

$$z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\cos\left(2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) + i \sin\left(2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$z^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\cos\left(3\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) + i \sin\left(3\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cos 0 + i \sin 0\right)$$

$\left(\text{car } 3\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0 + (1)2\pi\right)$

$$z^4 = \frac{1}{16}\left(\cos\left(4\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) + i \sin\left(4\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \qquad \left(\text{car } 4\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} + (1)2\pi\right)$$

c) Déterminons $\left(\frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^{11}$ et $\left(\frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^{-8}$ sous forme binomiale.

Formule de Moivre

i) $\left(\frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^{11} = \left(\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right)^{11}$ (voir a))

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{11}\left(\cos\left(11\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) + i \sin\left(11\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2048}\left(\cos\left(\frac{22\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{22\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2048}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \qquad \left(\text{car } \frac{22\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 3(2\pi)\right)$$

$$= \frac{1}{2048}\left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

d'où $\left(\frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^{11} = \frac{-1}{4096} - \frac{\sqrt{3}}{4096}i$

Formule de Moivre

ii) $\left(\frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^{-8} = \left(\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right)^{-8}$ (voir a))

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-8}\left(\cos\left(-8\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) + i\sin\left(-8\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right)$$

$$= 256\left(\cos\left(\frac{-16\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-16\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 256\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \qquad \left(\text{car } \frac{-16\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - 3(2\pi)\right)$$

$$= 256\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

d'où $\left(\frac{-1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^{-8} = -128 + 128\sqrt{3}i$

Racines *n*-ièmes de nombres complexes

DÉFINITION 10.10

Soit w, un nombre complexe, et $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$.

Un nombre z est une **racine *n*-ième** de w si $z^n = w$.

Nous savons que, dans l'ensemble des nombres réels, la racine n-ième d'un nombre, lorsqu'elle existe, donne une seule valeur, par exemple $\sqrt[2]{9} = 3$, $\sqrt[3]{-1} = -1$, $\sqrt[5]{1} = 1$ et $\sqrt[5]{-32} = -2$.

Par contre, dans l'ensemble des nombres complexes, $\sqrt[n]{z}$, c'est-à-dire $z^{\frac{1}{n}}$, où $z \neq 0$ et $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$, donne exactement n valeurs différentes.

10

Exemple 1 Déterminons les racines cubiques de 1 et représentons-les dans le plan d'Argand.

Il faut trouver des valeurs z telles que $z^3 = 1$. (définition 10.10)

En posant $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, nous avons

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^3 = 1$$

$$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1(1 + 0i) \qquad \text{(formule de Moivre)}$$

$$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1(\cos 0 + i\sin 0) \qquad \text{(en transformant sous forme trigonométrique)}$$

Ainsi, $r^3 = 1$ et $3\theta = 0 + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$,

donc $r = 1$ et $\theta = \frac{0 + 2k\pi}{3} = \frac{2k\pi}{3}$.

Ainsi, $z = 1\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right)$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Donnons à k les valeurs 0, 1, 2, 3, … afin de déterminer les valeurs de θ et les racines correspondantes.

Si $k = 0$, alors $\theta = 0$ et $z_1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

$z_1 = 1$

$z_1 = 1$

Si $k = 1$, alors $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et $z_2 = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$z_2 = \text{cis}\,\frac{2\pi}{3}$

$z_2 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Si $k = 2$, alors $\theta = \frac{4\pi}{3}$ et $z_3 = 1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

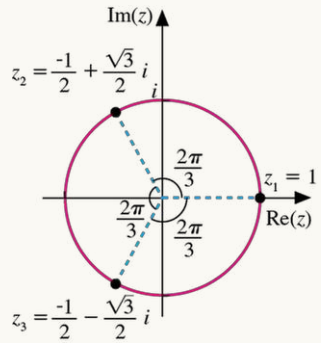
$z_3 = \text{cis}\,\frac{4\pi}{3}$

$z_3 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Si $k = 3$, alors $\theta = 2\pi$ et $z_4 = 1(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$

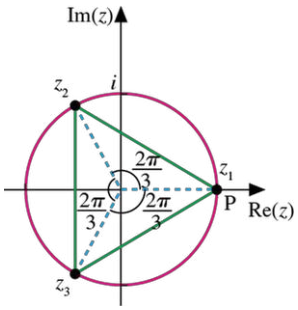
$z_4 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

$z_4 = 1$



Nous constatons que $z_4 = z_1$. L'étudiant peut vérifier que, en attribuant d'autres valeurs à k, nous obtenons une des racines déjà trouvées. Nous obtenons ainsi trois valeurs différentes de z telles que $z^3 = 1$.

- Les racines cubiques de 1 consistent en trois points situés sur la circonférence du cercle de rayon 1 centré à l'origine. Ces points, à partir de P(1, 0), partagent la circonférence du cercle en trois parties égales.
- Si nous relions les trois points z_1, z_2 et z_3 situés sur la circonférence du cercle de rayon 1, nous formons un polygone régulier à trois côtés (triangle équilatéral) dont un des sommets est le point P(1, 0).
- z_3 est le conjugué de z_2, c'est-à-dire $z_3 = \overline{z_2}$.



- $z_1 + z_2 + z_3 = 1 + \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0$, ainsi $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Énonçons maintenant un théorème que nous acceptons sans démonstration.

THÉORÈME 10.4

Si $w = s(\cos\theta + i\sin\theta)$ est un nombre complexe non nul, et si z est tel que $z^n = w$, alors w possède exactement n racines n-ièmes distinctes données par la formule

$$z = \sqrt[n]{s}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right),$$

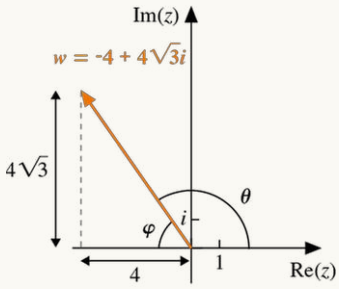
où $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ et $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$.

Remarque : Nous pouvons également écrire :

$$z = \sqrt[n]{s}\left(\cos\left(\frac{\theta + k360°}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + k360°}{n}\right)\right)$$

Exemple 2 Déterminons les trois racines cubiques de $w = -4 + 4\sqrt{3}i$, c'est-à-dire z tel que $z^3 = -4 + 4\sqrt{3}i$.

Transformons d'abord $w = -4 + 4\sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique.



$|w| = \sqrt{(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = 8$

$\varphi = \text{Arc tan}\,\dfrac{4\sqrt{3}}{4} = 60°$

donc $\theta = 120°$ (car $\theta = 180° - \varphi$)

Ainsi, $-4 + 4\sqrt{3}i = 8(\cos 120° + i \sin 120°)$

Méthode 1 : À l'aide du théorème 10.4

$z_1 = 2 \text{ cis } 40°$

$$\text{Si } k = 0,\ z_1 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{120° + 0(360°)}{3}\right) + i \sin\left(\frac{120° + 0(360°)}{3}\right)\right)$$
$$= 2(\cos 40° + i \sin 40°)$$

$z_2 = 2 \text{ cis } 160°$

$$\text{Si } k = 1,\ z_2 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{120° + 1(360°)}{3}\right) + i \sin\left(\frac{120° + 1(360°)}{3}\right)\right)$$
$$= 2(\cos 160° + i \sin 160°)$$

$z_3 = 2 \text{ cis } 280°$

$$\text{Si } k = 2,\ z_3 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{120° + 2(360°)}{3}\right) + i \sin\left(\frac{120° + 2(360°)}{3}\right)\right)$$
$$= 2(\cos 280° + i \sin 280°)$$

Méthode 2 : À l'aide de la formule de Moivre

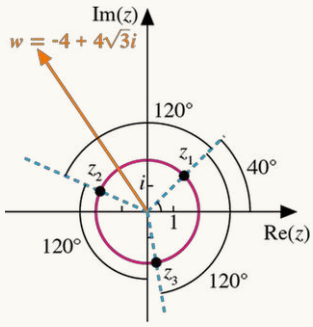
Soit $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ tel que

$$z^3 = w$$
$$(r(\cos\theta + i \sin\theta))^3 = 8(\cos 120° + i \sin 120°)$$
$$r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = 8(\cos 120° + i \sin 120°) \quad \text{(formule de Moivre)}$$

Nous avons $r^3 = 8$ et $3\theta = 120° + k360°$, où $k \in \mathbb{Z}$ (définition 10.9)

donc $r = 2$ et $\theta = 40° + k120°$.

En donnant à k les valeurs 0, 1 et 2, nous obtenons



$z_1 = 2(\cos 40° + i \sin 40°)$

$z_2 = 2(\cos 160° + i \sin 160°)$

$z_3 = 2(\cos 280° + i \sin 280°)$

Exercices de compréhension 10.3

2. Déterminer les racines cubiques de $w = 4 + 4\sqrt{3}i$.

Exemple 3 Déterminons les racines cinquièmes de 1 et représentons-les dans le plan d'Argand.

Il faut trouver des valeurs z telles que $z^5 = 1$. (définition 10.10)

Transformons 1 sous la forme trigonométrique.

$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$

ainsi, $z = 1\left(\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{0 + 2k\pi}{5}\right)\right)$, où $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (théorème 10.4)

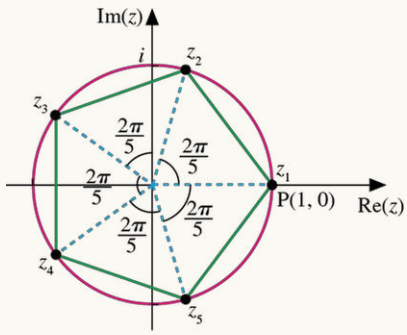
Si $k = 0$, $z_1 = 1(\cos 0 + i \sin 0) = 1$ $\quad z_1 = 1$

Si $k = 1$, $z_2 = 1\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i \sin\frac{2\pi}{5}\right)$ $\quad z_2 = \text{cis}\,\frac{2\pi}{5}$

Si $k = 2$, $z_3 = 1\left(\cos\frac{4\pi}{5} + i \sin\frac{4\pi}{5}\right)$ $\quad z_3 = \text{cis}\,\frac{4\pi}{5}$

Si $k = 3$, $z_4 = 1\left(\cos\frac{6\pi}{5} + i \sin\frac{6\pi}{5}\right)$ $\quad z_4 = \text{cis}\,\frac{6\pi}{5}$

Si $k = 4$, $z_5 = 1\left(\cos\frac{8\pi}{5} + i \sin\frac{8\pi}{5}\right)$ $\quad z_5 = \text{cis}\,\frac{8\pi}{5}$



- Les racines cinquièmes de 1 consistent en cinq points situés sur la circonférence du cercle de rayon 1 centré à l'origine.
- Ces points, à partir de P(1, 0), partagent la circonférence du cercle en cinq parties égales. En reliant les cinq points situés sur la circonférence, nous formons un pentagone régulier dont un des sommets est le point P(1, 0).
- z_4 est le conjugué de z_3, c'est-à-dire $z_4 = \overline{z_3}$.
  z_5 est le conjugué de z_2, c'est-à-dire $z_5 = \overline{z_2}$.
- L'étudiant peut vérifier que $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 0$.

Résolution d'équations

Dans cette section, nous allons résoudre des équations où les variables sont des nombres complexes.

Nous acceptons le théorème suivant sans démonstration.

THÉORÈME 10.5 Théorème fondamental de l'algèbre

Tout polynôme de degré n

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$

où les coefficients a_i sont des nombres complexes ($a_i \in \mathbb{C}$) et $n \in \mathbb{N}^*$, admet au moins un zéro (racine) complexe.

COROLLAIRE du théorème 10.5

Tout polynôme de degré n

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \text{ où } a_i \in \mathbb{C} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*,$$

admet n zéros (racines) complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$,
où certains z_i peuvent être identiques.

Le corollaire précédent signifie que $P(z)$ se décompose comme suit :

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n),$$

où certains facteurs $(z - z_i)$ peuvent être identiques.

Exemple 1 Soit $P(z) = z^3 - 2iz$.

a) Déterminons les zéros de $P(z)$.

Puisque $P(z)$ est de degré trois, $P(z)$ admet trois zéros. (corollaire du théorème 10.5)

Soit $P(z) = z^3 - 2iz = z(z^2 - 2i)$. (en factorisant)

Ainsi, $z = 0$ est un zéro de $P(z)$.

Déterminons les deux valeurs de z telles que $(z^2 - 2i) = 0$, c'est-à-dire $z^2 - 2i$, de deux façons différentes.

À l'aide d'un système d'équations

Posons $z = x + yi$, où x et $y \in \mathbb{R}$, et déterminons les valeurs de x et de y telles que

$$(x + yi)^2 = 2i$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 0 + 2i$$

Ainsi, par la définition 10.3, nous avons

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ 2xy = 2 & (2) \end{cases}$$

De (1), nous obtenons $x = \pm y$.

De (2), x et y doivent être de même signe, ainsi $x = y$.

En remplaçant x par y dans (2), nous obtenons $y^2 = 1$.

Donc, $y = \pm 1$ et $x = \pm 1$. (car $x = y$)

Ainsi, $z = 1 + i$ ou $z = -1 - i$.

À l'aide de la formule de Moivre

Soit $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ tel que

$$z^2 = 2i$$

$$r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 2(\cos 90° + i \sin 90°)$$

Ainsi, $r^2 = 2$ et $2\theta = 90° + k360°$, où $k \in \mathbb{Z}$

donc, $r = \sqrt{2}$ et $\theta = 45° + k180°$

Si $k = 0$, $z = \sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°)$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 1 + i$$

Si $k = 1$, $z = \sqrt{2}(\cos 225° + i \sin 225°)$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= -1 - i$$

Ainsi, $z = 1 + i$ ou $z = -1 - i$.

D'où les zéros de $P(z)$ sont $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = -1 - i$.

b) Décomposons $P(z)$ en facteurs.

$$P(z) = (z - 0)(z - (1 + i))(z - (-1 - i))$$

Exercices de compréhension 10.3

3. Soit $P(z) = z^4 - 1$. Déterminer les zéros de $P(z)$

a) en factorisant ;

b) à l'aide de la formule de Moivre.

Exemple 2 Résolvons l'équation $z^2 + 2z + 3 = 0$, où $z \in \mathbb{C}$.

En utilisant la formule des zéros d'une équation quadratique

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(3)}}{2} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{8i^2}}{2} \qquad (\text{car } i^2 = -1)$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{8}i}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{2}i$$

D'où $z = -1 + \sqrt{2}i$ ou $z = -1 - \sqrt{2}i$

À l'aide d'un système d'équations

Posons $z = x + yi$, où x et $y \in \mathbb{R}$, et déterminons les valeurs de x et de y telles que

$$(x + yi)^2 + 2(x + yi) + 3 = 0$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi + 2x + 2yi + 3 = 0 + 0i$$

$$x^2 - y^2 + 2x + 3 + (2xy + 2y)i = 0 + 0i$$

Ainsi, par la définition 10.3,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 3 = 0 & (1) \\ 2y(x + 1) = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2), nous obtenons $y = 0$ ou $x = -1$.

En remplaçant y par 0 dans (1), nous obtenons

$x^2 + 2x + 3 = 0$, donc, aucune solution réelle.

(car $x \in \mathbb{R}$)

En remplaçant x par -1 dans (1), nous obtenons

$y = \pm\sqrt{2}$.

D'où $z = -1 + \sqrt{2}i$ ou $z = -1 - \sqrt{2}i$

Nous acceptons le théorème suivant sans démonstration.

THÉORÈME 10.6

Soit le polynôme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$,
où les coefficients a_i sont des nombres réels ($a_i \in \mathbb{R}$) et $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $z = a + bi$ est un zéro de $P(z)$, alors

son conjugué, c'est-à-dire $\overline{z} = a - bi$, est également un zéro de $P(z)$.

Remarque : Ainsi, un polynôme de degré n à coefficients réels ne peut avoir qu'un nombre pair de zéros de la forme $a + bi$, où $b \neq 0$.

De plus, lorsque n est impair, le polynôme admet au moins un zéro réel.

Exemple 3 Soit $P(z) = z^3 - 4z^2 + 14z - 20$.

a) Vérifions que $z_1 = 1 + 3i$ est un zéro de $P(z)$.

$$\begin{aligned} P(1 + 3i) &= (1 + 3i)^3 - 4(1 + 3i)^2 + 14(1 + 3i) - 20 \\ &= -26 - 18i - 4(-8 + 6i) + 14 + 42i - 20 \\ &= -26 - 18i + 32 - 24i + 14 + 42i - 20 \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où $z_1 = 1 + 3i$ est un zéro de $P(z)$.

b) Déterminons les deux autres zéros, z_2 et z_3, de $P(z)$.

$z_2 = \overline{z_1}$

Par le théorème 10.6, $z_2 = \overline{1 + 3i} = 1 - 3i$ est également un zéro de $P(z)$.

Par le corollaire du théorème 10.5, $P(z) = 1(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$, ainsi

$$(z - (1 + 3i))(z - (1 - 3i))(z - z_3) = z^3 - 4z^2 + 14z - 20$$

$$(z^2 - 2z + 10)(z - z_3) = z^3 - 4z^2 + 14z - 20 \quad \text{(en effectuant la multiplication)}$$

$$(z - z_3) = \frac{z^3 - 4z^2 + 14z - 20}{z^2 - 2z + 10}$$

$$z - z_3 = z - 2 \quad \text{(en effectuant la division)}$$

d'où $z_2 = 1 - 3i$ et $z_3 = 2$ sont les deux autres zéros de $P(z)$.

Lieux géométriques dans le plan d'Argand

Nous pouvons utiliser certaines propriétés des nombres complexes pour déterminer des lieux géométriques dans le plan d'Argand.

Exemple 1 Soit $z = x + yi$. Déterminons et représentons dans le plan d'Argand le lieu géométrique L des points P(x, y) tels que

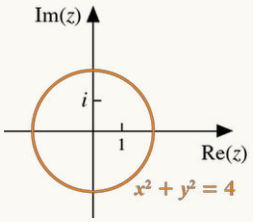
a) $|z| = 2$.

Puisque $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, nous avons

$$x^2 + y^2 = 4$$

D'où $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 4\}$

Le lieu est le cercle de centre C$(0, 0)$ et de rayon 2.



b) $|z - i| = |z - 1|$.

Puisque $z = x + yi$, nous avons

$$|x + yi - i| = |x + yi - 1|$$

$$|x + (y - 1)i| = |x - 1 + yi|$$

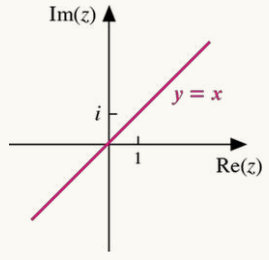
$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \quad \text{(définition 10.8)}$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

$$y = x$$

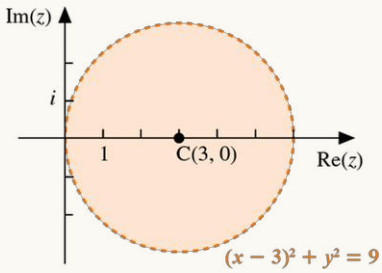
D'où $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x\}$

Le lieu est la droite d'équation $y = x$.



c) $z\bar{z} < 3(z + \bar{z})$.

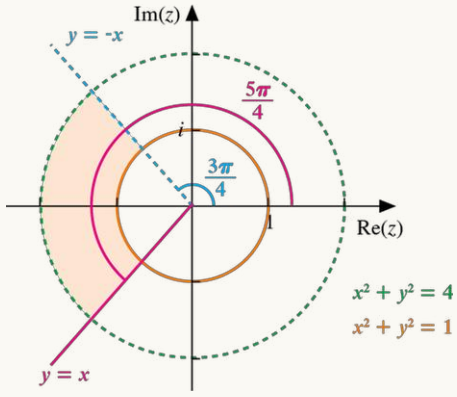
$$(x + yi)(x - yi) < 3(x + yi + x - yi)$$
$$x^2 + y^2 < 3(2x)$$
$$x^2 - 6x + y^2 < 0$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 < 9$$
$$(x - 3)^2 + y^2 < 9$$



D'où $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 3)^2 + y^2 < 9\}$

Le lieu est l'intérieur du cercle de centre C(3, 0) et de rayon 3.

d) $\frac{3\pi}{4} < \text{Arg}(z) \leq \frac{5\pi}{4}$ et $1 \leq |z| < 2$.



D'où $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, x \leq y < -x \text{ et } 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$

Le lieu est une portion d'anneau.

EXERCICES 10.3

1. À l'aide de la formule de Moivre, calculer les expressions suivantes en donnant la réponse sous forme binomiale.

a) $z = (1 + i)^7$ b) $z = (2 \text{ cis } 30°)^8$

c) $z = (e^i)^{12}$ d) $z = \left(\frac{2}{1 + i}\right)^5$

2. Déterminer et représenter dans le plan d'Argand

a) les racines cubiques de $-9i$;

b) les racines sixièmes de $1 + \sqrt{3}i$.

3. Déterminer les valeurs de z telles que

a) $z^3 = -8$;

b) $z^5 = i$;

c) $z^5 = 8\left(\sqrt{2} - \sqrt{6} + \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)i\right)$.

4. Déterminer les zéros et factoriser les polynômes suivants en utilisant le théorème 10.6 et le corollaire du théorème 10.5.

a) $P(z) = 2z^3 - 3z^2 + 8z - 12$, sachant que $(z - 2i)$ est un facteur.

b) $P(z) = z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 2z - 10$, sachant que $(2 - i)$ est un zéro.

5. Soit $z = x + yi$. Déterminer z tel que :

a) $2iz + 3 = 0$ b) $(3 - i)z + i = 1$

c) $z^2 + 3i = 0$ d) $z^3 + z^2 + z = 0$

e) $z^4 + 1 = 0$ f) $z^4 + z = 0$

6. LIEU GÉOMÉTRIQUE

Soit $z = x + yi$. Déterminer et représenter dans le plan d'Argand le lieu géométrique L des points P(x, y) suivants et les décrire.

a) $\text{Re}(z) = 1$ b) $z - \bar{z} = 6i$

c) $z = -\bar{z}$ d) $|z| < 2$

e) $|z - 2i| \leq |z - (3 + i)|$

Révision des concepts

Nombres complexes

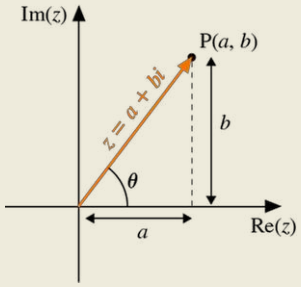
Forme binomiale

$z = a + bi$, où $i^2 =$ _____

Conjugué

$\overline{z} =$ _____

Forme trigonométrique et forme exponentielle



Re(z) = _____ $r = |z|$ = _____

Im(z) = _____ Arg(z) = _____

arg(z) = _____

$z = a + bi$ s'écrit sous

1) forme trigonométrique : $z =$ _____
2) forme exponentielle : $z =$ _____

Opérations sous forme binomiale

Soit $z = a + bi$ et $w = c + di$.

$z + w =$ _____

$z - w =$ _____

$zw =$ _____

$\frac{z}{w} =$ _____

$\overline{z + w} =$ _____

$\overline{zw} =$ _____

$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} =$ _____

Opérations sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle

Soit $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

$z_1 z_2 =$ _____ $\frac{z_1}{z_2} =$ _____, où $r_2 \neq 0$

Soit $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$.

$z_1 z_2 =$ _____ $\frac{z_1}{z_2} =$ _____, où $r_2 \neq 0$

Formule de Moivre

Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors $z^n =$ _____, où $n \in \mathbb{Z}$

Racines *n*-ièmes

Page 498

Applications

Résolution d'équations (page 501)
Lieux géométriques (page 504)

Exercices récapitulatifs

Administration Biologie Chimie Géométrie Physique Sciences humaines Outil technologique

Les réponses aux exercices récapitulatifs et aux problèmes de synthèse, à l'exception de ceux notés en **rouge**, sont fournies à la fin du manuel.

1. Effectuer les opérations suivantes en exprimant la réponse sous forme binomiale.

a) $(2 - 5i) + (6 + 7i)$

b) $(6 + 2i) - 3(2 - 7i)$

c) $(2 - 3i)(3 + i)$

d) $\dfrac{5}{3i}$

e) $\dfrac{2 - i}{6i}$

f) $\dfrac{3 + 2i}{5 + 3i}$

g) $13 - 6(3 + 2i) + (3 + 2i)^2$

h) $3 + i - \dfrac{2(2 + i)^2}{1 - i}$

i) $(7 - 3i)[8 + 2i - (4 - 3i)]$

j) $i(1 + i) + (2 + i)(2 - i)$

k) $2 - \dfrac{i}{i - \sqrt{5}}$

l) $\left(\dfrac{3}{1 - i} + 2 - 5i\right)^2$

2. Écrire les expressions suivantes sous forme binomiale.

a) $\sqrt{-9}$

b) $3 + \sqrt{-5}$

c) $\dfrac{-5 - \sqrt{-3}}{2}$

d) $\dfrac{2}{1 - \sqrt{-4}}$

e) $\dfrac{-5 + \sqrt{-2}}{\sqrt{-18}}$

f) $\dfrac{\sqrt{-7}}{3 - \sqrt{-4}}$

3. Simplifier les expressions suivantes.

a) $i^8 - i^9$

b) $i^{13}(-i)^{27}$

c) i^{-3}

d) $(-i)^{-5}i^5$

e) $(-i)^{-6}i^6$

f) $(-i)^5 - i^5$

4. Déterminer les valeurs réelles de x et y si

a) $(2x + 1) - (2 - 3y)i = -5 + 4i$

b) $(3y - 2x) + (2x - y)i = 3 - 7i$

c) $(7 + 2i)(x + yi) = 29 - 22i$

d) $\dfrac{1 + xi}{y + 5i} = 3 + 4i$

e) $\dfrac{-i}{4 - 3i} = \dfrac{x + yi}{12 + 5i}$

f) $\dfrac{1}{\overline{x + yi}} = \dfrac{3 + 4i}{5 - 2i}$

5. Soit $z = \dfrac{(1 + \sqrt{5}i)(\sqrt{5} + i)}{(1 + i)^2}$ et

$$w = \frac{2(1 - \sqrt{3}i) - (\sqrt{3} + i)}{1 + 2i}.$$

Déterminer :

a) $|z|$ et $\text{Arg}(z)$

b) $|w|$ et $\text{Arg}(w)$

6. a) Soit $z = a + bi$.

Représenter dans le plan d'Argand le lieu géométrique L tel que

$$\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z) \leq \frac{5\pi}{6} \text{ et } 1 \leq |z| < 4.$$

b) Soit $u = 3 - 4i$, $v = -1 + 7i$ et

$$w = -6 - 4\sqrt{3} + (8 - 3\sqrt{3})i.$$

Déterminer si les points z_1 et z_2 suivants appartiennent à L trouvé en a).

i) $z_1 = \dfrac{1}{10}uv$

ii) $z_2 = 7\left(\dfrac{u}{w}\right)$

7. Compléter le tableau suivant.

	Forme binomiale	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
a)	$\sqrt{3} - i$		
b)		$2\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$	
c)			$4\sqrt{3}e^{\frac{4\pi}{3}i}$

8. Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, où $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $r > 0$.

a) Comparer $|z|$ et $|z^2|$.

b) Comparer $\text{Arg}(z)$ et $\text{Arg}(z^2)$.

c) Représenter graphiquement z et z^2 selon la valeur de r.

9. Soit $z = a + bi$. Déterminer les valeurs de a et b si :

a) $\bar{z} = -z$

b) $z^2 = (\bar{z})^2$

c) $z = (1 + i)^{13}$

d) $z = \left(\overline{1 + \sqrt{3}i}\right)^7$

e) $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{105}$

10. a) Soit $P(z) = z^3 - 4z^2 + z + 26$.

i) Vérifier que $z_1 = 3 - 2i$ est un zéro de $P(z)$.

ii) Déterminer les autres zéros de $P(z)$.

b) Soit $P(z) = z^4 - z^2 + 2z + 2$.

i) Vérifier que $z_1 = 1 + i$ est un zéro de $P(z)$.

ii) Déterminer les autres zéros de $P(z)$.

11. a) Soit $P(z) = z^3 + bz^2 + cz + d$. Déterminer $P(z)$ si $z_1 = 2$ et $z_2 = 2e^{\frac{5\pi}{3}i}$ sont des zéros de $P(z)$.

b) Le polynôme $P(z) = z^3 + bz^2 + cz - 8$ est divisible par $(z + 1 + i)$, où $z \in \mathbb{C}$, et b et $c \in \mathbb{R}$.

i) Déterminer la valeur de b, c et $P(z)$.

ii) Déterminer le zéro réel de $P(z)$.

12. Soit $z = (x + i)^2$, où $x \in \mathbb{R}$ et $\text{Arg}(z) = 60°$.

a) Déterminer le valeur exacte de x.

b) Calculer $|z|$.

13. Résoudre les équations suivantes, où $z \in \mathbb{C}$.

a) $z^2 - 4z + 13 = 0$

b) $z^2 + 3i = 0$

c) $2z^4 + 1 = \sqrt{3}i$

d) $\sqrt{2}z^6 - 1 = -i$

14. Déterminer et représenter graphiquement

a) les racines cubiques de -27 ;

b) les racines cinquièmes de 1024 ;

c) les racines sixièmes de -64 ;

d) les racines quatrièmes de $-i$;

e) les racines cubiques de $(-1 - \sqrt{3}i)$;

f) les racines cubiques de $(-4\sqrt{3} + 4i)$.

15. a) Soit $\sqrt[3]{2 - 11i} = x + yi$, où x et $y \in \mathbb{Z}$. Déterminer x et y.

b) Déterminer

$S = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$, où $S \in \mathbb{N}$.

16. **LIEU GÉOMÉTRIQUE**

Soit $z = x + yi$. Déterminer et représenter graphiquement le lieu géométrique L des points $P(x, y)$ tels que :

a) $z = i\bar{z}$ et $|z| = 4$

b) $z = -i\bar{z}$ et $\sqrt{8} \leq |z| \leq \sqrt{18}$

c) $z^2 + (\bar{z})^2 - z\bar{z} = 0$

d) $|z| = 4$ et $\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}(z) < \frac{5\pi}{6}$

e) $2z\bar{z} = z + \bar{z}$

f) $2 < |z + 3 - 2i| \leq 4$

17. Soit $z = a + bi$, où $a > 0$ et $b > 0$, et $\text{Arg}(z) = \theta$.

a) Représenter dans un même plan d'Argand z, $\bar{z}$, $-z$ et $-\bar{z}$.

b) Déterminer les distances d suivantes.

i) $d(z, \bar{z})$

ii) $d(z, -z)$

iii) $d(z, -\bar{z})$

c) Exprimer en fonction de θ les arguments suivants.

i) $\text{Arg}(\bar{z})$

ii) $\text{Arg}(-z)$

iii) $\text{Arg}(-\bar{z})$

18. Soit $z = a + bi$ et $w = c + di$. Démontrer que :

a) $\overline{\overline{z}} = z$ (propriété 1)

b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ (propriété 2)

c) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (propriété 3)

d) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, si $w \neq 0$ (propriété 4)

e) $\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \frac{1}{\overline{w}}$, si $w \neq 0$

f) $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$

g) $|z|^2 = z\overline{z}$

h) $w^{-1} = \frac{1}{|w|^2}\overline{w}$, si $w \neq 0$

i) $|z| = |-z|$

j) $|zw| = |z||w|$

k) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, si $w \neq 0$

l) $|z + \overline{z}| \leq |z| + |\overline{z}|$

m) $|z + w| \leq |z| + |w|$

n) $|z - w| \geq |z| - |w|$

19. Soit $z = a + bi$. Démontrer que

a) si $|1 - z| < 1$, alors $|1 + z| > 1$;

b) si $|1 + z| < 1$, alors $|1 - z| > 1$.

Problèmes de synthèse

1. AIRE D'UN TRIANGLE

Soit $P(z) = z^3 - (1 + 6i)z^2 - 17z + 17 + 6i$.

a) Sachant que $z_1 = 1$ est un zéro de $P(z)$, déterminer z_2 et z_3, les autres zéros de $P(z)$.

b) Déterminer la nature du triangle dont les sommets sont les points z_1, z_2 et z_3, où z_1, z_2 et z_3 sont les zéros trouvés en a).

c) Calculer l'aire A du triangle précédent.

d) Déterminer la hauteur h issue du sommet z_1.

2. Soit $z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Calculer z^n, où $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $z = -\sqrt{3} + i$.

a) Déterminer, sous forme trigonométrique,

i) z^2 ;

ii) z^6.

b) Déterminer z^{11} sous forme exponentielle.

c) Déterminer $(\overline{z})^{-8}$ sous forme binomiale.

d) Déterminer $z^5 + (\overline{z})^5 + \left(\frac{1}{-z}\right)^5$ sous forme binomiale.

4. Calculer les expressions suivantes en donnant les réponses sous forme binomiale.

a) $z_1 = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^4(\sqrt{3} + i)^5$

b) $z_2 = \frac{(2\sqrt{3} - 2i)^{10}}{(-1 - \sqrt{3}i)^{18}}$

c) $z_3 = \frac{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^4(\sqrt{3} + i)^5(-1 - \sqrt{3}i)^{18}}{(2\sqrt{3} - 2i)^{10}}$

5. LIEU GÉOMÉTRIQUE

Soit $z = x + iy$. Déterminer et représenter graphiquement le lieu géométrique L des points P(x, y) tels que

a) $|z - 4 - 3i| \leq |z - 2 + i|$ et $|z| \leq 25$;

b) $|z - 2| \leq 4 < |z - (1 - 2i)|$;

c) $\text{Im}\left(\frac{z}{z^2 + 1}\right) = 0$, $y \neq 0$ et $z^2 + 1 \neq 0$.

6. LIEU GÉOMÉTRIQUE

Soit $z = x + iy$, $w_1 = 3 + 4i$ et $w_2 = 2 + 8i$.

a) Déterminer les lieux géométriques L_1 et L_2 suivants.

i) $L_1 : \text{Arg}(z - w_1) = \text{Arc tan}(-4)$

ii) $L_2 : \text{Arg}(z - w_2) = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{4}\right)$

b) Représenter graphiquement sur un même plan d'Argand L_1 et L_2 trouvés en a).

c) Déterminer, si c'est possible, $L_1 \cap L_2$.

d) Déterminer l'angle θ entre L_1 et L_2.

e) Calculer l'aire

i) A_1 délimitée par L_1, L_2 et l'axe des réels ;

ii) A_2 délimitée par L_1, L_2 et l'axe des imaginaires.

7. **LIEU GÉOMÉTRIQUE**

Soit $z = x^2 + yi$, $w_1 = -3 + 5i$ et $w_2 = -1 - 11i$.

a) Déterminer les lieux géométriques L_1 et L_2 suivants.

i) $L_1 : \text{Arg}(z - w_1) = \text{Arc tan } (-2)$

ii) $L_2 : \text{Arg}(z - w_2) = \text{Arc tan } 4$

b) Représenter graphiquement sur un même plan d'Argand L_1 et L_2 trouvés en a).

c) Déterminer $L_1 \cap L_2$.

d) Calculer, à l'aide d'une intégrale définie, l'aire A de la région fermée délimitée par L_1 et L_2.

8. Soit $z = re^{i\frac{\pi}{4}}$ et $w = 1 + \sqrt{3}i$.
Déterminer la valeur de r si $|zw^3| = 2$.

9. Déterminer le nombre de couples (x, y), où x et $y \in \mathbb{R}$, tels que $(x + yi)^{2018} = x - yi$.

10. Déterminer la valeur de n, où $n \in \mathbb{N}$, telle que

a) $i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \ldots + ni^n = 52 + 53i$.

b) $i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \ldots + ni^n = -50 - 50i$.

11. Soit $z = 4e^{\frac{i\pi}{6}}$. Calculer $|e^{iz}|$.

12. Exprimer sous forme binomiale

a) $i^{\sqrt{2}}$;

b) i^i.

13. Écrire z sous forme binomiale.

a) $z = i^{0!} + i^{1!} + i^{2!} + i^{3!} + \ldots + i^{100!}$;

b) $z = i(i^2)(i^3)(i^4) \ldots (i^{99})(i^{100})$;

c) $z = \sqrt{i}\sqrt[4]{i}\sqrt[8]{i}\sqrt[16]{i}\sqrt[32]{i}\ldots$;

d) $z = \sqrt[3]{i}\sqrt[9]{i}\sqrt[27]{i}\ldots$

14. Soit $z = i^{2n} + i^{2n+1} + i^{2n+2} + i^{2n+3}$ et

$$w = \frac{1}{i^{2n}} + \frac{1}{i^{2n+1}} + \frac{1}{i^{2n+2}} + \frac{1}{i^{2n+3}}, \text{ où } n \in \mathbb{N}.$$

a) Démontrer que $z = w$ sans évaluer z et w.

b) Déterminer la valeur de z.

15. Dans le cours de calcul intégral, il est démontré qu'une série géométrique réelle de premier terme a et de raison r converge si $|r| < 1$, c'est-à-dire

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \frac{a}{1 - r}.$$

On peut généraliser ce résultat pour une série géométrique complexe de raison z, où $|z| < 1$.

Soit la série géométrique suivante.

$$e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{i2\theta} + \frac{1}{4}e^{i3\theta} + \frac{1}{8}e^{i4\theta} + \ldots$$

a) Déterminer la raison z et le terme général a_n de cette série.

b) Calculer $|z|$ et déterminer la somme S de cette série.

c) Exprimer la somme de cette série en fonction de $\sin\theta$ et de $\cos\theta$.

d) Démontrer que

$$\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta + \ldots = \frac{4\cos\theta - 2}{5 - 4\cos\theta}.$$

e) Déterminer une expression pour

$$\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{4}\sin 3\theta + \ldots$$

16. Dans le cours de calcul intégral, il est démontré que la somme des n premiers termes d'une série géométrique réelle de premier terme a et de raison r est donnée par

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Démontrer que la somme des n racines n-ièmes distinctes de 1 est zéro.

17. Soit $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$.

Démontrer que $\mathbb{C}$, muni des opérations suivantes, est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

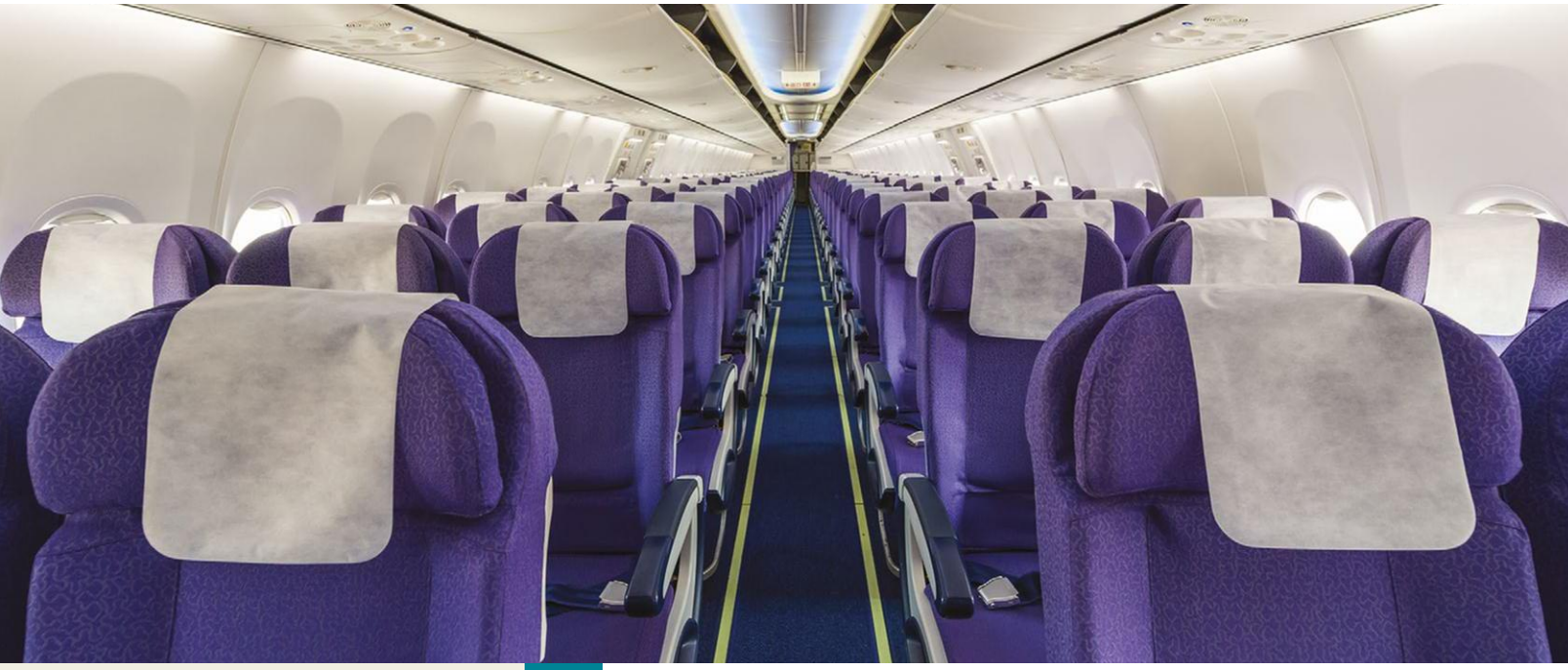
Addition :

$(a + bi) \oplus (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Multiplication :

$(a + bi) * (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

11 Programmation linéaire



Perspective historique 512
Exercices préliminaires 513
11.1 Résolution de problèmes d'optimisation par la méthode graphique 513
11.2 Résolution de problèmes de maximisation par la méthode du simplexe 530
11.3 Résolution de problèmes de minimisation par la méthode duale 546
Révision des concepts 555
Exercices récapitulatifs 556
Problèmes de synthèse 558

L'objectif principal de ce chapitre est de résoudre des problèmes de programmation linéaire dans lesquels nous devons optimiser une fonction économique. La fonction économique est une fonction linéaire à plusieurs variables, lesquelles sont soumises à des contraintes exprimées sous forme d'équations et d'inéquations linéaires.

Nous résoudrons les problèmes d'optimisation de différentes façons, d'abord par une méthode graphique, par laquelle nous déterminerons la région des solutions admissibles et évaluerons la fonction économique aux sommets de cette région. Par la suite, nous résoudrons des problèmes de maximisation par la méthode du simplexe après avoir défini les variables d'écart. Finalement, nous résoudrons des problèmes de minimisation par la méthode duale.

En particulier, l'étudiant pourra résoudre le problème suivant (qui se trouve au n° 9 des problèmes de synthèse, à la page 559).

Une compagnie aérienne offre 220 sièges à trois prix différents : 210 $ pour la classe économique, 405 $ pour la classe affaires et 465 $ pour la première classe. Les coûts sont les suivants : 50 $ pour la classe économique, 150 $ pour la classe affaires et 150 $ pour la première classe. De plus, l'espace requis pour les bagages est de 2 m^3 pour les passagers de la première classe, de 1,5 m^3 pour les passagers de la classe affaires et de 1 m^3 pour les passagers de la classe économique.

[…]

Programmation linéaire : d'une théorie ignorée à des méthodes de calcul au cœur de l'économie

Souvent, de bonnes idées surgissent dans une société sans vraiment laisser de traces parce qu'elles apparaissent trop tôt et ne correspondent pas aux préoccupations de l'époque. La programmation linéaire en est un bon exemple. Vers 1820, **Joseph Fourier** (1768-1830), voulant appliquer une méthode décrite par Isaac Newton (1642-1727) pour résoudre des équations polynomiales dont les coefficients étaient eux-mêmes des polynômes, a développé une formule pour résoudre des systèmes d'inégalités linéaires et optimiser une fonction linéaire sur un polyèdre de contraintes. Toutefois, sa théorie est vite tombée dans l'oubli parce qu'elle a germé un peu plus d'un siècle trop tôt.

Dans les années 1930, les questions d'optimisation de fonctions linéaires refont surface, notamment dans la thèse de doctorat de Theodore S. Motzkin (1908-1970) présentée à Bâle en 1934, puis dans le livre de l'économétricien Leonid Vitalevitch Kantorovitch (1912-1986), *Méthodes mathématiques de l'organisation et de la planification de la production*, publié en 1939. Cette fois encore, le terreau intellectuel n'est pas tout à fait prêt à recevoir ces idées et ces méthodes.

L'entrée en guerre des États-Unis en 1941 change la donne. Cette année-là, un jeune mathématicien un peu excentrique, **George Bernard Dantzig** (1914-2005), abandonne provisoirement ses études doctorales à Berkeley pour aller travailler à la division du contrôle statistique des combats de l'aviation américaine (USAF) à Washington. Il aide à planifier en détail l'organisation et l'approvisionnement des forces combattantes. Calculant tout à la main, il devient un expert dans ce genre de planification. À la fin de la guerre, il termine son doctorat en statistique, mais la vie d'étudiant l'intéresse plus ou moins. Les mathématiques pures ne l'attirent pas vraiment. En 1946, il retourne donc à Washington en tant que conseiller mathématique au ministère de la Défense. Son travail consiste plus spécifiquement à faire de la programmation, c'est-à-dire à prévoir les horaires et l'organisation des entraînements, de l'approvisionnement et du déploiement des hommes. En 1947, il développe une méthode pour optimiser ces programmes, méthode qu'il appellera plus tard « algorithme du simplexe », à la suggestion de Motzkin qui a immigré aux États-Unis en 1948.



La planification du ravitaillement des forces armées américaines pendant la Seconde Guerre mondiale a été une des motivations du développement de la programmation linéaire.

Une des premières applications de cet algorithme vise à mettre au point un régime alimentaire équilibré à un coût minimal. Selon Dantzig, il a fallu résoudre un système de 9 équations à 77 inconnues, ce qui a nécessité l'équivalent de 120 jours de travail à une personne. Ce régime alimentaire coûtait annuellement 39,69 $ (en 1947) par personne. En 1948, lors d'une rencontre avec Dantzig, l'économiste Tjalling Charles Koopmans (1910-1985) de l'université de Chicago propose d'appeler « programmation linéaire » le domaine d'études cherchant à résoudre ce genre de problèmes d'optimisation. Dantzig devient chercheur à la Rand Corporation en 1952 et commence à utiliser, pour ses calculs, la première génération d'ordinateurs alors toujours en développement. Depuis, la programmation linéaire joue un rôle capital dans la gestion des grandes institutions financières et économiques du monde.

En 1975, Kantorovitch et Koopmans reçoivent le prix Nobel des sciences économiques pour leurs travaux indépendants utilisant la programmation linéaire pour optimiser l'allocation de ressources rares. Pour sa part, Dantzig a reçu de nombreux prix scientifiques, mais, paradoxalement, pas de prix Nobel.

Exercices préliminaires

1. Représenter les droites d'équations suivantes et déterminer les points d'intersection de ces droites.

a) $D_1 : x = 2$,
$D_2 : y = -3$,
$D_3 : x + 4 = 0$ et
$D_4 : 2y - 5 = 0$

b) $D_1 : 3x + 2y = 12$,
$D_2 : 2x - 5y = 10$ et
$D_3 : 29x - 20y = -2$

2. Déterminer, parmi les points O(0, 0), A(2, 3) et B(4, -5), ceux dont les coordonnées satisfont les inéquations suivantes.

a) $3x + 4y \leq 0$

b) $9x - 3y \leq 14$

c) $5x + 4y > 0$

3. Soit $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$, où x, y et $z \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs maximales de x, y et z si :

a) $x + 0{,}5y + z = 30$

b) $3x + 2y + 4z = 30$

c) $4{,}5x + 1{,}2y + 60z = 15$

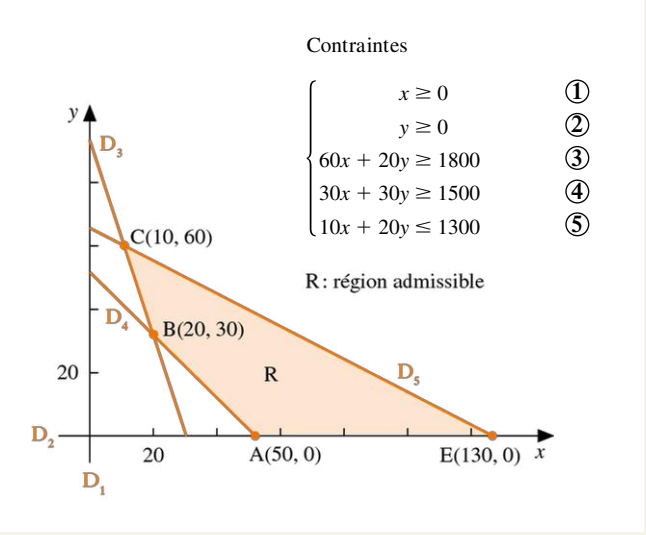
11.1 Résolution de problèmes d'optimisation par la méthode graphique

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra résoudre des problèmes d'optimisation par la méthode graphique.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de représenter des lieux géométriques ;
- de déterminer l'ensemble-solution d'un système d'inéquations linéaires à deux variables ;
- de traduire les contraintes en un système d'inéquations linéaires ;
- de déterminer la fonction économique ;
- de représenter la région admissible ;
- de déterminer les sommets de la région admissible ;
- d'optimiser la fonction économique donnée ;
- de résoudre des problèmes d'optimisation.



La méthode graphique permet de maximiser ou de minimiser une fonction économique à plusieurs variables de premier degré, lesquelles doivent respecter certaines contraintes.

La fonction économique est également appelée « fonction-objectif [1] ».

1. Y. Nobert, R. Ouellet et R. Parent, *Méthodes d'optimisation pour la gestion*, Montréal, Gaëtan Morin Éditeur, 2008, 520 p.

Lieux géométriques

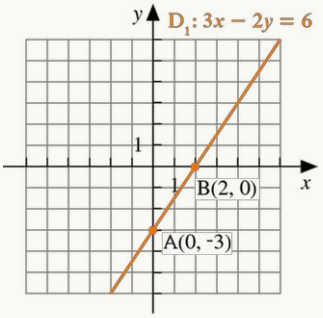
Exemple 1 Représentons et identifions les lieux géométriques L_1, L_2 et L_3 suivants.

a) $L_1 : 3x - 2y = 6$

L'équation $3x - 2y = 6$ définit une droite.

Pour tracer le graphique de cette droite, déterminons, si c'est possible, les points de rencontre de cette droite avec les axes.

D'où le lieu géométrique L_1 est la droite D_1 passant par les points A(0, -3) et B(2, 0).



L_1 : droite D_1

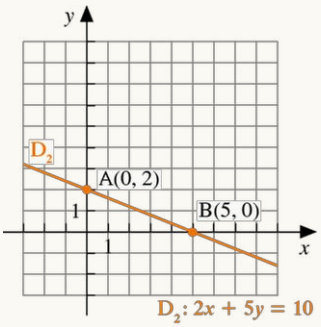
b) $L_2 : 2x + 5y \geq 10$

Pour déterminer le lieu L_2 défini par $2x + 5y \geq 10$, il faut d'abord tracer la droite D_2 d'équation $2x + 5y = 10$ qui appartient à L_2.

Cette droite passe par les points A(0, 2) et B(5, 0).

Il suffit ensuite de choisir un point n'appartenant pas à la droite D_2 et de vérifier si ce point satisfait l'inéquation $2x + 5y > 10$.

Lorsqu'il n'est pas situé sur la droite D_2, le point d'origine O(0, 0) permet de vérifier facilement si l'inéquation est satisfaite ou non.



En remplaçant x par 0 et y par 0 dans $2x + 5y > 10$, nous obtenons

$2(0) + 5(0) > 10$

$0 > 10$ (inégalité fausse)

Puisque l'inégalité précédente est fausse, le point O(0, 0) n'appartient pas au lieu géométrique L_2 cherché.

Par contre, en choisissant le point R(4, 3) situé sur l'autre côté de la droite D_2, nous obtenons

$2(4) + 5(3) > 10$

$23 > 10$ (inégalité vraie)

Puisque l'inégalité précédente est vraie, le point R(4, 3) appartient au lieu géométrique L_2 cherché.

L'étudiant peut vérifier que tous les points situés du même côté que

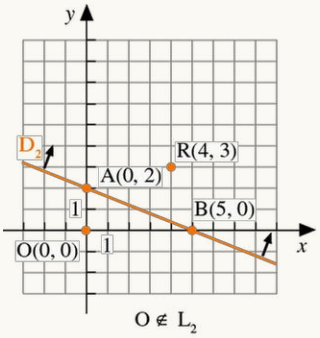
O(0, 0) par rapport à la droite D_2 ne satisfont pas l'inéquation $2x + 5y > 10$.

Donc, ils n'appartiennent pas au lieu géométrique L_2.

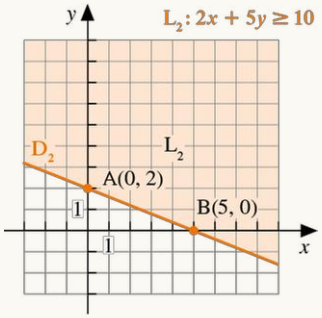
R(4, 3) par rapport à la droite D_2 satisfont l'inéquation $2x + 5y > 10$.

Donc, ils appartiennent au lieu géométrique L_2.

D'où le lieu cherché est le demi-plan fermé, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points situés sur la droite D_2 ainsi que les points situés au-dessus de la droite.



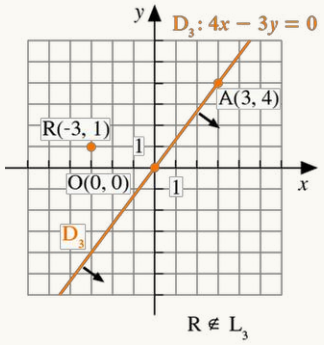
$O \notin L_2$
$R \in L_2$



L_2 : demi-plan fermé

c) $L_3 : 4x - 3y > 0$

Traçons d'abord la droite D_3 d'équation $4x - 3y = 0$ qui n'appartient pas à L_3.



$R \notin L_3$

Cette droite passe par O(0, 0) et A(3, 4).

Puisque O(0, 0) est situé sur la droite D_3, déterminons si le point R(-3, 1), point n'appartenant pas à la droite D_3, vérifie l'inéquation $4x - 3y > 0$.

En remplaçant x par -3 et y par 1 dans $4x - 3y > 0$, nous obtenons

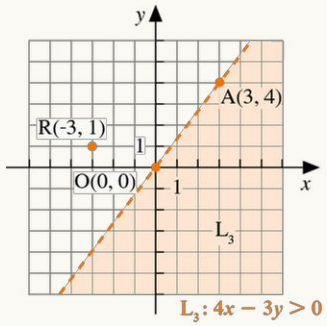
$$4(-3) - 3(1) > 0$$

$$-15 > 0 \qquad \text{(inégalité fausse)}$$

Puisque l'inégalité précédente est fausse, le point R(-3, 1) ainsi que tous les points situés du même côté de la droite $D_3 : 4x - 3y = 0$ n'appartiennent pas au lieu géométrique L_3 cherché.

D'où le lieu L_3 cherché est le demi-plan ouvert situé au-dessous de la droite D_3.

La droite D_3 est tracée en pointillés pour indiquer que les points sur cette droite ne font pas partie du lieu géométrique L_3 à cause de l'inégalité stricte.



L_3 : demi-plan ouvert

Remarque : Soit la droite $D : ax + by + c = 0$, où a, b et $c \in \mathbb{R}$.

1) Lorsque l'inéquation est de la forme

$$ax + by + c \leq 0 \text{ ou } ax + by + c \geq 0,$$

elle définit un demi-plan fermé, car la droite D fait partie du lieu géométrique. Cette droite est alors tracée en un trait continu.

2) Lorsque l'inéquation est de la forme

$$ax + by + c < 0 \text{ ou } ax + by + c > 0,$$

elle définit un demi-plan ouvert, car la droite D ne fait pas partie du lieu géométrique. Cette droite est alors tracée en pointillés.

Dans tous les cas précédents, la droite D est appelée frontière du lieu géométrique.

Exercice de compréhension 11.1

1. Représenter graphiquement dans un même système d'axes les lieux géométriques L_1 et L_2 suivants.

$L_1 : 2x - y - 3 < 0$ et $L_2 : 2x - y - 3 > 0$

Systèmes d'inéquations linéaires

Dans un problème de programmation linéaire, le lieu géométrique cherché dépend de plusieurs inéquations linéaires.

DÉFINITION 11.1

Un **système d'inéquations linéaires** est constitué d'inéquations linéaires.

Exemple 1 Soit les systèmes d'inéquations linéaires S_1 et S_2 suivants.

a) $S_1 \begin{cases} x \leq 0 \\ x < 2y - 6 \\ x + y - 4 \geq 0 \end{cases}$

S_1 est un système d'inéquations linéaires de trois inéquations à deux variables.

b) $S_2 \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 > 4 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$

S_2 est un système d'inéquations linéaires de cinq inéquations à trois variables.

DÉFINITION 11.2

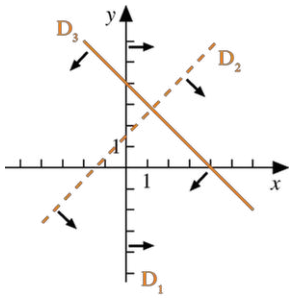
Soit S, un système d'inéquations linéaires à deux variables.

1) Une solution (a, b) est dite **solution admissible** si elle satisfait chacune des inéquations de S.

2) L'**ensemble-solution** de S est l'ensemble de toutes les solutions admissibles.

Exemple 2 Représentons graphiquement l'ensemble-solution de S.

$$S \begin{cases} x \geq 0 & (1) \\ 2x - 2y > -3 & (2) \\ x + y \leq 4 & (3) \end{cases}$$

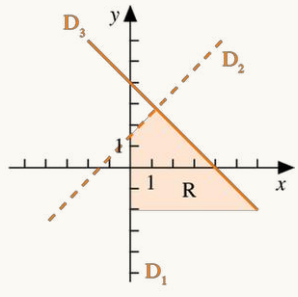


$D_1 : x = 0$
$D_2 : 2x - 2y = -3$
$D_3 : x + y = 4$

(1) L_1 : demi-plan fermé situé à droite de l'axe des y, $D_1 : x = 0$

(2) L_2 : demi-plan ouvert situé au-dessous de la droite $D_2 : 2x - 2y = -3$

(3) L_3 : demi-plan fermé situé au-dessous de la droite $D_3 : x + y = 4$



L'ensemble-solution de S est l'intersection des demi-plans L_1, L_2 et L_3.

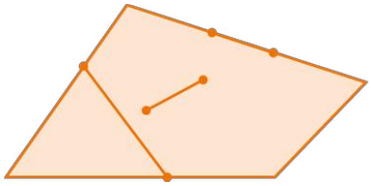
D'où l'ensemble-solution de S correspond à la région R ombrée ci-dessus.

Contraintes, région admissible et polygone de contraintes

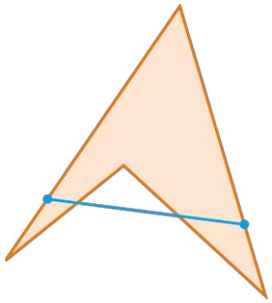
DÉFINITION 11.3

1) Chaque inéquation d'un système d'inéquations linéaires est appelée une **contrainte**.
2) Chaque variable présente dans un système d'inéquations linéaires est appelée **variable de décision**.
3) Le lieu géométrique qui représente l'ensemble-solution d'un système d'inéquations linéaires est appelé **région admissible**.
4) Lorsque l'aire de la région admissible est finie et que cette région est bornée par des segments de droite situés entièrement dans cette région, la région admissible est appelée **polygone de contraintes**.
5) Chaque point d'intersection de deux droites délimitant la région admissible est appelé un **sommet** de cette région admissible.

Remarque : Tous les polygones de contraintes obtenus sont convexes, c'est-à-dire que tout segment de droite reliant deux points quelconques de la région délimitée par le polygone est situé entièrement dans cette région.



Polygone convexe



Polygone non convexe

Exemple 1 Soit le système S d'inéquations linéaires suivant à cinq contraintes.

$$S\begin{cases} x \geq 0 & (1) \\ y \geq 0 & (2) \\ 2y - 3x \geq -12 & (3) \\ 5y - x \leq 10 & (4) \\ x + 2y \geq 2 & (5) \end{cases}$$

x et *y* sont les variables de décision

a) Représentons graphiquement les droites suivantes ainsi que les demi-plans correspondant aux inéquations précédentes.

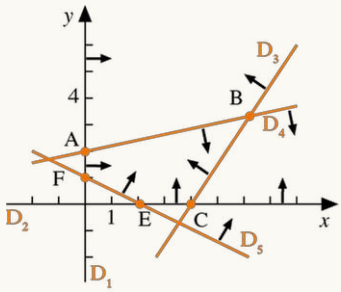
$D_1 : x = 0$

$D_2 : y = 0$

$D_3 : 2y - 3x = -12$

$D_4 : 5y - x = 10$

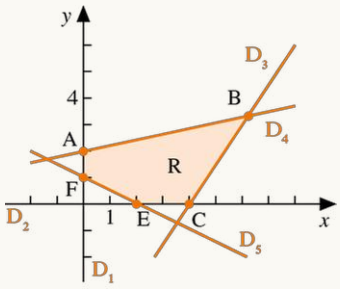
$D_5 : x + 2y = 2$



11

b) Représentons la région admissible, notée R.

La région admissible est l'ensemble de tous les points satisfaisant aux contraintes du système S, c'est-à-dire les points situés à l'intérieur du polygone ainsi que ceux situés sur la frontière du polygone. Cette région admissible est donc un polygone de contraintes.



R : région admissible

c) Déterminons les sommets A, B, C, E et F du polygone de contraintes en résolvant les systèmes d'équations linéaires appropriés.

$A : D_1 \cap D_4$

$\begin{cases} x = 0 \\ 5y - x = 10 \end{cases}$

ainsi, A(0, 2)

$B : D_3 \cap D_4$

$\begin{cases} 2y - 3x = -12 \\ 5y - x = 10 \end{cases}$

ainsi, $B\left(\frac{80}{13}, \frac{42}{13}\right)$

$C : D_2 \cap D_3$

$\begin{cases} y = 0 \\ 2y - 3x = -12 \end{cases}$

ainsi, C(4, 0)

$E : D_2 \cap D_5$

$\begin{cases} y = 0 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

ainsi, E(2, 0)

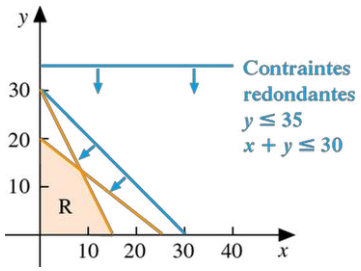
$F : D_1 \cap D_5$

$\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

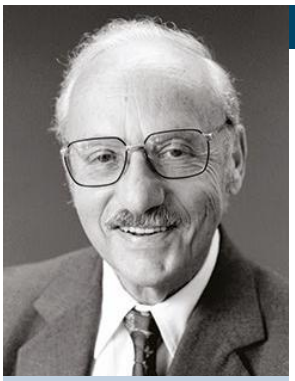
ainsi, F(0, 1)

DÉFINITION 11.4

Une contrainte est dite **redondante** si elle n'est pas utilisée pour déterminer l'ensemble des solutions admissibles.



Optimisation d'une fonction linéaire à deux variables


George Bernard Dantzig
(1914-2005)

IL Y A ENVIRON 70 ANS...

Dans la première moitié de l'année 1947, **George Bernard Dantzig** cherche à exprimer sous forme mathématique les problèmes liés à la programmation qu'il doit faire pour le ministère de la Défense des États-Unis (*voir la perspective historique au début du chapitre*). Sa grande innovation consiste à montrer que tout repose sur l'optimisation d'une fonction linéaire à plusieurs variables, c'est-à-dire une fonction où les variables sont élevées à la puissance 1. Sachant que les économistes utilisent souvent de telles fonctions, Dantzig rencontre, en juin 1947, l'économiste Tjalling Charles Koopmans (1910-1985), de Chicago, dans l'espoir que ce dernier l'aide à résoudre les systèmes qu'il a mis en évidence. Koopmans voit immédiatement l'intérêt des travaux de Dantzig pour la planification économique. Toutefois, ni lui ni ses collègues économistes ne pourront l'aider à résoudre ses systèmes. On comprend maintenant l'origine de l'appellation « fonction économique », attribuée à ces fonctions linéaires à optimiser.

Dans la section suivante, nous aurons à optimiser, c'est-à-dire à maximiser ou à minimiser, des fonctions linéaires à deux variables, pour des valeurs appartenant à un polygone de contraintes.

DÉFINITION 11.5

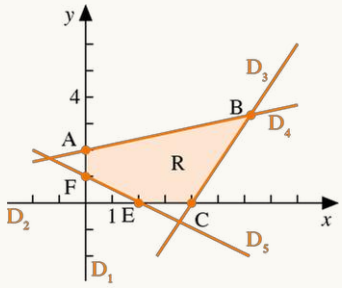
Une fonction linéaire à deux variables de la forme

$Z(x, y) = ax + by + c$, où a, b et $c \in \mathbb{R}$,

est appelée **fonction économique** ou **fonction-objectif**.

Exemple 1 Soit le polygone de contraintes ci-contre (*voir l'exemple 1 précédent*) défini par le système d'inéquations linéaires suivant.

$$\begin{cases} x \geq 0 & (1) \\ y \geq 0 & (2) \\ 2y - 3x \geq -12 & (3) \\ 5y - x \leq 10 & (4) \\ x + 2y \geq 2 & (5) \end{cases}$$



$D_1 : x = 0$
$D_2 : y = 0$
$D_3 : 2y - 3x = -12$
$D_4 : 5y - x = 10$
$D_5 : x + 2y = 2$

Soit la fonction économique $Z(x, y) = 2x + y$ que nous voulons optimiser, c'est-à-dire déterminer les points $P(x, y)$ appartenant au polygone de contraintes R qui maximisent et les points qui minimisent la fonction $Z(x, y)$.

a) Calculons la valeur de $Z(x, y)$ pour quelques points de la région R.

Valeurs de Z pour les points situés aux sommets de R

Point	$Z(x, y) = 2x + y$
A(0, 2)	$2(0) + 2 = 2$
$B\left(\frac{80}{13}, \frac{42}{13}\right)$	$2\left(\frac{80}{13}\right) + \frac{42}{13} = \frac{202}{13}$
C(4, 0)	$2(4) + 0 = 8$
E(2, 0)	$2(2) + 0 = 4$
F(0, 1)	$2(0) + 1 = 1$

$\frac{202}{13} = 15{,}5\ldots$

Valeurs de Z pour des points quelconques de R, autres que les sommets

Point	$Z(x, y) = 2x + y$
$P_1(2, 1)$	$2(2) + 1 = 5$
$P_2\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$2\left(\frac{7}{2}\right) + \frac{1}{2} = 7{,}5$
$P_3(3, 2)$	$2(3) + 2 = 8$
$P_4(6, 3)$	$2(6) + 3 = 15$
$P_5(5, 3)$	$2(5) + 3 = 13$

Nous constatons que la fonction économique $Z(x, y)$ prend différentes valeurs selon les points choisis.

b) Posons la fonction économique $Z(x, y) = k$ pour différentes valeurs arbitraires de k, où $k \in \mathbb{R}$.

Par exemple, pour les valeurs de k suivantes : -2, 4, 8, 12 et 17, nous obtenons les droites Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 et Z_5 ci-contre.

Ces droites Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 et Z_5 sont appelées courbes de niveau.

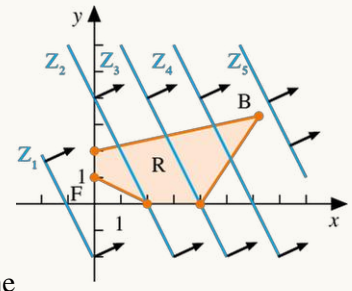
$Z(x, y) = 2x + y$

k	$Z_i : 2x + y = k$
-2	$Z_1 : 2x + y = -2$
4	$Z_2 : 2x + y = 4$
8	$Z_3 : 2x + y = 8$
12	$Z_4 : 2x + y = 12$
17	$Z_5 : 2x + y = 17$

c) Représentons la région R ainsi que les courbes de niveau Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 et Z_5.

$Z_1 /\!/ Z_2 /\!/ Z_3 /\!/ Z_4 /\!/ Z_5$

Nous constatons ici que les courbes de niveau tracées sont des droites parallèles, car elles ont toutes le même vecteur normal, soit $\vec{n} = (2, 1)$.



Pour des valeurs croissantes de k, les courbes de niveau Z_i correspondantes coupent l'axe des x de plus en plus à droite et coupent l'axe des y de plus en plus haut.

De plus, chaque courbe de niveau Z_i conserve une valeur constante pour tous les points $P(x, y)$ de cette droite.

d) Déterminons les coordonnées des points de R qui maximisent et qui minimisent la fonction économique $Z(x, y)$ et calculons Z dans les deux cas.

De c), nous constatons que le minimum de $Z(x, y)$ se situe au premier sommet du polygone de contraintes atteint par une courbe de niveau, soit le point $F(0, 1)$, et que le maximum de $Z(x, y)$ se situe au dernier sommet du polygone de contraintes atteint par une courbe de niveau, soit le point $B\left(\frac{80}{13}, \frac{42}{13}\right)$.

$Z(x, y) = 2x + y$

D'où $\min Z = Z_F(0, 1)$

$= 2(0) + 1(1)$

$= 1$

D'où $\max Z = Z_B\left(\frac{80}{13}, \frac{42}{13}\right)$

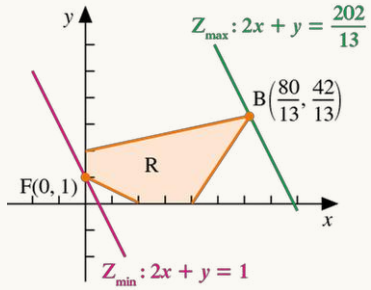
$= 2\left(\frac{80}{13}\right) + 1\left(\frac{42}{13}\right)$

$= \frac{202}{13}$

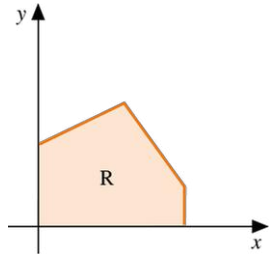
Représentons graphiquement la région admissible et les droites

$Z_{min} : 2x + y = 1$

$Z_{max} : 2x + y = \frac{202}{13}$

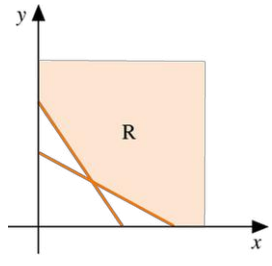


Lorsque la région admissible est un polygone de contraintes, la fonction économique possède un minimum et un maximum, chacun atteint à un des sommets de ce polygone ou à chaque point d'un côté de ce polygone lorsque la fonction économique est parallèle à ce côté.



Lorsque la région admissible est non bornée, c'est-à-dire que l'aire de la région R admissible est infinie, la fonction économique peut posséder soit

- un minimum et pas de maximum ;
- un maximum et pas de minimum ;
- ni maximum ni minimum.



Étapes à suivre pour optimiser une fonction économique

1) Représenter la région admissible.
2) Déterminer les sommets $S_1(x_1, y_1)$, $S_2(x_2, y_2)$, $S_3(x_3, y_3)$, … de la région admissible.
3) Évaluer $Z(x, y)$ à chaque sommet de la région admissible afin de déterminer le sommet donnant le minimum, s'il existe, et le sommet donnant le maximum, s'il existe.

Exemple 2 Soit le système S d'inéquations linéraires suivant.

$$S\begin{cases} x \geq 0 & (1) \\ y \geq 0 & (2) \\ 3x - 2y + 80 \geq 0 & (3) \\ 7x + 10y \leq 840 & (4) \\ 2y \geq x & (5) \\ 2x + 5y \geq 100 & (6) \end{cases}$$

Déterminons les coordonnées des points qui maximisent et des points qui minimisent la fonction économique $Z(x, y) = 6x - 4y$, ainsi que le maximum et le minimum de cette fonction économique.

1) Représentons la région admissible R définie par le système S.

En traçant les droites suivantes et en déterminant l'intersection des demi-plans fermés correspondant aux inéquations précédentes, nous obtenons le polygone de contraintes ci-dessous.

$D_1 : x = 0$

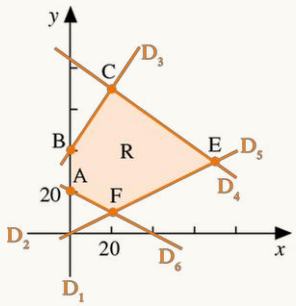
$D_2 : y = 0$

$D_3 : 3x - 2y + 80 = 0$

$D_4 : 7x + 10y = 840$

$D_5 : 2y = x$

$D_6 : 2x + 5y = 100$



2) Déterminons les sommets du polygone de contraintes.

En résolvant les systèmes d'équations appropriés, nous trouvons

$$A(0, 20),\ B(0, 40),\ C(20, 70),\ E(70, 35) \text{ et } F\left(\frac{200}{9}, \frac{100}{9}\right)$$

3) Évaluons $Z(x, y)$ à chaque sommet du polygone, où $Z(x, y) = 6x - 4y$.

$Z_A(0, 20) = 6(0) - 4(20) = -80$

$Z_B(0, 40) = 6(0) - 4(40) = -160$ (minimum)

$Z_C(20, 70) = 6(20) - 4(70) = -160$ (minimum)

$Z_E(70, 35) = 6(70) - 4(35) = 280$ (maximum)

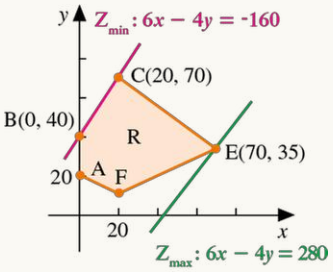
$$Z_F\left(\frac{200}{9}, \frac{100}{9}\right) = 6\left(\frac{200}{9}\right) - 4\left(\frac{100}{9}\right) = \frac{800}{9} = 88,\overline{8}$$

Représentons graphiquement le polygone de contraintes et les droites

Z_{max} : $6x - 4y = 280$

Z_{min} : $6x - 4y = -160$

D'où le maximum de $Z(x, y)$ est atteint au sommet E(70, 35) et est égal à 280.



Infinité de solutions

Puisque le minimum de $Z(x, y)$ est atteint aux sommets B(0, 40) et C(20, 70), alors tous les points appartenant au segment de droite reliant B à C donnent la même valeur minimale de $Z(x, y)$, c'est-à-dire -160.

Remarque : De façon analogue, si la solution maximale est obtenue à deux sommets du polygone de contraintes, alors tous les points du segment de droite joignant ces deux sommets donnent la même solution maximale.

Résolution de problèmes d'optimisation

Voici les étapes à suivre pour résoudre des problèmes d'optimisation dans des situations concrètes où, de façon générale, la région admissible est un polygone de contraintes.

1) Identifier les variables de décision.
2) Traduire les contraintes en un système d'inéquations linéaires.
3) Déterminer la fonction économique à optimiser.
4) Représenter la région admissible et déterminer les sommets de cette région en résolvant les systèmes d'équations appropriés.
5) Évaluer $Z(x, y)$ à chaque sommet.
6) Formuler la réponse.

Dans une situation concrète, les variables de décision représentent souvent des quantités ou des mesures qui ne peuvent pas être négatives (temps, longueur, prix de vente, nombre de personnes, etc.). Ainsi, elles sont habituellement soumises à des contraintes de non-négativité : $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Dans ce cas, les solutions admissibles appartiennent toutes au premier quadrant.

Exemple 1 Selon les vétérinaires, un chat doit prendre quotidiennement de la nourriture contenant au moins 1800 unités de protéines et 1500 unités de vitamines, tout en s'assurant que le nombre de calories ne dépasse pas 1300.

Deux types d'aliments sont recommandés. Le premier contient, par portion, 10 calories, 30 unités de vitamines et 60 unités de protéines ; le second contient, par portion, 20 calories, 30 unités de vitamines et 20 unités de protéines.

Le premier aliment coûte 0,10 $ par unité et le second, 0,06 $ par unité.

Déterminons le nombre de portions de chaque type d'aliment qu'un chat adulte doit consommer pour minimiser le coût total, tout en respectant les contraintes données, et calculons ce coût minimal. Déterminons également le nombre de calories, d'unités de vitamines et d'unités de protéines correspondant à ce coût minimal.

1) Identifions les variables de décision.

Soit x, le nombre de portions de l'aliment 1, et
y, le nombre de portions de l'aliment 2.

2) Traduisons les contraintes en un système d'inéquations linéaires.

Il est parfois utile de construire un tableau dans lequel on retrouve les données qui nous aident à déterminer le système d'inéquations linéaires ainsi que la fonction économique à optimiser.

	Aliment 1 x	**Aliment 2** y	
Calories	10	20	Ne doit pas excéder 1300
Vitamines	30	30	Besoin minimal : 1500
Protéines	60	20	Besoin minimal : 1800
Prix (en $)	0,10	0,06	

Ainsi, nous avons le système d'inéquations linéaires suivant.

$$\begin{cases} x \geq 0 & \text{①} \\ y \geq 0 & \text{②} \\ 10x + 20y \leq 1300 & \text{③} \\ 30x + 30y \geq 1500 & \text{④} \\ 60x + 20y \geq 1800 & \text{⑤} \end{cases}$$

① ② contraintes de non-négativité
③ contrainte de calories
④ contrainte de vitamines
⑤ contrainte de protéines

3) Déterminons la fonction économique à optimiser.

$Z(x, y) = 0{,}10x + 0{,}06y$, exprimée en dollars

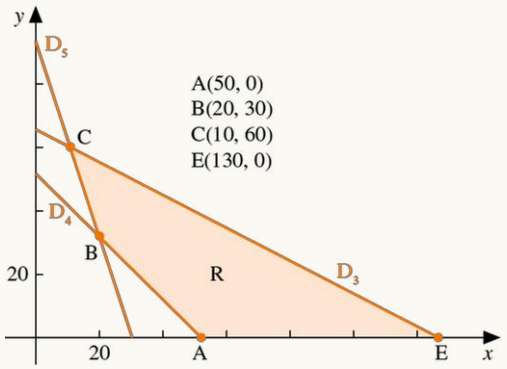
est la fonction économique dont nous devons déterminer le minimum.

4) Représentons le polygone de contraintes et déterminons les sommets du polygone en résolvant les systèmes d'équations appropriés.

$D_3 : 10x + 20y = 1300$

$D_4 : 30x + 30y = 1500$

$D_5 : 60x + 20y = 1800$



5) Évaluons $Z(x, y)$ à chaque sommet, où $Z(x, y) = 0{,}10x + 0{,}06y$.

$$Z_A(50, 0) = 0{,}10(50) + 0{,}06(0) = 5{,}00$$

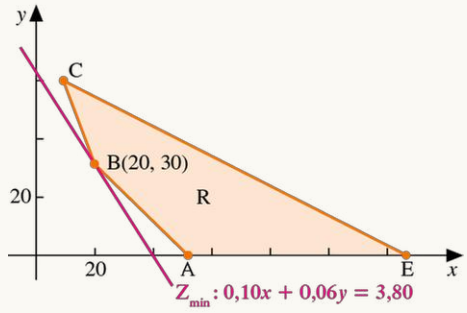
$$Z_B(20, 30) = 0{,}10(20) + 0{,}06(30) = 3{,}80 \quad \text{(minimum)}$$

$$Z_C(10, 60) = 0{,}10(10) + 0{,}06(60) = 4{,}60$$

$$Z_E(130, 0) = 0{,}10(130) + 0{,}06(0) = 13{,}00$$

Représentons graphiquement le polygone de contraintes et la droite

$Z_{min}: 0{,}10x + 0{,}06y = 3{,}80$



6) Formulons la réponse.

Le coût est minimal pour 20 portions de l'aliment 1 et 30 portions de l'aliment 2, ainsi le coût minimal est de 3,80 $. (voir 5))

Calories : $10x + 20y$

Le nombre de calories est de $10(20) + 20(30) = 800$, donc 800 calories.

Vitamines : $30x + 30y$

Le nombre d'unités de vitamines est de $30(20) + 30(30) = 1500$, donc 1500 unités de vitamines.

Protéines : $60x + 20y$

Le nombre d'unités de protéines est de $60(20) + 20(30) = 1800$, donc 1800 unités de protéines.

Exemple 2 Le parc de stationnement d'une station de ski a une superficie de 18 000 m², dont au plus la moitié est occupée par des véhicules stationnés. Nous savons qu'une automobile occupe une superficie de 9 m² tandis qu'un autobus occupe une superficie de 30 m². Les installations du centre de ski permettent de recevoir un maximum de 5400 skieurs. Généralement, le nombre moyen de skieurs est de 3 par automobile, et de 27 par autobus.

Si chaque automobile rapporte en moyenne 135 $ et chaque autobus, 900 $, déterminons le nombre d'automobiles et d'autobus qui maximisent les revenus quotidiens, et déterminons ce revenu maximal.

1) Identifions les variables de décision.

Soit x, le nombre d'automobiles, et
y, le nombre d'autobus.

2) Traduisons les contraintes en un système d'inéquations linéaires.

$$\begin{cases} x \geq 0 & (1) \\ y \geq 0 & (2) \end{cases} \text{ contraintes de non-négativité}$$

$$9x + 30y \leq 9000 \quad (3) \quad \text{contrainte de superficie}$$

$$3x + 27y \leq 5400 \quad (4) \quad \text{contrainte de nombre de skieurs}$$

3) Déterminons la fonction économique à optimiser.

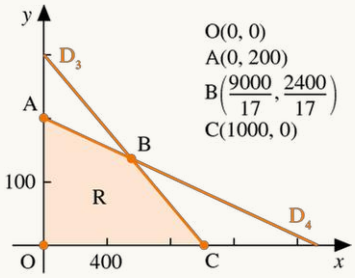
$Z(x, y) = 135x + 900y$, exprimée en dollars

est la fonction économique dont nous devons déterminer le maximum.

4) Représentons le polygone de contraintes et déterminons les sommets du polygone en résolvant les systèmes d'équations appropriés.

$D_3 : 9x + 30y = 9000$

$D_4 : 3x + 27y = 5400$



5) Évaluons $Z(x, y)$ à chaque sommet, où $Z(x, y) = 135x + 900y$.

$Z_O(0, 0) = 0$

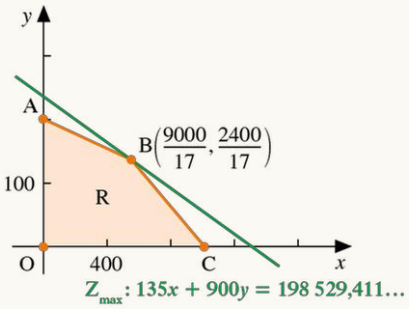
$Z_A(0, 200) = 180\,000$

$Z_B\left(\frac{9000}{17}, \frac{2400}{17}\right) = 198\,529{,}411\ldots$ (maximum)

$Z_C(1000, 0) = 135\,000$

Représentons graphiquement le polygone de contraintes et la droite

$Z_{max} : 135x + 900y = 198\,529{,}411\ldots$



6) Formulons la réponse.

Analyse de sensibilité

Puisque, dans ce contexte, x et y doivent être des valeurs entières (non négatives) et que $x = \frac{9000}{17} \approx 529{,}4$ et $y = \frac{2400}{17} \approx 141{,}2$, il faut vérifier si les couples d'entiers approchés P(529, 141), Q(529, 142), R(530, 141) et S(530, 142) vérifient les contraintes et calculer la fonction Z lorsque le couple vérifie les contraintes.

Contraintes
$9x + 30y \leq 9000$

$3x + 27y \leq 5400$

Fonction économique
$Z(x, y) = 135x + 900y$

Pour P(529, 141), nous avons

③ $9(529) + 30(141) = 8991 \leq 9000$ (inégalité vraie)

④ $3(529) + 27(141) = 5394 \leq 5400$ (inégalité vraie)

Ainsi, $Z_P(529, 141) = 135(529) + 900(141) = 198\,315$.

Pour Q(529, 142), nous avons

③ $9(529) + 30(142) = 9021 \leq 9000$ (inégalité fausse)

Donc, Q(529, 142) n'appartient pas au polygone de contraintes.

Pour R(530, 141), nous avons

③ $9(530) + 30(141) = 9000 \leq 9000$ (inégalité vraie)

④ $3(530) + 27(141) = 5397 \leq 5400$ (inégalité vraie)

Ainsi, $Z_R(530, 141) = 135(530) + 900(141) = 198\,450$.

Pour S(530, 142), nous avons

③ $9(530) + 30(142) = 9030 \leq 9000$ (inégalité fausse)

Donc, S(530, 142) n'appartient pas au polygone de contraintes.

D'où, pour 530 automobiles et 141 autobus, nous obtenons le revenu maximal de 198 450 $.

Exemple 3 Un fabricant de meubles produit des tables, des chaises et des buffets. En un mois, il fabrique 150 meubles.

Le tableau suivant nous indique, en heures, le temps nécessaire pour le découpage, l'assemblage et la finition de chaque type de meuble ainsi que le nombre d'heures disponibles pour chaque tâche.

	Buffet	**Table**	**Chaise**	**Temps disponible**
Découpage	3	1	4	540
Assemblage	1	2	4	520
Finition	3	4	1	250

Si chaque buffet procure au fabricant un profit de 200 $, chaque table, un profit de 300 $, et chaque chaise, un profit de 100 $, combien devra-t-il produire d'articles de chaque type pour maximiser son profit, sachant qu'il doit assumer des frais fixes de 16 000 $ par mois ?

1) Identifions les variables de décision.

Soit x, le nombre de buffets,
y, le nombre de tables, et
t, le nombre de chaises.

Nous pouvons toutefois ramener ces trois variables à deux variables.

Puisque $x + y + t = 150$, nous avons $t = 150 - x - y$, où $t \geq 0$.

2) Traduisons les contraintes en un système d'inéquations linéaires.

$$S_1 \begin{cases} x \geq 0 & ① \\ y \geq 0 & ② \\ t \geq 0 & ③ \\ 3x + 1y + 4t \leq 540 & ④ \\ 1x + 2y + 4t \leq 520 & ⑤ \\ 3x + 4y + 1t \leq 250 & ⑥ \end{cases}$$

En remplaçant t par $(150 - x - y)$, nous obtenons

$$S_2 \begin{cases} x \geq 0 & ① \\ y \geq 0 & ② \\ 150 - x - y \geq 0 & ③ \\ 3x + 1y + 4(150 - x - y) \leq 540 & ④ \\ 1x + 2y + 4(150 - x - y) \leq 520 & ⑤ \\ 3x + 4y + 1(150 - x - y) \leq 250 & ⑥ \end{cases}$$

En transformant ce dernier système, nous obtenons

$$S_2 \begin{cases} x \geq 0 & (1) \\ y \geq 0 & (2) \\ x + y \leq 150 & (3) \end{cases} \text{ contraintes de non-négativité}$$

$$\begin{cases} x + 3y \geq 60 & (4) \text{ contrainte de découpage} \\ 3x + 2y \geq 80 & (5) \text{ contrainte d'assemblage} \\ 2x + 3y \leq 100 & (6) \text{ contrainte de finition} \end{cases}$$

3) Déterminons la fonction économique à optimiser.

$Z(x, y, t) = 200x + 300y + 100t - 16\,000$, exprimée en dollars

$Z(x, y) = 200x + 300y + 100(150 - x - y) - 16\,000$ (car $t = 150 - x - y$)

d'où $Z(x, y) = 100x + 200y - 1000$, exprimée en dollars.

4) Représentons le polygone de contraintes et déterminons les sommets du polygone en résolvant les systèmes d'équations appropriés.

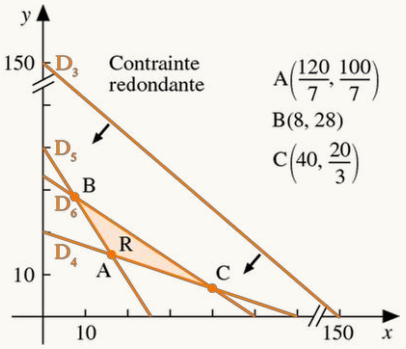
$D_3 : x + y = 150$

$D_4 : x + 3y = 60$

$D_5 : 3x + 2y = 80$

$D_6 : 2x + 3y = 100$

Nous constatons que la droite D_3 n'est pas une frontière du polygone de contraintes ; de fait, $x + y \leq 150$ est une contrainte redondante.



5) Évaluons $Z(x, y)$ à chaque sommet, où $Z(x, y) = 100x + 200y - 1000$. (voir étape 3)

$Z_A\left(\frac{120}{7}, \frac{100}{7}\right) \approx 3571{,}43$

$Z_B(8, 28) = 5400$ (maximum)

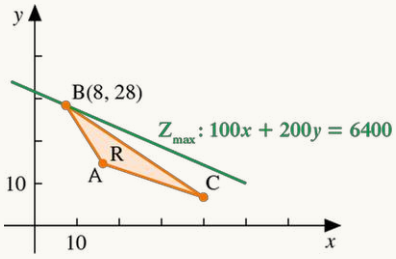
$Z_C\left(40, \frac{20}{3}\right) \approx 4333{,}33$

Ainsi, $Z_{max} : 100x + 200y - 1000 = 5400$

donc $100x + 200y = 6400$

Représentons graphiquement le polygone de contraintes et la droite

$Z_{max} : 100x + 200y = 6400$



6) Formulons la réponse.

Nombre de chaises
$t = 150 - 8 - 28 = 114$

Le fabricant devrait produire 8 buffets, 28 tables et 114 chaises pour obtenir un profit maximal de 5400 $.

EXERCICES 11.1

1. Représenter et identifier les lieux géométriques suivants.

a) $4x - 5y \leq 20$

b) $2x > 6 - 3y$

2. Pour chacun des systèmes d'inéquations linéaires S suivants, représenter la région admissible R définie par S et identifier les sommets en précisant s'ils appartiennent à R.

a) $S \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 8 \end{cases}$

b) $S \begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 1 \\ 2y + 3x < 0 \end{cases}$

c) $S \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2y - x \leq 4 \\ 3x + 10y \leq 36 \\ -y - x + 8 \geq 0 \end{cases}$

d) $S \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 6 \\ x + 3y < 9 \\ 5x + 6y \leq 30 \end{cases}$

3. Soit les systèmes d'inéquations linéaires S suivants et les fonctions Z données. Représenter le polygone de contraintes, déterminer l'équation des droites Z_{min} et Z_{max}, et représentrer ces droites.

a) $S \begin{cases} y \geq -2x \\ 3x + 7y \leq 22 \\ 2y - 7x \geq -33 \end{cases}$

$Z(x, y) = 5x + 2y$

b) $S \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_2 + x_1 \leq 10 \\ x_2 - x_1 \geq -2 \end{cases}$

$Z(x_1, x_2) = 4x_2 - 4x_1$

c) $S \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ t \geq 0 \\ 2x + 3y + t = 66 \\ 8x + 6y + t \leq 126 \\ 14x + 7y + 2t \geq 168 \\ 4x + 8y + t \geq 102 \end{cases}$

$Z(x, y, t) = 5x + 4y + t - 66$

4. Soit le système d'inéquations linéaires S suivant.

$S \begin{cases} y \leq x & (1) \\ x + y \geq 6 & (2) \\ x + y \leq 12 & (3) \\ x - 2y \leq 0 & (4) \end{cases}$

a) Représenter le polygone de contraintes et déterminer les sommets de ce polygone.

b) Pour chacune des fonctions économiques $Z(x, y)$ suivantes, déterminer l'équation des droites Z_{min} et Z_{max}, et représenter ces droites et le polygone trouvé en a).

i) $Z(x, y) = 3x + y$

ii) $Z(x, y) = 5y - 2x$

iii) $Z(x, y) = 3x + 3y$

5. **APPLICATION | COÛT DE FABRICATION**



Une petite entreprise fabriquant trois types de jouets possède deux usines de production. La première usine, située à Saint-Jérôme, produit 20 bateaux téléguidés, 30 autos téléguidées et 50 camions téléguidés par jour. La seconde usine, située à Lévis, produit 30 bateaux téléguidés, 20 autos téléguidées et 20 camions téléguidés par jour. Selon ses prévisions, l'entreprise estime qu'elle a besoin de produire au moins 1400 bateaux téléguidés, 1600 autos téléguidées et 2000 camions téléguidés.

Pendant combien de jours chaque usine devra-t-elle fonctionner pour minimiser le coût de fabrication et pour répondre aux prévisions, s'il en coûte 1000 $ par jour à l'usine de Saint-Jérôme et 800 $ par jour à l'usine de Lévis ? Déterminer ce coût de fabrication minimal.

6. **APPLICATION | COÛT MINIMAL**

Pour améliorer son état de santé, une personne décide de prendre, chaque jour, au moins 1400 unités de calcium et 600 unités de vitamine C. Elle peut prendre les unités recommandées en deux sachets.

Le sachet 1, à 0,20 $ l'unité, contient 200 unités de calcium et 200 unités de vitamine C, alors que le sachet 2, à 0,50 $ l'unité, contient 300 unités de calcium et 100 unités de vitamine C. Par contre, la personne refuse de prendre plus de 6 sachets par jour.

a) Combien de sachets de chaque type la personne devra-t-elle prendre par jour, à un coût minimal ? Déterminer ce coût.

b) Si le sachet 1 coûtait 0,80 $, et le sachet 2, 0,60 $, la répartition précédente donnerait-elle le coût minimal ?

7. **APPLICATION | PROFIT MAXIMAL**

Dans une microbrasserie, on fabrique deux sortes de bières, une bière blonde et une bière rousse, en utilisant, dans des proportions différentes, du blé, du malt et de la levure.



On utilise 2 kilogrammes de blé, 16 kilogrammes de malt et 100 grammes de levure par baril dans la fabrication de la bière blonde. Quant à la bière rousse, on utilise 6 kilogrammes de blé, 9 kilogrammes de malt et 200 grammes de levure par baril. France, la propriétaire de cette microbrasserie, dispose de 240 kilogrammes de blé, 576 kilogrammes de malt et 8,2 kilogrammes de levure. Un client lui assure l'achat d'au moins 20 barils. Combien de barils de chaque sorte la microbrasserie devra-t-elle fabriquer pour maximiser son profit si

a) la bière blonde lui assure un profit de 125 $ par baril, et la bière rousse, un profit de 90 $ par baril ? Déterminer le profit maximal.

b) la bière blonde lui assure un profit de 50 $ par baril, et la bière rousse, un profit de 120 $ par baril ? Déterminer le profit maximal.

8. **APPLICATION | MAXIMISATION D'UN PROFIT**

Chaque printemps, le propriétaire d'une petite quincaillerie aménage une superficie de 160 m^2 pour présenter les boîtes à fleurs, les arbustes et les outils de jardinage. La superficie réservée aux fleurs et aux arbustes ne doit pas dépasser les trois quarts de la superficie totale.

À la suite de l'étude de ses ventes des années précédentes, il constate qu'il n'a jamais vendu plus de 900 boîtes à fleurs, dont la dimension moyenne est de $\frac{1}{9}$ m^2. De plus, son fournisseur l'oblige à acheter un minimum de 360 arbustes. On sait que, dans 1 m^2, on peut placer 36 arbustes.

La superficie réservée aux outils de jardinage ne doit pas dépasser la superficie occupée par les fleurs et les arbustes. L'espace utilisé par les arbustes ne doit pas dépasser le tiers de celui occupé par les fleurs. Le profit au mètre carré est de 24 $ pour les fleurs, 40 $ pour les arbustes et 5 $ pour les outils de jardinage.



Déterminer le nombre de mètres carrés que le propriétaire devra allouer à chaque article pour maximiser son profit et déterminer ce profit maximal.

11.2 Résolution de problèmes de maximisation par la méthode du simplexe

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra résoudre des problèmes de maximisation par la méthode du simplexe.

Plus précisément l'étudiant sera en mesure

- de donner la définition d'une variable d'écart ;
- de transformer des inégalités en égalités à l'aide de variables d'écart ;
- d'identifier, à chaque étape, les variables de base et les variables hors base dans un problème de maximisation ;
- de construire le tableau initial, c'est-à-dire la matrice augmentée obtenue à partir des données ;
- de trouver le pivot en déterminant la colonne pivot et la ligne pivot ;
- d'effectuer le pivotage ;
- de maximiser la fonction économique à l'aide de la méthode du simplexe.

Regroupement des données

$$\begin{aligned} 3x + y + 2z + e_1 &= 120 \\ x + y + 2z + e_2 &= 100 \\ x + 3y + 2z + e_3 &= 140 \\ -40x - 30y - 50z + P &= 0 \end{aligned}$$

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0$

Construction du tableau initial

	x	y	z	e_1	e_2	e_3	P	
e_1	3	1	2	1	0	0	0	120
e_2	1	1	2	0	1	0	0	100
e_3	1	3	2	0	0	1	0	140
P	-40	-30	-50	0	0	0	1	0

Dans cette section, notre étude se limitera aux problèmes de maximisation de la forme standard suivante.

Maximiser une fonction économique

$$Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

en respectant des contraintes de la forme

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i, \text{ où } b_i \geq 0 \text{ et } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.$$

DÉFINITION 11.6

Une **variable d'écart**, notée e, est une variable non négative qui, ajoutée au plus petit membre d'une inéquation, transforme cette inéquation en une équation.

Exemple 1

a) Transformons l'inéquation $2x + y \leq 35$ en une équation en ajoutant une variable d'écart e au plus petit membre de l'inéquation.

Ainsi, en ajoutant e à $2x + y$, nous obtenons

$$2x + y + e = 35, \text{ où } e \geq 0 \qquad (e = 35 - 2x - y)$$

b) Dans un problème donné, nous retrouvons les deux contraintes suivantes.

$$\begin{cases} (1)\ x + 2y + 4z \leq 128 & \text{(contrainte de temps en heures)} \\ (2)\ 3x + y + 5z \leq 25\,700 & \text{(contrainte de budget en dollars)} \end{cases}$$

Transformons ces inéquations en équations en ajoutant respectivement les variables d'écart e_1 et e_2 au plus petit membre de chaque inéquation.

$$\begin{cases} (1)\ x + 2y + 4z + e_1 = 128, & \text{où } e_1 \geq 0 \quad (e_1 = 128 - x - 2y - 4z) \\ (2)\ 3x + y + 5z + e_2 = 25\,700, & \text{où } e_2 \geq 0 \quad (e_2 = 25\,700 - 3x - y - 5z) \end{cases}$$

Interprétation contextuelle des variables d'écart e_1 et e_2

Nous pouvons interpréter les variables e_1 et e_2 de la façon suivante.

$$\underbrace{x + 2y + 4z}_{\substack{\text{temps} \\ \text{utilisé}}} + \underbrace{e_1}_{\substack{\text{temps} \\ \text{inutilisé}}} = \underbrace{128}_{\substack{\text{temps} \\ \text{disponible}}}$$

$$\underbrace{3x + y + 5z}_{\substack{\text{budget} \\ \text{utilisé}}} + \underbrace{e_2}_{\substack{\text{budget} \\ \text{inutilisé}}} = \underbrace{25\,700}_{\substack{\text{budget} \\ \text{disponible}}}$$

Résolvons le problème de programmation linéaire suivant par la méthode graphique étudiée dans la section précédente.

Méthode graphique

Exemple 2 Soit la fonction économique $Z(x, y) = 12x + 8y$, que nous voulons maximiser à l'aide de la méthode graphique en respectant les contraintes suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + y \leq 26 & (1) \\ 5x + 2y \leq 100 & (2) \\ x + 2y \leq 44 & (3) \\ x \geq 0 & (4) \\ y \geq 0 & (5) \end{array} \right. \quad \text{contraintes de non-négativité}$$

a) Représentons le polygone de contraintes et déterminons les sommets de ce polygone en résolvant les systèmes d'équations appropriés.

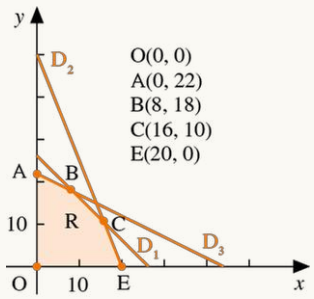
$D_1 : x + y = 26$

$D_2 : 5x + 2y = 100$

$D_3 : x + 2y = 44$

$D_4 : x = 0$

$D_5 : y = 0$



b) Évaluons $Z(x, y)$ à chaque sommet trouvé en a), où $Z(x, y) = 12x + 8y$.

$Z_O(0, 0) = 0$

$Z_A(0, 22) = 176$

$Z_B(8, 18) = 240$

$Z_C(16, 10) = 272$ (maximum)

$Z_E(20, 0) = 240$

D'où le maximum de $Z(x, y)$ est égal à 272.
Ce maximum est atteint au sommet C(16, 10).

L'exemple 2 précédent contient deux variables, x et y, et nous avons été en mesure de déterminer le maximum de la fonction économique en utilisant la méthode graphique.

La méthode graphique peut être utilisée pour résoudre des problèmes de programmation linéaire contenant plus de deux variables. Cependant, cette méthode peut s'avérer laborieuse. Présentons maintenant une méthode plus générale, soit la méthode du simplexe.

Méthode du simplexe

La méthode du simplexe a été élaborée par George Bernard Dantzig vers la fin des années 1940.



George Bernard Dantzig (1914-2005)

IL Y A ENVIRON 70 ANS...

En juin 1947, après avoir constaté l'impuissance des économistes à résoudre ses problèmes d'optimisation de fonctions économiques, **George Bernard Dantzig** se met à l'œuvre. En peu de temps, il propose une solution maintenant connue sous le nom de « méthode du simplexe ». Dès l'été de 1947, il présente sa méthode à l'un des créateurs de la théorie des jeux, John von Neumann (1903-1957). Ce dernier en parle rapidement à d'autres mathématiciens qui mettent alors à l'épreuve la méthode de Dantzig et la comparent même à d'autres méthodes suggérées par quelques mathématiciens. La méthode du simplexe se révèle clairement la meilleure. Notons que le mot « simplexe » fait référence au fait que, pour optimiser une fonction économique, il suffit de se déplacer sur les côtés d'un polygone de contraintes ou, s'il y a trois variables, sur les arêtes d'un polyèdre de contraintes. Or, ces côtés ou ces arêtes sont des cas particuliers de ce que les mathématiciens appellent des « simplexes en géométrie à plusieurs dimensions ».

La méthode du simplexe est un procédé itératif permettant de s'approcher progressivement de la valeur maximale de la fonction économique.

Résolvons maintenant le problème de l'exemple 2 précédent par la méthode du simplexe.

Exemple 1 Soit la fonction économique $Z(x, y) = 12x + 8y$, que nous voulons maximiser à l'aide de la méthode du simplexe en respectant les contraintes suivantes.

$$\begin{cases} x + y \leq 26 & (1) \\ 5x + 2y \leq 100 & (2) \\ x + 2y \leq 44 & (3) \\ x \geq 0,\ y \geq 0 & \text{(contraintes de non-négativité)} \end{cases}$$

Étape 1 : Définissons les variables d'écart e_1, e_2 et e_3, non négatives, comme suit.

$$x + y + e_1 = 26 \qquad (e_1 = 26 - x - y)$$
$$5x + 2y + e_2 = 100 \qquad (e_2 = 100 - 5x - 2y)$$
$$x + 2y + e_3 = 44 \qquad (e_3 = 44 - x - 2y)$$

Le problème donné consiste maintenant à

maximiser $Z(x, y) = 12x + 8y$ en respectant les contraintes

$$\begin{cases} x + y + e_1 = 26 & \text{(1a)} \\ 5x + 2y + e_2 = 100 & \text{(2a)} \\ x + 2y + e_3 = 44 & \text{(3a)} \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0,\ e_3 \geq 0 & \text{(contraintes de non-négativité)} \end{cases}$$

Nous avons un système de trois équations, (1a), (2a) et (3a), à cinq variables, soit les variables de décision x et y, et les variables d'écart e_1, e_2 et e_3.

Pour obtenir un système de trois équations à trois variables, que nous pouvons résoudre, il suffit de poser deux variables égales à zéro (nombre de variables moins nombre d'équations) dans le système précédent.

Ces variables d'écart ne modifient pas la fonction économique. En effet, nous avons

Fonction économique

$$Z(x, y, e_1, e_2, e_3) = 12x + 8y + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

que nous voulons maximiser.

Une solution est admissible lorsque deux des cinq variables valent zéro et que les trois autres variables sont non négatives.

Les variables auxquelles nous donnons la valeur zéro sont appelées « variables hors base » et les autres variables, soit celles qui sont non nulles, sont appelées « variables de base ».

Par exemple, en posant $x = 0$ et $y = 0$ (x et y sont les variables hors base), nous obtenons

de (1a) : $e_1 = 26$,

de (2a) : $e_2 = 100$ et

de (3a) : $e_3 = 44$ (e_1, e_2 et e_3 sont les variables de base),

et, en remplaçant ces valeurs dans la fonction économique

$$Z(x, y, e_1, e_2, e_3) = 12x + 8y + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

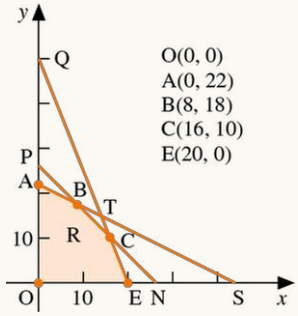
nous obtenons $Z(0, 0, 26, 100, 44) = 12(0) + 8(0) + 0(26) + 0(100) + 0(44) = 0$

Chaque solution obtenue est appelée solution de base. Toutefois, les solutions de base contenant une valeur négative sont rejetées (car $x \geq 0$, $y \geq 0$, $e_i \geq 0$, pour tout i).

Le tableau à la page suivante donne toutes les solutions de base obtenues en posant deux variables égales à zéro dans le système de contraintes suivant.

$$\begin{cases} x + y + e_1 = 26 & \text{(1a)} \\ 5x + 2y + e_2 = 100 & \text{(2a)} \\ x + 2y + e_3 = 44 & \text{(3a)} \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0,\ e_3 \geq 0 & \text{(contraintes de non-négativité)} \end{cases}$$

x	y	e_1	e_2	e_3	Solution	Point	Z
0	0	26	100	44	Admissible	O(0, 0)	0
0	26	0	48	-8	Rejetée	P(0, 26)	
0	50	-24	0	-56	Rejetée	Q(0, 50)	
0	22	4	12	0	Admissible	A(0, 22)	176
26	0	0	-30	18	Rejetée	N(26, 0)	
20	0	6	0	24	Admissible	E(20, 0)	240
44	0	-18	-120	0	Rejetée	S(44, 0)	
16	10	0	0	8	Admissible	C(16, 10)	272
8	18	0	24	0	Admissible	B(8, 18)	240
14	15	-3	0	0	Rejetée	T(14, 15)	



Voir l'exemple 2 précédent

Les solutions de base admissibles correspondent aux sommets O, A, B, C et E du polygone de contraintes tandis que les solutions de base rejetées sont situées à l'extérieur du polygone de contraintes.

Étape 2 : Construisons un tableau initial à partir des données suivantes.

Contraintes avec les variables d'écart
$$\begin{cases} x + y + e_1 = 26 \\ 5x + 2y + e_2 = 100 \\ x + 2y + e_3 = 44 \end{cases}$$

$Z = 12x + 8y$

$-12x - 8y + Z = 0$

Fonction économique transformée $\{-12x - 8y + Z = 0$

Contraintes de non-négativité $\{x \geq 0, y \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0$

À partir des données précédentes, nous pouvons construire le tableau initial ayant la forme suivante.

C	B
E	V

, où

C représente les coefficients des contraintes, des variables d'écart et de Z,
B, les valeurs des membres de droite des équations,
E, les coefficients de la fonction économique transformée,
V, la valeur de la fonction économique.

Tableau initial

	Variables hors base		Variables de base				
	x	y	e_1	e_2	e_3	Z	
e_1	1	1	1	0	0	0	26
e_2	5	2	0	1	0	0	100
e_3	1	2	0	0	1	0	44
Z	-12	-8	0	0	0	1	0

x et y sont les variables hors base.

e_1, e_2 et e_3 sont les variables de base, car on retrouve un seul élément non nul dans la colonne de chacune de ces variables.

Une première solution admissible est obtenue en posant les variables hors base x et y égales à zéro et en évaluant les variables de base e_1, e_2 et e_3, et la fonction économique Z.

Ainsi, en posant $x = 0$ et $y = 0$, à partir du tableau, nous trouvons

$$e_1 = 26, \quad e_2 = 100, \quad e_3 = 44 \quad \text{et} \quad Z = 0$$

ce qui n'est sûrement pas la valeur maximale de Z.

Il faut donc augmenter la valeur de l'une ou l'autre de ces variables hors base.

Étape 3 : Trouvons le pivot en déterminant la colonne pivot et la ligne pivot.

Puisque $Z(x, y) = 12x + 8y$, on constate qu'on aurait avantage à augmenter la valeur de x, car le coefficient de x est positif et est plus grand que celui de y ; on gardera $y = 0$.

Ainsi, la colonne des coefficients du x devient ce qu'on appelle la colonne pivot.

	x	y	e_1	e_2	e_3	Z	
Variables de base e_1	1	1	1	0	0	0	26
Variables de base e_2	5	2	0	1	0	0	100
Variables de base e_3	1	2	0	0	1	0	44
Z	-12	-8	0	0	0	1	0
	Colonne pivot						

Colonne pivot

La colonne pivot correspond à celle où la valeur est la plus négative sur la ligne de Z.

Notons que la valeur la plus négative sur la ligne de Z, c'est-à-dire -12, est l'opposée de la plus grande valeur positive de la fonction économique Z, c'est-à-dire 12.

Cependant, la croissance de x est limitée, car on ne doit pas rendre les autres variables négatives.

Du tableau précédent, en posant $y = 0$, et

puisque $x + e_1 = 26$ et que $e_1 \geq 0$, nous avons $x \leq 26$;

puisque $5x + e_2 = 100$ et que $e_2 \geq 0$, nous avons $x \leq \frac{100}{5}$, c'est-à-dire $x \leq 20$;

puisque $x + e_3 = 44$ et que $e_3 \geq 0$, nous avons $x \leq 44$.

Ainsi, x doit être inférieur ou égal à 20 afin de respecter les trois inégalités précédentes.

Ligne pivot

La ligne pivot correspond à celle où l'on retrouve la valeur minimale du quotient de chaque constante divisée par l'élément positif de la colonne pivot situé sur la même ligne que la constante.

En cas d'égalité, on choisit une ligne au hasard parmi celles dont le quotient est minimum.

Le pivot est 5

	x	y	e_1	e_2	e_3	Z		
e_1	1	1	1	0	0	0	26	$\frac{26}{1} = 26$
Ligne pivot e_2	5	2	0	1	0	0	100	$\frac{100}{5} = 20$ minimum
e_3	1	2	0	0	1	0	44	$\frac{44}{1} = 44$
Z	-12	-8	0	0	0	1	0	
	Colonne pivot							

Le pivot est l'élément qui se trouve à l'intersection de la colonne pivot et de la ligne pivot. Le pivot n'est jamais négatif ou nul.

	x	y	e_1	e_2	e_3	Z	
e_1	1	1	1	0	0	0	26
e_2	5	2	0	1	0	0	100
e_3	1	2	0	0	1	0	44
Z	-12	-8	0	0	0	1	0

Le pivot est 5.

Étape 4 : Effectuons le pivotage du tableau précédent en transformant ce tableau de façon à retrouver 1 à l'endroit du pivot, et 0 ailleurs dans cette colonne.

	x	y	e_1	e_2	e_3	Z	
On veut obtenir 1 →	1	1	1	0	0	0	26
	5	2	0	1	0	0	100
	1	2	0	0	1	0	44
On veut obtenir des 0 →	-12	-8	0	0	0	1	0

Multiplions les éléments de la ligne pivot par $\frac{1}{5}$, l'inverse multiplicatif du pivot, de façon à obtenir 1 à la place du pivot.

	x	y	e_1	e_2	e_3	Z		
e_1	1	1	1	0	0	0	26	
e_2	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0	20	$(1/5)L_2 \to L_2$
e_3	1	2	0	0	1	0	44	
Z	-12	-8	0	0	0	1	0	

On veut obtenir des 0

Additionnons maintenant à chaque ligne un multiple de la ligne pivot de façon à obtenir des 0 dans la colonne pivot, sauf pour le pivot.

	x	y	e_1	e_2	e_3	Z		
e_1	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{-1}{5}$	0	0	6	$L_1 - L_2 \to L_1$
x	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0	20	
e_3	0	$\frac{8}{5}$	0	$\frac{-1}{5}$	1	0	24	$L_3 - L_2 \to L_3$
Z	0	$\frac{-16}{5}$	0	$\frac{12}{5}$	0	1	240	$L_4 + 12L_2 \to L_4$

e_2 n'est plus une variable de base et x est devenue une variable de base

Une deuxième solution admissible est obtenue en posant les variables hors base y et e_2 égales à zéro et en évaluant les variables de base x, e_1 et e_3, et la fonction économique Z.

Ainsi, en posant $y = 0$ et $e_2 = 0$, à partir du tableau précédent, nous trouvons

$$e_1 = 6, \quad x = 20, \quad e_3 = 24 \quad \text{et} \quad Z = 240$$

Puisque $Z(y, e_2) = 240 + \frac{16}{5}y - \frac{12}{5}e_2$, on constate qu'on aurait avantage à augmenter y et à garder $e_2 = 0$, car le coefficient de y est positif et celui de e_2 est négatif.

Il faut alors répéter les étapes 3 et 4 jusqu'à ce que tous les éléments de la dernière ligne soient non négatifs.

Répétons l'étape 3. Trouvons le pivot du tableau précédent.

La colonne des coefficients de y devient la colonne pivot, car $\frac{-16}{5}$ est l'élément le plus négatif sur la ligne des Z.

	x	y	e_1	e_2	e_3	Z	
e_1	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{-1}{5}$	0	0	6
x	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0	20
e_3	0	$\frac{8}{5}$	0	$\frac{-1}{5}$	1	0	24
Z	0	$\frac{-16}{5}$	0	$\frac{12}{5}$	0	1	240

Colonne pivot

Déterminons la ligne pivot en effectuant les divisions appropriées.

Le pivot est $\frac{3}{5}$

		x	y	e_1	e_2	e_3	Z		
Ligne pivot	e_1	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{-1}{5}$	0	0	6	$6 \div \frac{3}{5} = 10$ minimum
	x	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0	20	$20 \div \frac{2}{5} = 50$
	e_3	0	$\frac{8}{5}$	0	$\frac{-1}{5}$	1	0	24	$24 \div \frac{8}{5} = 15$
	Z	0	$\frac{-16}{5}$	0	$\frac{12}{5}$	0	1	240	
			Colonne pivot						

Répétons l'étape 4. Effectuons le pivotage du tableau précédent.

On veut obtenir 1

On veut obtenir des 0

	x	y	e_1	e_2	e_3	Z		
e_1	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{-1}{5}$	0	0	6	
x	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0	20	
e_3	0	$\frac{8}{5}$	0	$\frac{-1}{5}$	1	0	24	
Z	0	$\frac{-16}{5}$	0	$\frac{12}{5}$	0	1	240	

On veut obtenir des 0

	x	y	e_1	e_2	e_3	Z		
e_1	0	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	10	$(5/3)L_1 \to L_1$
x	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0	20	
$\sim$ e_3	0	$\frac{8}{5}$	0	$\frac{-1}{5}$	1	0	24	
Z	0	$\frac{-16}{5}$	0	$\frac{12}{5}$	0	1	240	

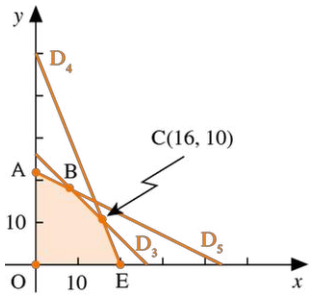
e_1 n'est plus une variable de base et y est devenue une variable de base

	x	y	e_1	e_2	e_3	Z		
y	0	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	10	
x	1	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	16	$L_2 - (2/5)L_1 \to L_2$
$\sim$ e_3	0	0	$\frac{-8}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	8	$L_3 - (8/5)L_1 \to L_3$
Z	0	0	$\frac{16}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	1	272	$L_4 + (16/5)L_1 \to L_4$

Lorsque tous les éléments de la dernière ligne sont non négatifs, le maximum est atteint.

Le maximum est obtenu en posant les variables hors base $e_1 = 0$ et $e_2 = 0$; et, à partir du tableau, nous trouvons

$y = 10$, $x = 16$, $e_3 = 8$ et $Z = 272$



En effet, puisque $Z(e_1, e_2) = 272 - \frac{16}{3}e_1 - \frac{4}{3}e_2$, toute augmentation de e_1 ou de e_2 diminuera Z.

Étape 5 : Formulons la réponse.

Lorsque $e_1 = 0$ et $e_2 = 0$,

nous trouvons $x = 16$, $y = 10$ et $e_3 = 8$, et

nous obtenons le maximum de Z, c'est-à-dire 272.

Ce maximum est atteint au sommet C(16, 10).

En effet, $Z(16, 10) = 12(16) + 8(10) = 272$ (*voir l'exemple 2 précédent, page 531*).

Voici maintenant un résumé des étapes à suivre pour résoudre des problèmes de maximisation de la forme standard à l'aide de la méthode du simplexe.

1) **Regrouper les données :**
   - dans un problème contextuel, identifier les variables ;
   - écrire le système de contraintes en introduisant les variables d'écart ;
   - transformer la fonction économique $Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ sous la forme $-c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n + Z = 0$;
   - indiquer les contraintes de non-négativité.
2) **Construire le tableau initial** à partir des données précédentes.
3) **Trouver le pivot**
   - en déterminant la colonne pivot, celle où la valeur est la plus négative sur la ligne de Z ;
   - en déterminant la ligne pivot, celle où l'on retrouve la valeur minimale du quotient de chaque constante divisée par l'élément positif de la colonne pivot situé sur la même ligne que la constante.
4) **Effectuer le pivotage**, c'est-à-dire transformer le tableau de façon à
   - obtenir 1 à l'endroit du pivot ;
   - obtenir 0 ailleurs dans la colonne pivot.

Répéter les étapes 3 et 4 jusqu'à ce que tous les éléments de la dernière ligne soient non négatifs.

5) **Formuler la réponse** à partir du tableau final.

Exemple 2 En utilisant la méthode du simplexe, maximiser $P(x, y, z) = 2x + 6y + 4z$ en respectant les contraintes suivantes.

$$\begin{cases} x + y \leq 200 \\ 2x + z \leq 400 \\ 2y + z \leq 600 \\ x + y + z \leq 800 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases} \quad \text{(contraintes de non-négativité)}$$

1) Regroupons les données.

Contraintes avec les variables d'écart

$$\begin{cases} x + y + e_1 = 200 \\ 2x + z + e_2 = 400 \\ 2y + z + e_3 = 600 \\ x + y + z + e_4 = 800 \end{cases}$$

Fonction économique transformée

$$\{-2x - 6y - 4z + P = 0$$

Contraintes de non-négativité

$$\{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0, e_4 \geq 0$$

2) Construisons le tableau initial.

	Variables hors base			Variables de base					
	x	y	z	e_1	e_2	e_3	e_4	P	
e_1	1	1	0	1	0	0	0	0	200
e_2	2	0	1	0	1	0	0	0	400
e_3	0	2	1	0	0	1	0	0	600
e_4	1	1	1	0	0	0	1	0	800
P	-2	-6	-4	0	0	0	0	1	0

En posant $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$,
nous trouvons $e_1 = 200$, $e_2 = 400$, $e_3 = 600$, $e_4 = 800$ et $P = 0$.

3.1) Trouvons le pivot du tableau initial.

x	y	z	e_1	e_2	e_3	e_4	P		
1	1	0	1	0	0	0	0	200	$\frac{200}{1} = 200$ minimum
2	0	1	0	1	0	0	0	400	
0	2	1	0	0	1	0	0	600	$\frac{600}{2} = 300$
1	1	1	0	0	0	1	0	800	$\frac{800}{1} = 800$
-2	-6	-4	0	0	0	0	1	0	

4.1) Effectuons le pivotage.

	x	y	z	e_1	e_2	e_3	e_4	P		
y	1	1	0	1	0	0	0	0	200	
e_2	2	0	1	0	1	0	0	0	400	
$\sim e_3$	-2	0	1	-2	0	1	0	0	200	$L_3 - 2L_1 \to L_3$
e_4	0	0	1	-1	0	0	1	0	600	$L_4 - L_1 \to L_4$
P	4	0	-4	6	0	0	0	1	1200	$L_5 + 6L_1 \to L_5$

Puisqu'il y a un élément négatif sur la dernière ligne, répétons les étapes 3 et 4.

3.2) Trouvons le pivot du tableau précédent.

$$\begin{array}{c|cccccccc|c|l}
 & x & y & z & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & P & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & \\
 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 400 & \frac{400}{1} = 400 \\
 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 200 & \frac{200}{1} = 200 \text{ minimum} \\
 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 600 & \frac{600}{1} = 600 \\
\hline
 & 4 & 0 & -4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1200 &
\end{array}$$

4.2) Effectuons le pivotage.

$$\begin{array}{c|cccccccc|c|l}
 & x & y & z & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & P & & \\
\hline
y & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & \\
e_2 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 200 & L_2 - L_3 \to L_2 \\
\sim z & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 200 & \\
e_4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 400 & L_4 - L_3 \to L_4 \\
\hline
P & -4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2000 & L_5 + 4L_3 \to L_5
\end{array}$$

Puisqu'il y a un élément négatif sur la dernière ligne, répétons les étapes 3 et 4.

3.3) Trouvons le pivot du tableau précédent.

$$\begin{array}{c|cccccccc|c|l}
 & x & y & z & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & P & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & \frac{200}{1} = 200 \\
 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 200 & \frac{200}{4} = 50 \text{ minimum} \\
 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 200 & \\
 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 400 & \frac{400}{2} = 200 \\
\hline
 & -4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2000 &
\end{array}$$

4.3) Effectuons le pivotage.

$$\begin{array}{c|cccccccc|c|l}
 & x & y & z & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & P & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & \\
 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & 50 & (1/4)L_2 \to L_2 \\
\sim & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 200 & \\
 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 400 & \\
\hline
 & -4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2000 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{c|cccccccc|c|l}
 & x & y & z & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & P & & \\
y & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 150 & L_1 - L_2 \to L_1 \\
x & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & 50 & \\
z & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 300 & L_3 + 2L_2 \to L_3 \\
e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 300 & L_4 - 2L_2 \to L_4 \\
P & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2200 & L_5 + 4L_2 \to L_5
\end{array}
$$

Puisque tous les éléments de la dernière ligne sont non négatifs, le maximum est atteint.

5) Formulons la réponse.

$P(x, y, z) = 2x + 6y + 4z$

$P(50, 150, 300) = 2200$

Lorsque $e_1 = 0$, $e_2 = 0$ et $e_3 = 0$, nous trouvons $y = 150$, $x = 50$, $z = 300$ et $e_4 = 300$, et nous obtenons le maximum de P, c'est-à-dire 2200.

Exemple 3 Une entreprise fabrique trois types de bicyclettes : des bicyclettes de randonnée, de montagne et de course. Chaque bicyclette de randonnée nécessite 3 heures de fabrication, 1 heure de peinture et 1 heure d'assemblage ; chaque bicyclette de montagne nécessite 1 heure de fabrication, 1 heure de peinture et 3 heures d'assemblage et, finalement, chaque bicyclette de course nécessite 2 heures de fabrication, 2 heures de peinture et 2 heures d'assemblage. Sachant que l'entreprise dispose de 120 heures de fabrication, 100 heures de peinture et 140 heures d'assemblage par semaine et que chaque bicyclette de randonnée rapporte 80 $, chaque bicyclette de montagne, 60 $, et chaque bicyclette de course, 100 $, déterminons le nombre de bicyclettes de chaque type qui doivent être fabriquées chaque semaine pour maximiser le profit, et calculons ce profit maximal.

Identifions les variables, traduisons les contraintes contextuelles en un système d'inéquations linéaires et déterminons la fonction économique à maximiser.

Variables
$$
\begin{cases}
x, \text{ le nombre de bicyclettes de randonnée} \\
y, \text{ le nombre de bicyclettes de montagne} \\
z, \text{ le nombre de bicyclettes de course}
\end{cases}
$$

Contraintes contextuelles
$$
\begin{cases}
3x + y + 2z \le 120 & \text{(contrainte de fabrication)} \\
x + y + 2z \le 100 & \text{(contrainte de peinture)} \\
x + 3y + 2z \le 140 & \text{(contrainte d'assemblage)} \\
x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0 & \text{(contraintes de non-négativité)}
\end{cases}
$$

Fonction économique $P(x, y, z) = 80x + 60y + 100z$, à maximiser.

1) Regroupons les données.

$$
\begin{cases}
3x + y + 2z + e_1 = 120 \\
x + y + 2z + e_2 = 100 \\
x + 3y + 2z + e_3 = 140 \\
-80x - 60y - 100z + P = 0 \\
x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, e_1 \ge 0, e_2 \ge 0, e_3 \ge 0
\end{cases}
$$

Dans ce contexte,

e_1 représente le nombre d'heures de fabrication non utilisées,
e_2 représente le nombre d'heures de peinture non utilisées, et
e_3 représente le nombre d'heures d'assemblage non utilisées.

2) Construisons le tableau initial.

	x	y	z	e_1	e_2	e_3	P	
e_1	3	1	2	1	0	0	0	120
e_2	1	1	2	0	1	0	0	100
e_3	1	3	2	0	0	1	0	140
P	-80	-60	-100	0	0	0	1	0

3.1) Trouvons le pivot du tableau initial.

x	y	z	e_1	e_2	e_3	P		
3	1	2	1	0	0	0	120	$\frac{120}{2} = 60$
1	1	2	0	1	0	0	100	$\frac{100}{2} = 50$ minimum
1	3	2	0	0	1	0	140	$\frac{140}{2} = 70$
-80	-60	-100	0	0	0	1	0	

4.1) Effectuons le pivotage.

x	y	z	e_1	e_2	e_3	P		
3	1	2	1	0	0	0	120	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	50	$(1/2)L_2 \to L_2$
1	3	2	0	0	1	0	140	
-80	-60	-100	0	0	0	1	0	

	x	y	z	e_1	e_2	e_3	P		
e_1	2	0	0	1	-1	0	0	20	$L_1 - 2L_2 \to L_1$
z	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	50	
e_3	0	2	0	0	-1	1	0	40	$L_3 - 2L_2 \to L_3$
P	-30	-10	0	0	50	0	1	5000	$L_4 + 100L_2 \to L_4$

3.2) Trouvons le pivot du tableau précédent.

x	y	z	e_1	e_2	e_3	P		
2	0	0	1	-1	0	0	20	$\frac{20}{2} = 10$ minimum
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	50	$50 \div \frac{1}{2} = 100$
0	2	0	0	-1	1	0	40	
-30	-10	0	0	50	0	1	5000	

4.2) Effectuons le pivotage.

$$\begin{array}{c} \\ \sim \end{array}\left[\begin{array}{ccccccc|c} x & y & z & e_1 & e_2 & e_3 & P & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 10 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 40 \\ \hline -30 & -10 & 0 & 0 & 50 & 0 & 1 & 5000 \end{array}\right] \quad (1/2)L_1 \to L_1$$

$$\begin{array}{c} \\ x \\ \sim\ z \\ e_3 \\ P \end{array}\left[\begin{array}{ccccccc|c} x & y & z & e_1 & e_2 & e_3 & P & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 40 \\ \hline 0 & -10 & 0 & 15 & 35 & 0 & 1 & 5300 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_2 - (1/2)L_1 \to L_2 \\ \\ L_4 + 30L_1 \to L_4 \end{array}$$

3.3) Trouvons le pivot du tableau précédent.

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} x & y & z & e_1 & e_2 & e_3 & P & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 40 \\ \hline 0 & -10 & 0 & 15 & 35 & 0 & 1 & 5300 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ 45 \div \frac{1}{2} = 90 \\ \frac{40}{2} = 20 \text{ minimum} \\ \\ \end{array}$$

4.3) Effectuons le pivotage.

$$\begin{array}{c} \\ \sim \end{array}\left[\begin{array}{ccccccc|c} x & y & z & e_1 & e_2 & e_3 & P & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 20 \\ \hline 0 & -10 & 0 & 15 & 35 & 0 & 1 & 5300 \end{array}\right] \quad (1/2)L_3 \to L_3$$

$$\begin{array}{c} \\ x \\ \sim\ z \\ y \\ P \end{array}\left[\begin{array}{ccccccc|c} x & y & z & e_1 & e_2 & e_3 & P & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{4} & 1 & \frac{-1}{4} & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 20 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 15 & 30 & 5 & 1 & 5500 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_2 - (1/2)L_3 \to L_2 \\ \\ L_4 + 10L_3 \to L_4 \end{array}$$

Puisque tous les éléments de la dernière ligne sont non négatifs, le maximum est atteint.

$P(x, y, z) = 80x + 60y + 100z$

$P(10, 20, 35) = 5500$

5) Formulons la réponse.

Lorsque $e_1 = 0$, $e_2 = 0$ et $e_3 = 0$, nous trouvons $x = 10$, $y = 20$ et $z = 35$, et nous obtenons le maximum de P, c'est-à-dire 5500.

L'entreprise doit donc produire 10 bicyclettes de randonnée, 20 bicyclettes de montagne et 35 bicyclettes de course pour obtenir un profit maximal de 5500 $.

De plus, puisque $e_1 = 0$, $e_2 = 0$ et $e_3 = 0$, toutes les heures disponibles de fabrication, de peinture et d'assemblage sont utilisées.

EXERCICES 11.2

1. Soit la fonction économique $P(x, y, z) = 6x + 9y + 9z$, sous les contraintes suivantes.

$$\begin{cases} 2x + 2y + z \leq 100 \\ 2x + 3y + 3z \leq 150 \\ 2x + 5y + z \leq 200 \end{cases}$$

a) Transformer les inéquations précédentes en équations en ajoutant respectivement les variables d'écart e_1, e_2 et e_3.

b) Déterminer la fonction économique correspondante, avec les variables d'écart.

2. Pour les tableaux suivants,

a)
$$\begin{array}{ccccc|c} x & y & e_1 & e_2 & P & \\ \hline 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 18 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 5 & 1 & 25 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{cccccc|c} x & y & z & e_1 & e_2 & P & \\ \hline 2 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & 15 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ \hline 7 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 37 \end{array}$$

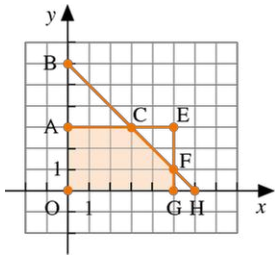
i) identifier les variables de base et les variables hors base, et déterminer dans ce cas la solution de base admissible ;

ii) déterminer si la solution trouvée en i) est maximale ; justifier.

3. Soit les contraintes suivantes et la région admissible correspondante.

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ y \leq 3 \\ x + y \leq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

où $Z(x, y) = 50x + 200y$



a) Écrire le système d'équations linéaires obtenu en introduisant les variables d'écart e_i non négatives.

b) Déterminer la fonction économique correspondante.

c) Compléter le tableau suivant pour les points O, A, B, C, E, F, G et H.

x	y	e_1	…	Solution	Point	Z
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

d) Déterminer la valeur maximale de $Z(x, y)$ et trouver le point correspondant.

4. Pour le tableau suivant, déterminer le pivot, effectuer le pivotage et donner la solution de base obtenue à cette étape.

$$\begin{array}{ccccc|c} x & y & e_1 & e_2 & P & \\ \hline 3 & 6 & 1 & 0 & 0 & 24 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 28 \\ \hline -8 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

5. Soit $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$. Maximiser les fonctions suivantes en utilisant la méthode du simplexe.

a) $P(x, y) = 4x + 7y$
sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 3 \\ x + 5y \leq 2 \end{cases}$$

b) $P(x, y, z) = 6x + 9y + 6z$
sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} 2x + 2y + z \leq 100 \\ 2x + 3y + 3z \leq 150 \\ 2x + 5y + z \leq 200 \end{cases}$$

6. **APPLICATION | PROFIT MAXIMAL**

Une manufacture fabrique trois types de tentes : des tentes pour quatre personnes, des tentes pour six personnes et des tentes pour huit personnes. Chaque tente pour quatre personnes exige 2 heures de coupe et 4 heures de couture ; les tentes pour six personnes exigent 3 heures de coupe et 5 heures de couture et, finalement, celles pour huit personnes exigent 4 heures de coupe et 7 heures de couture. Il y a 333 heures par mois disponibles pour la coupe et 586 heures par mois disponibles pour la couture. La manufacture peut fabriquer un maximum de 100 tentes.



a) Déterminer le nombre de tentes de chaque type que la manufacture devrait fabriquer pour maximiser son profit si le profit réalisé est de 45 $ pour les tentes à quatre places, 60 $ pour celles à six places et 80 $ pour celles à huit places, et déterminer ce profit maximal.

b) Interpréter les valeurs obtenues pour les variables d'écart.

7. **APPLICATION | PROFIT MAXIMAL**

Un garagiste répare des alternateurs d'automobiles et de camions. Le nombre maximal hebdomadaire de réparations qu'il peut effectuer est de 24 unités. Il sait d'expérience que le nombre de réparations d'alternateurs d'automobiles excède le nombre de réparations d'alternateurs de camions d'au plus 12 unités, et que le double du nombre de réparations d'alternateurs de camions excède le nombre de réparations d'alternateurs d'automobiles d'au plus 6 unités.

Sachant que le profit moyen tiré de la réparation d'un alternateur d'automobile est de 80 $ et que le profit moyen tiré de la réparation d'un alternateur de camion est de 120 $, déterminer, à l'aide de la méthode du simplexe, le nombre de réparations de chaque type d'alternateur qui maximiserait le profit du garagiste et calculer ce profit maximal.

11.3 Résolution de problèmes de minimisation par la méthode duale

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, l'étudiant pourra résoudre des problèmes de minimisation par la méthode duale.

Plus précisément, l'étudiant sera en mesure

- de traduire les contraintes en un système d'inéquations linéaires ;
- de déterminer la fonction économique à minimiser ;
- de minimiser la fonction économique à l'aide de la méthode duale.

Problème de minimisation de la forme standard

Minimiser $m(x, y) = 7x + 6y$

$$\begin{cases} 4x + 2y \geq 12 \\ 3x + 5y \geq 15 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Problème dual correspondant

Maximiser $P(u, v) = 12u + 15v$

$$\begin{cases} 4u + 3v \leq 7 \\ 2u + 5v \leq 6 \\ u \geq 0, v \geq 0 \end{cases}$$

Jusqu'à présent, nous avons résolu des problèmes de programmation linéaire à l'aide de la méthode graphique et des problèmes de maximisation de la forme standard à l'aide de la méthode du simplexe.

Dans cette section, notre étude se limitera aux problèmes de minimisation de la forme standard suivante.

Minimiser une fonction économique

$m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

en respectant des contraintes de la forme

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$, où $b_i \geq 0$ et $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$.

Résolvons le problème de programmation linéaire suivant par la méthode graphique.

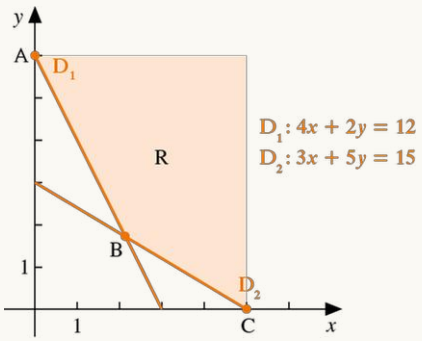
Méthode graphique

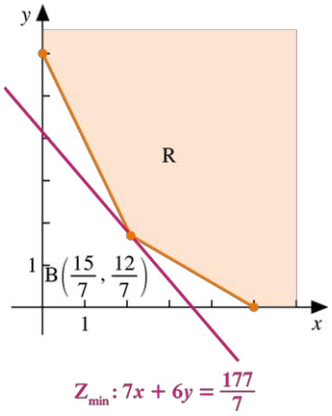
Exemple 1 Soit la fonction économique $m(x, y) = 7x + 6y$, que nous voulons minimiser à l'aide de la méthode graphique, en respectant les contraintes suivantes.

$$\begin{cases} 4x + 2y \geq 12 \\ 3x + 5y \geq 15 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$ (contraintes de non-négativité)

a) Représentons la région admissible R correspondant aux contraintes précédentes et déterminons les sommets.

En résolvant les systèmes d'équations appropriés, nous trouvons les sommets A(0, 6), $B\left(\frac{15}{7}, \frac{12}{7}\right)$ et C(5, 0).





b) Évaluons $m(x, y)$ à chaque sommet trouvé en a), où $m(x, y) = 7x + 6y$.

$m_A(0, 6) = 0 + 36 = 36$

$m_B\left(\frac{15}{7}, \frac{12}{7}\right) = \frac{105}{7} + \frac{72}{7} = \frac{177}{7} = 25{,}28\ldots$ (minimum)

$m_C(5, 0) = 35 + 0 = 35$

D'où le minimum de $m(x, y)$ est atteint au sommet $B\left(\frac{15}{7}, \frac{12}{7}\right)$ et est égal à $\frac{177}{7}$.

La méthode graphique peut être utilisée pour résoudre des problèmes de programmation linéaire contenant plus de deux variables. Cependant, cette méthode peut s'avérer laborieuse.

Présentons maintenant une méthode plus générale, la méthode duale.

Méthode duale

Dans l'exemple 1 précédent, nous avons déterminé le minimum de la fonction économique sous certaines contraintes. Résolvons maintenant ce problème à l'aide de la méthode duale, qui consiste à déterminer le maximum du problème dual correspondant.

Problème de minimisation de la forme standard

$$\text{Contraintes} \begin{cases} 4x + 2y \geq 12 \\ 3x + 5y \geq 15 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Minimiser $m(x, y) = 7x + 6y$

Sous forme matricielle

$$A = \left[\begin{array}{cc:c} 4 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 15 \\ \hdashline 7 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

Matrice transposée

$$A^T = \left[\begin{array}{cc:c} 4 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ \hdashline 12 & 15 & 0 \end{array}\right]$$

Problème dual correspondant

$$\text{Contraintes} \begin{cases} 4u + 3v \leq 7 \\ 2u + 5v \leq 6 \\ u \geq 0, v \geq 0 \end{cases}$$

Maximimiser $F(u, v) = 12u + 15v$

Exercices de compréhension 11.3

1. Soit la fonction économique $m(x, y) = 11x + y$ que nous voulons minimiser en respectant les contraintes suivantes.

$$\begin{cases} 5x + 9y \geq 210 \\ 6x + 13y \geq 150 \\ x \geq 0, y \geq 0 \quad \text{(contraintes de non-négativité)} \end{cases}$$

Déterminer le problème dual correspondant.

Nous acceptons sans démonstration le théorème suivant.

THÉORÈME 11.1

Un problème de minimisation de la forme standard admet une solution minimale si et seulement si le problème dual correspondant admet une solution maximale.

De plus, si la solution existe, la valeur maximale du problème dual est la même que la valeur minimale du problème de minimisation initial.

Résolvons maintenant le problème de l'exemple 1 précédent par la méthode duale.

Exemple 1 Soit la fonction économique $m(x, y) = 7x + 6y$, que nous voulons minimiser à l'aide de la méthode duale, en respectant les contraintes suivantes.

$$\begin{cases} 4x + 2y \geq 12 \\ 3x + 5y \geq 15 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

a) Déterminons le problème dual correspondant.

Soit $A = \left[\begin{array}{cc:c} 4 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 15 \\ \hdashline 7 & 6 & 0 \end{array}\right]$, ainsi $A^{\mathrm{T}} = \left[\begin{array}{cc:c} 4 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ \hdashline 12 & 15 & 0 \end{array}\right]$.

Donc le problème dual correspondant est le suivant :

$$\text{Contraintes} \begin{cases} 4u + 3v \leq 7 \\ 2u + 5v \leq 6 \\ u \geq 0,\ v \geq 0 \end{cases}$$

où il faut maximiser $F(u, v) = 12u + 15v$.

b) Résolvons le problème dual trouvé en a) à l'aide de la méthode du simplexe.

1) Regroupons les données.

$$\text{Contraintes avec les variables d'écart} \begin{cases} 4u + 3v + e_1 = 7 \\ 2u + 5v + e_2 = 6 \end{cases}$$

$$\text{Fonction économique transformée} \quad \{-12u - 15v + F = 0$$

$$\text{Contraintes de non-négativité} \quad \{u \geq 0,\ v \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0$$

2) Construisons le tableau initial.

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u & v & e_1 & e_2 & F & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc:c} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \hdashline -12 & -15 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

3.1) Trouvons le pivot du tableau initial.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u & v & e_1 & e_2 & F & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc:c} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \hdashline -12 & -15 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \frac{7}{3} = 2,\overline{3} \\ \frac{6}{5} = 1,2 \text{ minimum} \end{array}$$

4.1) Effectuons le pivotage.

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u & v & e_1 & e_2 & F & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc:c} 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{6}{5} \\ \hdashline -12 & -15 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \quad (1/5)L_2 \to L_2$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ e_1 \\ v \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u & v & e_1 & e_2 & F & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc:c} \frac{14}{5} & 0 & 1 & \frac{-3}{5} & 0 & \frac{17}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{6}{5} \\ \hdashline -6 & 0 & 0 & 3 & 1 & 18 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} L_1 - 3L_2 \to L_1 \\ \\ L_3 + 15L_2 \to L_3 \end{array}$$

Puisqu'il y a un élément négatif sur la dernière ligne, répétons les étapes 3 et 4.

3.2) Trouvons le pivot du tableau précédent.

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} \frac{14}{5} & 0 & 1 & \frac{-3}{5} & 0 & \frac{17}{5} \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{6}{5} \\ \hdashline -6 & 0 & 0 & 3 & 1 & 18 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \left(\frac{17}{5}\right) \div \left(\frac{14}{5}\right) = 1{,}2\ldots \\ \left(\frac{6}{5}\right) \div \left(\frac{2}{5}\right) = 3 \end{array} \text{ minimum}$$

4.2) Effectuons le pivotage.

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & \frac{5}{14} & \frac{-3}{14} & 0 & \frac{17}{14} \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{6}{5} \\ \hdashline -6 & 0 & 0 & 3 & 1 & 18 \end{array}\right] \quad \left(\tfrac{5}{14}\right)L_1 \to L_1$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ u \\ v \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u & v & e_1 & e_2 & F \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & \frac{5}{14} & \frac{-3}{14} & 0 & \frac{17}{14} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} & 0 & \frac{5}{7} \\ \hdashline 0 & 0 & \frac{15}{7} & \frac{12}{7} & 1 & \frac{177}{7} \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{l} L_2 - \left(\tfrac{2}{5}\right)L_1 \to L_2 \\ L_3 + 6L_1 \to L_3 \end{array}$$

Puisque tous les éléments de la dernière ligne sont non négatifs, le maximum est atteint.

Lorsque $e_1 = 0$ et $e_2 = 0$, nous trouvons $u = \frac{17}{14}$ et $v = \frac{5}{7}$, et le maximum de F est $\frac{177}{7}$ (problème dual).

5) Formulons la réponse.

Par le théorème 11.1, le minimum de la fonction m est $\frac{177}{7}$.

De plus, nous acceptons sans démonstration que la valeur de x et celle de y qui minimisent la fonction m se trouvent respectivement sur la dernière ligne du tableau final, sous les variables d'écart e_1 et e_2.

Ainsi, le minimum de la fonction m est atteint lorsque $x = \frac{15}{7}$ et $y = \frac{12}{7}$.

$m(x, y) = 7x + 6y$

En effet, $m\left(\frac{15}{7}, \frac{12}{7}\right) = 7\left(\frac{15}{7}\right) + 6\left(\frac{12}{7}\right) = \frac{177}{7}$

11

Exercices de compréhension 11.3

2. Le tableau suivant est le tableau final d'un problème dual construit à partir d'un problème de minimisation de variables x et y. Déterminer le minimum de la fonction initiale ainsi que la valeur de x et celle de y qui minimisent cette fonction.

$$\begin{array}{c} \\ v \\ u \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u & v & e_1 & e_2 & F \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc:c} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 11 \\ \hdashline 0 & 0 & 5 & 7 & 1 & 75 \end{array}\right] \end{array}$$

Exemple 2 Le tableau ci-dessous présente le nombre d'unités de calcium, de fer et de protéines contenues dans trois types de capsules, C_1, C_2 et C_3, ainsi que la quantité minimale mensuelle d'unités de calcium, de fer et de protéines requise pour conserver un état de santé normal.

	C_1	C_2	C_3	Quantité minimale
Unités de calcium	30	15	15	450
Unités de fer	2	2	2	40
Unités de protéines	5	10	5	120

Sachant que chaque capsule C_1 coûte 2,00 \$, chaque capsule C_2 coûte 2,40 \$ et chaque capsule C_3 coûte 1,80 \$, déterminons le nombre de capsules C_1, C_2 et C_3 qui minimise le coût total mensuel d'un individu dont l'état de santé est normal et calculons ce coût minimal.

Identifions les variables, traduisons les contraintes contextuelles en un système d'inéquations linéaires et déterminons la fonction économique à minimiser.

Variables $\begin{cases} x, \text{ le nombre de capsules } C_1, \\ y, \text{ le nombre de capsules } C_2, \text{ et} \\ z, \text{ le nombre de capsules } C_3. \end{cases}$

Problème de minimisation de forme standard

$$A = \left[\begin{array}{cccc} 30 & 15 & 15 & 450 \\ 2 & 2 & 2 & 40 \\ 5 & 10 & 5 & 120 \\ \hdashline 2 & 2{,}4 & 1{,}8 & 0 \end{array}\right]$$

Contraintes contextuelles $\begin{cases} 30x + 15y + 15z \geq 450 & \text{(unités de calcium)} \\ 2x + 2y + 2z \geq 40 & \text{(unités de fer)} \\ 5x + 10y + 5z \geq 120 & \text{(unités de protéines)} \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{cases}$

Minimiser $C(x, y, z) = 2x + 2{,}4y + 1{,}8z$

Problème dual correspondant

$$A^T = \left[\begin{array}{cccc} 30 & 2 & 5 & 2 \\ 15 & 2 & 10 & 2{,}4 \\ 15 & 2 & 5 & 1{,}8 \\ \hdashline 450 & 40 & 120 & 0 \end{array}\right]$$

Contraintes $\begin{cases} 30u + 2v + 5w \leq 2 \\ 15u + 2v + 10w \leq 2{,}4 \\ 15u + 2v + 5w \leq 1{,}8 \\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ w \geq 0 \end{cases}$

Maximiser $F(u, v, w) = 450u + 40v + 120w$

Résolvons le problème dual à l'aide de la méthode du simplexe.

1) Regroupons les données.

Contraintes avec les variables d'écart $\begin{cases} 30u + 2v + 5w + e_1 = 2 \\ 15u + 2v + 10w + e_2 = 2{,}4 \\ 15u + 2v + 5w + e_3 = 1{,}8 \end{cases}$

Fonction économique transformée $\{-450u - 40v - 120w + F = 0$

Contraintes de non-négativité $\{u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0$

2) Construisons le tableau initial.

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ F \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u & v & w & e_1 & e_2 & e_3 & F \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc:c} 30 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 15 & 2 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2{,}4 \\ 15 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1{,}8 \\ \hdashline -450 & -40 & -120 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

3.1) Trouvons le pivot du tableau initial.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u & v & w & e_1 & e_2 & e_3 & F \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc:c} 30 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 15 & 2 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2{,}4 \\ 15 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1{,}8 \\ \hdashline -450 & -40 & -120 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} \\ \frac{2}{30} = 0{,}0\overline{6} \text{ minimum} \\ \frac{2{,}4}{15} = 0{,}16 \\ \frac{1{,}8}{15} = 0{,}12 \\ \\ \end{array}$$

4.1) Effectuons le pivotage.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u & v & w & e_1 & e_2 & e_3 & F \end{array} \\ \sim\left[\begin{array}{ccccccc:c} 1 & \frac{1}{15} & \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{15} \\ 15 & 2 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{12}{5} \\ 15 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{5} \\ \hdashline -450 & -40 & -120 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} \\ (1/30)\,L_1 \to L_1 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u & v & w & e_1 & e_2 & e_3 & F \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ \sim e_2 \\ e_3 \\ F \end{array}\left[\begin{array}{ccccccc:c} 1 & \frac{1}{15} & \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{15} \\ 0 & 1 & \frac{15}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ \hdashline 0 & -10 & -45 & 15 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ L_2 - 15L_1 \to L_2 \\ L_3 - 15L_1 \to L_3 \\ L_4 + 450L_1 \to L_4 \end{array}$$

Il y a au moins un élément négatif sur la dernière ligne ; répétons les étapes 3 et 4.

3.2) Trouvons le pivot du tableau précédent.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u & v & w & e_1 & e_2 & e_3 & F \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc:c} 1 & \frac{1}{15} & \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{15} \\ 0 & 1 & \frac{15}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ \hdashline 0 & -10 & -45 & 15 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} \\ \left(\frac{1}{15}\right) \div \left(\frac{1}{6}\right) = 0{,}4 \\ \left(\frac{7}{5}\right) \div \left(\frac{15}{2}\right) = 0{,}18\overline{6} \\ \quad \text{minimum} \\ \left(\frac{4}{5}\right) \div \left(\frac{5}{2}\right) = 0{,}32 \\ \\ \end{array}$$

4.2) Effectuons le pivotage.

$$\begin{array}{c} \\ \sim \end{array}\left[\begin{array}{ccccccc|c} u & v & w & e_1 & e_2 & e_3 & F & \\ 1 & \frac{1}{15} & \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{15} \\ 0 & \frac{2}{15} & 1 & \frac{-1}{15} & \frac{2}{15} & 0 & 0 & \frac{14}{75} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ \hdashline 0 & -10 & -45 & 15 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right] \quad (2/15)\,L_2 \to L_2$$

$$\begin{array}{c} \\ u \\ w \\ e_3 \\ F \end{array}\sim\left[\begin{array}{ccccccc|c} u & v & w & e_1 & e_2 & e_3 & F & \\ 1 & \frac{2}{45} & 0 & \frac{2}{45} & \frac{-1}{45} & 0 & 0 & \frac{8}{225} \\ 0 & \frac{2}{15} & 1 & \frac{-1}{15} & \frac{2}{15} & 0 & 0 & \frac{14}{75} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \hdashline 0 & -4 & 0 & 12 & 6 & 0 & 1 & 38{,}4 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 - (1/6)L_2 \to L_1 \\ \\ L_3 - (5/2)L_2 \to L_3 \\ L_4 + 45L_2 \to L_4 \end{array}$$

Il y a un élément négatif sur la dernière ligne ; répétons les étapes 3 et 4.

3.3) Trouvons le pivot du tableau précédent.

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} u & v & w & e_1 & e_2 & e_3 & F & \\ 1 & \frac{2}{45} & 0 & \frac{2}{45} & \frac{-1}{45} & 0 & 0 & \frac{8}{225} \\ 0 & \frac{2}{15} & 1 & \frac{-1}{15} & \frac{2}{15} & 0 & 0 & \frac{14}{75} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \hdashline 0 & -4 & 0 & 12 & 6 & 0 & 1 & 38{,}4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left(\frac{8}{225}\right) \div \left(\frac{2}{45}\right) = 0{,}8 \\ \left(\frac{14}{75}\right) \div \left(\frac{2}{15}\right) = 1{,}4 \\ \left(\frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}5 \\ \quad \text{minimum} \\ \\ \end{array}$$

4.3) Effectuons le pivotage.

$$\begin{array}{c} \\ \sim \end{array}\left[\begin{array}{ccccccc|c} u & v & w & e_1 & e_2 & e_3 & F & \\ 1 & \frac{2}{45} & 0 & \frac{2}{45} & \frac{-1}{45} & 0 & 0 & \frac{8}{225} \\ 0 & \frac{2}{15} & 1 & \frac{-1}{15} & \frac{2}{15} & 0 & 0 & \frac{14}{75} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hdashline 0 & -4 & 0 & 12 & 6 & 0 & 1 & 38{,}4 \end{array}\right] \quad (3/2)\,L_3 \to L_3$$

$$\begin{array}{c} \\ u \\ w \\ v \\ F \end{array}\sim\left[\begin{array}{ccccccc|c} u & v & w & e_1 & e_2 & e_3 & F & \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{15} & 0 & \frac{-1}{15} & 0 & \frac{1}{75} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & 0 & \frac{3}{25} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \underset{x}{10} & \underset{y}{4} & \underset{z}{6} & 1 & 40{,}4 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 - (2/45)L_3 \to L_1 \\ L_2 - (2/15)L_3 \to L_2 \\ \\ L_4 + 4L_3 \to L_4 \end{array}$$

$x = 10$, $y = 4$ et $z = 6$

Tous les éléments de la dernière ligne sont non négatifs ; le maximum est atteint.

5) Formulons la réponse.

$C(x, y, z) = 2x + 2{,}4y + 1{,}8z$

$C(10, 4, 6) = 40{,}4$

Le maximum de la fonction F est 40,4 (problème dual).

D'où, par le théorème 11.1, le coût mensuel minimal est de 40,40 $ pour 10 capsules C_1, 4 capsules C_2 et 6 capsules C_3.

EXERCICES 11.3

1. Pour chacun des problèmes ci-dessous, déterminer le problème dual correspondant, le tableau initial du problème dual et le pivot de ce tableau.

a) Minimiser $m(x, y) = 35x + 50y$
en respectant les contraintes suivantes.

$$\begin{cases} 3x + 7y \geq 10 \\ 8x + 5y \geq 42 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

b) Minimiser $m(x, y, z) = 3x + 5y + 7z$
en respectant les contraintes suivantes.

$$\begin{cases} 3x + 7y \geq 10 \\ 4x + 5z \geq 16 \\ 2y + 9z \geq 27 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$$

2. Déterminer la solution du problème de minimisation de forme standard si le tableau final du problème dual est le suivant.

a)

u	v	w	e_1	e_2	F	
0	16	1	5	-3	0	7
1	-1	0	-3	1	0	5,6
0	8	0	8	5	1	120

b)

u	v	w	e_1	e_2	e_3	F	
6	0	1	5	-8	0	0	7
3	1	0	3	0	0	0	4
-1	0	0	-2	-1	1	0	1
45	0	0	12	10	0	1	250

3. Résoudre à l'aide de la méthode duale.

a) Minimiser $m(x, y) = 8x + 6y$
en respectant les contraintes suivantes.

$$\begin{cases} x + y \geq 8 \\ 2x + y \geq 14 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

b) Minimiser $m(x, y, z) = 10x + 48y + 36z$
en respectant les contraintes suivantes.

$$\begin{cases} x + 2y + 2z \geq 90 \\ x + 4y + 6z \geq 120 \\ x + 6y + 4z \geq 144 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$$

4. APPLICATION | COÛT MINIMAL

Une entreprise fabrique des pneus réguliers et des pneus à profil bas dans deux usines, U_1 et U_2. À l'usine U_1, l'entreprise produit quotidiennement 600 pneus réguliers et 100 pneus à profil bas. À l'usine U_2, elle produit quotidiennement 300 pneus réguliers et 100 pneus à profil bas. Il en coûte quotidiennement 20 000 $ de matières premières à l'usine U_1, et 15 000 $ à l'usine U_2. Si l'entreprise a obtenu un contrat pour produire au moins 24 000 pneus réguliers et 5000 pneus à profil bas, déterminer le nombre de jours pendant lesquels chaque usine doit fonctionner pour minimiser le coût des matières premières et calculer ce coût minimal.

5. APPLICATION | COÛT MINIMAL

Une chocolaterie fabrique trois types de barres au chocolat à partir des trois ingrédients suivants : des arachides, des noix et, bien sûr, du chocolat. Le tableau ci-dessous indique le nombre d'unités de chaque ingrédient entrant dans la composition de chacun des types de barres au chocolat.

	Arachides	**Noix**	**Chocolat**
Type 1	1	2	2
Type 2	1	2	6
Type 3	1	6	4

Le coût d'une unité d'arachides est de 2,00 $, celui d'une unité de noix est de 4,00 $ et celui d'une unité de chocolat est de 5,00 $. Si la chocolaterie doit fabriquer au moins 360 barres de type 1, au moins 480 barres de type 2 et au moins 576 barres de type 3, déterminer le nombre d'unités d'arachides, de noix et de chocolat nécessaires pour minimiser le coût de fabrication et calculer ce coût minimal.

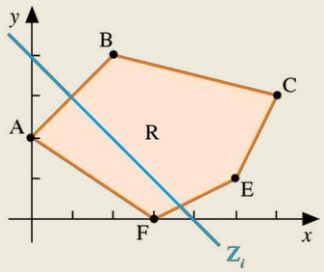
Révision des concepts

Problèmes d'optimisation

Fonction économique à optimiser

$Z(x, y) =$ _____

Méthode graphique



R est _____

$A, B, \ldots F$ sont _____

Z_i est _____

La valeur maximale de la fonction économique est atteinte au point _____

La valeur minimale de la fonction économique est atteinte au point _____

Représenter les droites Z_{max} et Z_{min}.

Fonction économique à maximiser

$Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$ _____

Contraintes

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$ _____ b_i,

où b_i _____ 0 et x_i _____ 0

Fonction économique à minimiser

$Z(x_1, x_2, \ldots x_n) =$ _____

Contraintes

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$ _____ b_i,

où b_i _____ 0 et x_i _____ 0

Problème dual

$F(u, v, \ldots)$ à _____

Méthode du simplexe

Variables d'écart

Variables de base et variables hors base

Tableau initial (matrice augmentée)

Pivotage

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} x & y & e_1 & e_2 & e_3 & P & \\ \frac{6}{5} & \frac{3}{5} & 1 & 0 & \frac{-2}{5} & 0 & 20 \\ \frac{4}{5} & \frac{12}{5} & 0 & 1 & \frac{-3}{5} & 0 & 30 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 40 \\ \hline \frac{-12}{5} & \frac{-21}{5} & 0 & 0 & \frac{9}{5} & 1 & 360 \end{array}\right]$$

La colonne pivot est _____ car _____

La ligne pivot est _____ car _____

Le pivot est _____

Le maximum est atteint lorsque les éléments sur la dernière ligne sont _____

Formulation adéquate de la réponse

11

Exercices récapitulatifs

Administration · Biologie · Chimie · Géométrie · Physique · Sciences humaines · Outil technologique

Les réponses aux exercices récapitulatifs et aux problèmes de synthèse, à l'exception de ceux notés en **rouge**, sont fournies à la fin du manuel.

1. Représenter grahiquement l'ensemble-solution des systèmes suivants.

a) $\begin{cases} x \leq 4 & ① \\ y < 2 & ② \\ 2x + 3y \geq 0 & ③ \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y < 5 & ① \\ x + y \leq 3 & ② \\ 2x + 3y \leq 6 & ③ \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 3y \leq -12 & ① \\ 4x + 3y \leq 12 & ② \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x - 3y \geq -12 & ① \\ 4x - 3y \leq 12 & ② \end{cases}$

2. Représenter la région admissible définie par chacun des systèmes d'inéquations linéaires suivants et identifier les sommets.

a) $\begin{cases} x + y \leq 3 \\ -x + y \leq 3 \\ 2x + 3y \geq 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y \geq -2 \\ x - 5y \leq 10 \\ -x + 2y \leq 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 16 \\ 2x + y \leq 40 \\ 2x + 3y \leq 60 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 16 \\ 2x + y \geq 40 \\ 2x + 3y \geq 60 \end{cases}$

3. Soit les droites $D_1 : 4x - 3y = 7$, $D_2 : \frac{x+1}{5} = \frac{y}{3}$ et $D_3 : (x, y) = (3, -2) + k(2, -1)$, où $k \in \mathbb{R}$.

Déterminer un système d'inéquations linéaires décrivant chacune des sept régions convexes formées par les droites D_1, D_2 et D_3.

4. Déterminer le minimum et le maximum de la fonction économique Z donnée sous les contraintes indiquées.

a) $Z(x, y) = 0{,}8x + 3y$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5000x + 10\,000y \geq 25\,000 \\ 300x + 400y \geq 1300 \\ x + y \leq 6 \end{cases}$$

b) $Z(x, y) = 6x + 4y$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1{,}5x + y \geq 80 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x + y \leq 90 \end{cases}$$

c) $Z(x, y) = 3x + 4y$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 20x + 30y \geq 900 \\ 40x + 30y \geq 1200 \end{cases}$$

5. Soit $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

a) Déterminer le maximum M de $Z(x, y) = 5x + 7y$, sujette aux contraintes

$$\begin{cases} x + 3y \leq 12 \\ 2x + 3y \leq 18 \end{cases}$$

i) par la méthode graphique ;

ii) par la méthode du simplexe.

b) Déterminer le minimum m de $Z(x, y) = x + y$, sujette aux contraintes

$$\begin{cases} 4x + 3y + \geq 12 \\ 3x + 5y + \geq 15 \end{cases}$$

i) par la méthode graphique ;

ii) par la méthode duale.

6. Soit $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$.

a) Déterminer le maximum M de $P(x, y, z) = 10x + 13y + 6z$, sujette aux contraintes suivantes.

$$\begin{cases} 3x + 5y + 3z \leq 48 \\ 4x + 5y + 2z \leq 45 \end{cases}$$

b) Déterminer le minimum m de $P(x, y, z) = 60x + 160y + 180z$, sujette aux contraintes suivantes.

$$\begin{cases} x + 3y + 4z \geq 20 \\ x + 3y + 3z \geq 18 \\ 2x + 4y + 4z \geq 24 \end{cases}$$

7. **APPLICATION | PROFIT MAXIMAL**

Un horticulteur disposant de 1600 m^2 de terre désire cultiver des tulipes et des glaïeuls. Les bulbes des tulipes coûtent 4 $ le m^2 et ceux des glaïeuls, 2,40 $ le m^2.

L'horticulteur dispose de 4800 $ pour l'achat des bulbes et il sait que la demande de glaïeuls est satisfaite avec au moins 400 m^2. On sait par ailleurs qu'il est possible de cultiver 10 tulipes par m^2 et 14 glaïeuls par m^2. Le profit est de 0,90 $ par tulipe et de 0,60 $ par glaïeul.

Déterminer le profit maximal que cet horticulteur peut réaliser.

8. **APPLICATION | INVESTISSEMENT**

Guillaume désire investir au plus 100 000 $ dans trois types de placements : des obligations du gouvernement fédéral rapportant 5 % d'intérêt par année, des obligations municipales procurant un rendement annuel de 6 % et des actions d'une société minière versant, si tout va bien, un dividende de 9 % par année.

Selon le conseiller financier de Guillaume, le total du montant investi dans les obligations du gouvernement fédéral et dans les actions de la société minière ne doit pas dépasser 50 000 $, et le total du montant investi dans les obligations municipales et dans les actions de la société minière ne doit pas dépasser 60 000 $.

Déterminer le montant à investir dans chacun des types de placements pour maximiser la somme totale des intérêts et des dividendes reçus annuellement, et calculer ce montant maximal.

9. **APPLICATION | COÛT MINIMAL**

Un directeur d'école organise une sortie dans un village historique si au moins 360 élèves y participent. Il prévoit louer des autobus qui peuvent transporter 40 élèves et des minibus qui peuvent en transporter 8. De plus, 24 parents ont offert d'agir comme surveillants lors de cette sortie. Le directeur exige qu'il y ait deux surveillants par autobus et un surveillant par minibus.

Sachant que la location d'un autobus coûte 1200 $ et que la location d'un minibus coûte 200 $, déterminer le nombre de véhicules de chaque type que le directeur doit louer pour minimiser son coût et calculer ce coût minimal.

10. **APPLICATION | PROFIT MAXIMAL**

Une compagnie produit trois types de chocolats : des chocolats noirs, des chocolats blancs et des chocolats aux cerises. Ces chocolats sont vendus mélangés dans trois types de boîtes.

Les boîtes de type I contiennent 4 chocolats noirs, 4 chocolats blancs et 12 chocolats aux cerises et sont vendues 11,00 $.

Les boîtes de type II contiennent 12 chocolats noirs, 4 chocolats blancs et 4 chocolats aux cerises et sont vendues 8,80 $.

Les boîtes de type III contiennent 8 chocolats noirs, 8 chocolats blancs et 8 chocolats aux cerises et sont vendues 12,60 $.

Le coût de production des chocolats est de 0,25 $ par chocolat noir, de 0,30 $ par chocolat blanc et de 0,40 $ par chocolat aux cerises.

Déterminer le nombre de boîtes de chaque type que l'entreprise doit vendre chaque semaine pour maximiser son profit et déterminer ce profit maximal, si elle peut produire hebdomadairement

a) 4800 chocolats noirs, 4000 chocolats blancs et 5600 chocolats aux cerises ;

b) 4800 chocolats noirs, 5000 chocolats blancs et 5600 chocolats aux cerises ;

c) 6000 chocolats noirs, 6000 chocolats blancs et 5600 chocolats aux cerises.

11. **APPLICATION | COÛT MINIMAL**

Laurie veut fabriquer un mélange de vitamine A et de vitamine B à partir de trois produits de base, P_1, P_2 et P_3. Les renseignements relatifs à la production des vitamines sont présentés dans le tableau suivant.

	P_1	P_2	P_3
Unités de vitamine A par kilogramme de produit de base	120	30	60
Unités de vitamine B par kilogramme de produit de base	20	10	200
Coût (en dollars) par kilogramme de produit de base	10	7,5	20

Le mélange doit contenir un minimum de 400 unités de vitamine A et un minimum de 600 unités de vitamine B.

Déterminer le nombre de kilogrammes de chaque produit de base nécessaire pour minimiser le coût du mélange et calculer ce coût minimal.

Problèmes de synthèse

1. a) Pour le tableau suivant,

$$\begin{array}{cccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & P & \\ \hline 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 57 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 62 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 38 \\ \hline -5 & 0 & -7 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 112 \end{array}$$

i) identifier les variables de base et les variables hors base ;

ii) déterminer la solution de base admissible ;

iii) déterminer si la solution trouvée en ii) est maximale ; justifier.

b) Pour le tableau suivant,

$$\begin{array}{ccccccc|c} x & y & z & e_1 & e_2 & e_3 & P & \\ \hline 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 3 & 6 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 28 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ \hline 8 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

i) déterminer le pivot, effectuer le pivotage et donner la solution de base obtenue à cette étape ;

ii) déterminer si la solution trouvée en i) est maximale ; justifier.

2. Soit $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ et $w \geq 0$. Maximiser :

a) $P(x, y, z, w) = 4x + 7y + 9z + 6w$
sous les contraintes suivantes.

$$\begin{cases} x + 3z + w \leq 1200 \\ x + 5y \leq 3900 \\ x + w \leq 540 \\ x + 4y + z \leq 2100 \end{cases}$$

b) $P(x, y, z, w) = 20x + 24y + 25z + 20w$
sous les contraintes suivantes.

$$\begin{cases} 5x + 7y + 9z + 4w \leq 325 \\ 2x + 4y + 2z + w \leq 103 \\ 2x + 2y + 4z + w \leq 239 \\ x + y + z + w \leq 46 \\ x + 3y + 3z + 6w \leq 129 \end{cases}$$

3. Soit $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ et $w \geq 0$. Minimiser :

a) $m(x, y, z) = 39x + 24y + 36z$
sous les contraintes suivantes.

$$\begin{cases} 3x + y + z \geq 30 \\ x + y + z \geq 22 \\ 3x + 2y + 5z \geq 60 \end{cases}$$

b) $m(x, y, z, w) = 3x + 2y + 4z + 6w$
sous les contraintes suivantes.

$$\begin{cases} x + z \geq 150 \\ x + w \geq 200 \\ y + w \geq 300 \\ z + w \geq 180 \end{cases}$$

4. **APPLICATION | PROFIT MAXIMAL**

Une petite pâtisserie de quartier produit quotidiennement deux types de muffins, soit les muffins « Excellent » et « Égalité ». Un muffin « Excellent » contient 40 grammes de noix et 80 grammes de fruits. Un muffin « Égalité » contient 60 grammes de noix et 60 grammes de fruits. Le pâtissier dispose de 4,2 kilogrammes de noix et de 8 kilogrammes de fruits. Il fait un profit de 0,80 $ par muffin « Excellent » et de 1,10 $ par muffin « Égalité ». Soit x, le nombre de muffins « Excellent » qui pourraient être produits, et y, le nombre de muffins « Égalité » qui pourraient être produits.

a) Compléter le tableau suivant, dans lequel les quantités sont exprimées en grammes.

Produit	x	y	**Quantité disponible**
Noix			
Fruits			

b) Déterminer les contraintes correspondantes ainsi que la fonction économique.

c) Représenter le polygone de contraintes et identifier les sommets.

d) Déterminer le profit maximal du pâtissier.

e) Un client passe une commande de 40 muffins « Égalité ». Si le pâtissier prépare cette commande et utilise le reste des ingrédients pour faire des muffins « Excellent », déterminer le nombre de muffins « Excellent » qu'il pourra préparer et calculer son profit.

5. **APPLICATION | COÛT MINIMAL**

Une chaîne d'alimentation doit envoyer au moins 445 m³ de produits réfrigérés et 398 m³ de produits non réfrigérés à un de ses magasins. Pour ce faire, elle dispose de deux types de camions. Le premier type peut contenir 80 m³ de produits non réfrigérés et 70 m³ de produits réfrigérés. Le deuxième type

peut contenir 44 m^3 de produits non réfrigérés et 60 m^3 de produits réfrigérés.



Déterminer le nombre de camions de chaque type que la chaîne d'alimentation doit utiliser pour minimiser son coût, et calculer ce coût minimal si le premier type de camion et le deuxième type de camion coûtent respectivement 5,00 $ par kilomètre et 3,00 $ par kilomètre.

6. APPLICATION | PROFIT MAXIMAL

Un architecte doit soumettre le plan d'un édifice de 60 appartements en copropriété dans lequel on trouve trois types d'appartements, ceux à une chambre, ceux à deux chambres et ceux à trois chambres. La superficie de chaque type d'appartements est respectivement de 120, de 130 et de 140 m^2, et la superficie disponible pour l'ensemble de l'édifice est de 8150 m^2.

Des règlements municipaux et des études de marché imposent à l'architecte les contraintes suivantes. Le nombre total d'appartements à une chambre et à deux chambres ne doit pas être supérieur au nombre d'appartements à trois chambres, et le nombre d'appartements à une chambre ne doit pas dépasser le double du nombre d'appartements à deux chambres. Déterminer le nombre d'appartements de chaque type pour maximiser le profit et calculer ce profit maximal si

a) les appartements à une chambre engendrent un profit de 9000 $, ceux à deux chambres, un profit de 8000 $, et ceux à trois chambres, un profit de 7500 $;

b) en modifiant les appartements à une chambre et ceux à trois chambres, les profits sont respectivement de 7500 $, de 8000 $ et de 9000 $.

7. APPLICATION | PROFIT MAXIMAL

Un cabinet comptable a trois types de clients, des particuliers, des commerçants et des propriétaires de maisons de rapport. Une rencontre avec un client dure une heure. Pour entrer les données dans le système informatique, il faut respectivement 1 heure, 2 heures et 1,5 heure pour chaque type de clients. La rédaction du rapport final demande respectivement 10 minutes, 25 minutes et 20 minutes pour chaque type de clients. Le temps de rencontre disponible par semaine est de 100 heures, celui pour l'entrée des données est de 160 heures et le temps pour la rédaction des rapports finaux est de 2050 minutes.

Sachant que le profit pour le cabinet comptable est de 100 $ par particulier, de 130 $ par commerçant et de 120 $ par propriétaire d'une maison de rapport, déterminer quel est le nombre requis de clients de chaque type pour maximiser le profit et calculer ce profit maximal.

8. APPLICATION | PROFIT MAXIMAL

Une usine fabrique des robots de type A, B et C. Chaque robot de type A nécessite 6 heures d'assemblage et 4 heures de préparation ; chaque robot de type B nécessite 1 heure d'assemblage et 5 heures de préparation, et chaque robot de type C nécessite 4 heures d'assemblage et 6 heures de préparation. Pour une période d'assemblage d'un mois, la chaîne est disponible pour un maximum de 210 heures et on dispose d'un maximum de 330 heures pour la préparation.

L'usine doit fabriquer mensuellement au moins 20 robots ; par contre, les exigences du marché demandent de produire autant de robots de type C que de robots de type A et B réunis. Le profit engendré par la vente des robots A, B et C est respectivement de 450 $, 250 $ et 200 $ par unité.

Déterminer le nombre de robots de chaque type à fabriquer mensuellement pour maximiser le profit et calculer ce profit maximal.

9. APPLICATION | REVENU MAXIMAL

Une compagnie aérienne offre 220 sièges à trois prix différents : 210 $ pour la classe économique, 405 $ pour la classe affaires et 465 $ pour la première classe. Les coûts sont les suivants : 50 $ pour la classe économique, 150 $ pour la classe affaires et 150 $ pour la première classe. De plus, l'espace requis pour les bagages est de 2 m^3 pour les passagers de la première classe, de 1,5 m^3 pour les passagers de la classe affaires et de 1 m^3 pour les passagers de la classe économique.



Si les coûts de chaque vol ne doivent pas excéder 26 000 $ et que l'espace alloué aux bagages est de 350 m^3, combien de billets de chaque type doivent être vendus pour obtenir un revenu maximal, et quel sera ce revenu maximal ?

10. APPLICATION | COÛT MINIMAL

Une entreprise de fabrication de motoneiges possède deux entrepôts, A et B, situés dans des villes différentes. À partir de ces entrepôts, elle effectue des livraisons dans la région de Québec (Q) et dans la région de la Mauricie (M). Dans l'entrepôt A, il y a au moins 120 motoneiges prêtes à être livrées et, dans l'entrepôt B, il y en a au moins 180.

L'entreprise doit livrer au moins 160 motoneiges dans la région de Québec et au moins 200 dans la région de la Mauricie. Déterminer le nombre de motoneiges à livrer dans chaque région à partir de chacun des entrepôts pour minimiser le coût de livraison et calculer ce coût minimal dans chacun des cas suivants.

a) Le coût moyen de livraison

de l'entrepôt A vers la région de Québec est de 12 $ par motoneige ;

de l'entrepôt A vers le région de la Mauricie est de 16 $ par motoneige ;

de l'entrepôt B vers la région de Québec est de 10 $ par motoneige ;

de l'entrepôt B vers la région de la Mauricie est de 18 $ par motoneige.

b) Le coût moyen de livraison

de l'entrepôt A vers la région de Québec est de 12 $ par motoneige ;

de l'entrepôt A vers la région de la Mauricie est de 16 $ par motoneige ;

de l'entrepôt B vers la région de Québec est de 20 $ par motoneige ;

de l'entrepôt B vers la région de la Mauricie est de 10 $ par motoneige.

11. APPLICATION | PROFIT MAXIMAL

Un entrepreneur de construction se propose d'offrir trois types de maisons : le type 1 est une maison à un étage avec deux chambres ; le type 2, une maison à deux étages avec trois chambres ; le type 3, une maison à deux étages avec quatre chambres.

Le type 1 nécessite un terrain de 500 m^2, un investissement de 45 000 $ et 720 heures de travail.

Le type 2 nécessite un terrain de 500 m^2, un investissement de 45 000 $ et 540 heures de travail.

Le type 3 nécessite un terrain de 1000 m^2, un investissement de 60 000 $ et 720 heures de travail.

L'entrepreneur dispose de 30 000 m^2 de terrain, d'un montant de 2 400 000 $ et de 32 400 heures de travail.

Déterminer le nombre de maisons de chaque type que l'entrepreneur doit construire pour maximiser son profit, calculer ce profit maximal et préciser si toutes les ressources ont été utilisées dans chacun des cas suivants.

a) Les maisons de type 1, 2 et 3 rapportent respectivement un profit de 16 000 $, 14 400 $ et 19 200 $.

b) Les maisons de type 1, 2 et 3 rapportent respectivement un profit de 16 000 $, 12 400 $ et 19 200 $.

c) Les maisons de type 1, 2 et 3 rapportent respectivement un profit de 20 000 $, 14 400 $ et 19 200 $.

12. APPLICATION | REVENU MAXIMAL

Une personne désire investir au plus 25 000 $ dans quatre types de fonds communs de placement, appelés type A, type B, type C et type D.

Son conseiller financier lui recommande de ne pas investir plus de 10 000 $ dans les types A et B ensemble, pas plus de 15 000 $ dans les types A et C ensemble, et pas plus de 18 000 $ dans les types A et D ensemble.

Déterminer le montant à investir dans chaque type de fonds communs de placement si cette personne veut maximiser son revenu d'intérêts, et calculer ce revenu maximal lorsque le taux d'intérêt de chaque type est le suivant.

a) Type A, 4 % ;
type B, 5 % ;
type C, 6 % ;
type D, 5,5 %.

b) Type A, 7 % ;
type B, 5 % ;
type C, 6 % ;
type D, 5,5 %.

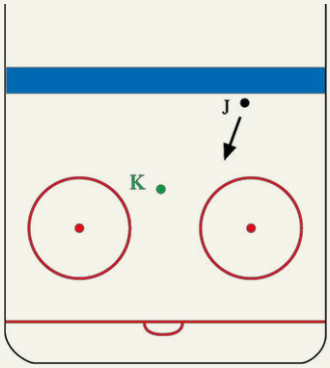
c) Type A, 6 % ;
type B, 5 % ;
type C, 6 % ;
type D, 5,5 %.

PROBLÈMES INTÉGRATEURS

1 Programmation d'un jeu vidéo de hockey sur glace

Une équipe de programmation de la compagnie de jeux vidéo Algisoft s'affaire à créer un jeu de hockey sur glace.

Une section du code de programmation doit représenter la situation suivante : Le joueur J, qui porte le numéro 87, s'apprête à effectuer un lancer frappé vers le but, mais le défenseur K, qui porte le numéro 76, de l'équipe adverse se trouve devant lui. Pour ajouter au réalisme du jeu, la rondelle doit passer à au moins 15 cm au-dessus de la lame du bâton du défenseur.



Un membre de l'équipe de programmation a déjà codé certaines informations, soit l'équation de la droite contenant le haut de la lame du bâton du défenseur au moment où la rondelle passe au-dessus de cette dernière, qui est donnée par

$D : (x, y, z) = (13 ; 14 ; 0{,}1) + k(9 ; -6 ; 0{,}1)$, où $k \in \mathbb{R}$.

La position du joueur numéro 87 dans le plan de la patinoire au moment du lancer est donnée par le point J(20, 21, 0) et la rondelle atteindra le point B(12 ; 3 ; 0,6) situé dans le but de l'équipe adverse.

Les coordonnées sont dans un repère gradué en mètres.

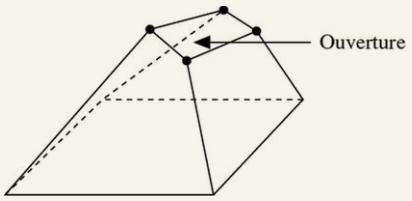
a) Représenter graphiquement la situation et déterminer l'équation de la droite L correspondant à la trajectoire de la rondelle.

b) Déterminer si le membre de l'équipe de programmation, dans son équation, a respecté la distance verticale prévue entre la trajectoire rectiligne du lancer et le haut de la lame du bâton du défenseur.

c) Déterminer la distance entre la trajectoire rectiligne de la rondelle et le haut de la lame du bâton du défenseur.

2 Lumière sur une œuvre architecturale

Un architecte de la firme ArKiTeK est mandaté pour évaluer la possibilité d'installer une plaque lumineuse à l'intérieur d'une imposante œuvre architecturale d'un musée d'art contemporain. Cette plaque lumineuse est placée à la base de l'œuvre et envoie ses rayons lumineux à la verticale. L'œuvre a l'aspect d'une pyramide tronquée à base rectangulaire, comme dans le schéma ci-dessous.



Les devis de l'œuvre, dont les unités de mesure sont en mètres, indiquent les équations des plans contenant les panneaux latéraux :

$\pi_1 : -y + z = 6$
$\pi_2 : 2x + z = 6$
$\pi_3 : y + z = 6$
$\pi_4 : 2x - z = 6$

La partie tronquée de l'œuvre architecturale suit le plan d'équation $\pi_5 : y + 3z = 14$.

La base de l'œuvre se trouve dans le plan $z = 0$.

Déterminer l'aire minimale de la plaque lumineuse qui permet de maximiser la lumière émergeant de l'ouverture. L'aire de la plaque doit en effet être minimale pour éviter d'engendrer des coûts inutiles. À noter que les parois de l'œuvre étant opaques, la seule lumière visible est celle qui sort par l'ouverture.

ANNEXE : MÉTHODES DE PREUVE

En mathématique, nous devons démontrer des théorèmes, des corollaires d'un théorème, des propriétés, etc. Pour démontrer un théorème, un corollaire d'un théorème ou une propriété, il suffit d'utiliser des théorèmes et des définitions que l'on sait être vrais et de faire usage de quelques règles de logique élémentaire.

Théorème

Un théorème est une proposition qu'on démontre au moyen de propositions précédemment établies. L'énoncé est la proposition même, et la preuve est le raisonnement par lequel on montre comment cette proposition est une conséquence des précédentes.

L'énoncé se décompose en deux partie : l'hypothèse et la conclusion. L'hypothèse est la supposition que l'on fait relativement aux éléments sur lesquels on raisonne, et la conclusion est la conséquence qui découle de cette hypothèse, si l'on admet les propositions précédentes.

Corollaire

Un corollaire est l'énoncé, ainsi que sa solution, qui découle immédiatement d'un théorème déjà démontré.

Preuve

Une preuve est une démarche qui permet d'établir la véracité d'un énoncé qui contient une hypothèse et une conclusion. On peut faire la preuve (ou la démonstration) de théorèmes, de corollaires d'un théorème ou de propriétés de différentes façons, que nous présentons ci-après.

Preuve directe (ou par raisonnement déductif)

Cette méthode consiste à utiliser des théorèmes déjà démontrés et des définitions appropriées qui permettent, à partir des hypothèses, d'arriver à la conclusion.

THÉORÈME 6.10 (page 325)

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$, alors

$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin\theta$, où $\theta \in [0, \pi]$ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Preuve

Nous savons que

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \bullet \vec{v})^2 && \text{(théorème 6.9)} \\
&= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \left(\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta\right)^2 && \text{(définition 6.1)} \\
&= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2\theta \\
&= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2\theta) && \text{(en factorisant)} \\
&= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2\theta && \text{(car } (1 - \cos^2\theta) = \sin^2\theta\text{)} \\
\|\vec{u} \times \vec{v}\| &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \, |\sin\theta| \\
\text{d'où } \|\vec{u} \times \vec{v}\| &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin\theta && \text{(puisque } \theta \in [0, \pi], |\sin\theta| = \sin\theta\text{)}
\end{aligned}$$

Preuve par proposition biconditionnelle (ou par équivalence)

Tout énoncé de la forme P si et seulement si Q, noté $P \Leftrightarrow Q$, est un énoncé biconditionnel.

Par définition, $P \Leftrightarrow Q$ est équivalent à $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$, et se démontre habituellement en deux parties.

THÉORÈME 3.20 (page 154)
Une matrice carrée $A_{n \times n}$ est inversible si et seulement si dét $A \neq 0$.

Preuve

($\Rightarrow$) Si A est inversible, alors A^{-1} existe.

Ainsi, $AA^{-1} = I_{n \times n}$ (définition de l'inverse)

$\text{dét}\,(AA^{-1}) = \text{dét}\, I_{n \times n}$

$(\text{dét}\, A)(\text{dét}\, A^{-1}) = 1$ (car dét $(AB) = (\text{dét}\, A)(\text{dét}\, B)$ et dét $I_{n \times n} = 1$)

d'où dét $A \neq 0$

($\Leftarrow$) Si dét $A \neq 0$, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\text{dét}\, A}\,\text{adj}\, A$ (théorème 3.19)

d'où A^{-1} existe.

Preuve par disjonction des cas (ou au cas par cas)

Cette méthode consiste à démontrer un théorème en tenant compte des différents cas possibles.

THÉORÈME 6.1 (page 302)
Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, exprimés dans la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, alors

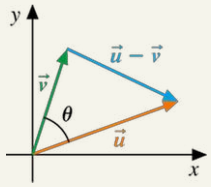
$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Preuve

1) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

Cas où $\vec{u} \neq k\vec{v}$:

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $(\vec{u} - \vec{v})$ représentés sur le graphique ci-contre.



Par la loi des cosinus, nous avons

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \bullet \vec{v} \qquad (\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta = \vec{u} \bullet \vec{v}, \text{ définition 6.1})$$

En isolant $\vec{u} \bullet \vec{v}$, nous obtenons

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2}{2}$$

$$= \frac{(u_1^2 + u_2^2) + (v_1^2 + v_2^2) - [(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2]}{2} \qquad \text{(théorème 4.6)}$$

$$= \frac{u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - [u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2]}{2}$$

$$= \frac{2u_1v_1 + 2u_2v_2}{2}$$

$$= u_1v_1 + u_2v_2$$

Cas où $\vec{u} = k\vec{v}$ et $k > 0$:

Puisque $\vec{u} = k\vec{v}$, nous avons

$(u_1, u_2) = k(v_1, v_2)$ (car $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$)

$= (kv_1, kv_2)$

ainsi, $u_1 = kv_1$ et $u_2 = kv_2$

Par la définition 6.1, $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$

$= \|k\vec{v}\| \, \|\vec{v}\| \cos 0°$ (car $\vec{u} = k\vec{v}$ et $k > 0$)

$= |k| \, \|\vec{v}\|^2$

$= k\|\vec{v}\|^2$ (car $k > 0$)

$= k(v_1^2 + v_2^2)$ (théorème 4.6)

$= kv_1^2 + kv_2^2$

$= (kv_1)v_1 + (kv_2)v_2$

$= u_1v_1 + u_2v_2$ (car $u_1 = kv_1$ et $u_2 = kv_2$)

Cas où $\vec{u} = k\vec{v}$ et $k < 0$:

La preuve est laissée à l'étudiant.

2) Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.

La preuve est laissée à l'étudiant.

D'où $\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$

Preuve d'une part et d'autre part

Pour démontrer que deux quantités sont égales entre elles, il suffit de démontrer que ces deux quantités sont égales à une troisième quantité.

Propriété 8 (page 267)

Vérifions si $r * (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) = r * \boldsymbol{u} \oplus r * \boldsymbol{v}$.

D'une part,

$r * (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) = r * ((cx + d) \oplus (ex + f))$

$= r * ((c + e)x + (d + f))$ (définition de $\oplus$)

$= (r(c + e))x + r(d + f)$ (définition de $*$)

$= (rc + re)x + (rd + rf)$ (distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{R}$)

D'autre part,

$r * \boldsymbol{u} \oplus r * \boldsymbol{v} = r * (cx + d) \oplus r * (ex + f)$

$= ((rc)x + rd) \oplus ((re)x + rf)$ (définition de $*$)

$= (rc + re)x + (rd + rf)$ (définition de $\oplus$)

d'où $r * (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) = r * \boldsymbol{u} \oplus r * \boldsymbol{v}$.

Preuve par contradiction (ou par l'absurde)

Pour démontrer qu'une proposition est vraie, on peut supposer que cette proposition est fausse, ce qui mène à une contradiction et prouve que la proposition est vraie.

THÉORÈME 1.2 (page 33)

Si A est une matrice carrée inversible, alors l'inverse de A est unique.

Preuve

Soit B, une matrice inverse de A.

Démontrons, par contradiction, l'unicité de cette matrice.
Supposons qu'il existe une seconde matrice C, différente de B, inverse de A.

$$BA = I \qquad \text{(définition 1.15)}$$
$$(BA)C = IC$$
$$B(AC) = C \qquad \text{(associativité et } IC = C\text{, théorème 1.1)}$$
$$BI = C \qquad \text{(car } AC = I\text{)}$$
$$\text{donc} \quad B = C \qquad \text{(car } BI = B\text{, théorème 1.1)}$$

ce qui contredit que $C \neq B$.

D'où l'inverse de A est unique.

Preuve par contre-exemple

Donner un exemple ne suffit pas pour démontrer qu'une propriété est toujours satisfaite. Cependant, donner un contre-exemple est suffisant pour démontrer qu'une propriété n'est pas satisfaite.

Exemple 5 (page 270)

Soit $V = \{(a, b, c) \mid a, b \text{ et } c \in \mathbb{R}\}$, l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, muni des opérations suivantes.

Addition : $(e, f, g) \oplus (h, i, j) = (e + h, f + i, g + j)$

Multiplication : $k * (e, f, g) = (1, 1, 1)$, où $k \in \mathbb{R}$

Vérifions que V n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ en trouvant un exemple qui ne satisfait pas la propriété 10.

En choisissant $\boldsymbol{u} = (2, 3, 4) \in V$, nous avons

$$1 * \boldsymbol{u} = 1 * (2, 3, 4)$$
$$= (1, 1, 1) \qquad \text{(définition de } *\text{)}$$

Puisque $1 * \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}$, lorsque $\boldsymbol{u} = (2, 3, 4)$, la propriété 10 n'est pas satisfaite.

D'où V n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Preuve par induction mathématique (ou par récurrence)

Cette méthode de preuve est utilisée pour démontrer des propositions qui sont valables pour tout $n \geq 1$.

Elle est également utilisée pour vérifier la véracité d'une conjecture (supposition ou jugement que l'on forme sur de simples apparences).

Cette méthode de preuve consiste

1) d'abord à vérifier que la proposition est vraie pour $n = 1$;
2) à faire l'hypothèse (hypothèse d'induction) que la proposition est vraie pour $n = k$;
3) à démontrer que la proposition est vraie pour $n = k + 1$.

Ainsi, puisque la proposition est vraie pour $n = 1$, vraie pour $n = k$ et vraie pour $n = k + 1$, elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

Solution du problème de synthèse n° 18 a) du chapitre 1 (page 60)

18. a) Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a & a \end{bmatrix}$.

i) Calculer A^2, A^3 et A^4.

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a^2 & a^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a^2 & a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a^3 & a^3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a^3 & a^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a^4 & a^4 \end{bmatrix}$$

ii) Donner une conjecture pour A^n.

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a^n & a^n \end{bmatrix}, \forall\, n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

iii) Démontrer par induction que la conjecture est vraie $\forall\, n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Preuve par induction

1) $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a & a \end{bmatrix}$, donc la conjecture est vraie pour $n = 1$.

2) Supposons que la conjecture est vraie pour $n = k$,

ainsi $A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a^k & a^k \end{bmatrix}$.

3) Démontrons que la conjecture est vraie pour $n = k + 1$.

$$A^{(k+1)} = A^kA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a^k & a^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a & a \end{bmatrix}. \qquad \text{(voir 2) et 1))}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a^k + a^k(1 - a) & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a^{k+1} & a^{k-1} \end{bmatrix},$$

donc la conjecture est vraie pour $n = k + 1$.

D'où $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - a^n & a^n \end{bmatrix}, \forall\, n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$

CORRIGÉ

CHAPITRE 1

Exercices préliminaires (page 3)

1. a) $(a + b) \in \mathbb{R}$ b) $ab \in \mathbb{R}$

2. a) $a + b = b + a$

b) $(a + b) + c = a + (b + c)$

c) $a + 0 = a$

d) $a + (-a) = 0$

e) $ab = ba$

f) $(ab)c = a(bc)$

g) i) $a(b + c) = ab + ac$

ii) $(a + b)c = ac + bc$

h) $1a = a$

3. a) i) V ii) F iii) V iv) F

b) i) V ii) V iii) V iv) F

c) i) V ii) F iii) V iv) F

4. a) i) $a_{34} = -13$ ii) $a_{52} = 1$

b) i) $b_{13} = 0$ ii) $b_{31} = \frac{-8}{3}$

c) i) $c_{34} = -12$ ii) $c_{13} = 3$

5. a) $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$

b) $-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5$

c) $a_{41}b_{15} + a_{42}b_{25} + a_{43}b_{35}$

d) $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$

6. $\sum_{i=1}^{8} a_{pi}b_{iq}$

7. a) $x = 4$ et $y = -3$

b) $x = \frac{3}{5}$ et $y = \frac{2}{5}$

Exercices de compréhension 1.1

1. a) i) 2×3 ii) 3×2

b) i) $b_{21} = 2$; $b_{12} = 5$

ii) $c_{22} = -5$; $c_{32} = \sqrt{3}$

c) i) $\pi = b_{23}$ ii) $9 = c_{12}$

2. a) B est d'ordre 3.

b) i) 3, -9 et 2 ii) -4, -9 et 1

c) $\text{Tr}(B) = 3 + (-9) + 2 = -4$

3. a) $O_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $O_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Exercices 1.1 (page 12)

1. a) i) 924 km

ii) 253 km

b) i) Joliette et Montréal

ii) Gaspé et Québec

c) $a_{24} = 214$;
a_{24} correspond à la distance entre Joliette et Québec.

d) $a_{53} = 88$;
a_{53} correspond à la distance entre Sorel et Montréal.

2. a) 3×4; 4×1; 1×3

b) $a_{12} = 2$; $a_{24} = -1$; $b_{21} = \sqrt{2}$; $c_{12} = 5$

c) $8 = a_{34}$; $-e = b_{31}$; $9 = c_{13}$

d) $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ -5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$:

$A[2, 2]$;

-3

$A(1, 4)$;

4

3. $O_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $O_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. a) i) 3 lignes et 4 colonnes

ii) 4 lignes et 2 colonnes

iii) 6 lignes et 6 colonnes

iv) m lignes et n colonnes

4. (*suite*)

b) i) 1×16, 2×8, 4×4, 8×2 ou 16×1

ii) 1×31 ou 31×1

5. a) Pour A : i) 5, -9, 0 et -1

ii) 0, 9, 14 et -2

Pour $I_{5\times5}$: i) 1, 1, 1, 1 et 1

ii) 0, 0, 1, 0 et 0

Pour I_8 : i) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 et 1

ii) 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 et 0

b) i) $\text{Tr}(A) = 5 + (-9) + 0 + (-1) = -5$

ii) $\text{Tr}(I_{5\times5}) = 5$ iii) $\text{Tr}(I_8) = 8$

6. a) A, B et G b) B, C et G c) A, B, C, E, G, H, M et N

d) B et G e) Aucune f) J

g) G h) B et G i) B, G, H et M

j) E et N

7. a) $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 5 \\ -4 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g) $a := (i, j) \rightarrow (-1)^{i \cdot j} \cdot (i + j - 1)^2$;

$(i, j) \rightarrow (-1)^{ij} (i + j - 1)^2$

$A := matrix(4, 4, a)$;

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ -9 & 16 & -25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{bmatrix}$$

h) $b := (i, j) \rightarrow \frac{(i-j)^j}{i}$;

$(i, j) \rightarrow \frac{(i-j)^j}{i}$

$B := matrix(3, 6, b)$;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 & 81 & -1024 & 15625 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 8 & -\frac{243}{2} & 2048 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{32}{3} & 243 \end{bmatrix}$$

8.

	Cat. 1	Cat. 2	Cat. 3	Cat. 4
2017	40 000	46 000	50 000	59 000
2018	41 200	47 380	51 500	60 770
2019	42 024	48 328	52 530	61 985

Car $a_{2i} = a_{1i}(1{,}03)$ et $a_{3i} = a_{2i}(1{,}02)$

9. a)

	S_1	S_2	S_3	S_4
S_1	0	3	$\sqrt{13}$	2
S_2	3	0	2	$\sqrt{13}$
S_3	$\sqrt{13}$	2	0	3
S_4	2	$\sqrt{13}$	3	0

$= M$

b)

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_1	0	1	$\sqrt{2}$	1	2	$\sqrt{5}$
S_2	1	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	2
S_3	$\sqrt{2}$	1	0	1	$\sqrt{6}$	$\sqrt{5}$
S_4	1	$\sqrt{2}$	1	0	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$
S_5	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{5}$	0	1
S_6	$\sqrt{5}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	1	0

$= N$

c)

	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	50	160	120
V_2	50	0	110	130
V_3	160	110	0	200
V_4	120	130	200	0

$= V$

Exercices de compréhension 1.2

1. $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 3 & -3 & 11 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}$

2. $-5A + 2B = \begin{bmatrix} -19 & 22 & -19 \\ -35 & -18 & 4 \end{bmatrix}$

Exercices 1.2 (page 22)

1. $C = J$ et $E = F$

2. a) $\begin{bmatrix} -2 & 9 & -4 \\ 5 & 8 & 17 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 6 & -15 & 12 \\ 5 & -8 & -15 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 12 \\ -15 & 9 \\ 18 & -24 \end{bmatrix}$ d) Non définie

e) $\begin{bmatrix} 9 & -18 & 18 \\ 15 & -6 & -9 \end{bmatrix}$ f) Non définie

3. a) $\begin{bmatrix} 7 & -20 & 3 & 2 \\ -10 & 33 & -11 & 0 \\ 3 & -37 & 20 & -5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 4 & -4 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & -4 & 6 \\ 8 & 11 & -12 \\ 12 & -24 & 33 \end{bmatrix}$

4. a) $N = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 & 5 \\ 6 & -7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{3\times 4}$

c) $\begin{bmatrix} 6 & -10 & 4 & 6 \\ -4 & 2 & 8 & -10 \\ -12 & 14 & -16 & 0 \end{bmatrix} = 2M$

d) $\begin{bmatrix} 9 & -15 & 6 & 9 \\ -6 & 3 & 12 & -15 \\ -18 & 21 & -24 & 0 \end{bmatrix} = 3M$

e) $(k-1)M$ et $(k+1)M$

5. a) $a = 5, b = -2, c = \pi$ et $d = 6$

b) $a = \dfrac{-1}{2}, b = 8, c = 0$ et $d = 2$

c) $a = -2, b = -1, c = 1$ et $d = 3$

d) $a = 9, b = 5, c = 14$ et $d = \sqrt{5}$ ou $d = -\sqrt{5}$

e) $a = 4, b = \dfrac{9}{4}, c = 9$ et $d = 0$, ou

$a = -2, b = 0, c = 0$ et $d = 3$, ou

$a = 10, b = \dfrac{9}{5}, c = 18$ et $d = -3$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 2 & -4 & 10 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} kb_{11} & kb_{12} & kb_{13} \\ kb_{21} & kb_{22} & kb_{23} \end{bmatrix}$ (définition 1.11)

Ainsi, $8 = kb_{12}$

$8 = k4$ (car $b_{12} = 4$)

Donc, $k = 2$

De $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 2 & -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_{11} & 8 & 2b_{13} \\ 2b_{21} & 2b_{22} & 2b_{23} \end{bmatrix}$,

nous obtenons $b_{11} = 1, b_{13} = 3, b_{21} = 1, b_{22} = -2$ et $b_{23} = 5$

d'où $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

7. a) $F = 0{,}2E_1 + 0{,}22E_2 + 0{,}28E_3 + 0{,}3E_4$

$= \begin{bmatrix} 80{,}2 & 77{,}34 \\ 77{,}1 & 75{,}42 \\ 79{,}5 & 84{,}92 \end{bmatrix}$

	Math	**Chimie**	
d'où $F =$	80,2	77,34	**Luc**
	77,1	75,42	**Guy**
	79,5	84,92	**Léa**

b) $77{,}34 ; f_{12}$

c) $f_{31} = 79{,}5$, c'est-à-dire la note finale de Léa en mathématiques.

8. $A := \begin{bmatrix} 5 & -6 & 8 \\ 0 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}: \quad B := \begin{bmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & -4 \end{bmatrix}:$

a) $\frac{5}{8} \cdot (A + B);$

$\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & \frac{15}{4} \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} \\ -\frac{5}{8} & \frac{15}{4} & -\frac{15}{8} \end{bmatrix}$

$\frac{5}{8} \cdot A + \frac{5}{8} \cdot B;$

$\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & \frac{15}{4} \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} \\ -\frac{5}{8} & \frac{15}{4} & -\frac{15}{8} \end{bmatrix}$

d'où $\dfrac{5}{8}(A + B) = \dfrac{5}{8}A + \dfrac{5}{8}B$

b) $evalm\left(\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{7}\right) \cdot A\right);$

$\begin{bmatrix} \frac{95}{21} & -\frac{38}{7} & \frac{152}{21} \\ 0 & -\frac{19}{21} & \frac{76}{21} \\ \frac{76}{21} & \frac{38}{21} & \frac{19}{21} \end{bmatrix}$

$evalm\left(\frac{4}{3} \cdot A - \frac{3}{7} \cdot A\right);$

$\begin{bmatrix} \frac{95}{21} & -\frac{38}{7} & \frac{152}{21} \\ 0 & -\frac{19}{21} & \frac{76}{21} \\ \frac{76}{21} & \frac{38}{21} & \frac{19}{21} \end{bmatrix}$

d'où $\left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{3}{7}\right)A = \dfrac{4}{3}A - \dfrac{3}{7}A$

Exercices de compréhension 1.3

1. $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -17 & -24 \\ 12 & 24 & 36 \\ 25 & 73 & 75 \end{bmatrix}$

2. $I_{2\times 2}B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$B_{2\times 3}I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

ainsi $IB = BI = B$

3. $AB = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et

$BA = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d'où $B = A^{-1}$

4. a) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix} = A$

d'où A est symétrique. (théorème 1.3)

b) $B^T = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = -B$

d'où B est antisymétrique. (théorème 1.3)

Exercices 1.3 (page 37)

1. a) 2×3 b) 3×3 c) 2×2

d) Non définie e) 4×3 f) 4×7

g) Non définie h) Non définie i) 4×3

j) 2×7 k) 4×3 l) 3×7

2. a) 2×4

b) 5×3

3. a) $AB = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ -5 & 29 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 21 & 7 \\ 4 & 18 \end{bmatrix}$

b) AB non définie ; $BA = \begin{bmatrix} -5 & 12 & -2 \\ 21 & -30 & 56 \end{bmatrix}$

c) $AB = \begin{bmatrix} 23 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 8 & 4 & 12 \\ 14 & 7 & 21 \end{bmatrix}$

d) AB non définie ; BA non définie

e) $AB = \begin{bmatrix} -3 & -21 & 11 & 0 & 13 \\ 2 & 10 & -5 & 0 & -4 \\ 3 & 9 & -9 & 0 & 11 \\ 6 & -6 & 26 & 0 & -10 \end{bmatrix}$; BA non définie

4. $(AB)C = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 6 & 9 \\ -3 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 21 & -28 & 0 & -14 \\ -15 & 42 & -6 & 24 \\ 18 & -35 & 3 & -19 \end{bmatrix}$

$A(BC) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -7 & -1 & -3 \\ -5 & 14 & -2 & 8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 21 & -28 & 0 & -14 \\ -15 & 42 & -6 & 24 \\ 18 & -35 & 3 & -19 \end{bmatrix}$

d'où $(AB)C = A(BC)$

5. a) $A(B+C) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 15 \end{bmatrix}$

$AB + AC = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 9 & 28 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -5 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 15 \end{bmatrix}$

d'où $A(B + C) = AB + AC$

b) $(B + C)A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

$BA + CA = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

d'où $(B + C)A = BA + CA$

6. a) Oui, car $A^2 = A$ b) Non, car $B^2 \neq B$

c) Oui, car $C^2 = C$ d) Non, car $E^2 \neq E$

7. a) $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{2\times 2}$

d'où l'indice de nilpotence de A est 2.

b) $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O_{3\times 3}$

d'où l'indice de nilpotence de B est 3.

8. a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 28 & 64 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 2016 & 4096 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

9. a) $AA^T = \begin{bmatrix} 15 \end{bmatrix}$ b) $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

10. a) $AB = \begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 5 & 19 \\ 6 & 24 \end{bmatrix}$, ainsi $(AB)^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 14 & 19 & 24 \end{bmatrix}$

$B^TA^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 14 & 19 & 24 \end{bmatrix}$

d'où $(AB)^T = B^TA^T$

b) $AB + (B^TA^T)^T = AB + (A^T)^T(B^T)^T$

$= AB + AB$

$= 2AB = \begin{bmatrix} 8 & 28 \\ 10 & 38 \\ 12 & 48 \end{bmatrix}$

11. a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -2 & 6 & 3 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -2 & 7 & 3 \\ 1 & -8 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 9 & 11 & -7 \\ 16 & -6 & -10 \\ -8 & 15 & 11 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 5 \end{bmatrix}$

11. (*suite*)

e) $\begin{bmatrix} 4 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 22 & 19 & -51 \\ -20 & -34 & 58 \\ 5 & 29 & -24 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 15 & -22 & -14 \\ -68 & 5 & 75 \\ -2 & 27 & -20 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & -6 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = A$

12. a) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) B est la matrice inverse de A, car $AB = BA = I_3$.

c) $B = A^{-1}$

d) $B^TA^T = (AB)^T$ (propriété 3 de la transposée)
$= (I_3)^T$ (de a))
$= I_3$

13. a) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

b) Puisque A n'est pas une matrice carrée, A n'a pas d'inverse multiplicatif.

14. a) $\begin{bmatrix} 5a + 6 \\ 20 + 3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$, d'où $a = -2$ et $b = -4$

b) $\begin{bmatrix} 3a - 8 & 2c - a - 1 \\ 4b + 11 & -4c - 1 + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$,
d'où $a = 3$, $b = -2$ et $c = 0$

c) $\begin{bmatrix} 2 + 3a & a & b \\ 2 & 0 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & e & 2 \\ 2 & 0 & -5 \\ d & 0 & 2 \end{bmatrix}$,
d'où $a = -2$, $b = 2$, $c = -5$, $d = 0$ et $e = -2$

15. a) $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$;

$AB = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

b) $(A - B)(A + B) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

d'où $(A - B)(A + B) \neq A^2 - B^2$

c) $(A + B)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 19 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$

d'où $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

d) $A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

d'où $A^2 + AB + BA + B^2 = (A + B)^2$

16. a) $M^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$; $M^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}$;

$M^4 = \begin{bmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{bmatrix}$

b) $M^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$

17. a) $L = \begin{array}{c} \\ \mathbf{S_1} \\ \mathbf{S_2} \\ \mathbf{S_3} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 22 & 9 \\ 18 & 12 \end{bmatrix} \end{array}$ b) $C = \begin{array}{c} \\ \mathbf{F} \\ \mathbf{H} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} \$ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ 375 \end{bmatrix} \end{array}$

c) $LC = \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 22 & 9 \\ 18 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15x + 2250 \\ 22x + 3375 \\ 18x + 4500 \end{bmatrix}$

d) $18x + 4500 = 12\,510$
$18x = 8010$, donc $x = 445$
d'où le coût est de 445 $.

18. Soit les matrices légendées suivantes.

$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{Fenêtres} & \textbf{Portes extérieures} & \textbf{Portes intérieures} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 18 & 3 & 10 \\ 20 & 4 & 11 \\ 24 & 5 & 12 \\ 16 & 2 & 8 \end{bmatrix} \end{array}\!\!\begin{array}{l} \\ \textbf{Aster} \\ \textbf{Hosta} \\ \textbf{Jonc} \\ \textbf{Lis} \end{array}$

$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{Aster} & \textbf{Hosta} & \textbf{Jonc} & \textbf{Lis} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & 9 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 4 & 5 \\ 8 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\!\!\begin{array}{l} \textbf{Brossard} \\ \textbf{Laval} \\ \textbf{Candiac} \end{array}$

a) $BA = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 4 & 5 \\ 8 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 18 & 3 & 10 \\ 20 & 4 & 11 \\ 24 & 5 & 12 \\ 16 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{Fenêtres} & \textbf{Portes extérieures} & \textbf{Portes intérieures} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 492 & 88 & 267 \\ 402 & 71 & 213 \\ 248 & 45 & 136 \end{bmatrix} \end{array}\!\!\begin{array}{l} \textbf{Brossard} \\ \textbf{Laval} \\ \textbf{Candiac} \end{array}$

i) 492 fenêtres à Brossard

ii) 45 portes extérieures à Candiac

iii) 213 portes intérieures à Laval

b) $88 + 71 + 45 = 204$, d'où 204 portes extérieures

c) $C = \begin{array}{c} \begin{matrix} \textbf{Fenêtres} & \textbf{Portes extérieures} & \textbf{Portes intérieures} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 492 & 88 & 267 \\ 402 & 71 & 213 \\ 248 & 45 & 136 \end{bmatrix} \end{array}\!\!\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} \$ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 815 \\ 675 \\ 95 \end{bmatrix} \end{array}\!\!\begin{array}{l} \textbf{Fenêtres} \\ \textbf{Portes extérieures} \\ \textbf{Portes intérieures} \end{array}$

$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} \$ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 485\,745 \\ 395\,790 \\ 245\,415 \end{bmatrix} \end{array}\!\!\begin{array}{l} \textbf{Brossard} \\ \textbf{Laval} \\ \textbf{Candiac} \end{array}$

19. a) $N = \begin{matrix} \\ \text{Portugal} \\ \text{France} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \mathbf{P} & \mathbf{M} & \mathbf{G} & \mathbf{TG} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 115 & 125 & 180 & 200 \\ 200 & 215 & 185 & 250 \end{bmatrix} \end{matrix}$

b) $C = \begin{matrix} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{G} \\ \mathbf{TG} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \$ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix} \end{matrix}$, $V = \begin{matrix} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{G} \\ \mathbf{TG} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \$ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 44 \\ 52 \\ 60 \\ 72 \end{bmatrix} \end{matrix}$

c) $NC = \begin{bmatrix} 115 & 125 & 180 & 200 \\ 200 & 215 & 185 & 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix}$

$= \begin{matrix} \\ \text{Portugal} \\ \text{France} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \$ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 9190 \\ 12\,270 \end{bmatrix} \end{matrix}$

Le propriétaire a déboursé 9190 $ pour les chandails de l'équipe portugaise et 12 270 $ pour les chandails de l'équipe française.

d) Vérifions si $V = kC$.

$\begin{bmatrix} 44 \\ 52 \\ 60 \\ 72 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix}$

$44 = k(11)$, donc $k = 4$
$52 = k(13)$, donc $k = 4$
$60 = k(15)$, donc $k = 4$
$72 = k(18)$, donc $k = 4$
Ainsi, $V = 4C$, d'où le propriétaire vend les chandails de toutes les tailles quatre fois le prix qu'il les a payés.

e) $A = N - R$

$= \begin{bmatrix} 115 & 125 & 180 & 200 \\ 200 & 215 & 185 & 250 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 85 & 60 & 81 & 102 \\ 18 & 32 & 22 & 48 \end{bmatrix}$

d'où $A = \begin{matrix} \\ \text{Portugal} \\ \text{France} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \mathbf{P} & \mathbf{M} & \mathbf{G} & \mathbf{TG} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 30 & 65 & 99 & 98 \\ 182 & 183 & 163 & 202 \end{bmatrix} \end{matrix}$

f) Déterminons d'abord le montant des ventes de chandails de l'équipe portugaise et de chandails de l'équipe française.

$AV = \begin{bmatrix} 30 & 65 & 99 & 98 \\ 182 & 183 & 163 & 202 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 44 \\ 52 \\ 60 \\ 72 \end{bmatrix}$

$= \begin{matrix} \\ \text{Portugal} \\ \text{France} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \$ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 17\,696 \\ 41\,848 \end{bmatrix} \end{matrix}$

$P = AV - NC = \begin{bmatrix} 17\,696 \\ 41\,848 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9190 \\ 12\,270 \end{bmatrix}$

donc $P = \begin{matrix} \\ \text{Portugal} \\ \text{France} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \$ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 8506 \\ 29\,578 \end{bmatrix} \end{matrix}$

d'où un profit de 8506 $ pour les chandails de l'équipe portugaise et de 29 578 $ pour les chandails de l'équipe française.

g) Profit total = 8506 + 29 578

d'où le profit total est de 38 084 $.

Exercices de compréhension 1.4

1. $\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ -8 \end{bmatrix}}_{B}$

2. a) $\begin{matrix} \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \\ \mathbf{V}_4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 & \mathbf{V}_3 & \mathbf{V}_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = C$

b) $c_{43} = 1$, ce qui signifie qu'il y a un seul trajet possible menant de V_4 à V_3 en trois étapes, soit :
$V_4 \to V_2 \to V_1 \to V_3$.
$c_{34} = 4$, ce qui signifie qu'il y a quatre trajets possibles menant de V_3 à V_4 en trois étapes, soit :
$V_3 \to V_1 \to V_2 \to V_4$, $V_3 \to V_1 \to V_3 \to V_4$,
$V_3 \to V_2 \to V_3 \to V_4$ et $V_3 \to V_4 \to V_2 \to V_4$.

c) Cela signifie qu'on peut se rendre de n'importe quelle ville V_i à n'importe quelle ville V_j, $\forall$ i et j, en trois étapes.

3. $P_{10} = M^{10} P_0$ (car $P_n = M^n P_0$)

with(LinearAlgebra):

$M := \begin{bmatrix} .96 & .01 \\ .04 & .99 \end{bmatrix}$:

$B := M^{10}$;

$\begin{bmatrix} ,6790 & ,0802 \\ ,3210 & ,9197 \end{bmatrix}$

$P0 := \begin{bmatrix} 15000 \\ 10200 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} 15000 \\ 10200 \end{bmatrix}$

Multiply(B, P0);

$\begin{bmatrix} 11003{,}4199 \\ 14196{,}5801 \end{bmatrix}$

Ainsi $\begin{bmatrix} n_{10} \\ s_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11\,003{,}41\ldots \\ 14\,196{,}58\ldots \end{bmatrix}$

D'où, dans 10 ans,
la population de la région nord sera d'environ 11 003 habitants, et la population de la région sud sera d'environ 14 197 habitants.

4. a) F, la matrice A n'est pas carrée.

b) V, la matrice B est carrée ; $b_{ij} \in [0, 1]$, $\forall\, i$ et j ;
la somme des éléments de chaque colonne est égale à 1
$\left(\sum_{i=1}^{3} b_{ij} = 1 \text{ pour } j = 1, 2 \text{ et } 3\right)$.

c) F, la somme des éléments de la deuxième colonne n'égale pas 1.

5. a) $P_1 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}26 \\ 0{,}52 \\ 0{,}22 \end{bmatrix}$

b) $P_2 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}26 \\ 0{,}52 \\ 0{,}22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}148 \\ 0{,}492 \\ 0{,}360 \end{bmatrix}$

Exercices 1.4 (page 50)

1. a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix}$

2. a) $PM = \begin{bmatrix} d & 5 \\ c & 4 \\ b & 3 \\ a & 2 \end{bmatrix}$

Le produit de P par M a pour effet de permuter
- les lignes 1 et 4 de M ;
- les lignes 2 et 3 de M.

b) $NP = \begin{bmatrix} h & g & f & e \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

Le produit de N par P a pour effet de permuter
- les colonnes 1 et 4 de N ;
- les colonnes 2 et 3 de N.

3. $PM = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix}$

$P^2M = P(PM) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

$P^3M = P(P^2M) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

d'où $k = 3$

4. a)

	P	**Q**	**R**	**S**
P	1	1	0	0
Q	1	0	2	1
R	0	2	0	3
S	0	1	3	0

$= A$

b)



5. a)

À partir de \ **Vers**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**
P	0	1	1	0	0
Q	1	0	1	0	0
R	0	0	0	0	1
S	1	0	1	0	0
T	0	0	1	1	0

$= A$

b)

	P	**Q**	**R**	**S**	**T**
P	1	0	1	0	1
Q	0	1	1	0	1
R	0	0	1	1	0
S	0	1	1	0	1
T	1	0	1	0	1

$= B$, où $B = A^2$

i) $b_{13} = 1$, ce qui signifie qu'il y a un trajet menant de Ⓟ à Ⓡ en deux étapes : Ⓟ → Ⓠ → Ⓡ.

ii) $b_{54} = 0$, ce qui signifie qu'il n'y a aucun trajet menant de Ⓣ à Ⓢ en deux étapes.

c)

	P	**Q**	**R**	**S**	**T**
P	0	1	2	1	1
Q	1	0	2	1	1
R	1	0	1	0	1
S	1	0	2	1	1
T	0	1	2	1	1

$= C$, où $C = A^3$

i) $c_{23} = 2$, ce qui signifie qu'il y a deux trajets possibles menant de Ⓠ à Ⓡ en trois étapes :
Ⓠ → Ⓡ → Ⓣ → Ⓡ et Ⓠ → Ⓟ → Ⓠ → Ⓡ.

ii) $c_{31} = 1$, l'interprétation est laissée à l'étudiant.

iii) $c_{42} = 0$, l'interprétation est laissée à l'étudiant.

d) *with(LinearAlgebra)* :

$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$:

5. d) (*suite*)

A^5 ;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A^6 ;

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

d'où $k = 6$.
Cela signifie que l'on peut aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle ville en six étapes.

6. a) $T = \begin{matrix} \\ \textbf{Travail} \\ \textbf{Chômage} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \textbf{Travail} & \textbf{Chômage} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0{,}93 & 0{,}12 \\ 0{,}07 & 0{,}88 \end{bmatrix} \end{matrix}$

b) i) $\begin{bmatrix} 0{,}93 & 0{,}12 \\ 0{,}07 & 0{,}88 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 32\,500 \\ 7500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31\,125 \\ 8875 \end{bmatrix}$

En 2019, 31 125 personnes seront au travail et 8 875 personnes seront au chômage.

ii) $\begin{bmatrix} 0{,}93 & 0{,}12 \\ 0{,}07 & 0{,}88 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 31\,125 \\ 8875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\,011{,}25 \\ 9988{,}75 \end{bmatrix}$

En 2020, environ 30 011 personnes seront au travail et environ 9 989 personnes seront au chômage.

c) Il faut déterminer en quelle année au moins 30 % de 40 000 personnes, c'est-à-dire 12 000 personnes, seront au chômage.

En 2021, $\begin{bmatrix} 0{,}93 & 0{,}12 \\ 0{,}07 & 0{,}88 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30\,011{,}25 \\ 9988{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29\,109{,}1125 \\ 10\,890{,}8875 \end{bmatrix}$

En 2022, $\begin{bmatrix} 0{,}93 & 0{,}12 \\ 0{,}07 & 0{,}88 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 29\,109{,}1125 \\ 10\,890{,}8875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28\,378{,}38\ldots \\ 11\,621{,}61\ldots \end{bmatrix}$

En 2023, $\begin{bmatrix} 0{,}93 & 0{,}12 \\ 0{,}07 & 0{,}88 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 28\,378{,}38\ldots \\ 11\,621{,}61\ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27\,786{,}48\ldots \\ 12\,213{,}51\ldots \end{bmatrix}$

D'où à partir de 2023

7. a) $T = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix}$ (car la somme des éléments de chaque colonne est égale à 1)

b) i) $P_1 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}31 \\ 0{,}27 \end{bmatrix}$

ii) $P_2 = \begin{bmatrix} 0{,}396 \\ 0{,}381 \\ 0{,}223 \end{bmatrix}$

8. a) $P_1 = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}75 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}725 \\ 0{,}275 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textbf{H} \\ \textbf{F} \end{matrix}$

Après une période, 72,5 % des élus seront des hommes, et 27,5 % seront des femmes.

b) i) $P_2 = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}725 \\ 0{,}275 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7075 \\ 0{,}2925 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textbf{H} \\ \textbf{F} \end{matrix}$

ii) $P_2 = T^2P_0$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}83 & 0{,}34 \\ 0{,}17 & 0{,}66 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}75 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textbf{H} \\ \textbf{F} \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}7075 \\ 0{,}2925 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textbf{H} \\ \textbf{F} \end{matrix}$$

c) Après deux périodes, 70,75 % des élus seront des hommes, et 29,25 seront % des femmes.

d) i) $\begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 0{,}9x + 0{,}2y = x \\ 0{,}1x + 0{,}8y = y \end{cases}$, donc $\begin{cases} -0{,}1x + 0{,}2y = 0 & (1) \\ 0{,}1x - 0{,}2y = 0 & (2) \end{cases}$

En remplaçant y par $(1 - x)$ (car $x + y = 1$) dans (1), nous obtenons

$-0{,}1x + 0{,}2(1 - x) = 0$

$-0{,}3x = -0{,}2$, donc $x = \frac{2}{3}$

ainsi $y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

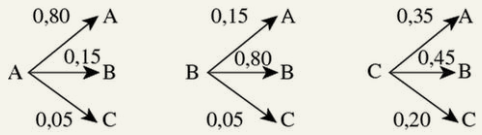
d'où P $= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, c'est-à-dire $P = \begin{bmatrix} 0{,}\overline{6} \\ 0{,}\overline{3} \end{bmatrix}$

ii) À long terme, $\frac{2}{3}$ des élus seront des hommes, et $\frac{1}{3}$ seront des femmes.

e) $S = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, c'est-à-dire $S = \begin{bmatrix} 0{,}\overline{6} & 0{,}\overline{6} \\ 0{,}\overline{3} & 0{,}\overline{3} \end{bmatrix}$

9. Soit C, représentant les ménages qui n'ont pas de contrat de déneigement.

a)



b) $T = \begin{matrix} \\ \textbf{A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \textbf{A} & \textbf{B} & \textbf{C} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0{,}80 & 0{,}15 & 0{,}35 \\ 0{,}15 & 0{,}80 & 0{,}45 \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}20 \end{bmatrix} \end{matrix}$

c) i) $P_1 = \begin{bmatrix} 0{,}80 & 0{,}15 & 0{,}35 \\ 0{,}15 & 0{,}80 & 0{,}45 \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}40 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4275 \\ 0{,}4850 \\ 0{,}0875 \end{bmatrix}$

d'où 42,75 % font affaire avec A, et 48,5 % avec B.

9. c) (*suite*)

ii) $P_2 = \begin{bmatrix} 0{,}445\ 375 \\ 0{,}491\ 500 \\ 0{,}063\ 125 \end{bmatrix}$

d'où environ 44,54 % font affaire avec A et 49,15 % font affaire avec B.

d) $P_4 = \begin{bmatrix} 0{,}455\ 77... \\ 0{,}485\ 30... \\ 0{,}058\ 92... \end{bmatrix}$

d'où environ 5,89 %

Exercices récapitulatifs (page 53)

1. c) Le nombre total d'articles produits par la deuxième équipe de travailleurs, c'est-à-dire 40 articles.

3. a) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -3 & 9 & -5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 340 & -640 \\ 140 & -80 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 12 & 6 & 48 & 114 \\ 7 & -9 & 3 & 4 \\ 2 & 16 & 38 & 94 \end{bmatrix}$ d) Non définie

e) $\begin{bmatrix} 30 & 7 \\ 2 & 23 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} -19 & -16 \\ 14 & 13 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

4. b) Non définie d) 4×3

f) Non définie h) Non définie

j) 4×5 l) 1×4

n) Non définie

5. a) $X = \begin{bmatrix} \frac{-5}{3} & \frac{20}{3} \\ 4 & \frac{-11}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix}$

6. a) $BA = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$ c) $BAB = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{bmatrix}$

8. $AB = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 28 & 14 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}$

9. a) $k = 2$ c) $k = 3$

13. d) $A = 357{,}51$ \$

14. c) $P = 8{,}91$ \$

15. d) $P = \begin{bmatrix} 8550 \\ 7400 \\ 4760 \end{bmatrix}$ \$ **Succ. 1** **Succ. 2** **Succ. 3** et $P_t = 20\ 710$ \$

18. a) i)

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = A$$

b) i)

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = B$$

19. b)

$$\begin{array}{c} \\ \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = B$$

i) $b_{11} = 1$, ce qui signifie qu'il y a un trajet menant de ① à ① en deux étapes : trajet ① → ⑤ → ①.

ii) $b_{54} = 0$, ce qui signifie qu'il n'y a aucun trajet menant de ⑤ à ④ en deux étapes.

20. b) $T = \begin{array}{c} \\ \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}75 & 0{,}15 \\ 0{,}25 & 0{,}85 \end{bmatrix} \end{array}$ et $P_0 = \begin{array}{c} \\ \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \textbf{Pourcentage} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}60 \\ 0{,}40 \end{bmatrix} \end{array}$

e) Population de X : 10 725 habitants
Population de Y : 17 875 habitants

Problèmes de synthèse (page 57)

1. a) $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) i) $k \in \{4, 8, 12, \ldots, 4n, \ldots\}$

iii) $k \in \{2, 6, 10, \ldots, 2 + 4n, \ldots\}$

3. a) $x = 7$ et $y = 3$

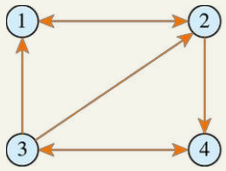
5. a) $x = -2$ et $y = 10$

b) $x = \frac{1}{3}$ et $y = \frac{10}{33}$ ou $x = -4$ et $y = \frac{-1}{11}$

7. b) $\begin{bmatrix} e^{ax} & \ln bx \\ ae^{ax} & \dfrac{1}{x} \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} \cos x & \sin x + C \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$

8. a) i) $A^n = A$ b) i) $AB = O$

12. a)



b) i) $\begin{array}{c} \\ ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ① & ② & ③ & ④ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = B$

14. a) A : 37 %, B : 14 %, C : 17 %, D : 32 %

15. b) $T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{I} & \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}70 & 0{,}60 & 0{,}60 \\ 0{,}10 & 0{,}30 & 0{,}20 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}20 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{array}$

17. a) i) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ii) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

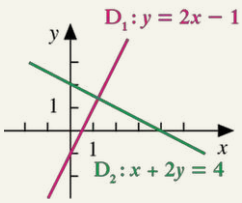
CHAPITRE 2

Exercices préliminaires (page 63)

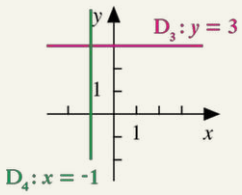
1. a) $y = \dfrac{8}{17}$ b) Aucune solution c) $b = 0$

d) L'équation est vérifiée pour toute valeur de $z \in \mathbb{R}$.

2. a)



b)



3. a) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ -5x + 4y = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + 2y + 4z = 5 \\ 5x + 0y - 2z = -6 \end{cases}$

4. a) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

5. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -9 & 0 & -30 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

Exercice de compréhension 2.1

1. a) $S_1 \begin{cases} x + 2y - z = 3 & E_3 \to E_1 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ -4x + 2y - 3z = -2 & E_1 \to E_3 \end{cases}$

b) $S_2 \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -7y + 5z = -8 & E_2 - 3E_1 \to E_2 \\ 10y - 7z = 10 & E_3 + 4E_1 \to E_3 \end{cases}$

c) $S_3 \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -7y + 5z = -8 \\ z = -10 & 7E_3 + 10E_2 \to E_3 \end{cases}$

d) De E_3, nous obtenons $z = -10$.

En remplaçant z par -10 dans E_2, nous obtenons $y = -6$.

En remplaçant z par -10 et y par -6 dans E_1, nous obtenons $x = 5$.

D'où E.-S. $= \{(5, -6, -10)\}$ (car $S_3 \sim S$)

Exercices 2.1 (page 70)

1. a), c) et f)

2. a) i) Non, car en remplaçant les variables de l'équation ① par les valeurs données, les deux membres de cette équation ne sont pas égaux.

ii) Oui

iii) Oui

iv) Non, car en remplaçant les variables de l'équation ② par les valeurs données, les deux membres de cette équation ne sont pas égaux.

b) Le système est compatible, car il a au moins une solution.

3. Ce système est compatible, car il a au moins une solution, c'est-à-dire (0, 0, 0).

4. a) $3\left(\frac{5t-6s+2}{3}\right)-5t+6s=2$, $\forall\ s$ et $t\in\mathbb{R}$,
d'où A est un E.-S.

b) $3\left(\frac{2-6s+5t}{3}\right)-5s+6t\neq 2$, pour $s\neq t$,
d'où B n'est pas un E.-S.

c) $3s-5t+6\left(\frac{2+5t-3s}{6}\right)=2$, $\forall\ s$ et $t\in\mathbb{R}$,
d'où C est un E.-S.

d) D n'est pas un E.-S., car il ne contient pas toutes les solutions ; il contient uniquement les solutions où $x=y$.

5. a) i) E.-S. $=\{(8-4s+2t, s, t)\,|\,s$ et $t\in\mathbb{R}\}$

ii) E.-S. $=\left\{\left(s, t, \frac{s+4t-8}{2}\right)\,\middle|\,s \text{ et } t\in\mathbb{R}\right\}$

iii) E.-S. $=\left\{\left(s, \frac{8-s+2t}{4}, t\right)\,\middle|\,s \text{ et } t\in\mathbb{R}\right\}$

b) i) (8, 1, 2) ii) $\left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$ iii) $\left(1, \frac{11}{4}, 2\right)$

6. a) $\left\{\left(s, \frac{6-2s}{3}\right)\,\middle|\,s\in\mathbb{R}\right\}$ ou $\left\{\left(\frac{6-3t}{2}, t\right)\,\middle|\,t\in\mathbb{R}\right\}$

b) $\left\{\left(s, t, \frac{7-2s+3t}{4}\right)\,\middle|\,s \text{ et } t\in\mathbb{R}\right\}$ ou

$\left\{\left(s, \frac{2s+4r-7}{3}, r\right)\,\middle|\,s \text{ et } r\in\mathbb{R}\right\}$ ou

$\left\{\left(\frac{7+3t-4r}{2}, t, r\right)\,\middle|\,t \text{ et } r\in\mathbb{R}\right\}$

7. a) De l'équation ①, nous obtenons $x=-5-3y$. En remplaçant x par $(-5-3y)$ dans l'équation ②, nous obtenons $-3(-5-3y)+2y=-18$; donc, $y=-3$.

En remplaçant y par -3 dans $x=-5-3y$, nous obtenons $x=4$.

D'où E.-S. $=\{(4, -3)\}$.

b) De l'équation ②, nous obtenons $y=3x+7$. En remplaçant y par $(3x+7)$ dans l'équation ①, nous obtenons $12x-4(3x+7)=-28$; donc, $0x=0$. Il y a une infinité de solutions. En posant $x=s$, où $s\in\mathbb{R}$, nous obtenons $y=3s+7$.

D'où E.-S. $=\{(s, 3s+7)\,|\,s\in\mathbb{R}\}$.

c) De l'équation ①, nous obtenons $x=2y-z-4$. En remplaçant x par $(2y-z-4)$ dans l'équation ②, nous obtenons $7y-2z=15$. ④

En remplaçant x par $(2y-z-4)$ dans l'équation ③, nous obtenons $21y-6z=5$. ⑤

De l'équation ⑤, nous obtenons $y=\frac{5+6z}{21}$.

En remplaçant y par $\frac{5+6z}{21}$ dans l'équation ④,

nous obtenons $7\left(\frac{5+6z}{21}\right)-2z=15$, donc, $0z=\frac{40}{3}$.

Il n'y a aucune solution.

D'où E.-S. $=\emptyset$.

8. a) En effectuant $-3E_1+E_2$, nous obtenons $-8y=-40$; donc, $y=5$.

En remplaçant y par 5 dans l'équation E_1, nous obtenons $x=-4$.
D'où E.-S. $=\{(-4, 5)\}$.

b) En effectuant $5E_1+3E_2$, nous obtenons $30y+45=30y+40$; donc, $0y=-5$.

Il n'y a aucune solution.

D'où, E.-S. $=\emptyset$.

c) En effectuant E_1+5E_2 et E_3+3E_2, nous obtenons

$$\begin{cases}13x+21z=21 & E_4\\ 13x+21z=21 & E_5\end{cases}$$

En effectuant, E_4-E_5, nous obtenons

$0x+0z=0$.

Il y a donc une infinité de solutions.

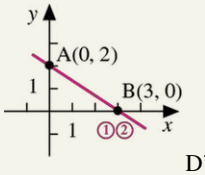
En posant $x=s$, où $s\in\mathbb{R}$, dans l'équation E_4, nous obtenons $z=\frac{21-13s}{21}$.

En remplaçant ces valeurs dans l'équation

$2x-y+5z=4$, nous obtenons $y=\frac{21-23s}{21}$.

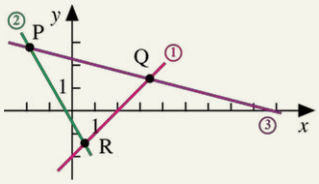
D'où E.-S. $=\left\{\left(s, \frac{21-23s}{21}, \frac{21-13s}{21}\right)\,\middle|\,s\in\mathbb{R}\right\}$.

9. a)



Les deux droites sont parallèles confondues. Ainsi, il y a une infinité de points d'intersection, par exemple, A(0, 2) et B(3, 0).
D'où le système est compatible.

b)

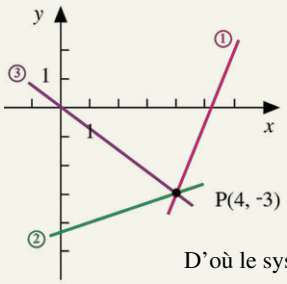


En solutionnant deux à deux les équations du système, nous trouvons les points

$P\left(\frac{-11}{6}, \frac{65}{24}\right)$, $Q\left(\frac{17}{5}, \frac{7}{5}\right)$ et $R\left(\frac{6}{11}, \frac{-16}{11}\right)$.

Puisque les trois droites n'ont aucun point d'intersection commun, le système n'a aucune solution.
D'où le système est incompatible.

c)



P(4, -3) est le point d'intersection des trois droites.

D'où le système est compatible.

10. a) $k = 2$ b) $k = -2$ c) $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
d) $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e) $k = -2$

11. Soit x, la somme investie à 3 % d'intérêt par année, et
y, la somme investie à 3,4 % d'intérêt par année.
Le système d'équations linéaires correspondant est alors

$$\begin{cases} x + y = 25\,000 & (1) \\ 0{,}03x + 0{,}034y = 819 & (2) \end{cases}$$

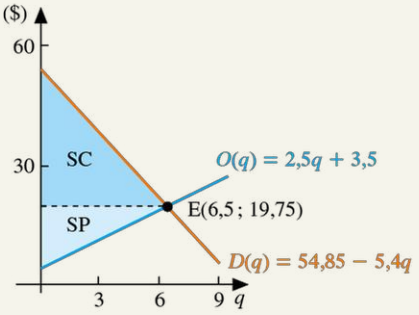
De (1), $y = 25\,000 - x$.

En remplaçant y par $(25\,000 - x)$ dans (2), nous obtenons $0{,}03x + 0{,}034(25\,000 - x) = 819$, donc $x = 7750$, ainsi $y = 25\,000 - 7750$, donc $y = 17\,250$.

D'où la somme investie à 3 % est 7750 $, et celle à 3,4 % est 17 250 $.

12. a)
$$O(q) = D(q)$$
$$2{,}5q + 3{,}5 = 54{,}85 - 5{,}4q$$
$$7{,}9q = 51{,}35$$
$$q = 6{,}5$$
$$O(6{,}5) = D(6{,}5) = 19{,}75$$
d'où E(6,5 ; 19,75)

b) ($)



c) i) $\text{SC} = \dfrac{(54{,}85 - 19{,}75)(6{,}5)}{2} = 114{,}075$,
d'où SC ≈ 114,08 $

ii) $\text{SP} = \dfrac{(19{,}75 - 3{,}5)(6{,}5)}{2} = 52{,}8125$,
d'où SP ≈ 52,81 $

iii) ST = SC + SP = 166,8875,
d'où ST ≈ 166,89 $

Exercices de compréhension 2.2

1. a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$; $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{array}\right]$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$; $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right]$

2. $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right]$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -5 & 20 \\ 0 & 9 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 3L_3 - L_1 \to L_3 \\ 3L_4 - 2L_1 \to L_4 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 26 \\ 0 & 0 & -4 & -10 & 28 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_3 - 3L_2 \to L_3 \\ L_4 - 9L_2 \to L_4 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -24 \end{array}\right] \quad L_4 - 2L_3 \to L_4$$

D'où E.-S. = {(1, -1, 3, -4)}.

3. a) Par le théorème 2.1, nous savons que ce système possède une infinité de solutions.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & -6 & 0 \\ -1 & -1 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 + L_1 \to L_3 \end{array}$$

De L_3, nous obtenons $-4z = 0$; donc $z = 0$.

De L_2, nous obtenons $2y = 0$; donc $y = 0$.

De L_1, nous obtenons $x + 1(0) + 1(0) - 3w = 0$, c'est-à-dire $x - 3w = 0$.

En posant $w = s$, où $s \in \mathbb{R}$, nous obtenons $x = 3s$.

D'où E.-S. = $\{(3s, 0, 0, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$.

b) i) (3, 0, 0, 1)

ii) $\left(1, 0, 0, \dfrac{1}{3}\right)$

Exercices 2.2 (page 87)

1. a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}; \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 6 & 9 \end{array}\right]$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}; \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right]$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}; \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -6 & 7 \end{array}\right]$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$

2. a) $\begin{cases} 3x + 2y - z + 4w = 5 \\ 6y + 3z + 2w = 2 \\ 5z + w = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{cases}$

3. a) Oui ; pivots : 8 et 1 b) Oui ; pivot : 3
c) Non d) Oui ; pivots : 1, 1 et 1

4. a) $\left\{\left(3, 2, \frac{5}{2}\right)\right\}$ b) $\{(1, -2, 3)\}$ c) $\emptyset$
d) $\{(3 - s, 6 - s, 4s - 2, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$
e) $\left\{\left(2 - 5s - 2t, t, -1, \frac{3 - s}{3}, s\right) \,\middle|\, s \text{ et } t \in \mathbb{R}\right\}$
f) $\{(-s, s, 0, 0, 1) \mid s \in \mathbb{R}\}$
g) $\{4 - 2s - 4t, s, -2, t, 2 - 3r, r \mid s, t \text{ et } r \in \mathbb{R}\}$

5. a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 & 35 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 7 & 8 & 29 \end{array}\right]$ $L_2 - 2L_1 \to L_2$, $L_3 + 3L_1 \to L_3$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 8 & 29 \end{array}\right]$ $(1/3)L_2 \to L_2$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & 15 \end{array}\right]$ $L_3 - 7L_2 \to L_3$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ $(1/15)L_3 \to L_3$

De $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$,

nous obtenons $a = -1$ et $b = 1$.

b) $S \sim S_1$, où $S_1 \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x + 5y - z = 2 \\ -3x + 4y + 5z = 35 \end{cases}$

$S \sim S_2$, où $S_2 \begin{cases} x + y + z = -2 & E_1 \\ y - z = 2 & E_2 \\ z = 1 & E_3 \end{cases}$ (voir a))

De E_3, $z = 1$.
De E_2, $y - 1 = 2$, donc $y = 3$.
De E_1, $x + 3 + 1 = -2$, donc $x = -6$.
D'où E.-S. $= \{(-6, 3, 1)\}$.

6. a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & -6 \end{array}\right]$ $L_2 - L_1 \to L_2$, $L_3 - L_1 \to L_3$

$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $L_3 + 2L_2 \to L_3$

$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{array}\right]$

d'où $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$ et $d = 0$

b) $S \sim S_1$, où $S_1 \begin{cases} x + y + 2z + w = 5 \\ y + 2z + w = 3 \end{cases}$

En posant $w = s$ et $z = t$, où s et $t \in \mathbb{R}$, nous obtenons
de E_2, $y + 2t + s = 3$, donc $y = 3 - 2t - s$,
de E_1, $x + (3 - 2t - s) + 2t + s = 5$, donc $x = 2$.
D'où E.-S. $= \{(2, 3 - 2t - s, t, s) \mid s \text{ et } t \in \mathbb{R}\}$.

c) z et w sont des variables libres ;
x et y sont des variables liées.

d) i) $(2, 3, 0, 0)$ ii) $(2, 2, 1, -1)$ iii) $\left(2, -3, \frac{1}{2}, 5\right)$

7. a) $\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 3 \\ 0 & -6 & -30 \end{array}\right]$ $3L_2 - L_1 \to L_2$

D'où E.-S. $= \{(-2, 5)\}$.

b) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$ $L_2 - 2L_1 \to L_2$

D'où E.-S. $= \emptyset$.

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right]$ $L_2 - L_1 \to L_2$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right]$ $L_3 + L_2 \to L_3$

D'où E.-S. $= \{(2, 3, 5)\}$.

7. (*suite*)

d) $\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -3 & 6 \\ 12 & 13 & 0 & 20 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & -17 & -12 & -3 \\ 0 & -17 & -12 & -10 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} 2L_2 - 3L_1 \to L_2 \\ L_3 - 6L_1 \to L_3 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & -17 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right]$ $L_3 - L_2 \to L_3$

D'où E.-S. $= \emptyset$.

e) $\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 4 & -6 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & -6 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & -12 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} 2L_2 + L_1 \to L_2 \\ L_3 - L_1 \to L_3 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $6L_3 + L_2 \to L_3$

En posant $x_3 = s$, où $s \in \mathbb{R}$, nous obtenons
E.-S. $= \{(4 - s, 2s - 2, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$.

f) E.-S. $= \{(-12, -4, 4)\}$

g) E.-S. $= \left\{\left(\dfrac{-45s - 12}{28}, \dfrac{13s - 4}{14}, s\right) \middle| \, s \in \mathbb{R}\right\}$

h) E.-S. $= \emptyset$

8. a) E.-S. $= \{(0, 0, 0)\}$

b) E.-S. $= \{(-2s, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$

c) E.-S. $= \{(s, s, 0) \mid s \in \mathbb{R}\}$

d) E.-S. $= \{(-s, 0, 0, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$

e) E.-S. $= \{(-s, -s, -s, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$

f) E.-S. $= \{(t, s - t, t, s) \mid s \text{ et } t \in \mathbb{R}\}$

9. a) $\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 12 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 12 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} L_1 \to L_2 \\ L_2 \to L_1 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & -14 & 0 \\ 0 & -10 & -13 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} L_2 - 3L_1 \to L_2 \\ L_3 - 5L_1 \to L_3 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ $L_3 - L_2 \to L_3$

D'où E.-S. $= \{(0, 0, 0)\}$; indépendant.

b) $\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 11 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 11 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} L_1 \to L_2 \\ L_2 \to L_1 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & -14 & 0 \\ 0 & -10 & -14 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} L_2 - 3L_1 \to L_2 \\ L_3 - 5L_1 \to L_3 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $L_3 - L_2 \to L_3$

En posant $z = s$, où $s \in \mathbb{R}$, nous obtenons

E.-S. $= \left\{\left(\dfrac{-11s}{5}, \dfrac{-7s}{5}, s\right) \middle| \, s \in \mathbb{R}\right\}$; dépendant.

c) E.-S. $= \{(0, 0, 0)\}$; indépendant

d) E.-S. $= \left\{\left(\dfrac{-11s}{4}, \dfrac{8s}{3}, \dfrac{35s}{12}, s\right) \middle| \, s \in \mathbb{R}\right\}$; dépendant

e) E.-S. $= \{(0, 0, 0, 0, 0)\}$; indépendant

f) E.-S. $= \{(2t, 3s, s, 0, t) \mid s \text{ et } t \in \mathbb{R}\}$; dépendant

10. Soit x, le nombre de lots A,
y, le nombre de lots B, et
z, le nombre de lots C.

Le système d'équations linéaires correspondant est

$$\begin{cases} 5x + 2z = 760 & (1) \\ 2x + 4y + z = 720 & (2) \\ x + 4y + 5z = 920 & (3) \end{cases}$$

En permutant les équations (1) et (3), nous obtenons

$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 5 & 920 \\ 2 & 4 & 1 & 720 \\ 5 & 0 & 2 & 760 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 5 & 920 \\ 0 & -4 & -9 & -1120 \\ 0 & -20 & -23 & -3840 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - 5L_1 \to L_3 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 5 & 920 \\ 0 & -4 & -9 & -1120 \\ 0 & 0 & 22 & 1760 \end{array}\right]$ $L_3 - 5L_2 \to L_3$

E.-S. $= \{(120, 100, 80)\}$

D'où 120 lots de A, 100 lots de B et 80 lots de C.

11. Soit x, le nombre de boîtes de pêches,
y, le nombre de boîtes de cerises, et
z, le nombre de boîtes d'ananas.

Le système d'équations linéaires correspondant est

$$\begin{cases} x + y + z = 70 \\ 2{,}89x + 5{,}49y + 1{,}69z = 195{,}50 \\ -x + z = 16 \quad (\text{car } z = x + 16) \end{cases}$$

Ainsi,

$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 289 & 549 & 169 & 19\,550 \\ -1 & 0 & 1 & 16 \end{array}\right]$ $100E_2 \to E_2$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 260 & -120 & -680 \\ 0 & 1 & 2 & 86 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} L_2 - 289L_1 \to L_2 \\ L_3 + L_1 \to L_3 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 260 & -120 & -680 \\ 0 & 0 & 640 & 23\,040 \end{array}\right]$ $260L_3 - L_2 \to L_3$

De L_3, nous obtenons $z = 36$.

Par substitution inverse, $y = 14$ et $x = 20$.

D'où 20 boîtes de pêches, 14 boîtes de cerises et 36 boîtes d'ananas.

12. Soit x, le nombre d'ordinateurs à 600 $,
y, le nombre d'ordinateurs à 1500 $, et
z, le nombre d'ordinateurs à 3000 $.

Le système d'équations linéaires correspondant est

$$\begin{cases} x + y + z = 30 & (1) \\ 600x + 1500y + 3000z = 36\,000 & (2) \end{cases}$$

En divisant chaque terme de l'équation (2) par 300, nous obtenons

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 2 & 5 & 10 & 120 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 3 & 8 & 60 \end{array}\right] \quad L_2 - 2L_1 \to L_2$$

En posant $z = t$, où t est un entier et $t > 0$, nous obtenons

$y = 20 - \frac{8t}{3}$ et $x = 10 + \frac{5t}{3}$.

Puisque y et x sont des entiers positifs, t doit être un multiple de 3.

En posant $t = 3$, nous obtenons $z = 3$, $y = 12$ et $x = 15$.

En posant $t = 6$, nous obtenons $z = 6$, $y = 4$ et $x = 20$. (à rejeter, car $20 > 18$)

En posant $t = 9$, nous obtenons $z = 9$, $y = -4$. (à rejeter)

D'où 15 ordinateurs à 600 $, 12 ordinateurs à 1500 $ et 3 ordinateurs à 3000 $.

13. Dans les solutions suivantes, il faut attribuer à chacune des variables la plus petite valeur entière positive possible.

a) $x\mathrm{Fe_7S_8} + y\mathrm{O_2} \to z\mathrm{Fe_3O_4} + w\mathrm{SO_2}$

Nombre d'atomes	Système homogène correspondant
pour Fe : $7x = 3z$	$7x - 3z = 0$ (1)
pour S : $8x = w$	$8x - w = 0$ (2)
pour O : $2y = 4z + 2w$	$2y - 4z - 2w = 0$ (3)

Résolvons ce système.

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 7 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc:c} 7 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right] \quad 7L_2 - 8L_1 \to L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc:c} 7 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & -7 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 \to L_3 \\ L_3 \to L_2 \end{array}$$

En posant $w = s$, où $s \in \mathbb{R}$,

nous obtenons $z = \frac{7s}{24}$, $y = \frac{19s}{12}$ et $x = \frac{s}{8}$.

Ainsi, E.-S. $= \left\{\left(\frac{s}{8}, \frac{19s}{12}, \frac{7s}{24}, s\right) \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$

En posant $s = 24$, nous obtenons (3, 38, 7, 24).

D'où $3\mathrm{Fe_7S_8} + 38\mathrm{O_2} \to 7\mathrm{Fe_3O_4} + 24\mathrm{SO_2}$

b) $x\mathrm{CH_4} + y\mathrm{O_2} \to z\mathrm{CO_2} + w\mathrm{H_2O}$

Système homogène d'équations linéaires correspondant :

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 4x - 2w = 0 \\ 2y - 2z - w = 0 \end{cases}$$

E.-S. $= \left\{\left(\frac{s}{2}, s, \frac{s}{2}, s\right) \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$

En posant $s = 2$, nous obtenons (1, 2, 1, 2).

D'où $\mathrm{CH_4} + 2\mathrm{O_2} \to \mathrm{CO_2} + 2\mathrm{H_2O}$

c) $x\mathrm{Al} + y\mathrm{H_2SO_4} \to z\mathrm{Al_2(SO_4)_3} + w\mathrm{H_2}$

Système homogène d'équations linéaires correspondant :

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ 2y - 2w = 0 \\ y - 3z = 0 \\ 4y - 12z = 0 \end{cases}$$

E.-S. $= \left\{\left(\frac{2s}{3}, s, \frac{s}{3}, s\right) \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$

En posant $s = 3$, nous obtenons (2, 3, 1, 3).

D'où $2\mathrm{Al} + 3\mathrm{H_2SO_4} \to \mathrm{Al_2(SO_4)_3} + 3\mathrm{H_2}$

d) $x\mathrm{H_3PO_4} + y\mathrm{Ca} \to z\mathrm{Ca_3P_2O_8} + w\mathrm{H_2}$

Système homogène d'équations linéaires correspondant :

$$\begin{cases} 3x - 2w = 0 \\ x - 2z = 0 \\ 4x - 8z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

E.-S. $= \left\{\left(\frac{2s}{3}, s, \frac{s}{3}, s\right) \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$

En posant $s = 3$, nous obtenons (2, 3, 1, 3).

D'où $2\mathrm{H_3PO_4} + 3\mathrm{Ca} \to \mathrm{Ca_3P_2O_8} + 3\mathrm{H_2}$

14. Soit x, le nombre d'anges,
y, le nombre de guppys, et
z, le nombre de poissons rouges.

Le système d'équations linéaires correspondant est

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 10x + 3y + 0{,}5z = 100 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 10 & 3 & 0{,}5 & 100 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 19 & 5 & 0 & 100 \end{array}\right] \quad 2L_2 - L_1 \to L_2$$

En posant $x = s$, où $s \in \mathbb{R}$, nous obtenons

E.-S. $= \left\{\left(s, 20 - \frac{19s}{5}, 80 + \frac{14s}{5}\right) \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$.

a) Dans la situation présente, nous voulons au moins un poisson de chaque espèce, donc $s = 5$ est la seule solution possible, ainsi $x = 5$, $y = 1$ et $z = 94$.

D'où 5 anges, 1 guppy et 94 poissons rouges.

b) Dans la situation présente, $s = 0$ est la seule solution possible, ainsi $x = 0$, $y = 20$ et $z = 80$.

D'où 0 ange, 20 guppys et 80 poissons rouges.

15. Soit x, l'âge du père,
y, l'âge de l'aîné,
z, l'âge du cadet, et
w, l'âge du benjamin.

Nous avons alors $\begin{cases} x = 2(y + z + w) \\ x = 13(z - w) \\ y = 3(z - w) \\ \frac{1}{4}y = \frac{1}{3}z \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x - 2y - 2z - 2w = 0 \\ x - 13z + 13w = 0 \\ y - 3z + 3w = 0 \\ 3y - 4z = 0 \end{cases}$

En résolvant le système, nous obtenons

E.-S. $= \left\{ \left(\frac{52s}{5}, \frac{12s}{5}, \frac{9s}{5}, s \right) \middle| \, s \in \mathbb{R} \right\}$.

En posant $s = 5$, nous obtenons le résultat suivant :
le père a 52 ans et ses fils ont respectivement 12, 9 et 5 ans.

Exercice de compréhension 2.3

1. $\left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right]$ $\quad 2L_3 - 3L_1 \to L_3$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ $\quad \begin{matrix} L_3 \to L_2 \\ L_2 \to L_3 \end{matrix}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ $\quad \begin{matrix} L_1 - 3L_3 \to L_1 \\ L_2 + 5L_3 \to L_2 \end{matrix}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ $\quad L_1 + L_2 \to L_1$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ $\quad \begin{matrix} (1/2)L_1 \to L_1 \\ -L_2 \to L_2 \end{matrix}$

D'où $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Exercices 2.3 (page 97)

1. b) et c)

2. a) $\left[\begin{array}{cc:c} 4 & 2 & 3 \\ 7 & -3 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -26 & -1 \end{array}\right]$ $\quad 4L_2 - 7L_1 \to L_2$

$\sim \left[\begin{array}{cc:c} 52 & 0 & 38 \\ 0 & -26 & -1 \end{array}\right]$ $\quad 13L_1 + L_2 \to L_1$

$\sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & \frac{19}{26} \\ 0 & 1 & \frac{1}{26} \end{array}\right]$ $\quad \begin{matrix} (1/52)L_1 \to L_1 \\ (-1/26)L_2 \to L_2 \end{matrix}$

d'où E.-S. $= \left\{ \left(\frac{19}{26}, \frac{1}{26} \right) \right\}$

b) $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 8 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 3 \\ 0 & 3 & -8 & 3 \end{array}\right]$ $\quad \begin{matrix} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - 4L_1 \to L_3 \end{matrix}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\quad \begin{matrix} 3L_1 + L_2 \to L_1 \\ L_3 - L_2 \to L_3 \end{matrix}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-8}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\quad \begin{matrix} (1/3)L_1 \to L_1 \\ (1/3)L_2 \to L_2 \end{matrix}$

d'où E.-S. $= \left\{ \left(\frac{-4s}{3}, \frac{3 + 8s}{3}, s \right) \middle| \, s \in \mathbb{R} \right\}$

c) $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & -1 \end{array}\right]$ $\quad \begin{matrix} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - 3L_1 \to L_3 \end{matrix}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{array}\right]$ $\quad \begin{matrix} 4L_1 + L_2 \to L_1 \\ 2L_3 - 3L_2 \to L_3 \end{matrix}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 8 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & -8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{array}\right]$ $\quad \begin{matrix} 2L_1 - L_3 \to L_1 \\ 2L_2 + L_3 \to L_2 \end{matrix}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{15}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{4} \end{array}\right]$ $\quad \begin{matrix} (1/8)L_1 \to L_1 \\ (-1/8)L_2 \to L_2 \\ (1/4)L_3 \to L_3 \end{matrix}$

d'où E.-S. $= \left\{ \left(\frac{15}{8}, \frac{3}{8}, \frac{-5}{4} \right) \right\}$

2. (*suite*)

d) $\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & -1 & -7 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} (-1)L_1 \to L_1 \\ (1/5)L_2 \to L_2 \\ (-1/3)L_3 \to L_3 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} L_2 \to L_1 \\ L_3 \to L_2 \\ L_1 \to L_3 \end{array}$

d'où E.-S. $= \{(0, -4, 7)\}$

3. a) $\left[\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 11 & -33 \end{array}\right]$ $2L_2 - 3L_1 \to L_2$

$\sim \left[\begin{array}{cc:c} 22 & 0 & 22 \\ 0 & 11 & -33 \end{array}\right]$ $11L_1 + L_2 \to L_1$

$\sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} (1/22)L_1 \to L_1 \\ (1/11)L_2 \to L_2 \end{array}$

D'où E.-S. $= \{(1, -3)\}$

b) $\left[\begin{array}{cc:c} 6 & -9 & 15 \\ -8 & 12 & -20 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 6 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $6L_2 + 8L_1 \to L_2$

$\sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $(1/6)L_1 \to L_1$

Ce système admet une infinité de solutions.
En posant $y = s$, où $s \in \mathbb{R}$, nous obtenons

E.-S. $= \left\{\left(\frac{5 + 3s}{2}, s\right) \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$.

c) $\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 4 & 1 & 4 \\ -9 & 2 & -1 & -3 \\ -6 & 4 & -4 & -4 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 14 & 2 & 9 \\ 0 & 12 & -2 & 4 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} L_2 + 3L_1 \to L_2 \\ L_3 + 2L_1 \to L_3 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 21 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 14 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -52 & -52 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} 7L_1 - 2L_2 \to L_1 \\ 14L_3 - 12L_2 \to L_3 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 21 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 14 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ $(-1/52)L_3 \to L_3$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 21 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 14 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} L_1 - 3L_3 \to L_1 \\ L_2 - 2L_3 \to L_2 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} (1/21)L_1 \to L_1 \\ (1/14)L_2 \to L_2 \end{array}$

D'où E.-S. $= \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right)\right\}$

d) $\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & -5 & 13 & 17 \\ 0 & 5 & -13 & 10 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} L_2 - L_1 \to L_2 \\ 3L_3 - L_1 \to L_3 \\ 3L_4 - 2L_1 \to L_4 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 6 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 26 & 89 \\ 0 & 0 & -26 & -35 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} L_2 + 2L_1 \to L_1 \\ \\ 2L_3 + 5L_2 \to L_3 \\ 2L_4 - 5L_2 \to L_4 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 78 & 0 & 0 & -165 \\ 0 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 26 & 89 \\ 0 & 0 & 0 & 54 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} 13L_1 - 2L_3 \to L_1 \\ \\ \\ L_4 + L_3 \to L_4 \end{array}$

Puisque nous avons une ligne de la forme

$\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & 54 \end{array}\right]$

nous savons déjà que le système n'admet aucune solution.

Il est toutefois possible d'obtenir une matrice de Gauss-Jordan.

$\left[\begin{array}{ccc:c} 78 & 0 & 0 & -165 \\ 0 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 26 & 89 \\ 0 & 0 & 0 & 54 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{-55}{26} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{89}{26} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} (1/78)L_1 \to L_1 \\ (1/2)L_2 \to L_2 \\ (1/26)L_3 \to L_3 \\ (1/54)L_4 \to L_4 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} L_1 + (55/26)L_4 \to L_1 \\ L_2 - (11/2)L_4 \to L_2 \\ L_3 - (89/26)L_4 \to L_3 \end{array}$

D'où E.-S. $= \varnothing$

e) $\left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right]$ $2L_2 - L_1 \to L_2$

$\sim \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right]$ $L_1 + L_2 \to L_1$

$\sim \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{-5}{3} \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} (1/2)L_1 \to L_1 \\ (-1/3)L_2 \to L_2 \end{array}$

Ce système admet une infinité de solutions.
En posant $w = t$ et $z = s$, où s et $t \in \mathbb{R}$, nous obtenons

E.-S. $= \left\{\left(5 - s, \frac{3s - 2t - 5}{3}, s, t\right) \middle| s \text{ et } t \in \mathbb{R}\right\}$.

4. a) $\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right]$ $2L_2 - L_1 \to L_2$

$\sim \left[\begin{array}{cc:cc} 6 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right]$ $3L_1 - L_2 \to L_1$

$\sim \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$ $(1/6)L_1 \to L_1$

$(1/3)L_2 \to L_2$

D'où $A^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{cc:cc} -4 & 2 & 1 & 0 \\ 12 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:cc} -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$ $L_2 + 3L_1 \to L_2$

Il est impossible d'obtenir le matrice $I = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$ dans la partie gauche de la matrice augmentée, d'où B^{-1} n'existe pas.

c) $\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$ $L_2 + L_1 \to L_2$

$(1/3)L_3 \to L_3$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$ $L_1 - L_3 \to L_1$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$ $3L_1 - L_2 \to L_1$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$ $(1/3)L_1 \to L_1$

$(1/3)L_2 \to L_2$

D'où $C^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 11 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $L_2 - 2L_1 \to L_2$

$L_3 - 4L_1 \to L_3$

$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 11 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$ $L_3 - L_2 \to L_3$

Il est impossible d'obtenir $I_{3\times 3}$ dans la partie gauche de la matrice augmentée, d'où E^{-1} n'existe pas.

e) $F^{-1} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right]$

f) $G^{-1} = \left[\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{array}\right]$

5. a) $\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 & 1 \end{array}\right]$ $L_2 - L_1 \to L_2$

$\sim \left[\begin{array}{cc:cc} a-1 & 0 & a & -1 \\ 0 & a-1 & -1 & 1 \end{array}\right]$ $(a-1)L_1 - L_2 \to L_1$

$\sim \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & \frac{a}{a-1} & \frac{-1}{a-1} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \end{array}\right]$ $(1/(a-1))L_1 \to L_1$, si $a \neq 1$

$(1/(a-1))L_2 \to L_2$, si $a \neq 1$

d'où $A^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{a}{a-1} & \frac{-1}{a-1} \\ \frac{-1}{a-1} & \frac{1}{a-1} \end{array}\right]$, si $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) En remplaçant a par -2 dans A^{-1} trouvée en a), nous obtenons

$B^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{array}\right]$

6. Soit x, le montant investi à 6,5 %, et
y, le montant investi à 3,8 %.

$$\begin{cases} x + y = 25\,000 \\ 0{,}065x + 0{,}038y = 1171{,}40 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 25\,000 \\ 0{,}065 & 0{,}038 & 1171{,}40 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 25\,000 \\ 0 & -0{,}027 & -453{,}60 \end{array}\right] \quad L_2 - 0{,}065L_1 \to L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 25\,000 \\ 0 & 1 & 16\,800 \end{array}\right] \quad \left(-\tfrac{1}{0{,}027}\right)L_2 \to L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 8200 \\ 0 & 1 & 16\,800 \end{array}\right] \quad L_1 - L_2 \to L_1$$

Donc, $x = 8200$ et $y = 16\,800$.

D'où 8200 $ investis à 6,5 % et 16 800 $ investis à 3,8 %.

7. Soit le nombre cdu, où
u est le chiffre des unités,
d est le chiffre des dizaines, et
c est le chiffre des centaines.
Ainsi, le nombre initial cherché est $n_1 = u + 10d + 100c$.
En enlevant le chiffre des unités, nous obtenons $n_2 = d + 10c$.
En enlevant le chiffre des dizaines, nous obtenons $n_3 = u + 10c$.
En permutant le chiffre des centaines et celui des unités, nous obtenons $n_4 = c + 10d + 100u$.

Nous avons $n_1 = u + 10d + 100c$
$n_2 = d + 10c$
$n_3 = u + 10c$
$n_4 = c + 10d + 100u$

Ainsi,
$n_1 - n_2 = u + 10d + 100c - (d - 10c) = 762$
$n_1 + n_3 = u + 10d + 100c + (u + 10c) = 932$
$n_1 - n_4 = u + 10d + 100c - (c + 10d + 100u) = 198$

$$\begin{cases} u + 9d + 90c = 762 & (1) \\ 2u + 10d + 110c = 932 & (2) \\ -99u + 99c = 198 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} u \quad d \quad c \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 9 & 90 & 762 \\ 2 & 10 & 110 & 932 \\ -99 & 0 & 99 & 198 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} u \quad d \quad c \\ \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 9 & 90 & 762 \\ 0 & -8 & -70 & -592 \\ 0 & 891 & 9009 & 75\,636 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 + 99L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{c} u \quad d \quad c \\ \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \end{array}$$

Donc, $u = 6$, $d = 4$ et $c = 8$.

D'où le nombre cherché est 846.

8. a) Soit x, le nombre d'autocars de 18 passagers,
y, le nombre d'autocars de 24 passagers, et
z, le nombre d'autocars de 42 passagers.

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ 18x + 24y + 42z = 960 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 18 & 24 & 42 & 960 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -3 & -40 \\ 0 & 1 & 4 & 70 \end{array}\right]$$

Il y a une infinité de solutions. En posant $z = t$, où $t \in \mathbb{R}$, nous obtenons E.-S. $= \{(3t - 40, 70 - 4t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Puisque x, y et $z \in \mathbb{N}$, alors $t \in \mathbb{N}$ et $14 \leq t \leq 17$,

car si $t \leq 13$, $x = 3t - 40 < 0$ et
si $t \geq 18$, $y = 70 - 4t < 0$.

Nous avons donc les quatre solutions suivantes :
(2, 14, 14), (5, 10, 15), (8, 6, 16) et (11, 2, 17).

b) $$\left[\begin{array}{cccc} 2 & 14 & 14 & \\ 5 & 10 & 15 & \\ 8 & 6 & 16 & \\ 11 & 2 & 17 & \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 180\,000 \\ 220\,000 \\ 350\,000 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 8\,340\,000 & \text{(coût minimal)} \\ 8\,350\,000 & \\ 8\,360\,000 & \\ 8\,370\,000 & \text{(coût maximal)} \end{array}\right]$$

2 autocars de 18 passagers, 14 autocars de 24 passagers et 14 autocars de 42 passagers, pour un coût minimal total de 8 340 000 $.

Exercices récapitulatifs (page 100)

1. a) $\left[\begin{array}{cc} 2 & -4 \\ 1 & 8 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 7 \\ 5 \end{array}\right]$; $\left[\begin{array}{cc:c} 2 & -4 & 7 \\ 1 & 8 & 5 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 1 \end{array}\right]$; $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

2. a) Compatible ; une solution unique

b) Incompatible ; aucune solution

c) Compatible ; infinité de solutions

f) Si $k = 0$, compatible ; infinité de solutions ;
si $k \neq 0$, incompatible ; aucune solution

3. a) $\{(6, 7, 2)\}$

c) $\{(0, 0, 0)\}$

e) $\left\{\left(\frac{-s}{11}, \frac{-4s}{11}, s\right) \middle| \, s \in \mathbb{R}\right\}$

g) $\{(1 - t, -s, t, s) \mid s \text{ et } t \in \mathbb{R}\}$

4. a) $\{(1, 0)\}$

d) $\{(0, 2s - t, 0, s, t) \mid s \text{ et } t \in \mathbb{R}\}$

e) $\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{-5}{2}\right)\right\}$

6. a) $\left\{\left(\frac{3s}{7}, \frac{4s}{7}, \frac{-8s}{7}, s\right) \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$ b) $\emptyset$

c) $\{(3, 1, 2)\}$ d) $\{(-1, -5, 2, 3, 1)\}$

7. b) La matrice B n'est pas inversible.

d) $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

g) $H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

h) La matrice M n'est pas inversible.

9. a) $k = \frac{-15}{8}$ b) $k = 23$

12. a) A = 7 et B = 2 b) A = 10, B = $\frac{-1}{2}$ et C = 4

13. a) $Al_2O_3 + 3H_2O \rightarrow 2Al(OH)_3$

b) $3CCl_4 + 2SbF_3 \rightarrow 3CCl_2F_2 + 2SbCl_3$

c) L'équation ne peut pas être équilibrée.

16. 15 maisons à 1 chambre, 20 maisons à 2 chambres et 30 maisons à 3 chambres

17. 3 téléviseurs de 61 cm, 8 téléviseurs de 109 cm, 5 téléviseurs de 127 cm et 4 téléviseurs de 165 cm

19. a) $(71 - 7s)$ robots de type A, $(2s - 4)$ robots de type B et s robots de type C, où $s \in \{2, 3, 4, \ldots, 10\}$

b) 15 robots de type A, 12 robots de type B et 8 robots de type C

20. Environ 10 417 $ dans A et environ 14 583 $ dans B

Problèmes de synthèse (page 103)

1. a) i) A = $\frac{1}{2}$, B = $\frac{-33}{13}$ et C = $\frac{9}{26}$

ii) A = 0, B = 0, C = 1, D = 0 et E = 4

b) $a = 2$, $d = -1$ et $k = 12$

2. a) $f(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$ c) $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

3. a) S $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ b) C(-2, 1) et $r = 5$

5. a) Si $k \neq 1$, E.-S. = $\emptyset$;

si $k = 1$, E.-S. = $\left\{\left(\frac{11 - 7s}{3}, \frac{2s - 4}{3}, s\right) \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$

b) Si $k = 4$, E.-S. = $\left\{\left(\frac{-s}{2}, s, s\right) \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$;

si $k = 3$, E.-S. = $\left\{\left(\frac{-t}{3}, t, 0\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$;

si $k = 0$, E.-S. = $\{(r, 0, 0) | r \in \mathbb{R}\}$

6. a) $\left\{\left(\frac{3t - s + 3}{2}, t, 2 - 3s, 5 - 3s, s\right) \middle| s \text{ et } t \in \mathbb{R}\right\}$

c) $\left\{\left(\frac{3t + 3}{2}, t, 2, 5, 0\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$

e) $\left\{\left(\frac{2s + 3}{2}, s, 2 - 3s, 5 - 3s, s\right) \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$

g) $\left\{\left(\frac{9t + 8}{6}, t, 1, 2, \frac{1}{3}\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$

i) $\emptyset$

8. b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ c) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

11. 30 000 $ dans A, 40 000 $ dans B, 20 000 $ dans C et 10 000 $ dans D

13. $\theta = 100°$

14. 60 minutes

16. b) 432 m/min c) 1638,4 m

17. Environ 54,32 m

18. 12 litres de S_1, 8 litres de S_2 et 4 litres de S_3

20. a) $P(x) = 2x^4 - 27x^3 + 79x^2 + 219x - 945$

b) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

23. 628,5

CHAPITRE 3

Exercices préliminaires (page 109)

1. a) i) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} a_{11} & b & c \\ b & a_{22} & d \\ c & d & a_{33} \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} 0 & -b & -c \\ b & 0 & -d \\ c & d & 0 \end{bmatrix}$

1. (*suite*)

b) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ et $B^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & -2 \\ 2 & 7 & -1 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

2. a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 15 \end{bmatrix}$; $x = 2$ et $y = -5$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$; $x = \dfrac{3a + 5b}{41}$ et $y = \dfrac{2b - 7a}{41}$

3. a) $\left[\begin{array}{cc:c} a & b & f \\ c & d & g \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} a & b & f \\ 0 & ad - bc & ag - cf \end{array}\right]$ $aL_2 - cL_1 \to L_2$

De L_2, nous avons $(ad - bc)y = ag - cf$

$$y = \frac{ag - cf}{ad - bc} \quad (\text{car } ad - bc \neq 0)$$

En remplaçant cette valeur de y dans l'équation (1)

ou dans l'équation (2), nous obtenons $x = \dfrac{df - bg}{ad - bc}$.

D'où E.-S. $= \left\{\left(\dfrac{df - bg}{ad - bc}, \dfrac{ag - cf}{ad - bc}\right)\right\}$

b) Si $(ag - cf) \neq 0$, alors il n'y a aucune solution et,
si $(ag - cf) = 0$, alors il y a une infinité de solutions.

4. a) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & 15 & 6 \\ -3 & 9 & -9 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -5 & 7 \\ -2 & 22 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -10 & 8 \end{bmatrix}$

5. a) $MP = PM = I_n$

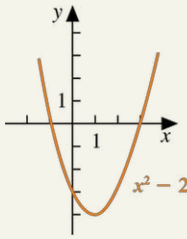
b) Puisque $AE = EA = I_3$, les matrices A et E sont l'inverse l'une de l'autre.

Puisque $BC = CB = I_3$, les matrices B et C sont l'inverse l'une de l'autre.

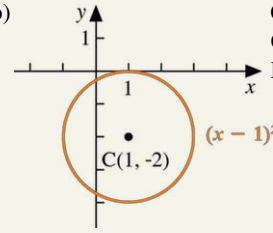
6. a) $a = \dfrac{-5}{17}$ et $b = \dfrac{1}{17}$

b) $a = 2$, $b = 5$, $c = -3$ et $d = -8$

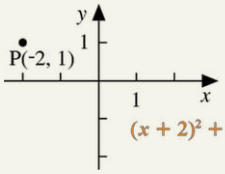
7. a) Parabole : $y = x^2 - 2x - 3$



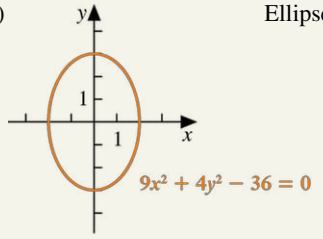
b) Cercle : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$
Centre C(1, -2)
Rayon = 2



c) Point : P(-2, 1)



d) Ellipse : $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$



Exercices de compréhension 3.1

1. a) $\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 1(-5) - (-7)(2) = 9$

b) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6(6) - 9(4) = 0$

c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1(1) - 2(3) = -7$

2. a) dét $A = -8$

b) dét $B = 0$

3. a) Cof $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ b) Cof $B = \begin{bmatrix} -5 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & -10 & 5 \end{bmatrix}$

Exercices 3.1 (page 124)

1. a) dét $A = 8$ b) dét $B = -5$ c) dét $C = 0$

d) dét $E = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 7(5) - 2(-4) = 43$

e) dét $F = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3(1) - 5(4) = -17$

f) dét $G = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1) - 0(0) = 1$

1. (*suite*)

g) $\det H = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \\ -1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

$= -(-3)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$

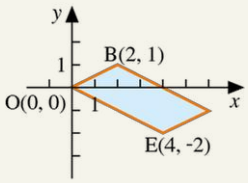
$= 1$

h) $\det J = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

$= -1\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$

$= 0$

2. a)

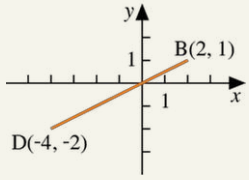


$\det M_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -8$

$A_1 = |\det M_1| = |-8| = 8$

d'où $A_1 = 8$ u²

b)

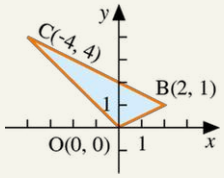


$\det M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$A_2 = |\det M_2| = |0| = 0$

d'où $A_2 = 0$ u²

c)



$\det M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 12$

$A_3 = \frac{1}{2}|\det M_3| = \frac{1}{2}|12| = 6$

d'où $A_3 = 6$ u²

3. a) i) $a_{11} = 4$, $M_{11} = 2$ et $C_{11} = 2$

ii) $a_{12} = 8$, $M_{12} = -7$ et $C_{12} = 7$

iii) $a_{21} = -7$, $M_{21} = 8$ et $C_{21} = -8$

iv) $a_{22} = 2$, $M_{22} = 4$ et $C_{22} = 4$

b) i) $\text{Cof } A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$ ii) $(\text{Cof } A)^T = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$

4. a) $a_{11} = 4$, $M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} = 83$ et $C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 83$

b) $a_{12} = -2$, $M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -40$ et $C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = 40$

c) $a_{22} = 3$, $M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 66$ et $C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = 66$

d) $a_{32} = -7$, $M_{32} = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 32$ et $C_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -32$

5. a) $C_{23} = -\begin{vmatrix} 7 & -3 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ 8 & 9 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ b) $C_{44} = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

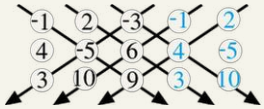
6. a) i) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 3 & 10 & 9 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}$

$= -96$

ii) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 3 & 10 & 9 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$

$= -96$

iii) Il suffit d'écrire



; ainsi,

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 3 & 10 & 9 \end{vmatrix} = (-1)(-5)(9) + (2)(6)(3) + (-3)(4)(10) - (-3)(-5)(3) - (-1)(6)(10) - (2)(4)(9)$

$= -96$

b) $C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 3 & 10 & 9 \end{vmatrix} = (-1)(-96) = 96$

7. a) 49 b) 0 c) -3 d) 1 e) 0

f) 852 g) 3042 h) 2202 i) 720 j) -15 120

k) *with(linalg)*:

$G := \begin{bmatrix} 0.5 & -4.2 & 2 & 5.3 & 6 \\ 9.2 & 10 & 8.3 & -1.3 & 2.5 \\ -4 & 3 & -7 & 6 & 11 \\ -2.5 & 8.1 & 7.5 & 6.7 & 3.2 \\ 3 & 7.2 & 8.9 & 5.3 & -2.7 \end{bmatrix}$:

det(G);

69692.9574

8. a) $\begin{vmatrix} x & x \\ 5 & (x-2) \end{vmatrix} = x(x-2) - 5x = x(x-7)$

Ainsi, $x(x-7) = 0$, d'où $x = 0$ ou $x = 7$

b) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 \\ 2+2x & 2 \end{vmatrix} = 2(1+x) - (2+2x) = 0$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

c) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} = (1-x)(1+x) - 1 = -x^2$

Ainsi, $-x^2 = -9$, d'où $x = 3$ ou $x = -3$

d) $\begin{vmatrix} x-1 & 5 & -4 \\ 0 & x-2 & 7 \\ 0 & 0 & x+3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x+3)$

Ainsi, $(x-1)(x-2)(x+3) = 0$,
d'où $x = 1$, $x = 2$ ou $x = -3$

9. a) $\det A = 305$ b) $\det A^T = 305$ c) $\det A = \det A^T$

10. a) i) $\det A = 11$

ii) $A(\text{Cof } A)^T = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$

$= 11I_{2\times 2}$

10. (*suite*)

b) i) dét $B = 0$

ii) $B(\text{Cof } B)^{\text{T}} = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 15 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -10 & 6 \\ -15 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= 0I_{2\times 2}$

c) i) dét $C = 84$

ii) $\text{Cof } C = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 28 & 7 & 7 \\ 24 & 12 & 24 \\ 20 & -4 & 20 \end{bmatrix}$

$C(\text{Cof } C)^{\text{T}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 28 & 24 & 20 \\ 7 & 12 & -4 \\ 7 & 24 & 20 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 84 & 0 & 0 \\ 0 & 84 & 0 \\ 0 & 0 & 84 \end{bmatrix}$

$= 84I_{3\times 3}$

11. a) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (ad - bc)$

i) $-\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -(cb - da) = (ad - bc)$

d'où $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$

ii) $-\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -(bc - ad) = (ad - bc)$

d'où $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$

$= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$

$-\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} = -[c(eg - dh) - b(fg - di) + a(fh - ei)]$

$= -ceg + cdh + bfg - bdi - afh + aei$

d'où $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a + x & b \\ c + y & d \end{vmatrix} = (a + x)d - b(c + y)$

$= ad + xd - bc - by$

$= (ad - bc) + (xd - by)$

$= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ y & d \end{vmatrix}$

12. a) $\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = kad - bkc = k(ad - bc) = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = ka\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - kb\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + kc\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

$= k\left(a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}\right)$

$= k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

13. De façon générale, une matrice antisymétrique d'ordre 3 est de la forme suivante.

$A = \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$

En développant selon les éléments de la première colonne,

dét $A = -a\begin{vmatrix} -a & -b \\ c & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} -a & -b \\ 0 & -c \end{vmatrix}$

$= -a(0 + bc) + b(ac - 0)$

$= 0$

Exercices de compréhension 3.2

1. dét $A = (-2)(4)(-8)(5) = 320$

2. $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix} = 3(3)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3^2(5) = 45$

Exercices 3.2 (page 137)

1. a) F, car dét A = dét A^{T} (théorème 3.5)

b) F, 5 n'est pas le facteur d'une colonne (ou d'une ligne).

c) F, car $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 3^3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (théorème 3.7)

d) V (théorème 3.7)

e) F, car $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ $L_1 \leftrightarrow L_3$, $L_2 \leftrightarrow L_4$ (théorème 3.9)

f) V (théorème 3.9 : $L_1 \leftrightarrow L_2$ et $C_1 \leftrightarrow C_2$)

1. (*suite*)

g) F, car $\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & y \\ c & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$ (théorème 3.12)

h) V (théorème 3.6)

i) F, car $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 25 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 25 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (en factorisant 5 de C_2 et 5 de L_2)

j) V (théorème 3.13)

k) V (théorèmes 3.12 et 3.10)

2. a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ $L_2 \leftrightarrow L_3$

$= -9$

b) $\begin{vmatrix} e & d & f \\ 4b & 4a & 4c \\ h & g & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4b & 4a & 4c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix}$ $L_1 \leftrightarrow L_2$

$= +\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ $C_1 \leftrightarrow C_2$

$= 4\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ (en factorisant 4 de L_1)

$= 36$

c) $\begin{vmatrix} x & b & 2a \\ 3y & 3e & 6d \\ z & h & 2g \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & b & 2a \\ y & e & 2d \\ z & h & 2g \end{vmatrix}$ (en factorisant 3 de L_2)

$= 3(2)\begin{vmatrix} x & b & a \\ y & e & d \\ z & h & g \end{vmatrix}$ (en factorisant 2 de C_3)

$= -6\begin{vmatrix} a & b & x \\ d & e & y \\ g & h & z \end{vmatrix}$ $C_1 \leftrightarrow C_3$

$= 30$

d) $\begin{vmatrix} 2a & -3g & 5d \\ 2b & -3h & 5e \\ 2c & -3i & 5f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -3g & -3h & -3i \\ 5d & 5e & 5f \end{vmatrix}$ (dét M^T = dét M)

$= -\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 5d & 5e & 5f \\ -3g & -3h & -3i \end{vmatrix}$ $L_2 \leftrightarrow L_3$

$= -(2)(5)(-3)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ (en factorisant 2 de L_1, 5 de L_2 et -3 de L_3)

$= 270$

e) $\begin{vmatrix} a-3b & b & c \\ d-3e & e & f \\ g-3h & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3b & b & c \\ -3e & e & f \\ -3h & h & i \end{vmatrix}$ (théorème 3.12)

$= 9 + 0$ (théorème 3.11)

$= 9$

f) $\begin{vmatrix} -a & 3c+x & b \\ -d & 3f+y & e \\ -g & 3i+z & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & 3c & b \\ -d & 3f & e \\ -g & 3i & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & x & b \\ -d & y & e \\ -g & z & h \end{vmatrix}$ (théorème 3.12)

$= -3\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & x & b \\ d & y & e \\ g & z & h \end{vmatrix}$

$= 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & x \\ d & e & y \\ g & h & z \end{vmatrix}$ $C_2 \leftrightarrow C_3$

$= 3(9) + (-5)$

$= 22$

3. a) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & -8 & 15 \\ 0 & -22 & 28 \end{vmatrix}$ $L_2 - 2L_1 \to L_2$, $L_3 - 5L_1 \to L_3$

$= \begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & -8 & 15 \\ 0 & 0 & \frac{-53}{4} \end{vmatrix}$ $L_3 - (11/4)L_2 \to L_3$

$= 106$ (théorème 3.3)

b) $\begin{vmatrix} 4 & 9 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -3 \\ 4 & 9 & -1 \end{vmatrix}$ $L_1 \leftrightarrow L_3$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 19 \end{vmatrix}$ $L_2 - 2L_1 \to L_2$, $L_3 - 4L_1 \to L_3$

$= +\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 19 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ $L_2 \leftrightarrow L_3$

$= 7$ (théorème 3.3)

c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{3}{4} \\ 5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 3\left(\frac{1}{4}\right)5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ (en factorisant 3 de L_1, $(1/4)$ de L_2 et 5 de L_3)

$= \frac{15}{4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ $L_2 - 2L_1 \to L_2$, $L_3 - L_1 \to L_3$

$= \frac{15}{4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-19}{10} \end{vmatrix}$ $L_3 - (1/10)L_2 \to L_3$

$= \frac{285}{4}$ (théorème 3.3)

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ (dét M^T = dét M)

$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & (b-a) & (b^2-a^2) \\ 0 & (c-a) & (c^2-a^2) \end{vmatrix}$ $L_2 - L_1 \to L_2$, $L_3 - L_1 \to L_3$

3. d) (*suite*)

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & (b+a) \\ 0 & 1 & (c+a) \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l}\text{en factorisant} \\ (b-a)\text{ de } L_2 \\ \text{et } (c-a)\text{ de } L_3\end{array}\right)$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & (b+a) \\ 0 & 0 & (c-b) \end{vmatrix} \quad L_3 - L_2 \to L_3$$

$= (b-a)(c-a)(c-b)$ (théorème 3.3)

4. a) $AB = \begin{bmatrix} -5 & 17 & 9 \\ -1 & 9 & 2 \\ -1 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ et $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

b) dét $A = -9$, dét $B = 22$, dét $(AB) = -198$ et dét $(A + B) = 30$

c) dét $(AB) =$ (dét A)(dét B)

d) dét $(A + B) \neq$ dét $A +$ dét B

5. dét $B = 60$,

$$\text{Cof } B = \begin{bmatrix} -11 & -3 & 16 \\ 5 & -15 & 20 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ et } (\text{Cof } B)^T = \begin{bmatrix} -11 & 5 & 2 \\ -3 & -15 & 6 \\ 16 & 20 & 8 \end{bmatrix};$$

$$\text{donc } B(\text{Cof } B)^T = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} = 60\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d'où $B(\text{Cof } B)^T = (\text{dét } B)I_{3\times 3}$

Exercices de compréhension 3.3

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$, ainsi dét $A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 19$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}}{19} = \frac{-12}{19} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}}{19} = \frac{17}{19}$$

D'où E.-S. $= \left\{\left(\frac{-12}{19}, \frac{17}{19}\right)\right\}$

2. rang $(A) = 3$ (car A possède trois lignes non nulles)

3. a) $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -56$ et $\delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$

b) Puisque $\Delta \neq 0$ et $\delta > 0$, nous avons une ellipse, un cercle, un point ou l'ensemble vide.

Exercices 3.3 (page 150)

1. a) Car le nombre d'équations (4) est différent du nombre d'inconnues (3)

b) Car $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

2. a) dét $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$, dét $A_1 = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -13$,

dét $A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 17$

donc $x = \frac{\text{dét } A_1}{\text{dét } A} = \frac{13}{5}$ et $y = \frac{\text{dét } A_2}{\text{dét } A} = \frac{-17}{5}$

d'où E.-S. $= \left\{\left(\frac{13}{5}, \frac{-17}{5}\right)\right\}$

b) dét $A = \frac{-11}{60}$, dét $A_1 = \frac{-11}{15}$, dét $A_2 = \frac{-11}{4}$

donc $x = \frac{\text{dét } A_1}{\text{dét } A} = 4$ et $y = \frac{\text{dét } A_2}{\text{dét } A} = 15$

d'où E.-S. $= \{(4, 15)\}$

c) dét $A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

Puisque le système est homogène et que dét $A \neq 0$, la solution unique est la solution triviale.

D'où E.-S. $= \{(0, 0, 0)\}$

d) dét $A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 22$, dét $A_1 = \begin{vmatrix} 2{,}5 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 11$,

dét $A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2{,}5 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 22$, dét $A_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2{,}5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -5{,}5$

donc $x = \frac{\text{dét } A_1}{\text{dét } A} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\text{dét } A_2}{\text{dét } A} = 1$ et $z = \frac{\text{dét } A_3}{\text{dét } A} = \frac{-1}{4}$

d'où E.-S. $= \left\{\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{-1}{4}\right)\right\}$

e) dét $A = \frac{-35}{72}$, dét $A_1 = \frac{-35}{12}$, dét $A_2 = \frac{-35}{12}$, dét $A_3 = \frac{-35}{12}$

donc $x = \frac{\text{dét } A_1}{\text{dét } A} = 6$, $y = \frac{\text{dét } A_2}{\text{dét } A} = 6$ et $z = \frac{\text{dét } A_3}{\text{dét } A} = 6$

d'où E.-S. $= \{(6, 6, 6)\}$

f) dét $A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 30$, dét $A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 60$,

2. f) (*suite*)

$$\text{dét } A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -90, \text{ dét } A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{dét } A_4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 30$$

$$\text{donc } x = \frac{\text{dét } A_1}{\text{dét } A} = 2,\ y = \frac{\text{dét } A_2}{\text{dét } A} = -3,$$

$$z = \frac{\text{dét } A_3}{\text{dét } A} = 0 \text{ et } w = \frac{\text{dét } A_4}{\text{dét } A} = 1$$

d'où E.-S. = {(2, -3, 0, 1)}

g) *with(LinearAlgebra)*:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 16 & 64 & 256 \end{bmatrix}:$$

Determinant(A);

288

$$A1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 26 & 4 & 8 & 16 \\ 144 & 9 & 27 & 81 \\ 468 & 16 & 64 & 256 \end{bmatrix}:$$

Determinant(A1);

-864

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 26 & 8 & 16 \\ 3 & 144 & 27 & 81 \\ 4 & 468 & 64 & 256 \end{bmatrix}:$$

Determinant(A2);

576

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 26 & 16 \\ 3 & 9 & 144 & 81 \\ 4 & 16 & 468 & 256 \end{bmatrix}:$$

Determinant(A3);

-288

$$A4 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 26 \\ 3 & 9 & 27 & 144 \\ 4 & 16 & 64 & 468 \end{bmatrix}:$$

Determinant(A4);

576

$$x := \frac{Determinant(A1)}{Determinant(A)};$$

-3

$$y := \frac{Determinant(A2)}{Determinant(A)};$$

2

$$z := \frac{Determinant(A3)}{Determinant(A)};$$

-1

$$w := \frac{Determinant(A4)}{Determinant(A)};$$

2

D'où E.-S. = {(-3, 2, -1, 2)}

3. a) dét $A = 8 \neq 0$, d'où rang $(A) = 2$

b) dét $B = 0$; dét $[-6] = -6 \neq 0$, d'où rang $(B) = 1$

c) dét $C = 0$; $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, d'où rang $(C) = 2$

d) Tous les déterminants des sous-matrices carrées 3×3 et 2×2 sont égaux à 0; dét $[2] \neq 0$, d'où rang $(E) = 1$

4. a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ 9 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - 3L_1 \to L_3 \\ L_4 + L_1 \to L_4 \end{matrix}$

d'où rang $(A) = 1$ (théorème 3.17)

b) $B \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} L_2 + L_1 \to L_2 \\ L_3 - 3L_1 \to L_3 \end{matrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} L_3 + L_2 \to L_3 \\ L_4 - L_2 \to L_4 \end{matrix}$

d'où rang $(B) = 3$ (théorème 3.17)

5. a) i) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 16 & 16 \\ 1 & -2 & -6 & 1 \end{array}\right]$

Puisque $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

rang (A) = rang $(A \vdots B) = 2$

d'où le système est compatible. (théorème 3.18)

ii) rang $(A) = 2 < 3$, où 3 est le nombre d'inconnues,

d'où le système a une infinité de solutions.

iii) En posant $z = s$, où $s \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 - 16s \\ x - 2y = 1 + 6s \end{cases}$$

Par la règle de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 16 - 16s & 3 \\ 1 + 6s & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-35 + 14s}{-7} = 5 - 2s$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 16 - 16s \\ 1 & 1 + 6s \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-14 + 28s}{-7} = 2 - 4s$$

d'où E.-S. = $\{(5 - 2s, 2 - 4s, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$

5. (*suite*)

b) i) $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -1 & -4 & 3 \\ 9 & 2 & 0 & -8 & 6 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - 3L_1 \to L_3 \end{array}$

$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $L_3 - L_2 \to L_3$

rang $(A) = 2$ et rang $(A \vdots B) = 3$

d'où le système est incompatible. (théorème 3.18)

ii) Le système n'a aucune solution.

iii) E.-S. $= \emptyset$

c) i) *with(LinearAlgebra)*:

$A := \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{array}\right]$:

Rank(A);

3

$AB := \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & 2 & 9 \end{array}\right]$:

Rank(AB);

3

rang $(A) =$ rang $(A \vdots B) = 3$
d'où le système est compatible. (théorème 3.18)

ii) rang $(A) = 3$, où 3 est le nombre d'inconnues,
d'où le système a une solution unique.

iii) E.-S. $= \{(3, 1, 2)\}$

d) i) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right]$

Puisque $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 35 \neq 0$

rang $(A) =$ rang $(A \vdots B) = 3$
d'où le système est compatible. (théorème 3.18)

ii) rang $(A) = 3 < 4$, où 4 est le nombre d'inconnues,
d'où le système a une infinité de solutions.

iii) En posant $d = t$, où $t \in \mathbb{R}$, nous obtenons

$$\begin{cases} 2a - 3b + c = -2t \\ 3a - b - 2c = 3t \\ 4a + 2b - c = 4t \end{cases}$$

Par la règle de Cramer, nous obtenons

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -2t & -3 & 1 \\ 3t & -1 & -2 \\ 4t & 2 & -1 \end{vmatrix}}{35} = \frac{3t}{7},\ b = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2t & 1 \\ 3 & 3t & -2 \\ 4 & 4t & -1 \end{vmatrix}}{35} = \frac{4t}{7} \text{ et}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2t \\ 3 & -1 & 3t \\ 4 & 2 & 4t \end{vmatrix}}{35} = \frac{-8t}{7}$$

d'où E.-S. $= \left\{\left(\frac{3t}{7}, \frac{4t}{7}, \frac{-8t}{7}, t\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$

6. a) Soit x, qui rapporte 3,2 % en dividendes et 1,5 % en intérêts,
y, qui rapporte 4,8 % en dividendes, et
z, qui rapporte 4 % en intérêts.

$$S \begin{cases} x + y + z = 40\,000{,}00 \\ 0{,}032x + 0{,}048y = 1198{,}40 \\ 0{,}015x + 0{,}04z = 630{,}50 \end{cases}$$

b) Transformons d'abord S en un système S_1 équivalent.

$$S_1 \begin{cases} x + y + z = 40\,000 & \\ 2x + 3y = 74\,900 & \left(1000/16\right) E_2 \to E_2 \\ 3x + 8z = 126\,100 & 200E_3 \to E_3 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 40\,000 & 1 & 1 \\ 74\,900 & 3 & 0 \\ 126\,100 & 0 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-17\,500}{-1} = 17\,500$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 40\,000 & 1 \\ 2 & 74\,900 & 0 \\ 3 & 126\,100 & 8 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-13\,300}{-1} = 13\,300$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 40\,000 \\ 2 & 3 & 74\,900 \\ 3 & 0 & 126\,100 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-9200}{-1} = 9200$$

D'où $x = 17\,500$ \$, $y = 13\,300$ \$ et $z = 9200$ \$

7. a) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 2 & -6 & 20 \end{vmatrix} = 0$ et $\delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$

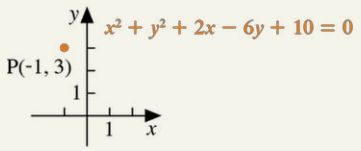
$\Delta = 0$ et $\delta > 0$, d'où nous avons un point.

Déterminons ce point.

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$$
$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = 0$$
$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 0$$

ainsi $x + 1 = 0$ et $y - 3 = 0$

d'où P(-1, 3)



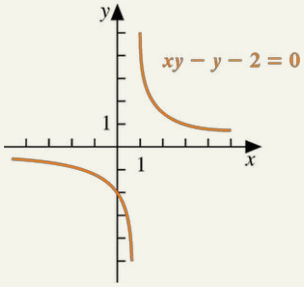
7. (*suite*)

b) $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 4$ et $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$\Delta \neq 0$ et $\delta < 0$, d'où nous avons une hyperbole.

De $xy - y - 2 = 0$, nous avons

$$xy - y = 2$$
$$y(x - 1) = 2$$
$$y = \frac{2}{x - 1}$$



c) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & -8 \end{vmatrix} = 0$ et $\delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta = 0$ et $\delta = 0$, d'où nous avons deux droites parallèles distinctes ou confondues, ou l'ensemble vide.

Déterminons, si c'est possible, quelques points satisfaisant l'équation $x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y - 4 = 0$.

Si $y = 0$, nous avons $x^2 + 3x - 4 = 0$

$$(x + 4)(x - 1) = 0,$$

donc $x = -4$ ou $x = 1$

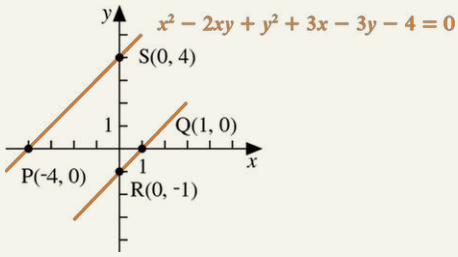
ainsi P(-4, 0) et Q(1, 0) satisfont l'équation.

Si $x = 0$, nous avons $y^2 - 3y - 4 = 0$

$$(y + 1)(y - 4) = 0,$$

donc $y = -1$ et $y = 4$

ainsi R(0, -1) et S(0, 4) satisfont l'équation.



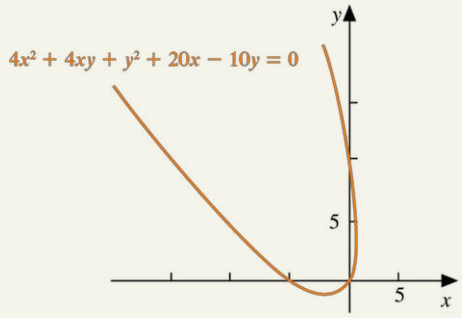
D'où nous avons deux droites parallèles distinctes.

d) $\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 20 \\ 4 & 2 & -10 \\ 20 & -10 & 0 \end{vmatrix} = -3200$ et $\delta = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta \neq 0$ et $\delta = 0$, d'où nous avons une parabole.

with(plots, implicitplot):

implicitplot$(4 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y + y^2 + 20 \cdot x - 10 \cdot y = 0,$
$x = -20 \ldots 2, y = -2 \ldots 20,$ *scaling = constrained*);

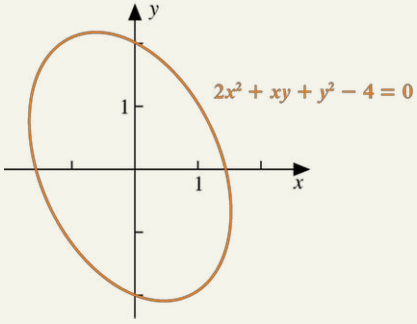


e) $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -56$ et $\delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$

$\Delta \neq 0$ et $\delta > 0$, d'où nous avons une ellipse, un cercle, un point ou l'ensemble vide.

with(plots, implicitplot):

implicitplot$(2 \cdot x^2 + x \cdot y + y^2 - 4 = 0, x = -3 \ldots 3,$
$y = -3 \ldots 3,$ *scaling = constrained, numpoints* $= 2500)$;



D'où nous avons une ellipse.

Exercice de compréhension 3.4

1. a) dét $A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2$

b) adj $A = (\text{Cof } A)^T = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

c) $A^{-1} = \frac{1}{\text{dét } A} \text{adj} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercices 3.4 (page 158)

1. Puisque $AB = BA = I_{3\times 3}$, les matrices A et B sont l'inverse l'une de l'autre.

2. a) dét $A = 2$; adj $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$; $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

b) dét $B = 11$; adj $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{-4}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$

c) dét $C = 6$;

adj $C = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 11 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$; $C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-2}{3} & \frac{11}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{-7}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) dét $E = -1$;

adj $E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 13 & -7 & -11 \\ -6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$; $E^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -13 & 7 & 11 \\ 6 & -3 & -5 \end{bmatrix}$

3. a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$; régulière

b) La matrice n'est pas inversible ; singulière

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; régulière

d) La matrice n'est pas inversible ; singulière

e) $\begin{bmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{-1}{3} & \frac{-5}{9} \\ \frac{-7}{27} & \frac{-4}{9} & \frac{-8}{27} \\ \frac{5}{27} & \frac{-1}{9} & \frac{-2}{27} \end{bmatrix}$; régulière

f) $\begin{bmatrix} 0 & -0{,}4 & 0 & -0{,}6 \\ -0{,}6 & 0 & -0{,}4 & 0 \\ 0 & -0{,}6 & 0 & -0{,}4 \\ -0{,}4 & 0 & -0{,}6 & 0 \end{bmatrix}$; régulière

g) $\begin{bmatrix} 13 & 24 & 53 & -34 \\ 10{,}5 & 19{,}5 & 43{,}5 & -27{,}5 \\ -3{,}5 & -6{,}5 & -14{,}5 & 9{,}5 \\ 5 & 9 & 20 & -13 \end{bmatrix}$; régulière

h) $\begin{bmatrix} -7 & -2 & -2 & -3 & 8 \\ 10 & 3 & 3 & 4 & -11 \\ -10 & 0 & -1 & -3 & 10 \\ -7 & -3 & -3 & -3 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; régulière

4. a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}$ et $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $AB = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-3}{8} & \frac{5}{8} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 3 \end{bmatrix}$

c) La vérification est laissée à l'étudiant.

5. a) dét $A = 1 \neq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + x & -x \\ x & 1 - x \end{bmatrix}, \forall\, x \in \mathbb{R}$

b) dét $B = (x - 3)^2 \neq 0$, si $x \neq 3$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{x + 9}{(x - 3)^2} & \frac{-3}{(x - 3)^2} \\ \frac{3 - 5x}{(x - 3)^2} & \frac{x}{(x - 3)^2} \end{bmatrix}$, si $x \neq 3$

c) dét $C = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, d'où dét $C \neq 0, \forall\, \theta \in \mathbb{R}$

$C^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \forall\, \theta \in \mathbb{R}$

d) dét $E = 0, \forall\, \theta \in \mathbb{R}$

d'où la matrice E n'est pas inversible.

e) dét $F = x^3 \neq 0$, si $x \neq 0$

$F^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 & \frac{-1}{x^2} \\ 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x} \end{bmatrix}, \forall\, x \neq 0$

f) dét $G = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$

d'où la matrice G n'est pas inversible.

g) dét $H = h_{11}\, h_{22} \ldots h_{nn} \neq 0$, si $h_{ii} \neq 0, \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$H^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_{11}} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_{22}} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{h_{nn}} \end{bmatrix}$, si $h_{ii} \neq 0$, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

6. a) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{4}$ (propriété 1)

b) $\det B^{-1} = \dfrac{1}{\det B} = \dfrac{-1}{2}$ (propriété 1)

c) $\det (AB)^{-1} = \dfrac{1}{\det (AB)}$ (propriété 1)

$= \dfrac{1}{(\det A)(\det B)}$ (théorème 3.14)

$= \dfrac{-1}{8}$

d) $\det (A^{-1})^{-1} = \det A$ (propriété 2)

$= 4$

e) $\det (B^{-1})^3 = (\det B^{-1})^3$ (théorème 3.15)

$= \left(\dfrac{1}{\det B}\right)^3$ (propriété 1)

$= \dfrac{-1}{8}$

f) $\det (A^3)^{-1} = \det (A^{-1})^3$ (propriété 5)

$= (\det A^{-1})^3$ (théorème 3.15)

$= \left(\dfrac{1}{\det A}\right)^3$ (propriété 1)

$= \dfrac{1}{64}$

g) $\det (A^{-1})^{\mathrm{T}} = \det (A^{\mathrm{T}})^{-1}$ (propriété 4)

$= \dfrac{1}{\det A^{\mathrm{T}}}$ (propriété 1)

$= \dfrac{1}{\det A}$ (théorème 3.5)

$= \dfrac{1}{4}$

h) $\det \left(\dfrac{1}{2}A\right)^{-1} = \det \left(\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}A^{-1}\right)$ (propriété 6)

$= \det (2A^{-1})$

$= 2^4 \det A^{-1}$ (théorème 3.7)

$= 2^4 \left(\dfrac{1}{\det A}\right)$ (propriété 1)

$= 4$

i) $\det (A^3B^{-1}) = \det (A^3) \det (B^{-1})$ (théorème 3.14)

$= (\det A)^3 \dfrac{1}{\det B}$ (théorème 3.15 et propriété 1)

$= 4^3 \left(\dfrac{1}{-2}\right) = -32$

j) $\det ((3A)(2B)^{-1}) = \det (3A) \det (2B)^{-1}$ (théorème 3.14)

$= 3^4 \det A \left(\dfrac{1}{\det (2B)}\right)$ (théorème 3.7 et propriété 1)

$= 3^4 (4) \dfrac{1}{2^4(-2)}$ (théorème 3.7)

$= \dfrac{-81}{8}$

7. $\det (AB) = 0$

$(\det A)(\det B) = 0$ (car $\det (AB) = (\det A)(\det B)$)

Si $\det A \neq 0$, alors $\det B = 0$;
par conséquent, la matrice B est singulière.

Si $\det B \neq 0$, alors $\det A = 0$;
par conséquent, la matrice A est singulière.

8. a) ($\Leftarrow$) Si $A = A^{-1}$, alors $A^2 = AA$

$= AA^{-1}$

d'où $A^2 = I_{n \times n}$

($\Rightarrow$) Si $A^2 = I_{n \times n}$, alors $AA = I_{n \times n}$

donc, A est l'inverse de A

d'où $A = A^{-1}$

b) Si $A^2 = I_{n \times n}$, alors $AA = I_{n \times n}$

$\det (AA) = \det I_{n \times n}$

$(\det A)(\det A) = 1$ (théorèmes 3.14 et 3.4)

$(\det A)^2 = 1$

d'où $\det A = \pm 1$

Exercice de compréhension 3.5

1. $\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}}_{B}$

$\det A = -6$, $A^{-1} = \dfrac{-1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\dfrac{-1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}}_{B} = \dfrac{-1}{6}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$

D'où E.-S. $= \left\{\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{-1}{2}\right)\right\}$

Exercices 3.5 (page 167)

1. a) Car le nombre d'équations (2) est différent du nombre d'inconnues (3)

b) Car $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0$

2. a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, dét $A = -16$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{-3}{16} \end{bmatrix}$,

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{-3}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

d'où E.-S. $= \{(1, 4)\}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, dét $A = -1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -13 & 7 & 11 \\ 6 & -3 & -5 \end{bmatrix}$,

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -13 & 7 & 11 \\ 6 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 13 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

d'où E.-S. $= \{(-3, 1, 2)\}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, dét $A = -65 \neq 0$

La solution est unique.

Puisque le système est homogène, la solution unique est la solution triviale.

D'où E.-S. $= \{(0, 0, 0)\}$

d) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, dét $A = \frac{31}{30}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-18}{31} & \frac{2}{31} & \frac{90}{31} \\ \frac{16}{31} & \frac{-19}{31} & \frac{75}{31} \\ \frac{12}{31} & \frac{9}{31} & \frac{-60}{31} \end{bmatrix}$,

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-18}{31} & \frac{2}{31} & \frac{90}{31} \\ \frac{16}{31} & \frac{-19}{31} & \frac{75}{31} \\ \frac{12}{31} & \frac{9}{31} & \frac{-60}{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

d'où E.-S. $= \{(2, 1, -3)\}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{23} \begin{bmatrix} 13 & -10 & 14 & -2 \\ -11 & 12 & -3 & 7 \\ 4 & 4 & -1 & 10 \\ 5 & 5 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -8 \\ -23 \\ -3 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

d'où E.-S. $= \{(2, -2, 3, -5)\}$

f) *with(LinearAlgebra):*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{8}{100} & \frac{9}{100} & \frac{12}{100} \\ \frac{8}{100} & \frac{9}{100} & -\frac{12}{100} \end{bmatrix}:$$

inv A := MatrixInverse(A);

$$\begin{bmatrix} 9 & -\frac{175}{2} & -\frac{25}{2} \\ -8 & \frac{250}{3} & \frac{50}{3} \\ 0 & \frac{25}{6} & -\frac{25}{6} \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 10000 \\ 1005 \\ -75 \end{bmatrix}:$$

MatrixMatrixMultiply(inv A, B);

$$\begin{bmatrix} 3000 \\ 2500 \\ 4500 \end{bmatrix}$$

D'où E.-S. $= \{(3000, 2500, 4500)\}$

3. a) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 21 \\ 56 \end{bmatrix}$

d'où E.-S. $= \{(47, 21, 56)\}$

b) Puisque la matrice est inversible, son déterminant est différent de 0, et puisque le système est homogène, la solution unique est la solution triviale.

D'où E.-S. $= \{(0, 0, 0)\}$

c) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}$

d'où E.-S. $= \{(-9, -8, 0)\}$

4. a) Soit x, le nombre de franchises R vendues,
y, le nombre de franchises S vendues,
z, le nombre de franchises T vendues.

$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ x = 2z \\ 150\,000x + 275\,000y + 325\,000z = 2\,975\,000 \end{cases}$$

En transformant le système d'équations, nous obtenons le système équivalent

$$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ x - 2z = 0 \\ 6x + 11y + 13z = 119 \end{cases}$$

b) Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 6 & 11 & 13 \end{bmatrix}$, la matrice des coefficients, dét $A = 8$

et $A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 22 & -2 & -2 \\ -25 & 7 & 3 \\ 11 & -5 & -1 \end{bmatrix}$.

Puisque $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 119 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

nous obtenons $x = 6$, $y = 4$ et $z = 3$.

La compagnie a donc vendu 6 franchises R, 4 franchises S et 3 franchises T.

5. a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, où dét $A = -1$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 10 & -14 & -14 \\ 26 & 40 & 10 & 30 & 20 & 14 \\ 5 & 13 & 5 & 15 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ (message compatible avec A)

$$A^{-1}M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 10 & -14 & -14 \\ 26 & 40 & 10 & 30 & 20 & 14 \\ 5 & 13 & 5 & 15 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 14 & 0 & 0 & 18 & 14 \\ 18 & 15 & 4 & 10 & 4 & 0 \\ 5 & 13 & 5 & 15 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

16 18 5 14 15 13 0 4 5 0 10 15 18 4 1 14 0 0
P R É N O M D E J O R D A N

D'où le message est PRÉNOM DE JORDAN.

b) La réponse est WILHELM. (voir page 90)

La réponse chiffrée est W I L H E L M
23 9 12 8 5 12 13

$$R = \begin{bmatrix} 23 & 8 & 13 \\ 9 & 5 & 0 \\ 12 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$ (réponse compatible avec A)

$$AR = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 & 8 & 13 \\ 9 & 5 & 0 \\ 12 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -14 & -3 & -13 \\ 47 & 32 & 13 \\ 12 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

La réponse chiffrée et codée est
-14 47 12 -3 32 12 -13 13

6. a) i) $Q = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}1 \end{bmatrix}$ ii) $D = \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \end{bmatrix}$

b) Puisque $P = QP + D$, nous avons $P = (I - Q)^{-1}D$, si dét $(I - Q) \neq 0$. (théorème 3.22)

$$(I - Q) = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 \\ -0{,}4 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \text{ dét } (I - Q) = 0{,}6 \neq 0$$

$$(I - Q)^{-1} = \frac{1}{0{,}6}\begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 \\ 100 \end{bmatrix}, \text{ d'où } P = \begin{bmatrix} 75 \\ 100 \end{bmatrix}$$

7. $$\underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}}_{P} = \begin{matrix} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} \begin{matrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{bmatrix} \end{matrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}}_{P} + \underbrace{\begin{bmatrix} 14 \\ 16 \\ 22 \end{bmatrix}}_{D}$$

Sachant que $P = (I - Q)^{-1}D$, si dét $(I - Q) \neq 0$, (théorème 3.22)

$$(I - Q) = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix}, \text{ dét } (I - Q) = 0{,}004 \neq 0$$

$$(I - Q)^{-1} = \frac{1}{0{,}004}\begin{bmatrix} 0{,}03 & 0{,}02 & 0{,}01 \\ 0{,}02 & 0{,}04 & 0{,}02 \\ 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}03 \end{bmatrix}$$

$$= 250\begin{bmatrix} 0{,}03 & 0{,}02 & 0{,}01 \\ 0{,}02 & 0{,}04 & 0{,}02 \\ 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}03 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7{,}5 & 5 & 2{,}5 \\ 5 & 10 & 5 \\ 2{,}5 & 5 & 7{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}5 & 5 & 2{,}5 \\ 5 & 10 & 5 \\ 2{,}5 & 5 & 7{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 16 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240 \\ 340 \\ 280 \end{bmatrix}$$

D'où A doit produire 240 unités,
B doit produire 340 unités et
C doit produire 280 unités.

8. $P = QP + D$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \\ \mathbf{E} \\ \mathbf{A} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \mathbf{E} & \mathbf{A} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$(I - Q) = \begin{bmatrix} 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix}, \text{ dét } (I - Q) = 0{,}5 \neq 0$$

$$(I - Q)^{-1} = \frac{1}{0{,}5}\begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1{,}8 \end{bmatrix}$$

Puisque $P = (I - Q)^{-1}D$, (théorème 3.22)

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 24 \end{bmatrix}$$

La production totale d'électricité doit être de 32 millions de dollars et la production totale d'aluminium doit être de 24 millions de dollars.

Exercices récapitulatifs (page 170)

1. a) 5 c) 17 e) 6 g) Non défini

2. a) $\frac{23}{3}$ c) 9 e) -12

3. a) 23 u² c) 25 u²

4. a) 9 c) 16

5. b) 120 d) 5 f) -10 h) 5

10. a) Ellipse b) Deux droites non parallèles

11. a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{2}{33} & \frac{-5}{33} \end{bmatrix}$

b) La matrice n'est pas inversible.

c) La matrice n'est pas inversible.

d) $\begin{bmatrix} \frac{6}{19} & \frac{3}{19} & \frac{-1}{19} \\ \frac{4}{19} & \frac{2}{19} & \frac{-7}{19} \\ \frac{-15}{38} & \frac{1}{19} & \frac{6}{19} \end{bmatrix}$

12. a) La matrice A est inversible si $x \neq -3$ et $x \neq 2$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{x}{(x+3)(x-2)} & \frac{-2}{(x+3)(x-2)} \\ \frac{-3}{(x+3)(x-2)} & \frac{x+1}{(x+3)(x-2)} \end{bmatrix}$$

c) La matrice C est inversible si $a \neq b$ et $a \neq -b$.

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2-b^2} & \frac{-b}{a^2-b^2} \\ \frac{-b}{a^2-b^2} & \frac{a}{a^2-b^2} \end{bmatrix}$$

e) dét $F = 0$, $\forall\, a, b$ et $c \in \mathbb{R}$, d'où F n'est jamais inversible.

g) La matrice H est inversible, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a^2 & -2a & 1 \end{bmatrix}$$

13. a) $u = \frac{1}{2}$ et $v = \frac{2}{3}$ c) $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$

14. b) $x = 1$, $y = 3$ et $z = -2$ d) $x = 2$, $y = 0$, $z = -3$ et $w = 2$

17. b) A : 65 000 $, B : 103 750 $ et C : 140 625 $

19. 8200 $ à 3 %, 14 800 $ à 2 % et 17 000 $ à 1 %

20. a) $I_1 = 2$ ampères, $I_2 = -3$ ampères, $I_3 = -1$ ampère

24. a) i) $\frac{1}{2}$ b) i) -3

c) i) 8 d) i) 4

e) i) 162 f) i) 1

g) i) 144 h) i) $\frac{-2}{3}$

i) i) 8 j) i) Impossible

25. a) 2 c) 4 e) 1

28. a) $a = 49$ et $b = -130$

b) $y = 1$ et $x = -3$

Problèmes de synthèse (page 175)

1. a) i) 3

b) i) -10

c) i) 10

d) i) 6

e) i) -111

f) i) $\frac{-1}{111}$

g) i) $\begin{bmatrix} 1 & 10 & -16 \\ -14 & -29 & 2 \\ -35 & -17 & 5 \end{bmatrix}$

h) i) $\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

i) i) 12 321

j) i) 3

3. a) $(x - y)(2xy + x + y)$

4. a) dét $A = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

6. a) $\{(2, 0, -4)\}$

b) $\{(2, t - 2, -1 - t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

c) Ø

d) $\left\{\left(\frac{-t}{2}, \frac{-5t}{2}, t\right) \middle| t \in \mathbb{R}\right\}$

10. a) i) $x = \frac{2}{3}$ et $y = -1$

b) ii) $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ ou $x = 1$, $y = 3$ et $z = 7$

11. c) Le quatrième alliage est composé d'environ 15,61 kg de R, 24,98 kg de S et 23,41 kg de T.

15. a) A : 82 754 114 $; E : 64 505 465 $;

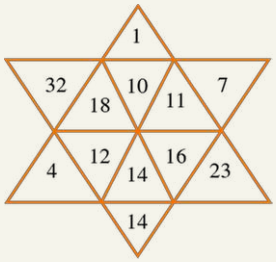
M : 87 718 410 $ et T : 70 944 935 $

17. a) ii) 44 lits, 17 chambres (8 individuelles, 6 à deux lits et 3 ordinaires) et 6 techniciens

iii) 65 lits, 22 chambres (7 individuelles, 9 à deux lits et 6 ordinaires) et 9 techniciens

18. a) $x = 46$ °C et $y = 59$ °C

19. $a = 12$
$b = 18$
$c = 10$
$d = 11$
$e = 16$
$f = 14$



20. a) Parabole b) Hyperbole

21. a) $x^2 - xy - 9y^2 + 4x + y + 10 = 0$; hyperbole

b) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 108y + 124 = 0$; ellipse

22. $A = 1800 \text{ u}^2$

26. a) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$;

$x = 2a + b, y = -4a - b - 3c, z = 3a + b + 2c$

c) Si $a \neq 21$, E.-S. $= \emptyset$ et

si $a = 21$, E.-S. $= \left\{ \left(\frac{-53 + 3t}{3}, \frac{29 - 6t}{3}, t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

28. a) $a = -1, b = 5, c = -2$ et $d = -8$

b) dét $A = -8$

e) Les valeurs propres sont -1, 2 et 4.

31. a) i) $A = I_{n \times n}$

32. $A^3 = O_{n \times n}$

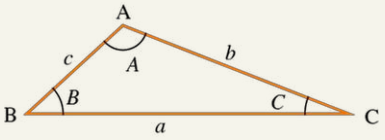
CHAPITRE 4

Exercices préliminaires (page 183)

1. a) $\sin\theta = \frac{b}{c}$; $\cos\theta = \frac{a}{c}$; $\tan\theta = \frac{b}{a}$

b) $a^2 + b^2 = c^2$

2.



a) $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

b) i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

ii) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

iii) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

3. a) $\theta \approx 20{,}27°$ b) $\theta \approx 38{,}66°$ c) $\theta \approx 36{,}87°$

4. $a \approx 2{,}66$; $B \approx 95{,}18°$; $C \approx 52{,}82°$

5. $x \approx 23{,}64$ m et $y \approx 18{,}47$ m

6. a) $\alpha = 35°, \beta = 145°$ et $\varphi = 55°$

b) $\alpha = 135°$ et $\varphi = 20°$

7. a) $d(\text{P, Q}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

b) i) $d(\text{A, B}) = 5$ unités

ii) $d(\text{A, C}) = \sqrt{50}$ unités

iii) $d(\text{B, C}) = 5$ unités

c) Puisque $d(\text{A, B}) = d(\text{B, C})$ et que $(d(\text{A, B}))^2 + (d(\text{B, C}))^2 = (d(\text{A, C}))^2$, le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle.

8. a) Les diagonales d'un parallélogramme quelconque se coupent en leur milieu.

b) Les diagonales d'un losange quelconque se coupent en leur milieu et sont orthogonales.

c) Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu, elles sont orthogonales et elles sont de longueur égale.

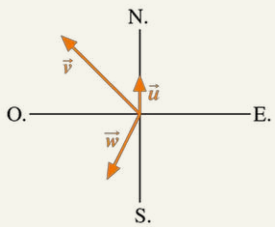
d) Les diagonales d'un rectangle quelconque se coupent en leur milieu et elles sont de longueur égale.

9. a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

b) $V = \frac{Ah}{3}$

Exercices de compréhension 4.1

1.



2. a) $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{FP}$ et $\overrightarrow{ED}$

b) $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{EP}$ et $\overrightarrow{FA}$

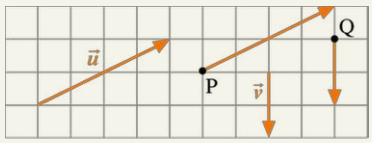
c) $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{DP}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{EF}$

Exercices 4.1 (page 190)

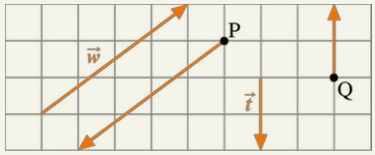
1. a) $\vec{v}_1$, $\vec{v}_6$ et $\vec{v}_{12}$; $\vec{v}_4$ et $\vec{v}_{10}$

b) $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_9$; $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_5$

2. a)



b)



3.

	Origine	Extrémité	Direction	Sens	Norme
$\vec{v}_1$	(0, 0)	(2, 4)	$\theta \approx 63{,}4°$	N.-E.	$2\sqrt{5}$
$\vec{v}_2$	(-1, -2)	(-4, 3)	$\theta \approx 121°$	N.-O.	$\sqrt{34}$
$\vec{v}_3$	(4, -3)	(1, -3)	$\theta = 0°$	O.	3
$\vec{v}_4$	(-4, 1)	(-4, -4)	$\theta = 90°$	S.	5

4. a) $\overrightarrow{DC}$

b) $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$

c) Aucun

d) $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{CM}$

e) $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AC}$

5. a) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{GF}$

b) $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{GC}$

c) $\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$

d) $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{GB}$

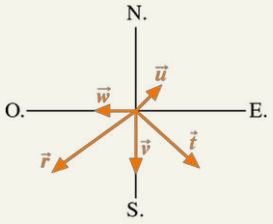
e) $\overrightarrow{AF}$

f) Aucun

g) $\overrightarrow{FD}$

h) $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{HF}$

6.



Exercices de compréhension 4.2

1. a) $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{r} = -\vec{u} - \vec{v}$

c) $\vec{r} = \vec{u} - \vec{v}$

d) $\vec{r} = \vec{v}$

2. a) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG}$ (car $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG}$)

$= \overrightarrow{BG}$ (loi de Chasles)

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$ (car $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$)

$= \overrightarrow{AG}$ (loi de Chasles)

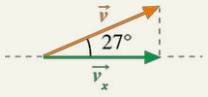
c) $\overrightarrow{HG} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{BA}$ (car $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$)

$= \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GH}$ (car $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GH}$)

$= \overrightarrow{HH}$ (loi de Chasles)

$= \vec{O}$

3. a)

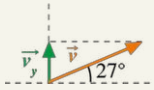


$\|\vec{v}_x\| = \|\vec{v}\| \cos 27°$

$= 5 \cos 27°$

$\approx 4{,}46$

b)



$\|\vec{v}_y\| = \|\vec{v}\| \sin 27°$

$= 5 \sin 27°$

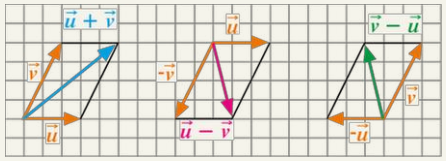
$\approx 2{,}27$

c) $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$

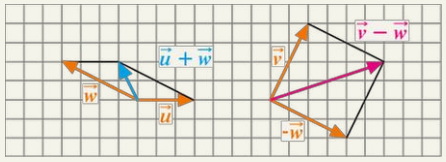
d) $\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}_x\|^2 + \|\vec{v}_y\|^2$

Exercices 4.2 (page 203)

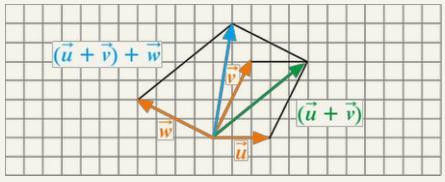
1. a)



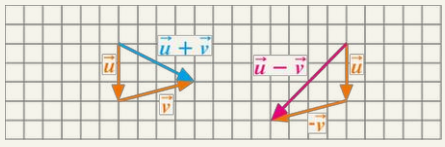
b)



c)

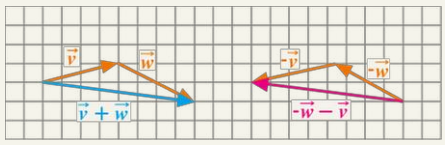


2. a)

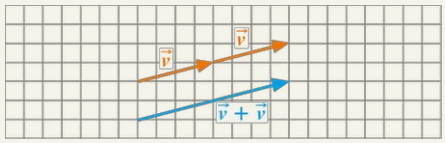


2. (*suite*)

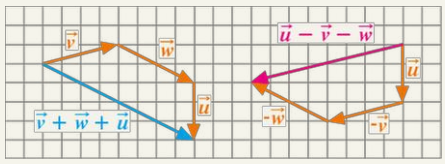
b)



c)



d)



3. b), c) et e)

4. a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

e) $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

f) $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$;
$\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}$

5. a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$ (car $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$)
$= \overrightarrow{AF}$ (loi de Chasles)

b) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH}$ (car $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DH}$)
$= \overrightarrow{CH}$ (loi de Chasles)

c) $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GF}$ (car $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{GF}$)
$= \overrightarrow{FF}$ (loi de Chasles)
$= \vec{O}$

d) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC}$ (car $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FC}$)
$= \overrightarrow{AC}$ (loi de Chasles)

e) $\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HD}$ (car $-\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{HD}$)
$= \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GC}$ (car $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{GC}$)
$= \overrightarrow{EC}$ (loi de Chasles)

f) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG}$
(car $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG}$)
$= \overrightarrow{AG}$ (loi de Chasles)

g) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$
(car $-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD}$ et $-\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DB}$)
$= \overrightarrow{BB}$ (loi de Chasles)
$= \vec{O}$

h) $\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CE}$
(car $-\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AH}$ et $-\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CE}$)
$= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CE}$ (commutativité)
$= \overrightarrow{AE}$ (loi de Chasles)

i) $\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{FA}$
$= \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AF}$ (car $-\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EC}$ et $-\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AF}$)
$= \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF}$ (loi de Chasles)
$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{AF}$ (car $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}$)
$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}$ (commutativité)
$= \overrightarrow{BG}$ (loi de Chasles)

j) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{GA}$
$= \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA}$ (commutativité)
$= (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA})$ (associativité)
$= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AA}$ (loi de Chasles)
$= \overrightarrow{EB}$ (car $\overrightarrow{AA} = \vec{O}$)

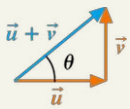
6. a) $\|\overrightarrow{DG}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{DC}\|^2 + \|\overrightarrow{CG}\|^2}$ (Pythagore)
$= \sqrt{16 + 121}$ (car $\|\overrightarrow{CG}\| = \|\overrightarrow{DH}\|$)
$= \sqrt{137}$

b) $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{52}$ (de la même façon qu'en a))

c) $\|\overrightarrow{BG}\| = \sqrt{157}$ (de la même façon qu'en a))

d) $\|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{CG}\|^2}$ (Pythagore)
$= \sqrt{52 + 121}$
$= \sqrt{173}$

7. a)



Norme : $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2}$ (Pythagore)
$= \sqrt{4^2 + 3^2}$
$= 5$

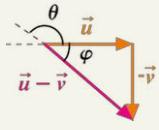
Direction : $\theta = \text{Arc tan}\left(\frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}\right)$, car $\tan\theta = \left(\frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}\right)$

$\theta = \text{Arc tan}\left(\frac{3}{4}\right) = 36{,}869\ldots$

d'où $\theta \approx 36{,}9°$

Sens : N.-E.

b)



Norme : $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 + \|-\vec{v}\|^2}$ (Pythagore)
$= \sqrt{4^2 + 3^2}$
$= 5$

Direction : $\varphi = \text{Arc tan}\left(\frac{3}{4}\right) = 36{,}869\ldots$

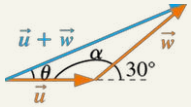
ainsi $\theta = 180° - 36{,}869\ldots° = 143{,}130\ldots°$

d'où $\theta \approx 143{,}1°$

Sens : S.-E.

7. (*suite*)

c)



Norme : $\|\vec{u}+\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{w}\|\cos\alpha$ (loi des cosinus)

$= 16 + 25 - 40\cos 150°$

$= 75{,}641\ldots$

ainsi $\|\vec{u}+\vec{w}\| = 8{,}697\ldots$

d'où $\|\vec{u}+\vec{w}\| \approx 8{,}7$

Direction : $\dfrac{\sin\theta}{\|\vec{w}\|} = \dfrac{\sin\alpha}{\|\vec{u}+\vec{w}\|}$ (loi des sinus)

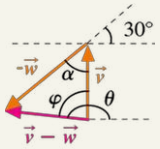
$\dfrac{\sin\theta}{5} = \dfrac{\sin 150°}{8{,}697\ldots}$

$\theta = \text{Arc sin}\left(\dfrac{5\sin 150°}{8{,}697\ldots}\right) = 16{,}705\ldots$

d'où $\theta \approx 16{,}7°$

Sens : N.-E.

d)



Norme : $\|\vec{v}-\vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|-\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{v}\|\|-\vec{w}\|\cos\alpha$ (loi des cosinus)

$= 9 + 25 - 30\cos 60°$

$= 19$

d'où $\|\vec{v}-\vec{w}\| \approx 4{,}36$

Direction : $\dfrac{\sin\varphi}{\|-\vec{w}\|} = \dfrac{\sin\alpha}{\|\vec{v}-\vec{w}\|}$ (loi des sinus)

$\dfrac{\sin\varphi}{5} = \dfrac{\sin 60°}{\sqrt{19}}$

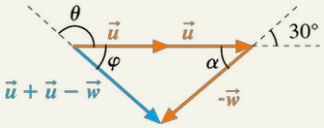
$\varphi = \text{Arc sin}\left(\dfrac{5\sin 60°}{\sqrt{19}}\right) = 83{,}413\ldots$

d'où $\theta \approx 173{,}4°$ (car $\theta = 90° + \varphi$)

Sens : N.-O.

e) Puisque $\vec{u} - \vec{w} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{u} - \vec{w}$, (commutativité)

construisons le vecteur $\vec{u} + \vec{u} - \vec{w}$.



Norme : Nous savons que $\|\vec{u}+\vec{u}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{u}\| = 8$.

$\|(\vec{u}+\vec{u})-\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}+\vec{u}\|^2 + \|-\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{u}+\vec{u}\|\|-\vec{w}\|\cos\alpha$

$= 64 + 25 - 80\cos 30°$

$= 19{,}717\ldots$

ainsi $\|\vec{u}+\vec{u}-\vec{w}\| = 4{,}440\ldots$

d'où $\|\vec{u}+\vec{u}-\vec{w}\| \approx 4{,}44$

Direction : $\dfrac{\sin\varphi}{\|-\vec{w}\|} = \dfrac{\sin\alpha}{\|\vec{u}+\vec{u}-\vec{w}\|}$

$\dfrac{\sin\varphi}{5} = \dfrac{\sin 30°}{4{,}440\ldots}$

$\varphi = \text{Arc sin}\left(\dfrac{5\sin 30°}{4{,}440\ldots}\right) = 34{,}263\ldots$

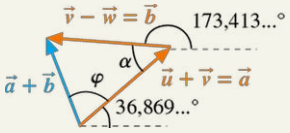
d'où $\theta \approx 145{,}7°$ (car $\theta = 180° - \varphi$)

Sens : S.-E.

f) Utilisons les résultats trouvés en a) et en d), c'est-à-dire

$\|\vec{u}+\vec{v}\| = 5$, $\quad \theta_{(\vec{u}+\vec{v})} = 36{,}869\ldots°$, N.-E.

$\|\vec{v}-\vec{w}\| = \sqrt{19}$, $\quad \theta_{(\vec{v}-\vec{w})} = 173{,}413\ldots°$, N.-O.



$\alpha = 36{,}869\ldots° + (180° - 173{,}413\ldots°) = 43{,}456\ldots°$

Norme : $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\alpha$ (loi des cosinus)

$= 25 + 19 - 2(5)\sqrt{19}\cos(43{,}456\ldots°)$

$= 12{,}358\ldots$

ainsi $\|\vec{a}+\vec{b}\| = 3{,}515\ldots$

d'où $\|\vec{a}+\vec{b}\| \approx 3{,}5$

Direction : $\dfrac{\sin\varphi}{\|\vec{b}\|} = \dfrac{\sin\alpha}{\|\vec{a}+\vec{b}\|}$ (loi des sinus)

$\dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{19}} = \dfrac{\sin(43{,}456\ldots°)}{3{,}515\ldots}$

$\varphi = \text{Arc sin}\left(\dfrac{\sqrt{19}\sin(43{,}456\ldots°)}{3{,}515\ldots}\right)$

$= 58{,}518\ldots$

ainsi $\theta = 36{,}869\ldots° + 58{,}518\ldots° = 95{,}388\ldots°$

d'où $\theta \approx 95{,}4°$

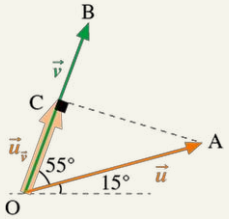
Sens : N.-O.

8. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

a) $\|\vec{u}_{\vec{v}}\| = \|\vec{u}\|\cos 55°$

$= 9\cos 55°$

$\approx 5{,}16$

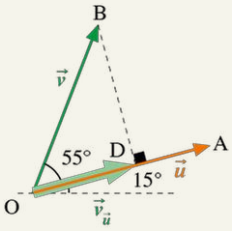


8. (*suite*)

b) $\|\vec{v}_{\vec{u}}\| = \|\vec{v}\| \cos 55°$

$= 8 \cos 55°$

$\approx 4{,}59$



9. a) $\|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}\|$

d'où $\|\vec{F}_1\| = 200$ N

b) $\|\vec{F}_1\| + \|\vec{F}_2\| = \|\vec{F}\|$

$2\|\vec{F}_1\| = 200$

d'où $\|\vec{F}_1\| = 100$ N

c) $\|\vec{F}_1\| \cos 45° + \|\vec{F}_2\| \cos 45° = \|\vec{F}\|$

$2\|\vec{F}_1\| \cos 45° = 200$

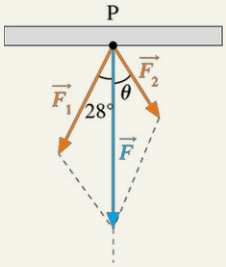
d'où $\|\vec{F}_1\| = \dfrac{100}{\cos 45°}$ N, c'est-à-dire $\|\vec{F}_1\| \approx 141{,}4$ N

d) $\|\vec{F}_1\| \cos \theta + \|\vec{F}_1\| \cos \theta = \|\vec{F}\|$

$2\|\vec{F}_1\| \cos \theta = 200$

d'où $\|\vec{F}_1\| = \dfrac{100}{\cos \theta}$ N, où $0° \leq \theta < 90°$

10.



a) Puisque $\vec{F}$ est verticale,

$\|\vec{F}_1\| \sin 28° = \|\vec{F}_2\| \sin \theta$

$\sin \theta = \dfrac{40 \sin 28°}{30}$

$\sin \theta = 0{,}625\ldots$

$\theta = 38{,}752\ldots°$

d'où $\theta \approx 38{,}8°$

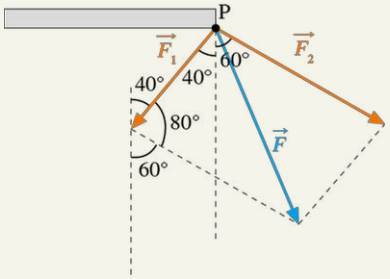
b) $\|\vec{F}\| = \|\vec{F}_1\| \cos 28° + \|\vec{F}_2\| \cos 38{,}752\ldots°$

$= 40 \cos 28° + 30 \cos 38{,}752\ldots°$

$= 58{,}713\ldots$

d'où $\|\vec{F}\| \approx 58{,}7$ N

11.



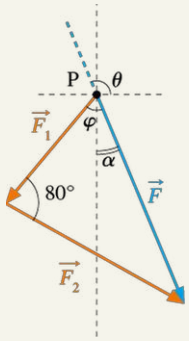
Par la loi des cosinus,

$\|\vec{F}\|^2 = \|\vec{F}_1\|^2 + \|\vec{F}_2\|^2 - 2\|\vec{F}_1\|\|\vec{F}_2\| \cos 80°$

$= 200^2 + 300^2 - 2(200)(300) \cos 80°$

$= 109\,162{,}218\ldots$

$\|\vec{F}\| = 330{,}397\ldots$



Par la loi des sinus,

$\dfrac{\sin \varphi}{\|\vec{F}_2\|} = \dfrac{\sin 80°}{\|\vec{F}\|}$

$\sin \varphi = \dfrac{300 \sin 80°}{330{,}397\ldots} = 0{,}894\ldots$

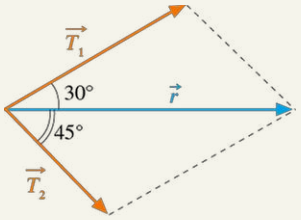
$\varphi = 63{,}406\ldots°$

$\alpha = \varphi - 40° = 23{,}406\ldots°$

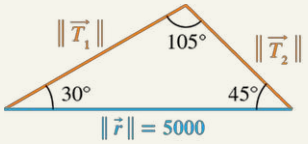
$\theta = 90° + \alpha = 113{,}406\ldots°$

d'où $\|\vec{F}\| \approx 330{,}4$ N, $\theta \approx 113{,}4°$ et le sens est S.-E.

12.



où $\|\vec{r}\| = 5000$ N



12. (*suite*)

$$\frac{\|\vec{T}_1\|}{\sin 45°} = \frac{\|\vec{r}\|}{\sin 105°} \quad \text{(loi des sinus)}$$

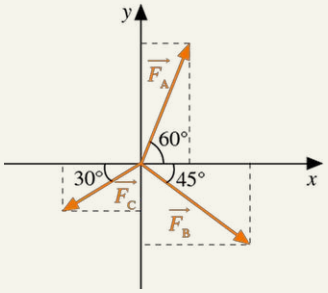
$$\|\vec{T}_1\| = \frac{5000\ (\sin 45°)}{\sin 105°} = 3660{,}25\ldots$$

$$\frac{\|\vec{T}_2\|}{\sin 30°} = \frac{\|\vec{r}\|}{\sin 105°} \quad \text{(loi des sinus)}$$

$$\|\vec{T}_2\| = \frac{5000\ (\sin 30°)}{\sin 105°} = 2588{,}19\ldots$$

d'où $\|\vec{T}_1\| \approx 3660$ N et $\|\vec{T}_2\| \approx 2588$ N

13. a)



Soit $\vec{F}_{rés} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C$.

$$\|\vec{F}_{rés\,x}\| = \left|\|\vec{F}_{Ax}\| + \|\vec{F}_{Bx}\| - \|\vec{F}_{Cx}\|\right|$$

$$= |180 \cos 60° + 200 \cos 45° - 150 \cos 30°|$$

$$= |101{,}517\ldots|$$

$$= 101{,}517\ldots$$

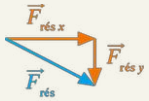
$$\|\vec{F}_{rés\,y}\| = \left|\|\vec{F}_{Ay}\| - \|\vec{F}_{By}\| - \|\vec{F}_{Cy}\|\right|$$

$$= |180 \sin 60° - 200 \sin 45° - 150 \sin 30°|$$

$$= |-60{,}536\ldots|$$

$$= 60{,}536\ldots$$

Représentation de $\vec{F}_{rés\,x}$, $\vec{F}_{rés\,y}$ et $\vec{F}_{rés}$

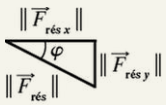


Déterminons la norme de $\vec{F}_{rés}$.

$$\|\vec{F}_{rés}\|^2 = \|\vec{F}_{rés\,x}\|^2 + \|\vec{F}_{rés\,y}\|^2$$

$$= (101{,}517\ldots)^2 + (60{,}536\ldots)^2$$

d'où $\|\vec{F}_{rés}\| \approx 118{,}2$ N



Déterminons la direction θ, où $\theta = 180° - \varphi$.

$$\tan \varphi = \frac{\|\vec{F}_{rés\,y}\|}{\|\vec{F}_{rés\,x}\|} = \frac{60{,}536\ldots}{101{,}517\ldots} = 0{,}596\ldots$$

$\varphi = \text{Arc tan}\ (0{,}596\ldots) = 30{,}808\ldots°$

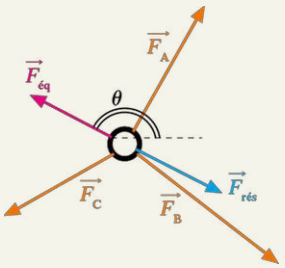
d'où $\theta \approx 149{,}2°$ (car $\theta = 180° - \varphi$)

Le sens de $\vec{F}_{rés}$ est S.-E.

b) La $\vec{F}_{éq}$ est le vecteur opposé à $\vec{F}_{rés}$.

D'où $\|\vec{F}_{éq}\| \approx 118{,}2$ N, $\theta \approx 149{,}2°$ et le sens est N.-O.

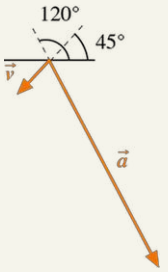
c)



$\theta \approx 149{,}2°$

14. a) Le vecteur $\vec{a}$ représente la vitesse de l'avion.

Le vecteur $\vec{v}$ représente la vitesse du vent.



b) Le vecteur $\vec{r}$ représente la vitesse réelle de l'avion par rapport au sol.

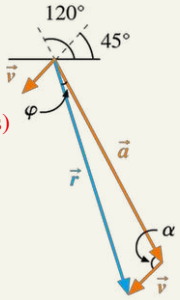
Norme :

$$\|\vec{r}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{a}\|^2 - 2\|\vec{v}\|\,\|\vec{a}\| \cos \alpha \quad \text{(loi des cosinus)}$$

$$= 25^2 + 150^2 - 2(25)(150) \cos (105°) \quad \text{(car } \alpha = (180° - 120°) + 45°\text{)}$$

$$= 25\,066{,}142\ldots$$

d'où $\|\vec{r}\| \approx 158{,}3$ km/h



Direction : $\dfrac{\sin \varphi}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{\sin \alpha}{\|\vec{r}\|}$ (loi des sinus)

$$\frac{\sin \varphi}{25} = \frac{\sin 105°}{158{,}322\ldots}$$

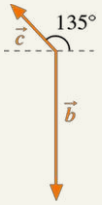
$\sin \varphi = 0{,}152\ldots$, donc $\varphi = 8{,}773\ldots°$

d'où $\theta_{(\vec{r})} \approx 111{,}2°$ (car $\theta_{(\vec{r})} = (120° - \varphi)$)

Sens : S.-E.

15. a) Le vecteur $\vec{b}$ représente la vitesse du bateau.

Le vecteur $\vec{c}$ représente la vitesse du courant.



b) Le vecteur $\vec{r}$ représente la vitesse réelle du bateau.

Norme : $\|\vec{r}\|^2 = \|\vec{b}\|^2 + \|\vec{c}\|^2 - 2\|\vec{b}\|\|\vec{c}\| \cos \alpha$ (loi des cosinus)

$$= (25)^2 + (10)^2 - 2(25)(10) \cos 45°$$

$$= 371{,}446\ldots$$

d'où $\|\vec{r}\| \approx 19{,}3$ nœuds.

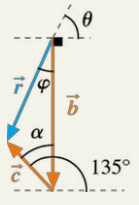
Direction : $\dfrac{\sin \varphi}{\|\vec{c}\|} = \dfrac{\sin \alpha}{\|\vec{r}\|}$ (loi des sinus)

$$\frac{\sin \varphi}{10} = \frac{\sin 45°}{19{,}272\ldots}$$

$\sin \varphi = 0{,}366\ldots$, donc $\varphi = 21{,}523\ldots°$

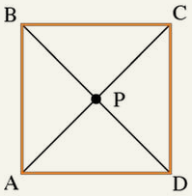
d'où $\theta \approx 68{,}5°$ (car $\theta = 90° - \varphi$)

Sens : S.-O.



Exercice de compréhension 4.3

1.



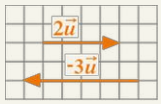
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}$ (loi de Chasles)

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ (P étant le point milieu de $\overline{AC}$ et de $\overline{DB}$)

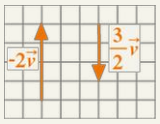
d'où $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ (car $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BD}$)

Exercices 4.3 (page 212)

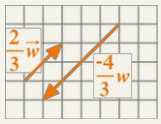
1. a)



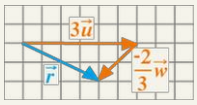
b)



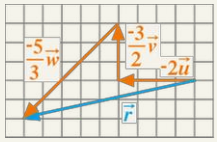
c)



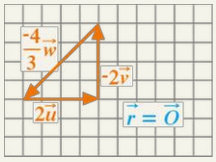
d)



e)



f)



2. a) $\|3\vec{v}\| = |3|\,\|\vec{v}\| = 36$

b) $\left\|\frac{1}{12}\vec{v}\right\| = \left|\frac{1}{12}\right|\|\vec{v}\| = 1$

c) $\|-5\vec{v}\| = |-5|\,\|\vec{v}\| = 60$

d) $\left\|\frac{-1}{3}\vec{v}\right\| = \left|\frac{-1}{3}\right|\|\vec{v}\| = 4$

e) $\left\|\frac{-1}{4}(3\vec{v})\right\| = \left|\frac{-1}{4}\right|\|3\vec{v}\| = \frac{1}{4}|3|\,\|\vec{v}\| = 9$

f) $\|0\vec{v}\| = |0|\,\|\vec{v}\| = 0$

3. a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}) - \overrightarrow{BA}$

$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA}$

$= \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

$= 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD}$

d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

$= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{AA}$

$= \vec{O}$

e) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DF}$

$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FD}$

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD})$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}$

$= 2\overrightarrow{AD}$

4. a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH}$

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD})$

$= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}$

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}$ (voir a))

$= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$

$= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG})$ ($\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$)

$= 2\overrightarrow{AG}$ (loi de Chasles)

c) $\|\overrightarrow{AG}\|^2 = \|\overrightarrow{AH}\|^2 + \|\overrightarrow{HG}\|^2$ (Pythagore)

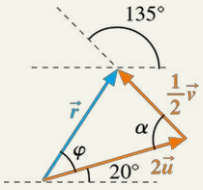
$= \|\overrightarrow{AD}\|^2 + \|\overrightarrow{DH}\|^2 + \|\overrightarrow{HG}\|^2$ (Pythagore)

$= \|\overrightarrow{AD}\|^2 + \|\overrightarrow{AE}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2$

($\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$)

d'où $\|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{AD}\|^2 + \|\overrightarrow{AE}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2}$

5. a)



$\|\vec{u}\| = 5$

$\|\vec{v}\| = 12$

$\alpha = 65°$

Norme : $\|\vec{r}\|^2 = \|2\vec{u}\|^2 + \left\|\frac{1}{2}\vec{v}\right\|^2 - 2\|2\vec{u}\|\left\|\frac{1}{2}\vec{v}\right\|\cos\alpha$ (loi des cosinus)

$= 100 + 36 - 120\cos 65°$

$= 85{,}285\ldots$

ainsi $\|\vec{r}\| = 9{,}235\ldots$

d'où $\|\vec{r}\| \approx 9{,}2$

Direction : $\frac{\sin\varphi}{\left\|\frac{1}{2}\vec{v}\right\|} = \frac{\sin\alpha}{\|\vec{r}\|}$ (loi des sinus)

$\frac{\sin\varphi}{6} = \frac{\sin 65°}{9{,}235\ldots}$

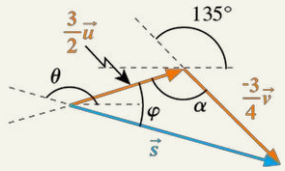
$\varphi = 36{,}073\ldots°$

d'où $\theta \approx 56{,}1°$ (car $\theta = 20° + \varphi$)

Sens : N.-E.

5. (*suite*)

b)



$\|\vec{u}\| = 5$

$\|\vec{v}\| = 12$

$\alpha = 115°$

Norme : $\|\vec{s}\|^2 = \left\|\frac{3}{2}\vec{u}\right\|^2 + \left\|\frac{-3}{4}\vec{v}\right\|^2 - 2\left\|\frac{3}{2}\vec{u}\right\|\left\|\frac{-3}{4}\vec{v}\right\| \cos\alpha$ (loi des cosinus)

$= 56{,}25 + 81 - 135 \cos 115°$

$= 194{,}303\ldots$

ainsi $\|\vec{s}\| = 13{,}939\ldots$

d'où $\|\vec{s}\| \approx 13{,}9$

Direction : $\dfrac{\sin\varphi}{\left\|\frac{-3}{4}\vec{v}\right\|} = \dfrac{\sin\alpha}{\|\vec{s}\|}$

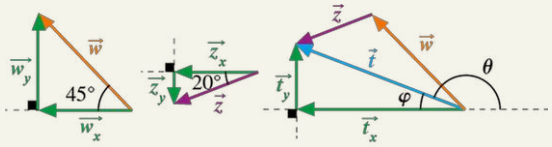
$\dfrac{\sin\varphi}{9} = \dfrac{\sin 115°}{13{,}939\ldots}$ (loi des sinus)

$\varphi = 35{,}814\ldots$

d'où $\theta \approx 164{,}2$ (car $\theta = 180° - (\varphi - 20°)$)

Sens : S.-E.

c) Soit $\vec{w} = \frac{5}{6}\vec{v}$ et $\vec{z} = \frac{-6}{5}\vec{u}$. Ainsi, $\vec{t} = \vec{w} + \vec{z}$



où $\vec{t}_x = \vec{w}_x + \vec{z}_x$ et $\vec{t}_y = \vec{w}_y + \vec{z}_y$.

En calculant, nous obtenons

$\|\vec{w}\| = \left|\frac{5}{6}\right| \|\vec{v}\| = \frac{5}{6}(12) = 10$ et $\|\vec{z}\| = \left|\frac{-6}{5}\right| \|\vec{u}\| = \frac{6}{5}(5) = 6$

$\|\vec{w}_x\| = \|\vec{w}\| \cos 45° = 7{,}071\ldots$; $\|\vec{w}_y\| = \|\vec{w}\| \sin 45° = 7{,}071\ldots$

$\|\vec{z}_x\| = \|\vec{z}\| \cos 20° = 5{,}638\ldots$; $\|\vec{z}_y\| = \|\vec{z}\| \sin 20° = 2{,}052\ldots$

$\|\vec{t}_x\| = \|\vec{w}_x\| + \|\vec{s}_x\| = 7{,}071\ldots + 5{,}638\ldots = 12{,}709\ldots$

$\|\vec{t}_y\| = \|\vec{w}_x\| - \|\vec{w}_y\| = 7{,}071\ldots - 2{,}052\ldots = 5{,}018\ldots$

ainsi, $\|\vec{t}\| = \sqrt{(12{,}709\ldots)^2 + (5{,}018\ldots)^2} = 13{,}664\ldots$

d'où $\|\vec{t}\| \approx 13{,}66$

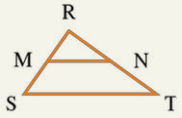
Direction $\tan\varphi = \dfrac{\|\vec{t}_y\|}{\|\vec{t}_x\|} = \dfrac{5{,}018\ldots}{12{,}709\ldots} = 0{,}394\ldots$

$\varphi = 21{,}549\ldots°$

d'où $\theta \approx 158{,}45°$ (car $\theta = 180° - \varphi$)

Le sens du vecteur $\vec{t}$ est N.-O.

6. a) Soit M et N, les points milieux respectifs des segments de droite $\overline{SR}$ et $\overline{RT}$.



$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RN}$ (loi de Chasles)

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{SR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{RT}$ (car M et N sont les points milieux de SR et de RT)

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RT})$ (pseudo-distributivité)

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{ST}$ (loi de Chasles)

ainsi, $\overline{MN} /\!/ \overline{ST}$ et $\|\overline{MN}\| = \frac{1}{2}\|\overline{ST}\|$

b) i) $\overrightarrow{TR} = -\overrightarrow{RT}$ ii) $\overrightarrow{MR} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{RS}$

iii) $\overrightarrow{MN} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{RS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{RT}$ iv) $\overrightarrow{TM} = -\overrightarrow{RT} + \frac{1}{2}\overrightarrow{RS}$

7. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$

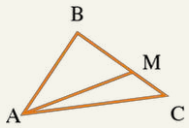
$= \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + k(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BA} + k\overrightarrow{AC}$

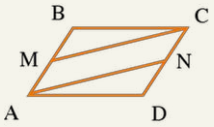
$= \overrightarrow{AB} + k(-\overrightarrow{AB}) + k\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$



d'où $\overrightarrow{AM} = (1 - k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$

8. a) Démontrons que les côtés du quadrilatère AMCN sont parallèles deux à deux.



D'une part, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (car M est le point milieu de $\overline{AB}$)

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ (car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$)

$= \overrightarrow{NC}$ (car N est le point milieu de $\overline{DC}$)

ainsi, $\overrightarrow{AM} /\!/ \overrightarrow{NC}$ (par définition)

D'autre part, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}$ (loi de Chasles)

$= \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{AD}$ ($\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$)

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ (commutativité)

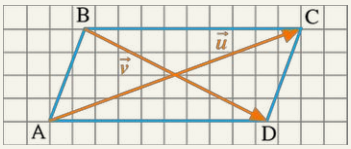
$= \overrightarrow{AN}$ (loi de Chasles)

ainsi, $\overrightarrow{MC} /\!/ \overrightarrow{AN}$ (définition)

D'où AMCN est un parallélogramme.

b) i) Les diagonales du parallélogramme se coupent en leur milieu. Par conséquent, nous obtenons la figure suivante.

8. b) i) (*suite*)



ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

Exercices de compréhension 4.4

1. a) $\vec{u} = \vec{v}$, car dim $(\vec{u})$ = dim $(\vec{v})$ et les composantes respectives sont égales.

b) $\vec{u} \neq \vec{w}$, car les vecteurs ne sont pas de même dimension. (dim $(\vec{u}) = 4$ et dim $(\vec{w}) = 5$)

c) $\vec{r} \neq \vec{t}$, car $r_3 \neq t_3$ ($r_3 = 3$ et $t_3 = -3$)

2. a) $\overrightarrow{AB} = (4 - (-2), -3 - 5) = (6, -8)$

$\overrightarrow{BA} = (-2 - 4, 5 - (-3)) = (-6, 8)$

b) $\overrightarrow{BO} = (0 - 4, 0 - (-3)) = (-4, 3)$

$\overrightarrow{BB} = (4 - 4, -3 - (-3)) = (0, 0)$

c) $\overrightarrow{CD} = (0 - (-1), -2 - 3, -5 - (-5)) = (1, -5, 0)$

$\overrightarrow{DC} = (-1 - 0, 3 - (-2), -5 - (-5)) = (-1, 5, 0)$

d) $\overrightarrow{OC} = (-1 - 0, 3 - 0, -5 - 0) = (-1, 3, -5)$

$\overrightarrow{DO} = (0 - 0, 0 - (-2), 0 - (-5)) = (0, 2, 5)$

3. a) Dans $\mathbb{R}^4$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$ et $\vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$

b) Dans $\mathbb{R}^5$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0, 0)$ et $\vec{e}_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$

Exercices 4.4 (page 224)

1. a) dim $(\vec{u}) = 3$

b) dim $(\vec{v}) = 5$

c) dim $(\vec{w}) = 24$

d) dim $(\vec{e}_3) = 6$

2. a) $\vec{O} = (0, 0, 0, 0, 0)$

b) $\vec{O} = \underbrace{(0, 0, 0, \ldots, 0)}_{12 \text{ composantes}}$

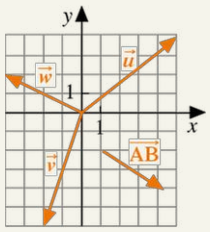
c) $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$

d) $\vec{e}_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$

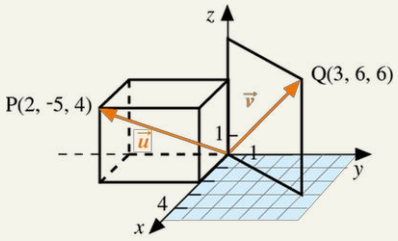
e) $\vec{j} = (0, 1)$

f) $\vec{j} = (0, 1, 0)$

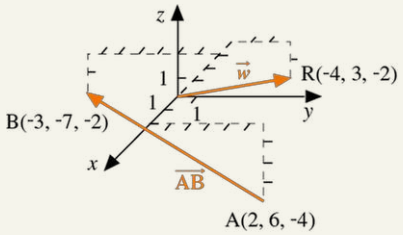
3.



4. a)



b)



5. a) Non, car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas de même dimension.

b) Oui.

c) Non, car les composantes respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont différentes.

d) Non, car les deux vecteurs ne sont pas de même dimension.

e) Oui.

6. a) $(3, a) = (b, -2)$. D'où $b = 3$ et $a = -2$.

b) $(2k, -3k) = (8, a)$. D'où $k = 4$ et $a = -12$.

c) $(a - 2, 2b - a) = (b, 1)$. D'où $a = 5$ et $b = 3$.

d) $(a^2, a + b) = (4, 5)$.
D'où $a = -2$ et $b = 7$, ou $a = 2$ et $b = 3$.

e) $(2a, 9, 4c) = (7, 3b, -8)$. D'où $a = \frac{7}{2}$, $b = 3$ et $c = -2$.

f) $(2a, 4, 2b) = \left(kb, \frac{-4k}{3}, -2k\right)$. D'où $k = -3$, $b = 3$ et $a = \frac{-9}{2}$.

g) $(a - b, 2a + c, 18) = (3, 6, 3b - 3c)$.
D'où $a = 5$, $b = 2$ et $c = -4$.

6. (*suite*)

h) $(a^3, a^2 + 2b, 3a + b) = (-8, 16, 8c^2)$.
D'où $a = -2$, $b = 6$ et $c = 0$.

i) $a = 0$, $b = 7$ et $c = 7$

j) $a = 5$, $b = 2$ et $c = -14$

k) $a \in \mathbb{R}$

l) $k = -2$, $a = -2$, $b = -6$ et $c = 2$

7. a) $\overrightarrow{OA} = (5 - 0, -3 - 0) = (5, -3)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-1 - 5, 7 - (-3)) = (-6, 10)$

c) $\overrightarrow{BA} = (5 - (-1), -3 - 7) = (6, -10)$

d) $\overrightarrow{BB} = (-1 - (-1), 7 - 7) = (0, 0)$

e) $\overrightarrow{PQ} = (-5 - 3, 0 - (-2), 8 - 4) = (-8, 2, 4)$

f) $\overrightarrow{QP} = (3 - (-5), -2 - 0, 4 - 8) = (8, -2, -4)$

g) $\overrightarrow{PO} = (0 - 3, 0 - (-2), 0 - 4) = (-3, 2, -4)$

h) $\overrightarrow{PP} = (3 - 3, -2 - (-2), 4 - 4) = (0, 0, 0)$

8. a) i) $\overrightarrow{PQ} = (x_q - 3, y_q + 1)$ et $\vec{u} = (-1, 4)$

Puisque $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$, $x_q - 3 = -1$ et $y_q + 1 = 4$.

Donc, $x_q = 2$ et $y_q = 3$.

D'où Q(2, 3).

ii) $\overrightarrow{QP} = (3 - x_q, -1 - y_q)$ et $\vec{v} = (5, -3)$

Puisque $\overrightarrow{QP} = \vec{v}$, $3 - x_q = 5$ et $-1 - y_q = -3$.

Donc, $x_q = -2$ et $y_q = 2$.

D'où Q(-2, 2).

iii) Q(1, -4)

b) i) $\overrightarrow{AB} = (x_b - 5, y_b - 3, z_b + 4)$ et $\vec{u} = (4, -2, 1)$

Puisque $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$,
$x_b - 5 = 4$, $y_b - 3 = -2$ et $z_b + 4 = 1$.

Donc, $x_b = 9$, $y_b = 1$ et $z_b = -3$.

D'où B(9, 1, -3).

ii) B(1, 5, -5) iii) B(-4, 2, -1)

9. a) i) $\|\vec{u}\| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$

ii) $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(3 - 5)^2 + (-2 - (-1))^2} = \sqrt{5}$

b) i) $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

ii) $\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (-5 - (-1))^2 + (2 - 3)^2}$
$= \sqrt{21}$

c) $\vec{w} = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2 + 1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{30}$

10. a) $\vec{j}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

b) $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ car $\|\vec{v}\| = 1$, $\|\vec{w}\| = 1$ et $\|\vec{t}\| = 1$

Exercices de compréhension 4.5

1. $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (0, 1, 4, -2) + (1, -3, 5, 6) + (2, 5, -1, 7)$
$= (0 + 1 + 2, 1 + (-3) + 5, 4 + 5 + (-1), -2 + 6 + 7)$
$= (3, 3, 8, 11)$

2. a) $5\vec{u} = 5(-3, 2) = (-15, 10)$

b) $0\vec{v} = 0(1, -2, 0) = (0, 0, 0)$

c) $-2\vec{w} = -2(4, -1, 0, 5) = (-8, 2, 0, -10)$

3. Puisque $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2} = 13$,

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \frac{1}{13}(3, -4, 12) = \left(\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}\right)$$

Donc $\vec{u} = \left(\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}\right)$ et $-\vec{u} = \left(\frac{-3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{-12}{13}\right)$

sont les deux vecteurs unitaires parallèles à $\vec{v}$.

Exercices 4.5 (page 234)

1. a) $\vec{u} = 3(1, 0) + 4(0, 1) = (3, 4)$
$\vec{v} = -2(1, 0) + 7(0, 1) = (-2, 7)$
$\vec{w} = 5(1, 0) - (0, 1) = (5, -1)$

b) En posant $(a, b) = k_1\vec{i} + k_2\vec{j}$, nous obtenons
$(a, b) = k_1(1, 0) + k_2(0, 1)$
$= (k_1, 0) + (0, k_2)$
$= (k_1, k_2)$
Donc, $k_1 = a$ et $k_2 = b$
d'où $(a, b) = a\vec{i} + b\vec{j}$

c) $\vec{u_1} = 2\vec{i} + 8\vec{j}$
$\vec{u_2} = 0\vec{i} - 5\vec{j}$
$\vec{u_3} = 14\vec{i} + 9\vec{j}$

d) $\vec{u} = 2(1, 0, 0) - 3(0, 1, 0) + 5(0, 0, 1) = (2, -3, 5)$
$\vec{v} = 3(1, 0, 0) - 4(0, 0, 1) = (3, 0, -4)$
$\vec{w} = 7(0, 1, 0) = (0, 7, 0)$

e) En posant $(a, b, c) = k_1\vec{i} + k_2\vec{j} + k_3\vec{k}$, nous obtenons
$(a, b, c) = k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0) + k_3(0, 0, 1)$
$= (k_1, 0, 0) + (0, k_2, 0) + (0, 0, k_3)$
$= (k_1, k_2, k_3)$
Donc, $k_1 = a$, $k_2 = b$, $k_3 = c$
d'où $(a, b, c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

1. (*suite*)

f) $\vec{u_1} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{u_2} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

$\vec{u_3} = 2\vec{i} - 8\vec{j} + 0\vec{k}$

2. a) i) $\vec{r} = (-6, 8)$ ii) $\vec{r} = (-30, 6)$

iii) $\vec{r} = (-4, 2)$ iv) $\vec{r} = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

v) $\vec{r} = (12, 3)$ vi) $\vec{r} = (13, 4)$

b) i) $\vec{r} = (2, 2, 2)$ ii) $\vec{r} = (-4, 1, 0)$

iii) $\vec{r} = (-2, 5, -6)$ iv) $\vec{r} = (6, -6, 18)$

v) $\vec{r} = (6, 9, 19)$ vi) $\vec{r} = (1, 0, 0)$

c) i) $\vec{r} = (14, -12, 0, -2, -32)$ ii) $\vec{r} = (4, 1, -2, 1, -5)$

iii) $\vec{r} = (4, 1, 5, 6)$ iv) $\vec{r} = (-1, 3, -2, 1, 4)$

v) $\vec{r} = (18, 9, -12, 9, -9)$ vi) $\vec{r} = (4, 0, -2, 1, -5)$

3. a) i) $\sqrt{13}$ ii) $\sqrt{89}$ iii) $\sqrt{26}$

iv) -25 v) 1 vi) 4

b) i) $\sqrt{14}$ ii) $\sqrt{99} + \sqrt{65}$ iii) $4\sqrt{65}$

iv) $-4\sqrt{65}$ v) 1 vi) 2

c) i) $\sqrt{83}$

ii) $12\sqrt{5}$

iii) $-3\sqrt{26}$

iv) 1

4. a) i) $\|-3\overrightarrow{BA}\| = \|(3, -21)\| = 15\sqrt{2}$

ii) $\|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA}\| = \|(0, 0)\| = 0$

iii) $\|3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}\| = \|(-1, -9)\| = \sqrt{82}$

b) i) $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}\| = \|(1, 1, 1)\| = \sqrt{3}$

ii) $\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}\| = \|(0, 0, 0)\| = 0$

iii) $\left\|\frac{-7}{\|\overrightarrow{AB} + 0{,}5\overrightarrow{BC}\|}(\overrightarrow{AB} + 0{,}5\overrightarrow{BC})\right\| = \left\|\left(\frac{-7}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-7}{\sqrt{2}}\right)\right\| = 7$

5. a) Puisque $\vec{v} = \frac{-2}{7}\vec{w}$, $\vec{v} /\!/ \vec{w}$, et puisque $\vec{s} = \frac{-5}{6}\vec{u}$, $\vec{s} /\!/ \vec{u}$

b) Puisque $\vec{w} = \frac{-5}{6}\vec{v}$, $\vec{w} /\!/ \vec{v}$, et puisque $\vec{t} = \frac{-2}{7}\vec{u}$, $\vec{t} /\!/ \vec{u}$

6. a) i) $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{s}\|}\vec{s} = \frac{1}{13}(-5, 12) = \left(\frac{-5}{13}, \frac{12}{13}\right)$

ii) $\vec{v} = \frac{-1}{\|\vec{w}\|}\vec{w} = \frac{-1}{\sqrt{30}}(2, -1, 5) = \left(\frac{-2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}\right)$

b) i) $\vec{u_1} = \frac{5}{\|\vec{t}\|}\vec{t} = \left(\frac{-35}{\sqrt{58}}, \frac{15}{\sqrt{58}}\right)$ et

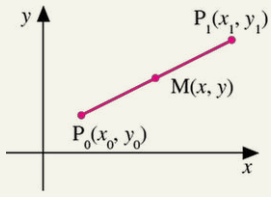
$\vec{u_2} = \frac{-5}{\|\vec{t}\|}\vec{t} = \left(\frac{35}{\sqrt{58}}, \frac{-15}{\sqrt{58}}\right)$

ii) $\overrightarrow{AB} = (-12, 4, 3)$, ainsi

$\vec{v_1} = \frac{4}{\|\overrightarrow{AB}\|}\overrightarrow{AB} = \frac{4}{13}(-12, 4, 3) = \left(\frac{-48}{13}, \frac{16}{13}, \frac{12}{13}\right)$ et

$\vec{v_2} = \frac{-4}{\|\overrightarrow{AB}\|}\overrightarrow{AB} = \frac{-4}{13}(-12, 4, 3) = \left(\frac{48}{13}, \frac{-16}{13}, \frac{-12}{13}\right)$

7. a) i)



Puisque M(x, y) est le point milieu du segment P_0P_1,

$$\overrightarrow{P_0P_1} = 2\overrightarrow{P_0M}$$

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0) = 2(x - x_0, y - y_0)$$

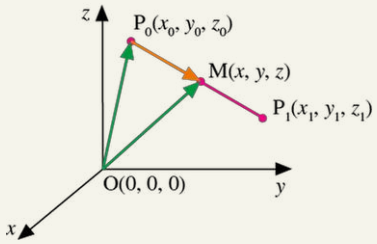
$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0) = (2(x - x_0), 2(y - y_0))$$

$2(x - x_0) = x_1 - x_0$; donc, $x = \frac{x_0 + x_1}{2}$

$2(y - y_0) = y_1 - y_0$; donc, $y = \frac{y_0 + y_1}{2}$

D'où nous obtenons le point M$\left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}\right)$.

ii)



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0M}$ (loi de Chasles)

$= \overrightarrow{OP_0} + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_1}$ (car M est le point milieu de $\overrightarrow{P_0P_1}$)

$= (x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{2}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$

$= (x_0, y_0, z_0) + \left(\frac{x_1 - x_0}{2}, \frac{y_1 - y_0}{2}, \frac{z_1 - z_0}{2}\right)$

$= \left(x_0 + \frac{x_1 - x_0}{2}, y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2}, z_0 + \frac{z_1 - z_0}{2}\right)$

$= \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{z_0 + z_1}{2}\right)$

D'où nous obtenons le point

M$\left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{z_0 + z_1}{2}\right)$.

b) i) M$\left(\frac{0 + (-4)}{2}, \frac{1 + 5}{2}\right)$, d'où M$(-2, 3)$.

ii) M$(0, 0)$

iii) M$\left(\frac{0 + 1}{2}, \frac{0 - 1}{2}, \frac{1 + 1}{2}\right)$, d'où M$\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1\right)$.

iv) M$\left(\frac{12}{35}, \frac{-65}{72}, 0\right)$

8. a) i) Soit P(r, s). Nous avons

$$3\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA}$$

$$3(r - (-6), s - (-2)) = (4 - (-6), 5 - (-2))$$

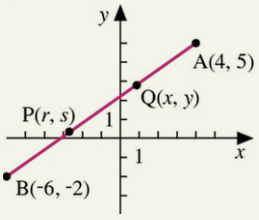
$$3(r + 6, s + 2) = (10, 7)$$

Ainsi, $3r + 18 = 10$

$$r = \frac{-8}{3}$$

et $3s + 6 = 7$

$$s = \frac{1}{3}$$



D'où nous obtenons le point $P\left(\frac{-8}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

De façon analogue, nous trouvons $Q\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

ii) Si R(x, y) est un point situé entre A et B, nous avons

$$5\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BA}$$

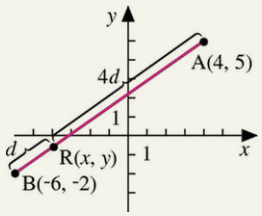
$$5(x + 6, y + 2) = (10, 7)$$

Ainsi, $5x + 30 = 10$

$$x = -4$$

et $5y + 10 = 7$

$$y = \frac{-3}{5}$$



D'où nous obtenons le point $R\left(-4, \frac{-3}{5}\right)$.

Si S(m, n) est un point sur la droite passant par A et B, non situé entre A et B, nous trouvons $S\left(\frac{-28}{3}, \frac{-13}{3}\right)$.

b) i) Soit P(x, y, z) tel que $3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}$.

$$3(x - 2, y + 3, z - 4) = (-3, 8, -7)$$

$(3x - 6, 3y + 9, 3z - 12) = (-3, 8, -7)$. Ainsi,

$3x - 6 = -3$: $3y + 9 = 8$: $3z - 12 = -7$

$x = 1$: $y = \frac{-1}{3}$: $z = \frac{5}{3}$

d'où nous obtenons le point $P\left(1, \frac{-1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

ii) $R\left(\frac{5}{4}, -1, \frac{9}{4}\right)$ et $S\left(\frac{-1}{4}, 3, \frac{-5}{4}\right)$

iii) $Q_1\left(\frac{-1}{2}, \frac{11}{3}, \frac{-11}{6}\right)$ est situé entre A et B ;

$Q_2\left(\frac{-7}{4}, 7, \frac{-19}{4}\right)$ n'est pas situé entre A et B.

9. a) Puisque $\overrightarrow{AB} = (3, 6)$ et que $\overrightarrow{DC} = (3, 6)$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Puisque $\overrightarrow{BC} = (5, 7)$ et que $\overrightarrow{AD} = (5, 7)$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

ABCD est donc un parallélogramme.

b) Soit $M\left(\frac{2 + 10}{2}, \frac{1 + 14}{2}\right)$, c'est-à-dire M(6 ; 7,5),

le point milieu du segment $\overline{AC}$.

Soit $N\left(\frac{5 + 7}{2}, \frac{7 + 8}{2}\right)$, c'est-à-dire N(6 ; 7,5),

le point milieu du segment $\overline{BD}$.

Puisque M et N coïncident, les diagonales se coupent en leur milieu.

10. a) $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RA} - 2\overrightarrow{RB} + 3\overrightarrow{RC}$

$(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$= (3 - x_1, 2 - y_1) - 2(2 - x_1, -4 - y_1) + 3(-3 - x_1, 4 - y_1)$

$= (3 - x_1 - 4 + 2x_1 - 9 - 3x_1, 2 - y_1 + 8 + 2y_1 + 12 - 3y_1)$

Par conséquent,

$x_2 - x_1 = 3 - x_1 - 4 + 2x_1 - 9 - 3x_1 = -10 - 2x_1$

$y_2 - y_1 = 2 - y_1 + 8 + 2y_1 + 12 - 3y_1 = 22 - 2y_1$

d'où $x_1 = -x_2 - 10$ et $y_1 = -y_2 + 22$

b) Si R et S coïncident, alors $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

Donc, $x_1 = -x_1 - 10$ et $y_1 = -y_1 + 22$

$x_1 = -5$ $\quad$ $y_1 = 11$

d'où R(-5, 11) et S(-5, 11)

11. De $\overrightarrow{OA} = (1, 2, 3)$, nous avons A(1, 2, 3) ;

de $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 0\vec{k} = (2, -4, 0)$, nous avons B(2, -4, 0).

Ainsi, $\overrightarrow{AB} = (1, -6, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (4, -8, 2)$ et $\overrightarrow{BC} = (3, -2, 5)$,

donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{46}$, $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{84}$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{38}$.

Puisque $\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2$,

nous avons que $\angle ABC = 90°$,

d'où le triangle ABC est un triangle rectangle en B.

12. a) Le triangle ABC doit être rectangle en A, donc

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 \qquad \text{(Pythagore)}$$

$$((-5)^2 + (1)^2 + (1)^2) + ((2)^2 + (c + 3)^2 + (3)^2)$$

$$= ((7)^2 + (c + 2)^2 + (2)^2)$$

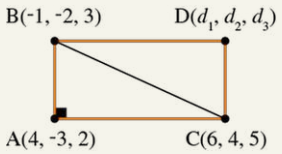
$$27 + 13 + c^2 + 6c + 9 = 53 + c^2 + 4c + 4$$

$$2c = 8$$

d'où $c = 4$

12. (*suite*)

b) Soit D(d_1, d_2, d_3).



ABCD est un rectangle si

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$(-5, 1, 1) = (d_1 - 6, d_2 - 4, d_3 - 5)$

$-5 = d_1 - 6$ | $1 = d_2 - 4$ | $1 = d_3 - 5$

$d_1 = 1$ | $d_2 = 5$ | $d_3 = 6$,

d'où D(1, 5, 6)

c) Aire ABCD $= \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{27}\sqrt{62} = 40{,}914\ldots$

d'où Aire ABCD $\approx 40{,}9$ u^2

13. a) $\overrightarrow{AB} = (6, 1, -3)$ et $\overrightarrow{AC} = (12, 2, 6)$

Déterminons si $\overrightarrow{AB} /\!/ \overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire s'il existe

$k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

$(12, 2, 6) = k(6, 1, -3)$

$(12, 2, 6) = (6k, k, -3k)$

$12 = 6k$ | $2 = k$ | $6 = -3k$

$k = 2$ | $k = 2$ | $k = -2$

Donc, $\overrightarrow{AC} \neq k\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC}$ n'est donc pas parallèle à $\overrightarrow{AB}$.

Par conséquent, les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) $\overrightarrow{BC} = (6, 1, 9)$ et $\overrightarrow{BD} = \left(4, \frac{2}{3}, 6\right)$

Déterminons si $\overrightarrow{BC} /\!/ \overrightarrow{BD}$, c'est-à-dire s'il existe

$k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tel que $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BC}$

$\left(4, \frac{2}{3}, 6\right) = k(6, 1, 9)$

$\left(4, \frac{2}{3}, 6\right) = (6k, k, 9k)$

$4 = 6k$ | $\frac{2}{3} = k$ | $6 = 9k$

$k = \frac{2}{3}$ | $k = \frac{2}{3}$ | $k = \frac{2}{3}$

Donc, $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, ainsi $\overrightarrow{BD} /\!/ \overrightarrow{BC}$

Par conséquent, les points B, C et D sont alignés.

14. Les composantes des vecteurs sont en dollars.

a) $\vec{s} = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$
$= (2289, 1035, 1390, 1641, 1338, 1871, 2195)$

b) $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$
$= (1144{,}50; 517{,}50; 695; 820{,}50; 669; 935{,}50; 1097{,}50)$

c) $\vec{v}_1 = \frac{1}{1{,}1}\vec{v}_2$
$= (990, 450, 600, 710, 580, 810, 950)$

d) $\vec{v}_4 = 1{,}1\vec{v}_3$
$= (1320, 594, 803, 946, 770, 1078, 1265)$

Exercices récapitulatifs (page 238)

3. a) $\overrightarrow{AF}$ c) $\overrightarrow{DF}$ e) $2\overrightarrow{DF}$ g) $2\overrightarrow{FD}$ i) $3\overrightarrow{DB}$

4. a) $\vec{u} + \vec{v}$ c) $\vec{u} + \vec{w}$
e) $2\vec{u} - \vec{v}$ g) $-\vec{u} - 2\vec{v} - 2\vec{w}$

5. b) Environ 7,6 cm d) Environ 8,6 cm
f) Environ 17,2 cm h) 0 cm

7. a) $\vec{O}$

b) Environ 6,17 unités ; environ 16,78°

d) 2 unités

e) Environ 5,53 unités ; environ 9,28°

8. a) $\|\vec{r}\| \approx 2{,}05$, $\theta \approx 148{,}06°$, S.-E.

c) $\|\vec{r}\| \approx 7{,}87$, $\theta \approx 127{,}05°$, N.-O.

9. a) $\|\vec{v}_{\vec{u}}\| \approx 3{,}38$, $\theta = 20°$, S.-O.

12. a) $\|\overrightarrow{F_{1x}}\| \approx 3{,}39$ N et $\|\overrightarrow{F_{1y}}\| \approx 2{,}12$ N

14. Le pilote devra voler à une vitesse approximative de 412 km/h en direction d'environ 136,8° N.-O.

20. b) $\|\overrightarrow{AB}\| = 2\sqrt{5}$; $\|\overrightarrow{OC}\| = 2\sqrt{5}$

c) $\theta \approx 63{,}4°$; S.-O.

22. a) $\overrightarrow{AB} = (-8, -4)$; $\overrightarrow{CA} = (-4, 7)$; $\overrightarrow{DC} = (11, 0)$;
$\overrightarrow{OB} = (-5, 0)$; $\overrightarrow{CO} = (-7, 3)$

b) $\|\overrightarrow{AD}\| = 7\sqrt{2}$; $\|\overrightarrow{OA}\| = 5$; $\|\overrightarrow{BB}\| = 0$

c) $(-46, 29)$

23. a) $\overrightarrow{AB} = (-6, 3, -2)$; $\overrightarrow{BC} = (5, -4, 6)$

b) $\|\overrightarrow{AC}\| = 3\sqrt{2}$; $\|\overrightarrow{BO}\| = \sqrt{5}$

c) $(15, -7, 10)$

24. a) $\overrightarrow{AB} = (-1, -6, 12)$; non défini

b) E(3, -2, 1)

c) F(3, -6, 12)

d) Non défini ; (-2, 10, -17)

e) (11, -10, -3, -6) ; $\sqrt{266}$

f) Non défini

g) $\frac{1}{3}$

h) $Q\left(\frac{2}{3}, 2, -1\right)$; $R\left(\frac{7}{3}, 12, -21\right)$

27. a) $C\left(\frac{-3}{2}, \frac{9}{2}\right)$; $D\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) M(0, 5) ; $N\left(0, \frac{5}{2}\right)$

30. a) $\angle BAC = 90°$, $\angle ABC \approx 50{,}8°$ et $\angle ACB \approx 39{,}2°$

f) Le quadrilatère ABDC est un rectangle.

g) $M\left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Problèmes de synthèse (page 242)

1. b) i) $\left\|(\vec{u} + \vec{v})_{\vec{w}}\right\| \approx 2{,}12$, $\theta = 135°$, N.-O.

ii) $\left\|\vec{w}_{(\vec{u} + \vec{v})}\right\| \approx 1{,}58$, $\theta \approx 63{,}43°$, S.-O.

3. b) $\overrightarrow{CD} = \vec{v} - \vec{u}$; $\overrightarrow{DE} = -\vec{u}$; $\overrightarrow{EF} = -\vec{v}$; $\overrightarrow{FA} = \vec{u} - \vec{v}$

c) i) $2\overrightarrow{AD}$ ii) $4\vec{v}$

4. a) $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

b) i) $k_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ ii) $k_2 = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$

6. a) 6,375 u² b) 42 u²

7. Environ 5893 m

9. a) $\left\|\vec{r}\right\| \approx 18{,}51$ et $\theta = 50°$

10. b) $\frac{70\sqrt{14}}{9}$ m², c'est-à-dire environ 29,1 m²

12. $k = 2 - \sqrt{3}$

16. b) 45 u²

18. a) B(-3, -4) e) $x^2 + y^2 = 25$

g) Aire du quadrilatère BEDF = 40 u²

19. a) M(4, 0) b) C(0, 3)

21. a) $A_1 = \frac{35\sqrt{26}}{2}$ u², c'est-à-dire $A_1 \approx 89{,}2$ u²

b) $H\left(\frac{38}{3}, 5, \frac{-10}{3}\right)$

c) i) $A_2 = \frac{7\sqrt{26}}{6}$ u², c'est-à-dire $A_2 \approx 5{,}9$ u²

ii) $A_3 = \frac{56\sqrt{26}}{3}$ u², c'est-à-dire $A_3 \approx 95{,}2$ u²

23. $S_1 : x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 49$

$S_2 : (x - 3)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 + (z + 11)^2 = \frac{49}{4}$

24. a) P(7, 1)

b) i) $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25\}$, cercle de centre C(3, -2) et d'un rayon de 5 unités

27. a) $m_1 = 5$ g, $m_2 = 15$ g et $m_3 = 10$ g

c) $m_1 = 0$ g, $m_2 = 10$ g et $m_3 = 20$ g

CHAPITRE 5

Exercices préliminaires (page 249)

1. a) 51 b) -51 c) 165 d) 0

2. a) $x = \frac{-23}{11}$ et $y = \frac{-31}{11}$

b) $a = 2$, $b = -1$ et $c = 4$

c) E.-S. = Ø

d) E.-S. = $\{(4 + s, 5 - s, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$

3. a) $k_1 = 3$, $k_2 = -2$ et $k_3 = 0{,}5$

b) Aucune solution

4. a) E.-S. = $\left\{\left(\frac{-8s}{7}, \frac{-10s}{7}, s\right) \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$; infinité de solutions

b) $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ et $k_3 = 0$; uniquement la solution triviale

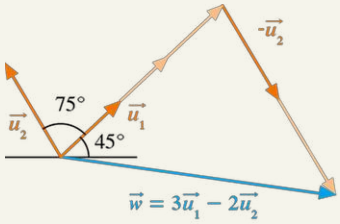
5. a) … le système admet la solution unique (0, 0, …, 0), c'est-à-dire la solution triviale.

b) … le système admet une infinité de solutions.

6. a) $\vec{s}_1 = \left(\frac{-5}{13}, \frac{-12}{13}\right)$ et $\vec{s}_2 = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$

b) $\vec{t}_1 = \left(\frac{-8}{7}, \frac{24}{7}, \frac{-12}{7}\right)$ et $\vec{t}_2 = \left(\frac{8}{7}, \frac{-24}{7}, \frac{12}{7}\right)$

7. a)



b) $\|\vec{w}\| \approx 7{,}3$, $\theta = 172{,}5°$, S.-E.

c) $\vec{u}_1 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $\vec{u}_2 = \left(\frac{-3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\vec{w} = \left(3\sqrt{2} + 3, 3\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right)$

8.

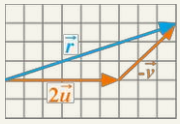
Propriété 1	$(a + b) \in \mathbb{R}$
Propriété 2	$a + b = b + a$
Propriété 3	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Propriété 4	$a + 0 = a$
Propriété 5	$a + (-a) = 0$
Propriété 6	$ab \in \mathbb{R}$
Propriété 7	$(a + b)c = ac + bc$
Propriété 8	$a(b + c) = ab + ac$
Propriété 9	$a(bc) = (ab)c$
Propriété 10	$1a = a$

Exercice de compréhension 5.1

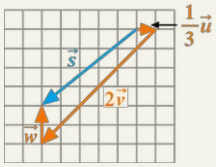
1. a) $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ b) $\vec{v} = -2\vec{i} + 0\vec{j} + 7\vec{k}$

Exercices 5.1 (page 254)

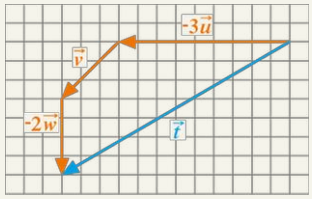
1. a)



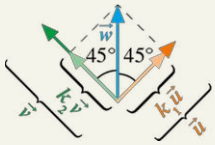
b)



c)



2. a)



$\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$

$\|k_1\vec{u}\| = \|\vec{w}\| \cos 45°$

$k_1\|\vec{u}\| = \|\vec{w}\| \cos 45°$ (car $k_1 > 0$)

donc, $k_1 = \frac{5\sqrt{2}}{8}$

$\|k_2\vec{v}\| = \|\vec{w}\| \cos 45°$

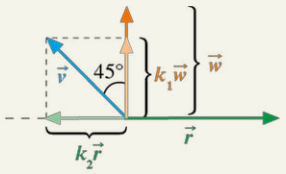
$k_2\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| \cos 45°$ (car $k_2 > 0$)

donc, $k_2 = \frac{5\sqrt{2}}{12}$

d'où $\vec{w} = \frac{5\sqrt{2}}{8}\vec{u} + \frac{5\sqrt{2}}{12}\vec{v}$

b) De a), nous obtenons $\vec{u} = \frac{4\sqrt{2}}{5}\vec{w} - \frac{2}{3}\vec{v}$.

c)



$\vec{v} = k_1\vec{w} + k_2\vec{r}$

$\|k_1\vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cos 45°$

$k_1\|\vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cos 45°$ (car $k_1 > 0$)

donc, $k_1 = \frac{3\sqrt{2}}{5}$

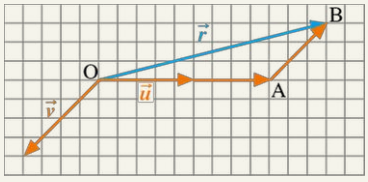
$\|k_2\vec{r}\| = \|\vec{v}\| \cos 45°$

$-k_2\|\vec{r}\| = \|\vec{v}\| \cos 45°$ (car $k_2 < 0$)

donc, $k_2 = \frac{-3\sqrt{2}}{8}$

d'où $\vec{v} = \frac{3\sqrt{2}}{5}\vec{w} - \frac{3\sqrt{2}}{8}\vec{r}$

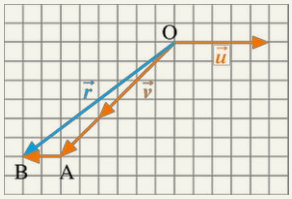
3. a)



$\vec{r} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$

d'où $\vec{r} \approx \frac{9}{5}\vec{u} - \frac{3}{4}\vec{v}$ (car $k_1 > 0$ et $k_2 < 0$)

b)

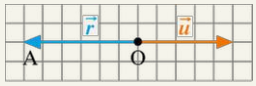


$\vec{r} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = k_2\vec{v} + k_1\vec{u}$

3. (*suite*)

d'où $\vec{r} \approx \frac{-2}{5}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$ (car $k_1 < 0$ et $k_2 > 0$)

c)



$\vec{r} = \overrightarrow{OA} = k_1\vec{u}$

d'où $\vec{r} \approx \frac{-6}{5}\vec{u} + 0\vec{v}$ (car $k_1 < 0$)

4. a) $\vec{r} = (6, -20)$

b) $\vec{s} = (-8, 13)$

5. a) $\vec{r} = (-6, -1, 6)$; $\vec{s} = (-8, -9, 6)$; $\vec{t} = (-4, 5, 4)$

b) $\vec{z} = 2\vec{r} - 4\vec{s} + 3\vec{t}$

$= 2(2\vec{u} - \vec{v}) - 4(-5\vec{v} + 4\vec{w}) + 3(3\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w})$

$= 13\vec{u} + 24\vec{v} - 25\vec{w}$

c) $\vec{z} = (8, 49, 0)$

6. a) Il faut déterminer s'il existe des scalaires a et b tels que

$\vec{r}_1 = a\vec{u} + b\vec{v}$

$(2, 15) = a(2, 1) + b(-1, 3)$

$(2, 15) = (2a - b, a + 3b)$

En résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} 2a - b = 2 \\ a + 3b = 15 \end{cases}$$

nous obtenons $a = 3$ et $b = 4$.

D'où $\vec{r}_1 = 3\vec{u} + 4\vec{v}$

b) $\vec{r}_1 = \frac{41}{11}\vec{v} + \frac{21}{11}\vec{w}$

c) $\vec{r}_2 = 0\vec{w} + 0\vec{t}$

d) $\vec{r}_3 = -2\vec{v} + 0\vec{t}$

e) Puisque le système d'équations

$$\begin{cases} 2a - 4b = 1 \\ a - 2b = 2 \end{cases}$$

n'admet aucune solution,
il est impossible d'exprimer $\vec{r}_4$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{t}$.

f) Il faut déterminer s'il existe des scalaires a, b et c tels que

$\vec{r}_5 = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

$(-2, 9) = a(2, 1) + b(-1, 3) + c(3, 2)$

$(-2, 9) = (2a - b + 3c, a + 3b + 2c)$

En résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} 2a - b + 3c = -2 \\ a + 3b + 2c = 9 \end{cases}$$

nous obtenons une infinité de solutions.

Par exemple, $a = 2$, $b = 3$ et $c = -1$
ou $a = -9$, $b = 2$ et $c = 6$.

De façon générale,
$\vec{r}_5 = (11b - 31)\vec{u} + b\vec{v} + (20 - 7b)\vec{w}$, où $b \in \mathbb{R}$

7. a) Il faut déterminer s'il existe des scalaires a, b et c tels que

$\vec{u} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3$

$(-1, -2, 17) = a(1, -2, 3) + b(0, 4, -2) + c(-1, 2, 3)$

$(-1, -2, 17) = (a - c, -2a + 4b + 2c, 3a - 2b + 3c)$

En résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} a - c = -1 \\ -2a + 4b + 2c = -2 \\ 3a - 2b + 3c = 17 \end{cases}$$

nous obtenons $a = 2$, $b = -1$ et $c = 3$.

D'où $\vec{u} = 2\vec{v}_1 - 1\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$

b) $\vec{w} = 2\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2 - \frac{1}{3}\vec{v}_4$

c) Le système d'équations

$$\begin{cases} a - b + 3c = 1 \\ -2a + 2b - 6c = -1 \\ 3a + 3b + 3c = 3 \end{cases}$$

n'admet aucune solution. En effet,

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & -6 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right] \quad L_2 + 2L_1 \to L_2$$

Il est impossible d'exprimer $\vec{t}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$.

d) Il y a une infinité de combinaisons linéaires. Par exemple,
$\vec{s} = 6\vec{v}_1 - 3\vec{v}_3 + \vec{v}_5$ ou $\vec{s} = -2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_3 - \vec{v}_5$

8. a) $\vec{u} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$

b) $\vec{i} = \frac{-1}{2}\vec{u} + \frac{5}{2}\vec{j}$

c) $\vec{j} = \frac{3}{23}\vec{u} + \frac{2}{23}\vec{v}$

d) $\vec{O} = 0\vec{i} + 0\vec{j}$

e) $\vec{O} = 0\vec{u} + 0\vec{v}$

f) Impossible

9. a) $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$;
$\vec{O} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

b) $\vec{t} = (x, y, z)$

$= (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$

$= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$

$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

10. a) Il faut déterminer les scalaires a et b tels que

$\vec{r} = a\vec{s} + b\vec{t}$

$8\vec{u} - 21\vec{v} = a(-3\vec{u} + 6\vec{v}) + b(2\vec{u} - 5\vec{v})$

$= (-3a + 2b)\vec{u} + (6a - 5b)\vec{v}$

En résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} -3a + 2b = 8 \\ 6a - 5b = -21 \end{cases}$$

nous obtenons $a = \frac{2}{3}$ et $b = 5$.

D'où $\vec{r} = \frac{2}{3}\vec{s} + 5\vec{t}$

b) $\vec{s} = \frac{3}{2}\vec{r} - \frac{15}{2}\vec{t}$

10. (*suite*)

c) $\vec{r} = 8\vec{u} - 21\vec{v}$

$\vec{r} = 8\vec{u} - 21\left(\frac{1}{6}(\vec{s} + 3\vec{u})\right)$ (car $\vec{s} = -3\vec{u} + 6\vec{v}$)

$\vec{r} = 8\vec{u} - \frac{7}{2}\vec{s} - \frac{21}{2}\vec{u}$

$\vec{r} = \frac{-5}{2}\vec{u} - \frac{7}{2}\vec{s}$

d'où $\vec{u} = \frac{-2}{5}\vec{r} - \frac{7}{5}\vec{s}$

11. $\vec{w} = k_1\vec{u_1} + k_2\vec{u_2} + \ldots + k_n\vec{u_n}$

$= k_1(a_{11}\vec{v_1} + a_{12}\vec{v_2} + \ldots + a_{1m}\vec{v_m}) + k_2(a_{21}\vec{v_1} + a_{22}\vec{v_2} + \ldots + a_{2m}\vec{v_m}) + \ldots + k_n(a_{n1}\vec{v_1} + a_{n2}\vec{v_2} + \ldots + a_{nm}\vec{v_m})$

$= (k_1a_{11} + k_2a_{21} + \ldots + k_na_{n1})\vec{v_1} + (k_1a_{12} + k_2a_{22} + \ldots + k_na_{n2})\vec{v_2} + \ldots + (k_1a_{1m} + k_2a_{2m} + \ldots + k_na_{nm})\vec{v_m}$

Ainsi, $\vec{w} = b_1\vec{v_1} + b_2\vec{v_2} + \ldots + b_m\vec{v_m}$

d'où $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}\}$.

Exercices de compréhension 5.2

1. a) $\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$,

d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.

b) $\begin{vmatrix} -4 & 10 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$,

d'où $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

2. a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$,

d'où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$,

d'où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$ ne sont pas coplanaires.

Exercices 5.2 (page 263)

1. a) i) $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{O}$

$k_1(-1, 2) + k_2(0, 1) = (0, 0)$

$(-k_1, 2k_1 + k_2) = (0, 0)$

Nous obtenons alors le système suivant.

$\begin{cases} -k_1 = 0 \\ 2k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$

En résolvant le système d'équations, nous obtenons $k_1 = 0$ et $k_2 = 0$ (solution unique).

D'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.

(définition 5.3)

ii) $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.

(théorème 5.1)

b) i) Le système obtenu est

$\begin{cases} 3k_1 - 4k_2 = 0 \\ -6k_1 + 8k_2 = 0 \end{cases}$

Ce système possède une infinité de solutions.

E.-S. $= \left\{\left(\frac{4}{3}s, s\right) \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$

Par exemple, si $s = 3$, nous avons $k_1 = 4$ et $k_2 = 3$.

Ainsi, $4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{O}$

d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants.

(définition 5.3)

ii) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 0$

d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants.

(théorème 5.1)

c) i) $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} + k_3\vec{w} = \vec{O}$, ainsi

$\begin{cases} k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 0 \\ 2k_1 + k_2 - 2k_3 = 0 \end{cases}$

E.-S. $= \left\{\left(\frac{8}{5}s, \frac{-6}{5}s, s\right) \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$

Par exemple, si $s = 5$, nous avons $8\vec{u} - 6\vec{v} + 5\vec{w} = \vec{O}$.

D'où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

(définition 5.3)

ii) Impossible d'utiliser cette méthode.

d) i) $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} + k_3\vec{w} = \vec{O}$, ainsi

$\begin{cases} k_1 = 0 \\ 4k_1 + 7k_2 = 0 \\ -3k_1 + k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$

E.-S. $= \{(0, 0, 0)\}$

d'où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

(définition 5.3)

ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$

d'où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

(théorème 5.1)

1. (*suite*)

e) i) $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} + k_3\vec{w} = \vec{O}$, ainsi

$$\begin{cases} -k_1 + 4k_2 + 10k_3 = 0 \\ 2k_1 + k_2 - 2k_3 = 0 \\ -3k_2 - 6k_3 = 0 \end{cases}$$

E.-S. $= \{(2s, -2s, s) \mid s \in \mathbb{R}\}$

Par exemple, si $s = 1$, nous avons $2\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w} = \vec{O}$.

D'où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

(définition 5.3)

ii) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0$

d'où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

(théorème 5.1)

f) i) $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} + k_3\vec{w} + k_4\vec{t} = \vec{O}$, ainsi

$$\begin{cases} 2k_1 + 5k_2 - 3k_4 = 0 \\ 4k_1 + k_2 + 4k_3 - 6k_4 = 0 \\ -8k_1 + 2k_2 + k_3 + 12k_4 = 0 \\ 6k_1 + k_3 - 9k_4 = 0 \end{cases}$$

E.-S. $= \left\{\left(\frac{3}{2}s, 0, 0, s\right) \mid s \in \mathbb{R}\right\}$

Par exemple, si $s = 2$,
nous avons $3\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w} + 2\vec{t} = \vec{O}$.

D'où $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont linéairement dépendants.

(définition 5.3)

ii) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 4 & -6 \\ -8 & 2 & 1 & 12 \\ 6 & 0 & 1 & -9 \end{vmatrix} = 0$

d'où $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont linéairement dépendants.

(théorème 5.1)

2. a) Vérifions s'il existe un k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

$(-10, 8) = k(15, -12) = (15k, -12k)$

$$\begin{cases} 15k = -10 \\ -12k = 8 \end{cases}$$

En résolvant le système d'équations, nous obtenons

$k = \frac{-2}{3}$

D'où $\vec{u} = \frac{-2}{3}\vec{v}$, et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants.

b) Vérifions s'il existe k_1 et k_2 tels que $\vec{u} = k_1\vec{v} + k_2\vec{w}$.

$(3, 2) = k_1(-9, 6) + k_2(6, -4) = (-9k_1 + 6k_2, 6k_1 - 4k_2)$

$$\begin{cases} -9k_1 + 6k_2 = 3 \\ 6k_1 - 4k_2 = 2 \end{cases}$$

Ce système n'admet aucune solution, donc $\vec{u}$ ne peut pas s'exprimer comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Par contre, $\vec{v} = 0\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{w}$,

d'où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

c) Vérifions s'il existe k_1 et k_2 tels que $\vec{u} = k_1\vec{v} + k_2\vec{w}$.

$(-1, 2, 4) = k_1(-2, 7, 2) + k_2(0, -1, 2)$

$= (-2k_1, 7k_1 - k_2, 2k_1 + 2k_2)$

$$\begin{cases} -2k_1 = -1 \\ 7k_1 - k_2 = 2 \\ 2k_1 + 2k_2 = 4 \end{cases}$$

En résolvant le système d'équations, nous obtenons

$k_1 = \frac{1}{2}$ et $k_2 = \frac{3}{2}$

D'où $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{3}{2}\vec{w}$, et $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

d) Aucun des vecteurs ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux autres vecteurs.

D'où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

3. a) $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$

d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.

(théorème 5.1)

b) $\vec{u} = \frac{-1}{21}\vec{v} + \frac{8}{21}\vec{w}$

d'où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

(théorème 5.2)

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

d'où $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont linéairement indépendants.

(théorème 5.1)

d) $\vec{u} = \frac{-3}{5}\vec{v}$

d'où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants.

(théorème 5.2)

e) Par le théorème 5.3,

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont linéairement dépendants.

f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

d'où $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ et $\vec{e}_4$ sont linéairement indépendants.

(théorème 5.1)

4. a) $\overrightarrow{KF} = -\overrightarrow{DH} - \overrightarrow{IL}$; linéairement dépendants

b) $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{EG} - 2\overrightarrow{HD}$; linéairement dépendants

c) Aucune combinaison linéaire ; linéairement indépendants

d) $\overrightarrow{BG} = 0\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CF} + 2\overrightarrow{DH}$; linéairement dépendants

5. $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_3$ sont colinéaires.

$\vec{u}_2$, $\vec{u}_4$ et $\vec{u}_6$ sont colinéaires.

6. a) i) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$

d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

(corollaire du théorème 5.4)

6. a) (*suite*)

ii) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 0$

d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

(corollaire du théorème 5.4)

iii) Puisque $\vec{v} = 2\vec{u}$, alors $\vec{u} /\!/ \vec{v}$.
D'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b) i) $\begin{vmatrix} 3 & a \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = 24 + 5a = 0$, si $a = \dfrac{-24}{5}$

d'où $a = \dfrac{-24}{5}$

ii) $a = \dfrac{-5}{3}$ et $b = -18$

7. a) i) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 35 \neq 0$

d'où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

(corollaire du théorème 5.5)

ii) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 9 & -10 \end{vmatrix} = 0$

d'où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

(corollaire du théorème 5.5)

iii) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires, car deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ramenés à l'origine, sont toujours coplanaires.

b) i) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & a \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 13a - 3 = 0$, si $a = \dfrac{3}{13}$

d'où $a = \dfrac{3}{13}$

ii) $c = 0$, a et $b \in \mathbb{R}$

8. Les justifications sont laissées à l'étudiant.

a) V b) V c) F d) V e) V f) F

9. a) Puisque $1\vec{u} + 1\vec{v} - 1(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{O}$,
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $(\vec{u} + \vec{v})$ sont linéairement dépendants.

b) Puisque $-3\vec{u} + \vec{v} + 0\vec{w} + 1(3\vec{u} - \vec{v}) = \vec{O}$,
$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $(3\vec{u} - \vec{v})$ sont linéairement dépendants.

c) Puisque $1\vec{O} + 0\vec{u_1} + 0\vec{u_2} + \ldots + 0\vec{u_n} = \vec{O}$,
$\vec{O}$, $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, …, $\vec{u_n}$ sont linéairement dépendants.

Exercices 5.3 (page 272)

1. a) Soit $\boldsymbol{u} = (a, -a)$, $\boldsymbol{v} = (b, -b)$ et $\boldsymbol{w} = (c, -c)$, des éléments de V, et r et s, des éléments de $\mathbb{R}$.

Propriété 1 Vérifions si $(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \in$ V.

$\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = (a, -a) \oplus (b, -b)$
$= (a + b, -a + (-b))$ (définition de $\oplus$)
$= (a + b, -(a + b))$ (distributivité dans $\mathbb{R}$)

Puisque a et $b \in \mathbb{R}$, alors $(a + b) \in \mathbb{R}$ et $-(a + b) \in \mathbb{R}$
d'où $(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \in$ V

Propriété 2 Vérifions si $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$.

$\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = (a, -a) \oplus (b, -b)$
$= (a + b, -a + (-b))$ (définition de $\oplus$)
$= (b + a, -b + (-a))$ (commutativité dans $\mathbb{R}$)
$= (b, -b) \oplus (a, -a)$ (définition de $\oplus$)
$= \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$

d'où $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$

Pour la vérification des propriétés suivantes, les justifications sont laissées à l'étudiant.

Propriété 3 Vérifions si $\boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{w}$.

$\boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}) = (a, -a) \oplus ((b, -b) \oplus (c, -c))$
$= (a, -a) \oplus (b + c, -b + (-c))$
$= (a + (b + c), -a + (-b - c))$
$= ((a + b) + c, (-a + (-b)) + (-c))$
$= (a + b, -a + (-b)) \oplus (c, -c)$
$= ((a, -a) \oplus (b, -b)) \oplus (c, -c)$
$= (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{w}$

d'où $\boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{w}$

Propriété 4 Vérifions s'il existe dans V un élément neutre, noté $\boldsymbol{O}$, tel que $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{u}$, $\forall\, \boldsymbol{u} \in$ V.

Soit $\boldsymbol{O}$, l'élément de V défini par $\boldsymbol{O} = (0, 0)$.

Ainsi, $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{O} = (a, -a) \oplus (0, 0)$
$= (a + 0, -a + 0)$
$= (a, -a)$
$= \boldsymbol{u}$

d'où $\boldsymbol{O} = (0, 0)$ est l'élément neutre.

Propriété 5 Vérifions si pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, il existe dans V un élément opposé, noté $-\boldsymbol{u}$, tel que $\boldsymbol{u} \oplus (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{O}$.

Soit $-\boldsymbol{u}$, l'élément de V défini par $-\boldsymbol{u} = (-a, a)$.

Ainsi, $\boldsymbol{u} \oplus (-\boldsymbol{u}) = (a, -a) \oplus (-a, a)$
$= (a + (-a), -a + a)$
$= (0, 0)$
$= \boldsymbol{O}$

d'où $-\boldsymbol{u} = (-a, a)$ est l'élément opposé de $\boldsymbol{u}$.

Propriété 6 Vérifions si $r * \boldsymbol{u} \in$ V.

$r * \boldsymbol{u} = r * (a, -a)$
$= (ra, r(-a))$
$= (ra, -ra)$

Puisque a et $r \in \mathbb{R}$, alors $ra \in \mathbb{R}$ et $-ra \in \mathbb{R}$
d'où $r * \boldsymbol{u} \in$ V

1. a) (*suite*)

Propriété 7 Vérifions si $(r+s)*\boldsymbol{u} = r*\boldsymbol{u} \oplus s*\boldsymbol{u}$.

$$\begin{aligned}(r+s)*\boldsymbol{u} &= (r+s)*(a, -a)\\ &= ((r+s)a, (r+s)(-a))\\ &= (ra+sa, -ra-sa)\\ &= (ra, -ra) \oplus (sa, -sa)\\ &= r*(a, -a) \oplus s*(a, -a)\\ &= r*\boldsymbol{u} \oplus s*\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

d'où $(r+s)*\boldsymbol{u} = r*\boldsymbol{u} \oplus s*\boldsymbol{u}$

Propriété 8 Vérifions si $r*(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) = r*\boldsymbol{u} \oplus r*\boldsymbol{v}$.

$$\begin{aligned}r*(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) &= r*((a, -a) \oplus (b, -b))\\ &= r*((a+b, -a+(-b))\\ &= (r(a+b), r(-a-b))\\ &= (ra+rb, r(-a)+r(-b))\\ &= (ra, r(-a)) \oplus (rb, r(-b))\\ &= r*(a, -a) \oplus r*(b, -b)\\ &= r*\boldsymbol{u} \oplus r*\boldsymbol{v}\end{aligned}$$

d'où $r*(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) = r*\boldsymbol{u} \oplus r*\boldsymbol{v}$

Propriété 9 Vérifions si $r*(s*\boldsymbol{u}) = (rs)*\boldsymbol{u}$.

$$\begin{aligned}r*(s*\boldsymbol{u}) &= r*(s*(a, -a))\\ &= r*(sa, s(-a))\\ &= (r(sa), r(s(-a)))\\ &= ((rs)a, (rs)(-a))\\ &= (rs)*(a, -a)\\ &= (rs)*\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

d'où $r*(s*\boldsymbol{u}) = (rs)*\boldsymbol{u}$

Propriété 10 Vérifions si $1*\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

$$\begin{aligned}1*\boldsymbol{u} &= 1*(a, -a)\\ &= (1a, 1(-a))\\ &= (a, -a)\\ &= \boldsymbol{u}\end{aligned}$$

d'où $1*\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Les 10 propriétés sont satisfaites.

D'où V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $\boldsymbol{u} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

$1*\boldsymbol{u} = 1*(a, b, c) = (0, 0, 0)$ (définition de $*$)

Donc $1*\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{u}$

La propriété 10 n'est pas satisfaite.

D'où V n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

c) Soit $\boldsymbol{u} \in$ V, où $\boldsymbol{u}$ est le seul élément de V, et r et $s \in \mathbb{R}$.

Propriété 1 Vérifions si $(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \in$ V.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{u} && (\text{car } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u})\\ &= \boldsymbol{u} && (\text{définition de } \oplus)\end{aligned}$$

d'où $(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \in$ V

Propriété 2 Vérifions si $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$.

D'une part,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{u} && (\text{car } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u})\\ &= \boldsymbol{u} && (\text{définition de } \oplus)\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{u} && (\text{car } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u})\\ &= \boldsymbol{u} && (\text{définition de } \oplus)\end{aligned}$$

d'où $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$

Propriété 3 Vérifions si $\boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{w}$.

D'une part,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{u}) && (\text{car } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \text{ et } \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u})\\ &= \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{u} && (\text{définition de } \oplus)\\ &= \boldsymbol{u} && (\text{définition de } \oplus)\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{w} &= (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{u}) \oplus \boldsymbol{u} && (\text{car } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \text{ et } \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u})\\ &= \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{u} && (\text{définition de } \oplus)\\ &= \boldsymbol{u} && (\text{définition de } \oplus)\end{aligned}$$

d'où $\boldsymbol{u} \oplus (\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \oplus \boldsymbol{w}$

Propriété 4 Vérifions s'il existe dans V un élément neutre, noté $\boldsymbol{O}$, tel que $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{u}$, $\forall\, \boldsymbol{u} \in$ V.

Soit $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{u}$.

$$\begin{aligned}\text{Ainsi, } \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{O} &= \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{u} && (\text{car } \boldsymbol{O} = \boldsymbol{u})\\ &= \boldsymbol{u} && (\text{définition de } \oplus)\end{aligned}$$

d'où $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{u}$ est l'élément neutre.

Propriété 5 Vérifions si, pour tout vecteur $\boldsymbol{u}$, il existe dans V un élément opposé, noté $-\boldsymbol{u}$, tel que $\boldsymbol{u} \oplus (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{O}$.

Soit $-\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

$$\begin{aligned}\text{Ainsi, } \boldsymbol{u} \oplus (-\boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{u} && (\text{car } (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u})\\ &= \boldsymbol{u} && (\text{définition de } \oplus)\\ &= \boldsymbol{O} && (\text{car } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{O})\end{aligned}$$

d'où $-\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ est l'élément opposé.

Propriété 6 Vérifions si $r*\boldsymbol{u} \in$ V.

$r*\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ (définition de $*$)

d'où $r*\boldsymbol{u} \in$ V

Propriété 7 Vérifions si $(r+s)*\boldsymbol{u} = r*\boldsymbol{u} \oplus s*\boldsymbol{u}$.

D'une part, $(r+s)*\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ (définition de $*$)

D'autre part,

$$\begin{aligned}r*\boldsymbol{u} \oplus s*\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{u} && (\text{définition de } *)\\ &= \boldsymbol{u} && (\text{définition de } \oplus)\end{aligned}$$

d'où $(r+s)*\boldsymbol{u} = r*\boldsymbol{u} \oplus s*\boldsymbol{u}$

Propriété 8 Vérifions si $r*(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) = r*\boldsymbol{u} \oplus r*\boldsymbol{v}$.

$$\begin{aligned}r*(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) &= r*(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{u}) && (\text{car } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u})\\ &= r*\boldsymbol{u} && (\text{définition de } \oplus)\\ &= \boldsymbol{u} && (\text{définition de } *)\\ &= \boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{u} && (\text{définition de } \oplus)\\ &= r*\boldsymbol{u} \oplus r*\boldsymbol{u} && (\text{définition de } *)\\ &= r*\boldsymbol{u} \oplus r*\boldsymbol{v} && (\text{car } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u})\end{aligned}$$

d'où $r*(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) = r*\boldsymbol{u} \oplus r*\boldsymbol{v}$

1. c) (*suite*)

Propriété 9 Vérifions si $r*(s*\boldsymbol{u}) = (rs)*\boldsymbol{u}$.

D'une part, $r*(s*\boldsymbol{u}) = r*(\boldsymbol{u})$ (définition de $*$)

$= \boldsymbol{u}$ (définition de $*$)

D'autre part, $(rs)*\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ (définition de $*$)

d'où $r*(s*\boldsymbol{u}) = (rs)*\boldsymbol{u}$

Propriété 10 Vérifions si $1*\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.

$1*\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ (définition de $*$)

d'où $1*\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Les 10 propriétés sont satisfaites.

D'où V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Les justifications sont laissées à l'étudiant pour d), e) et f).

d) Soit $\boldsymbol{u} = (a, b)$ et $\boldsymbol{v} = (c, d)$.

$\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = (ad, bc)$ et $\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u} = (cb, da)$

De façon générale, $ad \neq bc$, $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$.

Par exemple, si $\boldsymbol{u} = (3, -5)$ et $\boldsymbol{v} = (2, 4)$, nous avons

$\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = (12, -10)$ et $\boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u} = (-10, 12)$

donc $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$

La propriété 2 n'est pas satisfaite.

D'où V n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

e) Nous vérifierons les propriétés 2, 4 et 9. La vérification des autres propriétés est laissée à l'étudiant.

Soit $\boldsymbol{u} = ax^2 + bx + c$, $\boldsymbol{v} = dx^2 + ex + f$
et $\boldsymbol{w} = gx^2 + hx + k$ tels que $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w} \in$ P, et r et $s \in \mathbb{R}$.

Propriété 2 Vérifions si $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} &= (ax^2 + bx + c) \oplus (dx^2 + ex + f)\\ &= (a + d)x^2 + (b + e)x + (c + f)\\ &= (d + a)x^2 + (e + b)x + (f + c)\\ &= (dx^2 + ex + f) \oplus (ax^2 + bx + c)\\ &= \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}\end{aligned}$$

d'où $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \oplus \boldsymbol{u}$

Propriété 4 Vérifions s'il existe dans P un élément neutre, noté $\boldsymbol{O}$, tel que $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{u}$, $\forall\, \boldsymbol{u} \in$ P.

Soit $\boldsymbol{O}$, l'élément de P défini par $\boldsymbol{O} = 0x^2 + 0x + 0$.

Ainsi, $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{O} = (ax^2 + bx + c) \oplus (0x^2 + 0x + 0)$

$$\begin{aligned}&= (a + 0)x^2 + (b + 0)x + (c + 0)\\ &= ax^2 + bx + c\\ &= \boldsymbol{u}\end{aligned}$$

d'où $\boldsymbol{O} = 0x^2 + 0x + 0$ est l'élément neutre.

Propriété 9 Vérifions si $r*(s*\boldsymbol{u}) = (rs)*\boldsymbol{u}$.

$$\begin{aligned}r*(s*\boldsymbol{u}) &= r*(s*(ax^2 + bx + c))\\ &= r*((sa)x^2 + (sb)x + sc)\\ &= r(sa)x^2 + r(sb)x + r(sc)\\ &= (rs)ax^2 + (rs)bx + (rs)c\\ &= (rs)*(ax^2 + bx + c)\\ &= (rs)*\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

d'où $r*(s*\boldsymbol{u}) = (rs)*\boldsymbol{u}$

Les 10 propriétés sont satisfaites.

D'où P est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

f) Contre-exemple de la propriété 6

Soit $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}$ et $k = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \notin \mathcal{M}$$

La propriété 6 n'est pas satisfaite.

D'où $\mathcal{M}$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. a) Soit $\boldsymbol{u} = (a, b, c)$ et $\boldsymbol{O} = (d, e, f)$. Déterminons d, e et f telles que $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{O} = \boldsymbol{u}$.

$(a, b, c) \oplus (d, e, f) = (a, b, c)$

$(ad, be, cf) = (a, b, c)$ (définition de $\oplus$)

Ainsi, $ad = a$, $be = b$ et $cf = c$.
Par conséquent, $d = 1$, $e = 1$ et $f = 1$.

D'où $\boldsymbol{O} = (1, 1, 1)$ est l'élément neutre de l'addition.

b) Soit $\boldsymbol{u} = (a, b, c)$ et $-\boldsymbol{u} = (d, e, f)$. Déterminons d, e et f telles que $\boldsymbol{u} \oplus (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{O}$.

$(a, b, c) \oplus (d, e, f) = (1, 1, 1)$ (car $\boldsymbol{O} = (1, 1, 1)$)

$(ad, be, cf) = (1, 1, 1)$ (définition de $\oplus$)

Puisque $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$,

$d = \frac{1}{a}$ et $d > 0$; $e = \frac{1}{f}$ et $e > 0$; $f = \frac{1}{e}$ et $f > 0$

D'où $-\boldsymbol{u} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ est l'élément opposé de l'addition.

c) La vérification est laissée à l'étudiant.

3. Par le théorème 5.6 relatif aux sous-espaces vectoriels, il suffit de démontrer que $(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \in$ W et que $k*\boldsymbol{u} \in$ W, où $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in$ W, et $k \in \mathbb{R}$.

a) Soit $\boldsymbol{u} = (a, 2a, 3a)$ et $\boldsymbol{v} = (b, 2b, 3b)$, des éléments de W, et $k \in \mathbb{R}$.

i) $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = (a, 2a, 3a) \oplus (b, 2b, 3b)$

$= (a + b, 2a + 2b, 3a + 3b)$ (définition de $\oplus$)

$= (a + b, 2(a + b), 3(a + b))$ (distributivité dans $\mathbb{R}$)

Donc $(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \in$ W (fermeture pour l'addition)

ii) $k*\boldsymbol{u} = k*(a, 2a, 3a)$

$= (ka, k(2a), k(3a))$ (définition de $*$)

$= (ka, 2(ka), 3(ka))$ (associativité dans $\mathbb{R}$)

Donc $k*\boldsymbol{u} \in$ W (fermeture pour la multiplication par un scalaire)

D'où W est un sous-espace vectoriel de V.

b) Soit $\boldsymbol{u} = (a, b)$ et $\boldsymbol{v} = (c, d)$, des éléments de W, et $k \in \mathbb{R}$.

i) $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = (a, b) \oplus (c, d)$

$= (a + c, b + d)$ (définition de $\oplus$)

Puisque $a > 0$, $c > 0$, $b \geq 0$ et $d \geq 0$,

alors $a + c > 0$ et $b + d \geq 0$.

Donc $(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \in$ W

3. b) (*suite*)

ii) $k*\boldsymbol{u} = k*(a, b)$

$= (ka, kb)$ (définition de $*$)

Donc $k*\boldsymbol{u} \notin$ W lorsque $k < 0$

Par exemple, soit $\boldsymbol{u} = (2, 3) \in$ W et $k = -5 \in \mathbb{R}$.

$k*\boldsymbol{u} = -5(2, 3)$

$= (-10, -15)$

Nous avons $k*\boldsymbol{u} \notin$ W. (car $-10 < 0$ et $-15 < 0$)

D'où W n'est pas un sous-espace vectoriel de V.

c) W est un sous-espace vectoriel de V. La vérification est laissée à l'étudiant.

d) W n'est pas un sous-espace vectoriel de V, car

si $\boldsymbol{u} = (2, 3, 6)$ et $\boldsymbol{v} = (4, 5, 20)$, où $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in$ W,

i) $\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v} = (2, 3, 6) \oplus (4, 5, 20)$ (définition de $\oplus$)

$= (6, 8, 26)$

d'où $(\boldsymbol{u} \oplus \boldsymbol{v}) \notin$ W (car $26 \neq 6(8)$)

e) W n'est pas un sous-espace vectoriel de V, car

si $\boldsymbol{u} = (1, -2)$, où $\boldsymbol{u} \in$ W, et $k = -1$, où $k \in \mathbb{R}$,

ii) $k*\boldsymbol{u} = -1*(1, -2)$

$= (-1, 2)$ (définition de $*$)

d'où $k*\boldsymbol{u} \notin$ W (car $-1 < 2$)

Pour les lettres f) à j), les justifications sont laissées à l'étudiant.

f) W est un sous-espace vectoriel de V.

g) W est un sous-espace vectoriel de V.

h) W n'est pas un sous-espace vectoriel de V.

i) W est un sous-espace vectoriel de V.

j) W est un sous-espace vectoriel de V.

4. Les vérifications sont laissées à l'étudiant.

a) W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$.

b) W n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$.

c) W n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$.

d) W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$.

e) W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$.

Exercices 5.4 (page 287)

1. a) Étape 1 : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Ainsi, par le théorème 5.1, les vecteurs sont linéairement indépendants.

Étape 2 : Soit $\vec{w} = (x, y)$.

$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

$(x, y) = a(1, 2) + b(2, 1)$

$(x, y) = (a + 2b, 2a + b)$

ainsi $\begin{cases} a + 2b = x \\ 2a + b = y \end{cases}$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} x & 2 \\ y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x - 2y}{-3}; \; b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y - 2x}{-3}$$

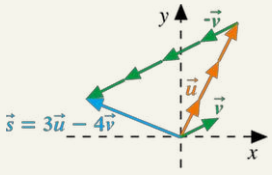
Ainsi, $\vec{w} = \left(\frac{2y - x}{3}\right)\vec{u} + \left(\frac{2x - y}{3}\right)\vec{v}$, où $\vec{w} = (x, y)$

d'où $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) $\vec{w} = \left(\frac{2(-6) - 3}{3}\right)\vec{u} + \left(\frac{2(3) - (-6)}{3}\right)\vec{v} = -5\vec{u} + 4\vec{v}$;

$\vec{t} = \frac{8}{3}\vec{u} - \frac{7}{3}\vec{v}$; $\vec{r} = 5\vec{u} + 0\vec{v}$; $\vec{O} = 0\vec{u} + 0\vec{v}$

c)



2. a) Étape 1 : $\begin{vmatrix} 6 & -8 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Ainsi, par le théorème 5.1, les vecteurs sont linéairement dépendants.

D'où $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

b) De $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

$(3, 2) = a(6, -3) + b(-8, 4)$

$(3, 2) = (6a - 8b, -3a + 4b)$

ainsi $\begin{cases} 6a - 8b = 3 \\ -3a + 4b = 2 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -8 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 6 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right] \quad 2L_2 + L_1 \to L_2$$

Ce système est incompatible. Par conséquent, $\vec{w}$ ne peut être exprimé comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

De $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v}$

$(10, -5) = a(6, -3) + b(-8, 4)$

$(10, -5) = (6a - 8b, -3a + 4b)$

ainsi $\begin{cases} 6a - 8b = 10 \\ -3a + 4b = -5 \end{cases}$

Ce système a une infinité de solutions.

E.-S. $= \left\{\left(\frac{5 + 4s}{3}, s\right) \middle| s \in \mathbb{R}\right\}$

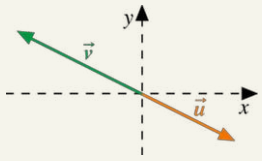
Par exemple, si $s = 1$, $\vec{t} = 3\vec{u} + \vec{v}$, ou

si $s = 0$, $\vec{t} = \frac{5}{3}\vec{u} + 0\vec{v}$.

D'où $\vec{t}$ peut être une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. (*suite*)

c)



d) Nous avons $\vec{u} /\!/ \vec{v}$. Par conséquent, tous les vecteurs engendrés par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ doivent être parallèles à $\vec{u}$. Puisque $\vec{w}$ n'est pas parallèle à $\vec{u}$, $\vec{w}$ ne peut être une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Toutefois, comme $\vec{t} /\!/ \vec{u}$, $\vec{t}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3. a) Étape 1 : De $k_1\vec{i} + k_2\vec{j} + k_3\vec{v} = \vec{O}$

$k_1(1, 0) + k_2(0, 1) + k_3(1, 1) = (0, 0)$

$(k_1 + k_3, k_2 + k_3) = (0, 0)$

ainsi $\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$

Ce système a une infinité de solutions.

Par exemple, si $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ et $k_3 = -1$, nous avons $1\vec{i} + 1\vec{j} - 1\vec{v} = \vec{O}$.

Alors, $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants.

D'où $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{v}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

b) De $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{v}$

$(x, y) = a(1, 0) + b(0, 1) + c(1, 1)$

$(x, y) = (a + c, b + c)$

ainsi $\begin{cases} a + c = x \\ b + c = y \end{cases}$

Ce système a une infinité de solutions.

E.-S. $= \{(x - s, y - s, s) \,|\, s \in \mathbb{R}\}$

d'où $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{v}\}$ est un ensemble de générateurs de $\mathbb{R}^2$.

c) En remplaçant x par 4 et y par -5, nous obtenons

E.-S. $= \{(4 - s, -5 - s, s) \,|\, s \in \mathbb{R}\}$. (de b))

Par exemple, si $s = 2$, $\vec{w} = 2\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{v}$, ou

si $s = 0$, $\vec{w} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$.

d) $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, $\{\vec{i}, \vec{v}\}$ et $\{\vec{j}, \vec{v}\}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.

e) i) $\vec{t} = -3\vec{i} + 7\vec{j}$

ii) $\vec{t} = -10\vec{i} + 7\vec{v}$

iii) $\vec{t} = 10\vec{j} - 3\vec{v}$

4. a) Étape 1 : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Ainsi, par le théorème 5.1, les vecteurs sont linéairement indépendants.

Étape 2 : Soit $\vec{w} = (x, y, z)$.

$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{k}$

$(x, y, z) = a(1, 1, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 0, 1)$

$(x, y, z) = (a, a + b, a + b + c)$

ainsi $\begin{cases} a = x \\ a + b = y \\ a + b + c = z \end{cases}$

En résolvant le système d'équations, nous obtenons

$a = x$, $b = y - x$ et $c = z - y$.

Ainsi, $\vec{w} = x\vec{u} + (y - x)\vec{v} + (z - y)\vec{k}$, où $\vec{w} = (x, y, z)$ d'où $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) $\vec{w} = 1\vec{u} + (-2 - 1)\vec{v} + (3 - (-2))\vec{k} = 1\vec{u} - 3\vec{v} + 5\vec{k}$;

$\vec{i} = 1\vec{u} - 1\vec{v} + 0\vec{k}$; $\vec{O} = 0\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{k}$

5. a) Étape 1 : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Ainsi, par le théorème 5.1, les vecteurs sont linéairement dépendants.

D'où $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

b) i) De $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

$(11, -7, -9) = a(1, -2, -3) + b(2, 1, 2) + c(5, 0, 1)$,

$(11, -7, -9) = (a + 2b + 5c, -2a + b, -3a + 2b + c)$

ainsi $\begin{cases} a + 2b + 5c = 11 \\ -2a + b = -7 \\ -3a + 2b + c = -9 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 11 \\ -2 & 1 & 0 & -7 \\ -3 & 2 & 1 & -9 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 11 \\ 0 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Ce système a une infinité de solutions.

E.-S. $= \{(5 - s, 3 - 2s, s) \,|\, s \in \mathbb{R}\}$

Par exemple, si $s = 3$, $\vec{t} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + 3\vec{w}$, ou

si $s = 0$, $\vec{t} = 5\vec{u} + 3\vec{v} + 0\vec{w}$.

ii) De $\vec{r} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

$(1, 1, 1) = a(1, -2, -3) + b(2, 1, 2) + c(5, 0, 1)$,

$(1, 1, 1) = (a + 2b + 5c, -2a + b, -3a + 2b + c)$

ainsi $\begin{cases} a + 2b + 5c = 1 \\ -2a + b = 1 \\ -3a + 2b + c = 1 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$

Ce système est incompatible. D'où $\vec{r}$ ne peut être exprimé comme combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

c) Puisque $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. (corollaire du théorème 5.5)

Ainsi, $\vec{t}$ est dans le même plan que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, mais $\vec{r}$ n'est pas dans le même plan que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

6. a) Puisque $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, par le théorème 5.3, les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

D'où $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, par le théorème 5.10, toute autre base doit également contenir trois vecteurs.

D'où $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$. Ainsi, par le théorème 5.1, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.

Puisque $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, par le théorème 5.12, tout ensemble de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ linéairement indépendants est une base de $\mathbb{R}^2$.

D'où $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

6. (*suite*)

d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Ainsi, par le théorème 5.1,

les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

D'où $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Ainsi, par le théorème 5.1,

les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ et $\vec{e}_4$ sont linéairement indépendants.

Puisque $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, par le théorème 5.12, tout ensemble de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ linéairement indépendants est une base de $\mathbb{R}^4$.

D'où $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

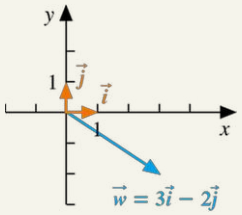
7. a) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ et $\{\vec{v}, \vec{w}\}$

b) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, $\{\vec{u}, \vec{w}\}$, $\{\vec{u}, \vec{t}\}$, $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ et $\{\vec{w}, \vec{t}\}$

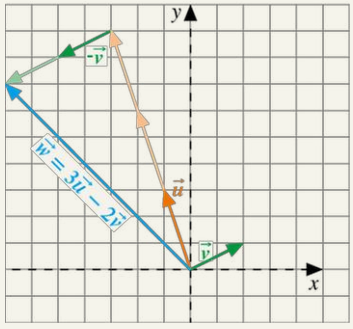
c) Aucun

d) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}\}$, $\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{t}\}$ et $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\}$

8. a)



b)



9. a) $\vec{w} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$, d'où les composantes de $\vec{w}$ sont 4 et 6 ;
$\vec{t} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$, d'où les composantes de $\vec{t}$ sont 6 et 4.

b) $\vec{w} = 2\vec{u} - 2\vec{v}$, d'où les composantes de $\vec{w}$ sont 2 et -2 ;
$\vec{t} = \frac{16}{7}\vec{u} - \frac{6}{7}\vec{v}$, d'où les composantes de $\vec{t}$ sont $\frac{16}{7}$ et $\frac{-6}{7}$.

10. a) i) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$, car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants.

ii) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

iii) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$, car $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

iv) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$, car $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

v) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

vi) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$, car $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

vii) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$, car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$.

viii) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$, car $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont linéairement dépendants.

b) Les représentations ii), iii), v), viii).

11. a) F, car $\vec{u}$ n'est pas perpendiculaire à $\vec{v}$.

b) V, car $\vec{u} \perp \vec{w}$.

c) V, car $\vec{v} \perp \vec{t}$.

d) F, car $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ n'est pas perpendiculaire à $\frac{1}{\|\vec{t}\|}\vec{t}$.

e) V, car $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} \perp \frac{1}{\|\vec{t}\|}\vec{t}$ et $\left\|\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right\| = \left\|\frac{1}{\|\vec{t}\|}\vec{t}\right\| = 1$.

f) V, car $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} \perp \frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w}$.

12. a) $\{\vec{u}_1, \vec{u}_6\}$, $\{\vec{u}_2, \vec{u}_6\}$ et $\{\vec{u}_3, \vec{u}_5\}$

b) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}, \left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}, \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right\}, \left\{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

De façon analogue, nous avons

$\left\{\frac{\pm 1}{2\sqrt{2}}\vec{u}_2, \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}\vec{u}_6\right\}$ et $\left\{\frac{\pm 1}{5}\vec{u}_3, \frac{\pm 1}{5}\vec{u}_5\right\}$.

13. Les justifications sont laissées à l'étudiant.

a) F	b) V	c) F	d) F
e) V	f) F	g) V	h) F
i) V	j) F	k) V	l) F

Exercices récapitulatifs (page 291)

2. a) i) $\vec{u} = 3\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2$ ii) $\vec{w} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2$

b) i) $\vec{u}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

ii) Il y a une infinité de combinaisons linéaires.
Par exemple, $\vec{w} = -20\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2$.

c) i) Il y a une infinité de combinaisons linéaires.
Par exemple, $\vec{u} = -5\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$.

ii) $\vec{w}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$.

3. a) Linéairement dépendants ; $\vec{v}_2 = -3\vec{v}_1$

c) Linéairement dépendants ; $\vec{v}_1 = -1\vec{v}_2 + 1\vec{v}_3$

e) Linéairement indépendants

g) Linéairement dépendants ; $\vec{v}_3 = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2$

i) Linéairement dépendants ; $\vec{v}_1 = 2\vec{v}_2 - 1\vec{v}_3$

5. a) i) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

ii) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

iii) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$

7. $\overrightarrow{PR} = \frac{-5}{12}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$

8. a) $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{EF} = \frac{-2}{3}\overrightarrow{HB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

9. Les justifications sont laissées à l'étudiant.

b) V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

d) $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

f) $\mathcal{M}$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

h) V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

j) P est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

10. Les justifications sont laissées à l'étudiant.

a) V n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

c) V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

11. Les justifications sont laissées à l'étudiant.

a) W n'est pas un sous-espace vectoriel de V.

c) W n'est pas un sous-espace vectoriel de V.

e) W est un sous-espace vectoriel de V.

g) W n'est pas un sous-espace vectoriel de V.

i) W n'est pas un sous-espace vectoriel de V.

13. a) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

d) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

g) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

14. a) $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) $\vec{u} = x\vec{v_1} + (y - x)\vec{v_2} + (z - y)\vec{v_3} + (w - z)\vec{v_4}$

c) $(1, -2, 3, -4) = \vec{v_1} - 3\vec{v_2} + 5\vec{v_3} - 7\vec{v_4}$

Problèmes de synthèse (page 294)

1. a) Le plan cartésien $\mathbb{R}^2$ b) Une droite de $\mathbb{R}^2$

d) Un plan de $\mathbb{R}^3$ e) L'espace cartésien $\mathbb{R}^3$

3. a) $(a, 0, 0)$, où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b = 0$ et $c = 0$

c) $(a, b, 0)$, où $a, b \in \mathbb{R}$ tels que a et b ne sont pas égaux à 0 simultanément, et $c = 0$

e) $(0, b, 0)$, où $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a = 0$ et $c = 0$

4. a) i) $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont linéairement indépendants.

b) $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

6. $\vec{v} = \frac{1{,}5 \sin 15°}{\sin 150°}\vec{u} + \frac{4{,}5 \sin 15°}{\sin 150°}\vec{w}$, c'est-à-dire $\vec{v} = 0{,}776\ldots\vec{u} + 2{,}329\ldots\vec{w}$

7. b) $\|\vec{w}\| = 90{,}967\ldots$; $\theta = 88{,}42\ldots°$ de sens S.-O.

c) $k_1 = -2{,}003\ldots$ et $k_2 = 1{,}999\ldots$

9. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

10. a) $\overrightarrow{M_3M_4} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

13. a) $k_1 = 0$, $k_2 = \left(\frac{\sin 108°}{\sin 36°} - \frac{2 \sin 36°}{\sin 108°}\right)$ et $k_3 = 0$

b) $k_4 = k_5 = \frac{(\sin 108°)^2 - 2(\sin 36°)^2}{(\sin 108°)^2}$

15. a) $\mathcal{M}$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b) $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

17. a) $\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\}$;
puisque la base contient 6 vecteurs, dim W = 6.

b) $\left\{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right\}$; dim W = 2.

c) Nous obtenons la base $\left\{\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}$ qui n'est pas une base canonique ; dim W = 1.

d) Puisque les matrices de W sont de la forme $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix}a&b\\0&c\end{bmatrix}$, nous obtenons $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$;
dim W = 3.

19. a) i) $2x^3 - 2x^2 + 12x - 6 = -4\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$

20. a) W n'est pas un sous-espace vectoriel de V.

c) W est un sous-espace vectoriel de V.

e) W n'est pas un sous-espace vectoriel de V.

g) W n'est pas un sous-espace vectoriel de V.

CHAPITRE 6

Exercices préliminaires (page 299)

1. a) A = base(hauteur) = $6(4 \sin 55°) = 19{,}659\ldots$ d'où $A \approx 19{,}66$ u²

b) $A = ba \sin \theta$

2. a) $V = Ah$ b) $V = \frac{1}{3}Ah$

3. a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

b) $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

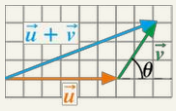
4. a) $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

b) $\cos (180° - \theta) = -\cos \theta$

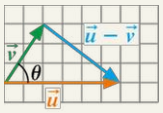
c) $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

d) $\sin (\pi - \theta) = \sin \theta$

5. a)



b)

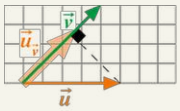


c) $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \theta$

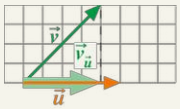
6. a) $\sqrt{21}$ b) $\sqrt{209}$ c) $\left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ et $\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$

7. a) 32 b) $2a + 4b - 11c$
c) $-(2a + 4b - 11c)$ d) 0

8. a)



b)



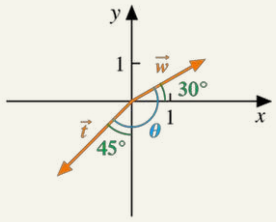
9. a) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$ b) $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$

10. a) $y = \dfrac{-3}{2}x - \dfrac{5}{2}$

b) $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{27}{4}$

Exercices de compréhension 6.1

1.



$\theta = 30° + 90° + 45° = 165°$

$\vec{w} \cdot \vec{t} = \|\vec{w}\| \|\vec{t}\| \cos \theta$ (définition 6.1)
$= 2\sqrt{8} \cos 165°$ $\left(\text{car } \|\vec{w}\| = 2 \text{ et } \|\vec{t}\| = \sqrt{8}\right)$
$= -5{,}464\ldots$

2. a) 21 b) 0

3. a) -13 b) -13

4. $\cos \theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \dfrac{6(-9) - 8(12) + 2(-3)}{\sqrt{104}\sqrt{234}} = \dfrac{-156}{156}$

donc $\theta = \text{Arc cos } (-1)$

d'où $\theta = 180°$

5. a) i) $\vec{u}_{\vec{v}} = \dfrac{(3, 0, -4) \cdot (-4, 5, 2)}{(-4, 5, 2) \cdot (-4, 5, 2)} (-4, 5, 2) = \dfrac{-20}{45} (-4, 5, 2)$

d'où $\vec{u}_{\vec{v}} = \left(\frac{16}{9}, \frac{-20}{9}, \frac{-8}{9}\right)$

ii) $\|\vec{u}_{\vec{v}}\| = \dfrac{20}{3\sqrt{5}}$

b) i) $\vec{v}_{\vec{u}} = \left(\frac{-12}{5}, 0, \frac{16}{5}\right)$

ii) $\|\vec{v}_{\vec{u}}\| = 4$

6. $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$
$= 14(40) \cos 23°$ $\left(\text{car } \vec{F} \cdot \vec{r} = \|\vec{F}\| \|\vec{r}\| \cos \theta\right)$
$= 515{,}482\ldots$
d'où $W \approx 515{,}5$ joules.

Exercices 6.1 (page 317)

1. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(4) \cos 45° = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$
b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5(3) \cos 130° \approx -9{,}64$
c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{32}(2) \cos 105° \approx -2{,}93$
d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{32}(2) \cos 75° \approx 2{,}93$
e) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2)(1) + 3(5) = 13$
f) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4(2) + 1(2) + (-2)(5) = 0$
g) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5(1) + 4(-3) + (-3)(4) + 1(6) = -13$
h) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(2) + 4(4) + (-1)(-1) = 21$
i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1(2) + 3(3) + 0(-1) + 5(5) = 36$
j) $\vec{u} \cdot \vec{v} = a(-b) + ba = 0$

2. Puisque $\cos \theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$, nous avons

a) $\cos \theta = \dfrac{-3}{1\sqrt{18}}$, d'où $\theta = 135°$.

b) $\cos \theta = \dfrac{0}{\sqrt{29}\sqrt{116}} = 0$, d'où $\theta = 90°$.

c) $\cos \theta = \dfrac{-10}{\sqrt{5}\sqrt{20}} = -1$, d'où $\theta = 180°$.

d) $\cos \theta = \dfrac{10}{\sqrt{14}\sqrt{14}}$, d'où $\theta \approx 44{,}4°$.

2. (*suite*)

e) $\cos\theta = \dfrac{154}{\sqrt{77}\sqrt{308}} = 1$, d'où $\theta = 0°$.

f) $\cos\theta = \dfrac{-a^2}{\sqrt{3a^2}\sqrt{3a^2}} = \dfrac{-1}{3}$, d'où $\theta \approx 109{,}5°$.

3. Puisque $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{i}}{\|\vec{u}\|\|\vec{i}\|}$, $\cos\beta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{j}}{\|\vec{u}\|\|\vec{j}\|}$ et $\cos\gamma = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{k}}{\|\vec{u}\|\|\vec{k}\|}$, nous avons

a) $\cos\alpha = \dfrac{-12}{13}$ et $\cos\beta = \dfrac{5}{13}$
d'où $\alpha \approx 157{,}4°$ et $\beta \approx 67{,}4°$

b) $\cos\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{14}}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$ et $\cos\gamma = \dfrac{-3}{\sqrt{14}}$
d'où $\alpha \approx 105{,}5°$, $\beta \approx 57{,}7°$ et $\gamma \approx 143{,}3°$

4. a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$; donc, $\vec{u} \perp \vec{v}$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = -1 \neq 0$; donc, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

c) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$; donc, $\vec{u} \perp \vec{v}$

d) Soit $\vec{v} = k(0, 1, 0)$, où $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$; donc, $\vec{u} \perp \vec{v}$

5. a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \neq 0$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} \neq 0$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} \neq 0$; donc, le triangle n'est pas rectangle.

b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$; donc, le triangle est rectangle en B.
$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{29}$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{29}$;
donc, le triangle rectangle est isocèle.

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \neq 0$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} \neq 0$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} \neq 0$; donc, le triangle n'est pas rectangle.

d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$; donc, le triangle est rectangle en A.
$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{30}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{24}$;
donc, le triangle rectangle n'est pas isocèle.

6. a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4a - 18 = 0$, d'où $a = \dfrac{9}{2}$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = -20 - a - 3a = 0$, d'où $a = -5$

c) $\vec{u}\cdot\vec{v} = a^2 + 3 - 2 = a^2 + 1 \neq 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$; d'où $\vec{u}$ n'est jamais perpendiculaire à $\vec{v}$.

d) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3a - 3a = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$; d'où $\vec{u}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$ pour tout a.

e) $\vec{u}\cdot\vec{v} = a^2 + 4b^2 = 0$; donc, $a = 0$ et $b = 0$, d'où $\vec{u} = \vec{O}$ et $\vec{v} = \vec{O}$. Il est impossible de trouver une valeur de a et de b telle que les vecteurs sont non nuls et perpendiculaires.

f) $\vec{u}\cdot\vec{v} = a^2 + 6 + 4b^2 \neq 0$ pour tout a et $b \in \mathbb{R}$; d'où $\vec{u}$ n'est jamais perpendiculaire à $\vec{v}$.

g) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4b + 5a - 5a = 4b = 0$; d'où $b = 0$ et $a \in \mathbb{R}$

h) $\vec{u}\cdot\vec{v} = a^2 - b^2 = 0$ pour $b = \pm a$; d'où $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $b = \pm a$

7. a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$
$\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{1(1) + 5(5) + (-2)(-2)} = \sqrt{29}$
d'où $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

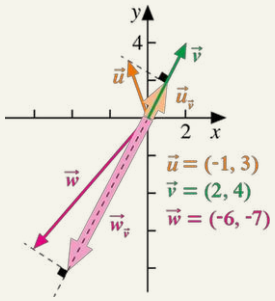
b) $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = |-6| = 6$
$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = \sqrt{30}\sqrt{26} \approx 27{,}9$
d'où $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

c) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|(-2, 6, 2)\| = \sqrt{44} \approx 6{,}63$
$\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = \sqrt{30} + \sqrt{26} \approx 10{,}57$
d'où $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

d) $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|(4, 4, -6)\| = \sqrt{68} \approx 8{,}25$
$\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| = \sqrt{30} - \sqrt{26} \approx 0{,}38$
d'où $\|\vec{u} - \vec{v}\| \geq \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|$

8. $\vec{u}_{\vec{v}} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}$
$= \dfrac{10}{20}(2, 4)$
$= (1, 2)$

$\vec{w}_{\vec{v}} = \dfrac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}$
$= \dfrac{-40}{20}(2, 4)$
$= (-4, -8)$



9. a) $\vec{u}_{\vec{w}} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\vec{w} = \dfrac{9}{35}(3, 5, 1) = \left(\dfrac{27}{35}, \dfrac{9}{7}, \dfrac{9}{35}\right)$

b) $\vec{w}_{\vec{u}} = \dfrac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} = \dfrac{9}{21}(1, 2, -4) = \left(\dfrac{3}{7}, \dfrac{6}{7}, \dfrac{-12}{7}\right)$

c) $\vec{w}_{\vec{i}} = \dfrac{\vec{w}\cdot\vec{i}}{\vec{i}\cdot\vec{i}}\vec{i} = \dfrac{3}{1}(1, 0, 0) = (3, 0, 0)$

d) $\vec{u}_{\vec{k}} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{k}}{\vec{k}\cdot\vec{k}}\vec{k} = \dfrac{-4}{1}(0, 0, 1) = (0, 0, -4)$

e) $\vec{t} = \vec{v} - \vec{v}_{\vec{i}} - \vec{v}_{\vec{j}}$
$= (-4, 1, 2) - (-4, 0, 0) - (0, 1, 0)$
$= (0, 0, 2)$
Puisque $\vec{t}\cdot\vec{i} = 0$, alors $\vec{t} \perp \vec{i}$ et puisque $\vec{t}\cdot\vec{j} = 0$, alors $\vec{t} \perp \vec{j}$

10. a) $\vec{w}_1\cdot\vec{w}_2 = (2\vec{u} - \vec{v})\cdot(\vec{u} + 4\vec{v})$
$= 2\vec{u}\cdot\vec{u} + 7\vec{u}\cdot\vec{v} - 4\vec{v}\cdot\vec{v}$
$= 2\|\vec{u}\|^2 - 4\|\vec{v}\|^2$ (car $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$)
$= -18$
d'où $\vec{w}_1$ n'est pas perpendiculaire à $\vec{w}_2$.

b) $\vec{w}_3\cdot\vec{w}_4 = (\vec{u} + \vec{v})\cdot(\vec{u} - \vec{v})$
$= \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v}$
$= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
$= 0$
d'où $\vec{w}_3 \perp \vec{w}_4$

10. (*suite*)

c) $\overrightarrow{w_5} \cdot \overrightarrow{w_6} = (\vec{u} - 5\vec{v}) \cdot (5\vec{u} + \vec{v})$

$= 5\vec{u} \cdot \vec{u} - 24\vec{u} \cdot \vec{v} - 5\vec{v} \cdot \vec{v}$

$= 5\|\vec{u}\|^2 - 5\|\vec{v}\|^2 \quad (\text{car } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0)$

$= 0$

d'où $\overrightarrow{w_5} \perp \overrightarrow{w_6}$

11. a) Soit $(x + 8)^2 + (y - 12)^2 = 169$, l'équation du cercle.

Soit Q(x, y), un point de la tangente D.

$$\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$(x + 3, y - 24) \cdot (-5, -12) = 0$

$-5x - 15 - 12y + 288 = 0$

d'où $y = \frac{-5}{12}x + \frac{273}{12}$ est l'équation de D.

b) En posant $y = 0$ dans l'équation du cercle, nous obtenons $(x + 8)^2 + (-12)^2 = 169$. Ainsi, $x = -3$ ou $x = -13$.

Soit R$(-13, 0)$, le point où D_1 est tangente au cercle et Q(x, y), un point de D_1.

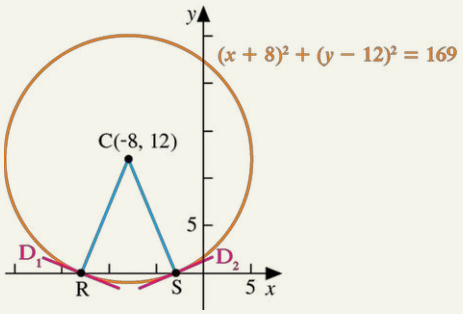
$$\overrightarrow{RQ} \cdot \overrightarrow{RC} = 0$$

$(x + 13, y) \cdot (5, 12) = 0$

$5x + 65 + 12y = 0$

d'où $y = \frac{-5}{12}x - \frac{65}{12}$ est l'équation de D_1.

De façon analogue, $y = \frac{5}{12}x + \frac{5}{4}$ est l'équation de D_2.



12. Calculons, en fonction de $\|\vec{r}\|$, le travail effectué dans les quatre situations.

① $W_1 = 3\|\vec{r}\| \cos 0° = 3\|\vec{r}\|$

② $W_2 = 3\|\vec{r}\| \cos 90° = 0$

③ $W_3 = 5\|\vec{r}\| \cos 45° = 3{,}53\ldots\|\vec{r}\|$

④ $W_4 = 4\|\vec{r}\| \cos 30° = 3{,}46\ldots\|\vec{r}\|$

d'où $W_2 < W_1 < W_4 < W_3$

13. a) $\overrightarrow{F_{1_{\overrightarrow{F_2}}}} = \frac{\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_2}}{\overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{F_2}} \overrightarrow{F_2} = \frac{56}{169}(12, 5) = \left(\frac{672}{169}, \frac{280}{169}\right)$

b) $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_{1_{\overrightarrow{F_2}}}} + \overrightarrow{F_2} = \left(\frac{2700}{169}, \frac{1125}{169}\right)$

c) $W_1 = \vec{F} \cdot \vec{r}$

$= \|\vec{F}\| \|\vec{r}\| \cos 0° \quad (\text{car } \vec{F} \cdot \vec{r} = \|\vec{F}\| \|\vec{r}\| \cos \theta)$

$\approx (17{,}3)(3)(1)$

d'où $W_1 \approx 51{,}9$ joules.

d) $W_2 = \vec{F} \cdot \vec{r}$

$= \left(\frac{2700}{169}, \frac{1125}{169}\right) \cdot (24, 10)$

$= 450$

d'où $W_2 = 450$ joules.

14. $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$

$= 16(125) \cos 15° \quad (\text{car } \vec{F} \cdot \vec{r} = \|\vec{F}\| \|\vec{r}\| \cos \theta)$

$= 1931{,}851\ldots$

d'où $W \approx 1932$ joules.

15. $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$

$650 = 300\|\vec{r}\| \cos 50° \quad (\text{car } \vec{F} \cdot \vec{r} = \|\vec{F}\| \|\vec{r}\| \cos \theta)$

$\|\vec{r}\| = \frac{650}{300 \cos 50°} = 3{,}37\ldots$

d'où le mannequin se déplace d'environ 3,37 mètres.

16. a) i) $W_{tot} = W_1 + W_2 + W_3$

d'où $W_{tot} = \vec{F}_1 \cdot \vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \vec{r} + \vec{F}_3 \cdot \vec{r}$, exprimé en joules.

ii) $W_{tot} = \|\vec{F}_1\| \|\vec{r}\| \cos \theta_1 + \|\vec{F}_2\| \|\vec{r}\| \cos \theta_2 + \|\vec{F}_3\| \|\vec{r}\| \cos \theta_3$, exprimé en joules.

b) $W_{tot} = 2{,}1(3{,}6) \cos 25° + 1{,}6(3{,}6) \cos 35° + 1{,}2(3{,}6) \cos 110°$

$= 10{,}092\ldots$

d'où $W_{tot} \approx 10{,}1$ joules.

17. a) $(\vec{u} + \vec{v})_{\vec{w}} = \frac{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w}$

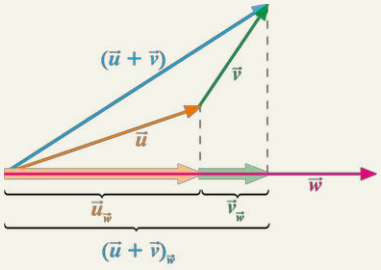
$= \frac{\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w} \quad (\text{distributivité})$

$= \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}\right) \vec{w}$

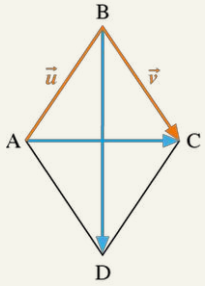
$= \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w}$

$= \vec{u}_{\vec{w}} + \vec{v}_{\vec{w}}$

b)



18. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.



($\Rightarrow$) Si $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$, alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= 0\\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) &= 0\\ \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} &= 0\\ -\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 &= 0\end{aligned}$$

Donc, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

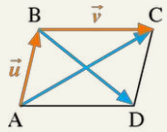
d'où ABCD est un losange.

($\Leftarrow$) Si ABCD est un losange, alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})\\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u}\\ &= -\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\\ &= 0 \quad (\text{car } \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|)\end{aligned}$$

d'où les diagonales sont perpendiculaires.

19. a) Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.



Nous avons alors

$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{BD} = \vec{v} - \vec{u}$

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{BD}\|^2 &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD}\\ &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})\\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u}\\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2\\ &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{AD}\|^2 + \|\overrightarrow{DC}\|^2\end{aligned}$$

$(\text{car } \|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{AD}\| \text{ et } \|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{DC}\|)$

b) Dans un carré, les diagonales sont égales et les côtés sont égaux. Ainsi, de a), nous obtenons

$2\|\overrightarrow{AC}\|^2 = 4\|\overrightarrow{AB}\|^2$

d'où $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}\,\|\overrightarrow{AB}\|$

c) $\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{BD}\|^2 = 2\|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\|\overrightarrow{BC}\|^2$

$(12)^2 + (8)^2 = 2(5)^2 + 2\|\overrightarrow{BC}\|^2$, donc $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{79}$

$p = 2\|\overrightarrow{AB}\| + 2\|\overrightarrow{BC}\| = 2(5) + 2(\sqrt{79})$

d'où $p \approx 27{,}78$ cm.

20. Soit $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, -2, 2) \cdot (4, 2, 0) = 0$, donc $\vec{u} \perp \vec{v}$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (1, -2, 2) \cdot (-4, 8, 10) = 0$, donc $\vec{u} \perp \vec{w}$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = (4, 2, 0) \cdot (-4, 8, 10) = 0$, donc $\vec{v} \perp \vec{w}$

d'où $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

b) Puisque $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$,

$$a = \frac{\vec{t} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \frac{(-4, -2, 9) \cdot (1, -2, 2)}{(1, -2, 2) \cdot (1, -2, 2)} = \frac{-4 + 4 + 18}{1 + 4 + 4} = 2$$

$$b = \frac{\vec{t} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \frac{(-4, -2, 9) \cdot (4, 2, 0)}{(4, 2, 0) \cdot (4, 2, 0)} = \frac{-16 - 4 + 0}{16 + 4} = -1$$

$$c = \frac{\vec{t} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} = \frac{(-4, -2, 9) \cdot (-4, 8, 10)}{(-4, 8, 10) \cdot (-4, 8, 10)} = \frac{16 - 16 + 90}{16 + 64 + 100} = \frac{1}{2}$$

d'où $\vec{t} = 2\vec{u} - \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

Exercices de compréhension 6.2

1. $\vec{w} = (-2, 1, 3) \times (4, 0, 5)$

$$\begin{aligned}&= \left(\begin{vmatrix} \cancel{-2} & 1 & 3 \\ \cancel{4} & 0 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & \cancel{1} & 3 \\ 4 & \cancel{0} & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 & \cancel{3} \\ 4 & 0 & \cancel{5} \end{vmatrix}\right)\\ &= \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\right)\\ &= (5, 22, -4)\end{aligned}$$

2.

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{O}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{O}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{O}$

3. En ajoutant une troisième coordonnée nulle aux points B, C et D, nous obtenons les points $B_1(2, 1, 0)$, $C_1(4, 5, 0)$ et $D_1(8, 4, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\vec{u}_1 = \overrightarrow{B_1D_1} = (6, 3, 0)$ et $\vec{v}_1 = \overrightarrow{B_1C_1} = (2, 4, 0)$.

$$\vec{u}_1 \times \vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 18)$$

donc $A = \dfrac{\|\vec{u}_1 \times \vec{v}_1\|}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$

d'où $A = 9$ u^2.

Exercices 6.2 (page 331)

1. a) $\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) = (5, 22, 4)$;

$\vec{v} \times \vec{u} = (-5, -22, -4)$

b) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

1. b) *(suite)*

$$= \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -12\vec{i} + 6\vec{j} + 14\vec{k}$$

$$= (-12, 6, 14);$$

$\vec{v} \times \vec{u} = (12, -6, -14)$

c) $\vec{u} \times \vec{v} = (0, 0, 0)$; $\vec{v} \times \vec{u} = (0, 0, 0)$

d) $\vec{u} \times \vec{v} = (-33, 0, 22)$; $\vec{v} \times \vec{u} = (33, 0, -22)$

2. a) $(\vec{i} \times \vec{k}) \times \vec{k} = (-\vec{j}) \times \vec{k} = -\vec{i}$

b) $\vec{i} \times (\vec{k} \times \vec{k}) = \vec{i} \times (\vec{O}) = \vec{O}$

c) $(\vec{i} \times \vec{j}) \times (\vec{j} \times \vec{k}) = (\vec{k}) \times (\vec{i}) = \vec{j}$

d) $\vec{i} \times ((\vec{j} \times \vec{j}) \times \vec{k}) = \vec{i} \times (\vec{O} \times \vec{k}) = \vec{i} \times \vec{O} = \vec{O}$

e) $((\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j}) \times \vec{k} = (\vec{k} \times \vec{j}) \times \vec{k} = (-\vec{i}) \times \vec{k} = \vec{j}$

3. Nous savons que si $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, alors $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$.

a) $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (5, -8, 1)$ et $\|\vec{w}\| = \sqrt{90}$

d'où $\overrightarrow{U_1} = \left(\frac{5}{\sqrt{90}}, \frac{-8}{\sqrt{90}}, \frac{1}{\sqrt{90}}\right)$ et

$\overrightarrow{U_2} = \left(\frac{-5}{\sqrt{90}}, \frac{8}{\sqrt{90}}, \frac{-1}{\sqrt{90}}\right)$

b) $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (-15, 4, 5)$ et $\|\vec{w}\| = \sqrt{266}$

d'où $\overrightarrow{U_1} = \left(\frac{-15}{\sqrt{266}}, \frac{4}{\sqrt{266}}, \frac{5}{\sqrt{266}}\right)$ et

$\overrightarrow{U_2} = \left(\frac{15}{\sqrt{266}}, \frac{-4}{\sqrt{266}}, \frac{-5}{\sqrt{266}}\right)$

4. Nous savons que si $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, alors $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$.

a) $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (-14, 2, -25)$ et $\|\vec{w}\| = 5\sqrt{33}$

d'où $\overrightarrow{w_1} = \frac{4}{5\sqrt{33}}(-14, 2, -25) = \left(\frac{-56}{5\sqrt{33}}, \frac{8}{5\sqrt{33}}, \frac{-20}{\sqrt{33}}\right)$

et $\overrightarrow{w_2} = \left(\frac{56}{5\sqrt{33}}, \frac{-8}{5\sqrt{33}}, \frac{20}{\sqrt{33}}\right)$

b) $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 7, -23)$ et $\|\vec{w}\| = \sqrt{579}$

d'où $\overrightarrow{w_1} = \frac{\sqrt{193}}{\sqrt{579}}(1, 7, -23) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{\sqrt{3}}, \frac{-23}{\sqrt{3}}\right)$

et $\overrightarrow{w_2} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-7}{\sqrt{3}}, \frac{23}{\sqrt{3}}\right)$

5. a) $\vec{u} \times \vec{v} = (2, 9, 12)$

$-(\vec{v} \times \vec{u}) = -(-2, -9, -12) = (2, 9, 12)$

d'où $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

b) $\vec{v} \times (\vec{u} + \vec{w}) = (0, 4, -3) \times (4, 1, 6) = (27, -12, -16)$

$(\vec{v} \times \vec{u}) + (\vec{v} \times \vec{w}) = (-2, -9, -12) + (29, -3, -4)$

$= (27, -12, -16)$

d'où $\vec{v} \times (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{v} \times \vec{u}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (2, 9, 12) \times (1, 3, 5) = (9, 2, -3)$

$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (3, -2, 1) \times (29, -3, -4) = (11, 41, 49)$

d'où $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

d) $(5\vec{u}) \times (2\vec{w}) = (15, -10, 5) \times (2, 6, 10) = (-130, -140, 110)$

$10(\vec{u} \times \vec{w}) = 10(-13, -14, 11) = (-130, -140, 110)$

d'où $(5\vec{u}) \times (2\vec{w}) = 10(\vec{u} \times \vec{w})$

e) $\vec{u} \times (k\vec{u}) = (3, -2, 1) \times (3k, -2k, k) = (0, 0, 0) = \vec{O}$

6. a) $\vec{w}$ b) $-\vec{w}$ c) $-\vec{u}$ d) $\vec{O}$

e) $-2\vec{v}$ f) $3\vec{w}$ g) $-4\vec{w}$ h) $6\vec{u}$

i) $\vec{O}$ j) $-10\vec{u}$ k) $-4\vec{v}$ l) $\vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}$

7. a) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6$

$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2$ (théorème 6.9)

$= 2^2\, 3^2 - 6^2$ $\left(\|\vec{u}\| = 2 \text{ et } \|\vec{v}\| = 3\right)$

$= 0$

d'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

b) $\|\vec{w} \times \vec{t}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$ et

$\|\vec{t}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$(\vec{w} \cdot \vec{t})^2 = \|\vec{w}\|^2 \|\vec{t}\|^2 - \|\vec{w} \times \vec{t}\|^2$ (théorème 6.9)

$= 5^2(\sqrt{3})^2 - 3^2$

$= 66$

d'où $\vec{w} \cdot \vec{t} = \sqrt{66}$ ou $\vec{w} \cdot \vec{t} = -\sqrt{66}$

8. a) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|(-11, -27, 14)\| = \sqrt{1046}$, d'où $A \approx 32{,}34$ u²

b) $\|(5, 1, 0) \times (5, -4, 0)\| = \|(0, 0, -25)\| = 25$,
d'où $A = 25$ u²

c) $\|(3, 3, 0) \times (7, 2, 0)\| = \|(0, 0, -15)\| = 15$,
d'où $A = 15$ u²

d) $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \|(-7, 11, -5)\| = \sqrt{195}$,
d'où $A \approx 13{,}96$ u²

9. a) i) $\frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{2} = \frac{\|(18, -38, 2)\|}{2} = \frac{\sqrt{1772}}{2}$

d'où $A \approx 21{,}05$ u²

ii) $\frac{\|(7, -7, 0) \times (1, -4, 0)\|}{2} = \frac{\|(0, 0, -21)\|}{2} = \frac{21}{2}$

d'où $A = 10{,}5$ u²

iii) $\frac{\|(2, 4, -1) \times (-4, -8, 2)\|}{2} = \frac{\|(0, 0, 0)\|}{2} = 0$

d'où $A = 0$ u²

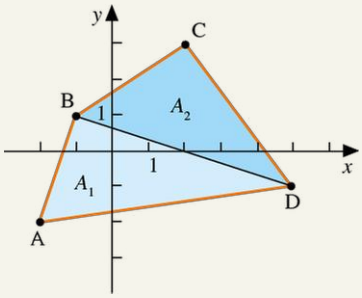
Les trois points P, Q et R sont situés sur la même droite.

b) $p = \frac{8 + 3 + 7}{2} = 9$, d'où $p = 9$ cm

$A = \sqrt{9(9 - 8)(9 - 3)(9 - 7)} = 6\sqrt{3}$,

d'où $A \approx 10{,}39$ cm²

10.



Aire du triangle ABD $= \dfrac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\|}{2} = 10$, d'où $A_1 = 10$ u²

Aire du triangle BCD $= \dfrac{\|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\|}{2} = 9$, d'où $A_2 = 9$ u²

Ainsi, l'aire du quadrilatère est égale à $A_1 + A_2$.

D'où aire $= 19$ u².

11. $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\|\vec{\tau}\| = \|\vec{r}\|\|\vec{F}\| \sin \varphi$

$= (0{,}09)(45) \sin 84°$ (car $\varphi = 12° + 72°$)

$= 4{,}027\ldots$

d'où environ 4,03 joules.

12. L'aire du triangle peut être calculée des trois façons suivantes.

$$\text{Aire} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| \sin A}{2} = \frac{cb \sin A}{2}$$

$$\text{Aire} = \frac{\|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}\|}{2} = \frac{\|\overrightarrow{BC}\|\|\overrightarrow{BA}\| \sin B}{2} = \frac{ac \sin B}{2}$$

$$\text{Aire} = \frac{\|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\|}{2} = \frac{\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CB}\| \sin C}{2} = \frac{ba \sin C}{2}$$

En faisant des égalités deux à deux avec les trois résultats précédents, nous obtenons $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$.

Exercices de compréhension 6.3

1. a) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (-1, 2, 5) \cdot (26, 15, -3) = -11$

b) $\vec{v} \cdot (\vec{t} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 0$

2. $\vec{u} = (3, -1, -2)$, $\vec{v} = (4, 2, 1)$ et $\vec{w} = (1, 1, -1)$

$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -18$

$V = \dfrac{1}{6}\left|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})\right| = \dfrac{1}{6}|-18| = 3$

d'où $V = 3$ u³

Exercices 6.3 (page 338)

1. a) $\vec{t} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (3, -2, 4) \cdot (26, 15, -3) = 36$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{t} \times \vec{w}) = (-1, 2, 5) \cdot (14, 15, -3) = 1$

c) $\vec{w} \cdot (\vec{t} \times \vec{u}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$

d) $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{u}) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$

2. a) $V = \left|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})\right| = |-83|$, d'où $V = 83$ u³ ;
linéairement indépendants (car $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \neq 0$)

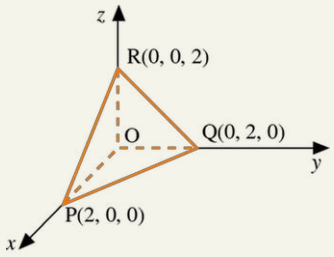
b) $V = \left|\overrightarrow{PR} \cdot (\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ})\right| = |-66|$, d'où $V = 66$ u³ ;
linéairement indépendants (car $\overrightarrow{PR} \cdot (\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PQ}) \neq 0$)

c) $V = \left|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})\right| = |0|$, d'où $V = 0$ u³ ;
linéairement dépendants (car $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$)

3. a) $V = \dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS})\right| = \dfrac{1}{6}|-48|$, d'où $V = 8$ u³ ;
les points ne sont pas coplanaires. (car $V \neq 0$)

b) $V = \dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS})\right| = \dfrac{1}{6}|0|$, d'où $V = 0$ u³ ;
les points sont coplanaires. (car $V = 0$)

4. a)



$V = \dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OR})\right|$

$= \dfrac{1}{6}\left|(2, 0, 0) \cdot (4, 0, 0)\right| = \dfrac{4}{3}$

d'où $V = \dfrac{4}{3}$ u³

4. (*suite*)

b) $D = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}\| = \frac{1}{2}\|(-4, -4, -4)\| = 2\sqrt{3}$,
ainsi $D^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$

A = aire $\Delta OQR = \frac{2(2)}{2} = 2$
De même, $B = C = 2$
ainsi $A^2 + B^2 + C^2 = 2^2 + 2^2 + 2^2 = 12$
d'où $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$

Exercices récapitulatifs (page 340)

1. a) $0\,;\vec{k}$ c) $1\,;\vec{O}$ e) $1\,;-1$
g) $-\vec{k}\,;\vec{O}$ i) $-2\vec{j}\,;3$ k) $0\,;\vec{O}$

2. a) 7 b) Non définie d) Non définie
e) (-9, -10, -43) g) -31 h) -31
j) (23, -12, 16) k) (0, 0, 0)

3. a) Vecteur c) Non définie e) Vecteur
g) Vecteur i) Scalaire k) Non définie
m) Scalaire

4. a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{29}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{6}$ et $\|\vec{w}\| = \sqrt{26}$
b) 1
c) $\sqrt{753}$
d) 67

6. a) ii) $\theta \approx 143{,}1°$ iv) $\theta = 45°$ ou $\theta = 135°$
b) i) $\alpha \approx 116{,}6°$ et $\beta \approx 153{,}4°$
ii) $\alpha \approx 74{,}5°$, $\beta \approx 57{,}7°$ et $\gamma \approx 143{,}3°$

7. a) $r = \frac{-20}{3}$ b) $r = \frac{15}{4}$ c) $r \approx -2{,}14$

8. a) $\theta_x \approx 69{,}6°$ d) $\theta \approx 27{,}7°$

9. a) i) $c = -3$ iii) $c = -1$ ou $c = 9$
v) $c = 3{,}64$ ou $c = 5$ vii) $c = 3{,}6$
b) i) $\vec{r}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$ et $\vec{r}_2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

10. a) $\vec{r}_{\vec{i}} = \left(\frac{-155}{74}, \frac{217}{74}\right)$ et $\vec{t}_{\vec{r}} = \left(\frac{62}{13}, \frac{-93}{13}\right)$
b) $\vec{u}_{\vec{v}} = (0, 0, 0)$ et $\|\vec{v}_{\vec{u}}\| = 0$
d) $\vec{w}_{(\vec{u}+\vec{v})} = \left(\frac{-3}{31}, \frac{-5}{62}, \frac{1}{62}\right)$ et $\vec{w}_{\vec{u}} + \vec{w}_{\vec{v}} = \left(\frac{4}{21}, \frac{-8}{21}, \frac{5}{21}\right)$
f) $\vec{u}_{\vec{i}} = (2, 0, 0)$ et $\vec{i}_{\vec{u}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

12. a) $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\}$
d) $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9\}$

14. a) Populations canadienne et française

16. a) i) $W = 16$ joules ii) $\theta \approx 34{,}5°$

19. a) 136,5 joules
b) i) Environ 401,47 N ii) Environ 284,38 N

20. a) $P = \vec{V} \cdot \vec{I}$ b) $P \approx 465{,}74$ W

21. a) i) $A \approx 22{,}52$ u^2 ii) $A = 7$ u^2
b) $A = 40\,400$ u^2

24. a) $R\left(12, \frac{144}{5}\right)$ b) $\theta \approx 45{,}24°$

25. a) $V = 16$ u^3; les vecteurs ne sont pas coplanaires.

26. a) $V = 2{,}\overline{6}$ u^3

30. a) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$

Problèmes de synthèse (page 343)

2. $V = 16$ u^3

3. a) i) 60° ii) Environ 35,3° iii) Environ 70,5°

4. c) $V = 12{,}\overline{3}$ u^3 d) $A_z = 16{,}5$ u^2

6. a) $A = 16\sqrt{3}$ u^2 b) $V = \frac{176}{3}$ u^3

9. a) $\overrightarrow{RS} = (36, 15)$ et $\overrightarrow{RT} = (36, -48)$
b) $\overrightarrow{RP} = \left(\frac{3d}{5}, \frac{-4d}{5}\right)$ et $\overrightarrow{PS} = \left(36 - \frac{3d}{5}, 15 + \frac{4d}{5}\right)$

11. b) $A = 5$ u^2

13. b) $V = \frac{43}{6}$ u^3, c'est-à-dire $V = 7{,}1\overline{6}$ u^3

15. b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MP}$ d) $P(2\sqrt{3}, 2)$

18. a) $a = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ et $b = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$

CHAPITRE 7

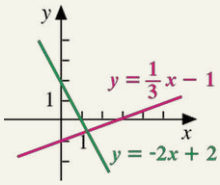
Exercices préliminaires (page 349)

1. a) $\frac{-7}{5}$ b) 0
c) Non définie d) -3
e) 0 f) $\frac{-1}{3}$

2. a) $y = 7$
b) $x = -3$
c) $y = 6x + 1$
d) $y = \frac{-1}{6}x + \frac{43}{6}$

3. a) A(-3, 5)
b) B(2, -1)
c) Aucun point de rencontre
d) Infinité de points de rencontre de la forme $(t, 3t + 2)$, où $t \in \mathbb{R}$

4. a) $x = 10$ ou $x = -4$
b) $x = \frac{12}{5}$ ou $x = 2$
c) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = \frac{1}{3}x - 1\right\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x + 2\}$



5. a) $d = 5\sqrt{2}$ unités, c'est-à-dire $d \approx 7{,}07$ unités
b) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

6. a) $\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{AC}$

7. a) i) Environ 104° ii) 90°
b) i) $\vec{n}_1 = (5, 3)$ ii) $\vec{n}_2 = (1, -1)$

8. a) $\vec{u}_{\vec{v}} = \left(\frac{-115}{74}, \frac{161}{74}\right)$; $\vec{u}_{-\vec{v}} = \left(\frac{-115}{74}, \frac{161}{74}\right)$
b) $\|\vec{v}_{\vec{u}}\| = \frac{\sqrt{8993}}{17}$; $\|\vec{v}_{-3\vec{u}}\| = \frac{\sqrt{8993}}{17}$
c) 13,5 u²
d) $\vec{w}_1 = \left(\frac{7}{\sqrt{74}}, \frac{5}{\sqrt{74}}\right)$ et $\vec{w}_2 = \left(\frac{-7}{\sqrt{74}}, \frac{-5}{\sqrt{74}}\right)$

Exercices de compréhension 7.1

1. Soit P(0, 7) et Q(1, 12).
Ainsi, $\overrightarrow{PQ} = (1, 5)$ est un vecteur directeur de la droite.
D'où D : $(x, y) = (0, 7) + k(1, 5)$, où $k \in \mathbb{R}$.

2. $\overrightarrow{PQ} = (-2, 4)$, ainsi $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = (-1, 2)$ est un vecteur directeur de D.
D'où D : $\begin{cases} x = 9 - k \\ y = -6 + 2k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$

3. En transformant d'abord l'équation de D pour obtenir une équation symétrique de D,
nous obtenons D : $\frac{2\left(x - \frac{5}{2}\right)}{4} = \frac{-3(3 + y)}{8}$
ainsi D : $\frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)}{2} = \frac{y - (-3)}{\left(\frac{-8}{3}\right)}$ (équation symétrique de D)
d'où nous trouvons P $\left(\frac{5}{2}, -3\right)$ et $\vec{u} = \left(2, \frac{-8}{3}\right)$.

4. $\overrightarrow{PQ} = (3, -5)$ est un vecteur directeur de D ;
$\vec{n} = (5, 3)$ est un vecteur normal à D.
$(5, 3) \cdot (x - (-1), y - 4) = 0$
$5x + 5 + 3y - 12 = 0$
d'où D : $5x + 3y - 7 = 0$

Exercices 7.1 (page 362)

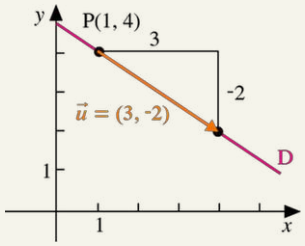
1. a) $\vec{u} = (2, 7)$
b) En posant $k = 0$, nous trouvons P(5, -3).
En posant $k = 1$, nous trouvons Q(7, 4).
c) Par exemple, $(x, y) = (7, 4) + r(-2, -7)$, où $r \in \mathbb{R}$.

2. a) $(x, y) = (3, -2) + k(-2, 4)$, où $k \in \mathbb{R}$
b) $(x, y) = (0, 0) + k(1, 0)$, où $k \in \mathbb{R}$
c) $\overrightarrow{PQ} = (2, 2)$; soit $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = (1, 1)$
Donc, $(x, y) = (6, -8) + k(1, 1)$, où $k \in \mathbb{R}$
d) $\vec{u} = (0, 1)$. Donc, $(x, y) = (2, -3) + k(0, 1)$, où $k \in \mathbb{R}$

2. (*suite*)

e) Puisque $\overrightarrow{u_1} = (-2, 9)$, nous avons $\vec{u} = (9, 2)$,
d'où D : $(x, y) = (-3, 4) + t(9, 2)$, où $t \in \mathbb{R}$

f)



d'où D : $(x, y) = (1, 4) + k(3, -2)$, où $k \in \mathbb{R}$

3. a) $\begin{cases} x = -2 + 5k \\ y = 4 - 7k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 + k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$

c) $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (1, 2)$. Donc, $\begin{cases} x = k \\ y = 7 + 2k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$

d) $\vec{u} = (1, 0)$. Donc, $\begin{cases} x = 5 + k \\ y = -2 \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$

4. Dans les équations paramétriques $\begin{cases} x = 5 - 2k \\ y = -4 + 3k \end{cases}$,
nous remplaçons x et y par les coordonnées du point donné et nous déterminons si k est unique.

a) $\left.\begin{array}{l} 11 = 5 - 2k \Rightarrow k = -3 \\ -13 = -4 + 3k \Rightarrow k = -3 \end{array}\right\}$, d'où Q ∈ D

b) $\left.\begin{array}{l} 3 = 5 - 2k \Rightarrow k = 1 \\ -7 = -4 + 3k \Rightarrow k = -1 \end{array}\right\}$, d'où R ∉ D

c) ① $s = 5 - 2k$

② $8 = -4 + 3k \Rightarrow k = 4$

En remplaçant k par 4 dans ①, $s = -3$.

d) Soit T$(0, t)$, le point cherché.

① $0 = 5 - 2k \Rightarrow k = \dfrac{5}{2}$

② $t = -4 + 3k$

En remplaçant k par $\dfrac{5}{2}$ dans ②, $t = \dfrac{7}{2}$.

D'où nous obtenons $T\left(0, \dfrac{7}{2}\right)$.

5. a) $\dfrac{x + 4}{7} = \dfrac{y - 7}{-4}$

b) $\dfrac{x}{-3} = \dfrac{y}{7}$, car $\vec{u} = (-3, 7)$

c) Impossible, car une des composantes du vecteur directeur $\vec{u} = (7, 0)$ est nulle.

d) $\overrightarrow{PQ} = (-3, 6)$; soit $\vec{u} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{PQ} = (-1, 2)$.

D'où D : $\dfrac{x - 10}{-1} = \dfrac{y + 8}{2}$

e) Puisque $\overrightarrow{u_1} = \left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{4}{3}\right)$, en choisissant $\vec{u} = 6\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$,
nous trouvons $\vec{u} = (8, 3)$, d'où D : $\dfrac{x - 3}{8} = \dfrac{y + 6}{3}$.

6. Dans l'équation $\dfrac{x - 4}{7} = \dfrac{y + 5}{-3}$, en remplaçant x et y par les coordonnées du point donné, nous trouvons

a) $\dfrac{0 - 4}{7} \neq \dfrac{0 + 5}{-3}$, d'où O ∉ D

b) $\dfrac{18 - 4}{7} = \dfrac{-11 + 5}{-3}$, d'où P ∈ D

c) $\dfrac{11 - 4}{7} \neq \dfrac{-2 + 5}{-3}$, d'où Q ∉ D

d) $\dfrac{4 - 4}{7} = \dfrac{-5 + 5}{-3}$, d'où R ∈ D

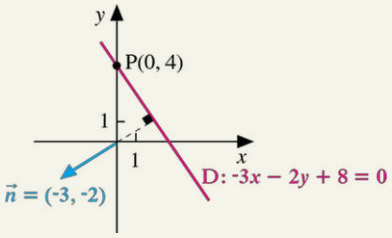
7. a) P$(4, -3)$ et $\vec{u} = (2, -5)$

b) D : $\dfrac{x - 5}{-4} = \dfrac{y + 7}{1}$; P$(5, -7)$ et $\vec{u} = (-4, 1)$

c) D : $\dfrac{x - 0}{4} = \dfrac{y - 0}{-2}$; P$(0, 0)$ et $\vec{u} = (4, -2)$

d) D : $\dfrac{x + 4}{\left(\frac{9}{2}\right)} = \dfrac{y - \frac{5}{3}}{\left(\frac{-10}{3}\right)}$; $P\left(-4, \dfrac{5}{3}\right)$ et $\vec{u} = \left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{-10}{3}\right)$

8. a) $-3x - 2y + 8 = 0$ ou $3x + 2y = 8$



b) $0x + 1y - 3 = 0$ ou $y = 3$

c) $1x + 0y - 4 = 0$ ou $x = 4$

d) $\vec{n} = (3, 5)$. Donc, $3x + 5y - 29 = 0$ ou $3x + 5y = 29$

e) $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-3, 4)$, alors $\vec{n} = (4, 3)$.
Donc, $4x + 3y - 12 = 0$ ou $4x + 3y = 12$

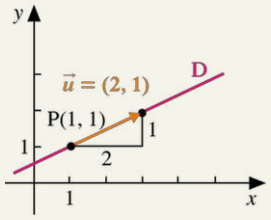
f) $\vec{u} = (5, 7)$, alors $\vec{n} = (7, -5)$.
Donc, $7x - 5y - 41 = 0$ ou $7x - 5y = 41$

g) $\vec{n} = (5, 7)$. Donc, $5x + 7y - 61 = 0$ ou $5x + 7y = 61$

h) $-5x + y - 10 = 0$ ou $5x - y = -10$

i) $6x - 7y = 0$

j)



$\vec{u} = (2, 1)$, alors $\vec{n} = (1, -2)$
Donc $x - 2y + 1 = 0$ ou $x - 2y = -1$

9. a) $\vec{n} = (3, -7)$ b) $\vec{u} = (7, 3)$

c) $p = \dfrac{22}{3}$ d) R(5, 1)

10. Pour les équations suivantes, $k \in \mathbb{R}$.

a)

É.V.	$(x, y) = (4, 2) + k(2, 1)$	**É.S.**	$\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-2}{1}$
É.P.	$x = 4 + 2k$ $y = 2 + k$	**É.C.**	$x - 2y = 0$

b)

É.V.	$(x, y) = (2, 0) + k(3, -2)$	**É.S.**	$\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-2}$
É.P.	$x = 2 + 3k$ $y = -2k$	**É.C.**	$2x + 3y - 4 = 0$

c)

É.V.	$(x, y) = (-4, -1) + k(5, 2)$	**É.S.**	$\dfrac{x+4}{5} = \dfrac{y+1}{2}$
É.P.	$x = -4 + 5k$ $y = -1 + 2k$	**É.C.**	$2x - 5y + 3 = 0$

d)

É.V.	$(x, y) = (-1, 2) + k(1, \sqrt{3})$	**É.S.**	$\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{\sqrt{3}}$
É.P.	$x = -1 + k$ $y = 2 + \sqrt{3}k$	**É.C.**	$\sqrt{3}x - y + \sqrt{3} + 2 = 0$

e)

É.V.	$(x, y) = (2, -7) + k(1, 0)$	**É.S.**	Non définie
É.P.	$x = 2 + k$ $y = -7$	**É.C.**	$y + 7 = 0$

f)

É.V.	$(x, y) = (-4, 1) + k(7, -1)$	**É.S.**	$\dfrac{x+4}{7} = \dfrac{y-1}{-1}$
É.P.	$x = -4 + 7k$ $y = 1 - k$	**É.C.**	$x + 7y - 3 = 0$

11. Une équation symétrique de la droite passant

a) par P(2, 3) et Q(4, 5), avec $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (2, 2)$,

est $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{2}$; R(6, 7) $\in$ D, car $\dfrac{6-2}{2} = \dfrac{7-3}{2}$.

D'où les points P, Q et R sont sur la droite D.

b) par P(-3, 4) et Q(4, -3), avec $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (7, -7)$,

est $\dfrac{x+3}{7} = \dfrac{y-4}{-7}$; O(0, 0) $\notin$ D, car $\dfrac{0+3}{7} \neq \dfrac{0-4}{-7}$.

D'où les points P, Q et O ne sont pas sur une même droite.

12. Nous devons résoudre le système

$$S\begin{cases} na + (\Sigma x)b = \Sigma y \\ (\Sigma x)a + (\Sigma x^2)b = \Sigma xy \end{cases}$$

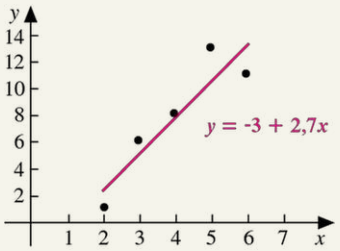
x	y	x^2	xy
2	1	4	2
3	6	9	18
4	8	16	32
5	13	25	65
6	11	36	66
$\Sigma x = 20$	$\Sigma y = 39$	$\Sigma x^2 = 90$	$\Sigma xy = 183$

ainsi $\begin{cases} 5a + 20b = 39 \\ 20a + 90b = 183 \end{cases}$ (car $n = 5$)

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 39 & 20 \\ 183 & 90 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 20 & 90 \end{vmatrix}} = \frac{-150}{50} = -3 \text{ et}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 39 \\ 20 & 183 \end{vmatrix}}{50} = \frac{135}{50} = 2{,}7$$

d'où $y = -3 + 2{,}7x$



13. a) Nous devons résoudre le système

$$S\begin{cases} na + (\Sigma x)b = \Sigma y \\ (\Sigma x)a + (\Sigma x^2)b = \Sigma xy \end{cases}$$

x	y	x^2	xy
52	0,097	2704	5,044
59	0,083	3481	4,897
66	0,071	4356	4,686
73	0,062	5329	4,526
80	0,054	6400	4,320
$\Sigma x = 330$	$\Sigma y = 0{,}367$	$\Sigma x^2 = 22\,270$	$\Sigma xy = 23{,}473$

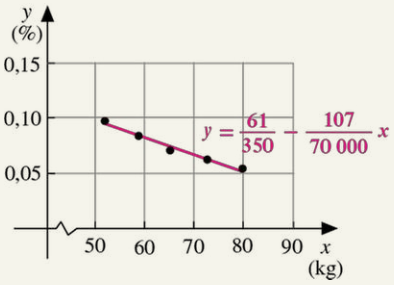
ainsi $\begin{cases} 5a + 330b = 0{,}367 \\ 330a + 22\,270b = 23{,}473 \end{cases}$ (car $n = 5$)

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}367 & 330 \\ 23{,}473 & 22\,270 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 330 \\ 330 & 22\,270 \end{vmatrix}} = \frac{427}{2450} = \frac{61}{350} \text{ et}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0{,}367 \\ 330 & 23{,}473 \end{vmatrix}}{2450} = \frac{-3{,}745}{2450} = \frac{-107}{70\,000}$$

d'où $y = \dfrac{61}{350} - \dfrac{107}{70\,000}x$

13. a) (*suite*)



b) i) $y = \frac{61}{350} - \frac{107}{70\,000}(61) = 0{,}081\,0\ldots$

d'où environ 0,081 %

ii) $y = \frac{61}{350} - \frac{107}{70\,000}(70) = 0{,}067\,2\ldots$

d'où environ 0,067 %

Exercices de compréhension 7.2

1. Soit $\vec{n_1} = (-2, 3)$ et $\overrightarrow{PQ} = (6, 2)$, ainsi nous avons $\vec{u_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = (3, 1)$, donc $\vec{n_2} = (-1, 3)$.

Puisque $\vec{n_1} \neq r\vec{n_2}$, les droites sont concourantes.

Trouvons une É.C. de D_2.

$(-1, 3) \cdot (x - 1, y + 4) = 0$

$-x + 1 + 3y + 12 = 0$

$D_2 : -x + 3y + 13 = 0$

Il faut résoudre le système $\begin{cases} -2x + 3y = -17 \\ -x + 3y = -13 \end{cases}$

En résolvant le système, nous trouvons $x = 4$ et $y = -3$.

D'où P(4, -3) est le point d'intersection.

2. Soit $\vec{n_1} = (3, -2)$ et $\vec{n_2} = (-1, 4)$.

$$\cos\theta = \frac{|(3, -2) \cdot (-1, 4)|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}\sqrt{(-1)^2 + 4^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{13}\sqrt{17}}$$

$$\theta = \text{Arc cos}\left(\frac{11}{\sqrt{13}\sqrt{17}}\right)$$ (corollaire du théorème 7.1)

d'où $\theta \approx 42{,}27°$

Exercices 7.2 (page 371)

1. a) Soit $\vec{u_1} = (-3, 1)$ et $\vec{u_2} = (1, 3)$.

Puisque $\vec{u_1} \neq r\vec{u_2}$, les droites sont concourantes.

$$\cos\theta = \frac{|(-3, 1) \cdot (1, 3)|}{\sqrt{10}\sqrt{10}} = 0$$

d'où $\theta = 90°$.

Soit $P(x_0, y_0)$, le point d'intersection.

$$\begin{cases} x_0 = 2 - 3k \\ y_0 = 5 + k \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_0 = 1 + t \\ y_0 = 2 + 3t \end{cases}$$

Donc, $\begin{cases} 2 - 3k = 1 + t \\ 5 + k = 2 + 3t \end{cases}$ Ainsi, $t = 1$ et $k = 0$.

D'où P(2, 5) est le point d'intersection.

b) Soit $\vec{u_1} = (2, 3)$ et $\vec{n_2} = (6, -4)$. Nous obtenons $\vec{u_2} = (4, 6)$.

Puisque $\vec{u_2} = 2\vec{u_1}$, $D_1 /\!/ D_2$. Soit $P_1(2, 5) \in D_1$.

Or, $6(2) - 4(5) + 8 = 0$. Donc, $P_1 \in D_2$.

D'où les droites sont parallèles confondues, ainsi $\theta = 0°$.

c) Soit $\vec{u_1} = (-10, -6)$ et $\vec{n_2} = (3, -5)$. Nous obtenons $\vec{u_2} = (5, 3)$.

Puisque $\vec{u_1} = -2\vec{u_2}$, $D_1 /\!/ D_2$. Soit $P_1(3, 2) \in D_1$.

Or, $3(3) - 5(2) - 1 \neq 0$. Donc, $P_1 \notin D_2$.

D'où les droites sont parallèles distinctes, ainsi $\theta = 0°$.

d) Soit $\vec{n_1} = (2, -3)$ et $\vec{u_2} = (1, 2)$. Nous obtenons $\vec{n_2} = (2, -1)$.

Puisque $\vec{n_1} \neq r\vec{n_2}$, les droites sont concourantes.

$$\cos\theta = \frac{|(2, -3) \cdot (2, -1)|}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{13}\sqrt{5}}$$

D'où $\theta \approx 29{,}7°$.

L'équation de D_2 est $2x - y + 1 = 0$.

Soit $P(x_0, y_0)$, le point d'intersection.

$$\begin{cases} 2x_0 - 3y_0 + 7 = 0 \\ 2x_0 - y_0 + 1 = 0 \end{cases}$$

Donc, $x_0 = 1$ et $y_0 = 3$.

D'où P(1, 3) est le point d'intersection.

2. Pour ce problème, nous choisissons $\vec{u} = (a, 3)$.

a) $D /\!/ D_1 \Rightarrow (a, 3) = r(5, -2) \Rightarrow r = \frac{-3}{2}$. D'où $a = \frac{-15}{2}$

b) $D \perp D_2 \Rightarrow (a, 3) \cdot (-1, 4) = 0$. D'où $a = 12$

c) $D /\!/ D_3 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n_3} \Rightarrow (a, 3) \cdot (2, -6) = 0$. D'où $a = 9$

d) $D \perp D_4 \Rightarrow \vec{u} /\!/ \vec{n_4} \Rightarrow (a, 3) = r(5, 7) \Rightarrow r = \frac{3}{7}$.

D'où $a = \frac{15}{7}$

e) $D \perp D_5 \Rightarrow (a, 3) \cdot (0, 2) = 0$.

Il n'existe aucune valeur de a satisfaisant à cette équation.

f) $D /\!/ D_6 \Rightarrow (a, 3) = r(0, 6) \Rightarrow r = \frac{1}{2}$.

D'où $a = 0$, ce qui est inadmissible dans l'équation symétrique de la droite D.

g) $D /\!/ D_7 \Rightarrow (a, 3) = r(-4, 5) \Rightarrow r = \frac{3}{5}$. D'où $a = \frac{-12}{5}$

3. Soit $\vec{u_1} = \overrightarrow{PQ} = (8, 6)$ et $\vec{u_2} = (3, -2)$.

$\cos \alpha_1 = \dfrac{|(8, 6) \cdot (1, 0)|}{\sqrt{100}\sqrt{1}} = \dfrac{4}{5}$, d'où $\alpha_1 \approx 36{,}9°$;

$\cos \beta_1 = \dfrac{|(8, 6) \cdot (0, 1)|}{\sqrt{100}\sqrt{1}} = \dfrac{3}{5}$, d'où $\beta_1 \approx 53{,}1°$;

$\cos \alpha_2 = \dfrac{|(3, -2) \cdot (1, 0)|}{\sqrt{13}\sqrt{1}} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$, d'où $\alpha_2 \approx 33{,}7°$;

$\cos \beta_2 = \dfrac{|(3, -2) \cdot (0, 1)|}{\sqrt{13}\sqrt{1}} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$, d'où $\beta_2 \approx 56{,}3°$;

$\theta = 180° - (\beta_1 + \beta_2)$, d'où $\theta \approx 70{,}6°$;

$\varphi = 180° - \theta$, d'où $\varphi \approx 109{,}4°$.

4. a) En choisissant $\vec{u} = (5, 12)$, $\cos \alpha = \dfrac{5}{13}$ et $\cos \beta = \dfrac{12}{13}$;

$\alpha \approx 67{,}4°$ et $\beta \approx 22{,}6°$; $\vec{U} = \left(\dfrac{5}{13}, \dfrac{12}{13}\right)$.

b) En choisissant $\vec{u} = (-2, 9)$, $\cos \alpha = \dfrac{-2}{\sqrt{85}}$ et $\cos \beta = \dfrac{9}{\sqrt{85}}$;

$\alpha \approx 102{,}5°$ et $\beta \approx 12{,}5°$; $\vec{U} = \left(\dfrac{-2}{\sqrt{85}}, \dfrac{9}{\sqrt{85}}\right)$.

c) En choisissant $\vec{u} = (0, 1)$, $\cos \alpha = 0$ et $\cos \beta = 1$;
$\alpha = 90°$ et $\beta = 0°$; $\vec{U} = (0, 1)$.

d) En choisissant $\vec{n} = (6, -5)$ et $\vec{u} = (5, 6)$, $\cos \alpha = \dfrac{5}{\sqrt{61}}$

et $\cos \beta = \dfrac{6}{\sqrt{61}}$; $\alpha \approx 50{,}2°$ et $\beta \approx 39{,}8°$;

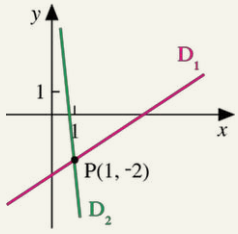
$\vec{U} = \left(\dfrac{5}{\sqrt{61}}, \dfrac{6}{\sqrt{61}}\right)$.

5. a) En résolvant le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2x - 3y - 8 = 0 \\ 10x + y - 8 = 0 \end{cases}$$

nous obtenons $x = 1$ et $y = -2$.

D'où P(1, -2)



b) $F : k_1(2x - 3y - 8) + k_2(10x + y - 8) = 0$,

où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ ($k_1 \neq 0$ ou $k_2 \neq 0$)

c) $D_3 : 10x + y - 8 = 0$, c'est-à-dire D_2

d) Si $k_1 = 1$ et $k_2 = 0$, nous obtenons D_1.

e) Les coordonnées du point O(0, 0) doivent vérifier l'équation

$k_1(2(0) - 3(0) - 8) + k_2(10(0) + 0 - 8) = 0$

$-8k_1 - 8k_2 = 0$

$k_1 = -k_2$

En posant $k_1 = 1$, nous obtenons $k_2 = -1$.

D'où $D_4 : 2x + y = 0$

f) Puisque D_5 est verticale et passe par P(1, -2),

$D_5 : x - 1 = 0$.

g) Puisque D_6 est horizontale et passe par P(1, -2),

$D_6 : y + 2 = 0$.

h) $D_7 : k_1(2x - 3y - 8) + k_2(10x + y - 8) = 0$

$D_7 : (2k_1 + 10k_2)x + (-3k_1 + k_2)y - 8k_1 - 8k_2 = 0$

Soit $\vec{n_7} = (2k_1 + 10k_2, -3k_1 + k_2)$.

Puisque $D_7 \perp D_4$, $\vec{n_7} \cdot \vec{n_4} = 0$

$(2k_1 + 10k_2, -3k_1 + k_2) \cdot (2, 1) = 0$

$k_1 + 21k_2 = 0$

ainsi, $k_1 = -21k_2$.

En posant $k_2 = 1$, nous obtenons $k_1 = -21$.

Ainsi, $-32x + 64y + 160 = 0$

d'où $D_7 : x - 2y - 5 = 0$

i) De h), nous savons que $\vec{n_8} = (2k_1 + 10k_2, -3k_1 + k_2)$.

Puisque $D_8 /\!/ D$, $\vec{n_8} \cdot \vec{u} = 0$, où $\vec{u} = (1, 1)$ est un vecteur directeur de D.

$(2k_1 + 10k_2, -3k_1 + k_2) \cdot (1, 1) = 0$

$-k_1 + 11k_2 = 0$

ainsi, $k_1 = 11k_2$.

En posant $k_2 = 1$, nous obtenons $k_1 = 11$.

Ainsi, $32x - 32y - 96 = 0$

d'où $D_8 : x - y - 3 = 0$

j) Il suffit de vérifier si le point d'intersection P(1, -2) appartient à la droite.

Puisque $3(1) - (-2) + 5 \neq 0$, $P \notin D_9$,
d'où D_9 n'est pas une droite du faisceau F.

Puisque $(1, -2) = (11, -7) - 5(2, -1)$, $P \in D_{10}$,
d'où D_{10} est une droite du faisceau F.

Exercice de compréhension 7.3

1. Soit $\vec{u} = (-3, 4)$, un vecteur directeur de D,

ainsi $\vec{n} = (4, 3)$ est un vecteur normal à D.

$$d(P, D) = \frac{|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \quad \text{(théorème 7.3)}$$

$$= \frac{|(-3, -2) \cdot (4, 3)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \quad \text{(où P(1, 7) et R(-2, 5))}$$

$$= \frac{|-18|}{5}$$

d'où $d(P, D) = 3{,}6$ unités.

Exercices 7.3 (page 381)

1. a) Soit $\vec{u} = (2, 3)$, $\vec{n} = (-3, 2)$ et $R(-1, 5) \in D$.
Puisque $P(-7, -4)$, $\overrightarrow{PR} = (6, 9)$, donc

$$d(P, D) = \frac{|(6, 9) \cdot (-3, 2)|}{\|(-3, 2)\|} = 0$$

d'où $d(P, D) = 0$ unité, ainsi $P \in D$.

b) Soit $\vec{u} = (7, 9)$, $\vec{n} = (9, -7)$ et $R(-4, 7) \in D$.
Puisque $P(0, 0)$, $\overrightarrow{PR} = (-4, 7)$, donc

$$d(P, D) = \frac{|(-4, 7) \cdot (9, -7)|}{\|(9, -7)\|} = \frac{85}{\sqrt{130}}$$

d'où $d(P, D) \approx 7{,}45$ unités, ainsi $P \notin D$.

c) $$d(P, D) = \frac{|5(2) - 4(-3) + 1|}{\sqrt{25 + 16}} = \frac{23}{\sqrt{41}}$$

d'où $d(P, D) \approx 3{,}59$ unités, ainsi $P \notin D$.

2.
$$d(P, D) = 1$$
$$\frac{|12(3) - 5(7) + k|}{\sqrt{(12)^2 + (-5)^2}} = 1$$
$$\frac{|1 + k|}{13} = 1$$

d'où $k = 12$ ou $k = -14$

3. a) Soit $\vec{u} = (3, 5)$, $\vec{n} = (5, -3)$, $P_1(4, -1) \in D_1$ et $P_2(-4, 1) \in D_2$. Puisque $\overrightarrow{P_1P_2} = (-8, 2)$,

$$d(D_1, D_2) = \frac{|(-8, 2) \cdot (5, -3)|}{\|(5, -3)\|} = \frac{46}{\sqrt{34}}$$

d'où $d(D_1, D_2) \approx 7{,}89$ unités, ainsi D_1 et D_2 sont parallèles distinctes.

b) Soit $\vec{u} = (-2, 3)$, $\vec{n} = (3, 2)$, $P_1(4, -6) \in D_1$ et $P_2(-6, 9) \in D_2$. Puisque $\overrightarrow{P_1P_2} = (-10, 15)$,

$$d(D_1, D_2) = \frac{|(-10, 15) \cdot (3, 2)|}{\|(3, 2)\|} = 0$$

d'où $d(D_1, D_2) = 0$ unité, ainsi D_1 et D_2 sont parallèles confondues.

c) Soit $D_1 : 6x - 8y + 4 = 0$
$D_2 : 6x - 8y - 1 = 0$

$$d(D_1, D_2) = \frac{|-4 - 1|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

d'où $d(D_1, D_2) = 0{,}5$ unité, ainsi D_1 et D_2 sont parallèles distinctes.

4. a) $$d(O, D_1) = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d'où $d(O, D_1) \approx 0{,}71$ unité.

b) $D_2 : 7x + 2y - 41 = 0$ (forme cartésienne)

$$d(O, D_2) = \frac{|41|}{\sqrt{53}}$$

d'où $d(O, D_2) \approx 5{,}63$ unités.

c) $D_3 : 0x + y - 5 = 0$ (forme cartésienne)
d'où $d(O, D_3) = 5$ unités

d) $D_4 : 2x - 3y = 0$ (forme cartésienne)
d'où $d(O, D_4) = 0$ unité

5. a) Soit $Q(x, y)$, le point de D le plus près de $P(-3, 7)$.
Puisque $D : 5x - 2y + 1 = 0$,

$$y = \frac{5x + 1}{2}$$

ainsi, $Q\left(x, \frac{5x + 1}{2}\right) \in D$.

$\overrightarrow{PQ} \perp D$, $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}$, où $\vec{u} = (2, 5)$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$$
$$\left(x + 3, \frac{5x + 1}{2} - 7\right) \cdot (2, 5) = 0$$
$$2x + 6 + \frac{25x + 5}{2} - 35 = 0, \text{ donc } x = \frac{53}{29}$$

En remplaçant x par $\frac{53}{29}$ dans $y = \frac{5x + 1}{2}$,

nous obtenons $y = \frac{147}{29}$

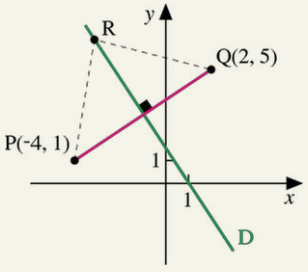
d'où $Q\left(\frac{53}{29}, \frac{147}{29}\right)$

b) $$d(P, Q) = \frac{4\sqrt{1421}}{29}$$

d'où $d(P, Q) \approx 5{,}2$ unités.

6.
$$d(R, P) = d(R, Q)$$
$$\sqrt{(x + 4)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 5)^2}$$
$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y - 5)^2$$
$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25$$
$$12x + 8y - 12 = 0$$

d'où $D : 3x + 2y - 3 = 0$



D est la médiatrice du segment de droite $\overline{PQ}$.

7. Soit $\vec{u_1} = (2, 1)$, $\vec{n_1} = (-1, 2)$, $\vec{u_2} = (1, 2)$ et $\vec{n_2} = (-2, 1)$.
Soit $P_1(3, 2) \in D_1$ et $P_2(1, 1) \in D_2$.
Puisque $d(P, D_1) = d(P, D_2)$, nous avons

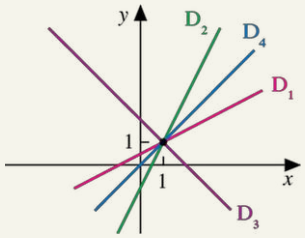
$$\frac{|(3 - x, 2 - y) \cdot (-1, 2)|}{\|(-1, 2)\|} = \frac{|(1 - x, 1 - y) \cdot (-2, 1)|}{\|(-2, 1)\|}$$

7. (*suite*)

$|-3 + x + 4 - 2y| = |-2 + 2x + 1 - y|$, donc

$x - 2y + 1 = 2x - y - 1$ ou $x - 2y + 1 = -2x + y + 1$

d'où $D_3 : x + y - 2 = 0$ et $D_4 : x - y = 0$



8. a) Soit $D : x = 0$.

$$d(F, P) = d(P, D)$$

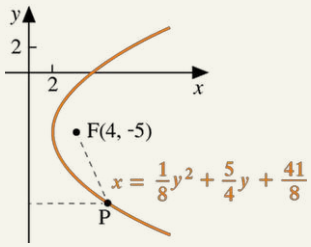
$$\sqrt{(x-4)^2 + (y+5)^2} = \frac{|x|}{1}$$

$$(x-4)^2 + (y+5)^2 = x^2$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 10y + 25 = x^2$$

d'où $x = \frac{1}{8}y^2 + \frac{5}{4}y + \frac{41}{8}$

b)



Le lieu géométrique est une parabole ouverte vers la droite.

9. a) i) Soit $P(x_0, y_0)$, le centre d'un cercle cherché.

$d(P, D_1) = d(P, D_2) = d(P, D_3)$. Ainsi,

$$\frac{|3x_0 + 4y_0 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x_0 + 4y_0 + 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \ (1) \text{ et}$$

$$\frac{|3x_0 + 4y_0 + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4x_0 - 3y_0|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \ (2)$$

De (1), $(3x_0 + 4y_0 + 5) = \pm(3x_0 + 4y_0 + 15)$,

ainsi $5 = 15$ (1.1) (aucune solution)

ou $6x_0 + 8y_0 = -20$ (1.2)

De (2), $(3x_0 + 4y_0 + 5) = \pm(4x_0 - 3y_0)$

ainsi $-x_0 + 7y_0 = -5$ (2.1)

ou $7x_0 + y_0 = -5$ (2.2)

En résolvant (1.2) et (2.1), nous trouvons $x_0 = -2$ et $y_0 = -1$.

En résolvant (1.2) et (2.2), nous trouvons $x_0 = \frac{-2}{5}$ et $y_0 = \frac{-11}{5}$.

Nous obtenons donc deux cercles dont les centres respectifs sont $P_1(-2, -1)$ et $P_2\left(\frac{-2}{5}, \frac{-11}{5}\right)$.

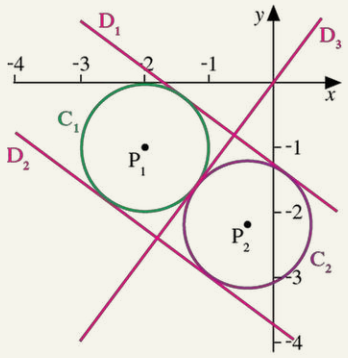
ii) Le rayon r des cercles est obtenu ainsi :

$$r = d(P_1, D_1) = \frac{|3(-2) + 4(-1) + 5|}{\sqrt{25}} = 1$$

d'où $C_1 : (x+2)^2 + (y+1)^2 = 1$, et

$$C_2 : \left(x + \frac{2}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{11}{5}\right)^2 = 1$$

iii)



b) Quatre cercles

Exercices récapitulatifs (page 383)

1. Pour les équations suivantes, $k \in \mathbb{R}$.

a)

É.V.	$(x, y) = (3, -7) + k(-2, 1)$	**É.S.**	$\frac{x-3}{-2} = y + 7$
É.P.	$x = 3 - 2k$ $y = -7 + k$	**É.C.**	$x + 2y + 11 = 0$

b)

É.V.	$(x, y) = (0, 3) + k(1, 0)$	**É.S.**	Non définie
É.P.	$x = k$ $y = 3$	**É.C.**	$y - 3 = 0$

c)

É.V.	$(x, y) = (5, -1) + k(2, -1)$	**É.S.**	$\frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{-1}$
É.P.	$x = 5 + 2k$ $y = -1 - k$	**É.C.**	$x + 2y - 3 = 0$

2. a) i) $D_1 /\!/ D_3$ ii) $D_2 \perp D_4$ et $D_5 \perp D_6$

b) i) $P(-17, 3)$ ii) Aucun iii) $Q\left(8, \frac{-19}{2}\right)$

c) i) Environ 26,6° ii) 0° iii) Environ 63,4°

2. (*suite*)

d) i) $\frac{13}{\sqrt{10}}$ unités, c'est-à-dire environ 4,11 unités

ii) 0 unité

e) $\frac{14}{\sqrt{5}}$ unités, c'est-à-dire environ 6,26 unités

3. c) i) $\theta \approx 63{,}4°$

d) i) Si $\vec{u_1} = (1, 1)$, $\alpha_1 = 45°$ et $\beta_1 = 45°$, ainsi

$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\cos \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; ou

si $\vec{u_1} = (-1, -1)$, $\alpha_1 = 135°$ et $\beta_1 = 135°$, ainsi

$\cos \alpha_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ et $\cos \beta_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$.

4. a) $F: k_1(5x + 2y - 23) + k_2(x - 2y - 19) = 0$, où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ ($k_1 \neq 0$ ou $k_2 \neq 0$)

b) $D_3: 7x + 10y + 11 = 0$

c) $D_4: 6x + 7y = 0$

d) $D_5: x - 7 = 0$

5. a) $k_1 = \frac{-2}{7}; k_2 = \frac{39}{7}; k_3 = \frac{16}{7}; k_4 = \frac{17}{7}$

6. a) $2\sqrt{17}$ unités, c'est-à-dire environ 8,25 unités

b) Q(-3, 1)

c) $\frac{7}{\sqrt{17}}$ unité, c'est-à-dire environ 1,70 unité

d) $R\left(\frac{-7}{17}, \frac{28}{17}\right)$

7. $\frac{40}{3}$ u², c'est-à-dire $13{,}\overline{3}$ u²

10. b) $y = \frac{50\,663}{156\,961} + \frac{50\,850}{156\,961}x$

d) i) Environ 29,5 km ii) Environ 39,2 km

12. a) $v_A \approx 39{,}4$ km/h et $v_B = 30$ km/h

b) $T_A: (x, y) = (0, 0) + t(-36, 16)$, où $t \geq 0$ est en heures ;
$T_B: (x, y) = (10, 0) + s(18, 24)$, où $s \geq 0$ est en heures.

c) Environ 37,2 km

13. d) i) 10 km ii) Environ 40,5 km

e) Environ 1,79 km

14. a) Environ 7,62 m b) $1{,}\overline{6}$ m/s c) C(11,8 ; 6,6)

15. a) P(0, 15) et Q(0, -11)

18. a) $a = 0$ b) $a = \frac{5}{4}$

19. a) B′(7,2 ; 2,4) b) C(0,6 ; 6,2)

22. $L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{21}{4}\right\}$; parabole

7 Problèmes de synthèse (page 387)

2. a) A(-2, 1), B(2, 3) et C(5, -1)

e) $2x + y - 2 = 0$

f) $(x, y) = (0, 2) + k(5, -3)$, où $k \in \mathbb{R}$

3. 26,25 u²

4. b) P(-1, 2)

c) i) $a = -14$; $L_{(-14)}: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

ii) $a = \frac{-14}{5}$; $L_{\left(\frac{-14}{5}\right)}: x + 2 = \frac{y + 3}{5}$

d) $A_1 = 7$ u²

5. a) i) Un cercle, une ellipse, un point ou l'ensemble vide

ii) Une ellipse

b) i) $P_1(6, -1)$ et $P_2(-2, 3)$

8. a) i) $D: 3x - 4y + 2 = 0$

ii) Distance maximale = 7,2 unités

c) $C_1: (x + 15)^2 + (y + 15)^2 = 225$
$C_2: (x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 100$
$C_3: (x - 30)^2 + (y + 30)^2 = 900$
$C_4: (x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$

9. a) $k = 1{,}2$ c) 32,64 cm²

12. b) $y_1 = 2599{,}05 + 41{,}15x$; $y_2 = 591{,}3 + 35{,}9x$

13. c) E(2563 ; 5,56)

e) i) SC ≈ 6779,14 $ ii) SP ≈ 6343,43 $

15. a) $(12a + 30)$ u² b) $D: 12x - 5y = 0$

16. a) $P_1(5, 7)$ et $Q_1(-1, -1)$ b) $P_2(26, -7)$ et $Q_2(-22, 13)$

17. c) i) $A\left(\frac{17}{3}, 5\right)$

ii) $\sqrt{37}$ unités, $\sqrt{58}$ unités et $\sqrt{73}$ unités

d) i) $B\left(\frac{17}{3}, 5\right)$

ii) Le barycentre correspond au point d'intersection des médianes.

20. a) $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\vec{n} = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

21. a) i) $\overrightarrow{BA} = \frac{-4}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{OD}$

ii) $\overrightarrow{BA} = \left(\frac{4 - 6t}{3}\right)\overrightarrow{BC} + t\overrightarrow{BD}$, où $t \in \mathbb{R}$

b) i) 18 u² ii) 36 u²

24. a) C(8, 2) b) R(12, 7)

d) $\overrightarrow{AH} = \left(2, \frac{5}{2}\right)$ et $H\left(1, \frac{7}{2}\right)$

25. a) $A\left(\frac{-5}{4}, 0\right)$, $B\left(\frac{11}{2}, 0\right)$ et C(1, -3)

b) Aire $= \frac{81}{8}$ u², c'est-à-dire Aire = 10,125 u²

c) $\theta \approx 86{,}8°$

26. a) $\frac{\|\overrightarrow{PD}\|}{\|\overrightarrow{PB}\|} = \frac{7}{32}$ b) $\frac{\|\overrightarrow{PF}\|}{\|\overrightarrow{PA}\|} = \frac{4}{35}$

30. a) D : $8x - y - 17 = 0$

b) $8x - y - 17 = 0$, qui correspond à l'équation de D ; les points $R(x, y) \in D$

c) $S(2, 3) \notin D$ et $T(1, -9) \in D$

CHAPITRE 8

Exercices préliminaires (page 395)

1. É.V. D : $(x, y) = (-1, 5) + k(4, -7)$, où $k \in \mathbb{R}$

É.P. D : $\begin{cases} x = -1 + 4k \\ y = 5 - 7k \end{cases}$, où $k \in \mathbb{R}$

É.S. D : $\frac{x + 1}{4} = \frac{y - 5}{-7}$

2. a) Environ 55,3°

b) $D_1 \perp D_3$; $P\left(\frac{68}{25}, \frac{26}{25}\right)$

c) En choisissant $\vec{u} = (-3, 4)$, nous obtenons $\cos \alpha = \frac{-3}{5}$ et $\cos \beta = \frac{4}{5}$.

3. a) $\vec{u}_{\vec{v}} = \left(\frac{44}{21}, \frac{-55}{21}, \frac{-11}{21}\right)$

b) $\|\vec{u}_{\vec{v}}\| = \frac{\sqrt{5082}}{21}$

c) $\overrightarrow{w_1} = \left(\frac{-2}{\sqrt{62}}, \frac{-3}{\sqrt{62}}, \frac{7}{\sqrt{62}}\right)$ et $\overrightarrow{w_2} = \left(\frac{2}{\sqrt{62}}, \frac{3}{\sqrt{62}}, \frac{-7}{\sqrt{62}}\right)$

4. a) 31 u² b) $\frac{31}{\sqrt{53}}$ unités

5. a) E.-S. = Ø b) E.-S. $= \left\{\left(\frac{15}{11}, \frac{14}{11}\right)\right\}$

Exercices de compréhension 8.1

1. a) Soit $\overrightarrow{PQ} = (4, -2, 6)$, ainsi $\vec{u} = \frac{1}{2}(4, -2, 6) = (2, -1, 3)$ est un vecteur directeur de D.

D'où D : $(3, 5, -1) + t(2, -1, 3)$, où $t \in \mathbb{R}$

b) Soit $R(0, y_1, z_1)$. Nous cherchons la valeur de t telle que

$(0, y_1, z_1) = (3, 5, -1) + t(2, -1, 3)$

$= (3 + 2t, 5 - t, -1 + 3t)$

Il faut que $0 = 3 + 2t$, donc $t = \frac{-3}{2}$

ainsi $y_1 = 5 - \left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{13}{2}$ et $z_1 = -1 + 3\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{-11}{2}$

d'où $R\left(0, \frac{13}{2}, \frac{-11}{2}\right)$

2. Soit $\overrightarrow{OP} = (-2, 0, 4)$, ainsi $\vec{u} = \frac{-1}{2}(-2, 0, 4) = (1, 0, -2)$ est un vecteur directeur de D.

D'où D : $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -2t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

3. a) Soit $\overrightarrow{PQ} = (3, -1, 5)$, ainsi $\vec{u} = (3, -1, 5)$ est un vecteur directeur de D.

D'où D : $\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 6}{5}$

b) Soit $R(x_1, 0, z_1)$. En remplaçant y par 0 dans l'équation de D, nous trouvons

$\frac{x_1 - 1}{3} = \frac{0 - 1}{-1} = \frac{z_1 - 6}{5}$

ainsi $\frac{x_1 - 1}{3} = 1$, donc $x_1 = 4$ et $\frac{z_1 - 6}{5} = 1$, donc $z_1 = 11$

d'où R(4, 0, 11)

4. Soit $\overrightarrow{PQ} = (0, 0, -2)$, ainsi $\vec{u} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{PQ} = (0, 0, 1)$ est un vecteur directeur de D.

D : $(x, y, z) = (2, -1, 5) + t(0, 0, 1)$, où $t \in \mathbb{R}$ (É.V.)

D'où, sous forme ensembliste,

$D : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2 \text{ et } y = -1\}$

Exercices 8.1 (page 403)

1. a) $(x, y, z) = (7, -8, 5) + t(3, 4, -1)$, où $t \in \mathbb{R}$

b) $(x, y, z) = (0, 0, 0) + t(0, 0, 1)$, où $t \in \mathbb{R}$

c) $\vec{u} = (0, 1, 0)$

Donc, $(x, y, z) = (-3, 7, -9) + t(0, 1, 0)$, où $t \in \mathbb{R}$

d) $\vec{u} = (1, 0, 1)$

Donc, $(x, y, z) = (0, 0, 0) + t(1, 0, 1)$, où $t \in \mathbb{R}$

2. a) $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = -5 + t \\ z = 9 + 8t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$ b) $\begin{cases} x = -9t \\ y = 3 + 7t \\ z = 5 \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

c) $\vec{u} = (0, 0, 1)$

$\begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \\ z = 7 + t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

d) $\vec{u} = (1, 0, 0)$

$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

3. a) $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y + 1}{-6} = \dfrac{z - 2}{9}$

b) Impossible, car $\vec{u} = (1, 0, -3)$

c) $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-5, 10, 2)$. Donc, $\dfrac{x - 3}{-5} = \dfrac{y + 5}{10} = \dfrac{z - 8}{2}$

d) Impossible, car $\vec{u} = (0, 0, 1)$

4. a) $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (0, -6, 5)$

$D_1 : \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{y - 3}{-6} = \dfrac{z - 1}{5} \text{ et } x = 4\right\}$

d'où $D_1 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 5y + 6z - 21 = 0 \text{ et } x = 4\}$

b) $\overrightarrow{QR} = (2, 6, 0)$, $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{QR} = (1, 3, 0)$

$D_2 : \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x - 3}{1} = \dfrac{y - 7}{3} \text{ et } z = 8\right\}$

d'où $D_2 : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x - y - 2 = 0 \text{ et } z = 8\}$

5. a) En transformant, nous obtenons

$$D : \frac{x + \frac{4}{3}}{\left(\frac{7}{3}\right)} = \frac{y - 7}{-2} = \frac{z - \frac{5}{9}}{\left(\frac{-8}{9}\right)};$$

$P\left(\dfrac{-4}{3}, 7, \dfrac{5}{9}\right)$ et $\vec{u} = \left(\dfrac{7}{3}, -2, \dfrac{-8}{9}\right)$

b) Soit P(1, 8, -14) et Q(3, 8, -9), où P et Q $\in$ D ;

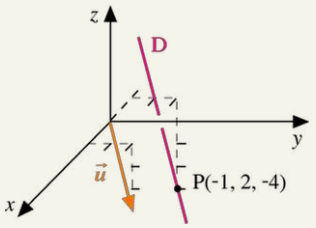
ainsi, $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (2, 0, 5)$

c) En transformant, nous obtenons

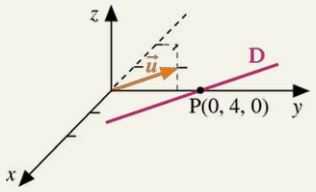
$D : \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{y + 2}{-4} = \dfrac{z - 4}{-5} \text{ et } x = -9\right\}$;

P(-9, -2, 4) et $\vec{u} = (0, -4, -5)$

6. a) P(-1, 2, -4) et $\vec{u} = (1, 2, -3)$

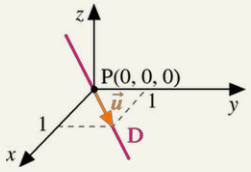


b) P(0, 4, 0) et $\vec{u} = (-2, 1, -1)$

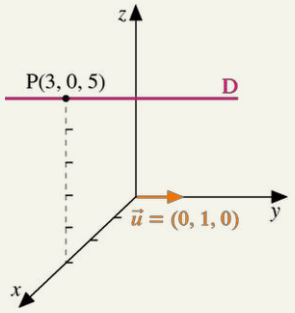


c) P(0, 0, 0) et $\vec{u} = (1, 1, 0)$

La droite D est dans le plan XOY.



d) P(3, 0, 5) et $\vec{u} = (0, 1, 0)$



7. a) i) A(0, -8, 15)

ii) A appartient au plan YOZ.

b) i) B(16, 0, -17)

ii) B appartient au plan XOZ.

c) i) $D_1 : (x, y, z) = (4, -6, 7) + s(2, 1, -4)$, où $s \in \mathbb{R}$

Nous remplaçons x, y et z par les coordonnées du point donné et nous déterminons si s est unique.

$$\begin{aligned}(0, -8, 15) &= (4, -6, 7) + s(2, 1, -4) \\ &= (4 + 2s, -6 + s, 7 - 4s)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 4 + 2s \Rightarrow s = -2 \\ -8 &= -6 + s \Rightarrow s = -2 \\ 15 &= 7 - 4s \Rightarrow s = -2 \end{aligned}\right\} \text{D'où } P_1 \in D_1$$

$$\begin{aligned}(2, -7, 3) &= (4, -6, 7) + s(2, 1, -4) \\ &= (4 + 2s, -6 + s, 7 - 4s)\end{aligned}$$

7. c) (*suite*)

$$\left.\begin{aligned} 2 &= 4 + 2s \Rightarrow s = -1 \\ -7 &= -6 + s \Rightarrow s = -1 \\ 3 &= 7 - 4s \Rightarrow s = 1 \end{aligned}\right\} \text{D'où } Q_1 \notin D_1$$

ii) $D_2: \begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = -9 + 3t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} 2 &= 8 + 2t \Rightarrow t = -3 \\ 8 &= 5 - t \Rightarrow t = -3 \\ -18 &= -9 + 3t \Rightarrow t = -3 \end{aligned}\right\} \text{D'où } P_2 \in D_2$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 8 + 2t \Rightarrow t = -4 \\ 0 &= 5 - t \Rightarrow t = 5 \end{aligned}\right\} \text{D'où } O \notin D_2$$

iii) $\dfrac{5-1}{2} = 2 \neq \dfrac{6+4}{-5}$, d'où $P_3 \notin D_3$

$$\frac{\frac{1}{2} - 1}{2} = \frac{-1}{4} = \frac{\frac{-11}{4} + 4}{-5}, \text{ d'où } Q_3 \in D_3$$

d) ① $0 = 8 + 2t \Rightarrow t = -4$

② $y_1 = 5 - t$

③ $z_1 = -9 + 3t$

En remplaçant t par -4 dans ② et ③, nous obtenons $y_1 = 9$ et $z_1 = -21$.

e) Soit $S(x_2, y_2, 0)$, le point cherché.

① $x_2 = 8 + 2t$

② $y_2 = 5 - t$

③ $0 = -9 + 3t \Rightarrow t = 3$

En remplaçant t par 3 dans ① et ②, $x_1 = 14$ et $y_2 = 2$.

D'où nous trouvons S(14, 2, 0).

f) Soit $T(0, y_3, 0)$, le point cherché.

① $0 = 8 + 2t \Rightarrow t = -4$

② $y_3 = 5 - t$

③ $0 = -9 + 3t \Rightarrow t = 3$

Puisque nous trouvons deux valeurs de t, la droite D_2 n'a pas de point d'intersection avec l'axe des y.

Exercices de compréhension 8.2

1. Il faut déterminer s'il existe un point $P(x_0, y_0, z_0)$ qui appartient aux deux droites.

a) Il faut résoudre $\begin{cases} 3 + s = 2 + 3r \\ 2 + 2s = 1 - r \\ -4 - 3s = -1 + 5r \end{cases}$

Ce système n'admet aucune solution.

D'où D_1 et D_2 sont des droites gauches.

b) Il faut résoudre $\begin{cases} 3 + s = -t \\ 2 + 2s = 8 + 4t \\ -4 - 3s = -1 \end{cases}$

En résolvant ce système, nous trouvons $s = -1$ et $t = -2$.

D'où D_1 et D_3 sont concourantes et P(2, 0, -1) est le point d'intersection.

2. Soit $\vec{u_1} = (2, -1, 6)$ et $\vec{u_2} = (1, 3, -2)$, des vecteurs directeurs de D_1 et D_2.

$$\cos\theta = \frac{|(2, -1, 6) \cdot (1, 3, -2)|}{\|(2, -1, 6)\| \|(1, 3, -2)\|} = \frac{|-13|}{\sqrt{41}\sqrt{14}}$$

d'où $\theta \approx 57{,}14°$

Exercices 8.2 (page 412)

1. a) V b) V c) F d) F

e) F f) F g) F h) F

2. a) Soit $\vec{u_1} = (1, 2, -1)$ et $\vec{u_2} = (3, 1, -1)$.

Puisque $\vec{u_1} \neq r\vec{u_2}$, $D_1 \not\parallel D_2$;

$$\cos\theta = \frac{|(1, 2, -1) \cdot (3, 1, -1)|}{\sqrt{6}\sqrt{11}} = \frac{6}{\sqrt{66}}$$

d'où $\theta \approx 42{,}4°$.

Déterminons s'il existe un point $P(x_0, y_0, z_0)$ appartenant à la fois à D_1 et à D_2, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_0 = 1 + s \\ y_0 = -3 + 2s \\ z_0 = -2 - s \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_0 = 20 + 3t \\ y_0 = 5 + t \\ z_0 = -9 - t \end{cases}$$

Ainsi, $\begin{cases} s - 3t = 19 \\ 2s - t = 8 \\ -s + t = -7 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 19 \\ 2 & -1 & 8 \\ -1 & 1 & -7 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 19 \\ 0 & 5 & -30 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

donc, $t = -6$ et $s = 1$.

Les droites sont concourantes et P(2, -1, -3) est le point d'intersection.

2. (*suite*)

b) Soit $\overrightarrow{u_1} = (1, 2, 3)$ et $\overrightarrow{u_2} = (3, 6, 9)$. Puisque $\overrightarrow{u_2} = 3\overrightarrow{u_1}$, $D_1 /\!/ D_2$; donc $\theta = 0°$.

Soit $P_1(1, -3, -3) \in D_1$. Vérifions si $P_1 \in D_2$.

$\frac{2(1) - 6}{6} = \frac{-3 - 1}{6} = \frac{3 + 3}{-9}$. Donc, $P_1 \in D_2$.

Les droites sont parallèles confondues ; $\theta = 0°$.

c) Soit $\overrightarrow{u_1} = (-3, 7, -8)$ et $\overrightarrow{u_2} = (1, -1, 2)$. Puisque $\overrightarrow{u_1} \neq r\overrightarrow{u_2}$, $D_1 \not/\!/ D_2$; $\theta \approx 16{,}1°$.

Déterminons s'il existe un point $P(x_0, y_0, z_0)$ appartenant à la fois à D_1 et à D_2, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_0 = 10 - 3s \\ y_0 = -13 + 7s \\ z_0 = -18 - 8s \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_0 = 5 + t \\ y_0 = 3 - t \\ z_0 = 1 + 2t \end{cases}$$

Ainsi, $\begin{cases} 3s + t = 5 \\ 7s + t = 16 \\ 8s + 2t = -19 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 3 & 1 & 5 \\ 7 & 1 & 16 \\ 8 & 2 & -19 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cc:c} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 207 \end{array}\right]$$

Ce système n'admet aucune solution.

Les droites sont donc des droites gauches.

d) Soit $\overrightarrow{u_1} = (3, -1, 2)$ et $\overrightarrow{u_2} = (-3, 1, -2)$. Puisque $\overrightarrow{u_1} = -\overrightarrow{u_2}$, $D_1 /\!/ D_2$; donc $\theta = 0°$.

Soit $P_1(1, 2, -5) \in D_1$. Vérifions si $P_1 \in D_2$.

$$\left.\begin{array}{l} 1 = -5 - 3s \Rightarrow s = -2 \\ 2 = 4 + s \Rightarrow s = -2 \\ -5 = -1 - 2s \Rightarrow s = 2 \end{array}\right\} \quad \text{Donc, } P_1 \notin D_2.$$

Les droites sont parallèles distinctes.

e) Les droites sont parallèles distinctes ; $\theta = 0°$.

f) Les droites sont concourantes ; $\theta \approx 55{,}4°$; $P(4, 3, 11)$.

g) Les droites sont des droites gauches ; $\theta = 90°$.

h) Les droites sont parallèles confondues ; $\theta = 0°$.

3. a) Soit $\vec{u} = (-1, 3, 4)$.

$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{26}}$, $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{26}}$ et $\cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{26}}$

$\alpha \approx 101{,}3°$, $\beta \approx 54{,}0°$ et $\gamma \approx 38{,}3°$

b) Soit $\vec{u} = (4, 0, 0)$.

$\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = 0$ et $\cos\gamma = 0$

$\alpha = 0°$, $\beta = 90°$ et $\gamma = 90°$

c) Soit $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (3, -1, -8)$.

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{74}}$, $\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{74}}$ et $\cos\gamma = \frac{-8}{\sqrt{74}}$

$\alpha \approx 69{,}6°$, $\beta \approx 96{,}7°$ et $\gamma \approx 158{,}4°$

4. a) Impossible, car $\cos^2 30° + \cos^2 30° + \cos^2 30° \neq 1$.

b) Impossible, car $\cos^2 60° + \cos^2 60° + \cos^2 60° \neq 1$.

c) Possible, car $\cos^2 25° + \cos^2 115° + \cos^2 90° = 1$.

d) Possible, car $\cos^2 60° + \cos^2 45° + \cos^2 60° = 1$.

5. a) Impossible, car $\cos^2\beta = -0{,}25$.

b) Possible, car $\cos\alpha = \pm 0{,}5$. D'où $\alpha = 60°$ ou $\alpha = 120°$.

c) Possible, car $\cos^2\beta = \frac{1 - \cos^2 50°}{2}$.

D'où $\beta = \gamma \approx 57{,}2°$ ou $\beta = \gamma \approx 122{,}8°$.

d) Impossible car, de $\cos^2\beta + \cos^2\gamma = 0$, nous obtenons $\cos^2\beta = 0$ et $\cos^2\gamma = 0$. D'où $\beta = \gamma = 90°$.

e) Possible, car $\cos^2\alpha = \frac{1}{3}$.

D'où $\alpha = \beta = \gamma \approx 54{,}7°$ ou $\alpha = \beta = \gamma \approx 125{,}3°$.

6. a) $\theta \approx 72{,}4°$ b) $\theta \approx 36{,}1°$ c) $\theta \approx 59{,}7°$

d) $\theta \approx 35{,}3°$ e) $\theta = 0°$ f) $\theta = 90°$

g) $\theta \approx 61{,}9°$ h) $\theta \approx 77{,}3°$ i) $\theta \approx 68{,}9°$

j) $\theta \approx 74{,}9°$ k) $\theta \approx 72{,}2°$

Exercices de compréhension 8.3

1. a) Soit $\overrightarrow{BC} = (-4, 2, -2)$, ainsi $\vec{u} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{BC} = (2, -1, 1)$ est un vecteur directeur de D_1 et de D_2.

Soit $P_1(3, -2, 2) \in D_1$ et $P_2(1, -1, 1) \in D_2$.

$$d(D_1, D_2) = \frac{\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \qquad \text{(théorème 8.4)}$$

$$= \frac{\|(-2, 1, -1) \times (2, -1, 1)\|}{\|(2, -1, 1)\|}$$

$$\text{donc } d(D_1, D_2) = \frac{\|(0, 0, 0)\|}{\sqrt{6}} = \frac{0}{\sqrt{6}}$$

d'où $d(D_1, D_2) = 0$ unité

b) Les droites sont parallèles confondues.

2. a) Soit $\overrightarrow{u_1} = (-2, 3, 3)$ et $\overrightarrow{u_2} = (-3, -1, 2)$, des vecteurs directeurs respectifs de D_1 et de D_2.

Soit $P_1(-1, 5, 2) \in D_1$ et $P_2(-7, -8, 1) \in D_2$.

$$d(D_1, D_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2})|}{\|\overrightarrow{u_1} \times \overrightarrow{u_2}\|}. \qquad \text{(théorème 8.5)}$$

$$= \frac{|(-6, -13, -1) \cdot ((-2, 3, 3) \times (-3, -1, 2))|}{\|(-2, 3, 3) \times (-3, -1, 2)\|}$$

$$\text{donc } d(D_1, D_2) = \frac{|(-6, -13, -1) \cdot (9, -5, 11)|}{\|(9, -5, 11)\|} = \frac{0}{\sqrt{227}}$$

d'où $d(D_1, D_2) = 0$ unité

b) Les droites sont concourantes.

c) Q(5, -4, -7)

Exercices 8.3 (page 421)

1. a) Soit $\vec{u} = (-1, 2, 7)$ et $R(3, 0, -5) \in D$. Puisque $\overrightarrow{RP} = (-1, -5, 12)$, nous avons

$$d(P, D) = \frac{\|(-1, -5, 12) \times (-1, 2, 7)\|}{\|(-1, 2, 7)\|} = \frac{\sqrt{3555}}{\sqrt{54}},$$

d'où $d(P, D) \approx 8{,}11$ unités.

b) Soit $\vec{u} = (2, -4, 1)$ et $R(0, 0, 0) \in D$. Puisque $\overrightarrow{RP} = (4, 0, 5)$, nous avons

$$d(P, D) = \frac{\|(4, 0, 5) \times (2, -4, 1)\|}{\|(2, -4, 1)\|} = \frac{\sqrt{692}}{\sqrt{21}},$$

d'où $d(P, D) \approx 5{,}74$ unités.

2. a) Soit $\vec{u} = (2, 5, -2)$, $P_1(-1, 4, 0) \in D_1$ et $P_2(2, 0, 1) \in D_2$. Puisque $\overrightarrow{P_1P_2} = (3, -4, 1)$, nous avons

$$d(D_1, D_2) = \frac{\|(3, -4, 1) \times (2, 5, -2)\|}{\|(2, 5, -2)\|} = \frac{\sqrt{602}}{\sqrt{33}},$$

d'où $d(D_1, D_2) \approx 4{,}27$ unités.

Ainsi, les droites sont parallèles distinctes.

b) Soit $\vec{u} = (-1, 2, 3)$, $P_1(4, 0, -3) \in D_1$ et $P_2(0, -2, 1) \in D_2$. Puisque $\overrightarrow{P_1P_2} = (-4, -2, 4)$, nous avons

$$d(D_1, D_2) = \frac{\|(-4, -2, 4) \times (-1, 2, 3)\|}{\|(-1, 2, 3)\|} = \frac{\sqrt{360}}{\sqrt{14}},$$

d'où $d(D_1, D_2) \approx 5{,}07$ unités.

Ainsi, les droites sont parallèles distinctes.

c) Soit $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $P_1(2, 0, 1) \in D_1$ et $P_2(0, -4, 1) \in D_2$. Puisque $\overrightarrow{P_1P_2} = (-2, -4, 0)$, nous avons

$$d(D_1, D_2) = \frac{\|(1, 2, 0) \times (-2, -4, 0)\|}{\|(1, 2, 0)\|} = 0 \text{ unité.}$$

Ainsi, les droites sont parallèles confondues.

3. a) Soit $\vec{u_1} = (-1, 0, 4)$, $\vec{u_2} = (2, -3, 4)$, $P_1(5, -1, 3)$ et $P_2\left(-4, \frac{-3}{2}, 0\right)$. Puisque $\overrightarrow{P_2P_1} = \left(9, \frac{1}{2}, 3\right)$ et $\vec{u_1} \times \vec{u_2} = (12, 12, 3)$, nous avons

$$d(D_1, D_2) = \frac{\left|\left(9, \frac{1}{2}, 3\right) \cdot (12, 12, 3)\right|}{\|(12, 12, 3)\|} = \frac{123}{\sqrt{297}},$$

d'où $d(D_1, D_2) \approx 7{,}14$ unités.

Ainsi, les droites sont des droites gauches.

b) Soit $\vec{u_1} = (1, -1, 3)$, $\vec{u_2} = (3, 2, -4)$, $P_1(5, -2, 15)$ et $P_2(-2, 0, 7)$. Puisque $\overrightarrow{P_1P_2} = (-7, 2, -8)$ et $\vec{u_1} \times \vec{u_2} = (-2, 13, 5)$, nous avons

$$d(D_1, D_2) = \frac{|(-7, 2, -8) \cdot (-2, 13, 5)|}{\|(-2, 13, 5)\|} = 0 \text{ unité.}$$

Ainsi, les droites sont concourantes.

Déterminons le point de rencontre de D_1 et D_2.

$$D_2 : \begin{cases} x = -2 + 6s \\ y = 0 + 4s \\ z = 7 - 8s \end{cases}, \text{ où } s \in \mathbb{R}$$

Il faut résoudre

$$\begin{cases} 5 + t = -2 + 6s \\ -2 - t = 0 + 4s \\ 15 + 3t = 7 - 8s \end{cases}, \text{ ainsi } \begin{cases} t - 6s = -7 \\ t + 4s = -2 \\ 3t + 8s = -8 \end{cases}$$

En résolvant, nous trouvons $t = -4$ et $s = \frac{1}{2}$.

En remplaçant t par -4 dans D_1 ou s par $\frac{1}{2}$ dans D_2, nous obtenons $Q(1, 2, 3)$.

c) Soit $\vec{u_1} = (3, 2, -6)$, $\vec{u_2} = (1, 0, 0)$, $P_1(0, 0, 0)$ et $P_2(0, 0, 1)$. Puisque $\overrightarrow{P_1P_2} = (0, 0, 1)$ et $\vec{u_1} \times \vec{u_2} = (0, -6, -2)$, nous avons

$$d(D_1, D_2) = \frac{|(0, 0, 1) \cdot (0, -6, -2)|}{\|(0, -6, -2)\|} = \frac{2}{\sqrt{40}},$$

d'où $d(D_1, D_2) \approx 0{,}32$ unité.

Ainsi, les droites sont des droites gauches.

4. a) i) $P \in D$ ii) $P \notin D$

b) i) Si $D_1 /\!\!/ D_2$, alors D_1 et D_2 sont parallèles confondues ; si $D_1 \not/\!\!/ D_2$, alors D_1 et D_2 sont concourantes.

ii) Si $D_1 /\!\!/ D_2$, alors D_1 et D_2 sont parallèles distinctes ; si $D_1 \not/\!\!/ D_2$, alors D_1 et D_2 sont gauches.

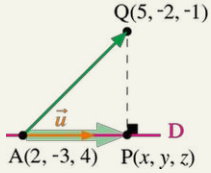
5. a) $D_1 \not/\!\!/ D_2$; $d(D_1, D_2) = 0$ unité

b) $D_1 /\!\!/ D_2$; $d(D_1, D_2) \approx 8{,}45$ unités

c) $D_1 \not/\!\!/ D_2$; $d(D_1, D_2) \approx 18{,}44$ unités

d) $D_1 /\!\!/ D_2$; $d(D_1, D_2) = 0$ unité

6. a) Soit $P(x, y, z)$, le point cherché, $A(2, -3, 4) \in D$ et $\vec{u} = (-1, 3, 5)$.



$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ}_{\vec{u}}$$

$$(x - 2, y + 3, z - 4) = \left(\frac{\overrightarrow{AQ} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\right)\vec{u}$$

$$= \left(\frac{(3, 1, -5) \cdot (-1, 3, 5)}{(-1, 3, 5) \cdot (-1, 3, 5)}\right)(-1, 3, 5)$$

$$= \left(\frac{5}{7}, \frac{-15}{7}, \frac{-25}{7}\right)$$

d'où $P\left(\frac{19}{7}, \frac{-36}{7}, \frac{3}{7}\right)$

6. (*suite*)

b) Soit P(x, y, z), le point cherché, A(1, 2, 3) ∈ D et $\vec{u} = (1, 1, 1)$.

$$(x - 1, y - 2, z - 3) = \left(\frac{(-1, -2, -3) \cdot (1, 1, 1)}{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)}\right)(1, 1, 1)$$
$$= (-2, -2, -2)$$

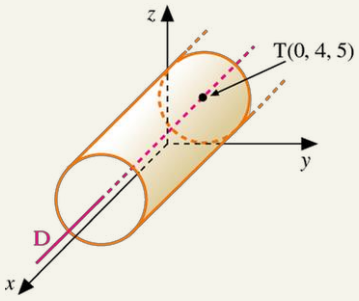
d'où P(-1, 0, 1)

7. a) Soit $\vec{u} = (1, 0, 0)$, S(-2, 4, 5) ∈ D et P(x, y, z) tel que d(P, D) = 5.

Ainsi, $\dfrac{\|\overrightarrow{SP} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = 5$. Donc $(y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 25$.

D'où L : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 25\}$

b) Cette équation représente un cylindre circulaire droit dont l'axe est la droite D et dont le rayon est égal à 5 unités.



c) Intersection avec XOY :

En posant $z = 0$, nous obtenons $(y - 4)^2 = 0$.

D'où $y = 4$. L'intersection est la droite D définie par D : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 4 \text{ et } z = 0\}$.

Intersection avec XOZ :

En posant $y = 0$, nous obtenons $(z - 5)^2 = 9$.

D'où $z = 2$ ou $z = 8$. L'intersection est $D_1 \cup D_2$, où
D_1 : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \text{ et } z = 2\}$ et
D_2 : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \text{ et } z = 8\}$.

Intersection avec YOZ :

L'intersection est un cercle C de rayon 5, de centre T(0, 4, 5), défini par

C : $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ et } (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 25\}$.

d) Intersection avec l'axe des x :

En posant $y = 0$ et $z = 0$, nous obtenons $16 = 0$.

D'où il n'y a aucune intersection.

Intersection avec l'axe des y : le point A(0, 4, 0)

Intersection avec l'axe des z : les points B(0, 0, 2) et D(0, 0, 8)

8. a) Soit $P_1(1 - t, -2 + 3t, 3 - 2t)$, un point de D_1.

Soit D_2 sous forme vectorielle,

D_2 : $(x, y, z) = (3, 0, -1) + s(2, -1, 4)$, où $s \in \mathbb{R}$.

Soit $P_2(3 + 2s, -s, -1 + 4s)$, un point de D_2,

$\overrightarrow{u_1} = (-1, 3, -2)$, un vecteur directeur de D_1, et

$\overrightarrow{u_2} = (2, -1, 4)$, un vecteur directeur de D_2.

De $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0$ et $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$, nous obtenons

$(2s + t + 2, -s - 3t + 2, 4s + 2t - 4) \cdot (-1, 3, -2) = 0$

$(2s + t + 2, -s - 3t + 2, 4s + 2t - 4) \cdot (2, -1, 4) = 0$

c'est-à-dire $\begin{cases} 13s + 14t = 12 \\ 21s + 13t = 14 \end{cases}$

En résolvant, nous trouvons $s = \dfrac{8}{25}$ et $t = \dfrac{14}{25}$.

D'où $P_1\left(\frac{11}{25}, \frac{-8}{25}, \frac{47}{25}\right)$ et $P_2\left(\frac{91}{25}, \frac{-8}{25}, \frac{7}{25}\right)$

b) $d(P_1, P_2) = \sqrt{12{,}8}$ unités et $d(D_1, D_2) = \sqrt{12{,}8}$ unités

D'où $d(P_1, P_2) = d(D_1, D_2)$

Exercices récapitulatifs (page 423)

3. a) Pour les équations suivantes, $t \in \mathbb{R}$.

D_1 : É.V. $(x, y, z) = (3, 2, -7) + t(1, -2, 7)$

É.P. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -7 + 7t \end{cases}$

É.S. $x - 3 = \dfrac{y - 2}{-2} = \dfrac{z + 7}{7}$

D_2 : É.V. $(x, y, z) = (4, 0, 2) + t(1, 1, 0)$

É.P. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$

É.S. Non définies

Forme ensembliste
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 4 = 0 \text{ et } z = 2\}$

d) D_1 et D_4 sont parallèles confondues ;

D_1 et D_2 sont des droites gauches ;

D_2 et D_3 sont des droites concourantes : P(5, 1, 2).

e) $d(D_1, D_2) \approx 0{,}58$ unité ; $d(D_2, D_3) = 0$ unité ;

$d(D_2, D_5) = 1$ unité

f) 0° ; 45°

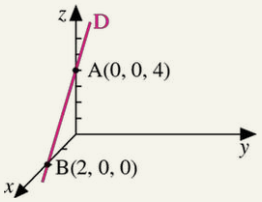
h) $\alpha_1 \approx 82{,}2°$, $\beta_1 \approx 105{,}8°$ et $\gamma_1 \approx 17{,}7°$

$\alpha_2 = 45°$, $\beta_2 = 45°$ et $\gamma_2 = 90°$

$\alpha_5 = 90°$, $\beta_5 = 0°$ et $\gamma_5 = 90°$

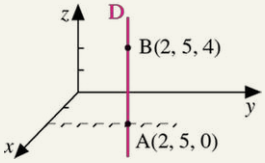
i) $d(P, D_1) \approx 5{,}91$ unités ; $d(P, D_3) = 0$ unité

5. b) i)



D est dans le plan XOZ.

ii)



D est parallèle à l'axe des z.

7. a) i) $d(D_2, D_3) = 10$ cm ii) $d(D_1, D_3) \approx 4{,}08$ cm
iii) $d(D_1, D_4) \approx 4{,}08$ cm iv) $d(D_3, D_4) \approx 5{,}77$ cm

8. a) $P_2(0, 5, 1)$

b) $P_1\left(\frac{-1}{11}, \frac{58}{11}, \frac{21}{11}\right)$

c) i) $d(A, D_2) = 1$ unité ii) $d(P_2, D_1) \approx 0{,}95$ unité
iii) $d(D_1, D_2) \approx 0{,}71$ unité

9. b) i) $d(D_1, D_3) \approx 6{,}27$ unités

ii) $d(D_2, D_4) = \frac{4}{3}$ unité

c) $R_2\left(\frac{37}{9}, -6, \frac{80}{9}\right)$ et $R_4\left(\frac{95}{27}, \frac{-190}{27}, \frac{224}{27}\right)$

11. a) $D_1 : (x, y, z) = (-3, 2, 5) + t(1, 1, \sqrt{2})$, où $t \in \mathbb{R}$

12. a) $x = y = z$

c) i) $d(A, D) \approx 0{,}82$ unité ii) $d(B, D) \approx 0{,}82$ unité
iii) $d(C, D) = 0$ unité

15. b) $D : (x, y, z) = (1, 3, 2) + k(3, 3, 4)$, où $k \in \mathbb{R}$

c) $A\left(3, 5, \frac{14}{3}\right)$

16. a) $a = 9t$, $b = \frac{-4}{t}$ et $c = \frac{-1}{t^2}$, où $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $d \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

17. a) $a = 40$

b) P(-29, 18, 47)

18. c) $a = -8$; $P\left(\frac{-23}{11}, \frac{16}{11}, \frac{-62}{11}\right)$

Problèmes de synthèse (page 425)

1. a) Un point de $\mathbb{R}$

c) Un point de $\mathbb{R}^2$

e) Une droite de $\mathbb{R}^2$

2. a) A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) et C(0, 0, 1)

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ u^2

e) $\frac{1}{6}$ u^3

3. a) i) A(2, 4, 0) ii) B(-4, 6, 0)
iii) C(5, -2, 0) iv) E(-1, 2, 3)

b) 15 u^3

4. a) $D_3 : (x, y, z) = (-4, 3, 10) + t(1, -1, 1)$, où $t \in \mathbb{R}$

5. a) $D \perp \vec{i}$ et $D \parallel YOZ$

c) $D \perp \vec{i}$, $D \perp \vec{j}$, $D \parallel \vec{k}$, $D \perp XOY$, $D \parallel YOZ$ et $D \parallel XOZ$

7. a) $D_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 4t \\ z = -4 + 11t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

c) $D_6 : (x, y, z) = 6\vec{i} - \vec{j} + 12\vec{k} + t(1, 2, 3)$, où $t \in \mathbb{R}$

8. a) A(5, 3, 1), B(-3, 2, 4) et C(12, 3, 6)

d) Aire $\approx 30{,}8$ u^2

f) $D_a : (x, y, z) = (5, 3, 1) + r(1, 1, -8)$, où $r \in \mathbb{R}$

14. $\alpha \approx 64{,}9°$ ou $\alpha \approx 33{,}5°$

15. a) $r = \frac{-(ax_1 + by_1 + cz_1)}{a^2 + b^2 + c^2}$

b) $r = \frac{4}{7}$

c) $P\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$

18. b) $d(D_1, D_2) = \frac{\sqrt{150}}{10}$ unité,

c'est-à-dire $d(D_1, D_2) \approx 1{,}22$ unité

c) $Q_2\left(\frac{26}{11}, \frac{28}{11}, \frac{-6}{11}\right)$

19. Aire minimale $= 1{,}870\ldots$ u^2

20. P(3, -4, 2) et Q(6, -8, 4)

21. Distance maximale $= 21{,}557\ldots$ unités ;
distance minimale $= 2{,}442\ldots$ unités

CHAPITRE 9

Exercices préliminaires (page 431)

1. a) $(x + 7)^2 + (y - 5)^2 + (z - 8)^2 = 16$

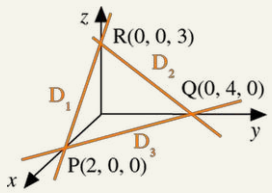
b) i) $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 50$

Sphère de centre C(5, -3, 4) et de rayon $\sqrt{50}$

ii) $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2 = 0$

Le point P(0, 1, -4)

2.



3. a) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = (-2, 5, -5) \cdot (1, -2, -8) = 28$

b) $\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR} = (2, -5, 5) \times (3, -7, -3) = (50, 21, 1)$

c) $\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ} = (1, -2, -8) \times (-2, 5, -5) = (50, 21, 1)$

d'où $\vec{u} = \left(\frac{50}{\sqrt{2942}}, \frac{21}{\sqrt{2942}}, \frac{1}{\sqrt{2942}}\right)$

d) $\angle PQR \approx 64{,}4°$

e) $A = \frac{\sqrt{2942}}{2}$ u², c'est-à-dire $A \approx 27{,}1$ u²

4. a) $\vec{u}_{\vec{v}} = \left(\frac{3}{7}, \frac{-3}{14}, \frac{-9}{14}\right)$

b) $\|\vec{u}_{\vec{v}}\| = \frac{\sqrt{126}}{14}$

c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = -37$

5. $d(P, D) = \frac{|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

Exercices de compréhension 9.1

1. Soit $\overrightarrow{PQ} = (2, 0, 8)$ et $\overrightarrow{PR} = (5, 3, 0)$,

ainsi $\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = (1, 0, 4)$ et $\vec{u}_2 = \overrightarrow{PR} = (5, 3, 0)$

sont des vecteurs directeurs de π.

a) $\pi : (x, y, z) = (0, 4, -9) + k_1(1, 0, 4) + k_2(5, 3, 0)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

b) $\pi : \begin{cases} x = k_1 + 5k_2 \\ y = 4 + 3k_2 \\ z = -9 + 4k_1 \end{cases}$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

c) Déterminons s'il existe un k_1 et un $k_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} 0 = k_1 + 5k_2 \\ 0 = 4 + 3k_2 \\ 0 = -9 + 4k_1 \end{cases} \text{, c'est-à-dire } \begin{cases} k_1 + 5k_2 = 0 & ① \\ 3k_2 = -4 & ② \\ 4k_1 = 9 & ③ \end{cases}$$

De ②, $k_2 = \frac{-4}{3}$, et de ③, $k_1 = \frac{9}{4}$.

En remplaçant ces valeurs dans ①, nous trouvons

$\frac{9}{4} + 5\left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{-53}{12}$, donc $k_1 + 5k_2 \neq 0$

d'où $O(0, 0, 0) \notin \pi$

2. a) $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = (5, 6, -2) \times (0, 1, -3) = (-16, 15, 5)$

Soit $\vec{n} = (-16, 15, 5)$, un vecteur normal à π,

ainsi $-16x + 15y + 5z - (-16(5) + 15(-2) + 5(1)) = 0$

d'où $\pi : -16x + 15y + 5z + 105 = 0$

b) Puisque P(0, -6, -3), nous obtenons

$-16(0) + 15(-6) + 5(-3) + 105 = 0$

d'où $P(0, -6, -3) \in \pi$

c) Puisque O(0, 0, 0), nous obtenons

$-16(0) + 15(0) + 5(0) + 105 \neq 0$

d'où $O(0, 0, 0) \notin \pi$

Exercices 9.1 (page 443)

1. a) F b) V c) F d) V

e) V f) F g) F h) V

2. a) $(x, y, z) = (3, 0, 7) + k_1(1, 4, -2) + k_2(3, 1, 4)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

b) $\vec{u}_1 = \overrightarrow{PQ} = (-3, 2, -4)$ et $\vec{u}_2 = \overrightarrow{PR} = (-6, 4, 3)$

donc, $(x, y, z) = (6, -2, 0) + k_1(-3, 2, -4) + k_2(-6, 4, 3)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

c) $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 1, 0)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

3. a) $\begin{cases} x = -7 + 3k_1 - 5k_2 \\ y = 1 - 2k_1 - 3k_2 \\ z = 2 + k_1 - 7k_2 \end{cases}$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

b) $\vec{u}_1 = (1, 0, 1)$ et $\vec{u}_2 = (0, 1, -1)$. Donc,

$\begin{cases} x = k_1 \\ y = k_2 \\ z = k_1 - k_2 \end{cases}$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

c) $\vec{u}_1 = (-7, 3, 0)$ et $\vec{u}_2 = \overrightarrow{PQ} = (-3, -1, -3)$, où $Q(1, -3, 2) \in D$.

Donc, $\begin{cases} x = 4 - 7k_1 - 3k_2 \\ y = -2 + 3k_1 - k_2 \\ z = 5 - 3k_2 \end{cases}$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

4. a) $2x - 4y + 5z + 15 = 0$

b) $\vec{n} = (-1, 2, -2)$. D'où $-x + 2y - 2z - 15 = 0$.

c) $\vec{n} = (2, 5, -3)$. D'où $2x + 5y - 3z = 0$.

d) $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (8, -6, 2)$

Soit $\vec{n} = \frac{1}{2}(8, -6, 2) = (4, -3, 1)$.

D'où $4x - 3y + z + 7 = 0$.

e) Soit $R(3, -2, 0) \in D$, et soit $\vec{u_1} = (1, 5, -4)$ et $\vec{u_2} = \overrightarrow{PR} = (3, -6, -5)$, deux vecteurs directeurs de π.

$\vec{u_1} \times \vec{u_2} = (-49, -7, -21)$

Soit $\vec{n} = \frac{-1}{7}(-49, -7, -21) = (7, 1, 3)$.

D'où $7x + y + 3z - 19 = 0$.

f) Soit $\vec{u_1} = (5, 6, -1)$, $P_1(2, -5, 0) \in D_1$, $P_2(4, 3, -2) \in D_2$ et $\vec{u_2} = \overrightarrow{P_1P_2} = (2, 8, -2)$.

$\vec{u_1} \times \vec{u_2} = (-4, 8, 28)$

Soit $\vec{n} = \frac{-1}{4}(-4, 8, 28) = (1, -2, -7)$.

D'où $x - 2y - 7z - 12 = 0$.

5. a) $\pi_{YOZ}: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$

b) $\pi_1: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 4\}$

c) $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (20, 15, 0)$

Soit $\vec{n} = \frac{1}{5}(20, 15, 0) = (4, 3, 0)$.

D'où $\pi_2: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 3y - 12 = 0\}$.

6. a) É.N. : $\frac{2}{\sqrt{45}}x - \frac{4}{\sqrt{45}}y + \frac{5}{\sqrt{45}}z + \frac{15}{\sqrt{45}} = 0$

É.R. : $\frac{x}{\left(\frac{-15}{2}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{15}{4}\right)} + \frac{z}{-3} = 1$

b) Soit $\vec{n} = (-2, 1, 4) \times (1, -2, 3) = (11, 10, 3)$.

É.N. : $\frac{11}{\sqrt{230}}x + \frac{10}{\sqrt{230}}y + \frac{3}{\sqrt{230}}z - \frac{21}{\sqrt{230}} = 0$

É.R. : $\frac{x}{\left(\frac{21}{11}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{21}{10}\right)} + \frac{z}{7} = 1$

c) Soit $\vec{n} = \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OR} = (1, -2, -2)$.

É.N. : $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0$

Il n'y a pas d'équation réduite.

7. a) $P \notin \pi_1$; $P \notin \pi_2$; $P \in \pi_3$; $P \in \pi_4$

b) $Q \in \pi_1$; $Q \notin \pi_2$; $Q \in \pi_3$; $Q \in \pi_4$

c) $O \notin \pi_1$; $O \in \pi_2$; $O \notin \pi_3$; $O \in \pi_4$

d) $R \notin \pi_1$; $R \notin \pi_2$; $R \notin \pi_3$; $R \notin \pi_4$

8. Soit $\vec{u_1} = \vec{i}$ et $\vec{u_2} = \vec{k}$, deux vecteurs directeurs du plan.

Soit $\vec{n} = \vec{j}$, un vecteur normal au plan, et $O(0, 0, 0)$, un point du plan.

a) $(x, y, z) = k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 0, 1)$, où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x = k_1 \\ y = 0 \\ z = k_2 \end{cases}$, où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

c) $y = 0$

d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$

e) $y = 0$

f) $P(a, 0, b)$, où a et $b \in \mathbb{R}$

9. a) $\vec{n} = (3, -2, 4)$ et $\vec{N} = \left(\frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{-2}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}\right)$

b) Il suffit de trouver deux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ tels que $\vec{u_1} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{u_2} \cdot \vec{n} = 0$. Par exemple, $\vec{u_1} = (0, 2, 1)$ et $\vec{u_2} = (4, 2, -2)$.

c) Il suffit de résoudre $3x - 2(-5) + 4(3) - 1 = 0$.

D'où $x = -7$.

d) De $3(3) - 2(-2) + 4z - 1 = 0$, nous obtenons $z = -3$.

e) Pour déterminer l'intersection de π avec l'axe des x, il suffit de poser $y = 0$ et $z = 0$ dans l'équation de π et de résoudre l'équation $3x - 1 = 0$. Ainsi, $x = \frac{1}{3}$.

D'où $P_x\left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)$.

De façon analogue, $P_y\left(0, \frac{-1}{2}, 0\right)$ et $P_z\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$ sont les points d'intersection avec l'axe des y et l'axe des z.

10. a) Soit $\vec{u_1} = \overrightarrow{PQ} = (-4, 5, 0)$ et $\vec{u_2} = \overrightarrow{PR} = (-4, 0, 3)$.

Soit $\vec{n} = \vec{u_1} \times \vec{u_2} = (15, 12, 20)$.

É.V. : $(x, y, z) = (4, 0, 0) + k_1(-4, 5, 0) + k_2(-4, 0, 3)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

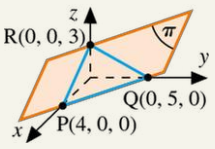
É.P. : $\begin{cases} x = 4 - 4k_1 - 4k_2 \\ y = 5k_1 \\ z = 3k_2 \end{cases}$, où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

É.C. : $15x + 12y + 20z - 60 = 0$

É.N. : $\frac{15}{\sqrt{769}}x + \frac{12}{\sqrt{769}}y + \frac{20}{\sqrt{769}}z - \frac{60}{\sqrt{769}} = 0$

É.R. : $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{3} = 1$

b)



11. $\begin{vmatrix} x - 4 & y + 2 & z - 7 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

d'où $3x + y + 7z - 59 = 0$

12. a) Soit $\vec{u_1} = \overrightarrow{PQ} = (-3, -2, 5)$ et $\vec{u_2} = \overrightarrow{PR} = (-2, -1, 3)$.

$\begin{vmatrix} x - 3 & y & z + 1 \\ -3 & -2 & 5 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

d'où $x + y + z - 2 = 0$

b) $\vec{n} = (1, 1, 1)$ et $\vec{N} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

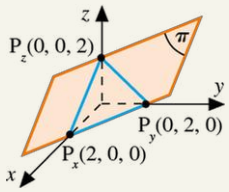
c) $\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0$

12. (*suite*)

d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$

e) $P_x(2, 0, 0)$, $P_y(0, 2, 0)$ et $P_z(0, 0, 2)$

f)



13. Une équation cartésienne du plan passant par

a) P, Q et R est $\pi: 3x - y + 2z - 5 = 0$ et $S(0, 3, 4) \in \pi$, car $3(0) - 3 + 2(4) - 5 = 0$.

D'où les points P, Q, R et S sont coplanaires.

b) P, Q et R est $\pi: x + 2y - z - 2 = 0$ et $S(-2, 1, -3) \notin \pi$, car $-2 + 2 - (-3) - 2 \neq 0$.

D'où les points P, Q, R et S ne sont pas coplanaires.

Exercices de compréhension 9.2

1. $\pi_1: (x, y, z) = (4, -3, 3) + k_1(-2, -3, 0) + k_2(4, 8, 1)$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$.

$\vec{n_1} = (-2, -3, 0) \times (4, 8, 1) = (-3, 2, -4)$ est un vecteur normal à π_1.

$\pi_2: \frac{x}{12} - \frac{y}{18} + \frac{z}{9} = 1$,

ainsi $\pi_2: 3x - 2y + 4z - 36 = 0$.

$\vec{n_2} = (3, -2, 4)$ est un vecteur normal à π_2.

Puisque $\vec{n_2} = -\vec{n_1}$, $\vec{n_1} /\!/ \vec{n_2}$, donc $\pi_1 /\!/ \pi_2$.

Vérifions si $P(4, -3, 3) \in \pi_2$.

Puisque $\frac{4}{12} - \frac{(-3)}{18} + \frac{3}{9} = \frac{5}{6} \neq 1$,

donc $P(4, -3, 3) \notin \pi_2$

d'où les plans π_1 et π_2 sont parallèles distincts.

2. a) Soit $\vec{u} = (3, -4, 1)$, un vecteur directeur de D, et $\vec{n} = (3, -1, 3)$, un vecteur normal à π.

Puisque $\vec{u} \cdot \vec{n} = (3, -4, 1) \cdot (3, -1, 3) = 16 \neq 0$, donc $D \not\parallel \pi$

d'où D est non parallèle à π.

Déterminons le point d'intersection $P(x, y, z)$.

En remplaçant x par $(-2 + 3t)$, y par $(1 - 4t)$ et z par $(7 + t)$ dans l'équation de π, nous obtenons

$3(-2 + 3t) - (1 - 4t) + 3(7 + t) + 2 = 0$, donc $t = -1$

d'où $P(-5, 5, 6)$ est le point d'intersection.

b) $\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{n}\|} = \frac{|16|}{\sqrt{26}\sqrt{19}}$,

donc $\alpha = 43{,}955\ldots°$

d'où $\theta \approx 46{,}04°$ (car $\theta = 90° - \alpha$)

Exercices 9.2 (page 454)

1. a) V b) V c) F d) V

e) F f) V g) V h) F

2. a) i) Il faut résoudre le système S suivant.

$$S \begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - 2y + 4z = -1 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -13 & 4 \end{array}\right] \quad -3L_2 + L_1 \to L_2$$

En posant $z = t$, où $t \in \mathbb{R}$, nous trouvons

$y = \frac{1}{2} + \frac{13}{8}t$ et $x = \frac{-3}{4}t$

d'où $D: \begin{cases} x = \frac{-3}{4}t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{13}{8}t, \text{ où } t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

ii) Soit $\begin{cases} 3x + 2y = z + 1 \\ x - 2y = -4z - 1 \end{cases}$, où $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$.

Posons $z = t$, où $t \in \mathbb{R}$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} t + 1 & 2 \\ -4t - 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{6t}{-8} = \frac{-3}{4}t$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & t + 1 \\ 1 & -4t - 1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-4 - 13t}{-8} = \frac{1}{2} + \frac{13}{8}t$$

$$\text{d'où } D: \begin{cases} x = \frac{-3}{4}t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{13}{8}t, \text{ où } t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

b) Soit $\vec{n_2} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-6, 3, 1) \times (-3, 1, 2) = (5, 9, 3)$.

Sous forme cartésienne, nous avons

$\pi_2: 5x + 9y + 3z - 17 = 0$.

Nous obtenons le système S $\begin{cases} 5x + 9y + 3z = 17 \\ 7x + 15y + 7z = 7 \end{cases}$

2. b) (*suite*)

Déterminons deux points particuliers P_1 et P_2 de D.

En posant $y = 0$, nous obtenons le système

$$\begin{cases} 5x + 3z = 17 \\ 7x + 7z = 7 \end{cases}$$

En résolvant, nous obtenons $x = 7$ et $z = -6$.

Ainsi, $P_1(7, 0, -6) \in D$.

En posant $z = 0$, nous obtenons le système

$$\begin{cases} 5x + 9y = 17 \\ 7x + 15y = 7 \end{cases}$$

En résolvant, nous obtenons $x = 16$ et $y = -7$.

Ainsi, $P_2(16, -7, 0) \in D$.

Soit $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (9, -7, 6)$, un vecteur directeur de D.

D'où $D: \begin{cases} x = 7 + 9t \\ y = -7t \\ z = -6 + 6t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

3. a) Soit $\vec{n_1} = (3, -1, 4)$ et $\vec{n_2} = (-1, 4, -3)$.

Puisque $\vec{n_1} \neq k\vec{n_2}$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $\pi_1 \not\parallel \pi_2$.

D'où les plans sont sécants.

Il faut résoudre le système S suivant.

$$S \begin{cases} 3x - y + 4z = 1 \\ -x + 4y - 3z = 1 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\left[\begin{array}{cccc} 3 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 11 & -5 & 4 \end{array}\right] \quad 3L_2 + L_1 \to L_2$$

En posant $z = t$, où $t \in \mathbb{R}$, nous trouvons

$$y = \frac{4}{11} + \frac{5}{11}t \quad \text{et} \quad x = \frac{5}{11} - \frac{13}{11}t.$$

$$D: (x, y, z) = \left(\frac{5}{11}, \frac{4}{11}, 0\right) + t\left(\frac{-13}{11}, \frac{5}{11}, 1\right), \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

b) Soit $\vec{n_1} = (0, 5, 3) \times (1, 4, 2) = (-2, 3, -5)$

et $\vec{n_2} = (2, -3, 5)$.

Puisque $\vec{n_1} = -\vec{n_2}$, $\pi_1 /\!/ \pi_2$.

Soit $P_1(4, 0, 1) \in \pi_1$.

Puisque $2(4) - 3(0) + 5(1) - 13 = 0$, $P_1 \in \pi_2$.

D'où les plans sont parallèles confondus.

c) Soit $\vec{n_1} = (-2, 4, 5) \times (3, 1, 3) = (7, 21, -14)$ et

$\vec{n_2} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-13, 5, 1) \times (-1, 3, 4) = (17, 51, -34)$.

Puisque $\vec{n_1} = \frac{7}{17}\vec{n_2}$, $\pi_1 /\!/ \pi_2$.

Soit $A(4, -1, 2) \in \pi_2$. Le système

$$\begin{cases} 4 = 3 - 2k_1 + 3k_2 \\ -1 = -2 + 4k_1 + k_2 \\ 2 = 1 + 5k_1 + 3k_2 \end{cases}$$ n'a aucune solution.

D'où les plans sont parallèles distincts.

4. a) Soit $\vec{n_1} = (3, -1, -2)$ et $\vec{n_2} = (1, 2, 5)$.

$$\cos\theta = \frac{|(3, -1, -2) \cdot (1, 2, 5)|}{\sqrt{14}\sqrt{30}} = \frac{|-9|}{\sqrt{420}}$$

D'où $\theta \approx 63{,}95°$

b) Soit $\vec{n_1} = (12, -9, 6)$ et $\vec{n_2} = (4, -3, 2)$. D'où $\theta = 0°$.

c) Soit $\vec{n_1} = (2, -1, 5)$ et $\vec{n_2} = (3, -4, -2)$. D'où $\theta = 90°$.

d) Soit $\vec{n_1} = (0, 0, 1)$ et $\vec{n_2} = (-1, 3, -4)$. D'où $\theta \approx 38{,}33°$.

e) Soit $\vec{n_1} = (0, 1, 0)$ et $\vec{n_2} = (1, 1, 0)$. D'où $\theta = 45°$.

5. a) Il faut que $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$, c'est-à-dire $(a, 2, 4) \cdot (3, -4, -8) = 0$

$$3a + 2(-4) + 4(-8) = 0$$

D'où $a = \frac{40}{3}$ et $b \in \mathbb{R}$

b) Il faut que $\vec{n_1} = k\vec{n_2}$, c'est-à-dire $(a, 2, 4) = k(3, -4, -8)$

$$= (3k, -4k, -8k)$$

Ainsi, $a = 3k$, $2 = -4k$ et $4 = -8k$. Donc, $k = \frac{-1}{2}$.

D'où $a = \frac{-3}{2}$

Ainsi, $\pi_1: \frac{-3}{2}x + 2y + 4z - 1 = 0$

Si $P_1(2, 0, 1) \in \pi_1$, alors $3(2) - 4(0) - 8(1) + b = 0$

D'où $b = 2$

c) $a = \frac{-3}{2}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

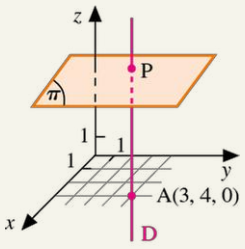
6. a) E.-S. $= \{(1 - t, 1 + t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$; infinité de solutions ; graphique associé : iv)

b) E.-S. $= \{(1, -2, 5)\}$; graphique associé : i)

c) E.-S. $= \emptyset$; graphique associé : iii)

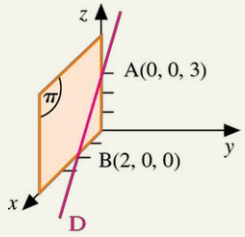
d) E.-S. $= \emptyset$; graphique associé : ii)

7. a)



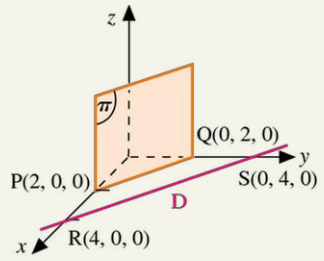
D est sécante à π ; P(3, 4, 6).

b)



$D /\!/ \pi$ et $D \subset \pi$.

c)



$D /\!/ \pi$ et $D \not\subset \pi$.

8. a) Soit $\vec{u} = (-4, 1, 3)$, un vecteur directeur de D, et $\vec{n} = (5, 2, 6)$, un vecteur normal à π.

Puisque $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, D $/\!/ \pi$.

Soit P(5, -4, -2) $\in$ D.

Puisque $5(5) + 2(-4) + 6(-2) - 4 \neq 0$, P $\notin \pi$.

D'où D $/\!/ \pi$ et D $\not\subset \pi$.

b) Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-8, 5, 3)$, un vecteur directeur de D, et $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-8, 4, -28)$, un vecteur normal à π.

Puisque $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, D $/\!/ \pi$.

Soit A(5, -1, -1) $\in$ D et $\pi: 2x - y + 7z - 4 = 0$.

Puisque $2(5) - (-1) + 7(-1) - 4 = 0$, A $\in \pi$.

D'où D $/\!/ \pi$ et D $\subset \pi$.

c) Soit $\vec{u} = (-2, 1, 3)$ et $\vec{n} = (5, 7, -1)$.

Puisque $\vec{u} \cdot \vec{n} = -6 \neq 0$, D $\not/\!/ \pi$.

$$\text{D}: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -2 + t \\ z = -6 + 3t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $5(4 - 2t) + 7(-2 + t) - (-6 + 3t) = 0$

donc, $t = 2$

d'où O(0, 0, 0) est le point d'intersection.

9. a) Soit $\vec{u} = (-5, 4, 2)$ et $\vec{n} = (3, -4, 2)$.

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{v}\| \, \|\vec{n}\|} = \frac{|-27|}{\sqrt{45}\sqrt{29}}$$

donc, $\alpha = 41{,}63\ldots°$

d'où $\theta \approx 48{,}37°$. (car $\theta = 90° - \alpha$)

b) Soit $\vec{u} = (4, 1, -2)$ et $\vec{n} = (2, 2, 5)$.

$\alpha = 90°$

d'où $\theta = 0°$.

c) Soit $\vec{u} = (2, -3, 4)$ et $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-8, 12, -16)$.

$\alpha = 0°$

d'où $\theta = 90°$.

10. Soit $\vec{u} = (a, -1, 3)$ et $\vec{n} = (12, -2, a)$.

a) D $\perp \pi \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{v} = k\vec{n}$$

$(a, -1, 3) = k(12, -2, a)$

$= (12k, -2k, ak)$

ainsi, $a = 12k$, $-1 = -2k$ et $3 = ak$

donc, $k = \frac{1}{2}$.

D'où $a = 6$, et

puisque π passe par O(0, 0, 0), ainsi $d = 0$.

b) D $/\!/ \pi \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow (a, -1, 3) \cdot (12, -2, a) = 0$.

D'où $a = \frac{-2}{15}$, et

puisque O(0, 0, 0) $\in$ D, O $\in \pi$, ainsi $d = 0$.

c) $a = \frac{-2}{15}$ et $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

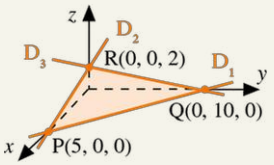
11. a) P(5, 0, 0), Q(0, 10, 0) et R(0, 0, 2)

b) $\text{D}_1: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 10 = 0 \text{ et } z = 0\}$

$\text{D}_2: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 5z - 10 = 0 \text{ et } y = 0\}$

$\text{D}_3: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + 5z - 10 = 0 \text{ et } x = 0\}$

c)



12. a) Soit $\vec{n_1} = (2, -1, 5)$.

Soit R(x, y, z), un point quelconque de π.

Soit $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$.

Si $\pi_1 \perp \pi$, alors $\vec{n_1} \cdot \vec{n} = 0$.

$$\text{Ainsi, } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & -4 \\ x - 4 & y + 2 & z - 1 \end{vmatrix} = 0$$

d'où $\pi: -21x - 2y + 8z + 72 = 0$

b) Si $\pi \perp \pi_2$ et $\pi \perp \pi_3$, alors $\vec{n} \perp \vec{n_2}$ et $\vec{n} \perp \vec{n_3}$.

Soit $\vec{n} = \vec{n_2} \times \vec{n_3} = (7, -14, -7)$.

D'où $\pi: x - 2y - z + 10 = 0$

13. a) F: $k_1(x - 2y + 4z - 1) + k_2(2x + y - 3z + 5) = 0$, où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ ($k_1 \neq 0$ ou $k_2 \neq 0$)

b) $\pi: x - 2y + 4z - 1 = 0$, c'est-à-dire π_1

c) Si $k_1 = 0$ et $k_2 = 1$, nous obtenons π_2.

d) i) Les coordonnées du point O(0, 0, 0) doivent vérifier l'équation.

$k_1(0 - 2(0) + 4(0) - 1) + k_2(2(0) + 0 - 3(0) + 5) = 0$

$-k_1 + 5k_2 = 0$

Ainsi, $k_1 = 5k_2$

En posant $k_2 = 1$, nous obtenons $k_1 = 5$.

D'où $\pi_3: 7x - 9y + 17z = 0$

ii) Les coordonnées du point P(2, -12, 5) doivent vérifier l'équation.

$k_1(2 - 2(-12) + 4(5) - 1) + k_2(2(2) + (-12) - 3(5) + 5) = 0$

$45k_1 - 18k_2 = 0$

Ainsi, $k_2 = \frac{5k_1}{2}$

En posant $k_1 = 2$, nous obtenons $k_2 = 5$.

D'où $\pi_4: 12x + y - 7z + 23 = 0$

iii) $\pi_5: k_1(x - 2y + 4z - 1) + k_2(2x + y - 3z + 5) = 0$

$\pi_5: (k_1 + 2k_2)x + (-2k_1 + k_2)y + (4k_1 - 3k_2)z - k_1 + 5k_2 = 0$

Soit $\vec{n_5} = (k_1 + 2k_2, -2k_1 + k_2, 4k_1 - 3k_2)$ et $\vec{n} = (0, 0, 1)$, un vecteur normal au plan π_{XOY}.

Puisque $\vec{n} \perp \vec{n_5}$, $\vec{n} \cdot \vec{n_5} = 0$

$(0, 0, 1) \cdot (k_1 + 2k_2, -2k_1 + k_2, 4k_1 - 3k_2) = 0$

$4k_1 - 3k_2 = 0$

Ainsi, $k_1 = \frac{3k_2}{4}$

13. d) iii) (*suite*)

En posant $k_2 = 4$, nous obtenons $k_1 = 3$.

D'où $\pi_5 : 11x - 2y + 17 = 0$

iv) Soit $\vec{n_6} = (k_1 + 2k_2, -2k_1 + k_2, 4k_1 - 3k_2)$ et $\vec{n_1} = (1, -2, 4)$.

Puisque $\vec{n_1} \perp \vec{n_6}$, $\quad \vec{n_1} \cdot \vec{n_6} = 0$

$(1, -2, 4) \cdot (k_1 + 2k_2, -2k_1 + k_2, 4k_1 - 3k_2) = 0$

$21k_1 - 12k_2 = 0$

Ainsi, $k_1 = \dfrac{4k_2}{7}$

En posant $k_2 = 7$, nous obtenons $k_1 = 4$.

D'où $\pi_6 : 18x - y - 5z + 31 = 0$

e) Soit $\vec{n_7} = (k_1 + 2k_2, -2k_1 + k_2, 4k_1 - 3k_2)$.

Puisque $\pi_7 \perp$ axe des y, $\vec{n_7} \mathbin{/\!/}$ axe des y.

Posons $\vec{n_7} = (0, 1, 0)$.

Nous obtenons $\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 0 \\ -2k_1 + k_2 = 1 \\ 4k_1 - 3k_2 = 0 \end{cases}$

Puisque ce système est incompatible, aucun plan du faisceau n'est perpendiculaire à l'axe des y.

f) Soit le système d'équations

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 = 7 \\ -2k_1 + k_2 = 11 \\ 4k_1 - 3k_2 = -27 \\ -k_1 + 5k_2 = 28 \end{cases}$$

Ainsi, $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & 11 \\ 4 & -3 & -27 \\ -1 & 5 & 28 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 25 \\ 0 & -11 & -55 \\ 0 & 7 & 35 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Donc, $k_2 = 5$ et $k_1 = -3$.

D'où π_8 est un plan du faisceau F.

Exercices de compréhension 9.3

1. Soit $\vec{n} = (-1, 3, 7) \times (0, 3, 5) = (-6, 5, -3)$, un vecteur normal à π et $R(1, 2, -5) \in \pi$.

a) $\overrightarrow{PR} = (-2, 4, -12)$ (car P(3, -2, 7))

$$d(P, \pi) = \frac{|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(-2, 4, -12) \cdot (-6, 5, -3)|}{\sqrt{(-6)^2 + 5^2 + (-3)^2}} = \frac{68}{\sqrt{70}}$$

d'où $d(P, \pi) \approx 8{,}13$ unités.

b) $\overrightarrow{QR} = (2, -3, -9)$ (car Q(-1, 5, 4))

$$d(Q, R) = \frac{|\overrightarrow{QR} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(2, -3, -9) \cdot (-6, 5, -3)|}{\sqrt{70}} = \frac{0}{\sqrt{70}}$$

d'où $d(Q, \pi) = 0$.

2. $\pi_1 : 3x - 6y + 6z - 1 = 0$

$\pi_2 : 3x - 6y + 6z + 3 = 0$

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|1 - (-3)|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 6^2}} = \frac{4}{9}$$

d'où $d(\pi_1, \pi_2) = 0{,}\overline{4}$ unité.

Exercices 9.3 (page 465)

1. a) $d(P, \pi) = \dfrac{|2(7) - (-1) + 4(7) - 1|}{\sqrt{21}} \approx 9{,}17$ unités ; $P \notin \pi$

b) $d(P, \pi) = \dfrac{|3(-1) + 6(5) - 2(18) + 9|}{\sqrt{49}} = 0$ unité ; $P \in \pi$

c) $d(P, \pi) = \dfrac{|-2|}{\sqrt{121}} = \dfrac{2}{11}$ unité ; $P \notin \pi$

d) Soit R(2, 5, 6) et $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3, -3, 3)$

$$d(P, \pi) = \frac{|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(-1, 2, 1) \cdot (-3, -3, 3)|}{\sqrt{27}} = 0 \text{ unité ; } P \in \pi$$

e) $d(P, \pi) = \dfrac{|(-4) + 0(2) + 0(5) - 3|}{1} = 7$ unités ; $P \notin \pi$

f) Soit R(0, 0, 0) et $\vec{n} = (0, 1, 0)$.

$$d(P, \pi) = \frac{|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|(-6, 3, -7) \cdot (0, 1, 0)|}{1} = 3 \text{ unités ; } P \notin \pi$$

2. a) Soit $\pi_1 : 6x + 18y - 12z - 4 = 0$ et $\pi_2 : 6x + 18y - 12z - 9 = 0$.

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|4 - 9|}{\sqrt{504}} = \frac{5}{\sqrt{504}}$$

d'où $d(\pi_1, \pi_2) \approx 0{,}22$ unité

b) Soit $\vec{n_1} = (-11, 22, 22)$ et $\vec{n_2} = (10, -20, -20)$.

Puisque $\vec{n_1} = \dfrac{-11}{10}\vec{n_2}$, $\pi_1 \mathbin{/\!/} \pi_2$.

$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2)$, où $P_1(3, -2, 5) \in \pi_1$

$$= \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{n_2}|}{\|\vec{n_2}\|}, \text{ où } P_2(4, 0, -1) \in \pi_2$$

$$= \frac{|(1, 2, -6) \cdot (10, -20, -20)|}{\sqrt{900}}$$

$$= \frac{90}{30}$$

d'où $d(\pi_1, \pi_2) = 3$ unités

3. a) $d(D, \pi) = d(P, \pi)$, où $P(4, -1, 2) \in D$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}, \text{ où } R(5, 1, -2) \in \pi \text{ et } \vec{n} = (-3, 1, -2)$$

$$= \frac{|(1, 2, -4) \cdot (-3, 1, -2)|}{\sqrt{14}}$$

$$= \frac{7}{\sqrt{14}}$$

d'où $d(D, \pi) \approx 1{,}87$ unité ; $D \not\subset \pi$

b) $d(D, \pi) = d(P, \pi)$, où $P(1, 6, 4) \in D$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}, \text{ où } R(2, -1, -1) \in \pi \text{ et } \vec{n} = (3, -1, 2)$$

$$= \frac{|(1, -7, -5) \cdot (3, -1, 2)|}{\sqrt{14}}$$

$$= 0$$

d'où $d(D, \pi) = 0$ unité ; $D \subset \pi$

4. a) $d(P, \pi) = \dfrac{|3(2) - 2(-4) + 6(3) - d|}{\sqrt{49}} = 5$

Ainsi, $|32 - d| = 35$.

D'où $d = -3$ ou $d = 67$.

b) $d(O, \pi) = \dfrac{|-d|}{\sqrt{81}} = 2$

Ainsi, $|-d| = 18$.

D'où $d = 18$ ou $d = -18$.

5. a) Soit $P(x, y, z)$, un point quelconque équidistant de A et de B.

$$d(P, A) = d(P, B)$$

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2} = \sqrt{(x - 7)^2 + (y - 5)^2 + (z + 3)^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 10y + 25 + z^2 + 6z + 9$$

Ainsi, $12x + 12y - 12z - 72 = 0$.

D'où le lieu géométrique est le plan π suivant.

$\pi: x + y - z - 6 = 0$

b) Soit $P(x, y, z)$, un point quelconque tel que

$$2(d(P, A)) = d(P, B)$$

$$2\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2} = \sqrt{(x - 7)^2 + (y - 5)^2 + (z + 3)^2}$$

Ainsi, $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 10z - 13 = 0$,

c'est-à-dire $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 48$.

D'où le lieu géométrique est une sphère dont le centre est $C(-1, -3, 5)$ et le rayon est $\sqrt{48}$ unités.

c) Soit $N(3, 1, 1)$ et $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (6, 6, -6)$.

D'où $\pi_1: x + y - z - 3 = 0$.

6. a) Soit $\pi_0: 6x - 2y + 3z - d = 0$, une équation du ou des plans cherchés.

$$d(\pi_0, \pi) = \frac{|d - 1|}{\sqrt{49}} = 1$$

Ainsi, $|d - 1| = 7$. Donc, $d = 8$ ou $d = -6$.

D'où $\pi_1: 6x - 2y + 3z - 8 = 0$ et
$\pi_2: 6x - 2y + 3z + 6 = 0$.

b) Soit $\pi_1: 6x - 12y + 12z - 15 = 0$ et
$\pi_2: 6x - 12y + 12z + 10 = 0$.

Ainsi, $d(\pi_1, \pi_2) = \dfrac{|15 - (-10)|}{\sqrt{324}} = \dfrac{25}{18}$ unité.

Nous cherchons $\pi: 6x - 12y + 12z - d = 0$ tel que

$$d(\pi, \pi_1) = d(\pi, \pi_2) = \frac{25}{36}$$

Nous trouvons $d = \dfrac{5}{2}$.

D'où $\pi: 6x - 12y + 12z - 2{,}5 = 0$.

c) Tous les points $P(x, y, z)$ des plans cherchés sont équidistants des plans π_3 et π_4.

$$d(P, \pi_3) = d(P, \pi_4)$$

$$\frac{|x - 2y + 2z - 1|}{\sqrt{9}} = \frac{|3x - 2y + 6z - 4|}{\sqrt{49}}$$

Ainsi, $\dfrac{x - 2y + 2z - 1}{3} = \dfrac{\pm(3x - 2y + 6z - 4)}{7}$.

D'où $\pi_5: 2x + 8y + 4z - 5 = 0$ et
$\pi_6: 16x - 20y + 32z - 19 = 0$.

7. a) i) Puisque la sphère est tangente au plan π, nous avons $r = d(C, \pi)$, où r est le rayon de la sphère

$$r = \frac{|6(3) - 7(-5) - 6(7) - 132|}{\sqrt{121}} = \frac{|-121|}{11} = 11.$$

D'où $S: (x - 3)^2 + (y + 5)^2 + (z - 7)^2 = 121$

ii) $6x - 7y - 6z - (6(3) - 7(-5) - 6(7)) = 0$

d'où $\pi_1: 6x - 7y - 6z - 11 = 0$

b) En transformant l'équation de la sphère, nous obtenons $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 4$.

Donc, le centre est $C(-1, 2, -3)$ et le rayon est de 2 unités.

Ainsi, $d(C, \pi) = 2$

$$\frac{|-1 + 2(2) - 2(-3) - d|}{\sqrt{9}} = 2$$

$$|9 - d| = 6$$

d'où $d = 3$ ou $d = 15$

8. a) Soit $\vec{n} = \overrightarrow{OP} = (2, -4, 5)$, un vecteur normal au plan tangent, et $P(2, -4, 5)$, un point du plan tangent.

D'où $\pi: 2x - 4y + 5z - 45 = 0$

b) Soit $\vec{n} = \overrightarrow{OP} = (a, b, c)$, un vecteur normal au plan tangent, et $P(a, b, c)$, un point du plan tangent.

D'où $\pi: ax + by + cz - (a^2 + b^2 + c^2) = 0$

c) Soit $\vec{n} = \overrightarrow{CP} = (a - x_0, b - y_0, c - z_0)$, un vecteur normal au plan tangent, et $P(a, b, c)$, un point du plan tangent.

D'où $\pi: (a - x_0)x + (b - y_0)y + (c - z_0)z - (a^2 - ax_0 + b^2 - by_0 + c^2 - cz_0) = 0$

9. a) Soit $\vec{n} = (3, -2, 7)$, un vecteur directeur de la droite D_1 qui passe par R et qui est perpendiculaire à π.

Ainsi, $D_1 : \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -5 - 2t \\ z = 6 + 7t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$

Déterminons le point d'intersection de D et de π.

En remplaçant les valeurs de x, y et z dans l'équation de π, nous obtenons

$3(5 + 3t) - 2(-5 - 2t) + 7(6 + 7t) - 5 = 0$, donc $t = -1$

En remplaçant t par -1 dans l'équation de D, nous obtenons

$x = 2$, $y = -3$ et $z = -1$

D'où $R_\pi(2, -3, -1)$ est la projection de R sur π.

$$d(R, \pi) = d(R, R_\pi)$$
$$= \sqrt{(5 - 2)^2 + (-5 + 3)^2 + (6 + 1)^2}$$
$$= \sqrt{62}$$

d'où $d(R, \pi) = 7{,}87$ unités.

b) Pour déterminer S, il suffit de poser $t = 2(-1)$ dans l'équation de D_1, trouvée en a).

Ainsi $x = -1$, $y = -1$ et $z = -8$

d'où S(-1, -1, -8) est le point cherché.

c) Soit $\vec{v} = (2, 4, -3)$, un vecteur directeur de D, et $\vec{n} = (3, -2, 7)$, un vecteur normal à π.

Puisque $\vec{v} \neq k\vec{n}$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$, D n'est pas perpendiculaire à π.

Donc, la projection de D sur π est une droite, notée D_π.

Soit R(5, -5, 6) et Q(7, -1, 3), deux points de D.

En projetant R sur π, nous obtenons $R_\pi(2, -3, -1)$, et en projetant Q sur π, nous obtenons $Q_\pi\left(\frac{317}{62}, \frac{16}{62}, \frac{-87}{62}\right)$.

Ainsi, $\overrightarrow{R_\pi Q_\pi} = \left(\frac{193}{62}, \frac{202}{62}, \frac{-25}{62}\right)$.

Soit $\overrightarrow{v_\pi} = (193, 202, -25)$, un vecteur directeur de D_π.

D'où $D_\pi : (x, y, z) = (2, -3, -1) + r(193, 202, -25)$, où $r \in \mathbb{R}$.

Exercices récapitulatifs (page 467)

1. a) É.V. : $(x, y, z) = (0, 0, 0) + k_1(1, -4, 6) + k_2(5, 0, 2)$, où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

É.P. : $\begin{cases} x = k_1 + 5k_2 \\ y = -4k_1 \\ z = 6k_1 + 2k_2 \end{cases}$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

É.C. : $2x - 7y - 5z = 0$

b) É.V. : $(x, y, z) = (-1, 4, 3) + k_1(2, 5, -3) + k_2(2, 3, -3)$, où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

É.P. : $\begin{cases} x = -1 + 2k_1 + 2k_2 \\ y = 4 + 5k_1 + 3k_2 \\ z = 3 - 3k_1 - 3k_2 \end{cases}$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

É.C. : $3x + 2z - 3 = 0$

c) É.V. : $(x, y, z) = (3, -4, 1) + k_1(2, 1, 5) + k_2(1, 5, 2)$, où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

É.P. : $\begin{cases} x = 3 + 2k_1 + k_2 \\ y = -4 + k_1 + 5k_2 \\ z = 1 + 5k_1 + 2k_2 \end{cases}$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

É.C. : $23x - y - 9z - 64 = 0$

2. a) É.C. : $2x - 3y + z + 15 = 0$

É.N. : $\frac{2}{\sqrt{14}}x - \frac{3}{\sqrt{14}}y + \frac{1}{\sqrt{14}}z + \frac{15}{\sqrt{14}} = 0$

É.R. : $\frac{x}{\left(\frac{-15}{2}\right)} + \frac{y}{5} + \frac{z}{-15} = 1$

3. a) $\pi : x - 2y + z = 0$

4. a) i) π_1 et π_2 sont sécants.

D : $(x, y, z) = (0, -8, 16) + t(1, 2, -5)$, où $t \in \mathbb{R}$

ii) π_1 et π_4 sont parallèles distincts.

b) i) Le point P(3, -2, 1)

ii) D : $(x, y, z) = (-5, 0, 5) + t(4, -1, -2)$, où $t \in \mathbb{R}$

5. a) D est sécante à π ; P(9, -3, 1) ; $\theta = 90°$

c) D // π et D $\subset \pi$; $\theta = 0°$

9. a) 5 unités ; P $\notin \pi$

c) Environ 3,46 unités ; D // π et D $\not\subset \pi$

e) 0 unité ; les plans sont parallèles confondus.

10. a) $b = 4$ et $c \in \mathbb{R}$

c) $b \in \mathbb{R}$ et $c = -6$

e) $b = c$, où b et $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

g) $b = -4$ et $c = 8$

i) Aucune valeur de b et de c

k) $b \in \mathbb{R}$ et $c = 0$

m) $b = 0$ et $c = 0$

11. a) $a = \frac{-7}{5}$

b) $a = 5$ ou $a = 47$

c) $a = 20$

12. a) $c = 26$ et $d \in \mathbb{R}$

b) $c = \frac{-9}{2}$ et $d = \frac{9}{2}$

13. a) F : $k_1(2x - y + 2z + 3) + k_2(6x + 2y - 3z - 4) = 0$, où $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ ($k_1 \neq 0$ ou $k_2 \neq 0$)

c) $\pi_4 : 10x + z + 2 = 0$; π_4 // axe des y et $\pi_4 \perp \pi_{XOZ}$

e) $\pi_6 : 2x + 9y - 16z - 23 = 0$

g) $\pi_8 : 46x + 22y - 35z - 48 = 0$

i) $\pi_{11} : 2x - 11y + 20z + 29 = 0$

k) D : $x = \frac{y + 1}{-18} = \frac{z + 2}{-10}$

15. a) $P_{\pi}(4, 2, -4)$

16. a) Le plan $\pi: 4x - 4y + z - 8 = 0$

e) Les plans π_3 et π_4, où

$\pi_3: (\sqrt{2} - 1)x - (2\sqrt{2} + 1)y - (2\sqrt{2} + 4)z - \sqrt{2} - 1 = 0$

$\pi_4: (\sqrt{2} + 1)x + (1 - 2\sqrt{2})y + (4 - 2\sqrt{2})z - \sqrt{2} + 1 = 0$

18. a) C(1, 3, -4) et $r = 7$ unités

b) $\pi_1: 2x - 6y + 3z - 21 = 0$

e) P(-2, 1, -10)

f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 33 \text{ et } z = 0\}$;
cercle de centre C(1, 3, 0) et de rayon $r = \sqrt{33}$ unités, situé dans le plan π_{XOY}

Problèmes de synthèse (page 470)

1. a) $\begin{cases} x = k_1 \\ y = k_2 \\ z = -k_1 + k_2 \end{cases}$, où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

b) $\dfrac{x}{\left(\frac{4}{3}\right)} + \dfrac{y}{\left(\frac{-3}{2}\right)} + \dfrac{z}{\left(\frac{-12}{5}\right)} = 1$

c) $(x, y, z) = (2, -1, 5) + k_1(2, -3, 4) + k_2(-2, 5, 2)$,
où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

d) $\dfrac{7}{\sqrt{86}}x + \dfrac{1}{\sqrt{86}}y - \dfrac{6}{\sqrt{86}}z + \dfrac{13}{\sqrt{86}} = 0$

2. c) $\theta \approx 75{,}75°$ d) $\alpha \approx 10{,}14°$

3. a) i) $\pi_1: x + y + z - \dfrac{9}{2} = 0$ ii) M = 19

6. a) $Q\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $V \approx 42{,}43 \text{ u}^3$

8. a) Les points A, B, C et D sont coplanaires ; Aire $\approx 50{,}46 \text{ u}^2$

10. a) $V = \dfrac{7}{6} \text{ u}^3$, c'est-à-dire $V = 1{,}1\overline{6} \text{ u}^3$

12. a) i) E.-S. $= \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

L'intersection des trois plans définis par les équations du système est la droite D d'équation

D : $(x, y, z) = (0, 0, 0) + t(1, 1, 1)$, où $t \in \mathbb{R}$

13. a) $A = \dfrac{9\sqrt{5}}{2} \text{ u}^2$, c'est-à-dire $A \approx 10{,}1 \text{ u}^2$

b) i) $A_1 = 5 \text{ u}^2$

14. d) $V = \dfrac{20}{21} \text{ u}^3$, c'est-à-dire $V \approx 0{,}95 \text{ u}^3$

15. b) $A = \dfrac{36\sqrt{3}}{91} \text{ u}^2$, c'est-à-dire $A \approx 0{,}69 \text{ u}^2$

c) $V = \dfrac{12}{91} \text{ u}^3$, c'est-à-dire $V \approx 0{,}13 \text{ u}^3$

16. a) $\pi: 2x - 3y + z - 7 = 0$

b) $A \approx 1{,}87 \text{ u}^2$

19. c) $\pi_5: 24x - 36y + 60z - 5 = 0$

21. a) La droite D : $(x, y, z) = (-4, 2, 5) + t(2, 3, -1)$, où $t \in \mathbb{R}$

b) Le plan π

$\pi: (x, y, z) = (-4, 2, 5) + k_1(2, 3, -1) + k_2(-9, -16, 5)$,
où k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$

22. a) $L = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = \dfrac{1}{8}(x - 3)^2 + \dfrac{1}{8}(y + 4)^2 + 3\right\}$

23. $\vec{v} = t(1, -1, 1)$, où $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

25. a) P(5, -4, 1) b) $\pi: 3x + 4y + 4z - 3 = 0$

27. b) P(7, 3, 1) c) $\pi: x - 2y + 2z - 3 = 0$

CHAPITRE 10

Exercices préliminaires (page 477)

1. a) $\theta \approx 33{,}7°$

b) $\beta \approx 236{,}3°$

c) i) $\|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{13}$ ii) $\|\overrightarrow{OR}\| = \sqrt{13}$

2. a) $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

b) $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

c) $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

d) $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

3. a) $x = -1$ ou $x = 1$ b) Aucune valeur réelle de x

4. a) $x = 4 - \sqrt{10}$ ou $x = 4 + \sqrt{10}$

b) Aucune valeur réelle de x
(car $b^2 - 4ac = 16 - 4(6) = -8 < 0$)

5. a) $\begin{cases} 5x - y = 4 \\ 7x - 3y = -4 \end{cases}$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}} = \dfrac{-16}{-8} = 2$ et $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}}{-8} = \dfrac{-48}{-8} = 6$

d'où $x = 2$ et $y = 6$

b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ 2xy = 2 & (2) \end{cases}$

De (1), nous obtenons $x = y$ ou $x = -y$.

En remplaçant x par y dans (2),
nous obtenons $y^2 = 1$, donc $y = \pm 1$.

5. b) (*suite*)

Puisque $x = y$, nous avons $x = \pm 1$.

En remplaçant x par $-y$ dans (2),

nous obtenons $-y^2 = 1$, donc aucune solution réelle.

D'où $x = 1$ et $y = 1$ ou $x = -1$ et $y = -1$

c) $\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 3 = 0 & (1) \\ 2y(x + 1) = 0 & (2) \end{cases}$

De (2), nous obtenons $y = 0$ ou $x = -1$.

En remplaçant y par 0 dans (1), nous obtenons

$x^2 + 2x + 3 = 0$, donc, aucune solution réelle.

(car $b^2 - 4ac = 2^2 - 4(3) = -8 < 0$)

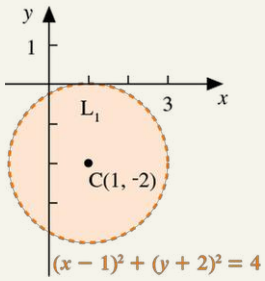
En remplaçant x par -1 dans (1), nous obtenons

$y = \pm\sqrt{2}$.

D'où $x = -1$ et $y = \sqrt{2}$ ou $x = -1$ et $y = -\sqrt{2}$

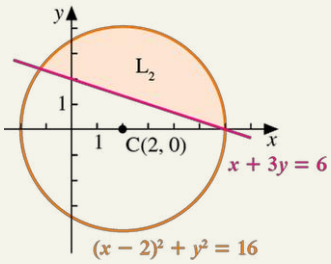
6. a) $x - 2$ b) $x^2 - 2x - 3$

7. a)



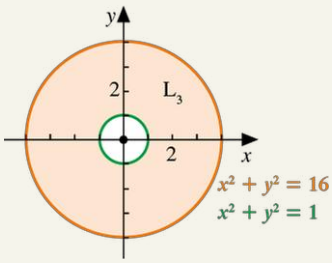
L_1 : Région intérieure d'un cercle de centre C(1, -2) et de rayon 2.

b)



L_2 : Région située entre la droite $x + 3y = 6$ et la circonférence du cercle de centre C(2, 0) et de rayon 4.

c)



L_3 : Région située entre le cercle de rayon 1 et le cercle de rayon 4, centrés en O(0, 0).

Cette région est un anneau.

8. a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, si $|r| < 1$

c) $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \dfrac{a}{1 - r}$, si $|r| < 1$

Exercices de compréhension 10.1

1. a) $(3 + 2i) + (5 - 4i) = (3 + 5) + (2i - 4i) = 8 - 2i$

b) $(-2 + 5i) - (3 - 7i) = (-2 - 3) + 5i - (-7i) = -5 + 12i$

2. a) $(7 + 5i)(3 + 4i) = 7(3 + 4i) + 5i(3 + 4i)$

$= 21 + 28i + 15i + 20i^2$

$= 21 + 43i - 20$ (car $i^2 = -1$)

$= 1 + 43i$

b) $8i(-4 + 3i) = -32i + 24i^2 = -24 - 32i$ (car $i^2 = -1$)

3. $\dfrac{5 - 2i}{3 + 6i} = \left(\dfrac{5 - 2i}{3 + 6i}\right)\left(\dfrac{3 - 6i}{3 - 6i}\right)$

$= \dfrac{15 - 30i - 6i + 12i^2}{9 - 18i + 18i - 36i^2}$

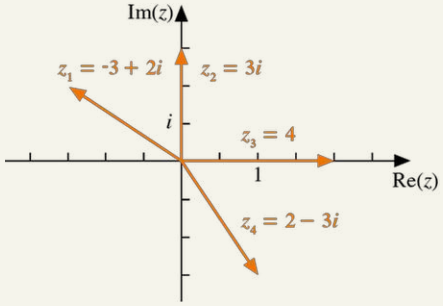
$= \dfrac{3 - 36i}{9 + 36}$ (car $i^2 = -1$)

$= \dfrac{1}{15} - \dfrac{4}{5}i$

Exercices 10.1 (page 485)

1.

	$\text{Re}(z_i)$	$\text{Im}(z_i)$	Nature
a)	-3	2	Nombre imaginaire
b)	0	3	Nombre imaginaire pur
c)	4	0	Nombre réel
d)	2	-3	Nombre imaginaire



2. a) $i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$

b) $i^{13} = (i^2)^6 i = (-1)^6 i = i$

c) $(-i)^{85} = (-1)^{85}(i^2)^{42} i = (-1)(-1)^{42} i = -i$

d) $(-i)^{11} i^{27} = (-1)^{11} i^{11} i^{27} = -1 i^{38} = -(i^2)^{19} = -(-1)^{19} = 1$

3. a) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ -4x + 5y = 23 \end{cases}$

En résolvant, nous trouvons $x = -2$ et $y = 3$.

b) $(x + 1 + yi)(4 + 6i) = -10 - 2i$

$(4x + 4 - 6y) + (6(x + 1) + 4y)i = -10 - 2i$

$(4x - 6y) + (6x + 4y)i = -14 - 8i$

ainsi $\begin{cases} 4x - 6y = -14 \\ 6x + 4y = -8 \end{cases}$

En résolvant, nous trouvons $x = -2$ et $y = 1$.

4. a) $(3 - 4i) + (5 + 9i) = (3 + 5) + (-4 + 9)i = 8 + 5i$

b) $(7 + 5i) - (9 - 2i) = (7 - 9) + (5 - (-2))i = -2 + 7i$

c) $(3 - i) - (4 + 3i) = -1 - 4i$

d) $(3 - 6i)(2 - 4i) = 6 - 12i - 12i + 24i^2 = -18 - 24i$

e) $4(2 + i) - 5i(4 - 2i) = 8 + 4i - 20i + 10i^2 = -2 - 16i$

f) $(6 + 44i) + 1 - 4i = 7 + 40i$

g) $(20 + 5i)(3 - 6i) = 90 - 105i$

h) $(-2 + 2i) + (0 - 2i) = -2$

i) $(1 + i)^2(1 - (1 + i)^2) = 2i(1 - 2i)$ $((1 + i)^2 = 2i)$

$= 4 + 2i$

5.

	z	$\overline{z}$	$z + \overline{z}$	$z - \overline{z}$	$z\overline{z}$	$\overline{\overline{z}}$
a)	$3 - 4i$	$3 + 4i$	6	$-8i$	25	$3 - 4i$
b)	$6 + 12i$	$6 - 12i$	12	$24i$	180	$6 + 12i$
c)	$-32i$	$32i$	0	$-64i$	1024	$-32i$
d)	$14 + 6i$	$14 - 6i$	28	$12i$	232	$14 + 6i$

6. a) $\dfrac{6 + 8i}{3i - 1} = \left(\dfrac{6 + 8i}{-1 + 3i}\right)\left(\dfrac{-1 - 3i}{-1 - 3i}\right)$

$= \dfrac{18 - 26i}{10}$

$= \dfrac{9}{5} - \dfrac{13}{5}i$

b) $\dfrac{3 + i}{5 - i} = \left(\dfrac{3 + i}{5 - i}\right)\left(\dfrac{5 + i}{5 + i}\right) = \dfrac{7}{13} + \dfrac{4}{13}i$

c) $\dfrac{7 - 3i}{6 - 2i} = \left(\dfrac{7 - 3i}{6 - 2i}\right)\left(\dfrac{6 + 2i}{6 + 2i}\right) = \dfrac{6}{5} - \dfrac{1}{10}i$

d) $3 + i + \left(\dfrac{5 - i}{3 - i}\right)\left(\dfrac{3 + i}{3 + i}\right) = 3 + i + \dfrac{16 + 2i}{10}$

$= \dfrac{23}{5} + \dfrac{6}{5}i$

e) $\left(\dfrac{6 - i}{2 + i}\right)\left(\dfrac{2 - i}{2 - i}\right) - \left(\dfrac{1 - i}{4 - i}\right)\left(\dfrac{4 + i}{4 + i}\right) = \left(\dfrac{11 - 8i}{5}\right) - \left(\dfrac{5 - 3i}{17}\right)$

$= \dfrac{162}{85} - \dfrac{121}{85}i$

f) $2 + 3i - \dfrac{-21 + 20i}{1 - i} = 2 + 3i - \dfrac{-41 - i}{2}$

$= \dfrac{45}{2} + \dfrac{7}{2}i$

7. a) $i^{-1} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{i}{i}\right) = \dfrac{i}{i^2} = \dfrac{i}{-1} = -i$

b) $i^{-2} = \dfrac{1}{i^2} = \dfrac{1}{-1} = -1$

c) $i^{-17} = \dfrac{1}{i^{17}} = \dfrac{1}{(i^2)^8 i} = \dfrac{1}{(-1)^8 i} = \dfrac{1}{i} = -i$

d) $3i^{-3} + 4i^{-4} = \dfrac{3}{i^3} + \dfrac{4}{i^4}$

$= \dfrac{3}{(i)^2 i} + \dfrac{4}{(i^2)^2}$

$= \dfrac{3}{(-1)i} + \dfrac{4}{(-1)^2}$ $(i^2 = -1)$

$= -3(-i) + 4$ $\left(\dfrac{1}{i} = -i\right)$

$= 4 + 3i$

8. a) $\overline{2z} = \overline{2(4 - 5i)} = \overline{8 - 10i} = 8 + 10i$

$2\overline{z} = 2(4 + 5i) = 8 + 10i$

d'où $\overline{2z} = 2\overline{z}$

b) $\overline{z + w} = \overline{(4 - 5i) + (-3 + 2i)} = \overline{(1 - 3i)} = 1 + 3i$

$\overline{z} + \overline{w} = (4 + 5i) + (-3 - 2i) = 1 + 3i$

d'où $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

c) $\overline{zw} = \overline{(4 - 5i)(-3 + 2i)} = \overline{(-2 + 23i)} = -2 - 23i$

$\overline{z}\,\overline{w} = (4 + 5i)(-3 - 2i) = -2 - 23i$

d'où $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

d) $\left(\overline{\dfrac{z}{w}}\right) = \left(\overline{\dfrac{4 - 5i}{-3 + 2i}}\right) = \left(\overline{\dfrac{-22}{13} + \dfrac{7}{13}i}\right) = \dfrac{-22}{13} - \dfrac{7}{13}i$

$\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}} = \dfrac{4 + 5i}{-3 - 2i} = \dfrac{-22}{13} - \dfrac{7}{13}i$

d'où $\left(\overline{\dfrac{z}{w}}\right) = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$

9. a) $\overline{z} - z = -2bi$; imaginaire pur

b) $\dfrac{1}{z\overline{z}} = \dfrac{1}{a^2 + b^2}$; nombre réel

c) $\dfrac{z + \overline{z}}{z - \overline{z}} = \dfrac{2a}{2bi} = \dfrac{-a}{b}i$; imaginaire pur

10. a) $a \in \mathbb{R}$ et $b = 0$ b) $a = 0$ et $b \in \mathbb{R}$

c) $a = 0$ et $b = 0$

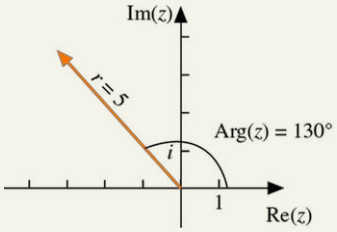
Exercices de compréhension 10.2

1. $z = 5 \text{ cis } (130°)$

$= 5(\cos 130° + i \sin 130°)$

$= 5(-0{,}64\ldots + i(0{,}76\ldots))$

d'où $z = -3{,}21\ldots + 3{,}83\ldots i$



2. a) $zw = 6(\cos 200° + i \sin 200°)\, 2(\cos 300° + i \sin 300°)$

$= 6(2)(\cos (200° + 300°) + i \sin (200° + 300°))$

$= 12(\cos 500° + i \sin 500°)$

$= 12(\cos 140° + i \sin 140°)$ (car $140° = 500° - 1(360°)$)

b) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{6(\cos 200° + i \sin 200°)}{2(\cos 300° + i \sin 300°)}$

$= \dfrac{6}{2}(\cos (200° - 300°) + i \sin (200° - 300°))$

$= 3(\cos (-100°) + i \sin (-100°))$

$= 3(\cos 260° + i \sin 260°)$

(car $260° = -100° + 1(360°)$)

3. a) $zw = 2e^{i\frac{\pi}{12}}\, 3e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2(3)e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 6e^{i\frac{3\pi}{4}}$

b) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{12}}}{3e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \dfrac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3}\right)} = \dfrac{2}{3}e^{i\left(\frac{-7\pi}{12}\right)}$

d'où $\dfrac{z}{w} = \dfrac{2}{3}e^{i\frac{17\pi}{12}}$ $\left(\text{car } \dfrac{17\pi}{12} = \dfrac{-7\pi}{12} + 1(2\pi)\right)$

Exercices 10.2 (page 494)

1. a) $|z_1| = 1$; $\text{Arg}(z_1) = 180°$;

$z_1 = 1(\cos 180° + i \sin 180°)$;

$z_1 = 1e^{i\pi}$

b) $|z_2| = 1$; $\text{Arg}(z_2) = 270°$;

$z_2 = 1(\cos 270° + i \sin 270°)$;

$z_2 = 1e^{i\frac{3\pi}{2}}$

c) $|z_3| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$;

$\text{Arg}(z_3) = \text{Arc tan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$;

$z_3 = 2(\cos 30° + i \sin 30°)$;

$z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

d) $|z_4| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$;

$\tan \varphi = \dfrac{2}{2} = 1$, ainsi $\varphi = 45°$, d'où $\text{Arg}(z_4) = 135°$;

$z_4 = \sqrt{8}(\cos 135° + i \sin 135°)$;

$z_4 = \sqrt{8}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

e) $|z_5| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$;

$\tan \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, ainsi $\varphi = 60°$, d'où $\text{Arg}(z_5) = 240°$;

$z_5 = 2(\cos 240° + i \sin 240°)$;

$z_5 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

f) $|z_6| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$;

$\tan \alpha = \dfrac{2}{1} = 2$, ainsi $\alpha = 63{,}43\ldots°$,

d'où $\text{Arg}(z_6) = 296{,}56\ldots°$;

$z_6 = \sqrt{5}(\cos 296{,}56\ldots° + i \sin 296{,}56\ldots°)$;

$z_6 = \sqrt{5}e^{i(5{,}17\ldots)}$

2.

	Forme binomiale	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
a)	$\sqrt{2} + \sqrt{2}i$	$2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$	$2e^{i\frac{\pi}{4}}$
b)	$\dfrac{-3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$	$\sqrt{3}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$	$\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$
c)	$2\sqrt{3} + 2i$	$4\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$	$4e^{i\frac{\pi}{6}}$
d)	$-4 - 4\sqrt{3}i$	$8\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)$	$8e^{i\frac{4\pi}{3}}$
e)	$4{,}75\ldots - 1{,}54\ldots i$	$5\left(\cos\left(\dfrac{19\pi}{10}\right) + i \sin\left(\dfrac{19\pi}{10}\right)\right)$	$5e^{i\frac{19\pi}{10}}$

3. a) i) $zw_1 = \left(12\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)\right)\left(4\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)\right)$

$= 12(4)\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 48\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)$

$\dfrac{z}{w_1} = \dfrac{12\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)}{4\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)}$

$= \dfrac{12}{4}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 3\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$

3. a) (*suite*)

ii) $zw_2 = 36\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

$\frac{z}{w_2} = 4\left(\cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\right)$

$= 4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

iii) $zw_3 = \left(12\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)\right)$

$= 6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)\right)$

$\frac{z}{w_3} = 24\left(\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right)$

b) $w_1w_2w_3w_4 = 4(3)(0{,}5)(1{,}5)e^{\left(\frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{9}\right)}$

$= 9e^{i\frac{19\pi}{12}}$

4. a) $z = \frac{2}{3}e^{i\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)}$

$= \frac{2}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$= \frac{2}{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

d'où $z = \frac{-\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$

b) $z = \left(8e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(8e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$

$= 64e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)}$

$= 64\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}\right)$

$= 64\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

d'où $z = 32 + 32\sqrt{3}i$

c) $z = \left(2e^{i\frac{\pi}{16}}\right)^8$

$= 2^8e^{\left(i\frac{\pi}{16}\right)^8}$

$= 256e^{i\frac{\pi}{2}}$

$= 256\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$= 256(0 + 1i)$

d'où $z = 256i$

d) $z = 6e^{i\frac{\pi}{3}} - 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

$= 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 6\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

d'où $z = (3 - 2\sqrt{2}) + (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})i$

Exercices de compréhension 10.3

1. a) $z^9 = (\sqrt{2})^9(\cos 9(10°) + i\sin 9(10°))$

$= 16\sqrt{2}(\cos 90° + i\sin 90°)$

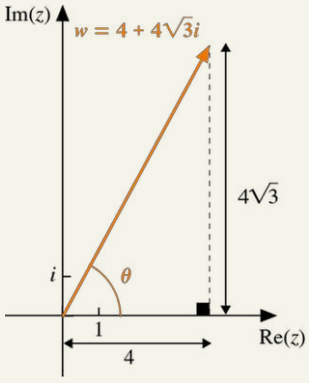
d'où $z^9 = 16\sqrt{2}i$

b) $z^{12} = (\sqrt{2})^{12}(\cos 12(10°) + i\sin 12(10°))$

$= 64(\cos 120° + i\sin 120°)$

d'où $z^{12} = -32 + 32\sqrt{3}i$

2.



$|w| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8$

$\theta = \text{Arc tan}\frac{4\sqrt{3}}{4} = 60°$

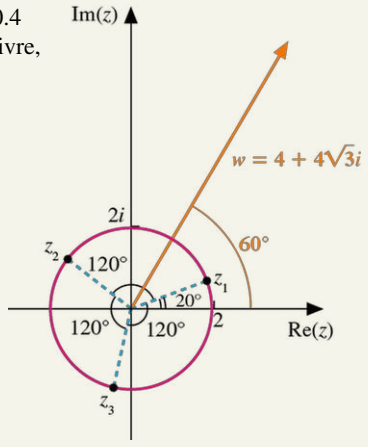
ainsi, $w = 8(\cos 60° + i\sin 60°)$

À l'aide du théorème 10.4 ou de la formule de Moivre, nous trouvons

$z_1 = 2 \text{ cis } 20°$

$z_2 = 2 \text{ cis } 140°$

$z_3 = 2 \text{ cis } 260°$



3. a)

$z^4 - 1 = 0$

$(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$ (en factorisant)

$(z - 1)(z + 1)(z^2 - (-1)) = 0$ (en factorisant)

$(z - 1)(z + 1)(z^2 - i^2) = 0$ (car $i^2 = -1$)

$(z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i) = 0$

D'où 1, -1, i et $-i$ sont les zéros.

3. (*suite*)

b) Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ tel que

$$z^4 = 1$$

$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 1(\cos 0° + i\sin 0°)$

$r^4 = 1$ et $4\theta = 0° + k(360°)$, où $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$r = 1$ et $\theta = k(90°)$.

En posant $k = 0$, 1, 2 et 3, nous trouvons

$z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$ et $z_4 = -i$

D'où 1, -1, i et $-i$ sont les zéros.

Exercices 10.3 (page 505)

1. a) $z = (1 + i)^7 = (\sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°))^7$

$= (\sqrt{2})^7(\cos(7(45°)) + i\sin(7(45°)))$

$= 8\sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°)$

$= 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

d'où $z = 8 - 8i$

b) $z = (2 \text{ cis } 30°)^8$

$= 2^8 \text{ cis } (8(30°))$

$= 256(\cos 240° + i\sin 240°)$

d'où $z = -128 - 128\sqrt{3}i$

c) $z = (e^i)^{12} = (e^{i1})^{12}$

$= (1)^{12}(\cos(12(1)) + i\sin(12(1)))$

d'où $z = 0{,}84\ldots - 0{,}53\ldots i$

d) $z = \left(\frac{2}{1+i}\right)^5 = (1 - i)^5$

$= (\sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°))^5$

$= (\sqrt{2})^5(\cos 1575° + i\sin 1575°)$

d'où $z = -4 + 4i$

2. a) Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ tel que

$$z^3 = -9i$$

$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 9(\cos 270° + i\sin 270°)$.

Ainsi, $r^3 = 9$ et $3\theta = 270° + k360°$, où $k \in \mathbb{Z}$

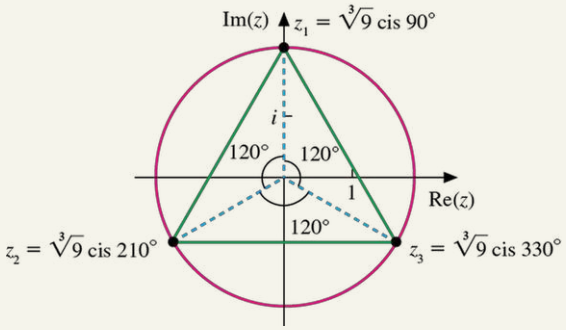
donc, $r = \sqrt[3]{9}$ et $\theta = 90° + k120°$, où $k \in \mathbb{Z}$.

En donnant à k les valeurs 0, 1 et 2, nous obtenons

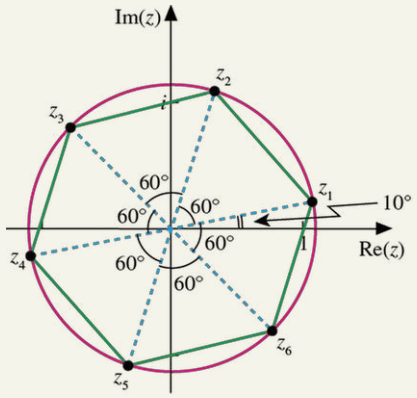
$z_1 = \sqrt[3]{9} \text{ cis } 90° = \sqrt[3]{9}i$

$z_2 = \sqrt[3]{9} \text{ cis } 210° = \frac{-\sqrt[3]{9}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt[3]{9}}{2}i$

$z_3 = \sqrt[3]{9} \text{ cis } 330° = \frac{\sqrt[3]{9}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt[3]{9}}{2}i$



b) $z_1 = \sqrt[6]{2} \text{ cis } 10°$, $z_2 = \sqrt[6]{2} \text{ cis } 70°$, $z_3 = \sqrt[6]{2} \text{ cis } 130°$,
$z_4 = \sqrt[6]{2} \text{ cis } 190°$, $z_5 = \sqrt[6]{2} \text{ cis } 250°$, $z_6 = \sqrt[6]{2} \text{ cis } 310°$



3. a) Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ tel que

$$z^3 = -8$$

$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 8(\cos 180° + i\sin 180°)$.

Ainsi, $r^3 = 8$ et $3\theta = 180° + k360°$, où $k \in \mathbb{Z}$

donc, $r = 2$ et $\theta = 60° + k120°$, où $k \in \mathbb{Z}$.

En donnant à k les valeurs 0, 1 et 2, nous obtenons

$z_1 = 2(\cos 60° + i\sin 60°) = 1 + \sqrt{3}i$

$z_2 = 2(\cos 180° + i\sin 180°) = -2$

$z_3 = 2(\cos 300° + i\sin 300°) = 1 - \sqrt{3}i$

b) $z_1 = \text{cis } 18°$, $z_2 = i$, $z_3 = \text{cis } 162°$,
$z_4 = \text{cis } 234°$, $z_5 = \text{cis } 306°$

c) $z_1 = 2 \text{ cis } 21°$, $z_2 = 2 \text{ cis } 93°$, $z_3 = 2 \text{ cis } 165°$,
$z_4 = 2 \text{ cis } 237°$, $z_5 = 2 \text{ cis } 309°$

4. a) Puisque $(z - 2i)$ est un facteur de $P(z)$, alors $(z + 2i)$ est un facteur de $P(z)$. (théorème 10.6)

Ainsi, $2z^3 - 3z^2 + 8z - 12 = 2(z - 2i)(z + 2i)(z - z_3)$ (corollaire du théorème 10.5)

$$2z^3 - 3z^2 + 8z - 12 = 2(z^2 + 4)(z - z_3)$$

$$\frac{2z^3 - 3z^2 + 8z - 12}{z^2 + 4} = 2(z - z_3)$$

$$2z - 3 = 2z - 2z_3 \quad \text{(en divisant)}$$

donc $z_3 = \frac{3}{2}$

Les zéros sont $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$ et $z_3 = \frac{3}{2}$,

et $P(z) = 2(z - 2i)(z + 2i)\left(z - \frac{3}{2}\right)$.

4. (*suite*)

b) Puisque $z_1 = 2 - i$ est un zéro de $P(z)$, alors $z_2 = 2 + i$ est également un zéro de $P(z)$. (théorème 10.6)

Ainsi,

$P(z) = (z - (2 - i))(z - (2 + i))(z - z_3)(z - z_4)$ (corollaire du théorème 10.5)

$z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 2z - 10 = (z^2 - 4z + 5)(z - z_3)(z - z_4)$

$$\frac{z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 2z - 10}{z^2 - 4z + 5} = (z - z_3)(z - z_4)$$

$$z^2 - 2z - 2 = (z - z_3)(z - z_4)$$

$$z_3 = \frac{2 - \sqrt{4 + 8}}{2} = 1 - \sqrt{3} \text{ et } z_4 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

Les zéros sont

$z_1 = 2 - i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = 1 - \sqrt{3}$ et $z_4 = 1 + \sqrt{3}$, et

$P(z) = (z - (2 - i))(z - (2 + i))(z - (1 - \sqrt{3}))$

$(z - (1 + \sqrt{3}))$.

5. a) $z = \frac{3}{2}i$

b) $z = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$

c) $z_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}i$ et $z_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}i$

d) $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_3 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

e) $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$,

$z_3 = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ et $z_4 = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

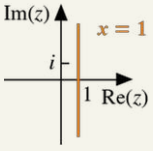
f) $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_4 = 1$

6. a) $\text{Re}(x + yi) = 1$

$x = 1$

d'où $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\}$



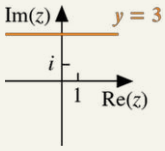
Droite

b) $(x + yi) - (x - yi) = 6i$

$2yi = 6i$

$y = 3$

d'où $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3\}$



Droite

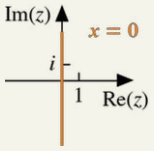
c) $x + yi = -(x - yi)$

$x + yi = -x + yi$

$2x = 0$

$x = 0$

d'où $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$



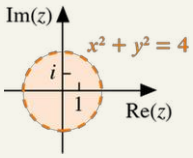
Droite

d) $|z| < 2$

$\sqrt{x^2 + y^2} < 2$

$x^2 + y^2 < 4$

d'où $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$



Intérieur d'un cercle de centre C(0, 0) et de rayon 2 unités

e) $|x + yi - 2i| \leq |x + yi - (3 + i)|$

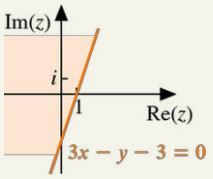
$|x + (y - 2)i| \leq |(x - 3) + (y - 1)i|$

$\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} \leq \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2}$

$x^2 + y^2 - 4y + 4 \leq x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10$

$6x - 2y - 6 \leq 0$

$3x - y - 3 \leq 0$



Demi-plan fermé

d'où $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - y - 3 \leq 0\}$

Exercices récapitulatifs (page 507)

1. a) $8 + 2i$

c) $9 - 7i$

e) $\frac{-1}{6} - \frac{1}{3}i$

g) $0 + 0i$

i) $43 + 23i$

k) $\frac{11}{6} + \frac{\sqrt{5}}{6}i$

2. a) $0 + 3i$

c) $\frac{-5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

e) $\frac{1}{3} + \frac{5\sqrt{2}}{6}i$

3. a) $1 - i$

c) i

e) 1

4. b) $x = -4{,}5$ et $y = -2$

d) $x = 43$ et $y = 7$

f) $x = \frac{7}{25}$ et $y = \frac{26}{25}$

6. b) i) $\left(\frac{1}{10}uv\right) \notin \text{L}$

ii) $\left(7\frac{u}{w}\right) \in \text{L}$

9. d) $a = 64$ et $b = -64\sqrt{3}$

e) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

10. a) ii) $z_2 = 3 + 2i$ et $z_3 = -2$

11. a) $P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8$

12. a) $x = \sqrt{3}$

b) $|z| = 4$

13. a) $z = 2 - 3i$ ou $z = 2 + 3i$

c) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$z = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ou $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

14. a) $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -3$ et $z_3 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

c) $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -\sqrt{3} + i$,

$z_4 = -\sqrt{3} - i$, $z_5 = -2i$ et $z_6 = \sqrt{3} - i$

e) $z_1 = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\left(\frac{4\pi}{9}\right)$, $z_2 = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\left(\frac{10\pi}{9}\right)$ et

$z_3 = \sqrt[3]{2}\,\text{cis}\left(\frac{16\pi}{9}\right)$

16. a) $\text{L} = \{(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) \text{ et } (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})\}$

b) $\text{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = -x \text{ et } 2 \leq |x| \leq 3\}$

c) $\text{L} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = \frac{-1}{\sqrt{3}}x \text{ ou } y = \frac{1}{\sqrt{3}}x\right\}$

Problèmes de synthèse (page 509)

1. a) $z_2 = 3 + 4i$ et $z_3 = -3 + 2i$

2. $z^n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 3k \\ z & \text{si} \quad n = 3k + 1 \text{ , où } k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \\ \overline{z} & \text{si} \quad n = 3k + 2 \end{cases}$

3. a) i) $z^2 = 4(\cos 300° + i \sin 300°)$

ii) $z^6 = 64(\cos 180° + i \sin 180°)$

b) $z^{11} = 2048e^{i\frac{7\pi}{6}}$

c) $(\overline{z})^{-8} = \frac{-1}{512} + \frac{\sqrt{3}}{512}i$

4. a) $z_1 = -32i$

b) $z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i$

5. a) $\text{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 25 \text{ et } x + 2y - 5 \geq 0\}$

b) $\text{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x - 2)^2 + y^2 \leq 16 \text{ et } (x - 1)^2 + (y + 2)^2 > 16\}$

6. a) i) $\text{L}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4x + y - 16 = 0\} \setminus \{(3, 4)\}$

ii) $\text{L}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x - 4y + 30 = 0\} \setminus \{(2, 8)\}$

e) i) $A_1 = 136 \text{ u}^2$

ii) $A_2 = 8{,}5 \text{ u}^2$

7. a) i) $\text{L}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = -2x^2 - 1\}$

ii) $\text{L}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 4x^2 - 7\}$

d) $A = 8 \text{ u}^2$

9. 2020 couples

11. $|e^{iz}| = \frac{1}{e^2}$

12. a) $i^{\sqrt{2}} = -0{,}605\ldots + 0{,}795\ldots i$

b) $i^i = 0{,}207\ldots$

13. a) $z = 95 + 2i$

b) $z = -1 + 0i$

c) $z = 0 + i$

d) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ou $z = \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

15. a) $z = \frac{e^{i\theta}}{2}$; $a_n = \frac{e^{in\theta}}{2^{n-1}}$

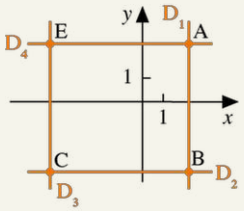
b) $|z| = \frac{1}{2}$; $S = \frac{2e^{i\theta}}{2 - e^{i\theta}}$

c) $\frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2 - \cos\theta - i\sin\theta}$

CHAPITRE 11

Exercices préliminaires (page 513)

1. a)



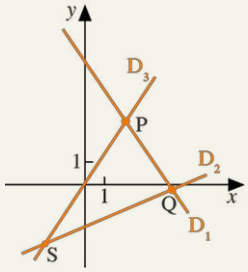
$A\left(2, \frac{5}{2}\right)$

B(2, -3)

C(-4, -3)

$E\left(-4, \frac{5}{2}\right)$

b)



P(2, 3)

$Q\left(\frac{80}{19}, \frac{-6}{19}\right)$

$S\left(-2, \frac{-14}{5}\right)$

2. a) O(0, 0) et B(4, -5)

b) O(0, 0) et A(2, 3)

c) A(2, 3)

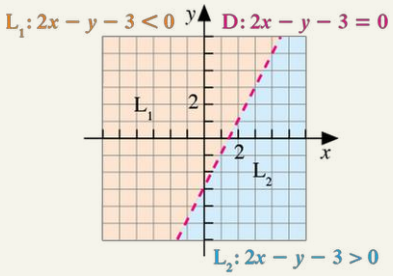
3. a) $x \leq 30$, $y \leq 60$ et $z \leq 30$

b) $x \leq 10$, $y \leq 15$ et $z \leq 7{,}5$

c) $x \leq \frac{10}{3}$, $y \leq 12{,}5$ et $z \leq 0{,}25$

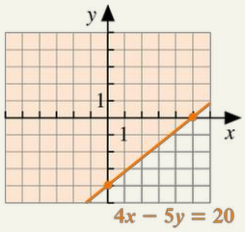
Exercice de compréhension 11.1

1. En remplaçant x par 0 et y par 0 dans $2x - y - 3$, nous obtenons $2(0) - 0 - 3 < 0$
donc, $O(0, 0) \in L_1$ et $O(0, 0) \notin L_2$



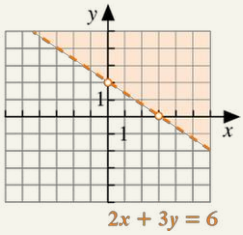
Exercices 11.1 (page 528)

1. a)



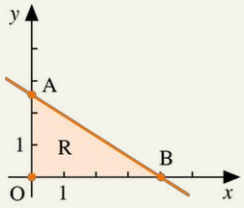
Demi-plan fermé

b)



Demi-plan ouvert

2. a)



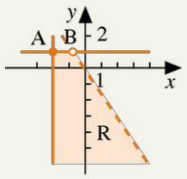
Sommets :

$O(0, 0) \in R$

$A\left(0, \frac{8}{3}\right) \in R$

$B(4, 0) \in R$

b)



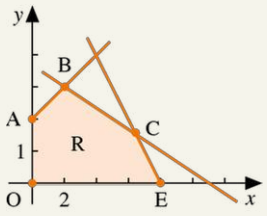
Sommets :

$A(-2, 1) \in R$

$B\left(\frac{-2}{3}, 1\right) \notin R$

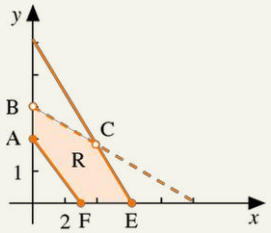
2. (*suite*)

c)



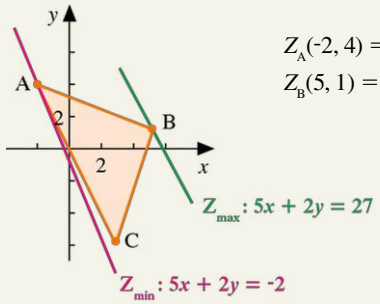
Sommets :
O(0, 0) ∈ R
A(0, 2) ∈ R
B(2, 3) ∈ R
$C\left(\frac{44}{7}, \frac{12}{7}\right) \in R$
E(8, 0) ∈ R

d)



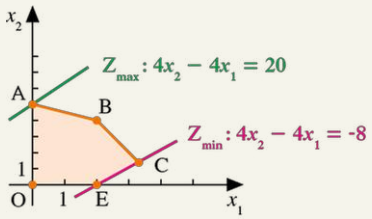
Sommets :
A(0, 2) ∈ R
B(0, 3) ∉ R
$C\left(4, \frac{5}{3}\right) \notin R$
E(6, 0) ∈ R
F(3, 0) ∈ R

3. a)



$Z_A(-2, 4) = -2$ (minimum)
$Z_B(5, 1) = 27$ (maximum)

b)



$Z_A(0, 5) = 20$ (maximum)

$Z_C\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right) = -8$ (minimum)

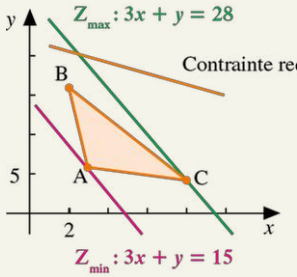
$Z_E(2, 0) = -8$ (minimum)

(Tous les points situés sur le segment de droite $\overline{CE}$ ont aussi -8 comme valeur dans l'équation $Z(x_1, x_2) = 4x_2 - 4x_1$)

c) De $2x + 3y + t = 66$, nous obtenons
$t = 66 - 2x - 3y$
Puisque $t \geq 0$, $(66 - 2x - 3y) \geq 0$, donc $2x + 3y \leq 66$

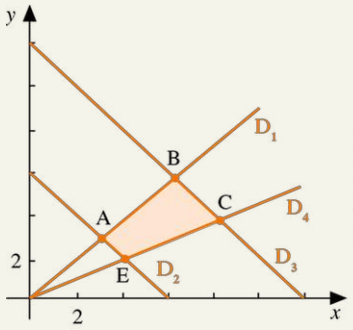
En remplaçant t par $(66 - 2x - 3y)$ dans les inéquations, nous trouvons
$8x + 6y + (66 - 2x - 3y) \leq 126$, donc $2x + y \leq 20$
$14x + 7y + 2(66 - 2x - 3y) \geq 168$, donc $10x + y \geq 36$
$4x + 8y + (66 - 2x - 3y) \geq 102$, donc $2x + 5y \geq 36$

$Z(x, y) = 5x + 4y + (66 - 2x - 3y) - 66$
$= 3x + y$



$Z_A(3, 6) = 15$ (minimum)
$Z_C(8, 4) = 28$ (maximum)

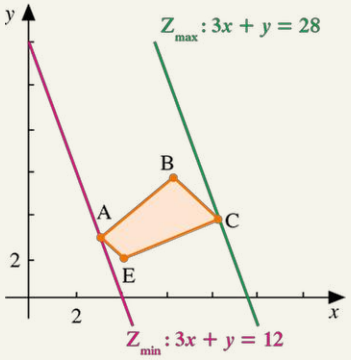
4. a)



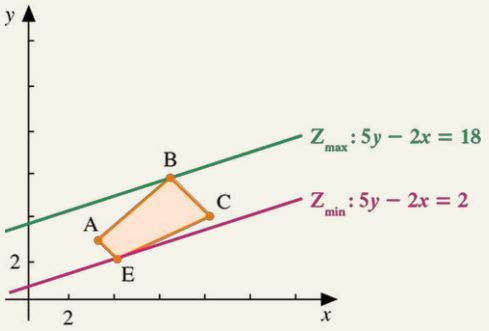
$D_1 : x - y = 0$
$D_2 : x + y = 6$
$D_3 : x + y = 12$
$D_4 : x - 2y = 0$

A(3, 3), B(6, 6), C(8, 4) et E(4, 2)

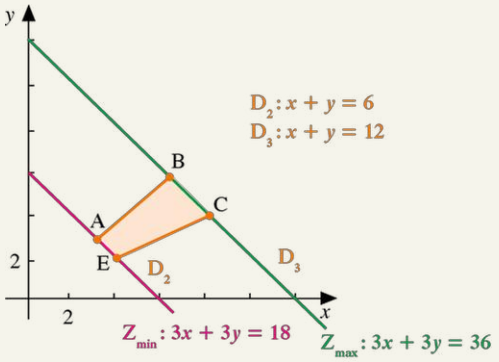
b) i)



ii)



iii)



5. 1) Identifions les variables de décision.
Tableau des données

	Saint-Jérôme	Lévis	Besoin minimal
Bateaux	20	30	1400
Autos	30	20	1600
Camions	50	20	2000

Soit x, le nombre de jours de production à l'usine de Saint-Jérôme, et y, le nombre de jours de production à l'usine de Lévis.

2) Traduisons les contraintes en un système d'inéquations linéaires.

$$\begin{cases} x \geq 0 & ① \\ y \geq 0 & ② \end{cases}$$ contraintes de non-négativité

$20x + 30y \geq 1400$ ③ contrainte pour le nombre de bateaux téléguidés

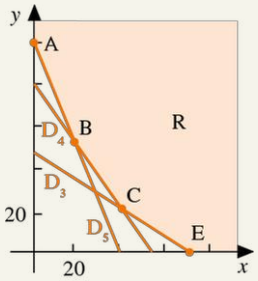
$30x + 20y \geq 1600$ ④ contrainte pour le nombre d'autos téléguidées

$50x + 20y \geq 2000$ ⑤ contrainte pour le nombre de camions téléguidés

3) Déterminons la fonction économique à optimiser.

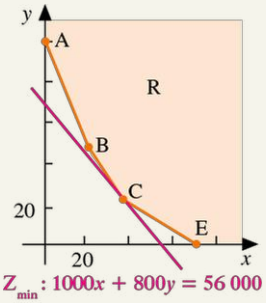
$Z(x, y) = 1000x + 800y$
est la fonction économique dont nous voulons déterminer le minimum.

4) Représentons la région admissible R et déterminons les sommets de cette région.



A(0, 100)
B(20, 50)
C(40, 20)
E(70, 0)

5) Évaluons $Z(x, y)$ à chaque sommet, où
$Z(x, y) = 1000x + 800y$.
$Z_A(0, 100) = 80\,000$ \$
$Z_B(20, 50) = 60\,000$ \$
$Z_C(40, 20) = 56\,000$ \$ (minimum)
$Z_E(70, 0) = 70\,000$ \$
Représentons graphiquement la région admissible et la droite
$Z_{min}: 1000x + 800y = 56\,000$



6) Formulons la réponse.
L'usine de Saint-Jérôme devra fonctionner pendant 40 jours, et l'usine de Lévis, pendant 20 jours, pour un coût minimal de 56 000 \$.

6. a) 1) Identifions les variables de décision.
Tableau des données

	Sachet 1	Sachet 2	Besoin minimal
Unités de calcium	200	300	1400
Unités de vitamine C	200	100	600

Soit x, le nombre de sachets 1, et y, le nombre de sachets 2, pris quotidiennement.

2) Traduisons les contraintes en un système d'inéquations linéaires.

$$\begin{cases} x \geq 0 & ① \\ y \geq 0 & ② \end{cases}$$ contraintes de non-négativité

$200x + 300y \geq 1400$ ③ contrainte pour les unités de calcium

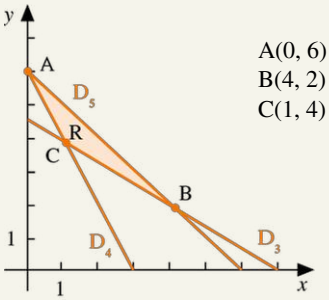
$200x + 100y \geq 600$ ④ contrainte pour les unités de vitamine C

$x + y \leq 6$ ⑤ contrainte pour le nombre de sachets

3) Déterminons la fonction économique à optimiser.

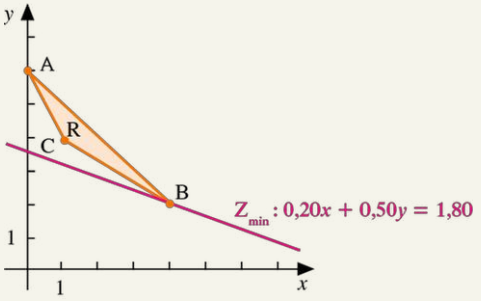
$Z(x, y) = 0{,}20x + 0{,}50y$
est la fonction économique dont nous voulons déterminer le minimum.

4) Représentons le polygone de contraintes et les sommets du polygone.



A(0, 6)
B(4, 2)
C(1, 4)

5) Évaluons $Z(x, y)$ à chaque sommet, où
$Z(x, y) = 0{,}20x + 0{,}50y$.
$Z_A(0, 6) = 3{,}00$ \$
$Z_B(4, 2) = 1{,}80$ \$ (minimum)
$Z_C(1, 4) = 2{,}20$ \$
Représentons graphiquement le polygone de contraintes et la droite
$Z_{min}: 0{,}20x + 0{,}50y = 1{,}80$



6. a) (*suite*)

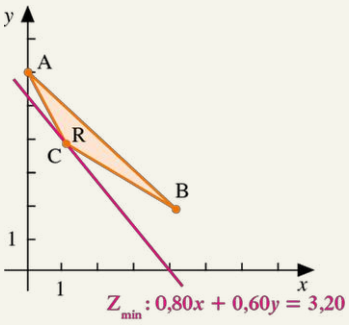
6) Formulons la réponse.
Elle devra prendre quatre sachets 1 et deux sachets 2 chaque jour ; coût minimal par jour : 1,80 $.

b) Les étapes 1), 2) et 4) sont identiques aux étapes 1), 2) et 4) de a).

3) Déterminons la fonction économique à optimiser.

$Z(x, y) = 0{,}80x + 0{,}60y$
est la fonction économique dont nous voulons déterminer le minimum.

5) Évaluons $Z(x, y)$ à chaque sommet, où
$Z(x, y) = 0{,}80x + 0{,}60y$.
$Z_A(0, 6) = 3{,}60$ $
$Z_B(4, 2) = 4{,}40$ $
$Z_C(1, 4) = 3{,}20$ $ (minimum)
Représentons graphiquement le polygone de contraintes et la droite
Z_{min} : $0{,}80x + 0{,}60y = 3{,}20$



6) Formulons la réponse.
Elle devra prendre un sachet 1 et quatre sachets 2 chaque jour ; coût minimal par jour : 3,20 $.

7. a) 1) Identifions les variables de décision.
Tableau des données

	Bière blonde	Bière rousse	Quantité disponible
Blé (en kg)	2	6	240
Malt (en kg)	16	9	576
Levure (en kg)	0,1	0,2	8,2

Soit x, le nombre de barils de bière blonde, et
y, le nombre de barils de bière rousse.

2) Traduisons les contraintes en un sytème d'inéquations linéaires.

$$\begin{cases} x \geq 0 \quad ① \\ y \geq 0 \quad ② \end{cases}$$ contraintes de non-négativité

$2x + 6y \leq 240$ ③ contrainte de quantité de blé

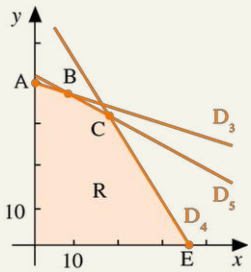
$16x + 9y \leq 576$ ④ contrainte de quantité de malt

$0{,}1x + 0{,}2y \leq 8{,}2$ ⑤ contrainte de quantité de levure

3) Déterminons la fonction économique à optimiser.

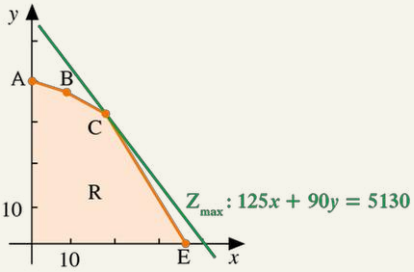
$Z(x, y) = 125x + 90y$
est la fonction économique dont nous voulons déterminer le maximum.

4) Représentons le polygone de contraintes et les sommets du polygone.



A(0, 40)
B(6, 38)
C(18, 32)
E(36, 0)

5) Évaluons $Z(x, y)$ à chaque sommet, où
$Z(x, y) = 125x + 90y$.
$Z_A(0, 40) = 3600$ $
$Z_B(6, 38) = 4170$ $
$Z_C(18, 32) = 5130$ $ (maximum)
$Z_E(36, 0) = 4500$ $
Représentons graphiquement le polygone de contraintes et la droite
Z_{max} : $125x + 90y = 5130$



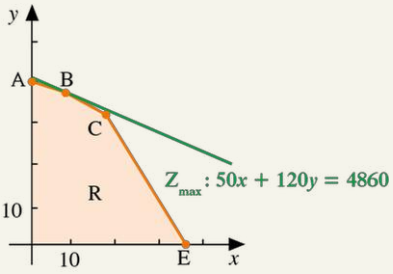
6) Formulons la réponse.
La microbrasserie devra fabriquer 18 barils de bière blonde et 32 barils de bière rousse, pour un profit maximal de 5130 $.

b) Les étapes 1), 2) et 4) sont identiques aux étapes 1), 2) et 4) de a).

3) Déterminons la fonction économique à optimiser.

$Z(x, y) = 50x + 120y$
est la fonction économique dont nous voulons déterminer le maximum.

5) Évaluons $Z(x, y)$ à chaque sommet, où
$Z(x, y) = 50x + 120y$.
$Z_A(0, 40) = 4800$ $
$Z_B(6, 38) = 4860$ $ (maximum)
$Z_C(18, 32) = 4740$ $
$Z_E(36, 0) = 1800$ $
Représentons graphiquement le polygone de contraintes et la droite
Z_{max} : $50x + 120y = 4860$



7. b) (*suite*)

6) Formulons la réponse.
La microbrasserie devra fabriquer 6 barils de bière blonde et 38 barils de bière rousse, pour un profit maximal de 4860 $.

8. 1) Identifions les variables de décision.
Soit x, le nombre de mètres carrés des boîtes à fleurs,
y, le nombre de mètres carrés des arbustes, et
t, le nombre de mètres carrés des outils de jardinage.
Puisque $x + y + t = 160$, nous avons $t = 160 - x - y$, où $t \geq 0$.

2) Traduisons les contraintes en un système d'inéquations linéaires.

$$\left\{\begin{array}{rll} x \geq 0 & \text{①} & \\ y \geq 0 & \text{②} & \text{contraintes de non-négativité} \\ t \geq 0 & \text{③} & \\ x + y \leq 120 & \text{④} & \\ x \leq 100 & \text{⑤} & \\ y \geq 10 & \text{⑥} & \\ t \leq x + y & \text{⑦} & \\ y \leq \frac{1}{3}x & \text{⑧} & \end{array}\right.$$

En remplaçant t par $(160 - x - y)$, nous obtenons

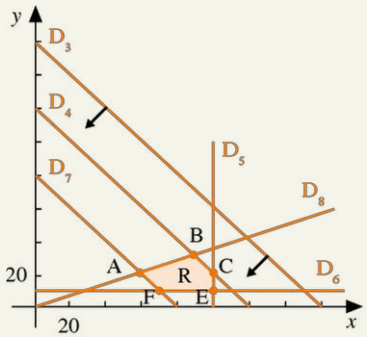
$$\left\{\begin{array}{rl} x \geq 0 & \text{①} \\ y \geq 0 & \text{②} \\ 160 - x - y \geq 0 & \text{③} \\ x + y \leq 120 & \text{④} \\ x \leq 100 & \text{⑤} \\ y \geq 10 & \text{⑥} \\ 160 - x - y \leq x + y & \text{⑦} \\ y \leq \frac{1}{3}x & \text{⑧} \end{array}\right.$$

En transformant ce dernier système, nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{rl} x \geq 0 & \text{①} \\ y \geq 0 & \text{②} \\ x + y \leq 160 & \text{③} \\ x + y \leq 120 & \text{④} \\ x \leq 100 & \text{⑤} \\ y \geq 10 & \text{⑥} \\ x + y \geq 80 & \text{⑦} \\ x - 3y \geq 0 & \text{⑧} \end{array}\right.$$

3) Déterminons la fonction économique à optimiser.
$Z(x, y, t) = 24x + 40y + 5t$
$Z(x, y) = 24x + 40y + 5(160 - x - y)$
$Z(x, y) = 19x + 35y + 800$ (en $)

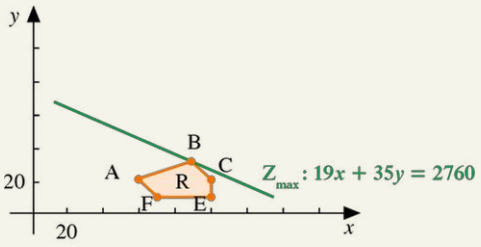
4) Représentons le polygone de contraintes et déterminons les sommets du polygone en résolvant les systèmes d'équations appropriés.



A(60, 20)
B(90, 30)
C(100, 20)
E(100, 10)
F(70, 10)

Notons que la contrainte ③, $x + y \leq 160$, est redondante.

5) Évaluons $Z(x, y)$ à chaque sommet, où $Z(x, y) = 19x + 35y + 800$.
$Z_A(60, 20) = 2640$ $
$Z_B(90, 30) = 3560$ $ (maximum)
$Z_C(100, 20) = 3400$ $
$Z_E(100, 10) = 3050$ $
$Z_F(70, 10) = 2480$ $
Représentons graphiquement le polygone de contraintes et la droite $Z_{max}: 19x + 35y + 800 = 3560$



6) Formulons la réponse.
Le propriétaire devra allouer 90 m² pour les boîtes à fleurs, 30 m² pour les arbustes et 40 m² pour les outils de jardinage, pour un profit maximal de 3560 $.

Exercices 11.2 (page 545)

1. a) $2x + 2y + z + e_1 = 100$, où $e_1 = 100 - 2x - 2y - z$
$2x + 3y + 3z + e_2 = 150$, où $e_2 = 150 - 2x - 3y - 3z$
$2x + 5y + z + e_3 = 200$, où $e_3 = 200 - 2x - 5y - z$

b) $P(x, y, z, e_1, e_2, e_3) = 6x + 9y + 9z + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$

2. a) i) Variables de base : x et e_1
Variables hors base : y et e_2
$x = 18$, $y = 0$, $e_1 = 10$, $e_2 = 0$, $P = 25$

ii) Non, car il y a une valeur négative sur la dernière ligne.

b) i) Variables de base : y et e_2
Variables hors base : x, z et e_1
$x = 0$, $y = 20$, $z = 0$, $e_1 = 0$, $e_2 = 15$, $P = 37$

ii) Oui, car il n'y a aucune valeur négative sur la dernière ligne.

3. a) $x + e_1 = 5$
$y + e_2 = 3$
$x + y + e_3 = 6$
$x \geq 0, y \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0$

b) $Z(x, y, e_1, e_2, e_3) = 50x + 200y + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$

c)

x	y	e_1	e_2	e_3	Solution	Point	Z
0	0	5	3	6	Admissible	O(0, 0)	0
0	✗	0	✗	✗	✗	✗	✗
0	3	5	0	3	Admissible	A(0, 3)	600
0	6	5	-3	0	Rejetée	B(0, 6)	✗
5	0	0	3	1	Admissible	G(5, 0)	250
✗	0	✗	0	✗	✗	✗	✗
6	0	-1	3	0	Rejetée	H(6, 0)	✗
5	3	0	0	-2	Rejetée	E(5, 3)	✗
5	1	0	2	0	Admissible	F(5, 1)	450
3	3	2	0	0	Admissible	C(3, 3)	750

x et e_1 ne peuvent pas valoir 0 simultanément, car $x + e_1 = 5$.
y et e_2 ne peuvent pas valoir 0 simultanément, car $y + e_2 = 3$.

d) $Z_{max} = 750$; le maximum est atteint au point C(3, 3).

4.

	x	y	e_1	e_2	P		
e_1	3	6	1	0	0	24	$\frac{24}{3} = 8$
e_2	4	2	0	1	0	28	$\frac{28}{4} = 7$ minimum
P	-8	-7	0	0	1	0	

$\sim$

3	6	1	0	0	24	
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	7	$(\frac{1}{4})L_2 \to L_2$
-8	-7	0	0	1	0	

$\sim$

e_1	0	$\frac{9}{2}$	1	$\frac{-3}{4}$	0	3	$L_1 - 3L_2 \to L_1$
x	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	7	
P	0	-3	0	2	1	56	$L_3 + 8L_2 \to L_3$

$x = 7, y = 0, e_1 = 3, e_2 = 0, P = 56$

5. a)

	x	y	e_1	e_2	P	
e_1	3	5	1	0	0	3
e_2	1	5	0	1	0	2
P	-4	-7	0	0	1	0

3	5	1	0	0	3	$\frac{3}{5} = 0{,}6$
1	5	0	1	0	2	$\frac{2}{5} = 0{,}4$ minimum
-4	-7	0	0	1	0	

$\sim$

3	5	1	0	0	3	$(\frac{1}{5})L_2 \to L_2$
$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	
-4	-7	0	0	1	0	

$\sim$

e_1	2	0	1	-1	0	1	$L_1 - 5L_2 \to L_1$
y	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	
P	$\frac{-13}{5}$	0	0	$\frac{7}{5}$	1	$\frac{14}{5}$	$L_3 + 7L_2 \to L_3$

2	0	1	-1	0	1	$\frac{1}{2} = 0{,}5$ minimum
$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5} \div \frac{1}{5} = 2$
$\frac{-13}{5}$	0	0	$\frac{7}{5}$	1	$\frac{14}{5}$	

$\sim$

1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2})L_1 \to L_1$
$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	
$\frac{-13}{5}$	0	0	$\frac{7}{5}$	1	$\frac{14}{5}$	

$\sim$

x	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	
y	0	1	$\frac{-1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$L_2 - (\frac{1}{5})L_1 \to L_2$
P	0	0	$\frac{13}{10}$	$\frac{1}{10}$	1	$\frac{41}{10}$	$L_3 + (\frac{13}{5})L_1 \to L_3$

$x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{10}, e_1 = 0, e_2 = 0, P = \frac{41}{10}$ maximum

b)

	x	y	z	e_1	e_2	e_3	P	
e_1	2	2	1	1	0	0	0	100
e_2	2	3	3	0	1	0	0	150
e_3	2	5	1	0	0	1	0	200
P	-6	-9	-6	0	0	0	1	0

2	2	1	1	0	0	0	100	$\frac{100}{2} = 50$
2	3	3	0	1	0	0	150	$\frac{150}{3} = 50$
2	5	1	0	0	1	0	200	$\frac{200}{5} = 40$ minimum
-6	-9	-6	0	0	0	1	0	

5. b) (*suite*)

$$\begin{array}{c} \\ \sim \\ \\ \\ \\ \\ \\ \sim \\ \\ \\ \\ \\ \\ \sim \\ \\ \\ \\ \\ \\ \sim \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x & y & z & e_1 & e_2 & e_3 & P \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 150 \\ \frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 40 \\ \hdashline -6 & -9 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{ccccccc|c} \frac{6}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 1 & 0 & \frac{-2}{5} & 0 & 20 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{12}{5} & 0 & 1 & \frac{-3}{5} & 0 & 30 \\ \frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 40 \\ \hdashline \frac{-12}{5} & 0 & \frac{-21}{5} & 0 & 0 & \frac{9}{5} & 1 & 360 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{ccccccc|c} \frac{6}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 1 & 0 & \frac{-2}{5} & 0 & 20 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{12}{5} & 0 & 1 & \frac{-3}{5} & 0 & 30 \\ \frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 40 \\ \hdashline \frac{-12}{5} & 0 & \frac{-21}{5} & 0 & 0 & \frac{9}{5} & 1 & 360 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{ccccccc|c} \frac{6}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 1 & 0 & \frac{-2}{5} & 0 & 20 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{12} & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{25}{2} \\ \frac{2}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 40 \\ \hdashline \frac{-12}{5} & 0 & \frac{-21}{5} & 0 & 0 & \frac{9}{5} & 1 & 360 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{25}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{12} & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{25}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{12} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{75}{2} \\ \hdashline -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{825}{2} \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{25}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{12} & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{25}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{12} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{75}{2} \\ \hdashline -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{4} & 1 & \frac{825}{2} \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \left(\frac{1}{5}\right)L_3 \to L_3 \\ \\ \\ \\ \\ \\ L_1 - 2L_3 \to L_1 \\ L_2 - 3L_3 \to L_2 \\ \\ L_4 + 9L_3 \to L_4 \\ \\ \\ \\ \\ \\ 20 \div \frac{3}{5} = 33{,}\overline{3} \\ 30 \div \frac{12}{5} = 12{,}5 \\ \text{minimum} \\ 40 \div \frac{1}{5} = 200 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \left(\frac{5}{12}\right)L_2 \to L_2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ L_1 - \left(\frac{3}{5}\right)L_2 \to L_1 \\ \\ \\ L_3 - \left(\frac{1}{5}\right)L_2 \to L_3 \\ L_4 + \left(\frac{21}{5}\right)L_2 \to L_4 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \frac{25}{2} \div 1 = 12{,}5 \\ \text{minimum} \\ \frac{25}{2} \div \frac{1}{3} = 37{,}5 \\ \frac{75}{2} \div \frac{1}{3} = 112{,}5 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x & y & z & e_1 & e_2 & e_3 & P \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{25}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{6} & 0 & \frac{25}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{100}{3} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 425 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\

6. a) (*suite*)

	x	y	z	e_1	e_2	e_3	P		
	0,5	0,75	1	0,25	0	0	0	83,25	$\frac{83,25}{0,5} = 166,5$
	0,5	-0,25	0	-1,75	1	0	0	3,25	$\frac{3,25}{0,5} = 6,5$ minimum
	0,5	0,25	0	-0,25	0	1	0	16,75	$\frac{16,75}{0,5} = 33,5$
	-5	0	0	20	0	0	1	6660	

$\sim$

	0,5	0,75	1	0,25	0	0	0	83,25	
	1	-0,5	0	-3,5	2	0	0	6,5	$2L_2 \to L_2$
	0,5	0,25	0	-0,25	0	1	0	16,75	
	-5	0	0	20	0	0	1	6660	

$\sim$

z	0	1	1	2	-1	0	0	80	$L_1 - (\frac{1}{2})L_2 \to L_1$
x	1	-0,5	0	-3,5	2	0	0	6,5	
e_3	0	0,5	0	1,5	-1	1	0	13,5	$L_3 - (\frac{1}{2})L_2 \to L_3$
P	0	-2,5	0	2,5	10	0	1	6692,5	$L_4 + 5L_2 \to L_4$

	0	1	1	2	-1	0	0	80	$\frac{80}{1} = 80$
	1	-0,5	0	-3,5	2	0	0	6,5	
	0	0,5	0	1,5	-1	1	0	13,5	$\frac{13,5}{0,5} = 27$ minimum
	0	-2,5	0	2,5	10	0	1	6692,5	

$\sim$

	0	1	1	2	-1	0	0	80	
	1	-0,5	0	-3,5	2	0	0	6,5	
	0	1	0	3	-2	2	0	27	$2L_3 \to L_3$
	0	-2,5	0	2,5	10	0	1	6692,5	

$\sim$

z	0	0	1	-1	1	-2	0	53	$L_1 - L_3 \to L_1$
x	1	0	0	-2	1	1	0	20	$L_2 + (\frac{1}{2})L_3 \to L_2$
y	0	1	0	3	-2	2	0	27	
P	0	0	0	10	5	5	1	6760	$L_4 + (\frac{5}{2})L_3 \to L_4$

La manufacture devrait fabriquer mensuellement 20 tentes à quatre places, 27 tentes à six places et 53 tentes à huit places, pour un profit maximal de 6760 $.

b) Puisque $e_1 = 0$, toutes les heures de coupe ont été utilisées ; puisque $e_2 = 0$, toutes les heures de couture ont été utilisées ; et puisque $e_3 = 0$, la manufacture a fabriqué le nombre maximal de tentes possible.

7. Soit x, le nombre d'alternateurs d'automobiles, et y, le nombre d'alternateurs de camions.

$$\begin{cases} x + y \le 24 \\ x - y \le 12 & \text{(contraintes d'unités de réparation)} \\ 2y - x \le 6 \\ x \ge 0, y \ge 0 & \text{(contraintes de non-négativité)} \end{cases}$$

Maximiser $P(x, y) = 80x + 120y$

$$\begin{cases} x + y + e_1 = 24 \\ x - y + e_2 = 12 \\ -x + 2y + e_3 = 6 \\ -80x - 120y + P = 0 \end{cases}$$

$x \ge 0, y \ge 0, e_1 \ge 0, e_2 \ge 0, e_3 \ge 0$

Tableau initial

	x	y	e_1	e_2	e_3	P	
e_1	1	1	1	0	0	0	24
e_2	1	-1	0	1	0	0	12
e_3	-1	2	0	0	1	0	6
P	-80	-120	0	0	0	1	0

	1	1	1	0	0	0	24	$\frac{24}{1} = 24$
	1	-1	0	1	0	0	12	
	-1	2	0	0	1	0	6	$\frac{6}{2} = 3$ minimum
	-80	-120	0	0	0	1	0	

$\sim$

	1	1	1	0	0	0	24	
	1	-1	0	1	0	0	12	
	$\frac{-1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	3	$(\frac{1}{2})L_3 \to L_3$
	-80	-120	0	0	0	1	0	

$\sim$

e_1	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{-1}{2}$	0	21	$L_1 - L_3 \to L_1$
e_2	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	15	$L_2 + L_3 \to L_2$
y	$\frac{-1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	3	
P	-140	0	0	0	60	1	360	$L_4 + 120L_3 \to L_4$

	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{-1}{2}$	0	21	$21 \div \frac{3}{2} = 14$ minimum
	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	15	$15 \div \frac{1}{2} = 30$
	$\frac{-1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	3	
	-140	0	0	0	60	1	360	

$\sim$

	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	0	14	$(\frac{2}{3})L_1 \to L_1$
	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	15	
	$\frac{-1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	3	
	-140	0	0	0	60	1	360	

7. (*suite*)

$$\begin{array}{c} \\ x \\ e_2 \\ y \\ P \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x & y & z & e_1 & e_2 & e_3 & P \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc:c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} & 0 & 14 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 10 \\ \hdashline 0 & 0 & \frac{280}{3} & 0 & \frac{40}{3} & 1 & 2320 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ L_2 - (\frac{1}{2})L_1 \to L_2 \\ L_3 + (\frac{1}{2})L_1 \to L_3 \\ L_4 + 140L_1 \to L_4 \end{array}$$

Le garagiste doit réparer 14 alternateurs d'automobiles et 10 alternateurs de camions par semaine pour un profit maximal de 2320 $.

Exercices de compréhension 11.3

1. Contraintes $\begin{cases} 5u + 6v \le 11 \\ 9u + 13v \le 1 \\ u \ge 0, v \ge 0 \end{cases}$

Maximiser $F(u, v) = 210u + 150v$

2. Le minimum $m = 75$ lorsque $x = 5$ et $y = 7$

Exercices 11.3 (page 554)

1. a) $\begin{cases} 3u + 8v \le 35 \\ 7u + 5v \le 50 \\ u \ge 0, v \ge 0 \end{cases}$

Maximiser $F(u, v) = 10u + 42v$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u & v & e_1 & e_2 & F \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc:c} 3 & 8 & 1 & 0 & 0 & 35 \\ 7 & 5 & 0 & 1 & 0 & 50 \\ \hdashline -10 & -42 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \frac{35}{8} = 4{,}375 \text{ minimum} \\ \frac{50}{5} = 10 \end{array}$$

Pivot = 8

b) $\begin{cases} 3u + 4v \le 3 \\ 7u + 2w \le 5 \\ 5v + 9w \le 7 \\ u \ge 0, v \ge 0, w \ge 0 \end{cases}$

Maximiser $F(u, v, w) = 10u + 16v + 27w$

$u \ge 0, v \ge 0, w \ge 0$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u & v & w & e_1 & e_2 & e_3 & F \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc:c} 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 7 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ \hdashline -10 & -16 & -27 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \frac{5}{2} = 2{,}5 \\ \frac{7}{9} = 0{,}\overline{7} \text{ minimum} \end{array}$$

Pivot = 9

2. a) Si x et y sont les variables initiales, le minimum $m = 120$ lorsque $x = 8$ et $y = 5$.

b) Si x, y et z sont les variables initiales, le minimum $m = 250$ lorsque $x = 12$, $y = 10$ et $z = 0$.

3. a) Problème dual correspondant

$\begin{cases} u + 2v \le 8 \\ u + v \le 6 \\ u \ge 0, v \ge 0 \end{cases}$

Maximiser $F(u, v) = 8u + 14v$

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ F \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u & v & e_1 & e_2 & F \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \hdashline -8 & -14 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \frac{8}{2} = 4 \text{ minimum} \\ \frac{6}{1} = 6 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc:c} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ \hdashline -8 & -14 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad (\tfrac{1}{2})L_1 \to L_1$$

$$\begin{array}{c} \\ \sim \\ \\ \\ F \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{c} v \\ e_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc:c} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 2 \\ \hdashline -1 & 0 & 7 & 0 & 1 & 56 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 + 14L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 2 \\ \hdashline -1 & 0 & 7 & 0 & 1 & 56 \end{array}\right] \begin{array}{l} 4 \div \frac{1}{2} = 8 \\ 2 \div \frac{1}{2} = 4 \text{ minimum} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc:c} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ \hdashline -1 & 0 & 7 & 0 & 1 & 56 \end{array}\right] \quad 2L_2 \to L_2$$

$$\begin{array}{c} \\ \sim \\ \\ \\ F \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{c} v \\ u \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc:c} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ \hdashline 0 & 0 & \underbrace{6}_{x} & \underbrace{2}_{y} & 1 & 60 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ L_1 - (\frac{1}{2})L_2 \to L_1 \\ L_3 + L_2 \to L_3 \end{array}$$

D'où le minimum $m = 60$ lorsque $x = 6$ et $y = 2$

3. (*suite*)

b) Problème dual correspondant

$$\begin{cases} u + v + w \leq 10 \\ 2u + 4v + 6w \leq 48 \\ 2u + 6v + 4w \leq 36 \\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ w \geq 0 \end{cases}$$

Maximiser $F(u, v, w) = 90u + 120v + 144w$

	u	v	w	e_1	e_2	e_3	F		
e_1	1	1	1	1	0	0	0	10	$\frac{10}{1} = 10$
e_2	2	4	6	0	1	0	0	48	$\frac{48}{6} = 8$ minimum
e_3	2	6	4	0	0	1	0	36	$\frac{36}{4} = 9$
F	-90	-120	-144	0	0	0	1	0	

$\sim$

	1	1	1	1	0	0	0	10	
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	0	8	$(\frac{1}{6})L_2 \to L_2$
	2	6	4	0	0	1	0	36	
	-90	-120	-144	0	0	0	1	0	

$\sim$

e_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{-1}{6}$	0	0	2	$L_1 - L_2 \to L_1$
w	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	0	8	
e_3	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	$\frac{-2}{3}$	1	0	4	$L_3 - 4L_2 \to L_3$
F	-42	-24	0	0	24	0	1	1152	$L_4 + 144L_2 \to L_4$

$\sim$

$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{-1}{6}$	0	0	2	$2 \div (\frac{2}{3}) = 3$ minimum
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	0	8	$8 \div (\frac{1}{3}) = 24$
$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	$\frac{-2}{3}$	1	0	4	$4 \div (\frac{2}{3}) = 6$
-42	-24	0	0	24	0	1	1152	

$\sim$

1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	0	3	$(\frac{3}{2})L_1 \to L_1$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	0	8	
$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	$\frac{-2}{3}$	1	0	4	
-42	-24	0	0	24	0	1	1152	

$\sim$

u	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	0	3	
w	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	7	$L_2 - (\frac{1}{3})L_1 \to L_2$
e_3	0	3	0	-1	$\frac{-1}{2}$	1	0	2	$L_3 - (\frac{2}{3})L_1 \to L_3$
F	0	-3	0	63	$\frac{27}{2}$	0	1	1278	$L_4 + 42L_1 \to L_4$

	u	v	w	e_1	e_2	e_3	F		
	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	0	3	$3 \div (\frac{1}{2}) = 6$
	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	7	$7 \div (\frac{1}{2}) = 14$
	0	3	0	-1	$\frac{-1}{2}$	1	0	2	$\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$ minimum
	0	-3	0	63	$\frac{27}{2}$	0	1	1278	

$\sim$

	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	0	3	
	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	7	
	0	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$(\frac{1}{3})L_3 \to L_3$
	0	-3	0	63	$\frac{27}{2}$	0	1	1278	

$\sim$

u	1	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{6}$	0	$\frac{8}{3}$	$L_1 - (\frac{1}{2})L_3 \to L_1$
w	0	0	1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{6}$	0	$\frac{20}{3}$	$L_2 - (\frac{1}{2})L_3 \to L_2$
v	0	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	
F	0	0	0	$\underset{x}{\frac{62}{}}$	$\underset{y}{\frac{13}{}}$	$\underset{z}{\frac{1}{}}$	1	1280	$L_4 + 3L_3 \to L_4$

D'où le minimum $m = 1280$ lorsque $x = 62$, $y = 13$ et $z = 1$

4. Soit x, le nombre de jours pendant lesquels l'usine U_1 fonctionne, et
y, le nombre de jours pendant lesquels l'usine U_2 fonctionne.

Minimiser $m(x, y) = 20\,000x + 15\,000y$

$$\begin{cases} 600x + 300y \geq 24\,000 & (1) \\ 100x + 100y \geq 5000 & (2), \text{ ainsi} \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y \geq 80 & \text{(en divisant chaque membre de (1) par 300)} \\ x + y \geq 50 & \text{(en divisant chaque membre de (2) par 100)} \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Problème dual correspondant

$$\begin{cases} 2u + v \leq 20\,000 \\ u + v \leq 15\,000 \\ u \geq 0,\ v \geq 0 \end{cases}$$

Maximiser $F(u, v) = 80u + 50v$

	u	v	e_1	e_2	F		
e_1	2	1	1	0	0	20 000	$\frac{20\,000}{2} = 10\,000$ minimum
e_2	1	1	0	1	0	15 000	$\frac{15\,000}{1} = 15\,000$
F	-80	-50	0	0	1	0	

$\sim$

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	10 000	$(\frac{1}{2})L_1 \to L_1$
1	1	0	1	0	15 000	
-80	-50	0	0	1	0	

4. (*suite*)

$$\begin{array}{c} \\ u \\ \sim\ e_2 \\ F \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u & v & e_1 & e_2 & F \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 10\,000 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 5000 \\ \hdashline 0 & -10 & 40 & 0 & 1 & 800\,000 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 + 80L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 10\,000 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 5000 \\ \hdashline 0 & -10 & 40 & 0 & 1 & 800\,000 \end{array}\right] \begin{array}{l} 10\,000 \div \left(\frac{1}{2}\right) = 20\,000 \\ 5000 \div \left(\frac{1}{2}\right) = 10\,000 \\ \text{minimum} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 10\,000 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 10\,000 \\ \hdashline 0 & -10 & 40 & 0 & 1 & 800\,000 \end{array}\right] 2L_2 \to L_2$$

$$\begin{array}{c} \\ u \\ \sim\ v \\ F \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u & v & e_1 & e_2 & F \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 5000 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 10\,000 \\ \hdashline 0 & 0 & \underbrace{30}_{x} & \underbrace{20}_{y} & 1 & 900\,000 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ L_1 - \left(\frac{1}{2}\right)L_2 \to L_1 \\ L_3 + 10L_2 \to L_3 \end{array}$$

D'où l'usine U_1 fonctionne 30 jours, et l'usine U_2 fonctionne 20 jours, pour un coût minimal de 900 000 $.

5. Soit x, le nombre d'unités d'arachides,
y, le nombre d'unités de noix, et
z, le nombre d'unités de chocolat.

Minimiser $C(x, y, z) = 2x + 4y + 5z$

$$\begin{cases} x + 2y + 2z \geq 360 \\ x + 2y + 6z \geq 480 \\ x + 6y + 4z \geq 576 \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{cases}$$

Problème dual correspondant

$$\begin{cases} u + v + w \leq 2 \\ 2u + 2v + 6w \leq 4 \\ 2u + 6v + 4w \leq 5 \\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ w \geq 0 \end{cases}$$

Maximiser $F(u, v, w) = 360u + 480v + 576w$

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ F \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u & v & w & e_1 & e_2 & e_3 & F \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ \hdashline -360 & -480 & -576 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

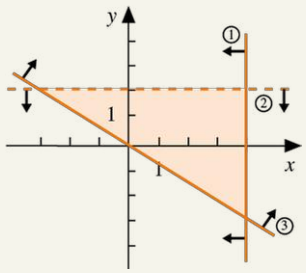
$$\vdots$$

$$\begin{array}{c} \\ u \\ \\ \\ \sim \\ \\ F \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u & v & w & e_1 & e_2 & e_3 & F \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{7}{4} \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \underbrace{222}_{x} & \underbrace{39}_{y} & \underbrace{30}_{z} & 1 & 750 \end{array}\right] \end{array}$$

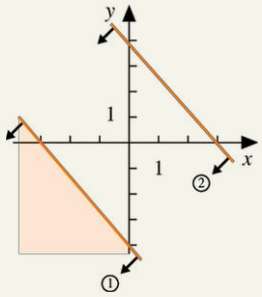
D'où le coût minimal de fabrication est de 750 $, pour 222 unités d'arachides, 39 unités de noix et 30 unités de chocolat.

Exercices récapitulatifs (page 556)

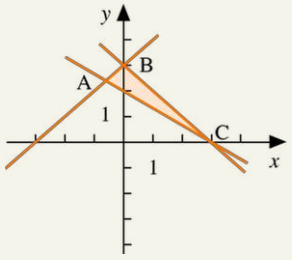
1. a)



c)

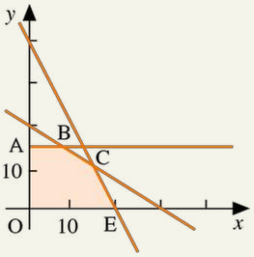


2. a)



$A\left(\frac{-3}{5}, \frac{12}{5}\right)$
B(0, 3)
C(3, 0)

c)



O(0, 0)
A(0, 16)
B(6, 16)
C(15, 10)
E(20, 0)

4. a) Minimum : 4 ; maximum : 18

c) Minimum : 125 ; maximum : aucun

6. a) $M = 122$ lorsque $x = 6{,}5$, $y = 0$ et $z = 9{,}5$

b) $m = 1000$ lorsque $x = 0$, $y = 4$ et $z = 2$

8. Le rendement maximal est obtenu lorsque
40 000 $ sont investis dans les obligations du gouvernement fédéral,
50 000 $ sont investis dans les obligations municipales et
10 000 $ sont investis dans les actions d'une société minière ;
le montant maximal reçu est alors de 5900 $ par année.

9. 7 autobus et 10 minibus ; 10 400 $

11. $\frac{110}{57}$ kg de P_1, c'est-à-dire environ 1,93 kg de P_1, 0 kg de P_2 et $\frac{160}{57}$ kg de P_3, c'est-à-dire environ 2,81 kg de P_3 ;
coût minimal de $\frac{4300}{57}$, c'est-à-dire environ 75,44 $.

Problèmes de synthèse (page 558)

2. a) $x = 0$, $y = 470$, $z = 220$, $w = 540$; $P = 8510$

b) $x = 12$, $y = 8$, $z = 21$, $w = 5$; $P = 1057$

3. a) $x = 4$, $y = 14$, $z = 4$; $m = 636$

b) $x = 85$, $y = 185$, $z = 65$, $w = 115$; $m = 1575$

5. 3 camions du premier type et 4 camions du deuxième type, pour un coût minimal de 27 $ par kilomètre

6. a) 20 appartements à une chambre, 10 appartements à deux chambres et 30 appartements à trois chambres, pour un profit maximal de 485 000 $

9. 70 billets de classe économique, 40 billets de classe affaires et 110 billets de première classe, pour un revenu maximal de 82 050 $

11.

	Type 1	Type 2	Type 3	Profit maximal
a)	20	20	10	800 000 $
c)	45	0	0	900 000 $

12.

	Type A	Type B	Type C	Type D	Revenu maximal
a)	0 $	0 $	15 000 $	10 000 $	1450 $
b)	9000 $	1000 $	6000 $	9000 $	1535 $

SOURCES ICONOGRAPHIQUES

Page couverture : Sabine Breuer/EyeEm.

Chapitre 1

Page 1 : ImagineGolf/iStockphoto ; page 2 : *The Yorck Project : 10.000 Meisterwerke der Malerei*. DVD-ROM, 2002. ISBN 3936122202. Distribué par DirectMedia Publishing GmbH/ Wikimedia Commons ; page 20 : The Royal Society ; page 31 : Wikimedia Commons ; page 45 : Wikimedia Commons ; page 58 : Pierre Parent.

Chapitre 2

Page 61 : fstop123/iStockphoto ; page 62 : Wikimedia Commons ; page 72 : Peinture de Carl Friedrich Gauss par Gottlieb Biermann (1824-1908). Photo de A. Wittmann/Wikimedia Commons ; page 86 : © Marek Szlachta/Dreamstime.com ; page 89 (haut) : Dominique Parent ; page 89 (bas) : Chaikom/ Shutterstock.com ; page 90 : Press Office, Université Leibniz de Hanovre ; page 98 : © Taina Sohlman/Fotolia ; page 102 (gauche) : Imagenet/Shutterstock.com ; page 102 (droite) : Pierre Parent.

Chapitre 3

Page 107 : Bart Sadowski/Shutterstock.com ; page 108 : Wikimedia Commons ; page 110 : Gregoire et Deneux/ Wikimedia Commons ; page 122 : Wikimedia Commons ; page 139 : SPL/Science Source ; page 142 : Ullstein bild Dtl./ Getty Images ; page 164 : Bettman/Getty Images.

Chapitre 4

Page 181 : Strahil Dimitrov/Shutterstock.com ; page 182 : Wikimedia Commons ; page 195 : © Collections École polytechnique (Palaiseau, France) ; page 199 : Dominique Parent ; page 204 : Illustration de Marc Tellier ; page 205 : Margo Harrison/Shutterstock.com ; page 215 : © Sueddeutsche/The Image Works ; page 239 : Dominique Parent ; page 243 (haut) : Dominique Parent ; page 243 (bas) : Dominique Parent.

Chapitre 5

Page 247 : Dominique Parent ; page 248 : Wikimedia Commons ; page 256 : Ullstein bild Dtl./Getty Images ; page 264 : Wikimedia Commons ; page 275 : Frans Franchoisz Hals. Portrait de René Descartes (1596-1650)/Wikimedia Commons.

Chapitre 6

Page 297 : Denis Bychkov/Shutterstock.com ; page 298 : *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford, Clarendon Press, 1873/Wikimedia Commons ; page 300 : Justus Susterman. Portrait de Galileo Galilei/Wikimedia Commons ; page 315 : Illustration de Marc Tellier ; page 319 : Dominique Parent ; page 320 : Wikimedia Commons/Tiré du site www. clerkmaxwellfoundation.org/html/picture_viewer_33.html ; page 326 : Dominique Parent ; page 332 : Dominique Parent ; page 342 : Africa Studio/Shutterstock.com ; page 344 : Dominique Parent ; page 345 : Dominique Parent.

Chapitre 7

Page 347 : ThePalmer/iStockphoto ; page 348 : Jean Baptiste Biot, *Essai de géométrie analytique, appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre*, J. Klostermann, 1813. Téléchargé de Google Books. Livre original à la Bibliothèque cantonale et universitaire – Lausanne ; page 356 : Frans Franchoisz Hals. Portrait de René Descartes (1596-1650)/Wikimedia Commons ; page 385 : Dominique Parent ; page 388 : Seasontime/ Shutterstock.com ; page 390 : Dominique Parent.

Chapitre 8

Page 393 : Lonny Garris/Shutterstock.com ; page 394 : Deuxième page de l'article de Joseph Louis Lagrange, « Solution analytique de quelques problèmes sur la pyramide triangulaire », 1775, p. 150. Publié dans le livre *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres*. Téléchargé de Google Books. Livre original à l'Université de Gand ; page 412 : Gilles Charron ; page 427 (gauche) : Stock image/Shutterstock.com ; page 427 (droite) : Claudio Stocco/ Shutterstock.com.

Chapitre 9

Page 429 : Guvendemir/iStockphoto ; page 430 : Planche I de Girard Desargues, *Brouillon-projet d'exemple d'une manière universelle du S.G.D.L. touchant la pratique du trait à preuves pour la coupe des pierres en l'Architecture*, Paris, 1640. Tiré de Amédée François Frézier, *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois pour la construction des voûtes et autres parties des bâtiments civils et militaires, Traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture*, 1737, tome 2, p. 434.

Chapitre 10

Page 475 : Steve Meese/Shutterstock.com ; page 476 : Page de Jérôme Cardan, *Ars Magna*, 1545. Tiré de Dirk Jan Struik, *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Harvard University Press, 1969 ; page 486 : Tiré de Chris Huxham et Siv Vangen, *Managing to Collaborate: The Theory and Practice of Collaborative Advantage*. Routledge, 2005. Reproduit avec la permission de Taylor & Francis Books UK ; page 489 : Jakob Emanuel Handmann. Portrait de Leonhard Euler/Wikimedia Commons ; page 495 : Heritage Images/Getty Images.

Chapitre 11

Page 511 : Tratong/Shutterstock.com ; page 512 : Historical/ Getty Images ; page 518 : Ed Souza/Stanford News Service ; page 529 (gauche) : Photosimysia/Shutterstock.com ; page 529 (droite) : Matthewshutter/Shutterstock.com ; page 532 : Institute of Mathematical Statistics. Creative Commons License Attribution-Share Alike 2.0 Germany, https://opc.mfo.de/ detail?photo_id=15047&would_like_to_publish=1#request ; page 546 : Simoly/Shutterstock.com ; page 559 (gauche) : Peter Titmuss/Shutterstock.com ; page 559 (droite) : Rad K/Shutterstock.com.

INDEX

Les noms des mathématiciens apparaissent en **caractères gras** dans l'index.

A

Abscisse, 214
Addition
  de matrices, 15
  de nombres complexes, 480
  de vecteurs algébriques, 225
  de vecteurs géométriques, 191
  propriétés de l'_ de matrices, 21
  propriétés de l'_ de vecteurs algébriques, 233
  propriétés de l'_ de vecteurs géométriques, 197
Adjacence, matrice d'_, 42
Adjointe d'une matrice, 152
Aire
  d'un parallélogramme, 113, 327
  d'un triangle, 113, 328
Al-Khârizmi, 476
Alembert, Jean Le Rond d', 436
Angle(s)
  dièdre, 449
  directeurs, 306, 367, 410
  formé par deux droites, 366, 409
  formé par deux plans, 449
  formé par deux vecteurs, 198, 305
  formé par une droite et un plan, 452
Anticommutative, matrice, 180
Argand, Jean-Robert, 476, 486
Argand, plan d'_, 478
Argument d'un nombre complexe, 487

B

Banach, Stephan, 264
Barycentre, 246, 390
Base(s)
  canonique, 276
  d'un espace vectoriel, 275
  orthogonale, 285
  orthonormée, 285
  théorèmes sur les _, 282
Bernoulli, Jean, 430
Bhaskara, 476
Biot, Jean-Baptiste, 348
Bombelli, Rafael, 476

C

Canonique(s)
  base _, 276
  vecteurs _, 220
Cardan, Jérôme, 476
Cauchy, Augustin-Louis, 108, 110, 309
Cauchy-Schwarz, inégalité de _, 309
Cayley, Arthur, 2, 31, 108
Centre de gravité, 246
Chaîne de Markov, 45
Chasles, loi de _, 195
Chasles, Michel, 195
Chuquet, Nicolas, 476
Clairaut, Alexis, 430
Coefficient, 250
Cofacteur(s)
  d'un élément, 120
  matrice des _, 120
Colinéaires, vecteurs _, 260
Colonne pivot, 535
Combinaison linéaire de vecteurs, 250, 273
Composantes d'un vecteur, 215, 282
Conjugué
  d'un nombre complexe, 482
  propriétés d'un _ d'un nombre complexe, 485
Contrainte, 517
Coplanaires, vecteurs _, 261
Cosinus
  directeurs, 368, 410
  loi des _, 183
Cote, 214
Courbes de niveau, 519
Cramer, Gabriel, 108, 139, 348
Cramer, règle de _, 139
Cryptographie, 163

D

Dantzig, George Bernard, 512, 518, 532
Demi-plan
  fermé, 515
  ouvert, 515
Dépendance linéaire, 256, 274
Dépendant, système homogène _, 85
Descartes, René, 182, 248, 275, 348, 356, 430, 476
Déterminant(s)
  d'une matrice d'ordre 1, 110
  d'une matrice d'ordre 2, 111
  d'une matrice d'ordre 3, 115
  d'une matrice d'ordre *n*, 122
  interprétation géométrique d'un _, 112
  théorèmes relatifs aux _, 126
Diagonales d'une matrice carrée, 9
Dimension
  d'un espace vectoriel, 283
  d'un vecteur algébrique, 215
  d'une matrice, 5
Diophante, 476
Directeur
  angle _, 306, 367, 410
  cosinus _, 368, 410
  vecteur _, 351, 396, 432
Direction d'un vecteur géométrique, 185
Distance
  entre deux droites non parallèles, 416
  entre deux droites parallèles, 377, 415
  entre deux plans parallèles, 459
  entre un plan et une droite parallèle au plan, 460
  entre un point et un plan, 456
  entre un point et une droite, 372, 414
Division de nombres complexes, 480, 491, 492
Dodgson, Charles L., 256
Droite(s)
  angle directeur d'une _, 367
  angle formé par deux _, 366, 409
  angle formé par une _ et un plan, 452
  concourantes, 364, 405
  d'intersection de deux plans, 446
  de régression, 359
  distance entre deux _ non parallèles, 416
  distance entre deux _ parallèles, 377, 415
  distance entre un plan et une _ parallèle au plan, 460
  distance entre un point et une _, 372, 414
  équation cartésienne d'une _, 356
  équation symétrique d'une _, 354, 400
  équation vectorielle d'une _, 350, 396
  équations paramétriques d'une _, 353, 398
  faisceau de _, 369
  forme ensembliste d'une _, 402
  forme fonctionnelle d'une _, 357
  gauches, 405
  parallèle à un plan, 450
  parallèles, 364, 404
  position relative d'une _ et d'un plan, 450
  position relative de deux _, 364, 404
  projection d'une _ sur un plan, 464
  vecteur directeur d'une _, 351, 396
Duale, méthode _, 546, 548

E

Écart, variable d'_, 530
Économique, fonction _, 519
Égalité
  de matrices, 14
  de nombres complexes, 479, 488
  de vecteurs, 189, 216
Élément(s)
  cofacteur d'un _, 120
  d'une matrice, 5
  mineur d'un _, 119
Ensemble-solution
  d'un système d'équations linéaires, 64
  d'un système d'inéquations linéaires, 516
Équation(s)
  cartésienne d'un plan, 437
  cartésienne d'une droite, 356
  chimique, 86
  d'un faisceau de droites, 370
  d'un faisceau de plans, 453
  linéaire, 64
  normale d'un plan, 441
  opérations élémentaires sur les _, 68
  paramétriques d'un plan, 435
  paramétriques d'une droite, 353, 398
  réduite d'un plan, 443
  symétrique d'une droite, 354, 400
  système d'_ linéaires, 64
  vectorielle d'un plan, 432
  vectorielle d'une droite, 350, 396
Équipollents, vecteurs _, 189, 216
Espace(s) vectoriel(s)
  base d'un _, 275
  dimension d'un _, 283
  propriétés des _, 265
  sous-espace vectoriel d'un _, 270
Euclide, 394
Euler, Leonhard, 430, 489
Extrémité d'un vecteur, 185

F

Faisceau
  de droites, 369
  de plans, 452
Fermat, Pierre de, 182, 248, 348
Fonction
  économique, 519
  objectif, 519
Fontana, Niccolò (Tartaglia), 182
Force équilibrante, 199
Force résultante, 199
Forme
  binomiale d'un nombre complexe, 478
  ensembliste d'un plan, 434
  ensembliste d'une droite, 402
  exponentielle d'un nombre complexe, 490
  fonctionnelle d'une droite, 357
  trigonométrique d'un nombre complexe, 487
Formule de Héron, 328
Formule de Moivre, 495
Formules de Laplace, 122
Fourier, Joseph, 512
Français, François, 486
Français, Jacques, 486
Fresnel, Augustin, 244
Fresnel, vecteur de _, 244
Frobenius, Ferdinand Georg, 142, 248, 256
Frontière, 515

G

Galilei, Galileo (dit Galilée), 182, 300
Gauches, droites _, 405
Gauss, Carl Friedrich, 62, 72, 108, 476
Gauss, méthode de _, 72, 76
Gauss-Jordan
  matrice échelonnée réduite de _, 90
  méthode de _, 90, 93, 95
Générateurs, ensemble de _, 275
Gibbs, Josiah Willard, 298, 320, 436
Girard, Albert, 476
Grassmann, Hermann Gunther, 182, 215, 248, 264, 298

H

Hamilton, William Rowan, 31, 248, 298
Heaviside, Oliver, 298, 320
Hermann, Jacob, 430
Héron, 328
Héron, formule de _, 328
Homogène, système _ d'équations linéaires, 83

I

Idempotente, matrice _, 33
Identité de Lagrange, 325
Incidence, matrice d'_, 42
Indépendance linéaire, 256, 274
Indépendant, système homogène _, 85
Indice de nilpotence, 34
Inégalité
  de Cauchy-Schwarz, 309
  de Minkowski, 309
  du triangle, 309
Inéquation(s) linéaire(s), 516
Inverse d'une matrice
  définition de l'_, 32
  méthode de Gauss-Jordan, 95
  théorème sur l'_, 153

J

Jiuzhang, 2
Jordan, Wilhelm, 90
Joule, 314
Joule, James Prescott, 314

K

Kantorovitch, Leonid Vitalevitch, 512
Kirchhoff, Gustav, 173
Kirchhoff, lois de _, 173
Koopmans, Tjalling Charles, 512, 518
Kowa, Seki, 108
Kronecker, Leopold, 145

L

L'Hospital, Guillaume de, 2, 108
L'Huillier, Simon, 441
Lacroix, Sylvestre François, 348, 394, 430
Lagrange, identité de _, 325
Lagrange, Joseph Louis, 348, 394, 430
Laplace, formules de _, 122
Laplace, Pierre Simon de, 122
Lavoisier, Antoine Laurent, 394
Legendre, Adrien-Marie, 486
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 2, 108
Leontief, modèle de _, 164
Leontief, Wassily, 164
Ligne pivot, 536
Loi(s)
  de Chasles, 195
  de Kirchhoff, 173
  des cosinus, 183
  des sinus, 183

M

Maclaurin, Colin, 108, 348
Markov, Andreï, 45
Markov
  chaîne de _, 45
  matrice de _, 46
Matrice(s)
  addition de _, 15
  adjointe d'une _, 152
  anticommutative, 180
  antisymétrique, 11
  augmentée, 73, 75
  augmentée, opérations élémentaires sur les lignes d'une _, 74
  carrée d'ordre n, 9
  colonne, 9
  d'adjacence, 42
  d'incidence, 42
  de Markov, 46
  de migration, 44
  de permutation, 41
  de transition, 46
  de Vandermonde, 58
  de Wronski, 58
  définition d'une _, 4
  des coefficients, 40, 73, 75
  des cofacteurs, 120
  des constantes, 40, 73, 75
  des variables, 40, 73, 75
  diagonale, 10
  dimension d'une _, 5
  échelonnée, 76
  échelonnée réduite de Gauss-Jordan, 90
  égalité de _, 14
  éléments d'une _, 5
  idempotente, 33
  identité, 11
  inverse d'une _, 32, 95, 153
  inversible, 32
  ligne, 9
  multiplication d'une _ par un scalaire, 17
  multiplication de _, 23
  nilpotente, 34
  notation d'une _, 5, 6
  nulle, 8
  opposée, 19
  ordre d'une _ carrée, 9
  pivot d'une _ échelonnée, 76
  produit de deux _, 26
  propriétés de l'addition de _, 21
  propriétés de la multiplication d'une _ par un scalaire, 21
  propriétés de la multiplication de _, 31
  propriétés de la transposée d'une _, 35
  propriétés des _ inverses, 157
  rang d'une _, 143
  régulière, 155
  scalaire, 10
  singulière, 155
  somme de _, 15
  stochastique, 46, 58
  symétrique, 11
  trace d'une _, 9
  transposée, 34
  triangulaire inférieure, 10
  triangulaire supérieure, 10
Maximisation, méthode du simplexe, 530, 532, 539
Maxwell, James Clerk, 298
Méthode
  d'élimination, 68
  de Gauss, 72, 76
  de Gauss-Jordan, 90, 93, 95
  de Sarrus, 117
  de substitution, 66
  du parallélogramme, 192
  du simplexe, 530, 532, 539
  du triangle, 192
  duale, 546, 548
  graphique, 513
Migration, matrice de _, 44
Mineur d'un élément, 119
Minimisation, méthode duale, 546, 548
Minkowski, Hermann, 309
Minkowski, inégalité de _, 309
Modèle de Leontief, 164
Module
  d'un nombre complexe, 487
  d'un vecteur, 186
Moivre, Abraham de, 495
Moivre, formule de _, 495
Moment de force, 329
Monge, Gaspard, 348, 394, 430, 436
Motzkin, Theodore S., 512
Multiplication
  d'un vecteur algébrique par un scalaire, 227
  d'un vecteur géométrique par un scalaire, 205
  d'une matrice par un scalaire, 17
  de matrices, 23
  de nombres complexes, 480, 491, 492
  propriétés de la _ d'un vecteur algébrique par un scalaire, 233
  propriétés de la _ d'un vecteur géométrique par un scalaire, 207
  propriétés de la _ d'une matrice par un scalaire, 21
  propriétés de la _ de matrices, 31

N

Newton, Isaac, 512
Newton-mètre, 314
Nilpotence, indice de _, 34
Nilpotente, matrice _, 34
Nombre(s) complexe(s)
  addition de _, 480
  argument d'un _, 487
  conjugué d'un _, 482
  définition de i, 478
  différence de _, 480
  division de _, 480, 491, 492
  égalité de _, 479, 488
  forme binomiale d'un _, 478
  forme exponentielle d'un _, 490
  forme trigonométrique d'un _, 487
  formule de Moivre, 495
  module d'un _, 487
  multiplication de _, 480, 491, 492
  partie imaginaire d'un _, 478
  partie réelle d'un _, 478
  plan complexe, 478
  plan d'Argand, 478
  produit de _, 481
  propriétés d'un conjugué d'un _, 485
  quotient de _, 484
  racines n-ièmes de _, 498
  représentation graphique d'un _, 478
  résolution de systèmes d'équations avec des _, 501
  somme de _, 480
  soustraction de _, 480
Normal, vecteur _, 357, 437
Norme
  d'un vecteur algébrique, 221
  d'un vecteur géométrique, 185

O

Objectif, fonction _, 519
Optimisation
  méthode du simplexe, 530, 532, 539
  méthode duale, 546, 548
  méthode graphique, 513
Ordonnée, 214
Ordre d'une matrice carrée, 9
Origine d'un vecteur, 185
Orthogonale
  base _, 285
  projection _, 200, 310, 463
Orthonormée, base _, 285

P

Pacioli, Luca, 476
Parallèle(s)
  droite _ à un plan, 450
  droites _, 364, 404
  plans _, 446
  vecteurs algébriques _, 228
  vecteurs géométriques _, 188, 208
Parallélépipède, volume d'un _, 335
Parallélogramme
  aire d'un _, 113, 327
  méthode du _, 192
Parent, Antoine, 430
Peacock, George, 20
Peano, Giuseppe, 264
Permutation, matrice de _, 41

Pivot
  colonne _, 535
  d'une matrice échelonnée, 76
  ligne _, 536
Plan(s)
  angle formé par deux _, 449
  angle formé par une droite et un _, 452
  d'Argand, 478
  distance entre deux _ parallèles, 459
  distance entre un _ et une droite parallèle au _, 460
  distance entre un point et un _, 456
  droite d'intersection de deux _, 446
  droite parallèle à un _, 450
  équation cartésienne d'un _, 437
  équation normale d'un _, 441
  équation réduite d'un _, 443
  équation vectorielle d'un _, 432
  équations paramétriques d'un _, 435
  faisceau de _, 452
  forme ensembliste d'un _, 434
  parallèles, 446
  position relative d'une droite et d'un _, 450
  position relative de deux _, 446
  projection d'une droite sur un _, 464
  sécants, 446
Point d'équilibre, 71
Polygone
  convexe, 517
  de contraintes, 517
  représentation graphique d'un _ de contraintes, 517
Produit
  d'un vecteur algébrique par un scalaire, 227
  d'un vecteur géométrique par un scalaire, 205
  de deux matrices, 26
  de nombres complexes, 481
  mixte de vecteurs, 333
  propriétés du _ mixte de vecteurs, 334
  propriétés du _ scalaire de vecteurs, 308
  propriétés du _ vectoriel de vecteurs, 324
  scalaire de vecteurs, 300, 304
  vectoriel de vecteurs, 320, 322
Projection
  d'une droite sur un plan, 464
  orthogonale, 200, 310, 463
Propriétés
  d'un conjugué d'un nombre complexe, 485
  de l'addition de matrices, 21
  de l'addition de vecteurs algébriques, 233
  de l'addition de vecteurs géométriques, 197
  de la multiplication d'un vecteur algébrique par un scalaire, 233
  de la multiplication d'un vecteur géométrique par un scalaire, 207
  de la multiplication d'une matrice par un scalaire, 21
  de la multiplication de matrices, 31
  de la transposée d'une matrice, 35
  des espaces vectoriels, 265
  du produit mixte de vecteurs, 334
  du produit scalaire de vecteurs, 308
  du produit vectoriel de vecteurs, 324

Q

Quaternion, 248, 298

R

Racines *n*-ièmes d'un nombre complexe, 498
Rang d'une matrice, 143
Région admissible, 517
Règle
  de Cramer, 139
  de la main droite, 326
  de la vis, 326
Régression, droite de _, 359
Représentation graphique
  d'un nombre complexe, 478
  d'un point dans $\mathbb{R}^3$, 214
  d'un polygone de contraintes, 517
  d'un vecteur dans $\mathbb{R}^3$, 216
Résolution de systèmes d'équations linéaires
  matrice inverse, 159
  méthode d'élimination, 68
  méthode de Gauss, 72, 76
  méthode de Gauss-Jordan, 90, 93, 95
  méthode de substitution, 66
  règle de Cramer, 139

S

Sarrus, méthode de _, 117
Sarrus, Pierre, 117
Scalaire
  multiplication d'un vecteur algébrique par un _, 227
  multiplication d'un vecteur géométrique par un _, 205
  produit _ de vecteurs, 300, 304
  propriétés du produit _ de vecteurs, 308
Schwarz, Hermann Amandus, 309
Section conique, 147
Sens d'un vecteur géométrique, 185
Servois, François Joseph, 486
Simplexe, méthode du _, 530, 532, 539
Sinus, loi des _, 183
Solution
  admissible, 516
  d'un système d'équations linéaires, 64
  de base, 533
  ensemble _ d'un système d'inéquations linéaires, 516
  triviale, 84
Somme
  de matrices, 15
  de nombres complexes, 480
  de vecteurs algébriques, 225
  de vecteurs géométriques, 191
Sommet d'une région admissible, 517
Sous-espaces vectoriels, 270
Sous-matrice, 118
Soustraction
  de nombres complexes, 480
  de vecteurs algébriques, 227
  de vecteurs géométriques, 191
Stevin, Simon, 182
Sylvester, James Joseph, 2, 108
Système(s)
  cohérent, 65
  compatible, 65
  d'équations linéaires, 64
  d'inéquations linéaires, 516
  équivalent, 67
  homogène d'équations linéaires, 83
  incohérent, 65
  incompatible, 65
Système homogène d'équations linéaires
  dépendant, 85
  indépendant, 85

T

Tableau initial, 534
Tait, Peter Guthrie, 298, 320
Tétraèdre, volume d'un _, 336
Trace d'une matrice, 9
Transition, matrice de _, 46
Transposée
  d'une matrice, 34
  propriétés de la _ d'une matrice, 35
Travail, 314
Triangle
  aire d'un _, 113, 328
  méthode du _, 192

V

Valeur propre, 180
Vandermonde, Alexandre-Théophile, 58
Vandermonde, matrice de _, 58
Variable(s)
  d'écart, 530
  de base, 533
  de décision, 517
  hors base, 533
  libre, 78
  liée, 78
Vecteur(s)
  addition de _ algébriques, 225
  addition de _ géométriques, 191
  algébriques, 215
  angle formé par deux _, 198, 305
  angles directeurs, 306
  canoniques, 220
  colinéaires, 260
  combinaison linéaire de _, 250, 273
  composantes d'un _, 215, 282
  coplanaires, 261
  de Fresnel, 244
  différence, 193, 229
  dimension d'un _ algébrique, 215
  directeur, 351, 396, 432
  direction d'un _ géométrique, 185
  égalité de _, 189, 216
  équipollents, 189, 216
  extrémité d'un _, 185
  géométriques, 185
  linéairement dépendants, 256, 274
  linéairement indépendants, 256, 274
  module d'un _, 186
  multiplication d'un _ algébrique par un scalaire, 227
  multiplication d'un _ géométrique par un scalaire, 205
  normal, 357, 437
  norme d'un _ algébrique, 221
  norme d'un _ géométrique, 185
  nul, 187, 219
  opposés, 189
  origine d'un _, 185
  parallèles, 188, 208, 228
  produit mixte de _, 333
  produit scalaire de _, 300, 304
  produit vectoriel de _, 320, 322
  projection orthogonale d'un _, 200, 310
  propriétés de l'addition de _ algébriques, 233
  propriétés de l'addition de _ géométriques, 197
  propriétés de la multiplication d'un _ algébrique par un scalaire, 233
  propriétés de la multiplication d'un _ géométrique par un scalaire, 207
  propriétés du produit mixte de _, 334
  propriétés du produit scalaire de _, 308
  propriétés du produit vectoriel de _, 324
  sens d'un _, 185
  somme, 191, 225
  soustraction de _ algébriques, 227
  soustraction de _ géométriques, 191
  unitaire, 188, 222
Volume
  d'un parallélépipède, 335
  d'un tétraèdre, 336
Von Neumann, John, 532

W

Weyl, Hermann, 264
Wronski, Josef Hoëné, 58
Wronski, matrice de _, 58

AIDE-MÉMOIRE

Ensembles de nombres

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \text{ et } b \neq 0 \right\}$

$\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels

$\mathbb{C}$ = ensemble des nombres complexes

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Décomposition en facteurs

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$

Zéros de l'équation quadratique

$ax^2 + bx + c = 0$, si

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

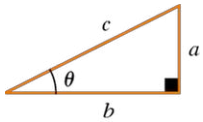
Lois des exposants

$a^m a^n = a^{m+n}$ $\qquad$ $(a^m)^n = a^{mn}$

$(ab)^m = a^m b^m$ $\qquad$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad$ $a^0 = 1$

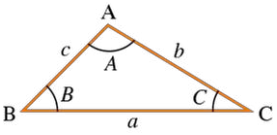
Théorème de Pythagore et trigonométrie



$a^2 + b^2 = c^2$

$$\sin\theta = \frac{a}{c} \qquad \cos\theta = \frac{b}{c} \qquad \tan\theta = \frac{a}{b}$$

Loi des cosinus et loi des sinus



Loi des cosinus

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Loi des sinus

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

Identités trigonométriques

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

Valeur absolue

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$|a + b| \leq |a| + |b|$

$|a - b| \geq |a| - |b|$

Opérations sur les matrices

Somme de deux matrices

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$[a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Produit d'une matrice par un scalaire

$$k\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

$$k[a_{ij}]_{m \times n} = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

Produit de deux matrices

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

où $c_{ij} = a_{ij}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$

Déterminant de matrices carrées

Déterminant de matrices carrées $A_{2 \times 2}$ et $A_{3 \times 3}$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Déterminant d'une matrice carrée $A_{n \times n}$, où $n \geq 2$

$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}C_{kj}$ pour un k quelconque de $\{1, 2, \dots, n\}$

Règle de Cramer (3 × 3)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \text{ où } \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

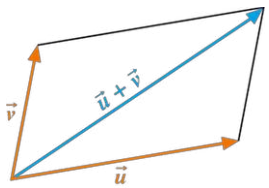
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A} \text{ et } x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\det A}$$

Inverse d'une matrice carrée

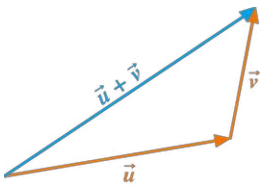
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A, \text{ si } \det A \neq 0$$

Addition de vecteurs géométriques

Méthode du parallélogramme



Méthode du triangle



Loi de Chasles : $\overrightarrow{AX_1} + \overrightarrow{X_1X_2} + \dots + \overrightarrow{X_nB} = \overrightarrow{AB}$

Vecteurs algébriques dans $\mathbb{R}^n$

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, alors

$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$

$k\vec{u} = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$

Si $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$, alors

$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

Si $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, alors

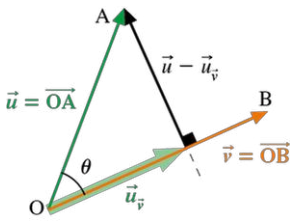
$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Si $\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3 + \dots + u_n\vec{e}_n$, alors

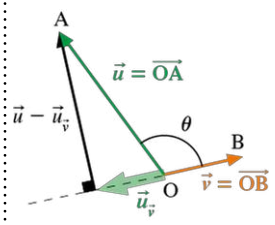
$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$

Projection orthogonale

Lorsque $0° < \theta < 90°$, $\vec{u}_{\vec{v}}$ est de même sens que $\vec{v}$.



Lorsque $90° < \theta < 180°$, $\vec{u}_{\vec{v}}$ est de sens opposé à $\vec{v}$.



Lorsque $\theta = 0°$, $\vec{u}_{\vec{v}} = \vec{u}$ et $\vec{u}_{\vec{v}}$ est de même sens que $\vec{v}$.

Lorsque $\theta = 90°$, $\vec{u}_{\vec{v}} = \vec{O}$.

Lorsque $\theta = 180°$, $\vec{u}_{\vec{v}} = \vec{u}$ et $\vec{u}_{\vec{v}}$ est de sens opposé à $\vec{v}$.

Produit scalaire de vecteurs

Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$, si $\vec{u} \neq \vec{O}$ et $\vec{v} \neq \vec{O}$,
où θ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Dans $\mathbb{R}^n$, où $n = 2, 3, 4, \ldots$:

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, alors

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$

$\theta = \text{Arc cos}\, \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

Projection orthogonale de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$

$\vec{u}_{\vec{v}} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$, si $\vec{v} \neq \vec{O}$

Produit vectoriel de vecteurs

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, alors

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Aire A du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$A = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$

Aire A du triangle engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$A = \dfrac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{2}$

Produit mixte de vecteurs

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, alors

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Volume V du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

Volume V du tétraèdre engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

$V = \dfrac{1}{6} |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

Droites dans le plan cartésien

Équations

D passe par $P(x_1, y_1)$, ayant $\vec{u} = (c, d)$ comme vecteur directeur et $\vec{n} = (a, b)$ comme vecteur normal, et $k \in \mathbb{R}$.

É.V. : $(x, y) = (x_1, y_1) + k(c, d)$

É.P. : $\begin{cases} x = x_1 + kc \\ y = y_1 + kd \end{cases}$

É.S. : $\dfrac{x - x_1}{c} = \dfrac{y - y_1}{d}$ $\quad (c \neq 0, d \neq 0)$

É.C. : $ax + by - c = 0$, où $c = ax_1 + by_1$

Distance entre un point et une droite

Soit $P(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, et $R(x, y)$, un point de D.

$$d(P, D) = \frac{|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$d(P, D) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Droites dans l'espace cartésien

Équations

D passe par $P(x_1, y_1, z_1)$, ayant $\vec{u} = (a, b, c)$ comme vecteur directeur, et $k \in \mathbb{R}$.

É.V. : $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k(a, b, c)$

É.P. : $\begin{cases} x = x_1 + ka \\ y = y_1 + kb \\ z = z_1 + kc \end{cases}$

É.S. : $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ $\quad (a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$

Distance entre un point et une droite

Soit $P(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, et $R(x, y, z)$, un point de D.

$$d(P, D) = \frac{\|\overrightarrow{PR} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Distance entre deux droites non parallèles

Soit $\vec{u_1}$, un vecteur directeur de D_1, et $\vec{u_2}$, un vecteur directeur de D_2.

$$d(D_1, D_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u_1} \times \vec{u_2})|}{\|\vec{u_1} \times \vec{u_2}\|}, \text{ où } P_1 \in D_1 \text{ et } P_2 \in D_2$$

Plans dans l'espace cartésien

Équations

π passe par $P(x_1, y_1, z_1)$, ayant $\vec{u_1} = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{u_2} = (a_2, b_2, c_2)$ comme vecteurs directeurs et $\vec{n} = (a, b, c)$ comme vecteur normal, et $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

É.V. : $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k_1(a_1, b_1, c_1) + k_2(a_2, b_2, c_2)$

É.P. : $\begin{cases} x = x_1 + k_1a_1 + k_2a_2 \\ y = y_1 + k_1b_1 + k_2b_2 \\ z = z_1 + k_1c_1 + k_2c_2 \end{cases}$

É.C. : $ax + by + cz - d = 0$, où $d = ax_1 + by_1 + cz_1$

Distance entre un point et un plan

Soit $P(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, et $R(x, y, z)$, un point de π.

$$d(P, \pi) = \frac{\left|\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$$

$$d(P, \pi) = \frac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 - d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Nombres complexes

Forme binomiale

$z = a + bi$, où a et $b \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$

Conjugué de $z = a + bi$

$\bar{z} = a - bi$

Opérations dans $\mathbb{C}$

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

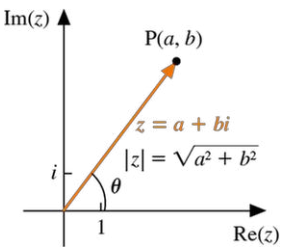
$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Forme trigonométrique et forme exponentielle

Plan d'Argand



Forme trigonométrique :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Forme exponentielle :

$z = re^{i\theta}$, où θ est en radians et $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Multiplication et division sous forme trigonométrique

Si $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, alors

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)), \text{ où } r_2 \neq 0$$

Multiplication et division sous forme exponentielle

Si $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, alors

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1 - \theta_2)}, \text{ où } r_2 \neq 0$$

Formule de Moivre

Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors

$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, où $n \in \mathbb{Z}$

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Si $w = s(\cos\theta + i\sin\theta)$, où $s \neq 0$ et $z^n = w$, alors

$$z_k = \sqrt[n]{s}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right),$$

où $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$ et $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$.

Programmation linéaire

Résolution de problèmes d'optimisation par la méthode graphique

Voir le tableau de la page 522

Résolution de problèmes de maximisation par la méthode du simplexe

Voir le tableau de la page 539

Résolution de problèmes de minimisation par la méthode duale

Cette méthode consiste à déterminer le maximum du problème dual correspondant que l'on peut résoudre avec la méthode du simplexe.

Cet ouvrage, très apprécié des utilisateurs pour la précision et la clarté de ses explications, pour son grand nombre d'exemples et d'exercices et pour sa rigueur mathématique, a été renouvelé et amélioré afin de mieux répondre aux besoins des étudiants d'aujourd'hui.

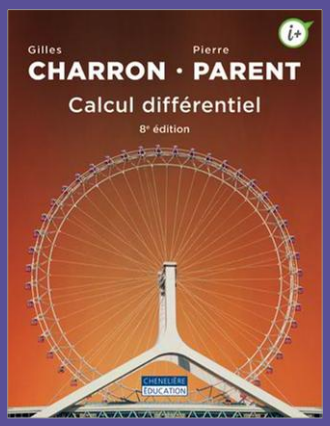
Dans les exercices et les problèmes, les auteurs ont recours à de nombreuses applications concrètes qui intègrent les acquis liés aux sciences humaines et aux sciences de la nature. De plus, la séquence d'apprentissage proposée permet à l'étudiant d'intégrer les notions de façon autonome.

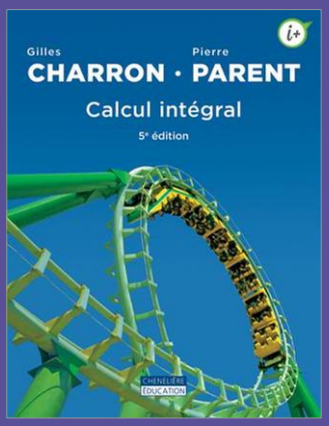
En plus de bénéficier de la puissance de la plateforme numérique i+ Interactif, les étudiants et les enseignants profitent d'une multitude de ressources pédagogiques en ligne.

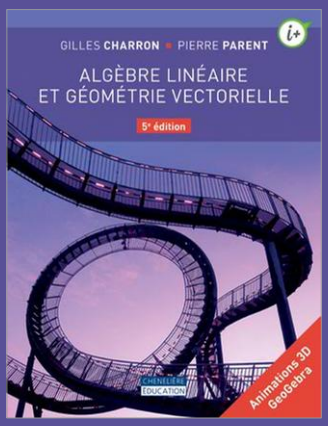
Découvrez les ressources en ligne i+ Interactif

ÉTUDIANT	ENSEIGNANT
• **Animations 3D GeoGebra pour plus de 65 exercices du manuel** • Livre numérique • Aide-mémoire contenant des notions clés abordées dans le manuel • Questions d'histoire portant sur l'algèbre linéaire et la géométrie vectorielle • Solutions Maple aux exercices à réaliser à l'aide d'un outil technologique	• Feuilles de route et plans de cours pour la planification de l'enseignement • Réponses aux questions d'histoire • Supplément portant sur les courbes de $\mathbb{R}^2$ et les surfaces de $\mathbb{R}^3$ • Solutionnaires complets des exercices récapitulatifs, des problèmes de synthèse et des problèmes intégrateurs • Réponses courtes aux exercices récapitulatifs et aux problèmes de synthèse • Exercices supplémentaires avec leurs solutions • Tableaux et figures du manuel

La collection complète !







CHENELIÈRE ÉDUCATION

www.cheneliere.ca/charron-parent

ISBN 978-2-7650-5348-4