

BAC 2009

Mathématiques **ES**

Obligatoire et Spécialité

Annales



Sujets

- Tous les sujets du **bac 2008**
- **130 exercices** de bac supplémentaires
- Tout le **programme officiel** couvert

4,95€
SEULEMENT

Mathématiques ES

Obligatoire et Spécialité

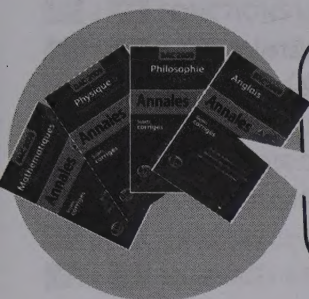
Ce livre est donné par



**Bibliothèques
Sans Frontières**
Libraries Without Borders

■ **Marie-Dominique Danion**
Professeure en Terminale

PRÉSENTATION



Ces *Annales ABC BAC* ont été conçues pour vous aider à préparer efficacement l'épreuve de Mathématiques du baccalauréat ES. Elles vous permettent de vous entraîner sur les tout derniers sujets posés au bac, et contiennent aussi beaucoup d'informations utiles pour bien aborder l'épreuve.

13 SUJETS COMPLETS DE BAC

- La première partie de cet ouvrage regroupe les sujets de la série ES (obligatoire et spécialité) posés entre septembre 2007 et juin 2008 en France métropolitaine, dans les DOM-TOM et les centres étrangers.
- La sélection de sujets proposée couvre l'ensemble du programme de terminale ES.

122 EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES, CLASSÉS PAR THÈMES

- La seconde partie de l'ouvrage regroupe une sélection d'exercices et de problèmes de bac des années antérieures.
- Ils ont parfois été modifiés pour être conformes au programme et sont classés par thèmes, pour permettre un entraînement efficace tout au long de l'année.

LE DOSSIER « INFO-BAC »

Ce dossier rassemble des conseils pratiques pour bien aborder l'écrit et préparer l'oral de rattrapage.

DES COMPLÉMENTS UTILES

- Au début de chaque sujet complet, un récapitulatif précise les notions abordées dans les différents exercices.
- Un barème indicatif de correction et le temps imparti pour chaque exercice sont précisés à droite du texte. Ils vous aideront à évaluer votre travail.
- Enfin, le tableau thématique des sujets de bac (p. 6) vous permet de retrouver rapidement un exercice sur un thème donné du programme.

S O M M A I R E

Ce symbole indique que le sujet n° X est corrigé dans les annales ABC BAC 2009 Mathématiques ES (Obligatoire et spécialité) n° 4.

TABLEAU THÉMATIQUE	6
---------------------------------	----------

INFOS-BAC

L'épreuve écrite	8
L'oral de rattrapage	14

SUJETS DE BAC

1	France métropolitaine, juin 2008	18
2	Amérique du Nord, juin 2008	25
3	Antilles-Guyane, juin 2008	33
4	Asie, juin 2008	39
5	Centres étrangers, juin 2008	45
6	Liban, juin 2008	52
7	Polynésie, juin 2008	58
8	La Réunion, juin 2008	65
9	Inde, avril 2008	71
10	France métropolitaine, septembre 2007	78
11	Amérique du Sud, novembre 2007	85
12	Antilles-Guyane, septembre 2007	94
13	Nouvelle-Calédonie, novembre 2007	100

EXERCICES CLASSÉS PAR THÈMES

1 à 5	STATISTIQUES	108
6 à 28	PROBABILITÉS	115
29 à 32	FONCTIONS RATIONNELLES – LECTURES GRAPHIQUES ..	139

33 à 44	FONCTIONS LOGARITHME ET EXPONENTIELLE	143
45 à 55	CALCUL INTÉGRAL – CALCUL D’AIRE	155
56 à 75	PROBLÈMES ÉCONOMIQUES ET SOCIAUX	169
76 à 83	FONCTIONS DE DEUX VARIABLES (spécialité)	196
84 à 87	GÉOMÉTRIE DANS L’ESPACE (spécialité)	208
88 à 99	SUITES NUMÉRIQUES (spécialité)	212
100 à 112	GRAPHES (spécialité)	223
113 à 122	EXERCICES ET PROBLÈMES DE SYNTHÈSE	238

Couverture : Team Créatif

Coordination éditoriale : Adélaïde Giroux Leprieur

Fabrication : Jacques Lannoy, Adeline Lannoy

Rédaction : avec la collaboration de Régine Delay.

TABLEAU THÉMATIQUE

THÈMES		Numéro du sujet et nature
ANALYSE	Suites	9 E ₂ spé ; 5 E ₃ spé ; 8 E ₂ spé
	Lectures graphiques	1 E ₁ ; 4 E ₄ ; 6 E ₁ ; 7 E ₁ ; 8 E ₄ ; 9 E ₄ ; 11 E ₄
	Fonction exponentielle	2 E ₄ ; 3 E ₄ ; 6 E ₃ ; 9 E ₄ ; 10 E ₃ ; 13 E ₄
	Fonction logarithme	1 E ₂ ; 2 E ₁ ; 5 E ₄ ; 6 E ₁ ; 7 E ₄ ; 8 E ₄ ; 11 E ₄ ; 12 E ₁
	Application à l'économie	4 E ₄ ; 6 E ₃ ; 10 E ₃
	Pourcentages	4 E ₁ ; 5 E ₁ ; 5 E ₃
	Calcul d'aire Calcul intégral	1 E ₁ ; 3 E ₄ ; 5 E ₄ ; 6 E ₁ ; 6 E ₃ ; 7 E ₄ ; 8 E ₁ ; 9 E ₄ ; 10 E ₃ ; 11 E ₄ ; 13 E ₄
PROBABILITÉ	QCM	1 E ₁ ; 2 E ₁ ; 3 E ₁ ; 5 E ₃ ; 7 E ₁ ; 8 E ₁ ; 9 E ₁ ; 10 E ₁ ; 11 E ₁ ; 12 E ₁ ; 13 E ₁
		1 E ₂ ; 2 E ₂ spé ; 3 E ₂ ; 4 E ₁ ; 5 E ₂ ; 5 E ₃ ; 6 E ₂ ; 7 E ₂ ; 8 E ₃ ; 9 E ₂ ; 9 E ₁ ; 10 E ₄ ; 11 E ₂ ; 12 E ₄ ; 13 E ₃
AJUSTEMENT D'UN NUAGE DE POINTS		1 E ₃ ; 2 E ₃ ; 3 E ₃ ; 4 E ₃ ; 5 E ₁ ; 6 E ₄ ; 7 E ₃ ; 8 E ₂ ; 9 E ₃ ; 10 E ₂ ; 11 E ₃ ; 12 E ₂ ; 13 E ₂
GRAPHES		1 E ₂ spé ; 3 E ₂ spé ; 7 E ₂ spé ; 8 E ₂ spé ; 9 E ₂ spé ; 10 E ₂ spé ; 13 E ₂ spé ;
SECTIONS PLANES DE SURFACE		4 E ₃ ; 6 E ₂ spé ; 11 E ₂ spé ; 12 E ₃

1 signifie : sujet n° 1 ; E signifie : exercice ; E₁ : exercice 1.

Infos-bac

L'ÉPREUVE ÉCRITE

I. DÉFINITION DE L'ÉPREUVE

Il est important de lire et de relire le document ci-dessous (bulletin officiel du 8 mai 2003) qui est donné aux concepteurs de sujets.

■ Épreuve écrite

Durée : 3 heures.

Coefficient : 5.

Coefficient : 7 pour les candidats ayant choisi cette discipline comme enseignement de spécialité.

■ Objectifs de l'épreuve

L'épreuve est destinée à évaluer la façon dont les candidats ont atteint les grands objectifs de formation mathématique visés par le programme de la série ES :

- acquérir des connaissances et les organiser ;
- maîtriser la lecture et le traitement de l'information (graphique, algébrique, numérique) ;
- savoir lier dans une même démarche observation, imagination, questionnement, synthèse, logique, argumentation et démonstration mathématique.

■ Nature du sujet

Le sujet comporte trois ou quatre exercices indépendants les uns des autres, notés chacun sur 3 à 10 points ; ils abordent une grande variété de domaines du programme de mathématiques de la série ES.

Le sujet proposé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité diffère de celui proposé aux candidats ne l'ayant pas suivi par un de ces exercices. Cet exercice peut porter sur la totalité du programme (enseignement obligatoire et spécialité). Le sujet portera clairement la mention « obligatoire » ou « spécialité ».

■ Calculatrices et formulaires

- La maîtrise de l'usage des calculatrices est un objectif important pour la formation des élèves. L'emploi de ce matériel est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur. Il est ainsi précisé qu'il **appartient aux responsables de l'élaboration des sujets de décider si l'usage des calculatrices est autorisé ou non lors de l'épreuve.** Ce point doit être précisé en tête des sujets.
- Il n'est pas prévu de formulaire officiel. En revanche, **les concepteurs de sujets pourront inclure certaines formules dans le corps du sujet ou en annexe,** en fonction de la nature des questions.

■ Recommandations destinées aux concepteurs de sujets

1. On veillera à garder aux épreuves une ampleur et une difficulté modérées.
2. **Le sujet doit aborder une grande partie des connaissances envisagées dans le programme.** La restitution organisée de connaissances (comme l'exposé d'une question citée en exemple dans le programme), l'application directe de résultats ou de méthodes, l'étude d'une situation conduisant à choisir un modèle simple, à présenter ou exploiter des données ou une information, la formulation d'un raisonnement sont des trames possibles.
3. Si le candidat est amené à utiliser une calculatrice, il lui sera demandé de situer ce qui apparaît à l'affichage dans le contexte de la question posée et de rédiger une réponse distincte de la simple copie d'écran.
4. Les sujets éviteront de valoriser certaines questions (telles la représentation graphique d'une fonction, la recherche formelle d'une primitive, la recherche de la droite des moindres carrés, etc.) dont la résolution peut n'exiger que la manipulation des touches d'une calculatrice évoluée.
5. **Les notions rencontrées en classe de première mais non approfondies en terminale doivent être connues et mobilisables.** Elles ne peuvent cependant constituer un ressort essentiel du sujet.
6. Certains exercices peuvent faire référence à d'autres disciplines de la série considérée, mais les connaissances spécifiques requises doivent être fournies dans l'énoncé.
7. La forme des questions ne doit pas être source de difficultés supplémentaires. Si des questionnaires à choix multiple (QCM) sont proposés, les modalités de notation doivent en être précisées.

■ Remarques sur la notation

1. Les correcteurs ne manifesteront pas d'exigences de formulation démesurées, et prêteront une attention particulière aux démarches engagées, aux tentatives pertinentes, aux résultats partiels.
2. Les concepteurs de sujets veilleront, dans l'attendu des questions et les propositions de barème, à permettre aux correcteurs de **prendre réellement et largement en compte la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, la cohérence globale des réponses** dans l'appréciation des copies. Les copies satisfaisantes de ce point de vue devront être valorisées.
3. On saura apprécier **le recours à des tableaux et graphiques pour soutenir une argumentation ou présenter des résultats**, dès lors qu'un commentaire en précisera clairement la signification.

II. QUELQUES COMMENTAIRES SUR LE DOCUMENT OFFICIEL

Les lignes suivantes doivent orienter votre travail quotidien. Appliquez ces remarques lors des travaux écrits en classe ou à la maison. Reprenons certains points du document officiel.

- Dans le paragraphe « objectifs de l'épreuve », il est dit que **vous devez savoir « argumenter et démontrer »**, cela signifie que par exemple lors de l'utilisation d'un théorème, il faudra vérifier si les hypothèses présentes dans le théorème se retrouvent dans le cadre de la question. Par exemple on peut vous demander de chercher la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé : connaître la relation qui permet de calculer $p_A(B)$ est indispensable, mais savoir que cette relation ne peut être utilisée que si $p(A) \neq 0$ est tout aussi indispensable, car c'est cela une démarche scientifique. Il faudra donc, dans votre réponse, commencer par calculer $p(A)$ et dire que puisque $p(A) \neq 0$, on peut calculer $p_A(B)$.
- **Les calculatrices sont autorisées sauf mention en tête du sujet qui peut interdire leur usage. Le travail de mémorisation des principales formules du programme est indispensable** (formules de dérivation, de calculs de primitives, de probabilités, sur les suites...). En conséquence tout au long de l'année lorsque vous cherchez des exercices ne gardez jamais à côté de vous formulaires, fiches, manuels. La démarche d'aller chercher une formule vous alerte sur votre connaissance du cours, prenez alors le temps de réapprendre les formules, refermez le cahier ou le livre et reprenez la recherche de vos exercices. Si vous travaillez avec des « pense-bêtes » à côté de vous, vous n'aurez pas ces alertes et vous pourrez croire que vous savez votre cours. Un QCM peut être proposé au titre d'un exercice. Il n'y a pas de règles pour traiter un QCM, cela dépend largement de la notation proposée, en général « répondre au hasard » est plus défavorable que de ne rien répondre car les réponses fausses sont pénalisées.
- Le programme de la classe de première fait partie du programme du baccalauréat, **revoyez les notions de première que votre professeur n'a pas revues en terminale**. Il est précisé dans le paragraphe sur la notation, que les tentatives pertinentes seront valorisées, donc n'hésitez pas à inscrire une démarche même si celle-ci n'a pas abouti, mais bien sûr n'essayez pas de faire croire au correcteur que vous avez fait la démonstration.

III. CONSEILS PRATIQUES

1. La veille de l'épreuve

• **Préparez votre convocation et une pièce d'identité** (attention ! tout document avec votre photo n'est pas une pièce d'identité : carte d'identité, permis de séjour, carte de résident, passeport, permis de conduire). Si par hasard vous aviez perdu votre pièce d'identité ne manquez pas de faire votre déclaration de perte au commissariat qui vous délivrera un document que vous présenterez avec la convocation.

Si vous n'avez pas reçu votre convocation une semaine avant l'épreuve, faites une démarche auprès de votre établissement.

• N'oubliez pas :

– Votre stylo et des cartouches compatibles avec celui-ci. N'hésitez pas à avoir plusieurs instruments d'écriture, le stylo bille rouge étant interdit bien sûr. Si vous écrivez en bleu encadrez en noir et réciproquement.

– Une règle suffisamment longue (30 cm), un compas (contrôlez-le en faisant un cercle quelques jours avant, la veille à 10 h du soir il sera peut-être difficile d'en trouver un), une gomme.

– Une calculatrice avec des piles neuves. Vous n'avez pas le droit d'avoir deux calculatrices en même temps sur votre table, mais si vous en avez deux vous pouvez demander au surveillant de prendre celle qui est restée dans votre cartable. **Ne faites rien sans demander l'autorisation au surveillant de la salle.** Ne prenez que des calculatrices que vous maîtrisez, cela ne sert à rien d'emprunter une calculatrice performante mais que l'on ne maîtrise pas.

2. Le jour J

Après être entré dans la salle, le surveillant vous demandera de garder sur votre table, le strict nécessaire, tout le reste sera déposé le long du mur. Ce strict nécessaire comporte les outils d'écriture, les outils de dessin, une gomme, une calculatrice, votre convocation et une pièce d'identité.

Le sujet est distribué :

■ Lisez le texte *en entier*.

■ Relevez les points attribués aux différents exercices, déterminez alors le temps à passer sur chaque exercice. Votre épreuve dure 3 heures, laissez vous 30 minutes en fin d'épreuve, cela veut dire que vous disposez de 150 min pour acquérir 20 points.

Un exercice en 3 points devra donc être effectué en $\frac{150 \times 3}{20} = 20$ min environ.

Un exercice à 4 points devra donc être effectué en $\frac{150 \times 4}{20} = 30$ min environ.

Un exercice à 5 points devra donc être effectué en $\frac{150 \times 5}{20} = 40$ min environ.

Un exercice en 6 points devra donc être effectué en $\frac{150 \times 6}{20} = 45$ min environ.

Notez ces chiffres à côté des exercices.

■ Intervient maintenant un moment très important, choisir le premier exercice à chercher. Le mieux est de choisir un exercice que l'on sait savoir traiter parce que l'on a déjà réussi un exercice similaire. Réussir le premier exercice rapidement met en confiance et donne des forces pour les questions plus difficiles.

■ Ce premier exercice étant choisi :

- notez sur votre brouillon l'heure du début de votre recherche et le temps dont vous disposez pour cet exercice, notez l'heure finale ;
- relisez complètement de nouveau l'exercice pour bien le mémoriser, car lorsque vous chercherez une question, il se trouve parfois des indications dans les questions suivantes ;
- commencez votre recherche au brouillon, recopiez régulièrement au propre en *refaisant* les calculs surtout si vous ne trouvez pas un résultat donné dans le texte. En recopiant, et en détaillant bien votre démarche, vous allez trouver votre erreur. N'oubliez pas que la rigueur de votre raisonnement est la garantie que votre démarche vous mène au « succès » ;
- **respectez la numérotation des questions et faites-la apparaître très clairement, séparez les questions par deux lignes blanches, encadrez les résultats**, et si vous ne traitez pas une question, mettez le numéro et laissez deux lignes blanches. Toutes ces règles faciliteront le travail du correcteur qui ne peut que vous en être reconnaissant ;
- faut-il le répéter, il ne sert à rien de vouloir faire croire au correcteur que vous avez démontré une question en recopiant la réponse qui est dans l'énoncé, la malhonnêteté peut vous coûter très cher ;
- **n'oubliez pas de tracer les traits dans les tableaux de variation**, la première ligne du tableau comporte les valeurs qui interviennent réellement, répartissez les différentes valeurs de manière équidistante, il est donc nécessaire d'en avoir fait la liste au préalable, respectez le code classique d'une double barre si la fonction n'est pas définie au point considéré ;
- si vous « butez » sur une question, n'y passez pas trop de temps, admettez le résultat et cherchez les questions suivantes ;
- contrôlez le temps qui vous reste et si vous dépassez le temps imparti, prenez un nouvel intercalaire pour un nouvel exercice, le correcteur peut apprécier de ne pas avoir plusieurs exercices sur une même copie.

■ Relecture :

Prenez le dernier quart d'heure pour relire votre copie, encadrer les résultats que vous auriez oubliés, corriger les fautes d'orthographe, contrôler la numérotation des questions et numérotez vos pages et comptez les annexes à rendre.

3. Quelques remarques sur un énoncé de mathématiques

Un énoncé d'un exercice d'une épreuve de mathématiques au baccalauréat a été conçu par un professeur qui voulait vérifier si une démarche du programme a été comprise des candidats. Essayez de comprendre cette démarche. Le choix de numéroter trois questions successives **1. 2. 3.** ou **1.a. 1.b. 2.** ou **1.a. 1.b. 1.c.** indique trois démarches différentes, lorsque plusieurs questions sont à l'intérieur d'une même question cela indique la plupart du temps que l'on est dans une même démarche, au contraire changer de question par exemple **1.b. 2.** indique que l'on va tester un nouveau point de vue. Faites l'expérience tout au long de l'année **d'essayer de découvrir « la pensée de l'auteur »**.

Si le concepteur a écrit « en déduire » ne cherchez pas ailleurs que dans la question précédente.

4. Quelques remarques sur la rédaction

■ Le fond

- **Énoncez complètement les théorèmes avant leur utilisation.** Contrôlez que les hypothèses du théorème sont bien vérifiées dans le cadre de la question. N'oubliez pas que l'un des mots les plus difficiles à employer dans une copie est « donc ».
- Si votre calculatrice calcule une dérivée demandée, ne tentez pas de faire croire au correcteur que vous avez trouvé le résultat sans faire de calculs intermédiaires, il ne sera pas dupe.
- **Attention, votre calculatrice peut vous induire en erreur,** la précision des écrans n'est pas toujours suffisante, les calculs ne sont pas toujours bien simplifiés.

■ La forme

- Est-il besoin de rappeler qu'**une écriture lisible est indispensable**, attention aux lettres qui, mal formées, peuvent se confondre, par exemple x et n , un Z et un 2 , un z et un 3 . Apprenez à bien dessiner des accolades, le symbole $\int$, le symbole ∞ , les quelques lettres grecques courantes : α , β , γ , δ , ρ , σ , Δ . Attention aux indices et aux exposants, veillez à bien les placer. Respectez les notations du texte même si ce ne sont pas celles que vous utilisez habituellement.
- **N'utilisez pas les symboles de mathématiques comme une abréviation au milieu d'une phrase.**
- **Tout calcul doit être suivi d'une conclusion sous forme d'une phrase**, une copie de mathématiques n'est pas qu'une suite de calculs.

L'ORAL DE RATTRAPAGE

Vous avez entre 8 et 10 de moyenne : les oraux de rattrapage sont pour vous. Pas de panique : s'ils vous ont offert cette chance – car c'en est une – c'est avant tout parce que les examinateurs estiment que vous n'aurez pas besoin d'une année supplémentaire pour décrocher votre diplôme... Le tout est d'adopter la bonne stratégie.

Quelles matières choisir ? Vous ne pourrez en rattraper que deux. Autant bien les choisir pour gagner un maximum de points ! Repasser la matière dans laquelle vous excellez n'est pas un bon calcul. Au contraire, choisissez les matières qui ont le plus fort coefficient, et dans lesquelles vous avez obtenu de mauvaises notes. En partant de 5/20 en mathématiques, par exemple, vous pouvez rattraper pas mal de points...

Comment se préparer à l'oral ? Dès la sortie de l'épreuve écrite, vous devez savoir si vous avez réussi ou non. N'attendez pas votre relevé de notes pour commencer à relire votre cours : il ne s'écoule que deux à dix jours entre la réception des résultats et les épreuves orales...

I. DÉFINITION DE L'ÉPREUVE

Voici ce qu'indiquent les textes officiels :

1. Épreuve orale de contrôle

Durée : 20 minutes.

Temps de préparation : 20 minutes.

Coefficient : 5 ou 7 pour les candidats ayant choisi cette discipline comme enseignement de spécialité.

- L'épreuve consiste en une interrogation du candidat, visant à apprécier sa maîtrise des connaissances de base.
- Pour préparer l'entretien, **l'examineur propose au moins deux questions** au candidat, portant sur des parties différentes du programme.
- Pour les candidats n'ayant pas choisi les mathématiques comme enseignement de spécialité, les questions aborderont exclusivement le programme de l'enseignement obligatoire.

- **Pour les candidats ayant choisi les mathématiques comme enseignement de spécialité, une question abordera le programme de spécialité**, les autres abordant exclusivement le programme de l'enseignement obligatoire.
- Le candidat dispose d'un temps de préparation de vingt minutes et peut, au cours de l'entretien, s'appuyer sur les notes prises pendant la préparation.
- L'examineur veillera à faciliter l'expression du candidat et à lui permettre de mettre en avant ses connaissances.
- Les conditions matérielles (en particulier la présence d'un tableau), les énoncés des questions posées, seront adaptés aux modalités orales de cette épreuve.
- **L'usage des calculatrices électroniques est autorisé**, dans le cadre de la réglementation en vigueur. L'examineur pourra fournir avec les questions certaines formules jugées nécessaires.

2. Remarque

À l'oral de contrôle, les candidats ayant choisi mathématiques en enseignement de spécialité auront une question portant sur cette partie du programme, il est donc très important pendant la période qui précède les résultats de revoir autant le programme obligatoire que celui de spécialité. **Préparez cette épreuve pendant l'année en passant au tableau lorsque votre professeur vous en donne l'opportunité.**

II. CONSEILS PRATIQUES

- **Vous tirerez un sujet au hasard**, ne croyez pas que passer en premier vous donne plus de chance de ne pas tomber sur le sujet qui vous dérange, la probabilité est la même pour le dernier à qui il ne reste qu'un seul sujet (cela pourrait être votre sujet de probabilité).
- Vous aurez un temps de préparation, ne traitez pas un exercice complètement comme si c'était un écrit en ne cherchant pas l'autre question. **Vous devez aborder les deux exercices, faites les calculs qui vous semblent difficiles.**
- **Les sujets sont souvent des extraits d'exercices de baccalauréat des années antérieures.**
- Lorsque vous serez devant votre interrogateur, il vous demandera peut-être d'exposer au tableau, **PARLEZ, ce n'est pas un écrit, parlez distinctement et soyez poli**, si l'on vous demande de répéter ce que vous venez de dire, faites-le.

Sujets de bac

1

FRANCE MÉTROPOLITAINE
Juin 2008**Exercice 1****[6 points ; 45 min]**

- QCM
- Lectures graphiques

Exercice 2 (obligatoire)**[5 points ; 40 min]**

- Construction d'un arbre
- Schéma de Bernoulli

Exercice 2 (spécialité)**[5 points ; 40 min]**

- Graphe
- Matrice de transition
- Suite d'états
- État probabiliste stable

Exercice 3**[9 points ; 1 h 10 min]**

- Statistiques
- Ajustement affine
- Ajustement exponentiel
- Fonction exponentielle
- Inéquations
- Applications à l'économie

EXERCICE 1

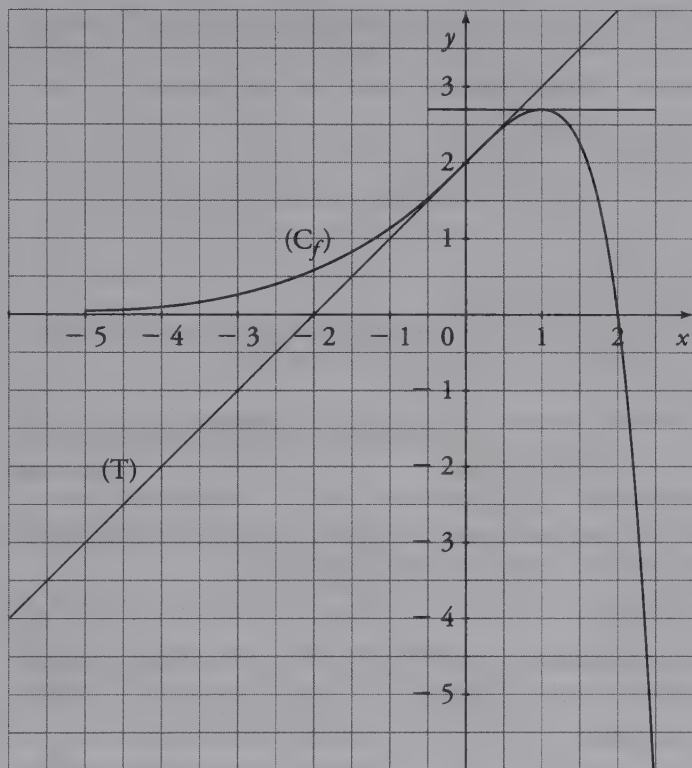
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées. Une seule de ces réponses est exacte.

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-5 ; \frac{5}{2}\right]$.

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

- La courbe (C_f) représentée page suivante est celle de la fonction f .
- Les points $A(0 ; 2)$, $B(1 ; e)$ et $C(2 ; 0)$ appartiennent à la courbe (C_f) .
- Le point de la courbe (C_f) d'abscisse (-5) a une ordonnée strictement positive.

- La tangente (T) en A à la courbe (C_f) passe par le point $D(-2; 0)$.
- La tangente en B à la courbe (C_f) est parallèle à l'axe des abscisses.



Partie A

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse fausse enlève 0,25 point. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points de la partie A est négatif, la note attribuée à cette partie est ramenée à zéro.

1. On note $f'(0)$ le nombre dérivé de la fonction f en 0. Quelle est sa valeur ?

- a. $f'(0) = 1$ b. $f'(0) = 2$ c. $f'(0) = 0$

On note $\ln$ la fonction logarithme népérien et g la fonction composée $\ln(f)$.

2. Quel est l'ensemble de définition de la fonction g , noté D_g ?

- a. $]0; \frac{5}{2}[$ b. $[-5; 2]$ c. $[-5; 2[$

3. Quelle est la valeur de $g(0)$?

a. $g(0) = 2$

b. $g(0) = 0$

c. $g(0) = \ln(2)$

4. On note g' la fonction dérivée de la fonction g . Quelle est la valeur de $g'(1)$?

a. $g'(1) = e$

b. $g'(1) = 0$

c. $g'(1) = -\frac{1}{e^2}$

5. Quelle est la limite de $g(x)$ quand x tend vers 2 ?

a. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\infty$

b. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$

c. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = +\infty$

Partie B

Chaque réponse doit être justifiée.

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

1. À quel intervalle appartient le réel $I = \int_0^2 f(x) dx$?

a. $[0 ; 3]$

b. $[3 ; 6]$

c. $[6 ; 9]$

[1,25 pt]

2. Parmi les trois courbes ci-après, l'une est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de la fonction f . Laquelle ?

a. La courbe (C_1)

b. La courbe (C_2)

c. La courbe (C_3) [1,25 pt]

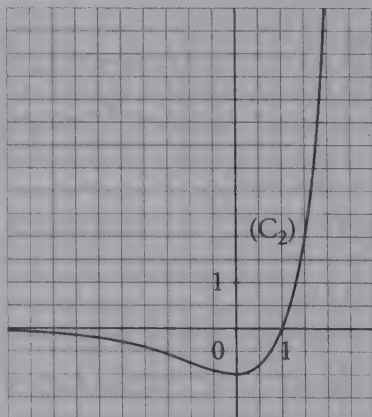
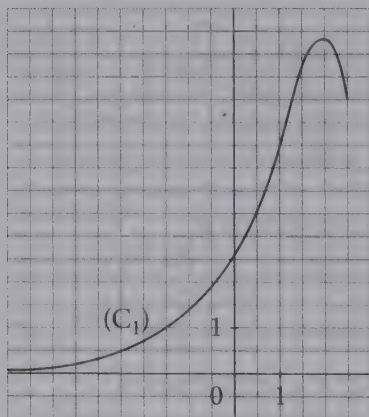
3. Parmi les trois courbes ci-après, l'une est la représentation graphique d'une primitive F de la fonction f , F étant définie sur l'intervalle $\left[-5 ; \frac{5}{2}\right]$. Laquelle ?

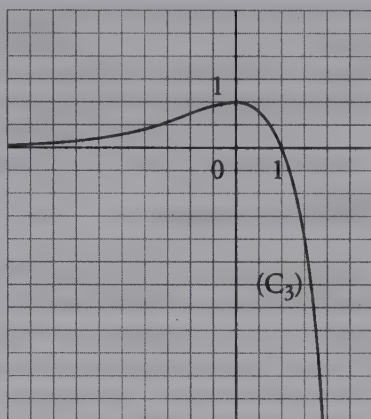
a. La courbe (C_1)

b. La courbe (C_2)

c. La courbe (C_3)

[1 pt]





EXERCICE 2 (Obligatoire)

Le parc informatique d'un lycée est composé de 200 ordinateurs dont :

- 30 sont considérés comme neufs ;
- 90 sont considérés comme récents ;
- les autres sont considérés comme anciens.

Une étude statistique indique que :

- 5 % des ordinateurs neufs sont défectueux ;
- 10 % des ordinateurs récents sont défectueux ;
- 20 % des ordinateurs anciens sont défectueux.

On choisit au hasard un ordinateur de ce parc.

On note les événements suivants :

- N : « l'ordinateur est neuf » ;
- R : « l'ordinateur est récent » ;
- A : « l'ordinateur est ancien » ;
- D : « l'ordinateur est défectueux » ;
- $\bar{D}$: l'événement contraire de D.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation. [1 pt]
2. Calculer la probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défectueux. [1 pt]
3. Démontrer que la probabilité que l'ordinateur choisi soit défectueux est égale à 0,132 5. [1 pt]
4. Déterminer la probabilité que l'ordinateur soit ancien sachant qu'il est défectueux. Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième. [1 pt]
5. Pour équiper le centre de ressources de l'établissement, on choisit au hasard 3 ordinateurs dans le parc. On admet que le parc est suffisamment

important pour qu'on puisse assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise.

Déterminer la probabilité qu'exactement un des ordinateurs choisis soit défaillant. Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième. **[1 pt]**

EXERCICE 2 (Spécialité)

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale.

Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité. L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires. Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.

Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale.

Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10 % des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.

La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.

Pour tout entier naturel n , l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \ b_n)$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine n .

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial. **[0,5 pt]**
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, A pour Aurore et B pour Boréale. **[0,5 pt]**
3. a. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets. **[0,75 pt]**
- b. Montrer que la matrice ligne P_1 est égale à $(0,3 \ 0,7)$. **[0,5 pt]**
4. a. Exprimer, pour tout entier naturel n , P_n en fonction de P_0 et de n . **[0,75 pt]**
- b. En déduire la matrice ligne P_3 . Interpréter ce résultat. **[0,5 pt]**

Dans la question suivante, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

5. Soit $P = (a \ b)$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.
 - a. Déterminer a et b . **[0,75 pt]**
 - b. Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ? Justifier. **[0,75 pt]**

EXERCICE 3

On se propose d'étudier l'évolution des ventes d'un modèle de voiture de gamme moyenne depuis sa création en 1999.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

Le tableau suivant donne le nombre annuel, exprimé en milliers, de véhicules vendus les cinq premières années de commercialisation :

Année	1999	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : y_i	81,3	92,3	109,7	128,5	131,2

1. Dans le plan (P) muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 milliers de véhicules vendus sur l'axe des ordonnées, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ pour i entier variant de 0 à 4. **[0,5 pt]**

2. L'allure du nuage de points permet d'envisager un ajustement affine.

a. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. **[0,5 pt]**

b. Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite (D) d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. **[0,5 pt]**

c. Placer le point G et tracer la droite (D) sur le graphique précédent. **[0,75 pt]**

d. En utilisant l'ajustement affine du b., donner une estimation du nombre de véhicules vendus en 2007. **[0,5 pt]**

3. Le tableau suivant donne le nombre annuel de véhicules vendus, exprimé en milliers, de 2003 à 2007 :

Année	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année : x_i	4	5	6	7	8
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : y_i	131,2	110,8	101,4	86,3	76,1

- a. Compléter le nuage de points précédent à l'aide de ces valeurs. **[0,5 pt]**
- b. L'ajustement précédent est-il encore adapté ? Justifier la réponse. **[1 pt]**
- c. On décide d'ajuster le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$, pour i entier variant de 4 à 8, par une courbe qui admet une équation de la forme $y = e^{cx+d}$.
Déterminer les réels c et d pour que cette courbe passe par les points A(4 ; 131,2) et B(8 ; 76,1).
On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au millième de chacun de ces nombres réels. **[1 pt]**

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[4; 10]$ par :

$$f(x) = e^{-0,136x + 5,421}.$$

On suppose que f modélise en milliers l'évolution du nombre annuel de véhicules vendus à partir de l'année 2003.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[4; 10]$. **[1 pt]**
 2. Tracer la courbe (C) représentative de la fonction f dans le même repère que le nuage de points. **[1 pt]**
 3. L'entreprise décide d'arrêter la fabrication du modèle l'année où le nombre annuel de véhicules vendus devient inférieur à 65 000.
- a. Résoudre algébriquement dans l'intervalle $[4; 10]$ l'inéquation :

$$f(x) \leq 65.$$

En quelle année l'entreprise doit-elle prévoir cet arrêt ?

[1 pt]

- b. Retrouver graphiquement le résultat précédent en laissant apparents les traits de construction nécessaires. **[0,75 pt]**

2

AMÉRIQUE DU NORD

Juin 2008

Exercice 1**[4 points ; 30 min]**

- QCM
- Fonction
- Fonction logarithme népérien

Exercice 2 (obligatoire)**[5 points ; 40 min]**

- Probabilités
- Arbre pondéré
- Loi de probabilité
- Espérance d'une loi de probabilité

Exercice 2 (spécialité)**[5 points ; 40 min]**

- Probabilité
- Graphe probabiliste
- Matrice de transition

Exercice 3**[5 points ; 40 min]**

- Statistiques
- Ajustement affine

Exercice 4**[6 points ; 45 min]**

- Pourcentages
- Fonction exponentielle

EXERCICE 1

f est une fonction définie sur $] -2 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3 + \frac{1}{x+2}.$$

On note f' sa fonction dérivée et $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Aucune justification n'est demandée.

Barème : Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse enlève 0,25 point. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est ramenée à 0.

1. $f(x) = \frac{3x+6}{x+2}$.	☐ VRAI	☐ FAUX
2. La courbe ($\mathcal{C}$) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3,5.	☐ VRAI	☐ FAUX
3. $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = 3$	☐ VRAI	☐ FAUX
4. $\int_0^2 f(x) \, dx = 6 + \ln 2$.	☐ VRAI	☐ FAUX
5. La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à ($\mathcal{C}$).	☐ VRAI	☐ FAUX
6. $f(x) > 3$ pour tout x de $] -2 ; +\infty[$.	☐ VRAI	☐ FAUX
7. $f'(-1) = -1$.	☐ VRAI	☐ FAUX
8. La fonction g définie sur $] -2 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln [f(x)]$ est décroissante.	☐ VRAI	☐ FAUX

EXERCICE 2

(Obligatoire)

Pour faire connaître l'ouverture d'un nouveau magasin vendant des salons, le directeur fait distribuer des bons publicitaires permettant de recevoir un cadeau gratuit sans obligation d'achat.

Une enquête statistique préalable a montré que, parmi les personnes qui entrent dans le magasin :

- 90 % entrent dans le magasin avec ce bon publicitaire. Parmi elles, 10 % achètent un salon.
- Parmi les personnes qui entrent sans bon publicitaire, 80 % achètent un salon.

Une personne entre dans le magasin. On note :

B l'événement « la personne a un bon publicitaire ».

$\bar{B}$ l'événement « la personne n'a pas de bon publicitaire ».

S l'événement « la personne achète un salon ».

$\bar{S}$ l'événement contraire de S .

Partie A

1. Dessiner un arbre pondéré représentant la situation. [0,5 pt]
2. À l'aide de B , $\bar{B}$, S , $\bar{S}$ traduire les événements suivants et calculer leur probabilité à 10^{-2} près :
 - a. la personne n'achète pas de salon sachant qu'elle est venue avec un bon publicitaire ; [0,5 pt]
 - b. la personne achète un salon ; [0,5 pt]
 - c. la personne est venue avec un bon publicitaire sachant qu'elle a acheté un salon. [0,5 pt]

Partie B

Le bon publicitaire et le cadeau associé coûtent 15 € au magasin.
Un salon vendu rapporte 500 € au magasin s'il est vendu sans bon publicitaire.

1. Compléter le tableau ci-dessous qui donne la loi de probabilité du bénéfice réalisé par le magasin selon la situation de la personne entrant.

Situation de la personne entrant	La personne a un bon publicitaire et achète un salon	La personne a un bon publicitaire et n'achète pas un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et achète un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et n'achète pas un salon
Bénéfice réalisé par le magasin en euros	485	-15	500	0
Probabilité				

[1 pt]

2. Calculer le bénéfice moyen du magasin réalisé par personne entrant. [0,5 pt]
3. Le directeur pense changer la valeur du cadeau offert. Soit x le prix de revient, en euros, du nouveau bon publicitaire. Calculer, dans ce cas, l'espérance E de la loi de probabilité du bénéfice du magasin en fonction de x . [1 pt]
4. Le directeur souhaite réaliser 76 € de bénéfice moyen par personne entrant.
Quel doit être le prix de revient x du nouveau bon publicitaire ? [0,5 pt]

EXERCICE 2 (Spécialité)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

(calculs exacts demandés)

Sur une route, deux intersections successives « a » et « b » sont munies de feux tricolores. On suppose que ces feux ne sont pas synchronisés et fonctionnent de manière indépendante. On admet que :

La probabilité que le feu de « a » soit vert est égale à $\frac{3}{4}$,

La probabilité que le feu de « b » soit vert est égale à $\frac{1}{2}$.

On note A l'événement : « le feu de « a » est vert », B l'événement « le feu de « b » est vert ».

Un automobiliste passe successivement aux deux intersections « a » et « b ».

1. Calculer la probabilité qu'à son passage, les deux feux soient verts. **[0,75 pt]**
2. Calculer la probabilité qu'à son passage, il rencontre au moins un feu vert. **[0,75 pt]**

Partie B

(résultats demandés à 10^{-2} près)

Pour se rendre à son travail, Mathurin rencontre une succession d'intersections de feux tricolores dont le fonctionnement est décrit ci-dessous :

À chaque intersection :

- Si le feu est vert, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,9 ou sera rouge avec la probabilité 0,05.
- Si le feu est orange, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,1 ou sera vert avec la probabilité 0,8.
- Si le feu est rouge, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,5 ou sera orange avec la probabilité 0,05.

n étant un entier naturel non nul, on note :

- V_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu vert à la n -ième intersection.
- O_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu orange à la n -ième intersection.
- R_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu rouge à la n -ième intersection.
- $P_n = [V_n \ O_n \ R_n]$ la matrice traduisant l'état probabiliste du n -ième feu tricolore.

1. a. Construire un graphe probabiliste pour décrire cette situation. **[0,75 pt]**

b. Donner la matrice de transition M complétée de ce graphe :

$$M = \begin{bmatrix} \dots & 0,05 & 0,05 \\ 0,8 & \dots & 0,1 \\ 0,45 & \dots & 0,5 \end{bmatrix}. \quad [0,75 \text{ pt}]$$

2. a. Si le premier feu rencontré est vert, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2 . [0,5 pt]

b. On donne $P_3 = [0,87 \ 0,05 \ 0,08]$. Quelle est la probabilité que le quatrième feu soit vert ? [0,5 pt]

3. Si le premier feu rencontré est rouge, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2 . [0,5 pt]

4. On remarque que, quelle que soit la couleur du premier feu rencontré, on obtient à partir d'un certain rang n :

$$P_n = [0,85 \ 0,05 \ 0,10].$$

Donner une interprétation concrète de ce résultat. [0,5 pt]

EXERCICE 3

Historiquement, on avait décidé de numéroter les planètes du système solaire suivant leur distance moyenne au Soleil. Ainsi, on notait :

Mercure = 1 ; Vénus = 2 ;

Terre = 3 ; Mars = 4 ;

Céres = 5 ; Jupiter = 6 ;

Saturne = 7 ; Uranus = 8 .

On considère la série statistique double $(i ; d_i)_{1 \leq i \leq 8}$, où i représente le numéro d'ordre de la planète et d_i , sa distance au Soleil (en millions de km) :

$(1 ; 57,94), (2 ; 108,27),$

$(3 ; 149,60), (4 ; 228,06)$

$(5 ; 396,44), (6 ; 778,73),$

$(7 ; 1\,427,7), (8 ; 2\,872,4).$

1. Indiquer, à l'aide d'une phrase, la signification du couple $(3 ; 149,60)$. Dans la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

[0,5 pt]

2. Compléter le tableau suivant :

[1 pt]

i	1	2	3	4	5	6	7	8
d_i	57,94	108,27	149,60	228,06	396,44	778,73	1 427,7	2 872,4
$d_i - d_1$	0			170,12				
$Y_i = \ln(d_i - d_1)$	////////			5,137				

3. a. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement ($\mathcal{D}$), de la série $(i ; y_i)$, avec i compris entre 2 et 8.

[0,75 pt]

b. Construire le nuage de points $(i ; y_i)$, avec i compris entre 2 et 8, et la droite ($\mathcal{D}$) dans un repère orthonormal, unités : 2 cm.

[0,75 pt]

4. a. Dédurre de ce qui précède que l'on peut modéliser l'expression de d_i , en fonction de i , avec i compris entre 2 et 8, sous la forme :

$$d_i = 57,94 + 12,17 \times 1,966^i.$$

[1 pt]

b. Calculer la distance moyenne probable au Soleil d'une planète numérotée 9.

[1 pt]

(Ce résultat est connu sous le nom de **loi de Titius-Bode** du nom de deux astronomes allemands qui permirent la découverte de Neptune n° 9 en 1848... La loi tomba ensuite en désuétude mais l'ajustement étudié demeure excellent si l'on inclut « Pluton »... La planète naine en n° 10).

EXERCICE 4

Rappel : Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u' e^u$.

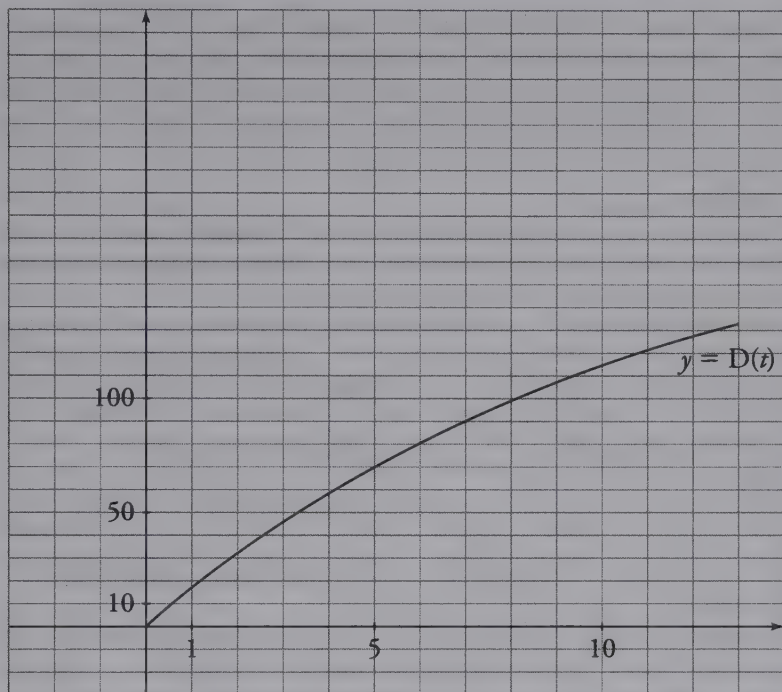
Un transporteur, s'occupant de voyages organisés, achète en l'an 2000 (instant initial $t=0$), un autocar nécessitant un investissement initial de 200 milliers d'euros.

Partie A

Cet investissement se déprécie. Sa dépréciation cumulée, en milliers d'euros, à l'instant t , mesurée en années, est notée $D(t)$.

On pose $D(t) = 200(1 - e^{-0,086t})$ pour tout réel t de l'intervalle $I = [0 ; 13]$.

La courbe représentative de D dans le plan rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est donnée page suivante.



Déterminer graphiquement au cours de quelle année l'investissement aura perdu 60 % de sa valeur (faire apparaître sur le graphique les tracés qui permettent d'obtenir la réponse). **[1 pt]**

Partie B

Le transporteur veut revendre l'autocar. On note $V(t)$ la valeur de l'autocar l'année t , $0 \leq t \leq 13$.

1. Vérifier que $V(t) = 200 \times e^{-0,086t}$. **[0,5 pt]**
2. Étudier le sens de variation de V sur $[0 ; 13]$. **[0,5 pt]**
3. Combien peut-on espérer revendre l'autocar au bout de 13 ans de service (au millier d'euros près) ? **[0,25 pt]**
4. Au cours de quelle année l'autocar a-t-il perdu la moitié de sa valeur ? **[0,25 pt]**

Partie C

On estime que les recettes nettes (en milliers d'euros) procurées par l'exploitation de cet autocar, hors dépréciation du véhicule, sont données à l'instant t réel de l'intervalle $[0 ; 13]$ par :

$$R(t) = 110(5 + t - 5e^{0,1t}).$$

1. a. Calculer la dérivée R' de la fonction R ; étudier son signe sur $[0 ; 13]$ et construire le tableau de variation de R . **[1 pt]**
- b. En déduire que les recettes nettes sont maximales pour une valeur t_0 de t dont on donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée arrondie à l'unité près. **[0,5 pt]**
- c. Construire la courbe représentative de la fonction R , dans le même repère que celle de D après avoir complété le tableau de valeurs ci-dessous où l'on arrondira $R(t)$ à l'entier le plus proche.

t	0	1	2	4	6	8	10	11	13
$D(t)$	0	16	32	58	81	99	115	122	135
$R(t)$	0	52	98		208				-38
$E(t)$	0				127				

[0,5 pt]

2. À tout instant, la différence $R(t) - D(t)$ représente l'exploitation $E(t)$ de l'autocar.

Compléter le tableau ci-dessus, utiliser le graphique ou les tableaux de valeurs de D , R et E pour répondre aux questions suivantes : **[0,5 pt]**

- a. Au cours de quelle année l'exploitation de cet autocar est-elle la plus profitable ? **[0,5 pt]**
- b. À partir de quelle année l'exploitation de cet autocar conduit-elle à un déficit ? **[0,5 pt]**

3

ANTILLES-GUYANE

Juin 2008

Exercice 1**[4 points ; 30 min]**

- Fonctions
- QCM

Exercice 2 (obligatoire)**[5 points ; 40 min]**

- Probabilité
- Schéma de Bernouilli

Exercice 2 (spécialité)**[5 points ; 40 min]**

- Graphe
- Matrice de transition
- Suites
- État limite

Exercice 3**[5 points ; 40 min]**

- Statistiques
- Ajustement affine
- Ajustement exponentiel

Exercice 4**[6 points ; 45 min]**

- Fonctions exponentielles
- Calcul d'aire
- Intégrales

SUJETS DE BAC

EXERCICE 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.

3. Le spectateur choisi préfère les films étrangers. Quelle est la probabilité qu'il préfère le cinéma de quartier ? [1,25 pt]

4. On choisit au hasard et de façon indépendante trois spectateurs parmi les personnes qui vont régulièrement au cinéma dans cette ville. Quelle est la probabilité qu'au moins un d'entre eux préfère les films étrangers ? [1,5 pt]

EXERCICE 2 (Spécialité)

Un ciné-club qui projette des films français et étrangers dispose de deux salles. Les abonnés au ciné-club assistent systématiquement à une projection chaque lundi soir.

- La probabilité qu'un spectateur ayant vu un film français à une séance retourne voir un film français à la séance suivante est égale à 0,6.

- La probabilité qu'un spectateur ayant vu un film étranger à une séance aille voir un film français à la séance suivante est égale à 0,75.

Un lundi soir, un film français est projeté dans chacune des deux salles. Puis les semaines suivantes, le ciné-club propose dans une salle un film français et dans l'autre un film étranger.

On cherche à étudier l'évolution de la répartition des spectateurs entre les deux salles au cours des semaines suivantes, à partir de ce lundi.

1. On note A l'état : « le spectateur voit un film français ».

On note B l'état : « le spectateur voit un film étranger ».

a. Représenter la situation ci-dessus par un graphe probabiliste. [0,5 pt]

b. On note M la matrice de transition de ce graphe en considérant les états dans l'ordre alphabétique.

Justifier que $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$. [1 pt]

2. Soient A_n l'événement : « Le spectateur voit un film français à la n -ième séance » et B_n l'événement : « Le spectateur voit un film étranger à la n -ième séance ».

L'état probabiliste de la répartition des abonnés dans les deux salles lors de la n -ième séance est donné par la matrice ligne $T_n = (a_n \ b_n)$ où :

$$a_n = P(A_n), \ b_n = P(B_n) \text{ et } a_n + b_n = 1.$$

L'état probabiliste initial est donc donné par $T_1 = (1 \ 0)$.

Déterminer les matrices T_2 et T_3 . En donner une interprétation en termes de répartition des abonnés dans les deux salles. [1,5 pt]

3. Déterminer la valeur arrondie au centième des réels x et y définissant l'état limite $T = (x \ y)$ vers lequel converge la suite (T_n) . Interpréter le résultat. [2 pt]

EXERCICE 3

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre d'adhérents d'un club de rugby de 2001 à 2006.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre d'adhérents y_i	70	90	115	140	170	220

On cherche à étudier l'évolution du nombre y d'adhérents en fonction du rang x de l'année.

Partie A – Un ajustement affine

1. Dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 20 adhérents sur l'axe des ordonnées, représenter le nuage de points associé à la série $(x_i ; y_i)$. **[0,5 pt]**
2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés et la tracer sur le graphique précédent (*aucune justification n'est exigée, les calculs seront effectués à la calculatrice et les coefficients seront arrondis à l'unité*). **[0,5 pt]**
3. En supposant que cet ajustement reste valable pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'adhérents en 2007. **[0,5 pt]**

Partie B – Un ajustement exponentiel

On pose $z = \ln y$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs de z_i au millièmme :

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i	4,248					

[0,75 pt]

2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (*aucune justification n'est exigée, les calculs seront effectués à la calculatrice et les coefficients seront arrondis au millièmme*). **[0,5 pt]**
3. En déduire une approximation du nombre d'adhérents y en fonction du rang x de l'année. **[0,75 pt]**
4. En prenant l'approximation $y \approx 57,1e^{0,224x}$ et en supposant qu'elle reste valable pour les années suivantes, donner une estimation du nombre d'adhérents en 2007. **[0,75 pt]**

Partie C – Comparaison des ajustements

En 2007, il y a eu 280 adhérents. Lequel des deux ajustements semble le plus pertinent ? Justifier la réponse.

Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

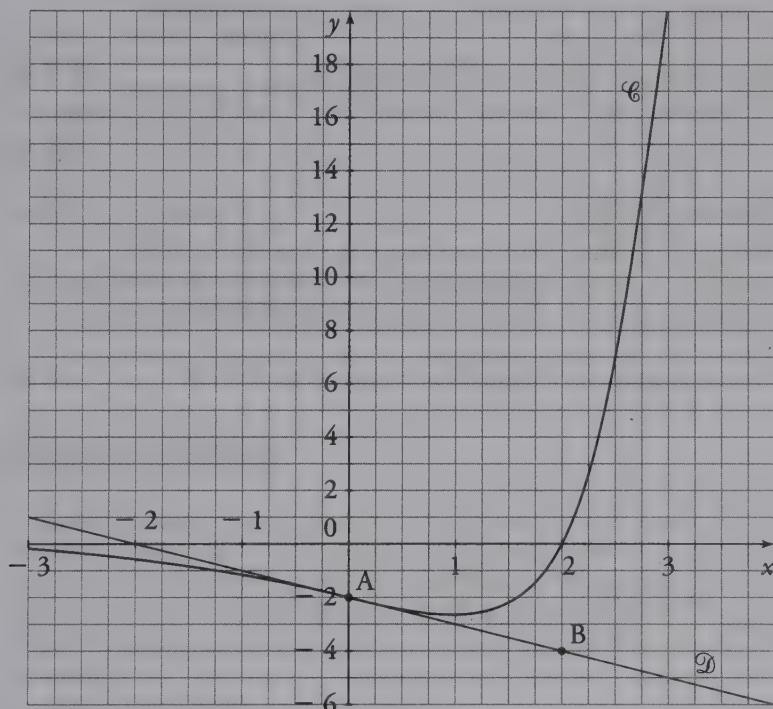
[0,75 pt]

EXERCICE 4

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

La tangente $\mathcal{D}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(0 ; -2)$ passe par le point $B(2 ; -4)$.



On désigne par f' la fonction dérivée de f .

1. a. Donner la valeur de $f(0)$.

[0,25 pt]

b. Justifier que $f'(0) = -1$. [0,75 pt]

2. a. On admet qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x ,

$$f(x) = (x + a)e^{bx}.$$

Vérifier que pour tout réel x , $f'(x) = (bx + ab + 1)e^{bx}$. [0,5 pt]

b. Utiliser les résultats précédents pour déterminer les valeurs exactes des réels a et b . [0,5 pt]

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (x - 2)e^x.$$

1. Donner l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x ; en déduire le sens de variation de la fonction f sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$. [0,75 pt]

2. a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. [0,5 pt]

b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (on rappelle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$).

Interpréter graphiquement le résultat obtenu. [0,75 pt]

3. a. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = (x - 3)e^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. [0,5 pt]

b. Calculer $\int_2^3 f(x) dx$. [0,5 pt]

c. Préciser le signe de $f(x)$ pour tout x de l'intervalle $[2 ; 3]$.

Déterminer la valeur, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

Donner le résultat sous forme décimale, arrondi au dixième. [1 pt]

4

ASIE
Juin 2008**Exercice 1****[5 points ; 40 min]**

- QCM
- Pourcentages
- Probabilités

Exercice 2**[5 points ; 40 min]**

- Fonctions exponentielles
- Équations

Exercice 3 (obligatoire)**[5 points ; 40 min]**

- Statistiques
- Ajustements

Exercice 3 (spécialité)**[5 points ; 40 min]**

- Surface
- Section d'une surface par un plan

Exercice 4**[5 points ; 40 min]**

- Fonctions
- Lecture graphique
- Application à l'économie

EXERCICE 1

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

1. Une baisse de 25 % est compensée par une hausse, arrondie à l'unité, de :

a. 20 %

b. 25 %

c. 33 %

2. La population d'une ville a augmenté de 7 % en 2004, de 5 % en 2005 et de 6 % en 2006. L'augmentation de la population de cette ville sur la période 2004-2006 est, arrondie à l'unité près, égale à :

- a. 17 % b. 18 % c. 19 %

Les élèves de deux classes de terminale ES (désignées par TE1 et TE2) sont répartis selon leur spécialité (qui sont abrégées en SES, LV, Math) de la façon suivante :

		TE1	TE2	Total
Spécialité	SES	16	8	24
	LV	12	14	26
	Math	6	10	16
Total		34	32	66

On interroge un élève au hasard. Les données précédentes sont à utiliser pour les trois questions suivantes.

3. La probabilité que l'élève interrogé appartienne à la TE1 est égale à :

- a. $\frac{1}{66}$ b. $\frac{1}{34}$ c. $\frac{17}{33}$

4. La probabilité que l'élève interrogé suive l'enseignement de spécialité Math ou appartienne à la TE1 est égale à :

- a. $\frac{2}{3}$ b. $\frac{25}{33}$ c. $\frac{1}{11}$

5. La probabilité que l'élève interrogé suive l'enseignement de spécialité Math sachant qu'il appartient à la TE1 est égale à :

- a. $\frac{1}{34}$ b. $\frac{1}{11}$ c. $\frac{3}{17}$

EXERCICE 2

On considère la fonction u définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$u(x) = \frac{10-x}{x}.$$

- Calculer les limites de u en 0 et en $+\infty$. [0,5 pt]
- Étudier les variations de u . [0,75 pt]

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{u(x)}.$$

3. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Quelles conséquences graphiques peut-on en déduire ? [1 pt]
4. Établir, en justifiant, le tableau de variation de f . [1 pt]
5. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 1$. [0,75 pt]
6. L'équation $f(x) = -x$ admet-elle une solution ? Pourquoi ?
Toute tentative d'explication de la démarche ou de la méthode utilisée sera valorisée. [1 pt]

EXERCICE 3 (Obligatoire)

Le tableau suivant donne l'évolution du SMIC horaire brut en euros depuis 2001.

Date	1/07/ 2001	1/07/ 2002	1/07/ 2003	1/07/ 2004	1/07/ 2005	1/07/ 2006	1/07/ 2007
Rang : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Valeur en euros : y_i	6,67	6,83	7,19	7,61	8,03	8,27	8,44

1. Représenter sur votre copie le nuage de points associé à la série $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal (1 cm représente 1 rang en abscisse et 5 cm représentent 1 € en ordonnée ; faire débiter la graduation à 6 sur l'axe des ordonnées). [0,75 pt]

2. À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients à 10^{-2} près).

Tracer cette droite dans le repère précédent.

[0,75 pt]

3. La forme du nuage suggère une modification de l'évolution du SMIC horaire brut à partir de juillet 2004. Pour $x \geq 4$, on choisit d'ajuster le nuage de points par une courbe $\mathcal{C}$ d'équation :

$$y = a \ln(x - 3) + b$$

où a et b sont deux réels. Déterminer les réels a et b tels que la courbe $\mathcal{C}$ passe par les points de coordonnées $(4 ; 7,61)$ et $(7 ; 8,44)$ (arrondir les réels a et b à 10^{-2} près).

Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère précédent.

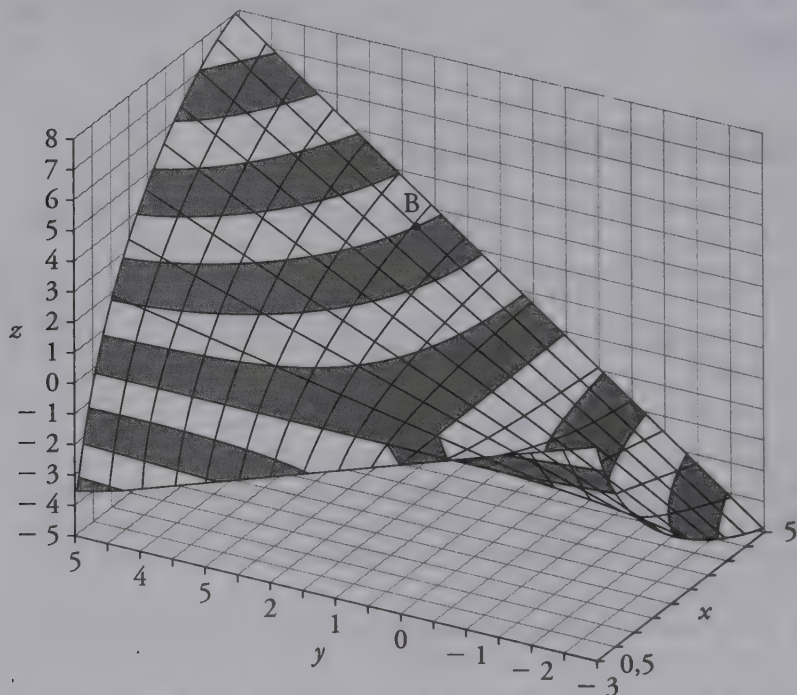
[2,5 pt]

4. Arthur est un jeune salarié, rémunéré au SMIC. Il souhaite estimer la valeur du SMIC au 1^{er} juillet 2009. Quel est, parmi les modèles utilisés aux questions 2. et 3., celui qui lui sera le plus favorable ? [1 pt]

EXERCICE 3 (Spécialité)

On considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = y \times \ln(x)$, où x appartient à l'intervalle $[0,5 ; 5]$ et y appartient à l'intervalle $[-3 ; 5]$. Cette surface $\mathcal{S}$ est représentée ci-dessous.

Les cinq questions sont indépendantes l'une de l'autre.



1. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x = 3,5$. Quelle est la nature de l'intersection de la surface $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$? **[0,75 pt]**
2. On désigne par $\mathcal{C}_2$ l'intersection de la surface $\mathcal{S}$ avec le plan d'équation $y = 2$. Représenter la courbe $\mathcal{C}_2$ dans un repère orthonormal d'unité 2 cm. **[0,75 pt]**
3. Placer sur la surface $\mathcal{S}$ le point A d'abscisse 2 et d'ordonnée 4. Calculer sa cote.
4. Lire les coordonnées du point B situé sur la surface $\mathcal{S}$. **[0,5 pt]**
5. On considère la section $\mathcal{C}$ de la surface $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $z = 1$. **[0,5 pt]**

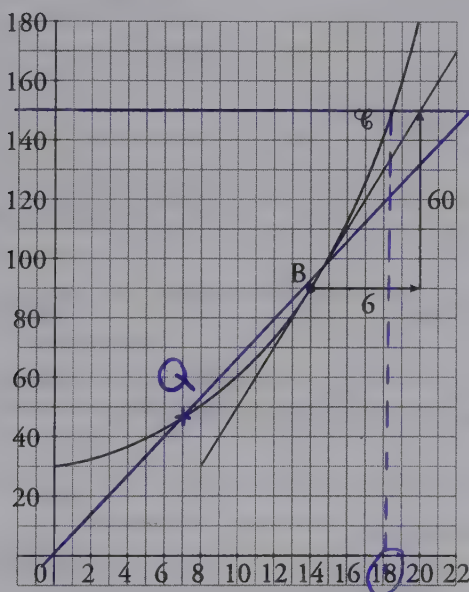
a. Calculer l'ordonnée du point D d'abscisse 4 situé sur la section $\mathcal{C}$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-1} près. Placer le point D sur la surface $\mathcal{S}$. [1 pt]

b. Arthur pense que la nature de la section $\mathcal{C}$ est un morceau de parabole. A-t-il raison ? Pourquoi ? [1 pt]

EXERCICE 4

Une entreprise fabrique une quantité x , comprise entre 0 et 20, d'un certain objet.

Le coût total de production f , exprimé en euros, est représenté par la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère d'origine O du graphique ci-dessous. La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B d'abscisse 14 est tracée sur le même graphique.

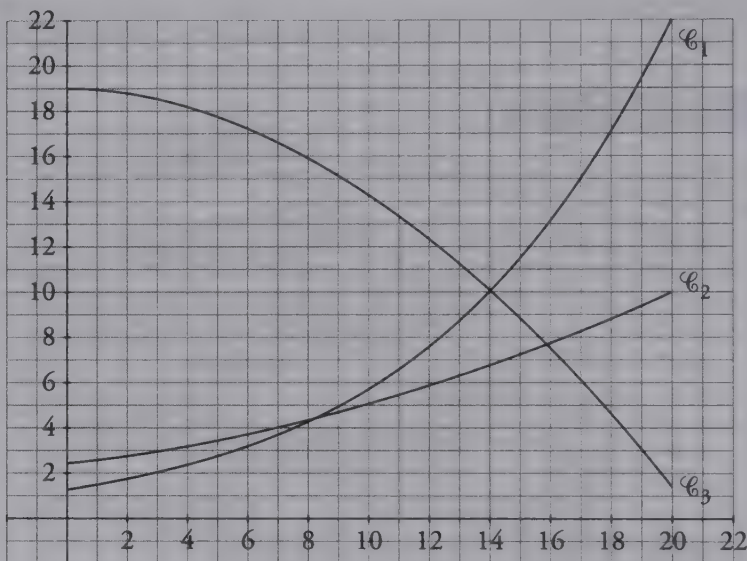


1. a. Quel est le coût total de production de 10 objets ? [0,5 pt]

b. Quelle quantité maximale d'objets est-il possible de produire pour un coût total inférieur à 150 € ? [0,75 pt]

2. Le coût marginal g est donné sur l'intervalle $]0 ; 20]$ par la dérivée du coût total de production : $g(x) = f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; 20]$.

- a. En utilisant le graphique ci-dessous, déterminer la valeur du coût marginal pour $x = 14$. Comparer $g(14)$ et $g(19)$. **[0,75 pt]**
- b. Quelle est, parmi les trois courbes proposées sur le graphique 2, celle qui représente le coût marginal ? Justifier la réponse.



3. Le coût moyen h est donné sur l'intervalle $]0 ; 20]$ par $h(x) = \frac{f(x)}{x}$.
- a. Estimer $h(5)$. **[0,25 pt]**
- b. Sur le graphique de la page précédente, placer le point Q d'abscisse 5 situé sur la courbe $\mathcal{C}$, puis tracer la droite (OQ).

Une expression du coefficient directeur de la droite (OQ) est $\frac{f(5)}{5}$.

Justifier cette expression.

[0,75 pt]

- c. Placer le point A sur la courbe $\mathcal{C}$ tel que la droite (OA) soit tangente à $\mathcal{C}$. On appelle a l'abscisse du point A. **[0,5 pt]**

- d. Conjecturer les variations de h sur l'intervalle $]0 ; 20]$.

Toute tentative d'explication de la démarche ou de la méthode utilisée sera valorisée.

[0,75 pt]

5

CENTRES ÉTRANGERS
Juin 2008**Exercice 1****[5 points ; 40 min]**

- Pourcentages
- Ajustement logarithmique

Exercice 2 (obligatoire)**[5 points ; 40 min]**

- Arbre pondéré
- Probabilité
- Espérance d'une loi de probabilité

Exercice 2 (spécialité)**[5 points ; 40 min]**

- Suites
- Suites géométriques

Exercice 3**[4 points ; 30 min]**

- QCM
- Pourcentages
- Probabilités
- Fonction

Exercice 4**[6 points ; 45 min]**

- Étude de fonction
- Fonction logarithme népérien
- Résolution approchée de $f(x) = 0$
- Calcul d'aire

EXERCICE 1

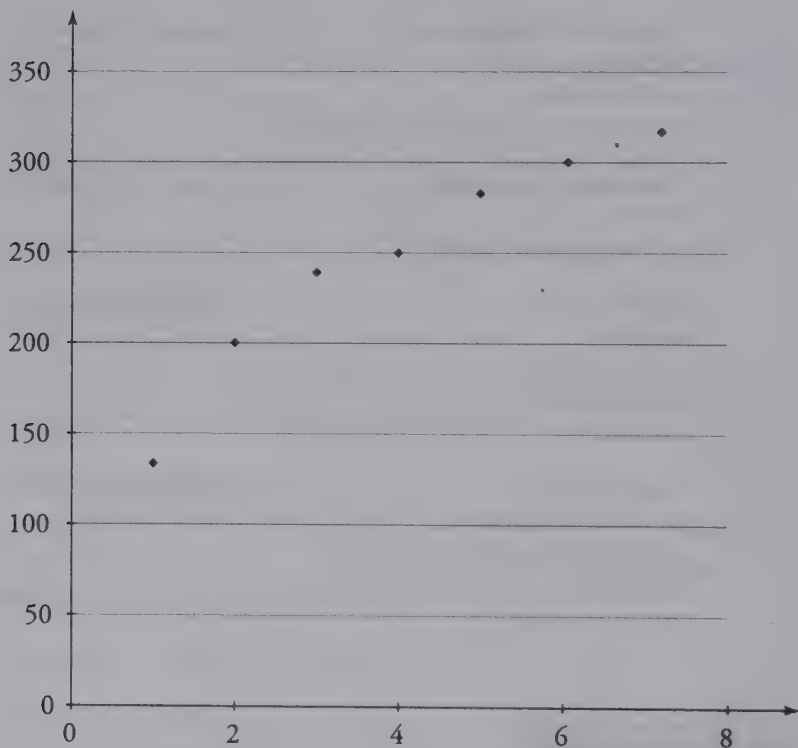
Une association organise chaque année un séjour qui s'adresse à des adultes handicapés. À sa création en 1997, dix adultes handicapés sont partis durant cinq jours. Ainsi, on dira qu'en 1997, le nombre de « journées participant » est de 5×10 soit 50.

Le tableau suivant donne le nombre de « journées participant » de 1997 à 2004. L'année 1997 a le rang 0.

Année	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de « journées participant » : y_i	50	130	200	240	250	280	300	320

1. Calculer le pourcentage d'augmentation du nombre de « journées participant » de 1997 à 2000, puis celui de 2000 à 2003. **[0,5 pt]**

2. Ces données sont représentées par le nuage de points ci-joint.



On considère qu'un ajustement affine n'est pas pertinent.

L'allure du nuage suggère de chercher un ajustement de y en x de la forme $y = k \ln(ax + b)$ où k , a et b sont trois nombres réels.

Pour cela on pose $z_i = e^{\frac{y_i}{100}}$.

Dans cette question les calculs seront effectués à la calculatrice. Aucune justification n'est demandée. Les résultats seront arrondis au centième.

a. Recopier et compléter le tableau suivant :

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de « journées participant » : y_i	50	130	200	240	250	280	300	320
$z_i = e^{\frac{y_i}{100}}$	1,65							

[0,5 pt]

b. Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i ; z_i)$ dans un repère orthonormal (unités : 1 cm).

[0,5 pt]

c. Donner les coordonnées du point moyen et placer ce point sur le graphique précédent.

[0,5 pt]

d. Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés. Représenter la droite (D) sur le graphique précédent.

[0,5 pt]

e. Sachant que $z_i = e^{\frac{y_i}{100}}$, déterminer l'expression de y en fonction de x .

[0,5 pt]

3. On suppose que l'évolution du nombre de « journées participant » se poursuit dans un futur proche selon le modèle précédent.

a. Estimer, à l'unité près, quel serait le nombre de « journées participant » prévu pour l'année 2007.

[0,5 pt]

b. En réalité, le nombre de « journées participant » en 2007 a été de 390. Si l'écart en valeur absolue entre la valeur estimée et la valeur réelle est inférieure à 10 % de la valeur réelle, on considère que le modèle est pertinent. Est-ce le cas ?

[0,5 pt]

EXERCICE 2

(Obligatoire)

Un magasin de sport propose à la location des skis de piste, des snowboards et des skis de randonnée.

Son matériel est constitué de 50 % de skis de piste, le reste étant également réparti entre les snowboards et les skis de randonnée.

Après la journée de location, le matériel est contrôlé et éventuellement réparé.

Il a été constaté que la moitié des skis de piste, deux tiers des snowboards et le quart des skis de randonnée nécessitent une réparation.

Chaque paire de ski et chaque snowboard est répertorié sur une fiche qui précise son suivi. On tire au hasard une fiche. On considère les événements suivants :

S_p : « La fiche est celle d'une paire de skis de piste ».

S_n : « La fiche est celle d'un snowboard ».

S_r : « La fiche est celle d'une paire de skis de randonnée ».

$\bar{R}$: « Le matériel nécessite une réparation » ;

$\bar{R}$ est son événement contraire.

Tous les résultats des quatre premières questions seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Traduire toutes les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré (on ne demande aucune explication). **[1 pt]**
2. Calculer la probabilité que la fiche tirée concerne une paire de skis de piste ne nécessitant pas une réparation. **[1 pt]**
3. Calculer la probabilité que la fiche tirée concerne du matériel ne nécessitant pas une réparation. **[1 pt]**
4. La fiche tirée concerne du matériel ayant nécessité une réparation. Quelle est la probabilité que cette fiche concerne un snowboard ? **[1 pt]**
5. Les paires de skis de piste, de randonnée, ainsi que les snowboards sont loués 30 € pour la journée. Quelle est l'espérance de gain sur le matériel loué sachant que chaque réparation coûte 20 € au loueur ? **[1 pt]**

EXERCICE 2 (Spécialité)

Dans un village, l'association de gymnastique volontaire possédait 50 adhérents en 2000.

Depuis cette date, la trésorière a remarqué que chaque année elle reçoit 18 nouvelles adhésions et que 85 % des anciens inscrits renouvellent leur adhésion.

On note a_n le nombre d'adhérents pour l'année $2000 + n$.

On a donc $a_0 = 50$ et $a_{n+1} = 0,85a_n + 18$ pour tout entier naturel n .

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 120$ pour tout $n \geq 0$.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. **[1 pt]**
 - b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_n = 120 - 70 \times 0,85^n$. **[0,5 pt]**
 - c. Déterminer la limite de la suite (a_n) quand n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat. **[0,5 pt]**

2. Chaque semaine, 60 % des adhérents s'inscrivent pour une heure de gymnastique et 40 % pour deux heures de gymnastique.

a. Exprimer en fonction de n le nombre d'heures de gymnastique à prévoir par semaine pour l'an 2000 + n . [1 pt]

b. Une séance de gymnastique dure une heure et est limitée à 20 personnes. On veut déterminer à partir de quelle année l'association devra prévoir plus de 8 séances par semaine. Démontrer qu'alors n doit vérifier l'inéquation $98 \times 0,85^n < 8$.

Résoudre cette inéquation et conclure.

[2 pts]

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 3

Cet exercice est un QCM (Questionnaire à Choix Multiples). Chaque question admet une seule réponse exacte : a., b. ou c. Pour chacune des questions indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Barème : une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse enlève 0,25 point. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est ramenée à 0.

	QUESTIONS	RÉPONSES
1.	D'une année sur l'autre, un produit perd 10 % de sa valeur. Le produit a perdu au moins 70 % de sa valeur initiale au bout de :	a. 7 années b. 11 années c. 12 années
2.	Dans une expérience aléatoire, la probabilité d'un événement A est égale à 0,4. On répète huit fois cette expérience. La probabilité que l'événement A se réalise au moins une fois est égale à :	a. $(0,4)^8$ b. $(0,6)^8$ c. $1 - (0,6)^8$
3.	F est la primitive qui s'annule en 1 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$. On a :	a. $F(0) = 1$ b. $F(0) = -\frac{4}{3}$ c. $F(0) = \frac{4}{3}$
4.	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x}$. On appelle ($\mathcal{C}$) la courbe représentative de f dans un repère. La tangente ($\mathcal{T}$) à la courbe ($\mathcal{C}$) au point A d'abscisse 0 a pour coefficient directeur :	a. 0 b. 1 c. 3

Pour toutes les questions suivantes, on donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $]-\infty ; +3[$. On appelle $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère.

x	$-\infty$	-3	-2	2	3
$f(x)$	$+\infty$	0	-2	0	$+\infty$

	QUESTIONS	RÉPONSES
5.	On peut affirmer que :	a. $f(0) < 0$ b. $f(0) = 0$ c. $f(0) > 0$
6.	La courbe $(\mathcal{C})$ admet pour asymptote la droite d'équation :	a. $x = 0$ b. $x = 3$ c. $y = 3$
7.	g est la fonction définie par $g(x) = \ln[f(x)]$ sur $]-\infty ; -3[$. La limite de g en $-\infty$:	a. est $-\infty$ b. est $+\infty$ c. n'existe pas
8.	F désigne une primitive de f sur $]-\infty ; 3[$. F est :	a. strictement décroissante sur $]-\infty ; -3[$ b. strictement décroissante sur $]-3 ; 2[$ c. strictement croissante sur $]-2 ; 3[$

EXERCICE 4

On considère la fonction f définie sur $]-1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = -3x + 4 + 8 \ln(x+1).$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. a. Calculer la limite de f en -1 . Donner l'interprétation graphique du résultat obtenu. [0,5 pt]

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

(On pourra utiliser $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$.) [0,5 pt]

2. a. On note f' la dérivée de f sur $]-1 ; +\infty[$.

Démontrer que $f'(x) = \frac{5-3x}{x+1}$.

[1 pt]

b. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f . On donnera une valeur arrondie au dixième du maximum de f sur $] -1 ; +\infty[$.

[1 pt]

3. On se place dans l'intervalle $\left[\frac{5}{3} ; +\infty\right[$. Démontrer que dans cet intervalle, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique notée x_0 . Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

[1 pt]

4. a. Vérifier que la fonction F définie par :

$$F(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 4x + 8(x+1)\ln(x+1)$$

est une primitive de f sur $] -1 ; +\infty[$.

[1 pt]

b. Calculer l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=5$ (on donnera la valeur exacte de cette aire et une valeur approchée au dixième près).

[1 pt]

6

LIBAN
Juin 2008**Exercice 1****[4 points ; 30 min]**

- Lecture graphique
- Fonction logarithme népérien
- Calcul d'intégrale
- Encadrement

Exercice 2 (obligatoire)**[5 points ; 40 min]**

- Arbre pondéré
- Calcul de probabilité
- Schéma de Bernoulli

Exercice 2 (spécialité)**[5 points ; 40 min]**

- Fonction de plusieurs variables
- Recherche d'un extremum

Exercice 3**[7 points ; 50 min]**

- Fonction exponentielle
- Calcul d'intégrale
- Applications économiques : élasticité

Exercice 4**[4 points ; 30 min]**

- Statistique
- Ajustement affine
- Ajustement logarithmique

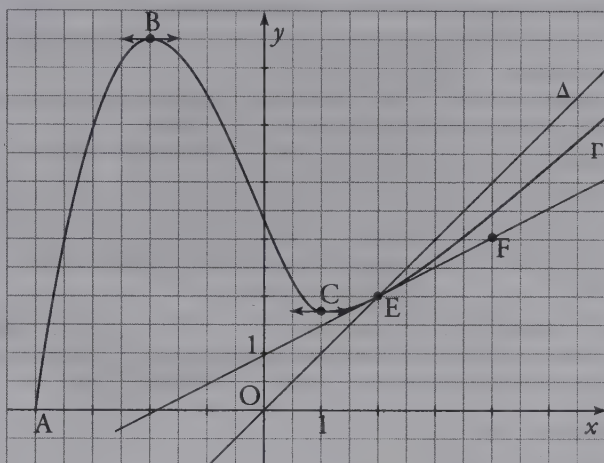
EXERCICE 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 6]$. On note f' sa fonction dérivée.

La courbe Γ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal est tracée page suivante ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$. La courbe Γ et la droite Δ se coupent au point E d'abscisse 2. On sait par ailleurs que :

- la courbe Γ admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses aux points B(-2 ; 6,5) et C(1 ; 1,75) ;

- la droite (EF) est la tangente à la courbe Γ au point E ; F est le point de coordonnées (4 ; 3).



1. Dans cette question, déterminer par lecture graphique et sans justification :
a. les valeurs de $f'(-2)$ et $f'(2)$; [0,5 pt]

- b. les valeurs de x dans l'intervalle $[-4 ; 6]$ vérifiant $f'(x) \geq 0$; [0,5 pt]

- c. les valeurs de x dans l'intervalle $[-4 ; 6]$ vérifiant $f(x) \leq x$. [0,5 pt]

2. Soit g la fonction définie sur $]-4 ; 6]$ par $g(x) = \ln [f(x)]$. Déterminer par lecture graphique et avec justification :

- a. les variations de g ; [0,75 pt]

- b. la limite de la fonction g quand x tend vers -4 . [0,75 pt]

3. Encadrement d'une intégrale

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

- a. Soit l'intégrale $I = \int_2^4 f(x) dx$. Interpréter graphiquement I . [0,5 pt]

- b. Proposer un encadrement de l'intégrale I par deux nombres entiers consécutifs. Justifier. [0,5 pt]

EXERCICE 2 (Obligatoire)

Un club de remise en forme propose, outre l'accès aux salles de musculation, des cours collectifs pour lesquels un supplément est demandé lors de l'inscription. Une fiche identifie chaque membre et son type d'abonnement : avec ou sans cours collectif.

Une étude sur les profils des membres de ce club a montré que :
40 % des membres sont des hommes.

65 % des membres sont inscrits aux cours collectifs.

Parmi les femmes, membres de ce club, seulement 5 % ne sont pas inscrites aux cours collectifs.

On choisit une fiche au hasard et on considère les événements suivants :

- H : « la fiche est celle d'un homme » ;
- F : « la fiche est celle d'une femme » ;
- C : « la fiche est celle d'un membre inscrit à des cours collectifs ».

Rappel de notation : Si A et B sont deux événements donnés, $p(A)$ désigne la probabilité de A et $p_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B.

1. Donner les probabilités suivantes : $p(H)$, $p_F(\bar{C})$, $p_F(C)$ et les reporter sur un arbre pondéré modélisant la situation qui sera complété au cours de la résolution de l'exercice. **[1 pt]**

2. a. Déterminer $p(F \cap C)$. **[0,5 pt]**

b. Montrer que $p(H \cap C) = 0,08$. **[0,5 pt]**

c. On tire la fiche d'un homme, quelle est la probabilité que celui-ci soit inscrit aux cours collectifs ? **[0,75 pt]**

d. Compléter l'arbre pondéré de la question 1.

3. On choisit au hasard une fiche d'un membre non inscrit aux cours collectifs. Quelle est la probabilité que ce soit celle d'un homme (donner la valeur décimale arrondie au centième) ? **[0,75 pt]**

4. Pour vérifier la bonne tenue de son fichier, la personne chargée de la gestion de ce club prélève une fiche au hasard et la remet après consultation. Elle procède ainsi trois fois de suite. Quelle est la probabilité qu'au moins une des fiches soit celle d'un membre non inscrit aux cours collectifs ? **[1 pt]**

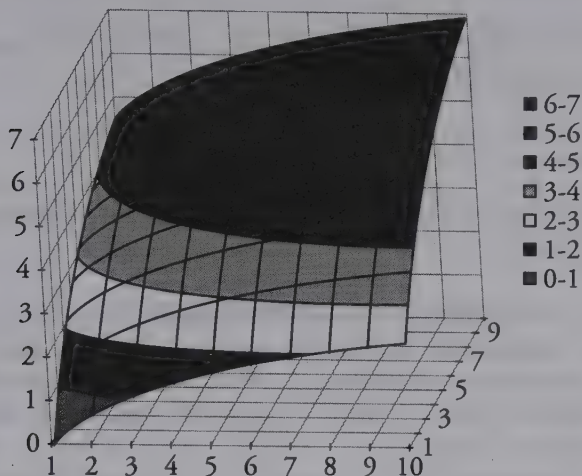
EXERCICE 2 (Spécialité)

Une consommatrice apprécie deux types de fruits $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. En un mois, elle achète x kilos de fruits $\mathcal{A}$ et y kilos de fruits $\mathcal{B}$; x et y appartiennent à l'intervalle $[1 ; 10]$.

Son niveau de satisfaction est modélisé par la relation :

$$f(x ; y) = \ln y + 2 \ln x.$$

La figure ci-dessous représente, dans un repère orthogonal, la surface d'équation $z = f(x; y)$ pour $1 \leq x \leq 10$ et $1 \leq y \leq 10$.



1. Le point N, d'ordonnée 5 et de cote $\ln 30$, appartient à la surface. Calculer la valeur exacte de son abscisse. [0,75 pt]

2. On peut estimer que le kilo de fruits $\mathcal{A}$ coûte 3 euros et que celui de fruits $\mathcal{B}$ coûte 2 euros. La consommatrice décide de ne pas dépenser plus de 36 euros par mois pour ces fruits.

a. Donner la relation entre les quantités x et y de fruits $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ achetées pour un montant de 36 euros. [0,5 pt]

b. Montrer qu'alors le niveau de satisfaction de la consommatrice est égal à :

$$\ln(18 - 1,5x) + 2 \ln x. \quad \text{[0,5 pt]}$$

c. Démontrer que, sur l'intervalle $[1; 10]$, la fonction g définie par :

$$g(x) = \ln(18 - 1,5x) + 2 \ln x$$

admet un maximum pour une valeur x_0 que l'on précisera. [1,25 pt]

d. Quelles quantités de fruits $\mathcal{A}$ et de fruits $\mathcal{B}$ la consommatrice doit-elle acheter dans le mois si elle veut optimiser son niveau de satisfaction tout en respectant sa contrainte de budget ? [2 pts]

EXERCICE 3

Partie A – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x + 8)e^{-0,5x}.$$

On note f' sa fonction dérivée et on admet que, pour tout x de $[0 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = (-0,5x - 3)e^{-0,5x}.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$. [1 pt]

2. Démontrer que la fonction F définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$F(x) = (-2x - 20)e^{-0,5x}$$

est une primitive de f sur ce même intervalle. [1 pt]

3. Calculer l'intégrale $I = \int_2^4 f(x) dx$; on donnera la valeur arrondie à 0,01 près. [1 pt]

Partie B – Applications économiques

La fonction de demande d'un produit informatique est modélisée par la fonction f étudiée dans la **partie A**. Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x centaines d'euros.

1. Calculer le nombre d'objets demandés, à l'unité près, lorsque le prix unitaire est fixé à 200 euros. [0,5 pt]

2. En utilisant les résultats de la **partie A**, déterminer la demande moyenne à 10 objets près, lorsque le prix unitaire est compris entre 200 et 400 euros. [0,5 pt]

3. L'élasticité $E(x)$ de la demande par rapport au prix x est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % de x . On admet qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par :

$$E(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \times x.$$

a. Démontrer que $E(x) = \frac{-0,5x^2 - 3x}{x + 8}$. [0,5 pt]

b. Déterminer le signe de $E(x)$ sur $[0 ; +\infty[$ et interpréter ce résultat. [1 pt]

c. Calculer le prix pour lequel l'élasticité est égale à $-3,5$. Comment évolue la demande lorsque le prix passe de 800 à 808 euros ? [1,5 pt]

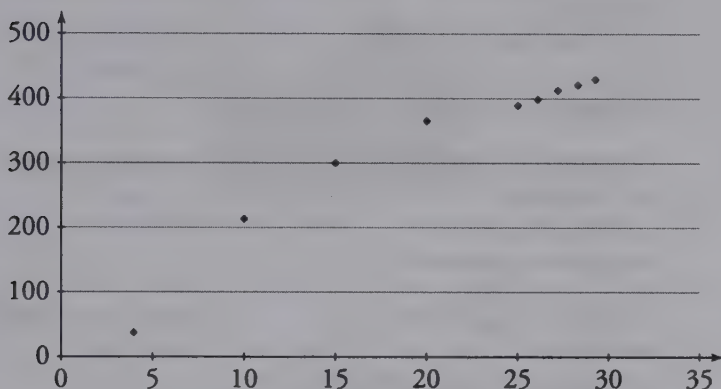
EXERCICE 4

Le tableau page suivante donne la production d'électricité d'origine nucléaire en France, exprimée en milliards de kWh, entre 1979 et 2004. Les rangs des années sont calculés par rapport à l'année 1975.

Année	1979	1985	1990	1995	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année x_i	4	10	15	20	25	26	27	28	29
Production y_i	37,9	213,1	297,9	358,8	395,2	401,3	416,5	420,7	427,7

Source : site Internet ministère de l'industrie.

Ces données sont représentées par le nuage de points ci-dessous :



Partie A – Recherche d'un ajustement affine

1. Donner à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au dixième). **[0,5 pt]**

2. a. D'après cet ajustement, quelle serait la production d'électricité nucléaire en France en 2005 ? **[0,5 pt]**

b. En réalité, en 2005, la production d'électricité nucléaire a été de 430 milliards de kWh. Calculer le pourcentage de l'erreur commise par rapport à la valeur réelle, arrondi à 0,1 % près, lorsqu'on utilise la valeur fournie par l'ajustement affine. **[0,75 pt]**

Partie B – Un autre modèle

Compte tenu de l'allure du nuage de points, on choisit un ajustement logarithmique et on modélise la production d'électricité nucléaire par la fonction f définie pour tout x de $[4 ; +\infty[$ par $f(x) = 197 \ln x - 237$.

1. Calculer la production d'électricité nucléaire prévisible avec ce modèle pour l'année 2005. Quelle conclusion peut-on en tirer ? **[0,75 pt]**

2. a. Résoudre dans $[4 ; +\infty[$ l'inéquation $f(x) \geq 460$. **[0,75 pt]**

b. Avec ce modèle, en quelle année peut-on prévoir que la production d'électricité nucléaire dépassera 460 milliards de kWh ? **[0,75 pt]**

7

POLYNÉSIE

Juin 2008

Exercice 1**[4 points ; 30 min]**

- QCM
- Lectures graphiques
- Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle
- Résolution graphique d'une équation

Exercice 2 (obligatoire)**[5 points ; 40 min]**

- Probabilité
- Arbre pondéré
- Schéma de Bernoulli

Exercice 2 (spécialité)**[5 points ; 40 min]**

- Graphe
- Interprétation des coefficients de la matrice M^n
- Recherche d'une chaîne minimale

Exercice 3**[4 points ; 30 min]**

- Statistiques
- Taux d'évolution
- Ajustement exponentiel

Exercice 4**[7 points ; 50 min]**

- Fonction logarithme népérien
- Calcul d'aire

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

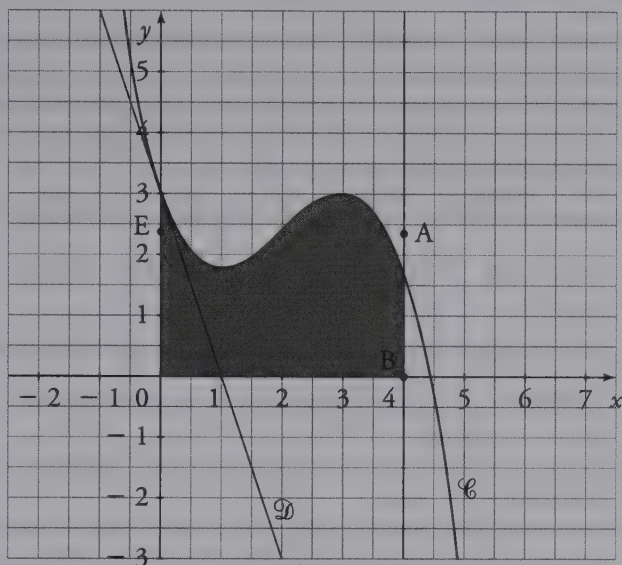
Soient f une fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et $\mathcal{C}$ sa courbe tracée page suivante.

La droite $\mathcal{D}$ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

On appelle B, A et E les points de coordonnées respectives $(4 ; 0)$,

$\left(4 ; \frac{179}{75}\right)$ et $\left(0 ; \frac{179}{75}\right)$.

Ces trois points n'appartiennent pas à la courbe $\mathcal{C}$.



Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

Barème : Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.

1. L'ordonnée à l'origine de la droite $\mathcal{D}$ est égale à :

- 0.
- 1.
- 3.

2. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal à :

- $-\frac{1}{3}$.
- 5.
- -3.

3. Sachant que l'aire grisée sur la figure est égale à l'aire du rectangle OBAE, la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 4]$ est :

- $\frac{179}{75}$.
- $\frac{716}{75}$.
- $-\frac{179}{75}$.

4. Sur l'intervalle $[0 ; 4]$, l'équation $f'(x) = 0$:

- possède deux solutions distinctes ;
- ne possède pas de solution ;
- possède une unique solution.

EXERCICE 2 (Obligatoire)

Un site internet offre la possibilité à des particuliers de vendre des objets aux enchères. Pour chaque objet, la durée des enchères dure une semaine. Si une annonce reçoit une enchère, alors la vente de l'objet est obligatoire à la fin des enchères et ce, même si le vendeur juge le prix de vente trop peu élevé. Sur ce site, une étude statistique a montré que :

- $\frac{3}{5}$ des annonces reçoivent une première enchère le lendemain de leur parution ; dans ce cas, 75 % des vendeurs sont satisfaits du prix de vente final.

- $\frac{1}{3}$ des annonces reçoit une première enchère au bout de trois jours et, dans ce cas, 57 % des vendeurs sont satisfaits du prix de vente final de leur objet.

- Les autres annonces ne reçoivent aucune enchère et le vendeur retire alors son objet de la vente.

On choisit au hasard une annonce mise en ligne sur le site. On note :

- L : l'événement « l'annonce reçoit une première enchère le lendemain de sa parution ».

- T : l'événement « l'annonce reçoit une première enchère au bout de trois jours ».

- A : l'événement « l'annonce ne reçoit aucune enchère ».

- S : l'événement « le vendeur est satisfait du prix de vente final de son objet » et $\bar{S}$ son événement contraire.

1. Traduire la situation par un arbre de probabilité. **[0,5 pt]**

2. Calculer la probabilité que l'annonce ait reçu une première enchère le lendemain de sa parution et que le vendeur soit satisfait du prix de vente final. **[0,5 pt]**

3. Démontrer que la probabilité que le vendeur soit satisfait du prix de vente de son objet est 0,64. **[1 pt]**

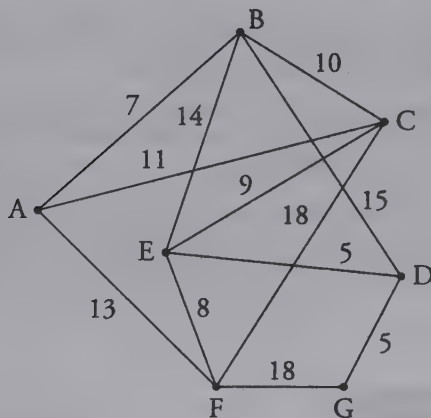
4. Un objet est vendu à un prix qui satisfait son vendeur. Quelle est la probabilité que cet objet ait reçu une première enchère dès le lendemain de la parution de l'annonce (*le résultat sera donné sous forme décimale, arrondi au centième*) ? **[1 pt]**

5. Marc a mis en vente le même jour trois jeux vidéo identiques sur ce site. On suppose que les déroulements de ces enchères sont indépendants les uns des autres. Calculer la probabilité qu'à la fin des enchères, Marc soit satisfait du prix de vente final d'au moins deux de ces jeux vidéo (*le résultat sera donné sous forme décimale, arrondi au centième*). **[2 pts]**

EXERCICE 2 (Spécialité)

Une grande ville a mis en place un système de location de bicyclettes en libre service. Un abonné peut ainsi louer une bicyclette dans une station, puis la déposer dans n'importe quelle station de son choix. La ville compte sept stations de location nommées A, B, C, D, E, F et G.

Les stations sont reliées entre elles par une piste cyclable et les temps de parcours en minutes sont indiqués sur le graphe ci-dessous.



1. Philippe, cycliste très prudent, décide de visiter cette ville en n'empruntant que des pistes cyclables.

a. A-t-il la possibilité d'effectuer un parcours empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables ? Justifier la réponse. **[0,75 pt]**

b. À la fin de ce parcours, pourra-t-il rendre sa bicyclette dans la station de départ ? Justifier la réponse. **[0,75 pt]**

2. On appelle M la matrice associée à ce graphe. On donne deux matrices N et T :

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 5 & 5 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 10 & 7 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 5 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 8 & 6 & 11 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 9 & 6 & 10 & 6 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 10 & 8 & 6 & 11 & 0 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

- a. Une des deux matrices N ou T est la matrice M^3 . Sans calculs, indiquer quelle est la matrice M^3 en justifiant la réponse. **[1 pt]**
- b. Philippe a loué une bicyclette à la station F et l'a rendue à la station E. Au cours de son déplacement, il est passé exactement deux fois devant une station. Combien de trajets différents a-t-il pu suivre ? Expliquer. **[0,5 pt]**
3. Le lendemain, il envisage de rejoindre le plus rapidement possible la station G en partant de la station A. À l'aide d'un algorithme, déterminer un tel parcours et donner alors le temps nécessaire pour l'effectuer. **[2 pts]**

EXERCICE 3

Le tableau ci-dessous présente l'évolution de l'indice des prix des logements anciens en Ile de France entre 2000 et 2006 (base 100 en 2000).

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5	6
Indice y_i des prix	100	106,3	114,3	126,1	143,6	166,3	181,5

(Source : INSEE)

On cherche à étudier l'évolution de l'indice des prix y en fonction du rang x de l'année.

- Calculer le taux d'évolution de cet indice entre 2000 et 2006. **[0,5 pt]**
- Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthogonal, d'unités graphiques :
 - sur l'axe des abscisses, 2 cm pour un an ;
 - sur l'axe des ordonnées, 1 cm pour 10 (en plaçant 100 à l'origine).
 L'allure de ce nuage suggère on ajustement exponentiel.

On pose $z = \ln y$.

[0,5 pt]

3. Recopier et compléter le tableau suivant (les valeurs de z_i seront arrondies au millièmme) :

Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$	4,605						

[0,5 pt]

4. Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.

a. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au millièmme).

[0,5 pt]

b. En déduire une approximation de l'indice des prix y en fonction du rang x de l'année.

[0,5 pt]

5. On prend l'approximation $y \approx 96e^{0,104x}$ et on suppose qu'elle reste valable pour les années suivantes.

a. Déterminer le plus petit entier n tel que $96e^{0,104n} \geq 250$.

[1 pt]

b. Donner une interprétation du résultat obtenu.

[0,5 pt]

EXERCICE 4

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln x + 2x^2 - 3.$$

Le tableau de variation de la fonction g est donné ci-dessous :

x	0	α	$+\infty$
g	$-\infty$	0	$+\infty$

En utilisant une calculatrice, on a obtenu $\alpha \approx 1,19$.

Dresser le tableau donnant le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

[0,5 pt]

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} + 2x - 5.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

a. Déterminer la limite de la fonction f en 0. **[0,5 pt]**

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. **[0,5 pt]**

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}. \quad \text{[1 pt]}$$

b. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variation. **[1 pt]**

c. Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout réel x supérieur ou égal à e .
Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation. **[1 pt]**

4. Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$.

a. Calculer la dérivée h' de h . **[0,5 pt]**

b. En remarquant que pour tout x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on a :

$$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{2} h'(x) + 2x - 5$$

trouver une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. **[1 pt]**

c. Déterminer l'aire en unités d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = e$ et $x = e^2$ (on donnera la valeur exacte, puis une valeur décimale arrondie au dixième).

[1 pt]

8

LA RÉUNION
Juin 2008**Exercice 1****[4 points ; 30 min]**

- QCM
- Signe d'une intégrale
- Résolution d'équations

Exercice 2 (obligatoire)**[5 points ; 40 min]**

- Nuage de points
- Ajustement affine
- Fonction exponentielle

Exercice 2 (spécialité)**[5 points ; 40 min]**

- Graphe probabiliste
- Matrice de transition
- Probabilité
- Suite géométrique

Exercice 3**[5 points ; 40 min]**

- Arbre de probabilités
- Calcul de probabilité

Exercice 4**[6 points ; 40 min]**

- Fonction logarithme
- Résolution graphique

SUJETS DE BAC

EXERCICE 1

Pour chacune des quatre propositions de ce QCM, une et une seule des affirmations est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point.

L'absence de réponse n'enlève et ne rapporte aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

Chacune des quatre propositions concerne une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5 ; 6]$, qui admet des primitives sur cet intervalle et dont on donne ci-dessous le tableau de variations :

x	-5	-3	2	4	6
$f(x)$	3		4		0
		↘	↗	↘	↗
		1		-2	

1. Si a et b sont deux réels tels que $2 < a < b < 4$, alors :

a. $f(a) > f(b)$.

b. $f(a) < f(b)$.

c. On ne peut pas comparer $f(a)$ et $f(b)$.

2. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ est :

a. 1.

b. 2.

c. 3.

3. a. $\int_4^5 f(x) dx < 0$.

b. $\int_4^5 f(x) dx > 0$.

c. Avec les données, on ne peut pas connaître le signe de $\int_4^5 f(x) dx$.

4. Si g est la fonction définie sur $[-5 ; 6]$ par $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$, alors :

a. L'équation $f(x) = g(x)$ n'a pas de solution.

b. L'équation $f(x) = g(x)$ a une unique solution.

c. On ne peut pas se prononcer sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 2 (Obligatoire)

On a relevé lors de six années consécutives le chiffre d'affaire d'une entreprise de prêt-à-porter de luxe créée en 2000. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaire y_i (en euros)	160 000	220 000	290 000	390 000	540 000	730 000

1. Pour $i = 1, 2, \dots, 5$ on pose $z_i = \ln y_i$.

a. Recopier et compléter le tableau suivant (donner une valeur arrondie à 10^{-2} près de chacun des résultats) :

x_i	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$						

[0,75 pt]

b. Représenter sur du papier millimétré le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; z_i)$ dans un repère orthonormal du plan (unité : 2 cm en commençant à la graduation 10 sur l'axe des ordonnées).

[0,75 pt]

c. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés (on obtiendra une équation de la forme $z = ax + b$ où les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-2} près).

[0,75 pt]

d. Dédurre de ce qui précède une expression de y en fonction de x sous la forme $y = ke^{ax}$, où k est un réel à déterminer et a le coefficient trouvé à la question précédente (le coefficient k sera arrondi à l'unité).

[0,5 pt]

2. On note C la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$C(x) = 120\,000e^{0,3x}.$$

a. Résoudre par le calcul l'inéquation $C(x) \geq 2\,000\,000$.

[1 pt]

b. On admet que $C(x_i)$ représente le chiffre d'affaire de l'entreprise pour l'année de rang x_i .

Quel chiffre d'affaire peut-on prévoir pour l'année 2008 (on arrondira le résultat au millier d'euros près) ? À partir de quelle année le chiffre d'affaire dépassera-t-il 2 millions d'euros ?

[1,5 pt]

EXERCICE 2

(Spécialité)

Les joueurs d'un club de football sont partagés en deux équipes : une équipe A et une équipe B.

L'entraîneur change la composition de ces équipes après chacun des matchs, suivant les performances des joueurs.

Une étude statistique menée au cours des saisons précédentes permet d'estimer que :

– si un joueur fait partie de l'équipe A, la probabilité qu'il reste dans cette équipe pour le match suivant est 0,6 ;

– si un joueur fait partie de l'équipe B, la probabilité qu'il change d'équipe le match suivant est 0,2.

1. Représenter les données précédentes par un graphe probabiliste G de sommets A et B et donner sa matrice de transition.

[1 pt]

2. Pour un entier naturel n donné, on note $P_n = (a_n \ b_n)$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste lors du match n .

Paul vient d'arriver dans le club et la probabilité a_0 qu'il joue dans l'équipe A pour le match de préparation (match 0) est 0,1.

L'état probabiliste initial est donc $P_0 = (0,1 \ 0,9)$.

a. Vérifier que $P_1 = (0,24 \ 0,76)$ et calculer P_2 . [0,5 pt]

b. Quelle est la probabilité que Paul joue dans l'équipe A lors du deuxième match de championnat (match 2) ? (on donnera la valeur approchée du résultat arrondie à 10^{-2} près) [0,5 pt]

3. On admet que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,4a_n + 0,2$.

On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = a_n - \frac{1}{3}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,4 et de premier terme $v_0 = \frac{-7}{30}$. [1 pt]

b. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = \frac{1}{3} (1 - 0,7 \times 0,4^n)$. [1 pt]

c. Déduire de ce qui précède la limite de la suite (a_n) .
Quel est l'état stable du graphe G ? [1 pt]

EXERCICE 3

Les membres d'un jeune groupe de musique présentent une chanson lors d'une audition. Dans le morceau qu'ils jouent, il y a un passage délicat sur lequel ils ne sont pas tout à fait au point.

En effet :

- le guitariste joue parfaitement ce morceau trois fois sur quatre ;
- la chanteuse échoue dans 50 % des cas si le guitariste se trompe et, sinon, elle commet des erreurs une fois sur cinq.

Les autres musiciens maîtrisent parfaitement leur partition.

On appelle G l'événement : « le guitariste joue parfaitement le morceau ».

On appelle C l'événement : « la chanteuse interprète le morceau sans faire d'erreur ».

1. Dessiner un arbre de probabilités qui modélise la situation décrite précédemment. [0,75 pt]

2. a. Déterminer la probabilité $p(G \cap C)$ que le groupe interprète la chanson sans erreur. [0,75 pt]

b. Calculer la probabilité qu'un, et un seul, des membres du groupe se trompe. [0,75 pt]

c. Déterminer la probabilité que la chanteuse interprète sans erreur le morceau. **[0,75 pt]**

3. Calculer $p_C(G)$ (on arrondira le résultat à 10^{-3} près) et interpréter concrètement ce résultat. **[1 pt]**

4. On admet que la probabilité qu'aucun des membres du groupe ne commette d'erreur est 0,6.

Le groupe participe avec sa chanson à trois concours, les trois prestations étant indépendantes les unes des autres. Quelle est la probabilité qu'ils jouent parfaitement à au moins l'un des trois concours ? **[1 pt]**

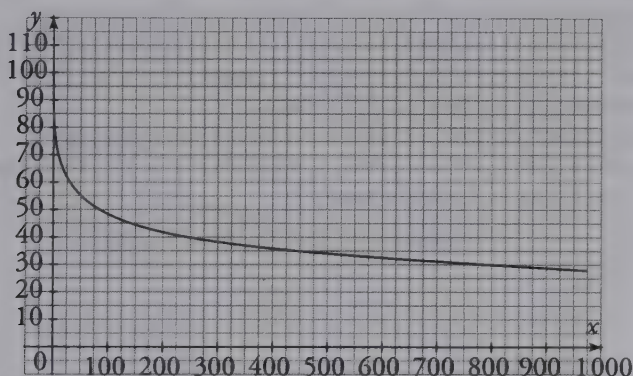
EXERCICE 4

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1\ 000]$ par :

$$f(x) = 89,5 - 8,9 \ln(x + 0,3)$$

et dont on donne la courbe représentative dans un repère orthogonal du plan ci-dessous.



1. Démontrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0 ; 1\ 000]$. **[0,5 pt]**

2. Montrer que résoudre l'inéquation $f(x) \leq 45$ revient à résoudre l'inéquation $\ln(x + 0,3) \geq 5$. Résoudre cette inéquation. **[1 pt]**

3. a. Démontrer que la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 1\ 000]$ par :

$$g(x) = 98,4x - 8,9(x + 0,3) \ln(x + 0,3)$$

est une primitive de f sur l'intervalle $[0 ; 1\ 000]$.

[1 pt]

b. On rappelle que la valeur moyenne m de f sur un intervalle $[a ; b]$ (a et b étant deux éléments distincts de l'ensemble de définition de f), est

$$\text{donnée par } m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[200 ; 800]$ (on donnera une valeur approchée de ce résultat arrondi à l'unité). **[1 pt]**

Partie B

Une éolienne doit être installée à proximité d'un village dont les habitants s'inquiètent de la nuisance sonore occasionnée. L'entreprise chargée de la fabrication de l'éolienne transmet donc les renseignements suivants :

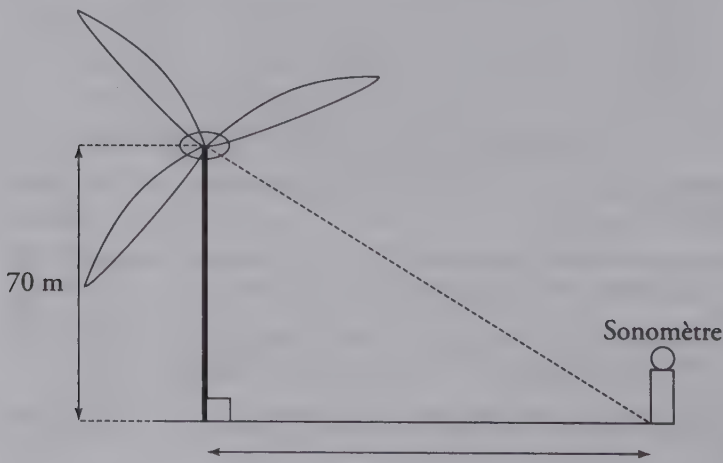
- au centre de l'éolienne (centre du rotor), le niveau sonore est d'environ 100 décibels (dB) ;
- lorsqu'on s'éloigne de x mètres du centre de l'éolienne, le niveau sonore est donné, en dB, par $f(x)$ (défini à la partie A).

1. En utilisant le graphique ci-dessous déterminer à quelle distance du centre de l'éolienne on doit être situé pour percevoir un niveau sonore inférieur à 40 dB.

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le centre du rotor de l'éolienne est situé à 70 m de hauteur (voir le schéma ci-dessous). Un sonomètre (qui mesure le volume sonore) est posé sur le sol à une certaine distance du pied de l'éolienne.

À quelle distance du pied de l'éolienne doit-t-on le placer pour que le niveau sonore enregistré soit égal à 45 dB (le résultat sera arrondi à l'unité) ? Expliquer la démarche suivie.



[2 pts]

9

INDE
Avril 2008**Exercice 1****[4 points ; 30 min]**

- QCM
- Pourcentages
- Probabilités
- Fonction logarithme népérien

Exercice 2 (obligatoire)**[5 points ; 40 min]**

- Probabilité
- Arbre pondéré
- Schéma de Bernoulli

Exercice 2 (spécialité)**[5 points ; 40 min]**

- Graphe probaliliste
- Suite

Exercice 3**[4 points ; 30 min]**

- Statistiques
- Ajustement affine

Exercice 4**[7 points ; 50 min]**

- Lectures graphiques
- Fonction exponentielle
- Résolution approchée d'une équation
- Calcul d'aire

EXERCICE 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

Barème : Une bonne réponse rapporte 1 point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point.

1. Le prix d'un produit dérivé du pétrole a augmenté de 60 % durant l'année 2005.

Pour revenir à sa valeur initiale, ce prix doit baisser de :

- 70 %.
- 60 %.
- 40 %.
- 37,5 %.

2. Lors d'une expérience aléatoire, on considère deux événements indépendants A et B qui vérifient $p(A) = 0,3$ et $p(B) = 0,5$. On a alors :

- $p(A \cup B) = 0,65$.
- $p(A \cup B) = 0,8$.
- $p(A \cup B) = 0,15$.
- Les données ne permettent pas de calculer $p(A \cup B)$.

3. f est la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x}.$$

La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan admet pour asymptote la droite d'équation :

- $y = 0$.
- $y = 2x - 1$.
- $x = 2$.
- $y = -x + 1$.

4. Le nombre $A = 2 \ln \left(\frac{e}{4} \right) + 5 \ln 2 + \ln \left(\frac{8}{e} \right)$ est égal à :

- $1 + 4 \ln 2$.
- $4 \ln 2 + 3$.
- $2 \ln 5 + 1$.
- $8 \ln 2$.

EXERCICE 2 (Obligatoire)

Une agence de voyages propose exclusivement trois destinations : la destination A, la destination G et la destination M.

50 % des clients choisissent la destination A.

30 % des clients choisissent la destination G.

20 % des clients choisissent la destination M.

Au retour de leur voyage, tous les clients de l'agence répondent à une enquête de satisfaction.

Le dépouillement des réponses à ce questionnaire permet de dire que 90 % des clients ayant choisi la destination M sont satisfaits, de même que 80 % des clients ayant choisi la destination G.

On prélève au hasard un questionnaire dans la pile des questionnaires recueillis.

On note les événements :

- A : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination A » ;
- G : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination G » ;
- M : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination M » ;
- S : « le questionnaire est celui d'un client satisfait » ;
- $\bar{S}$: « le questionnaire est celui d'un client insatisfait ».

1. Traduire les données de l'énoncé sur un arbre de probabilité. **[0,5 pt]**

2. a. Traduire par une phrase les événements $G \cap S$ et $M \cap S$, puis calculer les probabilités $p(G \cap S)$ et $p(M \cap S)$. **[1,5 pt]**

b. L'enquête montre que 72 % des clients de l'agence sont satisfaits. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $p(A \cap S)$. **[0,75 pt]**

c. En déduire $p_A(S)$, probabilité de l'événement S sachant que l'événement A est réalisé. **[0,5 pt]**

3. Le questionnaire prélevé est celui d'un client qui est satisfait. Le client a omis de préciser quelle destination il avait choisie. Déterminer la probabilité qu'il ait choisi la destination G (*on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible*). **[0,5 pt]**

4. On prélève successivement au hasard trois questionnaires dans la pile d'enquêtes. On suppose que le nombre de questionnaires est suffisamment élevé pour considérer que les tirages successifs sont indépendants.

Calculer la probabilité de l'événement : « les trois questionnaires sont ceux de clients insatisfaits » (*on donnera le résultat arrondi au millième*).

[1,25 pt]

EXERCICE 2 (Spécialité)

Afin de diminuer la circulation automobile, une municipalité organise un système de location de vélos à partir de deux relais A et B. La municipalité dispose de 200 vélos. Dans les deux relais, les capacités de parking sont suffisantes pour accueillir l'ensemble de ces vélos. Chaque jour, tous les vélos doivent être rendus dans n'importe lequel des deux points de location avant la fin de la journée.

On a constaté après une période de fonctionnement que chaque jour :

- 80 % des vélos garés le matin au relais A sont garés en fin de journée au relais A, les autres sont garés en fin de journée au relais B.
- 70 % des vélos garés le matin au relais B sont garés en fin de journée au relais B, les autres sont garés en fin de journée au relais A.

Au soir du 31 mars, il y a 100 vélos garés dans chacun des deux relais A et B.

On note :

- A : l'état « le vélo est garé en fin de journée au relais A » ;
- B : l'état « le vélo est garé en fin de journée au relais B » ;
- $P_n = (a_n \ b_n)$: la matrice ligne donnant l'état probabiliste de la répartition des vélos dans les relais A et B au soir du n -ième jour suivant le 31 mars, avec $a_n + b_n = 1$. On a $P_0 = (0,5 \ 0,5)$.

1. Tracer un graphe probabiliste représentant la situation décrite ci-dessus.

[0,5 pt]

2. On note M la matrice de transition du graphe probabiliste déterminé à la question 1.

On a $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer l'état probabiliste de la répartition des vélos au soir du 1^{er} avril.

[0,5 pt]

b. Déterminer l'état probabiliste de la répartition des vélos au soir du 2 avril.

[0,5 pt]

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

[0,75 pt]

b. On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = a_n - 0,6$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

[0,75 pt]

c. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n .

[0,5 pt]

d. Montrer que, pour tout entier n , $a_n = 0,6 - 0,1 \times (0,5)^n$.

[0,5 pt]

4. a. Déterminer la limite de la suite (a_n) .

[0,5 pt]

b. On rappelle qu'au soir du 31 mars, chaque relais disposait de 100 vélos (soit au total 200 vélos en location). Que peut-on en déduire sur la répartition à long terme des vélos entre les deux relais ?

[0,5 pt]

EXERCICE 3

Un centre d'appel comptait en 2001 soixante-six employés. Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre d'employés en fonction du rang de l'année.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'employés y_i	66	104	130	207	290	345	428

On cherche à étudier l'évolution du nombre y d'employés en fonction du rang x de l'année.

Une étude graphique montre qu'un ajustement affine ne convient pas.

On pose alors $z = \sqrt{y} - 3$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant (on donnera les résultats sous forme décimale, arrondis au centième).

Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	5,12						

[1 pt]

2. Représenter le nuage de points $M_i(x_i; z_i)$ associé à cette série statistique, dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm. Un ajustement affine vous paraît-il approprié ?

Justifier la réponse.

[0,5 pt]

3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés (on donnera les coefficients sous forme décimale, arrondis au centième).

Tracer cette droite sur le graphique précédent.

[1 pt]

4. En utilisant cet ajustement, à partir de quelle année peut-on prévoir que l'effectif de ce centre d'appel dépassera 900 employés ?

[1,5 pt]

EXERCICE 4

Les trois parties sont indépendantes.

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = (ax + b)e^{x-1} + c$, où a , b et c sont trois réels que l'on se propose de déterminer dans la partie A.

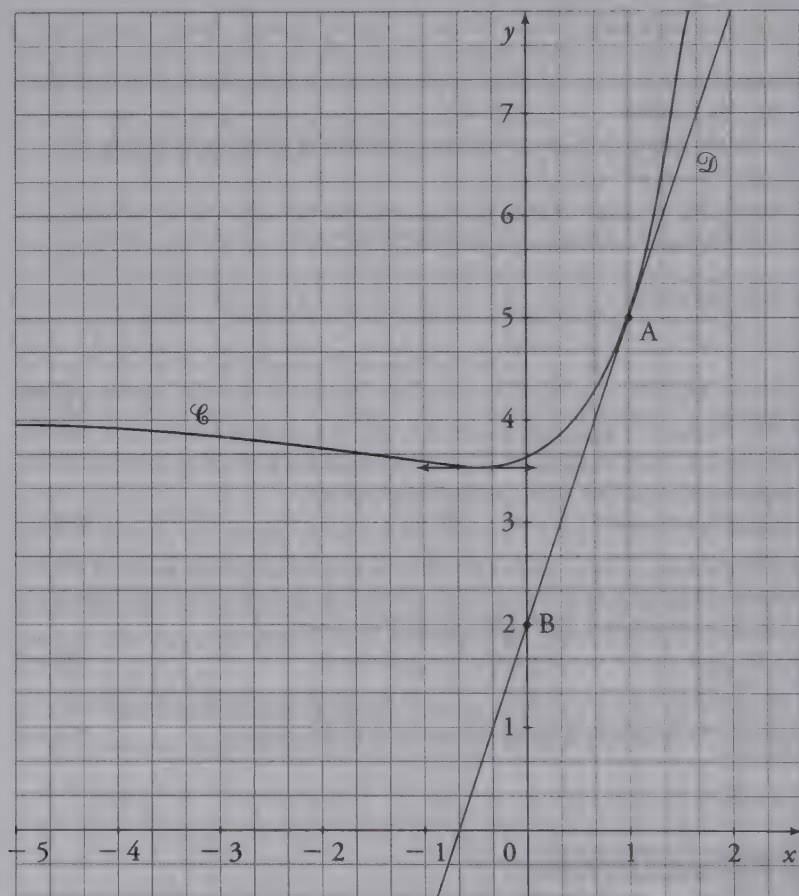
On note f' la fonction dérivée de f .

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal est représentée ci-dessous.

La courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(1 ; 5)$, elle admet la droite $\mathcal{D}$ comme tangente en ce point.

Le point $B(0 ; 2)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet également une tangente horizontale au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.



Partie A

1. a. Préciser les valeurs de $f(1)$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$.

[0,5 pt]

b. Déterminer le coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$. En déduire $f'(1)$. **[0,25 pt]**

2. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (ax + a + b)e^{x-1}$. **[0,5 pt]**

3. Montrer que a , b et c vérifient le système
$$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ a + 2b = 0 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$$
.

Déterminer les valeurs de a , b et c . **[0,75 pt]**

Partie B

On admet pour la suite de l'exercice que, pour tout réel x :

$$f(x) = (2x - 1)e^{x-1} + 4.$$

1. a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. **[0,5 pt]**

b. Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{2}{e}xe^x - \frac{1}{e}e^x + 4$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (on rappelle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$).

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$? **[1 pt]**

2. a. Donner, pour tout réel x , l'expression de $f'(x)$. **[0,25 pt]**

b. Établir le tableau de variation de f .

Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout réel x . **[0,75 pt]**

c. Montrer que l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution réelle α sur $[1 ; 2]$. On donnera un encadrement de α d'amplitude 0,1. **[1 pt]**

Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Partie C

1. On considère la fonction F définie pour tout réel x par :

$$F(x) = (2x - 3)e^{x-1} + 4x.$$

Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. **[0,5 pt]**

2. Soit Δ la partie du plan située entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Calculer l'aire de la partie Δ exprimée en unités d'aire ; on donnera la valeur exacte et la valeur décimale arrondie au dixième. **[1 pt]**

10**FRANCE MÉTROPOLITAINE**
Septembre 2007**Exercice 1****[4 points ; 30 min]**

- QCM
- Tableau de variation d'une fonction

Exercice 2 (obligatoire)**[5 points ; 40 min]**

- Statistiques
- Ajustement affine
- Ajustement polynomial

Exercice 2 (spécialité)**[5 points ; 40 min]**

- Graphe
- Ordre d'un graphe
- Chaîne eulérienne

Exercice 3**[7 points ; 55 min]**

- Fonction exponentielle
- Valeur moyenne d'une fonction
- Application économique

Exercice 4**[4 points ; 30 min]**

- Probabilité
- Construction d'un arbre

EXERCICE 1

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule réponse est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point.

Une réponse fausse enlève 0,25 point.

L'absence de réponse n'ajoute ni n'enlève aucun point.

Une fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble :

$$]-6 ; -3[\cup]-3 ; +\infty[.$$

Le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

x	-6	-4	-3,5	-3	2	$+\infty$
Variations de f	7	$\nearrow$ 8	$\searrow$ 0	$\searrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ 3	$\nearrow$ 5

1. On peut affirmer que :

Réponse A : $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = +\infty$

Réponse B : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$

Réponse C : $\lim_{x \rightarrow -6} f(x) = -\infty$

Réponse D : $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} f(x) = 0$

2. La courbe représentative de f admet pour asymptotes les droites d'équation :

Réponse A : $x = 5$ et $y = -3$

Réponse B : $x = -3$ et $y = 5$

Réponse C : $y = 8$ et $y = 3$

Réponse D : $x = -6$ et $y = 5$

3. Dans l'ensemble $] -6 ; -3[\cup] -3 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = 4$ admet :

Réponse A : 0 solution

Réponse B : 1 solution

Réponse C : 2 solutions

Réponse D : 3 solutions

4. On considère le nombre réel $I = \int_2^4 f(x) dx$. On peut affirmer que :

Réponse A : $0 \leq I \leq 3$

Réponse B : $6 \leq I \leq 10$

Réponse C : $3 \leq I \leq 6$

Réponse D : $I \geq 10$

EXERCICE 2 (Obligatoire)

Le tableau suivant donne, en milliers, le nombre de Pactes Civils de Solidarité (PACS) signés chaque année en France :

Années	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année, x_i	0	1	2	3	4
Nombres de PACS en milliers, y_i	22,1	19,4	25	31,1	39,6

Source INSEE.

1. Calculer, à 0,1 près, le pourcentage d'augmentation du nombre de milliers de Pactes Civils de Solidarité entre 2000 et 2004.

[0,5 pt]

2. On envisage un ajustement affine.

a. À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$.

Par la suite, on pose $f(x) = ax + b$.

[1 pt]

b. En supposant que cet ajustement affine est valable jusqu'en 2007, donner une estimation du nombre de milliers de Pactes Civils de Solidarité signés en 2007.

[0,5 pt]**3. On envisage un autre type d'ajustement.**

On modélise le nombre de milliers de Pactes Civils de Solidarité signés durant l'année $2000 + x$ (x entier) à l'aide de la fonction g définie par :

$$g(x) = 1,6x^2 - 1,8x + 21,4.$$

a. En utilisant ce second modèle, calculer le nombre de milliers de Pactes Civils de Solidarité signés en 2007.

[0,75 pt]

b. On suppose que l'évolution se poursuit selon ce modèle jusqu'en 2015. Le nombre de milliers de Pactes Civils de Solidarité signés en 2010 sera-t-il supérieur à 100 000 ? Justifier.

[0,75 pt]**4. Comparaison des deux ajustements.**

Pour chacun des deux modèles, on calcule ci-dessous le tableau des carrés des écarts entre les valeurs réelles et les valeurs calculées à l'aide de chacun des deux ajustements.

x_i	0	1	2	3	4
$(y_i - f(x_i))^2$	16	11,36	5,95	1,02	7,95

x_i	0	1	2	3	4
$(y_i - g(x_i))^2$	0,49				

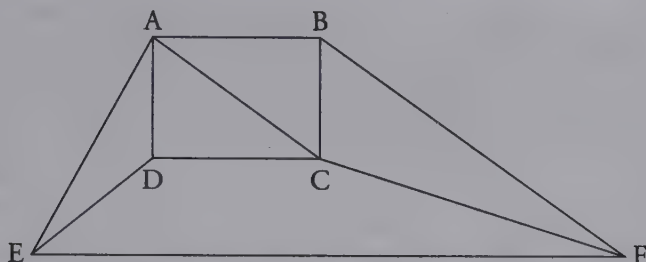
a. Recopier et compléter le deuxième tableau, les valeurs étant arrondies au centième.

[0,75 pt]

b. Lequel de ces deux ajustements semble le plus proche de la réalité ? Justifier.

[0,75 pt]**EXERCICE 2 (Spécialité)****Partie A**

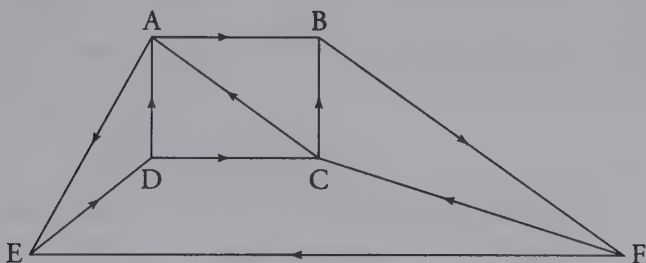
Le graphe suivant représente le plan d'une ville. Les arêtes du graphe représentent ses avenues commerçantes et les sommets du graphe les carrefours de ces avenues.



1. Donner l'ordre de ce graphe, puis le degré de chacun de ses sommets. [1 pt]
2. Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue ? Justifier votre réponse. [1 pt]

Partie B

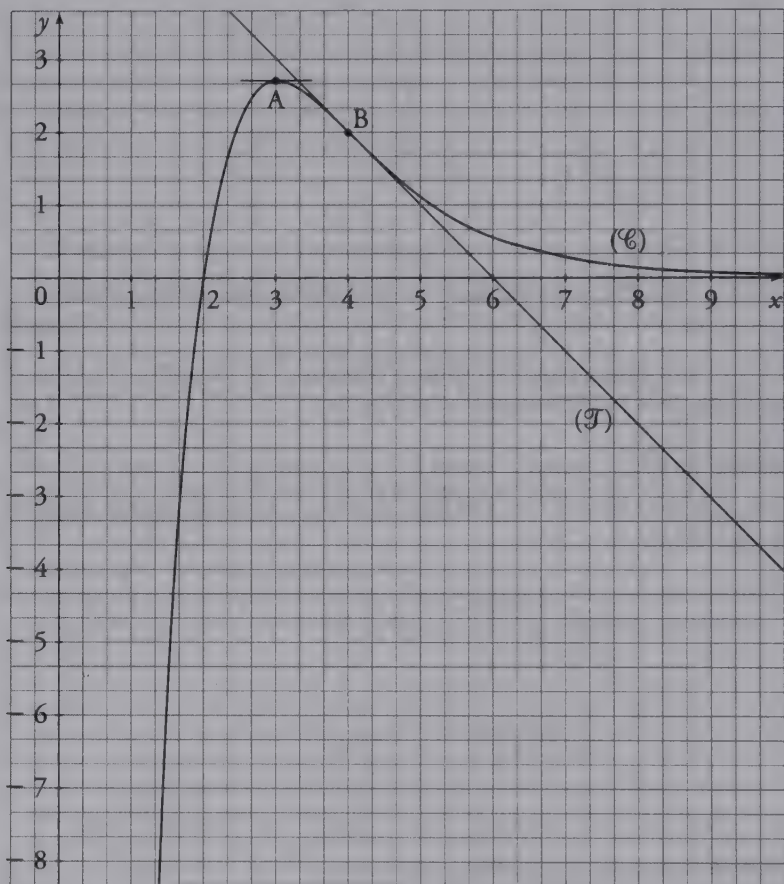
Dans le graphe suivant, on a indiqué le sens de circulation dans les différentes avenues.



1. Écrire la matrice M associée à ce graphe.
(On rangera les sommets dans l'ordre alphabétique). [1 pt]
2. a. Quel est le nombre de trajets de longueur 2 reliant D à B ? [1 pt]
b. Comment pourrait-on obtenir ce résultat uniquement par le calcul à partir de la matrice M ? [1 pt]

EXERCICE 3

La courbe ($\mathcal{C}$) page suivante est la représentation graphique dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.



Les points $A(3 ; e)$ et $B(4 ; 2)$ appartiennent à cette courbe.

La tangente à la courbe en A est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe en B coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 6.

Partie A – Lecture graphique

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes, sans justifier.

1. Pour quelles valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[3 ; 10]$ a-t-on $f(x) \leq 2$? [0,5 pt]
2. Déterminer $f'(3)$ et $f'(4)$. [0,5 pt]

Partie B – Étude de la fonction

La fonction f représentée ci-dessus est la fonction définie sur l'intervalle

$[0 ; +\infty[$ par $f(x) = (x-2)e^{(-x+4)}$.

1. a. Calculer $f(0)$. Donner la valeur décimale arrondie à l'unité.

[0,5 pt]

b. On donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

[0,5 pt]

2. a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (3-x)e^{(-x+4)}$.

[0,5 pt]

b. Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f .

[0,75 pt]

3. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = (1-x)e^{(-x+4)}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

En déduire la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[2 ; 10]$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au millièm.

[0,75 pt]

Rappel : Soit f une fonction et $[a ; b]$ un intervalle sur lequel f est définie et dérivable.

La valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[a ; b]$ est le nombre m tel que

$$m = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x) \, dx.$$

Partie C – Étude d'un bénéfice

Une entreprise vend x centaines de litres de parfum par jour :

$$1,8 \leq x \leq 4,5.$$

Le bénéfice en milliers d'euros réalisé, par jour, par l'entreprise lorsqu'elle vend x centaines de litres est donné par $f(x)$ pour $x \in [1,8 ; 4,5]$. On suppose donc que pour des raisons techniques et commerciales, l'entreprise vend au moins 180 litres et au plus 450 litres.

1. Calculer le bénéfice en euros réalisé sur la vente de 400 litres (soit 4 centaines de litres).

[1 pt]

2. Déterminer la quantité de litres à vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal.

Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à 1 €).

[1 pt]

3. À partir de quelle quantité journalière l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?

[1 pt]

EXERCICE 4

Jean s'amuse régulièrement sur un terrain de football avec le gardien de but.

Chaque partie consiste à tirer successivement deux tirs au but.

Au vu des résultats obtenus au cours de l'année, on admet que :

- la probabilité que Jean réussisse le premier tir au but est égal à 0,8 ;
- s'il réussit le premier, alors la probabilité de réussir le second est 0,7 ;
- s'il manque le premier, alors la probabilité de réussir le second est 0,5.

On note R_1 l'événement : « le premier tir au but est réussi » et $\bar{R}_1$ son événement contraire ; R_2 l'événement « le second tir au but est réussi » et $\bar{R}_2$ son événement contraire.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré. **[0,75 pt]**
2. Calculer la probabilité que les deux tirs au but soient réussis. **[0,75 pt]**
3. a. Calculer la probabilité que le second tir au but soit réussi. **[0,75 pt]**
b. Les événements R_1 et R_2 sont-ils indépendants ? Justifier la réponse. **[1 pt]**
4. On note A l'événement : « Jean a réussi exactement un tir au but ». Montrer que $p(A) = 0,34$. **[0,75 pt]**

11

AMÉRIQUE DU SUD

Novembre 2007

Exercice 1**[4 points ; 30 min]**

- QCM
- Lecture graphique

Exercice 2 (obligatoire)**[5 points ; 40 min]**

- Probabilités
- Construction d'un arbre
- Loi de probabilité
- Espérance

Exercice 2 (spécialité)**[5 points ; 40 min]**

- Surface
- Recherche d'un maximum

Exercice 3**[5 points ; 40 min]**

- Statistiques
- Ajustement affine
- Ajustement exponentiel

Exercice 4**[6 points ; 50 min]**

- Lecture graphique
- Fonction logarithme
- Calcul intégral

SUJETS DE BAC

EXERCICE 1

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La figure ci-après montre une partie de sa courbe représentative ($\mathcal{C}$) dans un repère orthonormal ($O ; \vec{i}, \vec{j}$).

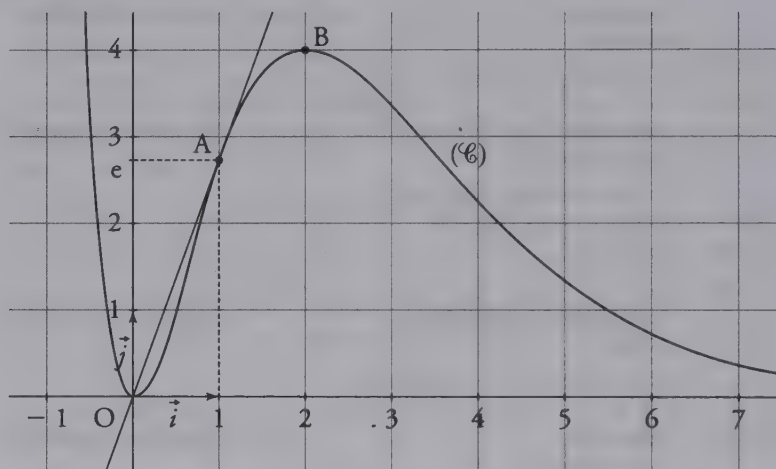
On dispose des renseignements suivants sur la fonction f et la courbe ($\mathcal{C}$) :

– La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 2]$, elle est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

– La courbe $(\mathcal{C})$ passe par l'origine du repère et par les points $A(1; e)$ et $B(2; 4)$.

– La droite (OA) est tangente en A à la courbe $(\mathcal{C})$ et l'axe des abscisses est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

On note f' la fonction dérivée de f et on appelle F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Il n'est pas demandé de justifier les réponses.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse n'enlève aucun point et n'en rapporte aucun. Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est 0.

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- b. L'équation $f(x) = 0,1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
- c. $f'(1) = f(1)$.
- d. $\int_2^4 f(x) \, dx < 5$.
- e. $\int_1^3 f'(x) \, dx < 1$.
- f. La fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$.
- g. $F(5) > F(6)$.
- h. La fonction f' est croissante sur l'intervalle $[0; 2]$.

EXERCICE 2 (Obligatoire)

Une revue professionnelle est proposée en deux versions : une édition papier et une édition électronique consultable via Internet. Il est possible de s'abonner à une seule des deux éditions ou de s'abonner à l'édition papier et à l'édition électronique.

L'éditeur de la revue a chargé un centre d'appel de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels.

On admet que lorsqu'un lecteur potentiel est contacté par un employé du centre d'appel, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition papier est égale à 0,2 ; s'il s'abonne à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à l'édition électronique est égale à 0,4 ; s'il ne s'abonne pas à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition électronique est égale à 0,1.

Partie A

Une personne figurant sur la liste de lecteurs potentiels est contactée par un employé du centre d'appel.

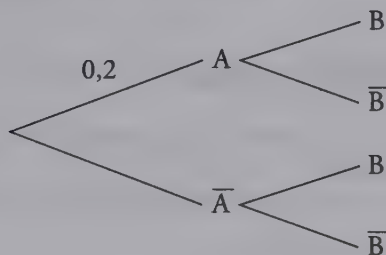
On note :

A l'événement « la personne contactée s'abonne à l'édition papier » ;

B l'événement « la personne contactée s'abonne à l'édition électronique » ;

$\bar{A}$ l'événement contraire de A, $\bar{B}$ l'événement contraire de B.

1. a. Reproduire et compléter l'arbre suivant :



[0,5 pt]

b. Donner la probabilité de $\bar{B}$ sachant A et la probabilité de $\bar{B}$ sachant $\bar{A}$.

[0,5 pt]

2. a. Calculer la probabilité que la personne contactée s'abonne à l'édition papier et à l'édition électronique.

[0,5 pt]

b. Justifier que la probabilité de l'événement B est égale à 0,16.

[0,5 pt]

c. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

[0,5 pt]

3. On suppose que la personne contactée s'est abonnée à l'édition électronique. Quelle est alors la probabilité qu'elle se soit aussi abonnée à l'édition papier ? **[0,75 pt]**

Partie B

Pour chaque personne contactée, le centre d'appel reçoit de l'éditeur de la revue :

- 2 € si la personne ne s'abonne à aucune des deux éditions ;
- 10 € si la personne s'abonne uniquement à l'édition électronique ;
- 15 € si la personne s'abonne uniquement à l'édition papier ;
- 20 € si la personne s'abonne aux deux éditions.

1. Reproduire et compléter, sans donner de justification, le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la somme reçue par le centre d'appel pour une personne contactée.

Somme reçue en €	2	10	15	20
Probabilité				

[0,75 pt]

2. Proposer, en expliquant votre démarche, une estimation de la somme que le centre d'appel recevra de l'éditeur s'il parvient à contacter 5 000 lecteurs potentiels. **[1 pt]**

EXERCICE 2 (Spécialité)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 7]$ et tout réel y de l'intervalle $[0 ; 5]$ par :

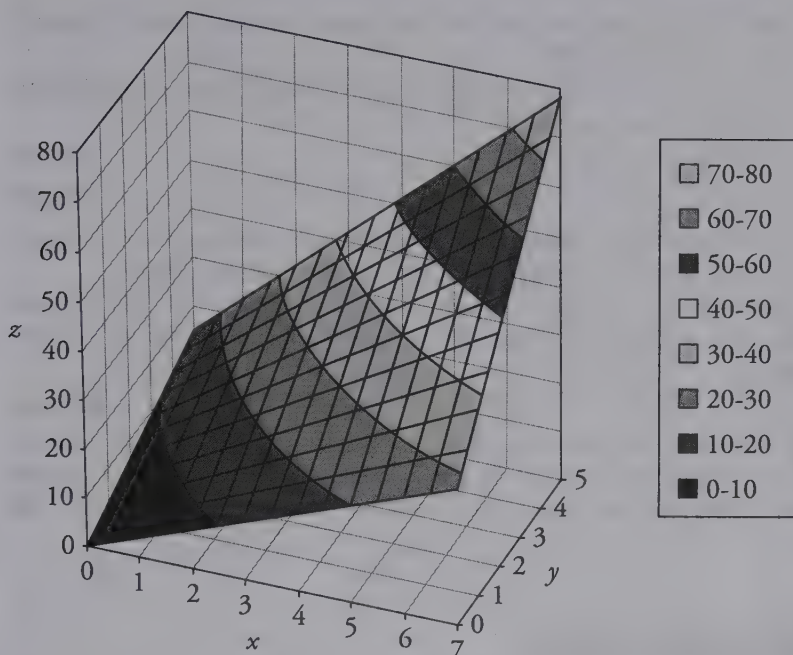
$$f(x ; y) = 4x + 3y + xy.$$

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On appelle $\mathcal{S}$ la surface représentant la fonction f dans un repère orthogonal de l'espace.

La figure ci-après, à rendre avec la copie, donne une vue de la surface $\mathcal{S}$.



1. A est le point de $\mathcal{S}$ d'abscisse 3 et d'ordonnée 4, B est le point de $\mathcal{S}$ d'ordonnée 2 et de cote 40.

a. Placer les points A et B sur la figure.

[0,75 pt]

b. Déterminer la valeur exacte de la cote du point A et la valeur exacte de l'abscisse du point B.

[0,75 pt]

2. On appelle $\mathcal{L}$ l'intersection de la surface $\mathcal{S}$ et du plan d'équation $y = 4$.

Déterminer la nature de l'ensemble $\mathcal{L}$ et surligner en couleur cet ensemble sur la figure.

[1 pt]

Partie B

Les activités d'une grosse entreprise sont réparties entre deux secteurs : le secteur P (production) et le secteur C (commercialisation).

Cette entreprise envisage d'investir au cours de l'année 2008 jusqu'à 7 millions d'euros dans le secteur P et jusqu'à 5 millions d'euros dans le secteur C. Le service chargé d'évaluer l'effet de ces investissements sur le chiffre d'affaire 2009 de l'entreprise, propose le modèle suivant :

Pour $0 \leq x \leq 7$ et $0 \leq y \leq 5$, si l'entreprise investit au cours de l'année 2008, x millions d'euros dans le secteur P et y millions d'euros dans le

secteur C, cela entraînera en 2009 une hausse du chiffre d'affaire égale à $f(x; y)$ millions d'euros.

1. Déterminer la hausse du chiffre d'affaire 2009 prévue par ce modèle dans chacun des cas suivants :

a. $x = 3$ et $y = 5$ [0,5 pt]

b. $x = 7$ et $y = 1$. [0,5 pt]

2. On suppose que l'entreprise décide de fixer à 8 millions d'euros le montant total des investissements prévus au cours de l'année 2008.

a. Montrer que, sous cette contrainte, on peut exprimer $f(x; y)$ en fonction de x seulement. On note $g(x)$ l'expression ainsi obtenue. Vérifier que :

$$g(x) = -x^2 + 9x + 24. \quad [0,75 \text{ pt}]$$

b. Selon le modèle proposé, comment faudra-t-il répartir entre les secteurs P et C les 8 millions euros à investir au cours de l'année 2008 pour obtenir une hausse maximale du chiffre d'affaire de l'année 2009 ? [0,75 pt]

EXERCICE 3

Une banque propose à ses clients de s'abonner au service « bank.net » qui permet de consulter son compte et d'effectuer des transactions via une connexion Internet.

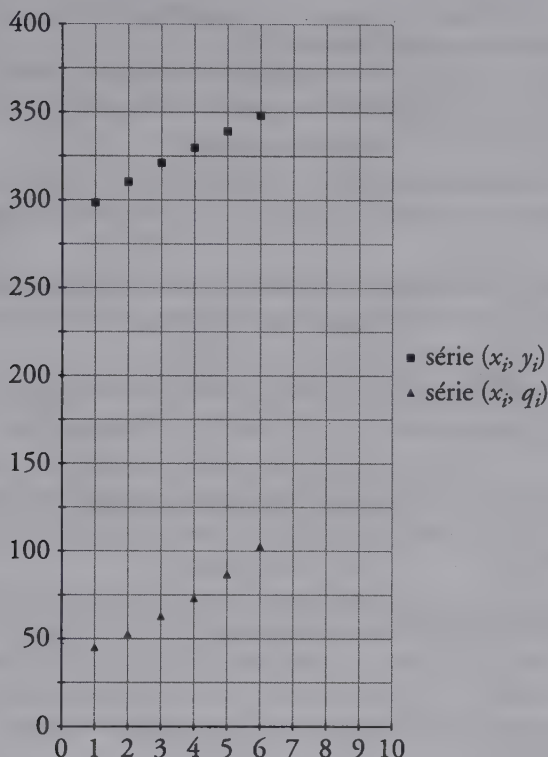
Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de clients de la banque et du nombre de clients abonnés à « bank.net » de l'année 2001 à l'année 2006.

y_i est le nombre de milliers de clients de la banque au 1^{er} janvier de l'année de rang x_i .

q_i est le nombre de milliers de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1^{er} janvier de l'année de rang x_i .

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de clients : y_i (en milliers)	298	310	321	330	339	348
Nombre d'abonnés à « bank.net » : q_i (en milliers)	45	53	63	74	87	103

Les séries statistiques $(x_i; y_i)$ et $(x_i; q_i)$ sont représentées sur la figure page suivante.



1. a. Calculer le pourcentage de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1^{er} janvier de l'année 2001 (donner un résultat arrondi à l'unité). **[0,5 pt]**

b. Calculer le taux d'accroissement du nombre de clients de la banque abonnés à « bank.net » entre le 1^{er} janvier 2001 et le 1^{er} janvier 2006 (ce taux sera exprimé en pourcentage et arrondi à l'unité). **[0,5 pt]**

2. Modélisation de l'évolution du nombre de clients de la banque par un ajustement affine.

a. Donner, à l'aide la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Le coefficient directeur sera arrondi au dixième et l'ordonnée à l'origine sera arrondie à l'unité. **[0,75 pt]**

b. En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle, donner une estimation du nombre de clients de la banque au premier janvier 2010. **[0,5 pt]**

3. La forme du nuage de points de coordonnées $(x_i; q_i)$ permet d'envisager un ajustement exponentiel.

En effectuant le changement de variable $z_i = \ln(q_i)$, on obtient la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés d'équation :

$$z = 0,165x + 3,642.$$

a. En déduire une expression de q en fonction de x de la forme $q = kA^x$ et donner les valeurs approchées arrondies au centième des constantes k et A .

[0,75 pt]

b. On admet que l'évolution du nombre de clients abonnés à « bank.net » entre les années 2001 et 2006 peut être modélisée par la relation :

$$q = 38,17 \times (1,18)^x.$$

En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle, donner une estimation du nombre de clients abonnés à « bank.net » au 1^{er} janvier 2010.

[0,5 pt]

c. Quel serait, selon l'estimation obtenue à la question 2.b. et l'estimation précédente, le pourcentage de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1^{er} janvier 2010 ?

[0,5 pt]

4. On suppose que, jusqu'au 1^{er} janvier 2016, le nombre de clients de la banque évolue selon le modèle obtenu à la question 2.a. et le nombre de clients de la banque abonnés à « bank.net » évolue selon le modèle donné à la question 3.b.

À l'aide de ces deux modèles, quelles prévisions obtient-on pour 2016 ?

Qu'en pensez-vous ?

[1 pt]

EXERCICE 4

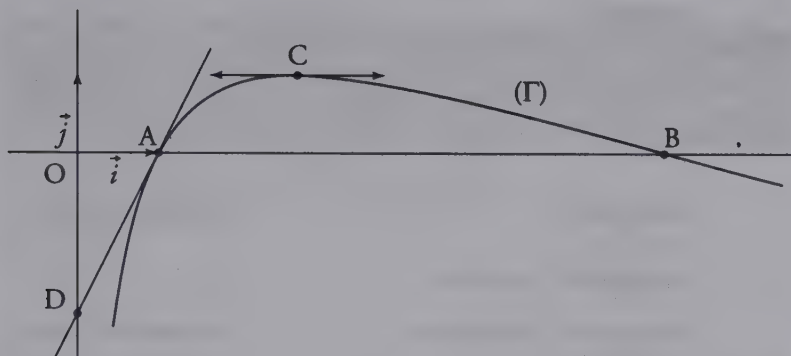
On admettra que les fonctions considérées dans cet exercice sont dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (2 - \ln x) \ln x.$$

La figure page suivante donne la courbe représentative (Γ) de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. La courbe (Γ) coupe l'axe des abscisses en $A(1; 0)$ et en B .

La tangente en C à la courbe (Γ) est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente en A à la courbe (Γ) coupe l'axe des ordonnées en D .



1. Déterminer l'abscisse du point B (la valeur exacte est demandée). [1 pt]
2. Calculer la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$. [1 pt]
3. On note f' la fonction dérivée de f sur $]0 ; +\infty[$.
- a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x}. \quad [1 \text{ pt}]$$

- b. Déterminer les coordonnées du point C et l'ordonnée du point D (les valeurs exactes sont demandées). [1 pt]

4. a. Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = x[f(x) + 2 \ln x - 4].$$

Démontrer que g est une primitive de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. [1 pt]

- b. Calculer $\int_1^{e^2} f(x) dx$ et donner une interprétation géométrique de cette intégrale. [1 pt]

12**ANTILLES-GUYANE**
Septembre 2007**Exercice 1****[4 points ; 30 min]**

- QCM
- Fonction logarithme

Exercice 2 (obligatoire)**[5 points ; 40 min]**

- Statistiques
- Ajustement logarithmique

Exercice 2 (spécialité)**[5 points ; 40 min]**

- Fonction de deux variables
- Courbe de niveau

Exercice 3**[5 points ; 40 min]**

- Fonction exponentielle
- Calcul d'aire

Exercice 4**[6 points ; 50 min]**

- Probabilité
- Construction d'un arbre
- Loi de probabilité
- Espérance

EXERCICE 1

Pour chacune des affirmations suivantes, recopier la proposition qui vous semble exacte sur votre copie. Aucune justification n'est demandée.

Barème : Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

1. La fonction $F : x \mapsto \ln(2x + 4)$ est une primitive sur $[0 ; +\infty[$ de la fonction f définie par :

• $f(x) = \frac{1}{x+4}$ • $f(x) = \frac{1}{2x+4}$ • $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

2. L'intégrale $\int_0^1 3xe^{x^2} dx$ est égale à :

$$\bullet 6(e-1) \qquad \bullet \frac{3}{2}(e-1) \qquad \bullet \frac{3}{2}e.$$

3. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x + 1$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 passe par le point de coordonnées :

$$\bullet (2; 0) \qquad \bullet (1; -1) \qquad \bullet \left(2; \frac{3}{2} - \ln 2\right).$$

4. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x + \ln\left(\frac{x+1}{2x}\right)$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

$$\bullet y = 0 \qquad \bullet y = 2x - \ln 2 \qquad \bullet y = 2x.$$

EXERCICE 2 (Obligatoire)

On donne ci-dessous la proportion, en pourcentage, du nombre d'enfants nés hors mariage en France métropolitaine.

Année a_i	1980	1985	1990	1995	2000	2003
Proportion y_i	11,4	19,6	30,1	37,6	42,6	45,2

On souhaite effectuer un ajustement de cette série statistique de la proportion en fonction de l'année.

1. a. Construire le nuage de points de coordonnées $(a_i; y_i)$ dans le plan muni du repère orthogonal suivant :

– sur l'axe des abscisses, on placera 1980 à l'origine et on prendra comme unité 0,5 cm ;

– sur l'axe des ordonnées, on placera 10 à l'origine et on prendra comme unité 0,5 cm. **[0,75 pt]**

b. Un ajustement affine semble-t-il adapté ? **[0,5 pt]**

2. On note a l'année et y la proportion, on pose $x = a - 1950$ et $t = \ln x$.

a. Compléter le tableau suivant :

Année a_i	1980	1985	1990	1995	2000	2003
$x_i = a_i - 1950$	30					
$t_i = \ln x_i$	3,401					
y_i	11,4					

- On donnera pour t des valeurs arrondies au millième. **[1 pt]**
- b.** Exprimer y en fonction de t par une régression linéaire en utilisant la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients au dixième. **[0,75 pt]**
- c.** En déduire la relation $y = 61,3 \ln x - 197$. **[0,75 pt]**
- d.** Quel pourcentage du nombre d'enfants nés hors mariage (arrondi à 1 %), peut-on prévoir en 2010 en utilisant cet ajustement ? **[0,5 pt]**
- e.** À partir de quelle année peut-on prévoir que la proportion du nombre d'enfants nés hors mariage sera supérieure à 60 % ? **[0,75 pt]**

EXERCICE 2 (Spécialité)

Une entreprise désire construire dans son hall d'entrée un aquarium ayant la forme d'un pavé droit de hauteur 5 dm (décimètres).

Ses deux autres dimensions, exprimées en dm, sont des entiers naturels x et y tels que $x \in]0 ; 20[$ et $y \in]0 ; 20[$.

La structure de cette construction est un bâti métallique correspondant aux 12 arêtes du pavé droit et nécessitant des réglettes d'aluminium dont le prix de revient est de 0,8 euro le dm.

Les quatre parois verticales et le fond de cet aquarium sont construits en verre.

Partie A

On décide d'investir exactement 80 euros pour la construction du bâti métallique.

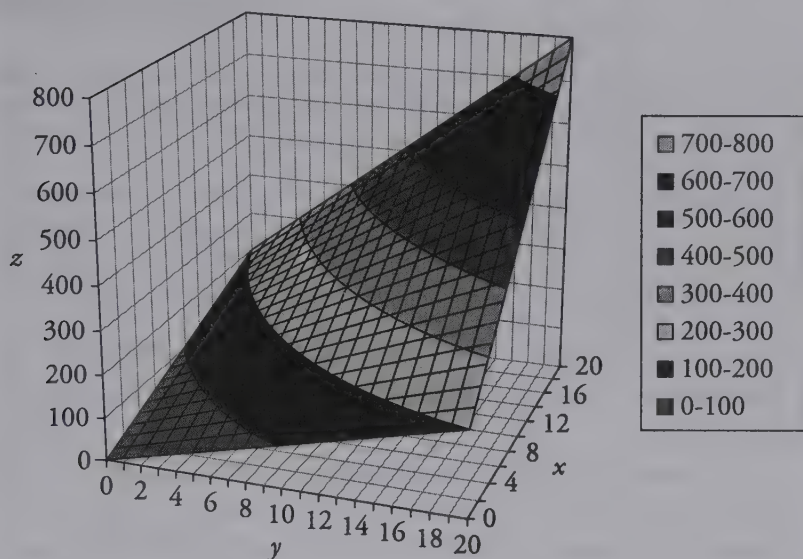
- 1.** Montrer que, pour cet investissement, les dimensions x et y sont liées par la contrainte $x + y = 20$. **[0,5 pt]**
- 2. a.** Déterminer, en fonction de x et y , le volume V , exprimé en dm^3 , de cet aquarium. **[0,5 pt]**
- b.** En déduire le volume V en fonction de x sous la contrainte précédente. **[0,5 pt]**
- 3.** On définit la fonction f sur l'intervalle $]0 ; 20[$ par $f(x) = V$.
 - a.** Montrer que la fonction f admet un maximum sur $]0 ; 20[$. **[0,5 pt]**
 - b.** En déduire les dimensions de l'aquarium pour que son volume soit maximal ainsi que la valeur de ce volume maximal. **[0,5 pt]**

Partie B

Soit g la fonction définie pour tout $x \in]0 ; 20[$ et tout $y \in]0 ; 20[$ par :

$$g(x; y) = xy + 10(x + y).$$

On donne ci-dessous la représentation graphique de la surface d'équation $z = g(x; y)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



1. Quelle est la nature de la section de cette surface par le plan d'équation $x = 12$, parallèle au plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$? Justifier la réponse. [0,5 pt]

2. Montrer que $g(x; y)$ représente en fonction des dimensions x et y l'aire $\mathcal{S}$, exprimée en dm^2 , de la surface vitrée de l'aquarium. [0,5 pt]

3. On suppose pour cette question que $x = 12$.

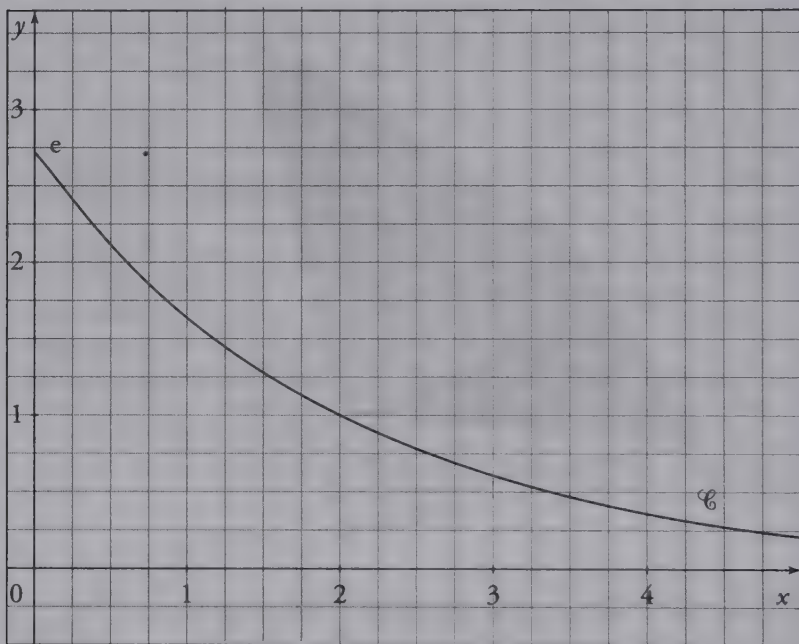
a. Calculer l'aire de la surface vitrée de l'aquarium dans le cas où la contrainte de la **partie A** est respectée. [0,5 pt]

b. Déterminer, à l'aide du graphique, les valeurs de y pour lesquelles l'aire est comprise entre 400 et 500 dm^2 . [0,5 pt]

c. Vérifier le résultat précédent en utilisant le résultat de la question 1. [0,5 pt]

EXERCICE 3

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x+1}$ dans un repère orthonormé du plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.



1. Démontrer que l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 est :

$$y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Tracer $\mathcal{T}$ sur le graphique.

[1 pt]

2. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x - 2.$$

a. Démontrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[0 ; 2]$ et croissante sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

[1 pt]

b. Calculer $g(2)$. En déduire le signe de g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Interpréter graphiquement le résultat.

[1 pt]

- 3. a.** Hachurer sur le graphique le domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite $\mathcal{T}$, la droite d'équation $x = 2$ et l'axe des ordonnées. [1 pt]
- b.** Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en cm^2 . On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} . [1 pt]

EXERCICE 4

Sur son trajet quotidien qui le conduit de son domicile à son lieu de travail, un automobiliste rencontre deux feux tricolores. Si, lorsqu'il parvient à leur niveau, le signal est vert, il passe, si le signal est orange ou rouge, il s'arrête. On note :

A_1 l'événement « l'automobiliste s'arrête au premier feu » ;

A_2 l'événement « l'automobiliste s'arrête au deuxième feu ».

On note $\bar{A}_1$ et $\bar{A}_2$ les événements contraires des événements A_1 et A_2 .

1. Lorsque l'automobiliste se présente au premier feu, la probabilité que le signal soit orange est $\frac{1}{6}$, la probabilité qu'il soit rouge est $\frac{1}{3}$.

a. Quelle est la probabilité que l'automobiliste s'arrête au premier feu ? [0,75 pt]

b. Quelle est la probabilité qu'il passe sans s'arrêter au premier feu ? [0,75 pt]

2. Si l'automobiliste s'est arrêté au premier feu, la probabilité qu'il s'arrête également au deuxième feu est $\frac{1}{2}$; s'il ne s'est pas arrêté au premier feu, la probabilité qu'il s'arrête au deuxième feu est $\frac{1}{3}$.

a. Illustrer cette situation par un arbre pondéré. [0,75 pt]

b. Démontrer que la probabilité que l'automobiliste ne s'arrête pas sur son trajet est $\frac{1}{3}$. [0,75 pt]

c. Calculer $p(A_1 \cap A_2)$ et $p(\bar{A}_1 \cap A_2)$, en déduire $p(A_2)$. [0,75 pt]

d. L'automobiliste s'est arrêté au deuxième feu. Quelle est la probabilité qu'il se soit également arrêté au premier feu ? [0,75 pt]

3. Si l'automobiliste effectue le trajet sans s'arrêter, celui-ci dure neuf minutes, s'il s'arrête une fois, douze minutes, et s'il s'arrête deux fois, quinze minutes.

a. Déterminer la loi de probabilité de la durée du trajet. [0,75 pt]

b. Déterminer la durée moyenne du trajet. [0,75 pt]

13**NOUVELLE-CALÉDONIE**
Novembre 2007**Exercice 1****[4 points ; 30 min]**

- QCM
- Lecture graphique

Exercice 2 (obligatoire)**[5 points ; 40 min]**

- Statistiques
- Ajustement (droite de Mayer)
- Ajustement (droite des moindres carrés)

Exercice 2 (spécialité)**[5 points ; 40 min]**

- Graphe
- Chaîne eulérienne
- Matrice
- Chemin de longueur minimale

Exercice 3**[5 points ; 40 min]**

- Probabilité

Exercice 4**[7 points ; 55 min]**

- Fonction exponentielle
- Calcul d'aire

EXERCICE 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; 2]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

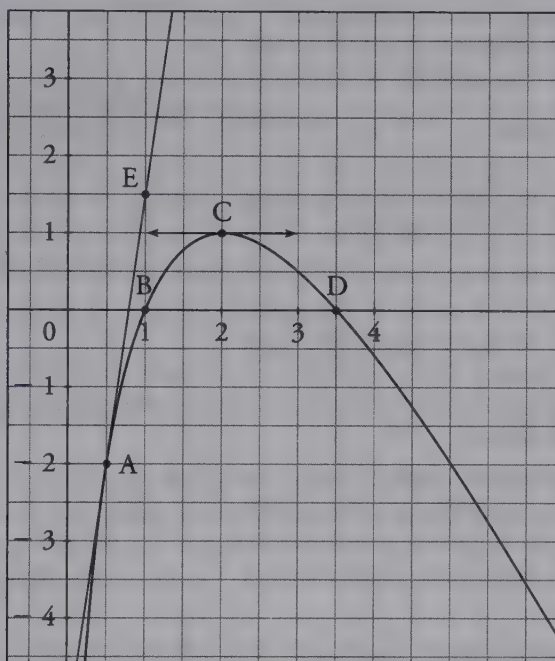
On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

La courbe Γ représentative de la fonction f dans un repère orthonormé est tracée ci-après.

Elle passe par les points $A\left(\frac{1}{2} ; -2\right)$, $B(1 ; 0)$, $C(2 ; 1)$ et $D\left(\frac{7}{2} ; 0\right)$.

E est le point de coordonnées $\left(1 ; \frac{3}{2}\right)$.

La courbe Γ admet au point C une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
La droite (AE) est tangente à la courbe Γ au point A.



Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou fausse.
Les réponses ne seront pas justifiées.

Barème : une réponse exacte rapporte 0,5 point ; une réponse inexacte retire 0,25 point ; l'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

- L'équation $f(x) = -1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- Le coefficient directeur de la droite (AE) est égal à $\frac{1}{7}$.
- Les fonctions f et f' ont le même signe sur l'intervalle $[1 ; 2]$.
- Les primitives de la fonction f sont croissantes sur l'intervalle $\left[1 ; \frac{7}{2}\right]$.
- On peut calculer $\ln [f(x)]$ pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- La fonction g définie sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$ par $g(x) = e^{f(x)}$ est croissante sur cet intervalle.

EXERCICE 2 (Obligatoire)

Un club sportif a été créé au début de l'année 2000 et, au cours de cette année-là, 140 adhérents s'y sont inscrits.

Le tableau ci-dessous donne le nombre d'adhérents de 2000 à 2005.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre d'adhérents y_i	140	165	220	240	260	310

Le détail des calculs statistiques à effectuer à la calculatrice n'est pas demandé.

1. Représenter dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ le nuage des points $M_i(x_i ; y_i)$ associé à cette série statistique.

On prendra comme unités graphiques : 2 cm pour 1 année en abscisse et 1 cm pour 10 adhérents en ordonnée. Sur l'axe des ordonnées, on commencera la graduation à 120. **[0,5 pt]**

2. Un premier ajustement du nuage des points $M_i(x_i ; y_i)$.

a. On désigne par G_1 le point moyen des trois points M_1, M_2 et M_3 du nuage et par G_2 le point moyen des trois points M_4, M_5 et M_6 du nuage. Calculer les coordonnées respectives de G_1 et de G_2 dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. **[0,75 pt]**

b. Déterminer l'équation réduite $y = Ax + B$ de la droite $(G_1 G_2)$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les coefficients A et B seront donnés sous la forme de fractions irréductibles.

Tracer la droite $(G_1 G_2)$ sur le graphique. **[0,75 pt]**

c. En utilisant la droite $(G_1 G_2)$ comme droite d'ajustement du nuage, calculer le nombre d'adhérents au club sportif que l'on peut prévoir pour l'année 2007. **[0,5 pt]**

3. Dans cette question, on utilise la droite des moindres carrés.

a. Soit Δ la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite Δ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. **[0,75 pt]**

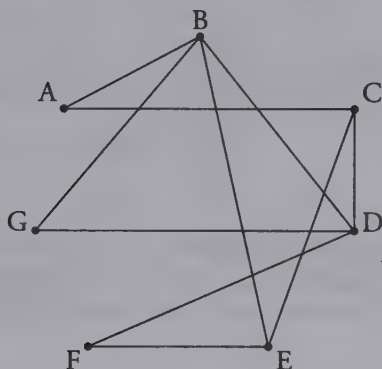
b. En utilisant la droite Δ , calculer le nombre d'adhérents au club sportif que l'on peut prévoir pour l'année 2007. **[0,5 pt]**

4. a. Si le taux d'augmentation du nombre d'adhérents d'une année à l'autre était fixe et égal à $t\%$, quelle serait la valeur de t arrondie au centième qui donnerait la même augmentation du nombre d'adhérents entre 2000 et 2005 ? **[0,75 pt]**

- b. Avec ce même taux d'augmentation t , quel serait le nombre d'adhérents, arrondi à l'unité, pour l'année 2007 ? [0,5 pt]

EXERCICE 2 (Spécialité)

Sur le graphe ci-dessous, les sept sommets A, B, C, D, E, F et G correspondent à sept villes. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une liaison entre les deux villes correspondantes.



Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Est-il possible de trouver un trajet, utilisant les liaisons existantes, qui part d'une des sept villes et y revient en passant une fois et une seule fois par toutes les autres villes ? [1,5 pt]

2. On note M la matrice associée au graphe ci-dessus. Les sommets sont rangés suivant l'ordre alphabétique.

$$\text{On donne } M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 10 & 9 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 0 & 9 & 8 & 0 & 3 \\ 1 & 10 & 9 & 2 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 7 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

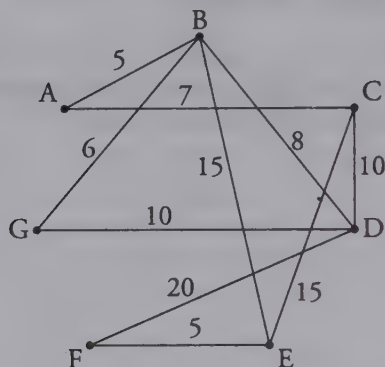
Donner le nombre de chemins de longueur 3 qui relient le sommet A au sommet F.

Les citer tous. Aucune justification n'est demandée.

[1,5 pt]

3. On donne ci-dessous et sur le graphe ci-après les distances exprimées en centaines de kilomètres entre deux villes pour lesquelles il existe une liaison :

AB : 5 ; AC : 7 ; BD : 8 ; BE : 15 ; BG : 6 ;
CD : 10 ; CE : 15 ; DF : 20 ; DG : 10 ; EF : 5.



Un représentant de commerce souhaite aller de la ville A à la ville F. En expliquant la méthode utilisée, déterminer le trajet qu'il doit suivre pour que la distance parcourue soit la plus courte possible et donner cette distance. [2 pts]

EXERCICE 3

Une étude réalisée auprès des élèves d'un lycée a permis d'établir que 55 % des élèves possèdent un ordinateur. Parmi les élèves qui ont un ordinateur, 98 % possèdent un téléphone portable.

De plus, parmi ceux qui possèdent un téléphone portable, 60 % possèdent un ordinateur.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats au centième donc les pourcentages à l'unité.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On choisit au hasard un élève de ce lycée. On note :

M l'événement : « l'élève possède un ordinateur » ;

T l'événement : « l'élève possède un téléphone portable » ;

$\overline{M}$ l'événement contraire de M ;

$\overline{T}$ l'événement contraire de T.

1. a. Calculer la probabilité que l'élève possède un ordinateur et un téléphone portable. [1 pt]

b. En déduire la probabilité que l'élève possède un téléphone portable. [1 pt]

2. a. On prend 0,90 comme valeur de la probabilité de l'événement T. Calculer la probabilité que l'élève ne possède pas d'ordinateur mais possède un téléphone portable. [1 pt]

b. En déduire la probabilité que l'élève possède un téléphone portable sachant qu'il ne possède pas d'ordinateur. [1 pt]

Partie B

On choisit trois élèves au hasard, indépendamment les uns des autres. On note E l'événement « exactement deux des trois lycéens choisis possèdent un ordinateur ».

Calculer la probabilité de l'événement E. [1 pt]

EXERCICE 4

Partie A

On considère la fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = e^{2x} - 7e^x + 6.$$

On note h' sa fonction dérivée.

1. a. Calculer la limite de la fonction h en $-\infty$. [0,5 pt]

b. Calculer la limite de la fonction h en $+\infty$.
(On pourra utiliser l'égalité vraie pour tout réel x :

$$h(x) = e^x(e^x - 7 + 6e^{-x}). \quad [0,75 \text{ pt}]$$

2. Calculer $h\left(\ln\left(\frac{7}{2}\right)\right)$, $h(0)$ puis $h(\ln 6)$. [0,75 pt]

3. Déterminer par le calcul l'image $h'(x)$ d'un réel x par la fonction h' et étudier les variations de la fonction h .

Dresser le tableau de variation de la fonction h et faire figurer les résultats des questions précédentes dans ce tableau. [1 pt]

4. En déduire le tableau des signes de la fonction h . [0,5 pt]

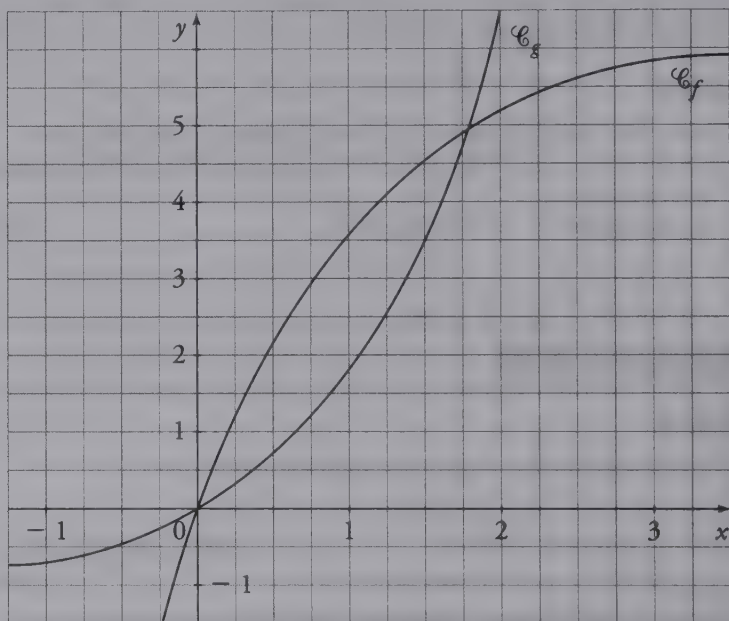
Partie B

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 6 - 6e^{-x} \text{ et } g(x) = e^x - 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère du plan d'unités graphiques : 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont données ci-dessous.



1. Démontrer que le point de coordonnées $(\ln 6 ; 5)$ est un point d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. [0,5 pt]
2. a. Démontrer que, pour tout réel x , $f(x) - g(x) = \frac{-h(x)}{e^x}$. [0,75 pt]
 b. Déterminer, par le calcul, la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. [0,75 pt]
3. On note $\mathcal{D}$ le domaine du plan limité par les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \ln 6$.
 - a. Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique. [0,5 pt]
 - b. Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en cm^2 puis en donner une valeur approchée arrondie au centième. [1 pt]

Exercices classés par thèmes

STATISTIQUES

1

D'après sujet de bac

Le tableau suivant donne l'indice mensuel des dépenses d'assurance maladie d'août 1994 à juin 1995 (tendances observées à fin juillet 1995 – base 100, janvier 1990).

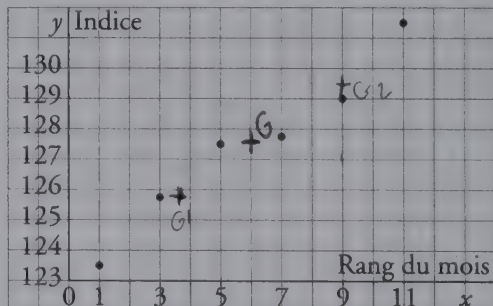
Mois	Août 1994	Octobre 1994	Décembre 1994	Février 1995	Avril 1995	Juin 1995
Rang du mois x_i	1	3	5	7	9	11
Indice y_i	123,4	125,9	127,5	127,9	129	131,4

Source : Département statistique de la Caisse Nationale de l'Assurance Maladie des Travailleurs Salariés

Pour tout l'exercice, les détails des calculs statistiques ne sont pas demandés. Les résultats seront arrondis avec deux chiffres après la virgule.

On a représenté ci-contre le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ associé à la série statistique dans un repère orthogonal. G désigne le point moyen du nuage.

On veut réaliser un ajustement affine de ce nuage de points.



- Déterminer les coordonnées du point G et placer ce point sur le graphique.
- Le modèle étudié dans cette question sera appelée « droite de Mayer ».
 - G_1 désigne le point moyen des trois premiers points du nuage et G_2 celui des trois derniers points. Déterminer les coordonnées de G_1 et de G_2 .
 - Déterminer l'équation réduite de la droite $(G_1 G_2)$ sous la forme $y = Ax + B$.
 - Tracer la droite $(G_1 G_2)$ sur le graphique précédent.
 - En utilisant la calculatrice, déterminer la somme des résidus pour cet ajustement affine :

$$S_1 = \sum (y_i - Ax_i - B)^2.$$

3. Le deuxième modèle proposé est celui des moindres carrés.

La calculatrice donne :

- l'équation de la droite D d'ajustement de y en x : $y = 0,71x + 123,26$;
- la somme des résidus pour cet ajustement $S_2 = 1,7$ (arrondie avec un chiffre après la virgule).

a. Des droites D et (G_1, G_2) , quelle est celle qui réalise le meilleur ajustement affine ? Justifier.

b. Tracer D sur le graphique précédent.

4. a. Quels sont les indices mensuels que l'on pouvait prévoir en utilisant l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés (question 3.) pour les mois cités dans le tableau ci-dessous ?

b. Recopier le tableau ci-dessous et le compléter.

Mois	Nov. 1995	Déc. 1995	Janvier 1996
Indices prévisionnels calculés par l'ajustement affine des moindres carrés			
Tendances réellement observées	134,3	133,4	133,5

c. Quel commentaire peut-on faire ?

2 FRANCE MÉTROPOLITAINE, Juin 2003

Les guichets d'une agence bancaire d'une petite ville sont ouverts au public cinq jours par semaine : les mardi, mercredi, jeudi, vendredi et samedi. Le tableau ci-dessous donne la répartition journalière des 250 retraits d'argent liquide effectués aux guichets une certaine semaine.

Jour de la semaine	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi
Rang i du jour	1	2	3	4	5
Nombre de retraits	37	55	45	53	60

On veut tester l'hypothèse « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine ».

On suppose donc que le nombre des retraits journaliers est égal à $\frac{1}{5}$ du nombre des retraits de la semaine.

On pose $d_{\text{obs}}^2 = \sum_{i=1}^5 \left(f_i - \frac{1}{5} \right)^2$ où f_i est la fréquence des retraits du i -ème jour.

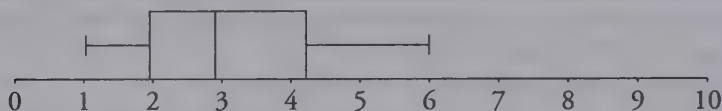
1. Calculer les fréquences des retraits pour chacun des cinq jours de la semaine.

2. Calculer alors la valeur de $1\,000d_{\text{obs}}^2$ (la multiplication par 1 000 permet d'obtenir un résultat plus lisible).

3. En supposant qu'il y a équiprobabilité des retraits journaliers, on a simulé 2 000 séries de 250 retraits hebdomadaires.

Pour chaque série, on a calculé la valeur du $1\,000d_{\text{obs}}^2$ correspondant. On a obtenu ainsi 2 000 valeurs de $1\,000d_{\text{obs}}^2$.

Ces valeurs ont permis de construire le diagramme en boîte ci-dessous où les extrémités des « pattes » correspondent respectivement au premier décile et au neuvième décile.



Lire sur le diagramme une valeur approchée du neuvième décile.

4. En argumentant soigneusement la réponse, dire si pour la série observée au début, on peut affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 10 %, que « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine » ?

3

AMÉRIQUE DU NORD, Juin 2005

Le tableau suivant donne l'évolution du chiffre d'affaires (C.A.), en millions d'euros, sur la période 1994-2003.

Année	1994	1997	1999	2001	2003
Rang x_i	1	4	6	8	10
C.A. y_i	176	209	284	380	508

1. Le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ est représenté page suivante dans un repère orthogonal. Un ajustement affine semble-t-il adapté ?

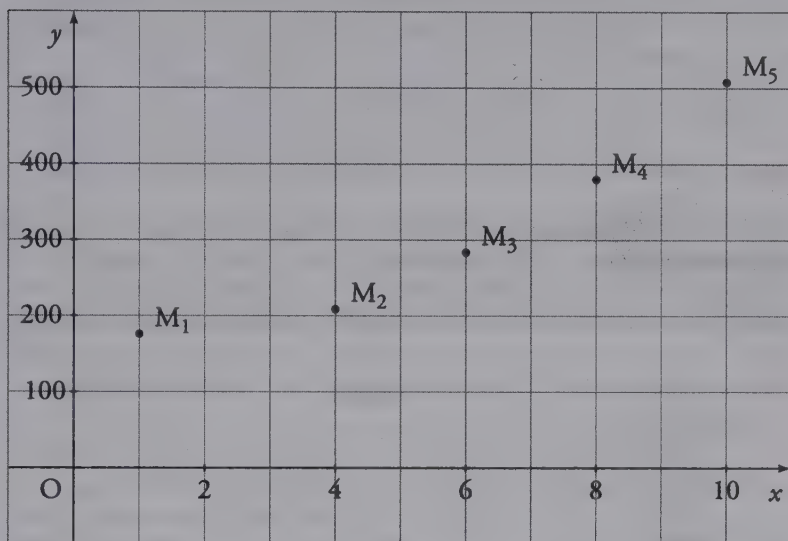
2. On pose $z_i = \ln y_i$.

a. Calculer, en arrondissant à 10^{-2} près, pour i variant de 1 à 5, les valeurs z_i associées aux rangs x_i du tableau.

b. Construire le nuage de points $N_i(x_i; z_i)$ dans le repère orthogonal suivant :

- sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter 1 année,
- sur l'axe des ordonnées, on placera 5 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter le nombre 0,1.

3. a. Déterminer avec la calculatrice une équation de la droite d d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-3} près) et tracer la droite d dans le repère précédent.



b. En déduire une relation entre y et x de la forme $y = A \times k^x$ (arrondir A à l'entier près et k à 10^{-2} près).

4. a. Tracer la droite d dans le même repère que celui du nuage de points (N_i).

b. Donner une estimation, arrondie au millier d'euros, du chiffre d'affaires en 2005.

c. À partir de quelle année peut-on prévoir que le chiffre d'affaires sera supérieur à 1 milliard d'euros ?

4 INDE, Avril 2003

Un pisciculteur possède un bassin qui contient 3 variétés de truites : communes, saumonées et arc-en-ciel. Il voudrait savoir s'il peut considérer que son bassin contient autant de truites de chaque variété. Pour cela il effectue, au hasard, 400 prélèvements d'une truite avec remise et obtient les résultats suivants :

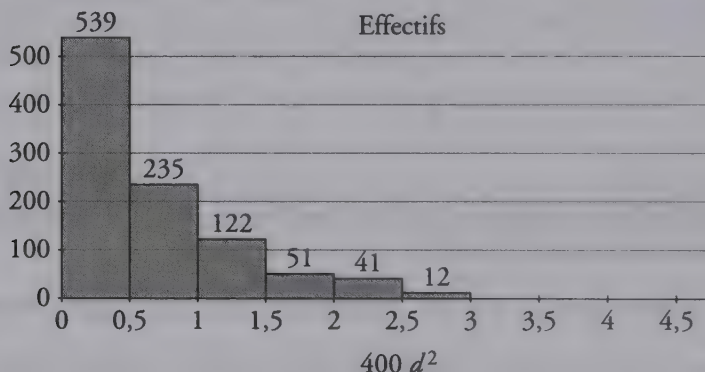
Variétés	Commune	Saumonnée	Arc-en-ciel
Effectifs	146	118	136

1. a. Calculer les fréquences de prélèvement f_c d'une truite commune, f_s d'une truite saumonée et f_a d'une truite arc-en-ciel. On donnera les valeurs décimales exactes.

b. On pose $d^2 = \left(f_c - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_s - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(f_a - \frac{1}{3}\right)^2$.

Calculer $400 d^2$ arrondi à 10^{-2} ; on note $400 d_{\text{obs}}^2$ cette valeur.

2. À l'aide d'un ordinateur, le pisciculteur simule le prélèvement au hasard de 400 truites suivant la loi équirépartie. Il répète 1 000 fois cette opération et calcule à chaque fois la valeur de $400 d^2$. Le diagramme à bandes ci-dessous représente la série des 1 000 valeurs de $400 d^2$, obtenues par simulation.



Déterminer une valeur approchée à 0,5 près par défaut, du neuvième décile D9 de cette série.

3. En argumentant soigneusement la réponse, dire si on peut affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 10 % que « le bassin contient autant de truites de chaque variété ».

4. On considère désormais que le bassin contient autant de truites de chaque variété.

Quand un client se présente, il prélève au hasard une truite du bassin.

Trois clients prélèvent chacun une truite. Le grand nombre de truites du bassin permet d'assimiler ces prélèvements à des tirages successifs avec remise.

Calculer la probabilité qu'un seul des trois clients prélève une truite commune.

5 AMÉRIQUE DU SUD, Novembre 2005

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de personnes âgées de plus de 85 ans, en France métropolitaine, de 1950 à 2000.

On note X_i l'année. L'indice i varie de 1 à 11. Par commodité on pose $x_i = X_i - 1950$.

y_i désigne, en milliers, le nombre de personnes âgées de 85 ans ou plus, au 1^{er} janvier de l'année X_i .

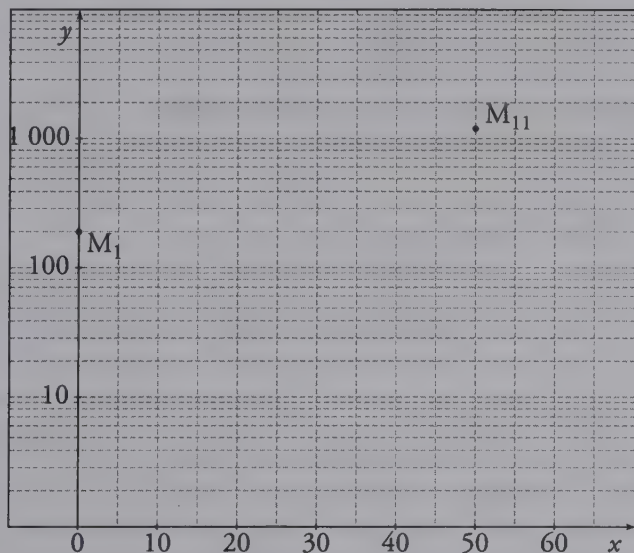
X_i	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
x_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y_i	201	231	290	361	423	498	567	684	874	1 079	1 267

Source : Insee, bilan démographique. Champ : France métropolitaine.

1. Estimation à l'aide d'un graphique semi-logarithmique

a. Compléter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ associé à cette série statistique dans le repère semi-logarithmique fourni ci-dessous.

b. Construire sur ce graphique la droite passant par les points $M_1(0; 201)$ et $M_{11}(50; 1\,267)$ et justifier que l'ajustement du nuage à l'aide de cette droite est satisfaisant.



c. En supposant que cet ajustement affine reste pertinent, déterminer graphiquement à partir de quelle année le nombre de personnes âgées de plus de 85 ans dépassera 2 millions.

2. La forme du nuage obtenu avec la représentation logarithmique invite à chercher un ajustement exponentiel. On pose $z = \ln y$.

a. Compléter la dernière ligne du tableau fourni ci-dessous. Arrondir les résultats au millième.

X_i	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
x_i	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y_i	201	231	290	361	423	498	567	684	874	1 079	1 267
$z_i = \ln y_i$											

b. En utilisant la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement de z en x . Les coefficients seront arrondis au millième.

c. En déduire une modélisation de y en fonction de x sous la forme $y = Ae^{Bx}$. (Le réel A sera arrondi à l'unité et le réel B au millième).

3. On admet que la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 70]$ par $f(x) = 200e^{0,037x}$ modélise de façon satisfaisante l'évolution de cette population.

a. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 2000$ et interpréter ce résultat.

b. Calculer la valeur décimale approchée arrondie au millième de :

$$\frac{1}{50} \int_0^{50} f(x) \, dx.$$

Que représente ce résultat pour la population étudiée ?

PROBABILITÉS

6

AMÉRIQUE DU NORD, Juin 2004

Les parties A et B sont indépendantes.

À la rentrée scolaire, on fait une enquête dans une classe de sixième comprenant 25 élèves.

Partie A

On sait que, dans cette classe, 48 % des élèves ont 11 ans, $\frac{1}{5}$ ont 13 ans et les autres ont 12 ans. Ces élèves utilisent deux types de sacs de cours : le sac à dos ou le cartable classique. 15 élèves, dont les $\frac{2}{3}$ ont 11 ans, ont acheté un cartable classique ; les autres, dont la moitié ont 12 ans, ont acheté un sac à dos.

1. Recopier le tableau suivant sur votre copie et le compléter à l'aide des données de l'énoncé :

	Sac à dos	Cartable	Total
11 ans			
12 ans			
13 ans			
Total			25

2. On interroge au hasard un élève de cette classe.

On note S l'événement « l'élève a un sac à dos » ;

C l'événement « l'élève a un cartable » ;

T l'événement « l'élève a treize ans ».

a. Montrer que $p(S) = 0,4$.

b. Calculer $p(C \cap T)$.

3. On interroge successivement et de manière indépendante trois élèves de cette classe ; quelle est la probabilité qu'exactement deux d'entre eux aient un sac à dos ?

Partie B

À leur inscription, ces élèves doivent souscrire une assurance scolaire ; deux types de contrats annuels sont proposés. D'après des études statistiques, le contrat A dont le coût est de 20 € est choisi avec une probabilité de 0,7 et le contrat B dont le coût est de 30 € est choisi avec une probabilité de 0,3. De plus, le collège propose une adhésion facultative au foyer coopératif, d'un montant de 15 €. Indépendamment du contrat d'assurance choisi, 40 % des élèves prennent une carte d'adhérent du foyer.

On note A l'événement « l'élève a choisi le contrat A » ;

B l'événement « l'élève a choisi le contrat B » ;

F l'événement « l'élève est adhérent du foyer ».

1. Construire l'arbre des probabilités associé à la situation décrite ci-dessus.
2. Quelle est la probabilité qu'un élève ait pris le contrat B et soit adhérent du foyer ?
3. À chaque élève pris au hasard, on associe le coût X de son inscription (assurance scolaire plus adhésion éventuelle au foyer).
 - a. Quelles sont les valeurs possibles de ce coût ?
 - b. Établir la loi de probabilité de ce coût et présenter le résultat dans un tableau.
 - c. Calculer l'espérance mathématique de cette loi. Quelle interprétation peut-on en donner ?

7

ANTILLES-GUYANE, Juin 2004

On considère les épreuves de courses du 100 m, 200 m ou 400 m lors des meetings internationaux d'athlétisme. On s'intéresse au nombre de faux départs survenant lors de ces épreuves. On rappelle qu'un faux départ est le démarrage d'un coureur avant le signal de départ donné par le starter, à la suite de quoi on doit donner un nouveau signal de départ.

Les statistiques des années précédentes ont permis d'établir les données suivantes :

- la probabilité qu'il y ait un faux départ au premier signal est de 0,2 ;
- quand il y a eu un faux départ au premier signal, la probabilité qu'il y ait de nouveau un faux départ au deuxième signal est de 0,05 ;
- il n'y a jamais de faux départ au troisième signal.

On admet que les départs sont indépendants les uns des autres.

1. Représenter ces données par un arbre de probabilités.

On notera F_1 l'événement : « il y a un faux départ au premier signal » ;

F_2 l'événement : « il y a un faux départ au deuxième signal ».

2. Montrer que la probabilité qu'il y ait exactement un faux départ est de 0,19.

3. Déterminer la loi de probabilité du nombre de faux départs donnés lors d'une épreuve quelconque.

Justifier l'affirmation suivante : « dans 20 % des épreuves, il y a au moins un faux départ ».

4. Lors d'un quart de finale au 200 m, on fait courir les athlètes en quatre séries indépendantes, soit quatre épreuves. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement trois séries sans faux départ au premier signal lors de ce quart de finale.

8

D'après sujet de bac

Le directeur d'une fabrique de microprocesseurs constate que 4 % de la production journalière est défectueuse. Un responsable qualité propose une vérification systématique des microprocesseurs. Cette vérification n'est pas parfaite, elle ne détecte que 95 % des microprocesseurs défectueux et déclare défectueux 2 % des microprocesseurs qui ne présentent pourtant aucun défaut.

On prend au hasard l'un des microprocesseurs dans une production journalière. On appelle :

- M l'événement : « le microprocesseur est défectueux » ;

- R l'événement : « le microprocesseur est rejeté après vérification ».

La notation $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'événement A sachant que B est réalisé.

1. Préciser les probabilités $p(M)$, $p_M(R)$, $p_{\overline{M}}(R)$.

2. Calculer la probabilité de l'événement (M et R) ainsi que celle de l'événement ($\overline{M}$ et R).

3. Calculer la probabilité que le microprocesseur soit défectueux et déclaré bon par la vérification.

4. Calculer la probabilité que le microprocesseur soit bon sachant que la vérification va le déclarer « à rejeter ».

9

CENTRES ÉTRANGERS, Juin 2003

Dans une station service, la probabilité que n clients se présentent pendant une période de 10 minutes est donnée par le tableau suivant :

n	0	1	2
Probabilité	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$

1. Justifier que ce tableau définit une loi de probabilité. Calculer l'espérance de cette loi et interpréter le résultat.

On note C_n l'événement « n clients se présentent pendant une période de 10 minutes ».

Lorsqu'un client se présente, la probabilité qu'il prenne du gazole est $\frac{2}{5}$ et on note D_p l'événement « p clients ont pris du gazole pendant une période de 10 minutes ».

On rappelle que $P_B(A)$ désigne la probabilité de l'événement A sachant que B est réalisé.

2. On sait que deux clients se présentent pendant une période de 10 minutes.

a. Calculer la probabilité que ces deux clients prennent du gazole.

b. Montrer que la probabilité $P_{C_2}(D_1)$ qu'un seul de ces deux clients prenne du gazole est égale à $\frac{12}{25}$.

3. Les probabilités de l'événement D_p sachant que C_n est réalisé pour toutes les valeurs possibles de p et n , seront présentées dans le tableau suivant :

	C_0	C_1	C_2
D_0	1		
D_1	0		$\frac{12}{25}$
D_2	0	0	

a. Justifier les valeurs 0 présentes dans le tableau.

b. Justifier la valeur 1 correspondant à $P_{C_0}(D_0)$.

c. Reproduire le tableau sur la copie en complétant les valeurs manquantes. (On les donnera sous forme de fractions).

4. Déterminer la probabilité de l'événement D_1 .

10 ANTILLES-GUYANE, Juin 2007

Un commerçant vendant des produits biologiques propose quotidiennement des paniers de légumes frais contenant 2 kg de légumes ou des paniers contenant 5 kg de légumes.

35 % des clients qui achètent ces paniers ont au moins un enfant.

Parmi ceux qui n'ont pas d'enfant, 40 % choisissent les paniers de 5 kg de légumes et les autres choisissent les paniers de 2 kg de légumes.

On interroge au hasard un client qui achète un panier de légumes.

On note E l'événement « le client interrogé a au moins un enfant » ; on note C l'événement « le client interrogé a choisi un panier de 5 kg de légumes ».

Pour tout événement A , on note $\bar{A}$ l'événement contraire.

Tous les résultats seront donnés sous forme décimale arrondie au millième.

1. Quelle est la probabilité que le client interrogé n'ait pas d'enfant ?
2. Sachant que le client interrogé n'a pas d'enfant, quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier contenant 5 kg de légumes ?
3. Décrire l'événement $\bar{E} \cap C$ et montrer que $p(\bar{E} \cap C) = 0,26$.
4. On sait de plus que 36 % des clients qui achètent des paniers choisissent des paniers de 5 kg.
 - a. Calculer $p(E \cap C)$.
 - b. En déduire la probabilité conditionnelle de C sachant que E est réalisé.

11 ASIE, Juin 2006

Une roue de loterie comporte 3 secteurs notés A , B et C .

On lance la roue, elle tourne puis s'arrête devant un repère fixe.

Le mécanisme est conçu de telle sorte que, à l'arrêt de la roue, le repère fixe se trouve toujours devant l'un des trois secteurs, qui est alors déclaré « secteur repéré ».

On note p_1 la probabilité que le secteur A soit repéré. On donne $p_1 = 0,2$.

On note p_2 la probabilité que le secteur B soit repéré. On donne $p_2 = 0,3$.

1. Calculer la probabilité, notée p_3 , que le secteur C soit repéré.

Une partie consiste à lancer la roue deux fois successivement. On s'intéresse aux couples de secteurs repérés obtenus à la suite des deux lancers successifs.

On admet que les lancers de roue successifs sont indépendants.

2. Justifier que la probabilité d'obtenir le couple de secteurs repérés (A, B) est égale à 0,06.

3. Compléter le tableau suivant par les probabilités d'obtenir les différents couples de secteurs repérés possibles. Certaines probabilités sont déjà indiquées, ainsi la probabilité d'obtenir le couple (C, C) est égale à 0,25.

Secteur repéré au deuxième lancer \ Secteur repéré au premier lancer	A	B	C
A	0,04		
B	0,06		
C			0,25

4. Montrer que la probabilité d'obtenir un couple de secteurs repérés ne comportant pas le secteur C est égale à 0,25.

5. De l'argent est mis en jeu dans cette partie. Le « gain » dépend du nombre de secteurs C repérés :

- obtenir 2 fois le secteur C fait gagner 8 € ;
- obtenir exactement une fois le secteur C fait gagner 1 € ;
- n'obtenir aucun secteur C fait perdre 10 €.

a. Recopier sur la copie et compléter le tableau suivant :

Gain (en euros)	- 10	1	8
Probabilité			0,25

b. Calculer le gain moyen que l'on peut espérer à ce jeu. Interpréter ce résultat.

12 ASIE, Juin 2007

Partie A

Sur son trajet habituel pour aller travailler, un automobiliste rencontre deux feux tricolores successifs dont les fonctionnements sont supposés indépendants.

Ces feux sont réglés de telle sorte que la probabilité pour un automobiliste de rencontrer le feu au vert est $\frac{5}{12}$, à l'orange $\frac{1}{12}$ et au rouge $\frac{1}{2}$.

On note :

R_1 l'événement « le premier feu rencontré est au rouge » ;

V_1 l'événement « le premier feu rencontré est au vert » ;

O_1 l'événement « le premier feu rencontré est à l'orange » ;

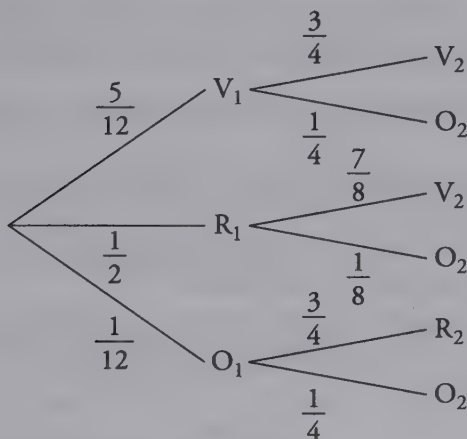
et on définit de même R_2 , V_2 , O_2 pour le deuxième feu rencontré.

1. Quelle est la probabilité que l'automobiliste rencontre les deux feux au vert ?
2. Calculer la probabilité pour qu'au moins l'un des deux feux rencontrés ne soit pas au vert.

Partie B

On règle le deuxième feu afin de rendre la circulation des véhicules plus fluide.

L'arbre suivant modélise la nouvelle situation dans laquelle les fonctionnements des deux feux ne sont plus indépendants.



1. Quelle est la probabilité que l'automobiliste rencontre les deux feux au vert ?
2. Quelle est la probabilité que le deuxième feu rencontré par l'automobiliste soit au vert ?

13**FRANCE MÉTROPOLITAINE, Juin 2007**

Amateur de sudoku (jeu consistant à compléter une grille de nombres), Pierre s'entraîne sur un site internet.

40 % des grilles de sudoku qui y sont proposées sont de niveau facile, 30 % sont de niveau moyen et 30 % de niveau difficile.

Pierre sait qu'il réussit les grilles de sudoku de niveau facile dans 95 % des cas, les grilles de sudoku de niveau moyen dans 60 % des cas et les grilles de sudoku de niveau difficile dans 40 % des cas.

Une grille de sudoku lui est proposée de façon aléatoire.

On considère les événements suivants :

F « la grille est de niveau facile » ;

M « la grille est de niveau moyen » ;

D « la grille est de niveau difficile » ;

R « Pierre réussit la grille » et $\bar{R}$ son événement contraire.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a. Calculer la probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse.
b. Calculer la probabilité que la grille proposée soit facile et que Pierre ne la réussisse pas.
c. Montrer que la probabilité que Pierre réussisse la grille proposée est égale à 0,68.
3. Sachant que Pierre n'a pas réussi la grille proposée, quelle est la probabilité que ce soit une grille de niveau moyen ?
4. Pierre a réussi la grille proposée. Sa petite sœur affirme « Je pense que ta grille était facile ». Dans quelle mesure a-t-elle raison ? Justifier la réponse à l'aide d'un calcul.

14**LIBAN, Juin 2006**

La question 6 peut être traitée indépendamment des 5 autres.

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Un pépiniériste conditionne un mélange de 400 bulbes de fleurs composé de trois variétés : 100 bulbes d'Anémones ; 180 bulbes de Bégonias ; 120 bulbes de Crocus.

On conviendra qu'un bulbe germe s'il donne naissance à une plante qui fleurit. Après avoir planté tous les bulbes et observé leur floraison, on constate que :

83 % des bulbes germent.

50 % des bulbes d'Anémones germent.

90 % des bulbes de Bégonias germent.

On note les événements suivants :

A « le bulbe planté est un bulbe d'Anémone ».

B « le bulbe planté est un bulbe de Bégonias ».

C « le bulbe planté est un bulbe de Crocus ».

G « le bulbe planté germe ».

1. Donner les probabilités conditionnelles $p_A(G)$, $p_B(G)$ et la probabilité $p(G)$.

2. Quelle est la probabilité qu'un bulbe planté soit un bulbe d'Anémone qui germe ?

3. Quelle est la probabilité que le bulbe planté soit un bulbe qui germe ou soit un bulbe de Bégonias ?

4. a. Calculer la probabilité conditionnelle $p_C(G)$.

b. Que peut-on en déduire ?

5. On considère un bulbe ayant germé. Quelle est la probabilité que ce soit un bulbe de Crocus ?

6. On considère que le pépiniériste dispose d'un très grand nombre de bulbes et que la probabilité qu'un bulbe germe est de 0,83. Il prélève au hasard successivement trois bulbes de ce stock. Quelle est la probabilité qu'au moins un des trois bulbes choisis germe ?

Remarques

• On pourra s'aider d'un arbre de probabilité.

• On rappelle la formule des probabilités totales :

si $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers, alors la probabilité d'un événement quelconque E est donnée par :

$$p(E) = p(A_1 \cap E) + p(A_2 \cap E) + \dots + p(A_n \cap E).$$

15 ANTILLES-GUYANE, Juin 2005

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples ; pour chacune des cinq questions, une et une seule affirmation est exacte.
Indiquez sur votre copie le numéro de la question et la bonne affirmation sans justifier votre choix.

Barème :

À chaque question est attribué un certain nombre de points.

Une réponse inexacte enlève la moitié des points affectés.

Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Si le total est négatif, il est ramené à zéro.

Question 1

Ce tableau incomplet donne les résultats d'un sondage dans une population de 60 personnes.

	Cadres	Employés
Hommes		25
Femmes	8	15

On interroge une personne au hasard ; la probabilité que ce soit une femme sachant que c'est un cadre est :

$$\frac{2}{15}$$

$$\frac{2}{5}$$

$$\frac{8}{23}$$

Question 2

Une loi de probabilité d'espérance μ , de variance V d'écart type σ est défini par le tableau ci-dessous.

x_i	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,1	0,3

On a alors :

$$V = \frac{5}{4}$$

$$\mu = 2$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Question 3

Soient C et D deux événements indépendants.

On donne $p(C) = \frac{1}{3}$ et $p(D) = \frac{1}{12}$.

On a alors :

$$p(D \cap C) = \frac{5}{12}$$

$$p(C \cup D) = \frac{7}{18}$$

$$p_D(C) = \frac{1}{36}$$

Question 4

On lance une pièce de monnaie équilibrée quatre fois de suite.
La probabilité d'obtenir au moins une fois pile est :

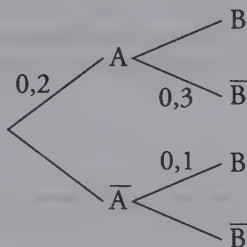
$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{15}{16}$$

$$\frac{1}{16}$$

Question 5

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre ci-dessous où A et B sont deux événements, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ leurs événements contraires.



Alors on a :

$$p(B) = 0,22$$

$$p(\bar{A} \cap B) = 0,8$$

$$p_B(A) = 0,7$$

16 POLYNÉSIE, Juin 2000

Un client désirant louer une voiture auprès de la société Alizé doit formuler sa demande en précisant deux critères :

- la puissance du véhicule : il a le choix entre deux catégories A ou B ;
- l'équipement : voiture climatisée ou non climatisée.

Une étude statistique portant sur un grand nombre de clients a permis d'établir que 60 % des clients louent une voiture de catégorie A et que, parmi eux, 20 % désirent la climatisation. En revanche, 60 % des clients préférant la catégorie B optent pour la climatisation.

1. Traduire à l'aide d'un arbre pondéré la situation décrite ci-dessus.
2. Dans cette question, on donnera des résultats numériques exacts. On choisit au hasard un client et on définit les événements suivants :
 - « le client a choisi une voiture de catégorie A climatisée »,
 - « le client a choisi une voiture climatisée ».
 - a. Déterminer la probabilité de ces événements.
 - b. Quelle est la probabilité pour que la voiture choisie soit de catégorie A, sachant qu'elle est climatisée ?
3. On suppose que le nombre des clients est suffisamment important pour que la probabilité de choisir une voiture climatisée de catégorie A soit, pour chacun d'eux, celle obtenue à la question 2. et que leurs choix sont indépendants les uns des autres. On choisit au hasard trois clients.

On considère le nombre de voitures de catégorie A climatisées louées par ces trois clients.

- Montrer que la probabilité que le nombre de voiture climatisées louées soit égal à 3 est $(0,12)^3$.
- Déterminer la probabilité qu'il y ait zéro voiture climatisée louée et en donner l'arrondi à deux décimales.
- Déterminer la probabilité de l'événement « Au moins un des clients a choisi une voiture de catégorie A climatisée » et en donner l'arrondi à deux décimales.

17 POLYNÉSIE, Juin 2006

Une enquête est réalisée auprès des clients d'une compagnie aérienne. Elle révèle que 40 % des clients utilisent la compagnie pour des raisons professionnelles, que 35 % des clients utilisent la compagnie pour des raisons touristiques et le reste pour diverses autres raisons.

Sur l'ensemble de la clientèle, 40 % choisit de voyager en première classe et le reste en seconde classe.

En fait, 60 % des clients pour raisons professionnelles voyagent en première classe, alors que seulement 20 % des clients pour raisons touristiques voyagent en première classe.

On choisit au hasard un client de cette compagnie. On suppose que chaque client a la même probabilité d'être choisi.

On note :

- A l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles »
- T l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons touristiques » ;
- D l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques » ;
- V l'événement « le client interrogé voyage en première classe ».

Si E et F sont deux événements, on note $p(E)$ la probabilité que E soit réalisé, et $p_F(E)$ la probabilité que E soit réalisé sachant que F est réalisé. D'autre part, on notera $\bar{E}$ l'événement contraire de E.

1. Déterminer :

$$p(A), p(T), p(V), p_A(V) \text{ et } p_T(V).$$

- Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons professionnelles.
 - Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons touristiques.

c. En déduire la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques.

3. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles sachant qu'il a choisi la première classe.

4. Soit un entier n supérieur ou égal à 2. On choisit n clients de cette compagnie aérienne d'une façon indépendante.

On note p_n la probabilité qu'au moins un de ces clients voyage en seconde classe.

a. Prouver que $p_n = 1 - 0,4^n$.

b. Déterminer le plus petit entier n pour lequel $p_n > 0,999\ 9$.

18 LA RÉUNION, Juillet 2000

En vue d'étudier ses préférences alimentaires, le chien Motus a le choix chaque soir entre un et un seul des deux menus suivants :

- des croquettes ;
- une soupe avec de la viande et des pâtes aux légumes.

Une étude réalisée sur un nombre élevé de jours permet de constater que Motus a préféré la soupe dans 70 % des cas et les croquettes dans 30 % des cas. On admet que le comportement du chien reste identique dans l'avenir.

1. On considère un jour donné choisi au hasard, et on appelle C l'événement « Motus choisit les croquettes ». Calculer les probabilités de C et de $\bar{C}$.

2. On observe les choix du chien pendant trois jours consécutifs. On admet que ces choix sont indépendants d'un jour à l'autre. Construire un arbre pondéré pour décrire tous les choix possibles du chien.

3. Si Motus choisit les croquettes, il boit 1 litre d'eau après son repas ; s'il choisit la soupe, il ne boit que $\frac{1}{2}$ litre d'eau. On note la quantité bue par le chien après ses repas pendant 3 jours consécutifs, choisis au hasard. On considère le nombre de litres d'eau bue par le chien. On suppose que les choix du chien sont indépendants d'un jour à l'autre pendant ces 3 jours.

a. Quelles sont les valeurs possibles du nombre de litres d'eau ?

b. Établir la loi de probabilité correspondant à ces valeurs.

c. Calculer l'espérance de cette loi et interpréter cette valeur.

19 FRANCE MÉTROPOLITAINE, Juin 2001

Une université propose aux étudiants trois orientations et trois seulement : une filière A, une filière B et une filière C. Chaque étudiant de l'université est inscrit dans une des trois filières et une seule.

Les effectifs de la filière A sont le double de ceux de la filière B.

Les effectifs de la filière B sont le triple de ceux de la filière C.

On sait de plus que :

- 20 % des étudiants de la filière A sont des filles ;
- 30 % des étudiants de la filière B sont des filles ;
- 40 % des étudiants de la filière C sont des filles.

On choisit au hasard un étudiant de cette université.

On note A l'événement « l'étudiant est inscrit dans la filière A ». De même pour B et C.

On note F l'événement « l'étudiant est une fille » ; G l'événement « l'étudiant est un garçon ».

1. Calculer les probabilités des événements A, B, C ; on vérifiera que $p(B) = 0,3$.

2. Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A et soit une fille.

Montrer que $p(F) = 0,25$.

3. Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A sachant que c'est une fille.

4. L'étudiant, choisi au hasard, n'est pas inscrit dans la filière A. Calculer alors la probabilité que ce soit une fille.

20 AMÉRIQUE DU NORD, Juin 2001

Dans cet exercice les probabilités demandées seront données sous forme décimale, éventuellement arrondies à 10^{-3} près.

Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière auprès d'élèves de classes de terminale, on apprend que 60 % des élèves sont des filles. De plus 40 % des filles et 30 % des garçons fument.

1. On choisit un élève au hasard. On note A l'événement « l'élève choisi fume » et $p(A)$ la probabilité de cet événement. On note F l'événement

« l'élève choisi est une fille ».

Quelle est la probabilité que :

- a. Cet élève soit un garçon ?
- b. Cet élève soit une fille qui fume ?
- c. Cet élève soit un garçon qui fume ?

2. Dédurre des questions précédentes, en le justifiant, que $p(A) = 0,36$.

3. L'enquête permet de savoir que :

- parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument ;
- parmi les élèves non fumeurs, 65 % ont des parents non fumeurs.

On note B l'événement « l'élève choisi a des parents fumeurs ».

On notera $p_D(C)$ la probabilité de l'événement C sachant l'événement D.

Dans cette question, on pourra s'aider d'un arbre pondéré.

- a. Calculer les probabilités $p(A \cap B)$ et $p(\bar{A} \cap B)$. En déduire $p(B)$.
- b. Calculer $p_B(A)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs.

Calculer $p_{\bar{B}}(A)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.

Quelle remarque amène la comparaison de ces deux résultats ?

4. On rappelle que, pour chaque élève choisi, la probabilité qu'il soit fumeur est égale à 0,36. On choisit quatre élèves de terminale au hasard. On admettra que la population d'élèves de terminale est suffisamment grande pour que le choix d'élèves au hasard soit assimilé à un tirage avec remise.

Quelle est la probabilité qu'aucun de ces quatre élèves ne soit fumeur ?

21 CENTRES ÉTRANGERS, Juin 2005

Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles.

Une boîte de jeu est constituée de questions portant sur le deux thèmes « Cinéma » ou « Musique ».

Cette boîte contient un tiers de questions portant sur le thème « Cinéma », les autres portant sur le thème « Musique ».

Le candidat à ce jeu s'appelle Pierre.

Partie A

Dans cette partie, on pose à Pierre une question choisie au hasard dans la boîte et on sait que :

- La probabilité que Pierre réponde correctement à une question du thème « Cinéma » est égale à $\frac{1}{2}$.
- La probabilité que Pierre réponde correctement une question du thème « Musique » est égale à $\frac{3}{4}$.

On considère les événements suivants :

C : la question porte sur le thème « Cinéma »,

M : la question porte sur le thème « Musique »,

E : Pierre répond correctement à la question posée.

1. Déterminer la probabilité de l'événement :

« La question porte sur le thème "Musique" et Pierre y a répondu correctement ».

2. Montrer que la probabilité de l'événement E est égale à $\frac{2}{3}$.

3. On suppose que Pierre n'a pas répondu correctement à la question posée ; quelle est la probabilité pour que la question ait porté sur le thème « Cinéma » ?

Certaines de ces réponses pourront être justifiées à l'aide d'un arbre de probabilités.

Partie B

En fait le jeu se déroule de la façon suivante :

On pose à Pierre une première question (selon les modalités décrites dans la première partie) et il marque 5 points s'il répond correctement et le jeu s'arrête.

Sinon, on lui pose une deuxième question choisie, indépendamment de la première et il marque 2 points s'il répond correctement et le jeu s'arrête.

Sinon, on lui pose une troisième question (choisie indépendamment des deux précédentes) et il marque 1 point s'il répond correctement.

Sinon le jeu s'arrête et il ne marque aucun point.

À chaque fois qu'une question est tirée, on remet dans la boîte une question portant sur le même thème.

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Définir la loi de probabilité du nombre de points marqués par Pierre.
3. Calculer l'espérance mathématique du nombre de points marqués par Pierre.

Une résidence de vacances propose deux types d'appartements (studio et deux-pièces) à louer à la semaine.

L'appartement doit être restitué parfaitement propre en fin de séjour.

Le locataire peut décider de le nettoyer lui-même ou peut choisir l'une des deux formules d'entretien suivantes : la formule Simple (nettoyage de l'appartement en fin de séjour par le personnel d'entretien) ou la formule Confort (nettoyage quotidien du logement durant la semaine et nettoyage complet en fin de séjour par le personnel d'entretien).

Le gestionnaire a constaté que :

- 60 % des locataires optent pour un studio et parmi ceux-ci 20 % ne souscrivent aucune formule d'entretien.
- La formule Simple a beaucoup de succès : elle est choisie par 45 % des locataires de studio et par 55 % des locataires de deux-pièces.
- 18 % des locataires ne souscrivent aucune formule.

On rencontre un résident au hasard.

Soit S l'événement « le résident a loué un studio » ;

A l'événement « le résident a souscrit la formule Simple » ;

B l'événement « le résident a souscrit la formule Confort » ;

R l'événement « le résident n'a souscrit aucune formule d'entretien ».

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a. Quelle est la probabilité que le résident ait loué un deux-pièces ?
b. Calculer $p_S(B)$?
3. a. Calculer $p(R \cap S)$; en déduire $p(R \cap \bar{S})$.
b. Le résident a loué un deux-pièces. Montrer que la probabilité qu'il assure lui-même le nettoyage de son appartement est 0,15.
4. Le gestionnaire affirme que près de la moitié des résidents choisit la formule Simple. Présenter les calculs qui justifient son affirmation.
5. La location d'un studio à la semaine coûte 350 euros, celle d'un deux-pièces 480 euros.
La formule Simple coûte 20 euros et la formule Confort 40 euros.
Soit L le coût de la semaine (loyer et entretien) ; il prend différentes valeurs L_i . On désigne par p_i la probabilité que le coût de la semaine soit égal à L_i .
a. Recopier et compléter le tableau page suivante.

L_i	350	370	390	480	500	520
p_i	0,12		0,21			0,12

b. Calculer l'espérance de L . En donner une interprétation.

23 FRANCE MÉTROPOLITAINE, Juin 2002

Une école de commerce a effectué une enquête, en Janvier 2000, auprès de ses jeunes diplômés des trois dernières promotions afin de connaître leur insertion professionnelle.

À la première question, trois réponses et trois seulement sont proposées :

A : « La personne a une activité professionnelle » ;

B : « La personne poursuit ses études » ;

C : « La personne recherche un emploi ou effectue son service national ».

On a constaté que 60 % des réponses ont été envoyées par des filles.

Dans l'ensemble des réponses reçues, on a relevé les résultats suivants :

- 65 % des filles et 55 % des garçons ont une activité professionnelle ;
- 20 % des filles et 15 % des garçons poursuivent leurs études.

1. On prend au hasard la réponse d'un jeune diplômé.

a. Montrer que la probabilité qu'il poursuive ses études est égale à 0,18.

b. Calculer la probabilité qu'il exerce une activité professionnelle.

2. On prend au hasard la réponse d'une personne qui poursuit ses études ; quelle est la probabilité que ce soit la réponse d'une fille ? (On donnera le résultat sous forme fractionnaire).

3. On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante trois réponses (on suppose que ce choix peut être assimilé à un tirage successif avec remise). À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité que l'une au moins des réponses soit celle d'un jeune diplômé poursuivant ses études.

4. Dans l'ensemble des réponses des jeunes diplômés exerçant une activité professionnelle, la répartition des salaires bruts annuels en milliers d'euros est la suivante :

Salaire brut annuel S	$20 \leq S < 22$	$22 \leq S < 26$	$26 \leq S < 30$
Pourcentage	5	15	28
Salaire brut annuel S	$30 \leq S < 34$	$34 \leq S < 38$	$38 \leq S < 40$
Pourcentage	22	20	10

Quel est le salaire brut annuel moyen ?

24 ANTILLES-GUYANE, Juin 2002

Lors d'une enquête réalisée auprès de familles d'une région, concernant leur habitation principale, on apprend que 55 % des familles interrogées sont propriétaires de leur logement, 40 % en sont locataires et enfin 5 % occupent leur logement gratuitement (ces familles seront appelées dans la suite de l'exercice « occupant à titre gratuit »).

Toutes les familles interrogées habitent soit une maison individuelle, soit un appartement ; toute habitation ne contient qu'une seule famille.

60 % des propriétaires habitent une maison individuelle, 80 % des locataires habitent un appartement et enfin 10 % des occupants à titre gratuit habitent une maison individuelle.

On interroge au hasard une famille de la région et on note :

A l'événement : « la famille habite un appartement » ;

L l'événement : « la famille est locataire » ;

P l'événement : « la famille est propriétaire » ;

G l'événement : « la famille est occupant à titre gratuit ».

On notera $p(E)$ la probabilité de l'événement E.

L'événement contraire de E sera noté $\bar{E}$. $p_F(E)$ désignera la probabilité conditionnelle de l'événement E par rapport à l'événement F.

Les probabilités seront données sous forme décimale, arrondies au millièème.

1. a. Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes :

$$p_P(\bar{A}), \quad p_L(A) \quad \text{et} \quad p_G(\bar{A}).$$

b. Construire un arbre pondéré résumant la situation.

2. Calculer la probabilité de l'événement :

« la famille est propriétaire et habite un appartement ».

3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,585.

4. On interroge au hasard une famille habitant un appartement.

Calculer la probabilité pour qu'elle en soit propriétaire.

5. On interroge trois familles de la région, le choix de ces familles se faisant aléatoirement et de manière indépendante.

Calculer la probabilité d'interroger trois familles habitant un appartement.

25 INDE, Avril 2007

Madame Boulard fait un très grand élevage de chats de races. Elle possède des Siamois, des Birmans et des Abyssins. Le printemps dernier, pratiquement toutes ses femelles ont eu des bébés et Madame Boulard a mis une

annonce pour signaler qu'elle avait une très grande quantité de petits chatons à vendre.

On sait que :

- 32 % des chatons sont des Siamois, 54 % des chatons sont des Abyssins et le reste est constitué de Birmans.
- Parmi les Siamois, 54 % sont des mâles.
- 66 % des Abyssins sont des femelles.
- Il y a au total 40,96 % de chatons mâles.

Un petit garçon, Pierre, vient acheter un chaton avec sa mère. Comme ils sont tous adorables et qu'il n'arrive pas à choisir, Pierre décide de le prendre au hasard.

On désigne par S, B, A, M et F les événements suivants :

S « Pierre achète un chaton Siamois ».

B « Pierre achète un chaton Birman ».

A « Pierre achète un chaton Abyssin ».

M « Pierre achète un chaton mâle ».

F « Pierre achète un chaton femelle ».

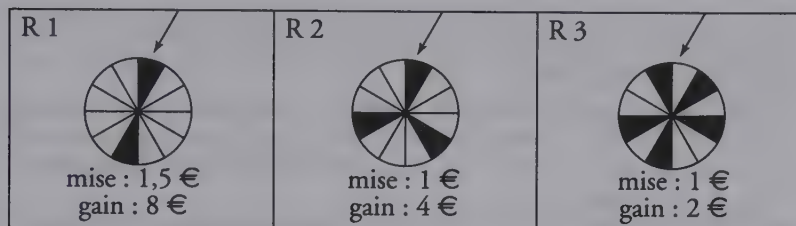
1. **a.** Traduire les données de l'énoncé en langage de probabilités.
- b.** Construire un arbre illustrant la situation, en indiquant sur chaque branche les probabilités données dans l'énoncé. Les probabilités manquantes seront calculées dans les questions ultérieures.
2. **a.** Déterminer la probabilité que Pierre achète un chaton mâle Siamois.
- b.** Calculer $p(M \cap A)$ et interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
- c.** En déduire que la probabilité que Pierre achète un chaton mâle Birman est égale à 0,053 2.
- d.** Le chaton acheté par Pierre est un Birman. Quelle est la probabilité que ce soit un mâle ?
3. Finalement, Pierre est tellement séduit par ces chatons qu'il décide d'en acheter trois, toujours au hasard. On assimilera ces achats à des tirages successifs avec remise.
Quelle est la probabilité qu'il y ait, parmi ces trois chatons, exactement deux mâles Birmans (*le résultat sera arrondi à 10^{-3}*) ?

26 LA RÉUNION, Juin 2004

Lors d'une kermesse, dans un stand sont disposées trois roues. Chaque roue est divisée en douze secteurs de même aire. Une roue étant lancée, elle s'arrête aléatoirement face à la flèche sur un seul secteur. On admettra que tous les secteurs ont la même probabilité d'être « tirés ».

Pour participer, un joueur choisit l'une des trois roues, acquitte la mise correspondant à la roue choisie, puis lance cette roue.

Si le secteur « tiré » est grisé, le joueur reçoit le gain correspondant à la roue choisie.



1. Le gain algébrique du joueur, noté g , est le gain de la loterie diminué de la mise.

a. Pour un joueur qui a choisi la roue **R1**, calculer la probabilité de gagner 6,5 €, puis celle de perdre 1,5 €.

En déduire le gain algébrique moyen espéré par tout joueur qui fait le choix de cette roue.

b. Un joueur dit « avec la roue **R2**, le jeu est équitable ». Qu'en pensez-vous ?

2. Les organisateurs de la kermesse remarquent que $\frac{1}{6}$ des joueurs ont choisi la roue **R1**, $\frac{1}{3}$ la roue **R2** et les autres la roue **R3**.

On interroge au hasard une personne qui a participé au jeu.

Soit les événements :

A : « La personne a choisi la roue **R1** »,

B : « La personne a choisi la roue **R2** »,

C : « La personne a choisi la roue **R3** »,

G : « La personne a gagné » (c'est-à-dire qu'un secteur grisé a été « tiré »).

a. Donner la probabilité des événements A et B. En déduire la probabilité de l'événement C.

b. Préciser les valeurs de $p_A(G)$, $p_B(G)$ et $p_C(G)$.

c. Calculer la probabilité de l'événement : « La personne a choisi la roue **R2** et elle a gagné » (on pourra traduire les données à l'aide d'un arbre pondéré).

d. Démontrer que la probabilité de l'événement « La personne a gagné » est égale à $\frac{23}{72}$.

e. Sachant que la personne n'a pas gagné, quelle est la probabilité qu'elle ait joué avec la roue **R3** ?

27 INDE, Avril 2004

Dans une académie, les élèves candidats au baccalauréat série ES se répartissent en 2003 selon les trois enseignements de spécialité : mathématiques, sciences économiques et sociales et langue vivante.

Nous savons de plus que :

37 % des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématiques.

25 % des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité langue vivante.

21 % des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématiques et ont obtenu le baccalauréat.

32,5 % des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité sciences économiques et sociales et ont obtenu le baccalauréat.

De plus, parmi les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité langue vivante 72,5 % ont obtenu le baccalauréat.

On interroge un candidat pris au hasard.

On note M l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématiques » ; S l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité sciences économiques et sociales » ; L l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité langue vivante » ;

R l'événement « le candidat a obtenu le baccalauréat ».

On pourra faire un arbre pour faciliter la réponse aux questions. Les résultats demandés seront arrondis au millième près.

1. Traduire en termes de probabilités et en utilisant les notations indiquées les informations numériques données ci-dessus.
2. a. Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité sciences économiques et sociales.
b. Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité langue vivante et ait réussi aux épreuves du baccalauréat.
3. Quelle est la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité langue vivante et ait échoué au baccalauréat ?
4. Ce candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématiques. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas obtenu le baccalauréat ?
5. Montrer que le pourcentage de réussite au baccalauréat pour les candidats de ES dans cette académie est 71,6 %.
6. On interroge successivement au hasard et de façon indépendante trois candidats.
Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux soit reçu ?

28 LIBAN, Juin 2007

Les parties A et B sont indépendantes.

Les places d'une salle de cinéma sont toutes occupées. Le film proposé est une rediffusion d'une comédie à grand succès. Dans cette salle, les hommes représentent 25 % des spectateurs, les femmes $\frac{2}{5}$ des spectateurs et les autres spectateurs sont des enfants.

$\frac{1}{5}$ des hommes et 30 % des femmes ont déjà vu ce film au moins une fois.

À la fin de la projection, on interroge au hasard une personne sortant de la salle.

On appelle :

H l'événement « la personne interrogée est un homme » ;

F l'événement « la personne interrogée est une femme » ;

E l'événement « la personne interrogée est un enfant » ;

V l'événement « la personne interrogée avait déjà vu le film avant cette projection » ;

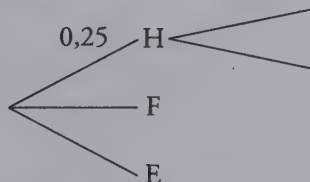
$\bar{V}$ l'événement « la personne interrogée n'avait jamais vu le film avant cette projection » ;

La notation $p(A)$ désigne la probabilité de l'événement A.

La notation $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'événement A sachant que B est réalisé.

Partie A

1. À l'aide des notations ci-dessus, traduire la situation décrite en recopiant et en complétant l'arbre pondéré dont le départ est proposé ci-dessous. On prendra soin de le compléter au fur et à mesure.



2. a. Exprimer à l'aide d'une phrase l'événement $H \cap V$.

b. Donner $p_H(V)$ et en déduire $p(H \cap V)$.

3. La probabilité que l'événement V soit réalisé est égale à 0,345.

a. Déterminer $p(\bar{V})$.

b. Déterminer la probabilité que si l'on interroge un enfant, il ait déjà vu ce film au moins une fois avant cette projection.

4. On interroge au hasard et successivement quatre personnes sortant de la salle. On suppose que le nombre de spectateurs est suffisamment grand pour assimiler l'interrogation au hasard d'un spectateur à un tirage avec remise. Quelle est la probabilité arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins une personne ait déjà vu le film avant cette projection ?

Partie B

À la fin de l'année, une étude nationale a été réalisée sur le nombre de fois qu'un spectateur sortant de la salle est allé voir ce film. Le tableau ci-dessous, pour lequel il manque une valeur notée q représente la loi de probabilité du nombre de fois que le spectateur est allé voir ce film.

Nombre de fois	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,55	0,15	0,15	0,05	q	0,05

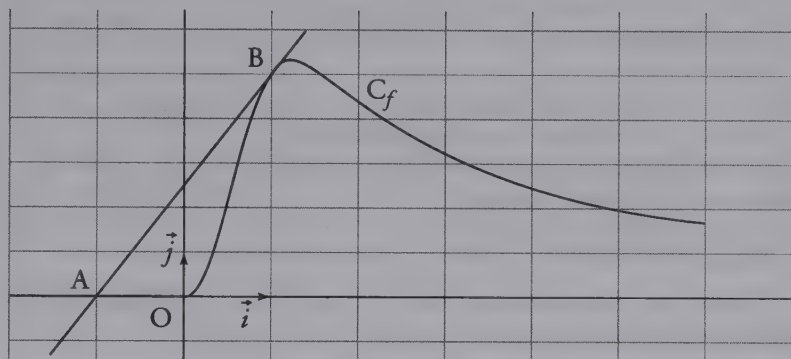
1. Déterminer q .

2. En déduire l'espérance mathématique, arrondie à l'unité de cette loi de probabilité et interpréter le résultat obtenu.

FONCTIONS RATIONNELLES - LECTURES GRAPHIQUES

29 ASIE, Juin 2005

La courbe C_f est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 6]$. La courbe C_f est représentée ci-dessous.



Soit A le point du plan de coordonnées $(-1 ; 0)$ et B le point du plan de coordonnées $(1 ; 5)$. Le point B appartient à la courbe C_f . La droite (AB) est la tangente à la courbe C_f au point B.

1. Déterminer $f'(1)$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 6]$.

Figure 1

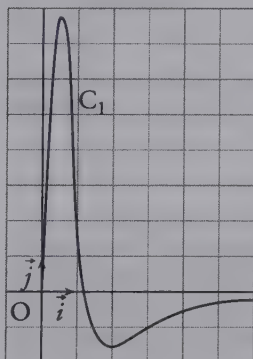


Figure 2

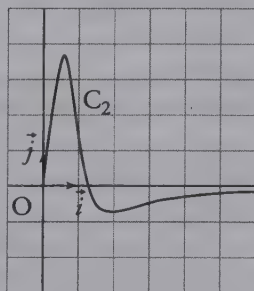
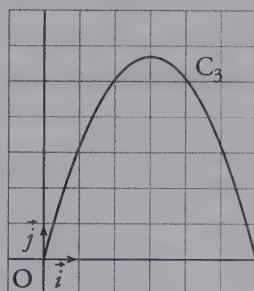


Figure 3



2. L'une des trois courbes C_1 , C_2 et C_3 représentées sur les figures 1, 2 et 3 page précédente représente la fonction f' . Laquelle ? Justifier votre réponse.

30 D'après sujet de bac

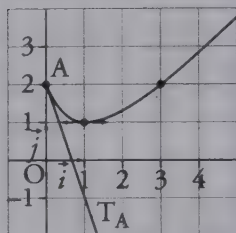
La courbe ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On note f' la fonction dérivée de f .

La droite T_A est tangente au point A d'abscisse 0.

La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1.

Enfin, la fonction f est croissante sur $[1 ; +\infty[$ et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$.



1. À partir des informations portées sur le graphique et complétées par les précisions précédentes, répondre aux questions suivantes.

a. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

x	0	1
$f(x)$		
$f'(x)$		

b. Donner le tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty[$, complété par la limite en $+\infty$.

2. On considère la fonction g inverse de la fonction f , c'est-à-dire $g = \frac{1}{f}$. On note g' la fonction dérivée de g .

a. Déterminer $g(0)$, $g(1)$, $g(3)$.

b. Quel est le sens de variation de la fonction g sur $[0 ; +\infty[$? Justifier la réponse donnée.

c. Déterminer les valeurs $g'(0)$, $g'(1)$.

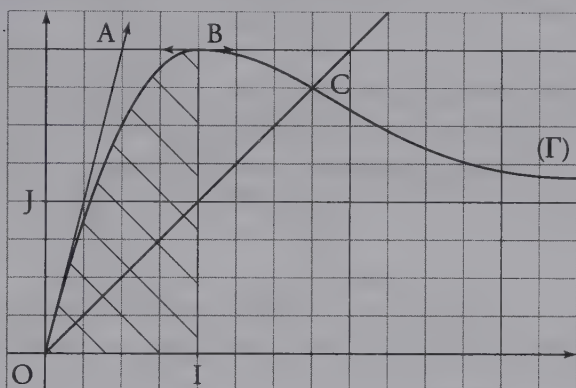
d. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

3. On souhaite traduire graphiquement les informations obtenues pour la fonction g . Tracer une courbe qui satisfait aux résultats obtenus à la question 2., dans un repère orthonormal (unité : 2 cm) sur une feuille de papier millimétré ; le tracé des tangentes aux points d'abscisses 0 et 1 devra apparaître sur la figure.

31 LIBAN, Juin 2005

Dans un repère orthonormal du plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm, la courbe (Γ) , tracée ci-dessous, est la représentation graphique d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 3,5]$.

- I et J sont les points du plan tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$;
- C est le point de (Γ) situé sur la bissectrice de $(\vec{i}, \vec{j})$;
- (OA) est la tangente en O à (Γ) ;
- $\mathcal{S}$ est la surface hachurée sur la figure :



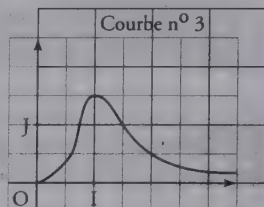
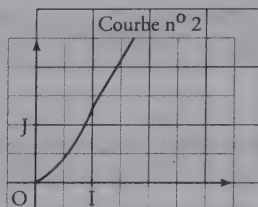
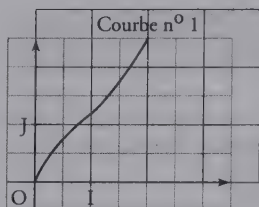
1. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

- Quel est le tableau de variation de g sur $[0 ; 3,5]$?
- Quelles sont les valeurs de $g'(0)$ et de $g'(1)$?
- Quelles sont les coordonnées du point C ?
- Résoudre l'inéquation $g(x) \geq x$ sur $[0 ; 3,5]$.

2. Définir la surface $\mathcal{S}$ par un système d'inéquations et déterminer graphiquement un encadrement de l'aire de $\mathcal{S}$ d'amplitude 2 cm².

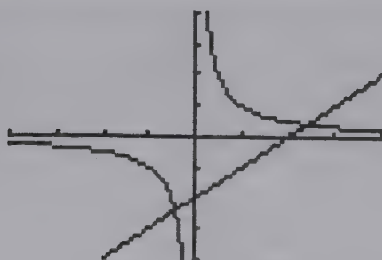
Rappel : l'aire d'un trapèze est donnée par la formule $\mathcal{A} = \frac{(B + b) \times h}{2}$ où B et b sont les bases du trapèze et h sa hauteur.

3. On suppose que l'une des trois courbes page suivante est la représentation graphique de la primitive de la fonction g s'annulant en 0. En justifiant l'élimination de deux des courbes, indiquer celle qui est la représentation graphique de cette primitive.



32

NOUVELLE-CALÉDONIE, Septembre 2004



Soit l'équation (E) : $\frac{1}{x} = x - 2$ où l'inconnue est un réel de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

1. Un élève a représenté sur sa calculatrice l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et la droite d'équation $y = x - 2$.

Au vu du graphique ci-dessus obtenu à l'écran de sa calculatrice, combien l'équation (E) semble-t-elle admettre de solutions sur $]0 ; +\infty[$?

2. Un second élève considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = x - 2 - \frac{1}{x}.$$

a. Déterminer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.

b. On note g' la fonction dérivée de g . Calculer $g'(x)$. Montrer que g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

c. En déduire le nombre de solutions de l'équation (E) et en donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-2} .

3. Un troisième élève dit : « Je peux résoudre l'équation (E) algébriquement ». Justifier, en résolvant l'équation (E), que ce troisième élève a raison.

FONCTIONS LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

33 AMÉRIQUE DU NORD, Juin 2007

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

On considère une fonction g définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par :

$$g(x) = -x^2 + ax - \ln(2x + b)$$

où a et b sont deux réels.

Calculer a et b pour que la courbe représentative de g dans un plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ passe par l'origine du repère et admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par :

$$f(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x + 1).$$

On admet que f est dérivable et on note f' sa dérivée.

Le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	-	0	+	0	-
Variations de f	$+\infty$ $\searrow$ 0 $\nearrow$ $\frac{3}{4} + \ln \frac{1}{2}$ $\searrow$ $-\infty$				

- Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau.
- a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
- Déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

34 D'après sujet de bac

Le niveau sonore $d(I)$, en décibels (db), d'un son d'intensité I est donné par la formule :

$$d(I) = \frac{10}{\ln 10} (\ln I - \ln I_0),$$

où I_0 est l'intensité du seuil d'audibilité de l'oreille humaine.

1. Une voix humaine produit un son dont l'intensité I est égale à $10^6 I_0$. Calculer le niveau sonore $d(I)$, en décibels, atteint par cette voix humaine.

2. Calculer $\frac{I_1}{I_0}$, $\frac{I_2}{I_0}$, puis $\frac{I_2}{I_1}$, lorsque :

I_1 correspond à un niveau sonore de 90 db (au-delà de ce niveau, on considère qu'il y a danger et risque de surdité) ;

I_2 correspond à un niveau sonore de 120 db (c'est le niveau sonore atteint par un concert des « Who » en 1976).

3. Dans cette question, I_1 et I_2 désignent des intensités quelconques ; on suppose $I_1 \leq I_2$.

a. Montrer que :

$$d(I_2) - d(I_1) = \frac{10}{\ln 10} (\ln I_2 - \ln I_1).$$

b. Calculer cette différence $d(I_2) - d(I_1)$, arrondie au dixième le plus proche, lorsque $I_2 = 2I_1$.

c. Déterminer $\frac{I_2}{I_1}$ lorsque $d(I_2) - d(I_1) = 15$, puis justifier l'affirmation suivante : « 115 décibels, c'est environ 32 fois plus fort que 100 décibels ».

35 LIBAN, Juin 2005

Tableau d'informations n° 1

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
Signe de $u(x)$	+	0	-	-	0	+
Signe de $u'(x)$	-	-	0	+	+	

Le tableau d'informations n° 1 ci-dessus fournit des informations sur une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Établir un tableau des variations de la fonction u .

On considère maintenant les fonctions f et g définies par $f(x) = \ln(u(x))$ et $g(x) = e^{u(x)}$ où u désigne la fonction de la question précédente.

2. a. Une des deux affirmations suivantes est fausse, laquelle ? Justifier en précisant le bon ensemble de définition :

Affirmation 1 : « La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ ».

Affirmation 2 : « La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ ».

b. Donner les variations des fonctions f et g . Énoncer le(s) théorème(s) utilisé(s).

c. Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$.

d. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 1$.

3. Voici d'autres informations relatives à la fonction u et à sa dérivée u' .

Tableau d'informations n° 2

x	-2	0	$\frac{1}{2}$	2	3
$u(x)$	4	-2	$-\frac{9}{4}$	0	4
$u'(x)$	-5	-1	0	3	5

Terminer chacune des deux phrases **a.** et **b.** par la réponse qui vous semble exacte, parmi celles proposées dans les cadres page suivante, en justifiant votre choix.

a. La tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 2 est parallèle :

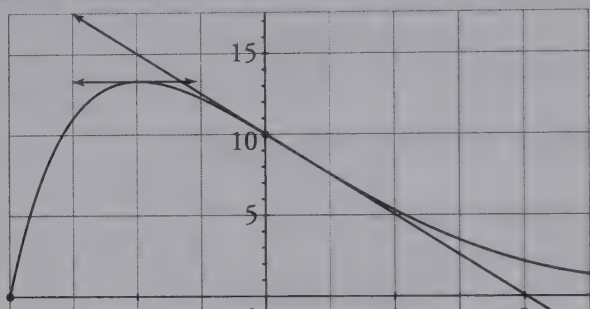
• à l'axe des abscisses	• à la droite d'équation $y = x$	• à la droite d'équation $y = 3x$
-------------------------	----------------------------------	-----------------------------------

b. Le nombre $f'(-2)$:

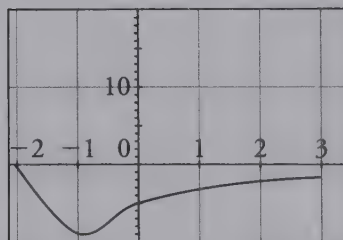
• n'existe pas	• vaut -20	• vaut $-\frac{4}{5}$	• vaut $-\frac{5}{4}$	• vaut $\frac{5}{4}$
----------------	------------	-----------------------	-----------------------	----------------------

36 AMÉRIQUE DU NORD, Juin 2004

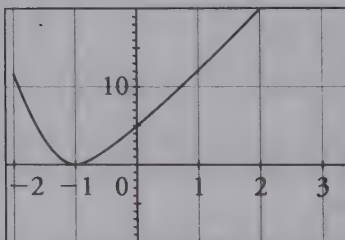
La représentation graphique (C) ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur $[-2 ; 3]$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On note f' la fonction dérivée de f . La courbe (C) vérifie les propriétés suivantes : Les points ainsi marqués • sont à coordonnées entières et appartiennent à la courbe tracée, la tangente au point d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses, la tangente au point d'abscisse 0 coupe l'axe des abscisses en $x = 2$.



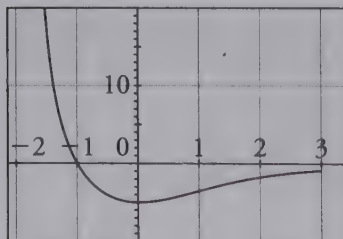
1. Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 0.
2. Donner les variations de f .



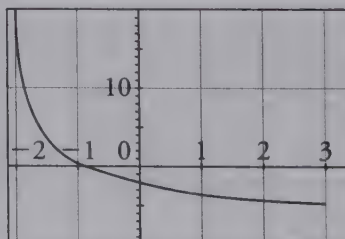
1



2



3



4

3. Une des quatre courbes ci-dessus représente graphiquement la fonction f' . Déterminer celle qui la représente, en justifiant l'élimination de chacune des 3 autres courbes.

4. On admet que la fonction f est définie par une expression de la forme $f(x) = (ax + b)e^{kx}$ où a , b et k sont des nombres réels.

a. Déterminer f' en fonction de a , b et k .

b. En utilisant la question précédente et les propriétés de la courbe (C) données au début de l'exercice, calculer a , b et k .

37 D'après sujet de bac

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$f(x) = x - \frac{e^x - 2}{e^x + 1}.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité : 2 cm).

1. Étudier les variations de f . Préciser les asymptotes.

(Pour l'étude de la limite de la fonction en $+\infty$, on pourra vérifier que

$$f(x) = 1 - \frac{3}{e^x + 1}.)$$

2. Montrer que le point $I\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie pour la courbe.

3. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point I .

4. Construire $\mathcal{C}$ et T .

Préciser l'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

38 INDE, Avril 2005

L'objet de cet exercice est de démontrer le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0$.

Partie A – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on a $f'(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}$.
2. En déduire le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$ (les limites aux bornes ne sont pas demandées).
3. Justifier alors que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on a : $\ln x < \sqrt{x}$.

Partie B – Utilisation des théorèmes de comparaison

1. Démontrer que, pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a :

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)$.

On rappelle que la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

39 LA RÉUNION, Juin 2005

On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f définie sur $]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

et on nomme $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
f	$-\infty$	$-e$	$-\infty$	$+\infty$

1. Justifier les éléments suivants donnés par ce tableau de variation : signe de $f'(x)$, limites aux bornes de l'ensemble de définition, image de $\frac{1}{e}$ par f .

On admet que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.

2. Combien la courbe $\mathcal{C}$ possède-t-elle d'asymptotes ? Donner une équation de chacune d'elles.

3. a. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point A d'abscisse $\frac{1}{e}$.

b. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point B d'abscisse e .

4. Indiquer pour quelles valeurs du réel k l'équation $f(x) = k$:

- a.** ne possède aucune solution ;
- b.** possède une solution unique ;
- c.** possède deux solutions distinctes.

(Aucune justification n'est attendue dans cette question, on pourra s'aider de la représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide de la calculatrice).

40 D'après sujet de bac

1. On considère la fonction f définie pour x réel par :

$$f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x}).$$

a. Démontrer que, pour tout x réel :

$$f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}.$$

b. Démontrer que, pour tout x réel :

$$f'(x) = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}},$$

f' désignant la dérivée de f .

En déduire le signe de $f'(x)$.

- c.** Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
- d.** Donner le tableau de variation de f .

e. Représenter la fonction f dans un repère orthogonal (unités : 4 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées).

2. On injecte à l'instant $t = 0$ une substance dans le sang d'un animal. À l'instant t (t positif exprimé en secondes), la concentration y de la substance injectée est :

$$y = 8(e^{-t} - e^{-2t}).$$

On appelle « concentration » le rapport entre la quantité du liquide injecté et la quantité du sang qui le contient.

a. En utilisant les résultats de la question 1., donner le tableau de variation de la concentration en fonction du temps t , t positif exprimé en secondes.

b. Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale ? On donnera une valeur approchée par défaut de ce résultat en centièmes de secondes.

c. Calculer au bout de combien de temps la concentration « retombe » au quart de sa valeur maximale. Donner ce résultat avec la même précision que dans la question 2.b. Vérifier graphiquement en utilisant la question 1.e.

d. Donner une valeur approchée de $f(9)$. En déduire qu'à l'instant t , $t \geq 9$, la concentration est inférieure à 10^{-3} .

41 D'après sujet de bac

Une étude effectuée sur un certain article, a conduit à établir la relation

$$f(p) = \frac{10^5 \times p}{p^2 - 100} \text{ pour } p \in [11 ; +\infty[\text{ où } p \text{ représente le prix du produit}$$

en euros, et $f(p)$ la demande liée à ce produit pour le prix p .

Partie A – Étude de la demande

1. Calculer la demande pour les valeurs suivantes :

$$p = 11 ; p = 15 ; p = 90 \text{ (arrondir, si nécessaire, à l'unité près).}$$

2. a. Vérifier que $f(p) > 0$ pour tout p de $[11 ; +\infty[$.

b. Montrer que f est une fonction décroissante sur $[11 ; +\infty[$.

3. On suppose que le prix p , initialement égal à 15 €, subit une augmentation de 1 %.

a. Calculer le nouveau prix p' , ainsi que la demande correspondant à ce prix, arrondie à l'unité près.

b. En déduire le pourcentage de variation de la demande, consécutive à l'augmentation de prix.

Partie B – Étude de l'élasticité de la demande

On pose $g(p) = \ln [f(p)]$ pour $p \in [11 ; +\infty[$.

On appelle « élasticité » de la demande par rapport au prix p , le nombre $E(p) = pg'(p)$ où $p \in [11 ; +\infty[$.

On admettra que ce réel donne une bonne approximation du pourcentage de variation de la demande, pour une augmentation de 1 % d'un prix donné.

1. a. Quel est le signe de $E(p)$ pour $p \in [11 ; +\infty[$? Justifier la réponse et interpréter ce résultat.

b. Établir l'égalité $E(p) = 1 - \frac{2p^2}{p^2 - 100}$.

2. a. Étudier la limite : $\lim_{p \rightarrow +\infty} E(p)$.

b. Calculer $E'(p)$ où E' désigne la dérivée de E , et en déduire le tableau de variation de E .

c. Calculer la valeur p_0 pour laquelle l'élasticité est de $-1,25$.

d. Comment évolue la demande quand le prix passe de 30 € à 30,30 € ?

42 D'après sujet de bac

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{2} e^{2x} - e^x - 2x - 4.$$

On appelle (C) sa représentation graphique dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
Unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Soit $g(x) = e^x \left(\frac{3}{2} e^x - 1 \right)$.

Montrer que $g(x)$ s'annule pour $x = \ln \frac{2}{3}$.

Étudier le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $] -\infty ; 1]$.

3. a. Montrer que $f(x) - (-2x - 4) = g(x)$.

b. En déduire que la droite (D) d'équation $y = -2x - 4$ est asymptote à (C).

Étudier la position de (C) par rapport à (D).

4. Calculer $f'(x)$. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $] -\infty ; 1]$, $f'(x) = (3e^x + 2)(e^x - 1)$. En déduire le signe de $f'(x)$.

Dresser le tableau de variation de la fonction f .

Partie B

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution x_0 dans l'intervalle $[-3 ; 0]$. En utilisant la calculatrice donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de x_0 .

2. a. Résoudre l'équation $3e^{2x} - e^x - 2 = 2$ en posant $X = e^x$.

b. En déduire qu'il existe un point A unique de (C) où la tangente a pour coefficient directeur 2 et que l'abscisse de A est égale à $\ln \frac{4}{3}$.

3. Tracer la droite (D), la courbe (C) et la tangente à (C) en A.

43 D'après sujet de bac

Soit f la fonction de variable réelle x , définie sur $\mathbb{R}$, par :

$f(x) = e^x(e^x + a) + b$ où a et b sont deux constantes réelles.

Les renseignements connus sur f sont donnés dans le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	0		
$f(x)$	-3		

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a (f' désigne la fonction dérivée de f).
2. a. Déterminer a et b en vous aidant des informations contenues dans le tableau ci-dessus.
b. Calculer $f(0)$ et calculer la limite de f en $+\infty$.
c. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de variation de f .
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x(e^x - 2) - 3 = 0$ (on pourra poser $X = e^x$).
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :
• $e^x(e^x - 2) - 3 \geq -4$, • $e^x(e^x - 2) - 3 \leq 0$.
(On utilisera le tableau de variation de f ci-dessus et en particulier les informations obtenues en 2.b.)

44

INDE, Avril 2006

L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété algébrique fondamentale de la fonction logarithme népérien notée $\ln$.

Propriété fondamentale :

Pour tous réels strictement positifs a et b , $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Rappels

On rappelle les résultats de cours suivants, auxquels le candidat fera clairement référence pour justifier chacune de ses affirmations au cours des étapes de la démonstration (on pourra en rappeler le numéro).

Théorème 1 : Sur un intervalle I , deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Théorème 2 : Soit u une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I , la fonction composée définie par $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I , de fonction dérivée $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Théorème 3 : La somme f de deux fonctions dérivables u et v sur un même intervalle I est dérivable sur I et $f' = u' + v'$.

Définition : $\ln 1 = 0$.

Énoncé de l'exercice

Soit a un réel constant strictement positif.

On considère les fonctions f et g , de variable x , définies sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(ax)$ et $g(x) = \ln a + \ln x$.

Partie A

Dans le cas où $a = 2$, donner les fonctions dérivées de $f : x \mapsto \ln(2x)$ et $g : x \mapsto \ln 2 + \ln x$. [0,5 pt]

Partie B – Démonstration de la propriété

1. Calculer et comparer les dérivées de f et de g dans le cas général où a est un réel constant strictement positif. [1 pt]
2. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe un réel k tel que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) = g(x) + k$? [1 pt]
3. En posant $x = 1$, déterminer la valeur de k . [0,5 pt]
4. Justifier la propriété fondamentale de la fonction $\ln$ énoncée en début d'exercice. [1 pt]

CALCUL INTÉGRAL - CALCUL D'AIRE

45 D'après sujet de bac

On considère les fonctions numériques de la variable réelle x définies par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = -\frac{x}{2} + 1, \quad h(x) = -\frac{x^2}{2} + 1.$$

1. Établir que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

2. En déduire un encadrement de l'intégrale $\int_0^1 f(x) \, dx$.

46 D'après sujet de bac

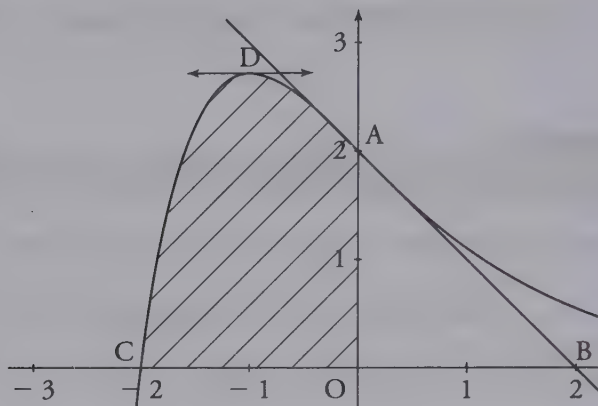
1. Résoudre le système
$$\begin{cases} x - 3y = 2 \ln 2 \\ x + y = 4 \ln 2 \end{cases}.$$

2. On pose $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} \, dx$ et $J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} \, dx$.

Calculer $I - 3J$ et $I + J$. En déduire les valeurs exactes de I et J .

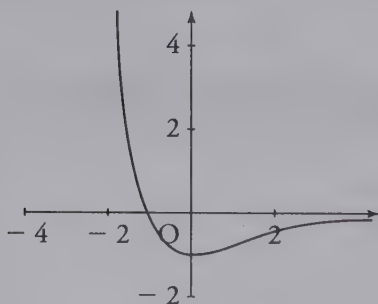
47 AMÉRIQUE DU NORD, Juin 2005

On a représenté page suivante la courbe représentative Γ , dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $A(0 ; 2)$ et $C(-2 ; 0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ . La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.

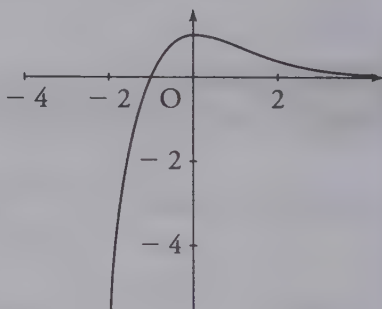


Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

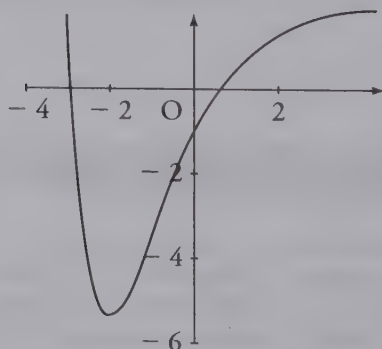
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



1. Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F .

Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix.

2. a. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

b. On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = (x + K)e^{\alpha x}$ où K et α sont des constantes réelles.

Calculer $f'(x)$, puis traduire les renseignements trouvés à la question précédente par un système d'équations d'inconnues K et α .

En déduire que f est définie par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

3. a. Montrer que la fonction φ définie par $\varphi(x) = (-x - 3)e^{-x}$ est une primitive de f .

b. En déduire la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface hachurée.

On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie au centième du résultat.

48 FRANCE MÉTROPOLITAINE, Juin 2006

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{x-3} - \frac{1}{x+4}.$$

Partie A

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b. On admet qu'il existe un unique nombre réel positif α tel que $f(\alpha) = 0$.

Donner le signe de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

5. a. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant (donner les valeurs décimales arrondies au dix-millième) :

x	1,32	1,325	1,33
$f(x)$			

b. En déduire la valeur décimale, arrondie au centième, du nombre α tel que $f(\alpha) = 0$.

Partie B

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = e^{x-3} - \ln(x+4).$$

a. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On note g' sa fonction dérivée.

Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ en utilisant les résultats de la **partie A**.

2. Calculer l'intégrale $I = \int_0^3 f(x) dx$.

(Donner la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au centième.)

49 ASIE, Juin 2007

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x - 1$.

Le tableau suivant est le tableau de variation de la fonction g .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$-$	0	$+$
Variation de g	-1	$-\frac{1}{e} - 1$	$+\infty$

1. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution a strictement positive. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

2. On note f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = e^x - \ln x$.
- a. Étudier la limite de f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat.
- b. Vérifier que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ où f' est la fonction dérivée de f .
- c. Étudier les variations de f , puis établir son tableau de variation en admettant que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.
3. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
Tracer la courbe $\mathcal{C}$ en prenant 0,57 comme valeur approchée de a .
(Prendre 4 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.)
4. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan muni du repère ci-dessus tels que :
- $$1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq f(x).$$
- a. Hachurer le domaine $\mathcal{D}$.
- b. Vérifier que la fonction H définie sur $]0 ; +\infty[$ par $H(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \ln x$.
- c. En déduire une primitive F de f sur $]0 ; +\infty[$.
- d. Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en unités d'aire, puis en donner une valeur en cm^2 , arrondie au dixième.

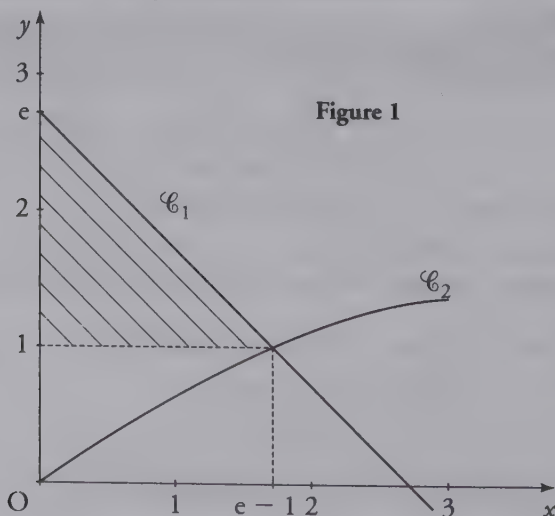
50 D'après sujet de bac

1. Soit P le polynôme tel que $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 1$. Vérifier que :
- $$P(x) = (x-1)(3x^2 + x + 1)$$
- puis étudier le signe de $P(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x^2 + 1 - \ln x$. Étudier le sens de variation de g sur $]0 ; +\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.
En déduire que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.
3. La fonction f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
- $$f(x) = 2 \frac{\ln x}{x} + x^2 - 2x + 3.$$
- a. Étudier les limites de f en zéro et en l'infini.

- b.** Calculer la fonction dérivée de f et exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$. En déduire le sens de variation de f .
- c.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0, 2 ; 4]$ une solution unique α ; déterminer la valeur décimale approchée de α à 10^{-1} près par défaut.
- 4.** Soit un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée). Soit $\mathcal{P}$ la courbe d'équation $y = x^2 - 2x + 3$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans ce repère.
- a.** Calculer $f(x) - (x^2 - 2x + 3)$. En déduire la limite quand x tend vers l'infini de $f(x) - (x^2 - 2x + 3)$. Que peut-on en déduire pour les courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$?
- b.** Étudier les positions relatives de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$.
- c.** Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.
- d.** Tracer $\mathcal{P}$, T et $\mathcal{C}$.
- 5. a.** En remarquant que $\frac{\ln x}{x}$ peut s'écrire $\frac{1}{x} \ln x$, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto 2 \frac{\ln x}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.
- b.** Calculer l'aire, en cm^2 , de la partie du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 3$.

51**CENTRES ÉTRANGERS, Juin 2005**

Sur la figure ci-dessous on donne les représentations graphiques $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de deux fonctions f_1 et f_2 définies et dérivables sur $[0 ; 3]$.



1. L'une des deux courbes représentées ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

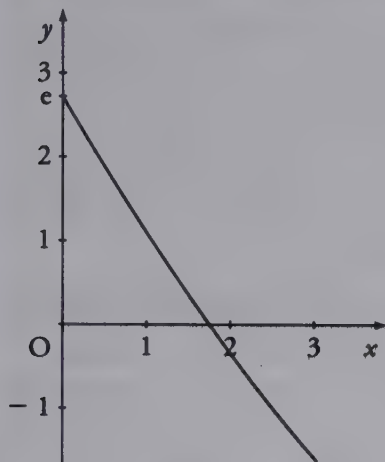


Figure 2

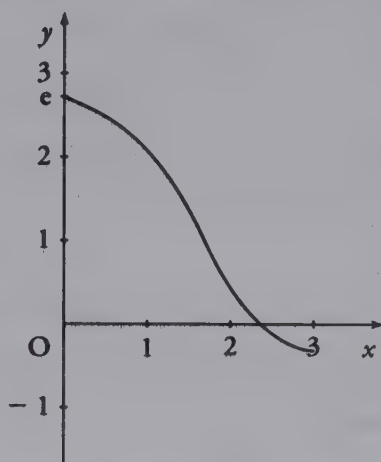


Figure 3

Laquelle de ces deux courbes ne peut pas convenir ?

2. a. Donner le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

b. Donner le tableau de signes de la fonction f' dérivée de f sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

3. On note F une primitive de f sur $[0 ; 3]$. Indiquer les variations de F sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

4. L'une des trois fonctions représentées ci-après est la représentation graphique d'une fonction F .

Figure 4

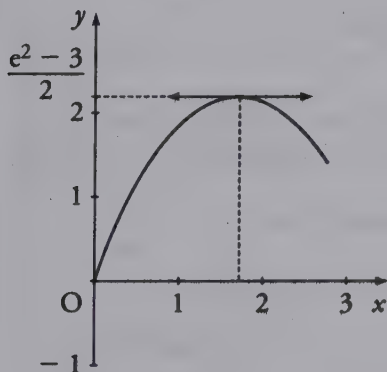


Figure 5

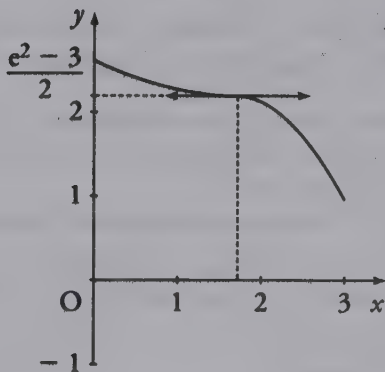
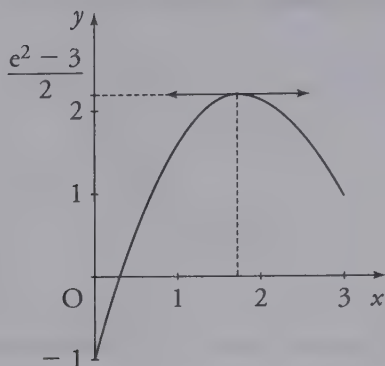


Figure 6



Justifier que les courbes représentées sur les figures 5 et 6 ne peuvent pas convenir.

5. Donner la valeur exacte de $\int_0^{e-1} f(x) dx$.

6. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré sur la figure 1.

52**CENTRES ÉTRANGERS, Juin 2001**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A – Étude d'une fonction

1. Calculer la limite de f en $-\infty$.

2. a. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x}$.

b. En déduire la limite de f en $+\infty$. (On rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$, pour tout réel α .)

Quelle interprétation graphique peut-on en faire ?

3. Soit f' la fonction dérivée de f .

Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x}$.

4. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Résumer cette étude dans un tableau.

6. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[1; 3]$.

Donner un encadrement décimal de x_0 d'amplitude 10^{-2} .

7. Construire dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm) la courbe $\mathcal{C}$, la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0, ainsi que les tangentes horizontales à la courbe $\mathcal{C}$.

Partie B – Étude de la fonction inverse

1. Montrer que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g(x_0)$, où x_0 désigne le nombre défini à la question 6, partie A.

3. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

4. Dresser le tableau des variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$, en donnant les justifications nécessaires.

Partie C – Calcul d'aire

On considère la fonction F définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}.$$

1. Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On considère l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en cm^2 , du domaine plan limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

Donner la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis une valeur approchée par défaut de $\mathcal{A}$ à 10^{-2} près.

53 ASIE, Juin 2007

Une entreprise produit et vend un modèle de pièces pour hélicoptères. Pour des raisons techniques et de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 6]$ par :

$$f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8 \ln(x).$$

$f(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, obtenu pour la vente de x centaines de pièces.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1 ; 6]$. On note f' sa fonction dérivée.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. a. Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1 ; 6]$:

$$f'(x) = \frac{-2(x-1)(x-4)}{x}.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 6]$.

c. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 6]$.

d. Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ? Calculer ce bénéfice arrondi à l'euro près.

2. a. Prouver que la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 6]$.

c. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 6]$ (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

Rappel : Soit f une fonction et $[a ; b]$ un intervalle sur lequel f est définie et dérivable.

La valeur moyenne m de f sur un l'intervalle $[a ; b]$, est le nombre m tel que :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

54 LA RÉUNION, Juin 2006

1. L'expression $f(x) = x(1 + e^{-x}) + 1$ peut aussi s'exprimer ainsi :
 - a. $f(x) = \ln e + e^{-x}(x + xe^x)$.
 - b. $f(x) = xe^{-x}$.
 - c. $f(x) = xe^{-x} + 1 + e^x$.
2. Deux fonctions u et g sont connues par leurs tableaux de variation.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$u(x)$	4	2	-2	$+\infty$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	0	-1	$+\infty$

On a alors :

- a. $g[u(-1)] = -1$.
- b. $g[u(-2)] = -2$.
- c. $g[u(-1)] = -2$.
3. En considérant les fonctions u et g précédentes, on a :
 - a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g[u(x)] = 4$.
 - b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g[u(x)] = -\infty$.
 - c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g[u(x)] = +\infty$.

4. En considérant la fonction g de la question 2., l'équation $g(x) = 3$ admet :

- a. Exactement une solution sur $[-4 ; 2]$.
- b. Exactement une solution sur $[-3 ; +\infty[$.
- c. Exactement une solution sur $] -\infty ; -2]$.

5. Dire que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe représentative d'une fonction f dans un repère du plan, revient à dire que :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.

b. $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - (x-1)] = +\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$.

6. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x^2+1}$ est :

a. Une primitive de la fonction qui à x associe $-xe^{-x^2+1}$.

b. Une primitive de la fonction qui à x associe $-2xe^{1-x^2}$.

c. La dérivée de la fonction qui à x associe $-2xe^{1-x^2}$.

7. Une fonction f est connue par son tableau de variation :

x	$-\infty$	3	5	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$1+e$	1	$+\infty$		

Soit F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On peut affirmer que :

a. F est croissante sur $]-\infty ; 3]$.

b. F' est positive sur $\mathbb{R}$.

c. F est croissante sur $[3 ; 5]$.

8. La fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{4\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 4}$ a pour représentation graphique la courbe $\mathcal{C}$, dans un repère donné. On peut dire alors que :

a. La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

b. La droite d'équation $x = -4$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

c. La droite d'équation $x = 4$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

9. Pour toute fonction f continue et positive sur $[-1 ; 1]$, si $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère donné du plan, alors $\int_{-1}^1 f(x) dx$ est :

a. La valeur moyenne de f sur $[-1 ; 1]$.

b. L'aire, en unités d'aire, du domaine sous la courbe $\mathcal{C}_f$, entre les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

c. Égale à $f(1) - f(-1)$.

10. a et b étant deux nombres réels strictement positifs, $\ln(a+b)$ est égale à :

a. $(\ln a) \times (\ln b)$.

b. $\ln a + \ln\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \ln b$.

c. $\ln a + \ln b$.

55 FRANCE MÉTROPOLITAINE, Septembre 2006

La courbe (C) donnée ci-dessous représente dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ à valeurs strictement positives sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On note f' la fonction dérivée de f .

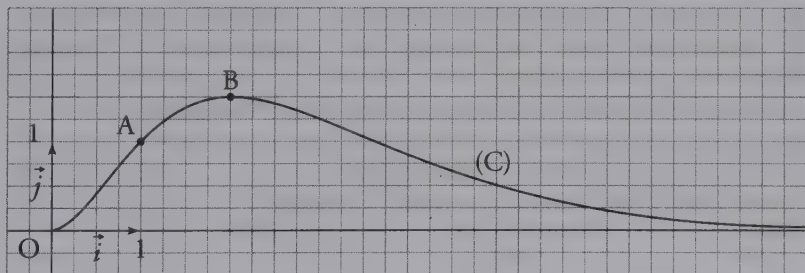
On sait que :

- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 2]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
- La courbe (C) passe par les points O, A et B.
- Le point A a pour coordonnées $(1; 1)$; la droite (OA) est tangente à la courbe (C) au point A.

- Le point B a pour coordonnées $\left(2; \frac{4}{e}\right)$. Au point B, la courbe (C)

admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

- L'axe des abscisses est asymptote à la courbe (C).



Partie A

1. a. Donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis $f'(1)$ et $f'(2)$ (justifier les résultats).

b. Montrer que, dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions dont l'une est le nombre 1 ; l'autre solution est notée α .

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(f(x)).$$

Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \times e^{-x+1}.$$

1. On rappelle que la fonction g est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(f(x))$.

a. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$:

$$g(x) = -x + 1 + 2 \ln x.$$

b. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, on note g' sa fonction dérivée.

Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Retrouver, par le calcul, le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. Soit la fonction dérivable h définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = (x^2 + 2x + 2) \times e^{-x+1}.$$

a. On note h' la fonction dérivée de h sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Calculer $h'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b. Vérifier que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f(x) = -h'(x)$.

En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

c. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la surface comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 2$. Donner la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au dixième.

PROBLÈMES ÉCONOMIQUES ET SOCIAUX

56 D'après sujet de bac

Partie A – Étude préliminaire

On donne la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

1. Étudier le sens de variation de f . Dresser son tableau de variation.
2. Démontrer que :

$$\text{si } 0 < x < \frac{1}{10}, \text{ alors } 0 < f(x) < \frac{1}{11}.$$

Partie B – Achat d'essence

1. a. Le prix d'un litre d'essence est p (p est exprimé en euros).
Quel est le volume V_1 du carburant acheté pour 100 € ?
b. Le prix du litre d'essence a augmenté de 25 % par rapport à p .
Quel est le volume V_2 du carburant acheté pour 100 € ?
c. Calculer $\frac{V_2}{V_1}$, et vérifier que le pourcentage de diminution de volume du carburant acheté est 20 %.
2. Plus généralement, démontrer que si le prix augmente de t %, alors le volume baisse de n % avec :

$$n = \frac{100t}{100+t}.$$

On pose $x = \frac{t}{100}$ et $y = \frac{n}{100}$. Exprimer y en fonction de x .

3. On suppose que l'augmentation du prix du litre de carburant est inférieure à 10 %, c'est-à-dire que $0 < x < 0,1$.
A-t-on raison de dire que la diminution de volume de carburant acheté en résultant est inférieure à 10 % ?
Justifier votre réponse.

57 D'après sujet de bac

Un gérant de société a dépensé en 1995, pour l'achat du papier de son secrétariat, la somme de 3 200 €.

1. Sachant que le papier coûte 12,8 € les 1 000 feuilles, combien le gérant a-t-il utilisé de milliers de feuilles en 1995 ?

2. On suppose qu'au 1^{er} janvier 1996, le prix du papier a augmenté de 5 %. On ne prévoit pas d'autre augmentation du prix du papier au cours de l'année. Si le gérant maintient sa dépense, quel nombre de milliers de feuilles de papier pourra-t-il acheter en 1996 ? (On arrondira le résultat à 0,1 près.) Quel pourcentage de diminution de consommation de papier cela représentera-t-il ?

3. On suppose maintenant que le prix du papier a augmenté de $n\%$ le 1^{er} janvier 1996. On ne prévoit pas d'autre augmentation du prix du papier au cours de l'année. On suppose que le gérant maintient sa dépense de papier.

a. Montrer que le nombre de milliers de feuilles qu'il pourra acquérir en 1996 est :

$$N = \frac{25\,000}{100 + n}.$$

b. Calculer, en fonction de n , le pourcentage de diminution de la consommation de papier qu'il doit envisager pour 1996.

c. Le gérant ne veut pas restreindre sa consommation de papier de plus de 8 %. Quel pourcentage maximum d'augmentation n pourra-t-il supporter ?

58 D'après sujet de bac

Partie A – Question préliminaire

Vérifier que le nombre $\alpha = -1 + \ln 125$ est solution de l'équation (E) :

$$e^{x+1} - 10^4 e^{-(x+1)} - 45 = 0.$$

En donner la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par excès.

On admettra que α est la seule solution de (E).

Partie B – Offre et demande

D'après une étude de marché, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ d'un produit de prix unitaire x sont telles que :

$$\begin{aligned} f(x) &= 100(e^{x+1} - 45) ; \\ g(x) &= 10^4 e^{-(x+1)}. \end{aligned}$$

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ et $g(x)$ sont positives ou nulles.

On désignera par I l'intervalle trouvé ; cet intervalle est dit « intervalle de validité du modèle ».

2. Déterminer la valeur x telle que $f(x) = g(x)$, appelée « prix d'équilibre ».

3. Étudier les variations de f et de g sur l'intervalle I (on précisera les limites en $+\infty$).

4. Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Les unités graphiques sont 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 2 000 unités sur l'axe des ordonnées.

a. Tracer les courbes représentatives de f et de g dans $\mathcal{P}$.

b. Vérifier graphiquement le prix d'équilibre trouvé à la question 2.

5. On considère la fonction E_f définie sur I par :

$$E_f(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (\text{où } f' \text{ désigne la fonction dérivée de } f).$$

Le nombre $E_f(x)$ s'appelle « élasticité de l'offre par rapport au prix x » ; on admet qu'il indique le pourcentage de variation de l'offre pour un accroissement de 1 % d'un prix x donné. $E_f(x)$ est négatif lors d'une diminution de l'offre.

a. Calculer $E_f(x)$.

b. On considère le prix $x = 3,8$. Pour un accroissement de 1 % de ce prix, quel est le pourcentage de variation de l'offre ?

59 D'après sujet de bac

Dans une entreprise, le salaire mensuel des employés est de 1 408 €, celui des techniciens le double et celui des cadres 4 224 €. La masse salariale mensuelle de cette entreprise s'élève à 76 032 € pour un salaire mensuel moyen de 1 728 €.

Pour des raisons économiques, la direction doit diminuer la masse salariale de 2 %. Cette diminution se répartit alors de la façon suivante : une baisse de 1 % sur le salaire des employés, de 3 % sur celui des techniciens et de 6 % sur celui des cadres.

On désigne respectivement par a le nombre d'employés, b le nombre de techniciens, c le nombre de cadres.

1. Traduire les données précédentes par trois égalités vérifiées par les entiers a , b et c .

2. Sachant que le triplet (a, b, c) est solution du système suivant, d'inconnues X, Y, Z :

$$\begin{cases} X + Y + Z = 44 \\ X + 2Y + 3Z = 54 \\ X + 6Y + 18Z = 108, \end{cases}$$

résoudre ce système et en déduire l'effectif de chaque catégorie de salariés.

60**D'après sujet de bac**

Une entreprise fabrique un produit chimique liquide. Les coûts seront exprimés en milliers d'euros et les quantités en tonnes.

1. Coût marginal

On a observé que le coût marginal pour une production de x tonnes est donné pour x réel dans l'intervalle $[0 ; 40]$ par la fonction h définie par :

$$h(x) = 1,5e^{0,05x}.$$

a. Étudier les variations de h .

b. Calculer $h(0)$, $h(20)$, $h(30)$, $h(40)$.

c. Représenter la fonction h sur l'intervalle $[0 ; 40]$. On prendra comme unités 1 cm pour 4 tonnes en abscisse, 1 cm pour 1 millier d'euros en ordonnée.

d. Trouver la primitive de h sur l'intervalle $[0 ; 40]$ qui vaut 30 en 0.

2. Coût total

On note $f(x)$ le coût total pour une production de x tonnes ($0 \leq x \leq 40$). Les coûts fixes s'élèvent à 30 milliers d'euros (c'est-à-dire $f(0) = 30$). On rappelle que $f'(x) = h(x)$.

a. Montrer que $f(x) = 30e^{0,05x}$.

b. Calculer $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ et vérifier que ce nombre est constant. De quel pourcentage le coût total augmente-t-il quand la production augmente d'une tonne ?

3. Coût moyen

Le coût moyen unitaire est défini sur l'intervalle $]0 ; 40]$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

- a. Quel est le coût moyen unitaire d'une tonne, quand l'usine en produit 40 ? (On donnera la réponse arrondie à l'euro.)
- b. Étudier la fonction g sur l'intervalle $]0 ; 40]$ (limite en 0, sens de variation).
- Dresser le tableau de variation de g . Tracer la courbe représentative de g sur le graphique précédent.
- c. Vérifier sur cet exemple que lorsque le coût moyen est minimal, il est égal au coût marginal.

61 D'après sujet de bac

Le tableau suivant donne le montant des cotisations qu'ont eu à payer en 1997 les adhérents à une médiathèque, selon la catégorie à laquelle ils appartiennent :

Adhérents	Catégories	Cotisation
Résidents	Catégorie A : scolaires	gratuit
	Catégorie B : étudiants	12 €
	Catégorie C : autres	20 €
Non résidents	Catégorie D	28 €

La recette totale de la médiathèque se compose :

- d'une subvention municipale ;
- des cotisations des adhérents.

1. En 1997 :

- la subvention municipale a été de 40 000 € ;
- il y a eu au total 5 000 adhérents, dont 72 % de résidents ;
- parmi les résidents, 45 % appartiennent à la catégorie A et 30 % à la catégorie B.

a. Combien y a-t-il eu d'adhérents dans chaque catégorie ?

b. Quelle a été la recette totale ?

2. En 1998 :

- pour équilibrer le budget, la recette totale doit augmenter de 10 % ;
- la subvention municipale est augmentée de 3 %.

a. Montrer que, pour équilibrer le budget, la part de la recette totale provenant des cotisations en 1998 doit être égale à 79 976 €.

b. Le nombre d'adhérents augmente en 1998 de 10 % dans chaque catégorie. On modifie uniquement les cotisations des catégories C et D ; la cotisation de la catégorie C passe à 21 €.

Calculer, à 2 € près par excès, la cotisation minimale de la catégorie D, pour que la part de la recette provenant des cotisations en 1998 soit au moins de 79 976 €.

c. Calculer dans ces conditions les pourcentages d'augmentation des cotisations des catégories C et D entre 1997 et 1998.

62**LA RÉUNION, Juin 2003****Partie A – Étude d'une fonction f**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 15(0,4 - x)e^{-x} + 6$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm).

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Soit f' la fonction dérivée de f .
a. Vérifier que, pour tout x réel, on a $f'(x) = 15(x - 1,4)e^{-x}$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$.
c. Établir le tableau de variation f .
3. Représenter la portion de la courbe (C) pour x compris entre 0 et 7.
4. a. Montrer que l'équation $f(x) = 4,5$, admet, entre 0 et 7, deux solutions α et β (on notera α la plus petite des deux solutions).
b. Donner la valeur arrondie de α à 10^{-2} près, en présentant brièvement la méthode utilisée.
c. Donner la valeur arrondie de β à 10^{-2} près.
d. Quel est l'ensemble des solutions, dans l'intervalle $[0; 7]$, de l'inéquation $f(x) \leq 4,5$?

Partie B – Application

La fonction f est la fonction coût marginal C_M de fabrication d'un produit. x est exprimé en tonnes (x compris entre 0 et 7), et le coût est exprimé en milliers d'euros.

1. a. Pour quelle production le coût marginal est-il minimum et quel est ce prix ?
b. Pour quelles productions le coût marginal est-il inférieur à 4,5 (on donnera chacune des bornes de l'intervalle à 10^{-2} près) ?

2. La fonction coût total C_T est une primitive de la fonction coût marginal.
- a. Soit g et h les fonctions définies sur $[0 ; 7]$ par :
- $$g(x) = 15(0,4 - x)e^{-x} \text{ et } h(x) = (ax + b)e^{-x}.$$
- h' étant la fonction dérivée de h , calculer $h'(x)$ et déterminer a et b pour que h soit une primitive de g .
- b. En déduire que $C_T(x) = (15x + 9)e^{-x} + 6x + k$.
- c. Déterminer k sachant que les frais fixes s'élèvent à 2 000 euros (c'est-à-dire que $C_T(0) = 2$).

63

D'après sujet de bac

Partie A

1. On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{2} ; \quad g(x) = \frac{e^x - 1 + x}{e}.$$

Étudier le sens de variation des fonctions f et g sur $[0 ; 1]$.

2. Soit h la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $h(x) = x - g(x)$.

Étudier les variations de h et en déduire le signe de $h(x)$ sur $[0 ; 1]$.

3. On considère un repère orthonormal. On prendra pour unité graphique 10 cm sur chaque axe.

On note respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans ce repère.

- a. Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	0	0,2	0,5	0,7	1
$f(x)$					
$g(x)$					

On donnera les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près.

- b. Représenter dans le repère donné, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et tracer la droite d'équation $y = x$.

4. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre la droite d'équation $y = x$ et la courbe représentative de g .

En donner une valeur décimale approchée à 0,01 près.

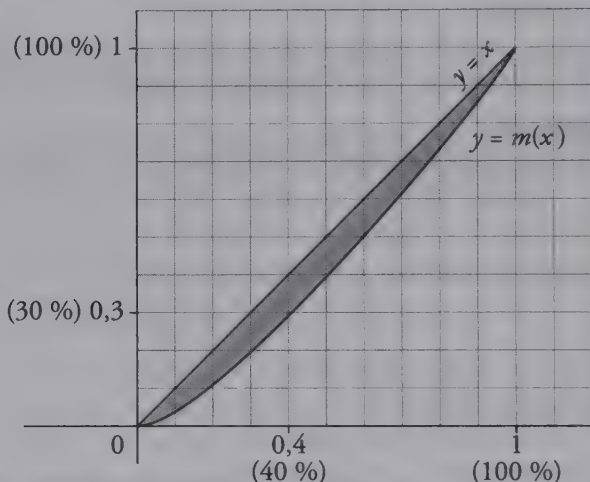
Partie B

La courbe ci-dessous, appelée courbe de Lorentz, représente une fonction m définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$. Elle illustre la répartition des richesses d'un pays donné.

En abscisses, x représente le pourcentage des personnes les plus pauvres par rapport à la population totale et, en ordonnées, $m(x)$ représente le pourcentage des richesses totales qu'ils possèdent.

Par exemple, 40 % des personnes en partant des plus pauvres possèdent 30 % des richesses totales.

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de la partie A sont respectivement les courbes de Lorentz pour un pays F et un pays G.



1. a. Déterminer, par le calcul ou graphiquement, pour chacun de ces deux pays, le pourcentage des richesses possédées par 50 % des personnes en partant des plus pauvres.

b. Parmi ces deux pays, quel est celui pour lequel les richesses sont réparties de la manière la plus égalitaire ?

2. On appelle coefficient de Gini le nombre $2A$, où A est l'aire, en unités d'aire, du domaine grisé sur la figure. Le coefficient de Gini évalue le degré d'inégalité de la répartition des richesses.

Calculer le coefficient de Gini pour chacun des pays F et G.

64

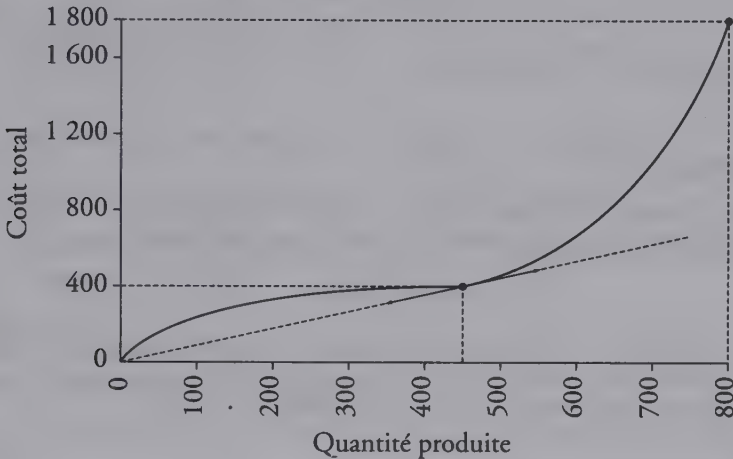
D'après sujet de bac

Une entreprise spécialisée produit deux types de liquides qu'on nommera A et B pour simplifier.

Les deux parties du problème sont indépendantes.

Partie A

La courbe ci-dessous représente le coût total de production du produit A en fonction de la quantité produite. On note x la quantité produite exprimée en litres et $C_T(x)$ le coût total exprimé en euros, x variant de 0 à 800. On notera que $C_T(x) = 0$, $C_T(450) = 400$, $C_T(800) = 1\,800$ et que la tangente au point d'abscisse 450 passe par l'origine O du repère.



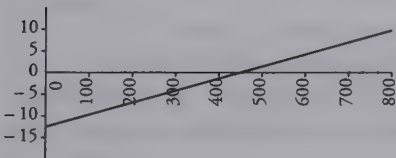
Répondre aux questions suivantes en utilisant les informations portées sur ce graphique.

1. Les économistes définissent le coût marginal comme le supplément de coût de production engendré par la production d'une unité supplémentaire. On considère qu'il peut être modélisé par la dérivée du coût total.

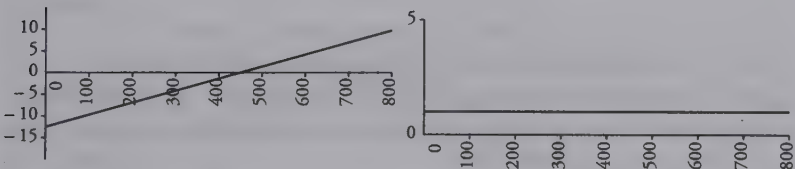
Nous le noterons C_m . On a donc $C_m = C'_T$.

Parmi les représentations suivantes, une correspond au coût marginal associé à la production du liquide A. Laquelle ? Justifier la réponse.

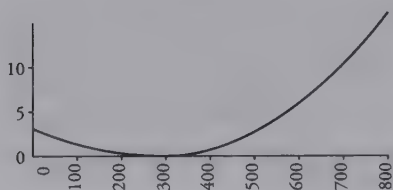
Graphique 1



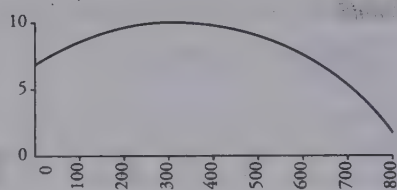
Graphique 2



Graphique 3



Graphique 4



2. Déterminer $\int_0^{450} C_m(x) dx$.

Partie B

Pour le liquide B l'entreprise est en situation de monopole.

Une étude a permis de modéliser le coût moyen de production par :

$$f(x) = 0,5x + \frac{8}{x} \quad \text{où } x > 0.$$

Le coût moyen $f(x)$ est exprimé en milliers d'euros et la quantité produite x en hectolitres. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan (unité graphique : 1 cm).

1. Étude de la fonction coût moyen

- Étudier le sens de variation de cette fonction sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- Déterminer les limites de $f(x)$ en 0 et $+\infty$.
- Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 0,5x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$.
- Construire $\mathcal{C}$ ainsi que $\mathcal{D}$, donner un tableau de valeurs.

2. Seuils de rentabilité pour l'entreprise

L'entreprise ne peut être bénéficiaire que si le prix de vente de l'hectolitre est supérieur au coût moyen de fabrication.

Le prix de vente de l'hectolitre $p(x)$ est fonction de la quantité x vendue :

$$p(x) = -0,8x + 13 ;$$

où $p(x)$ est exprimé en milliers d'euros et x en hectolitres.

- On note $\mathcal{P}$ la représentation graphique de la fonction p . Tracer $\mathcal{P}$ dans le même repère que la représentation de f , puis déterminer graphiquement l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise soit bénéficiaire.
- Retrouver le résultat précédent par le calcul. (On pourra se ramener à une inéquation du second degré.)

65 D'après sujet de bac

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra pour unité graphique 1 cm sur chaque axe. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2,5 + x)e^{-0,5x+1}.$$

Partie A – Étude de la fonction f

1. Étudier le sens de variation de f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = \frac{2,5}{e^{0,5x-1}} + 2e \times \frac{0,5x}{e^{0,5x}}$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4. Dresser le tableau de variation de f . Tracer sa représentation graphique dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 0,3x + 1$.

1. Construire dans le même repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la représentation graphique de g .
2. On veut résoudre dans l'intervalle $[0 ; 10]$ l'équation $f(x) = g(x)$ c'est-à-dire $f(x) - g(x) = 0$.
Pour cela on pose, pour tout x de $[0 ; 10]$, $h(x) = f(x) - g(x)$.
 - a. En utilisant les résultats obtenus dans la partie A, montrer que, pour tout x de $[0 ; 10]$, $h'(x)$ est strictement négative.
 - b. En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $[0 ; 10]$ une solution unique que l'on notera α .
 - c. Par lecture graphique, encadrer α à l'aide de deux nombres entiers consécutifs.
 - d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie C

On considère un produit pour lequel, en fonction du prix unitaire p en euros, la demande est donnée par $f(p)$ et l'offre par $g(p)$ (p appartient à $[0 ; 10]$).

1. Donner le prix d'équilibre, c'est-à-dire celui pour lequel l'offre est égale à la demande.
2. Vérifier que, pour un prix de 3,10 €, si le prix augmente de 1 %, la demande diminue de 1 % environ.

Partie D

La fonction E est définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par $E(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)}$.

En économie, E désigne l'élasticité de f .

1. Vérifier que, pour tout x de $[0 ; 10]$, $E(x) = \frac{-0,5x^2 - 0,25x}{x + 2,5}$.
2. a. Résoudre dans $[0 ; 10]$ l'équation $E(x) = -1$.
b. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} par défaut de la solution.

66

ANTILLES-GUYANE, Septembre 2006

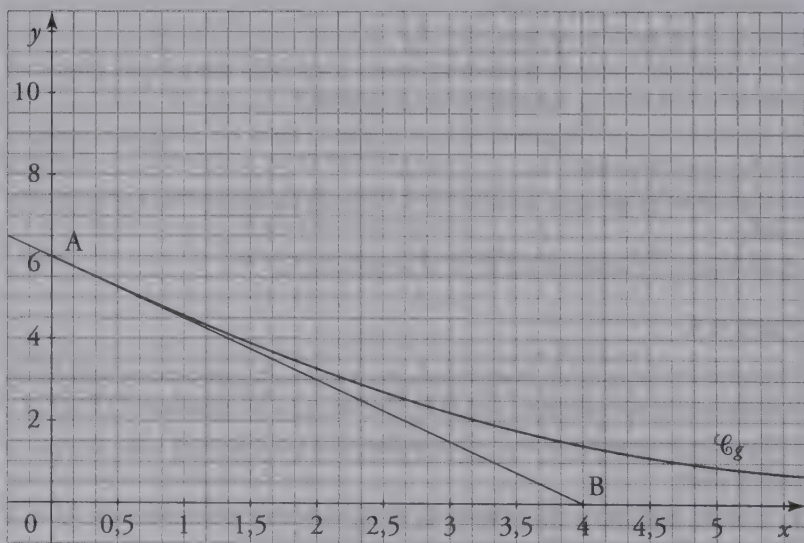
Partie A – Utilisation d'un graphique

La courbe $\mathcal{C}_g$ page suivante, représente, dans un repère du plan, une partie de la représentation graphique de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{a}{e^{bx} + 1} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Soient A et B les points de coordonnées respectives :

$$A(0 ; 6) \text{ et } B(4 ; 0).$$



1. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point A, déterminer $g(0)$, puis $g'(0)$.
2. Exprimer en fonction de a et b la dérivée $g'(x)$.
3. À l'aide des résultats précédents, prouver que $a = 12$ et $b = 0,5$.

Partie B – Étude de fonctions

1. On donne $f(x) = e^{0,5x} - 1$ pour tout réel x dans $[0 ; +\infty[$.
 - a. Calculer $f(0)$, puis étudier la limite de f en $+\infty$.
 - b. Étudier le sens de variation de f , puis dresser son tableau de variation sur $[0 ; +\infty[$.
 - c. Tracer, sur le graphique ci-dessus, la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f .
2. On rappelle que $g(x) = \frac{12}{e^{0,5x} + 1}$ et on admet que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution unique p sur $[0 ; +\infty[$.
 - a. Déterminer la valeur exacte de p . Contrôler graphiquement ce résultat.
 - b. En déduire la valeur exacte de $n = f(p)$.
 - c. Calculer $\int_0^{\ln 13} f(x) dx$; que représente graphiquement cette intégrale? Le préciser sur le graphique.

Partie C – Interprétation économique

Pour un prix de vente unitaire x , exprimé en centaines d'euros, $f(x)$ est le nombre d'objets, exprimé en centaines, proposés sur le marché et $g(x)$ est le nombre d'objets, exprimé en centaines, que les consommateurs sont prêts à acheter. La fonction f est appelée fonction d'offre et la fonction g fonction de demande.

À l'aide des calculs réalisés dans la **partie B**, répondre aux questions suivantes :

1. Quel est le prix d'équilibre arrondi à 1 euro ?
2. On appelle rente du producteur le nombre $R = np - \int_0^p f(x) dx$ (n et p étant définis en B.2.).
Calculer la valeur exacte de R , puis son approximation décimale arrondie à la centaine d'euros.

67 D'après sujet de bac

Partie A

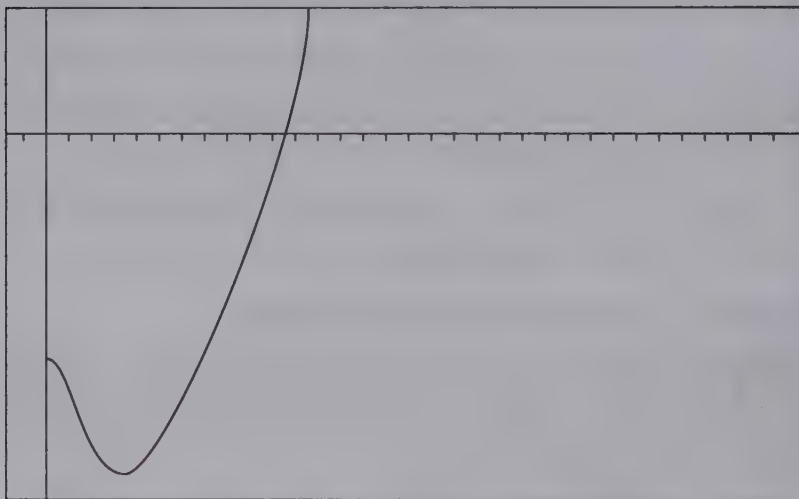
Soit f la fonction définie sur $[0 ; 50]$ par :

$$f(x) = x^2 + \frac{50x}{x+1} - 50 \ln(x+1) - 50.$$

La dérivée $f'(x)$ est telle que :

$$f'(x) = \frac{2x(x-4)(x+6)}{(x+1)^2}.$$

La courbe $\mathcal{C}$ de f est donnée ci-dessous :



1. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 50]$.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; 50]$. On admet que $f(x)$ s'annule pour une seule valeur α de l'intervalle $]0 ; 50[$; en déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 50]$.
3. Donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.
Pour la suite du problème, on prendra pour α la plus petite de ces deux valeurs.

Partie B

Une entreprise fabrique une quantité x , exprimée en kilogrammes, d'un certain produit.

Le coût marginal C , exprimé en euros est défini sur $[0 ; 50]$ par :

$$C(x) = 2x + \frac{50}{x+1}.$$

1. La fonction coût total, notée C_T est la primitive de la fonction C sur $[0 ; 50]$ qui prend la valeur 50 pour $x = 0$.

Vérifier que $C_T(x) = x^2 + 50 \ln(x+1) + 50$.

2. Le coût moyen est la fonction C_m définie par $C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x}$ sur $]0 ; 50]$.

a. Donner une expression de $C_m(x)$ en fonction de x .

b. Vérifier que la dérivée de C_m peut se mettre sous la forme :

$$C'_m(x) = \frac{f(x)}{x^2}.$$

Partie C

1. Dédurre des résultats précédents le tableau de variation de la fonction C_m sur $]0 ; 50]$.

2. Tracer dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de C_m sur $[1 ; 50]$.

3. Quelle est la production donnant le coût moyen minimal ?

Calculer alors le coût total et le coût marginal correspondant au coût moyen minimal.

68

FRANCE MÉTROPOLITAINE, Juin 2000

Partie A

1. Soit C_m la fonction définie sur $[0 ; 6]$ par :

$$C_m(q) = 0,8 + 4(1 - 2q)e^{-2q}.$$

Cette fonction traduit le coût marginal quotidien d'une usine pour la fabrication d'un produit chimique sous forme liquide, q étant la quantité de produit exprimée en milliers de litres et $C_m(q)$ étant exprimé en milliers d'euros.

Dresser le tableau de variation de C_m , la valeur de $C_m(1)$ figurera dans le tableau.

En déduire le signe de $C_m(q)$ sur $[0 ; 6]$.

2. a. Montrer que la fonction g définie sur $[0 ; 6]$ par $g(q) = 4qe^{-2q}$ admet pour fonction dérivée la fonction définie par :

$$g'(q) = 4(1 - 2q)e^{-2q}.$$

- b. Le coût marginal est assimilé à la fonction dérivée du coût total. Sachant que les coûts fixes $C_T(0)$ s'élèvent à un millier d'euros, déterminer la fonction C_T traduisant le coût total en fonction de q .
3. a. Déterminer les variations de C_T sur $[0 ; 6]$ en utilisant la question 1.
- b. Représenter la fonction coût total dans le plan muni d'un repère ortho-normé $(O ; i, j)$. (Unité graphique 2 cm).

Partie B

Le prix de vente de ce liquide est de 1,8 € par litre. La fabrication quotidienne est vendue en totalité.

1. a. Représenter sur le graphique précédent la fonction traduisant la recette quotidienne.

- b. Montrer que le bénéfice, noté $B(q)$, s'exprime par :

$$B(q) = q - 1 - 4qe^{-2q}.$$

2. Soit la fonction h définie sur $[0 ; 6]$ par $h(q) = 1,8 - C_m(q)$.

- a. Étudier les variations de h en utilisant celles de C_m .

- b. Démontrer que l'équation $h(q) = 0$ a une unique solution α sur $[0 ; 1]$. (On ne demande pas de calculer α .)

- c. En déduire le signe de $h(q)$ pour $q \in [0 ; 6]$.

3. a. En utilisant la question précédente, donner les variations de B .

- b. Donner une valeur de $B(\alpha)$ avec deux décimales en prenant 0,28 comme valeur de α .

Que représente cette valeur pour cette usine ?

69

LA RÉUNION, Juin 2007

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[1 ; 50]$ par :

$$f(x) = x^2 + 72 \ln(10x + 1) \text{ et } g(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1 ; 50]$.

2. La fonction h est définie sur l'intervalle $[1 ; 50]$ par :

$$h(x) = x^2 + \frac{720x}{10x + 1} - 72 \ln(10x + 1).$$

a. On admet que la dérivée de la fonction h est la fonction h' définie pour tout x élément de l'intervalle $[1 ; 50]$, par :

$$h'(x) = \frac{2x(10x - 59)(10x + 61)}{(10x + 1)^2}.$$

Résoudre l'équation $h'(x) = 0$ sur l'intervalle $[1 ; 50]$.

Étudier le signe de $h'(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 50]$.

b. Dresser le tableau des variations de la fonction h .

c. On admet que, dans l'intervalle $[1 ; 50]$, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α . À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α .

d. Expliquer pourquoi :

- pour tout x élément de l'intervalle $[1 ; \alpha]$, $h(x) \leq 0$,
- pour tout x élément de l'intervalle $[\alpha ; 50]$, $h(x) \geq 0$.

3. a. Démontrer que pour tout x élément de l'intervalle $[1 ; 50]$:

$$g'(x) = \frac{h(x)}{x^2}.$$

b. Démontrer que la fonction g admet un minimum pour $x = \alpha$.

c. En utilisant le fait que $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, exprimer $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$, puis déduire de la question précédente que $g(\alpha) = f'(\alpha)$.

Partie B – Application

Une entreprise a conduit une étude statistique sur les coûts de production de l'un de ses produits. Pour une production comprise entre 1 tonne et 50 tonnes et des coûts exprimés en milliers d'euros, cette étude conduit à adopter le modèle mathématique suivant :

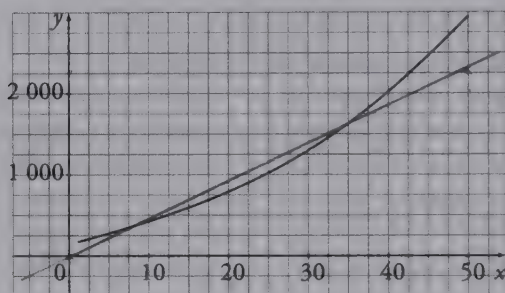
- le coût total de production C_T est donné par $C_T = f(x)$, où x est la quantité produite exprimée en tonnes,
- pour une production de x tonnes, le coût moyen C_M de production d'une tonne est donné par $C_M = g(x)$ et le coût marginal C de production est donné par $C = f'(x)$.

Des graphiques obtenus à l'aide d'un logiciel sont fournis page suivante.

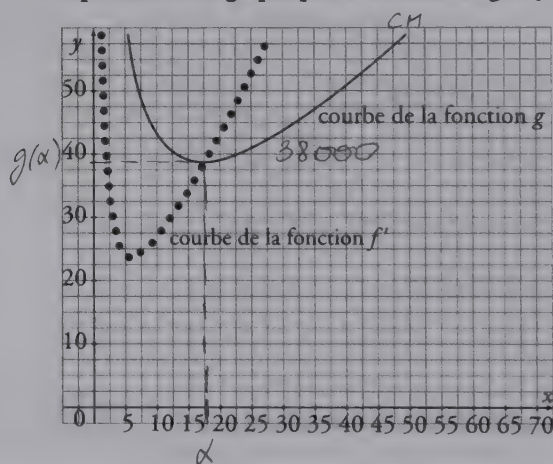
1. Expliquer pourquoi, quelle que soit la quantité produite, l'entreprise ne peut espérer faire un bénéfice si elle vend sa production moins de 38 000 € la tonne.

2. Quelle que soit sa production, l'entreprise pense pouvoir la vendre en totalité au prix de 45 000 euros la tonne. Donner une estimation des productions qui pourront permettre de réaliser un bénéfice.

Représentation graphique de la fonction f



Représentations graphiques des fonctions g et f'



• $x_H < P_x \text{ de vente} \rightarrow \text{on fait du bénéfice.}$

70 FRANCE MÉTROPOLITAINE, Juin 2001

On donne les fonctions f et g , définies sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1,1x + \ln x - \ln(x+1) ; \quad g(x) = 1,1x + \frac{1}{x}.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

Partie A

1. Étudier les variations de f sur $[1 ; +\infty[$.

Trouver la limite en $+\infty$ de $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 1,1x$ est une asymptote de la courbe $(\mathcal{C})$.

Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

3. Tracer $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$.

Partie B

1. Étudier les variations de g sur $[1 ; +\infty[$ et la limite de g en $+\infty$.

2. Vérifier que la droite $(\mathcal{D})$ est une asymptote de la courbe $(\mathcal{C}')$.

Quelle est la position de $(\mathcal{C}')$ par rapport à $(\mathcal{D})$?

3. Tracer $(\mathcal{C}')$ dans le même repère que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$.

4. On pose $H(x) = (x+1) \ln(x+1) - x \ln x$, pour tout x de $[1 ; +\infty[$.

Calculer $H'(x)$; en déduire une primitive sur $[1 ; +\infty[$ de la fonction

$i : x \mapsto g(x) - f(x)$.

5. Calculer l'intégrale $\int_1^5 [g(x) - f(x)] dx$.

En donner une interprétation graphique.

Partie C

Les fonctions f et g données plus haut modélisent respectivement la quantité d'objets produits par une entreprise et la quantité d'objets commandés à cette entreprise.

Plus précisément, si t est la date exprimée en semaines, $f(t)$ est la quantité d'objets produits à la date t en milliers et $g(t)$ la quantité d'objets commandés à cette même date en milliers.

1. Lorsque l'on a $f(t) \geq g(t)$, on dit que « la demande est satisfaite à la date t ».

Démontrer que la demande n'est jamais satisfaite.

2. On admet que le nombre total d'objets, en milliers, dont la demande n'est pas satisfaite entre les dates n et n' avec $n' > n$ est donné par :

$$\int_n^{n'} [g(t) - f(t)] dt.$$

Donner, à un objet près, le nombre total d'objets dont la demande n'est pas satisfaite entre les dates 1 et 5.

3. On considère que « le niveau de fabrication est suffisant » lorsque moins de 20 demandes d'objets ne sont pas satisfaites, c'est-à-dire lorsque l'on a :

$$g(t) - f(t) < 0,02.$$

En admettant que $g - f$ est une fonction strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$, à partir de quelle date le niveau de fabrication est-il suffisant ?

71**CENTRES ÉTRANGERS, Juin 2004****Partie A – Préliminaires**

Soient f et g deux fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 5(x+2)e^{-x} \text{ et } g(x) = \frac{x+2}{5} e^x.$$

1. Résoudre sur $[0 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = g(x)$.
2. Quelle est la dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = (x+3)e^{-x} ?$$

3. En déduire une primitive F de f .

Partie B – Application économique

On suppose que les fonctions f et g précédemment définies dans la partie A sont les fonctions demande et offre d'une entreprise de transport de marchandises. Plus précisément, pour une tonne de marchandises à transporter :

- $f(x)$ est le prix en euros aux 100 km accepté par les clients en fonction de la distance x parcourue en centaines de kilomètres.
- $g(x)$ est le prix en euros aux 100 km du service proposé par l'entreprise en fonction de la distance x parcourue en centaines de kilomètres.

Dans les questions suivantes les prix demandés seront arrondis au centime d'euro et les distances arrondies au kilomètre.

1. Quel prix p_1 en euros aux 100 km, est prêt à payer un client (se conformant à la fonction de demande f) et quel prix p_2 , en euros aux 100 km, est prête à lui offrir l'entreprise (se conformant à la fonction d'offre g) pour un parcours de 120 km ?

2. Prix d'équilibre

Sur un marché en concurrence pure et parfaite, le prix p_0 qui se forme sur le marché correspond à l'égalité entre la demande et l'offre : p_0 est le prix d'équilibre.

À quelle distance d_0 , correspond-il ? En déduire la valeur p_0 .
On donnera les valeurs exactes puis arrondies.

3. Surplus des consommateurs

Tous les consommateurs prêts à acheter le service à un prix supérieur au prix d'équilibre réalisent un gain fictif appelé surplus des consommateurs. On admet que ce gain, exprimé en euros aux 100 km, est mesuré par :

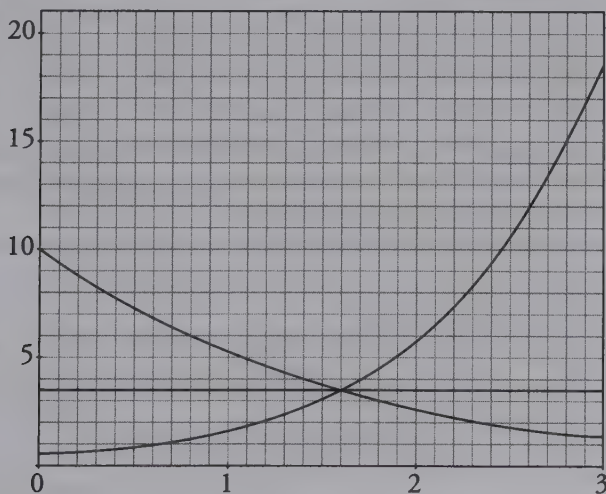
$$S = \int_0^{d_0} f(x) \, dx - p_0 \times d_0$$

Calculer la valeur exacte de S puis en donner une valeur approchée.

Partie C – Interprétation graphique

Les courbes C_f et C_g représentatives des fonctions f et g sont tracées ci-dessous dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ avec pour unités graphiques : en abscisse une unité représente une distance parcourue égale à 100 km et en ordonnée une unité représente 1 euro.

1. Placer les noms des courbes C_f et C_g
2. Placer le point I et ses coordonnées, où I est le point d'intersection de C_f et C_g
3. Placer p_0, p_1, p_2 et d_0 .
4. Hachurer le domaine du plan d'aire S .



72 CENTRES ÉTRANGERS, Juin 2007

On s'intéresse à la production mensuelle d'une certaine catégories d'articles par une entreprise E. On sait que le nombre d'articles produits par mois est compris entre 0 et 500.

On suppose que le coût marginal, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$ par :

$$C(x) = 4x + (1 - 2x)e^{-2x+3}$$

où x représente le nombre de centaines d'articles fabriqués.

1. On sait que la fonction coût total, notée C_T est la primitive de la fonction C sur $[0 ; 5]$ qui s'annule pour $x = 0$.

Justifier que $C_T(x) = 2x^2 + xe^{-2x+3}$.

2. La fonction coût moyen, notée C_M est la fonction définie sur $]0 ; 5]$ par :

$$C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x}.$$

Donner une expression de $C_M(x)$, en fonction de x .

3. a. Déterminer $C'_M(x)$ où C'_M désigne la fonction dérivée de C_M .

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $1 - e^{-2x+3} = 0$.

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1 - e^{-2x+3} > 0$.

d. En déduire le sens de variation de C_M sur $]0 ; 5]$.

4. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal et quel est ce coût en euros ?

5. Chaque centaine d'articles est vendue 7 000 €. La recette totale pour x centaines d'articles est donnée, en admettant que toute la production soit vendue, par $R_T(x) = 7x$ en milliers d'euros.

Le bénéfice est donc défini par $B(x) = R_T(x) - C_T(x)$.

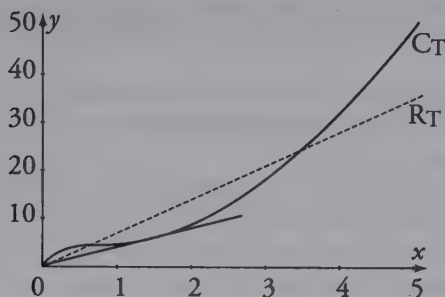
a. Sur la figure page suivante sont représentées les fonctions C_T et R_T . Par lecture graphique déterminer :

– le coût moyen minimal,

– l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour qu'il y ait un bénéfice positif de l'entreprise E,

– la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.

On fera apparaître les constructions nécessaires.



b. Avec l'aide de votre calculatrice, affiner l'intervalle (à un article près) dans lequel doit se situer la production x pour qu'il y ait un bénéfice positif de l'entreprise E.

73 LA RÉUNION, Juillet 2000

Au 01/01/1999, une entreprise s'est équipée d'un certain nombre de machines-outils identiques, coûtant chacune à l'achat 400 000 €.

Au bout de t années, chacune se revend en ayant perdu chaque année 26 % de sa valeur de l'année précédente ; on désigne par $R(t)$ cette valeur de revente.

On estime que l'entretien d'une machine coûte forfaitairement 20 000 €, pour toute l'utilisation jusqu'à sa revente.

On appelle coût d'investissement $I(t)$ d'une machine pour l'année t , le coût d'achat de cette machine augmenté du montant forfaitaire de son entretien diminué de sa valeur de revente l'année t . On donne $I(t) = 420 - R(t)$, exprimé en milliers d'euros.

1. Exprimer $R(t)$ en fonction de t .

2. On modélise $R(t)$ par la fonction suivante, définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$R(t) = 400e^{-0,3t}.$$

On désigne par $C(t)$ le coût total d'utilisation d'une machine au bout de t années.

$C(t)$ est donné par :

$$C(t) = 420 - 400e^{-0,3t}.$$

a. Calculer la limite de $C(t)$ en $+\infty$.

Calculer la dérivée de $C(t)$ et étudier son signe.

Étudier les variations de la fonction C pour $t \in [0 ; +\infty[$.

b. Vérifier qu'au bout de 15 ans, le coût total est pratiquement égal au coût d'achat augmenté du coût d'entretien, à 5 000 € près.

3. L'entreprise décide de revendre les machines dès que le coût total d'utilisation d'une machine dépasse 330 000 €.

a. Résoudre l'inéquation :

$$C(t) > 330.$$

Donner la réponse en nombre entier d'années.

b. Pour des raisons comptables, l'entreprise revend ses machines au mois de janvier. En quelle année doit-elle le faire ?

Quel sera le prix de revente d'une machine à cette date ?

(On donnera la meilleure approximation de ce prix en nombre entier de milliers d'euros.)

74

FRANCE MÉTROPOLITAINE, Juin 2002

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x^2 - 3x + 3)e^x - 4.$$

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 appartenant à $]1 ; 2[$.

Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de x_0 .

3. Dédire des résultats précédents le signe de $f(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.

Partie B

Une entreprise fabrique un produit, en quantité x exprimée en tonnes, sa capacité de production ne pouvant dépasser 3 tonnes. Le coût total de fabrication de ce produit, en centaines de milliers d'euros, est donné par :

$$C_T(x) = (x - 3)e^x + 3x + 4.$$

Le coût moyen est défini sur $]0 ; 3]$ par la formule $C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x}$.

1. Pour tout x de $]0 ; 3]$, calculer $C'_m(x)$ et vérifier que l'égalité suivante est vraie : $C'_m(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.
- En déduire le sens de variation de C_m sur $]0 ; 3]$.

2. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimum ? Quel est le coût moyen minimum (arrondi au millier d'euros) d'une tonne de ce produit ?

Partie C

Une tonne du produit fabriqué est vendue 300 000 euros ; toute la production est vendue.

1. a. Le bénéfice algébrique, en centaines de milliers d'euros, réalisé après la fabrication et la vente de x tonnes du produit est noté $B(x)$. Montrer l'égalité : $B(x) = (3 - x)e^x - 4$.

- b. Étudier le sens de variation de B sur $[0 ; 3]$.

Quelle est la production pour laquelle le bénéfice est maximum ?

2. a. Tracer la courbe représentative de B dans un plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 5 cm pour une tonne en abscisse et 2 cm pour 100 000 euros en ordonnée).

- b. À l'aide du graphique, déterminer à 0,1 près les quantités à produire pour que l'entreprise réalise un gain.

75

ASIE, Juin 2002

Le but du problème est d'étudier le coût marginal et le coût total de production d'un produit dans une entreprise.

L'objet de la **partie A** est de déterminer une fonction h satisfaisant à des conditions données.

L'objet de la **partie B** est l'étude de propriétés d'une fonction f .

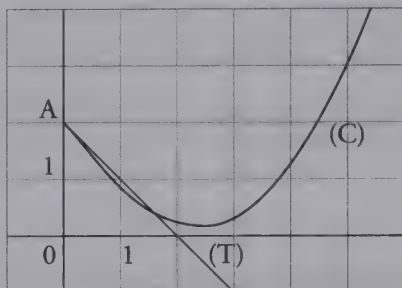
L'objet de la **partie C** est d'utiliser certains résultats de la **partie A** pour répondre à des questions d'ordre économique.

Partie A

La courbe (C) , donnée ci-après, est la courbe représentative d'une fonction h définie sur $[0 ; +\infty[$.

Le point A a pour coordonnées $(0 ; 2)$.

La droite (T) est tangente à la courbe (C) au point A.



1. Préciser $h(0)$.

Déterminer à l'aide d'une lecture graphique le nombre dérivé $h'(0)$. (Justifier la réponse).

2. La fonction h , définie sur $[0 ; +\infty[$ est de la forme :

$$h(x) = ax^2 + bx + c + 2 \ln(x + 1) \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

On note h' la dérivée de la fonction h .

Exprimer $h'(x)$ en fonction de a et b .

3. On donne $h'(3) = \frac{1}{2}$. En utilisant ce résultat et les résultats de la question 1., déterminer chacune des valeurs a , b et c .

Partie B

Soit f la fonction définie sur $I = [0 ; 5]$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 2 + 2 \ln(x + 1).$$

1. a. Calculer la dérivée f' de la fonction f .

b. Montrer que pour tout x de l'intervalle I , $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x + 1}$.

c. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle I .

d. En déduire les variations de f sur $[0 ; 5]$.

2. Soit g la fonction définie sur I par $g(x) = (x + 1) \ln(x + 1) - x$.

a. Calculer la dérivée de la fonction g .

b. En déduire une primitive de la fonction f sur I .

- c. Calculer la valeur exacte, puis la valeur approchée à 10^{-3} près, de l'intégrale $\int_0^5 f(x) dx$.

Partie C

Sur l'intervalle $[0 ; 5]$, la fonction f de la partie précédente représente le coût marginal de production d'un liquide conditionné en flacons d'un litre, en fonction de la quantité produite.

On rappelle que le coût marginal de production est assimilé à la dérivée du coût total.

x représente le volume en milliers de litres, x variant sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

$f(x)$ représente le coût marginal en milliers d'euros.

1. Quel est le coût marginal, en euros, du 3 000^{ème} litre produit ?
2. Pour quelle quantité produite le coût marginal est-il minimum ? (donner la valeur au litre près).
3. Les coûts fixes sont de 1 000 euros.

a. Montrer, en utilisant le résultat de la **partie B**, question 2.b., que le coût total est donné par l'expression définie sur $[0 ; 5]$ par :

$$C(x) = \frac{1}{6} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 2(x+1) \ln(x+1) + 1.$$

b. Calculer $C(5) - C(0)$ à un euro près et interpréter en termes de coût cette différence.

Comparer ce résultat à celui trouvé à la **partie B**, question 2.c. et expliquer cette réponse.

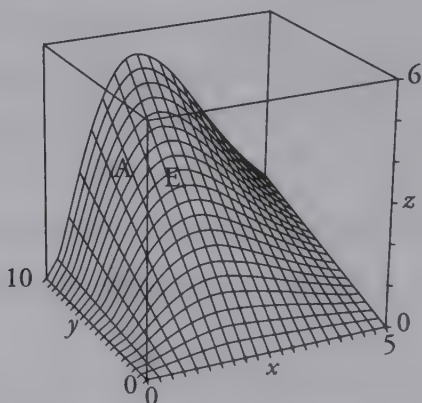
FONCTIONS DE DEUX VARIABLES (SPÉCIALITÉ)

76 NOUVELLE-CALÉDONIE, Novembre 2005

Le bénéfice B d'une entreprise dépend à la fois des investissements et de la production.

On appelle x le montant des investissements en millions d'euros et y la quantité produite en milliers d'unités. On admet que le bénéfice B de cette entreprise, exprimé en millions d'euros, est modélisé par la fonction B définie par $B(x; y) = x^2 y e^{-x}$.

Voici une vue de la surface (S) d'équation $z = x^2 y e^{-x}$, avec x élément de l'intervalle $[0; 5]$ et y élément de l'intervalle $[0; 10]$, dans un repère orthogonal de l'espace.



- Déterminer par lecture graphique le montant des investissements et la valeur de la production qui permettent d'obtenir un bénéfice maximal quand x appartient à l'intervalle $[0; 5]$ et y appartient à l'intervalle $[0; 10]$. Calculer la valeur correspondante de ce bénéfice.
- Sur la figure ci-dessus, on a placé le point A appartenant à la surface (S) , ayant pour abscisse $x_A = 1$ et pour ordonnée $y_A = 8$. Calculer la troisième coordonnée z_A du point A .
 - Sur la figure ci-dessus, on a placé le point E appartenant à la surface (S) , ayant pour abscisse x_E égale à 2 et pour troisième coordonnée z_E égale à z_A . Calculer la valeur exacte y_E de l'ordonnée du point E .
- Quelle est la nature de l'intersection de la surface (S) avec le plan, d'équation $x = 1$? Justifier.

Tracer cette intersection dans un plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm, y appartenant à l'intervalle $[0 ; 10]$.

Déterminer, à l'euro près, le montant en euros du bénéfice maximal réalisé par l'entreprise quand le montant des investissements est fixé à 1 million d'euros.

4. Déterminer une équation de la courbe d'intersection de la surface (S) avec le plan d'équation $y = 10$. Expliquer alors comment retrouver le résultat de la question 1.

(spécialité)

77 POLYNÉSIE, Juin 2007

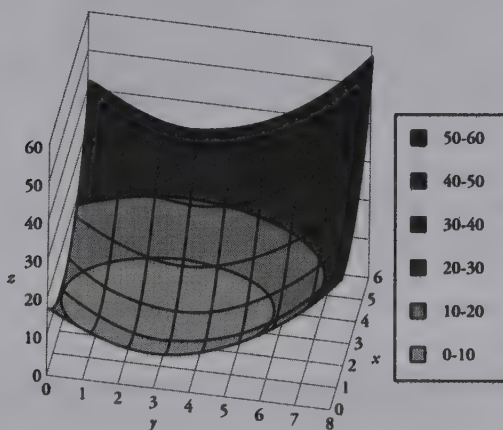
Une entreprise fabrique des savons et des bougies parfumées en quantités respectives x et y exprimées en tonnes.

Le coût total de production z , exprimé en milliers d'euros, est donné par la relation :

$$z = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18$$

avec $x \in [0 ; 6]$ et $y \in [0 ; 8]$.

1. La surface S représentant le coût en fonction de x et de y dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donnée ci-dessous.



a. Le point $A(3 ; 2 ; 3)$ appartient-il à la surface S ? Justifier.

b. Placer, sur la figure ci-dessus, le point B d'abscisse 5 et d'ordonnée 2 qui appartient à S .

c. Soit $y = 2$. Exprimer alors z sous la forme $z = f(x)$, puis donner la nature de la section de la surface S par le plan d'équation $y = 2$ en justifiant.

2. La fabrication de x tonnes de savons et de y tonnes de bougies parfumées engendre la contrainte $x + y = 5$.

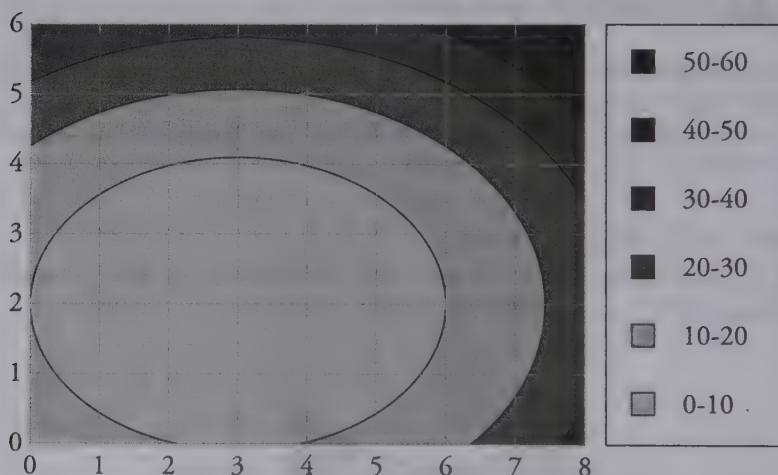
a. Quelle est la nature de l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient $x + y = 5$?

b. Vérifier que, sous la contrainte $x + y = 5$, z peut s'écrire sous la forme $z = g(x)$ avec $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$.

c. Déterminer la valeur de x pour laquelle g admet un minimum, puis la valeur de y et le coût de production z qui correspondent.

On note C le point de la surface S qui correspond à ce coût minimum.

d. On donne ci-dessous la projection orthogonale de la surface S sur le plan (xOy) (« vue de dessus de la surface S »).



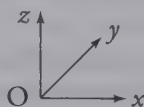
Construire sur cette figure, la projection orthogonale sur le plan (xOy) des points dont les coordonnées vérifient $x + y = 5$.

Placer sur cette figure le point C_1 , projeté orthogonal du point C sur le plan (xOy) .

78 ASIE, Juin 2006

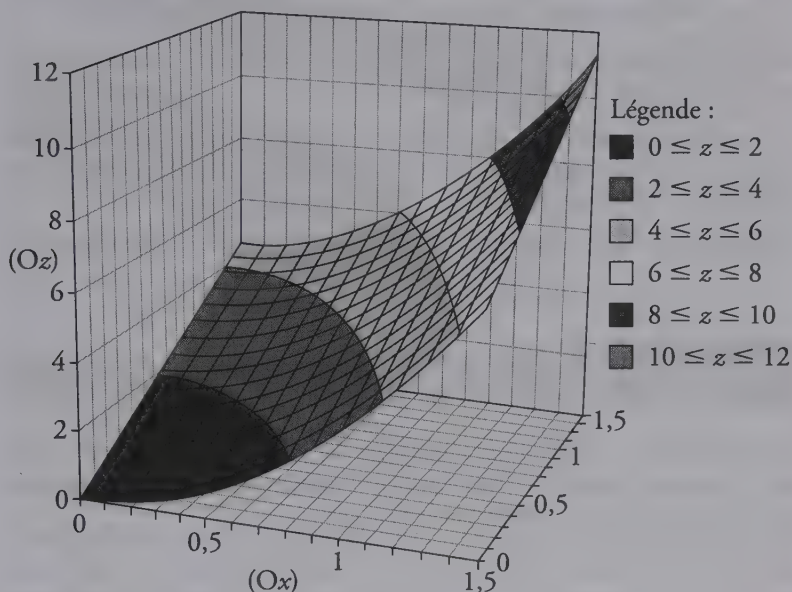
(spécialité)

L'espace est rapporté à un repère orthogonal.



On a représenté ci-dessous la surface (S) d'équation $z = 3(x^2 + y)$, avec x appartenant à l'intervalle $[0 ; 1,5]$ et y appartenant à l'intervalle $[0 ; 1,5]$.

Surface d'équation $z = 3(x^2 + y)$



Partie A – Exploitation du graphique

On considère le plan (P) d'équation $z = 6$.

1. Sur la figure donnée page précédente, placer le point A de coordonnées $(1 ; 1 ; 6)$.
2. Surligner en couleur la partie visible de l'intersection de la surface (S) et du plan (P) sur la figure donnée.

Partie B – Recherche d'un coût minimum

Une entreprise fabrique des unités centrales pour ordinateurs dont les composants sont essentiellement des cartes mères et des microprocesseurs.

On appelle x le nombre (exprimé en milliers) de microprocesseurs produits chaque mois et y le nombre (exprimé en milliers) de cartes mères produites chaque mois.

Le coût mensuel de production, exprimé en milliers d'euros, est donné par :

$$C(x ; y) = 3(x^2 + y).$$

On se propose de trouver les quantités de microprocesseurs et de cartes mères que l'entreprise doit produire par mois pour minimiser ce coût.

1. La production mensuelle totale est de 2 milliers de composants.
On a donc $x + y = 2$.
Exprimer $C(x; y)$ en fonction de la seule variable x .
On note f la fonction ainsi obtenue.
Vérifier que $f(x) = 3x^2 - 3x + 6$.
2. Montrer que, sur l'intervalle $[0; 1,5]$, la fonction f admet un minimum atteint pour $x = 0,5$.
3. Quelles quantités de microprocesseurs et de cartes mères, l'entreprise doit-elle produire chaque mois pour minimiser le coût mensuel de production ? Quel est ce coût ?
4. Placer, sur la figure donnée, le point K correspondant au coût minimum.

79

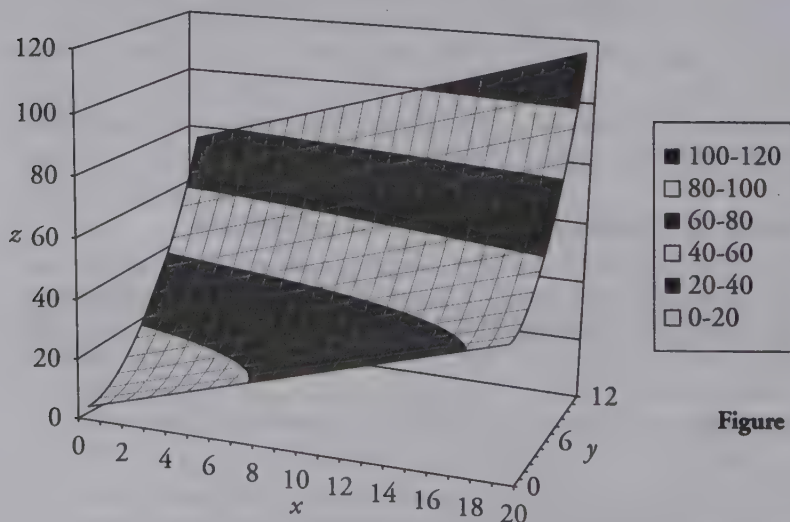
(spécialité)

ASIE, Juin 2005

Pour fabriquer un alliage, une usine utilise deux métaux A et B en quantités x et y exprimées en tonnes. Le coût de production qui en résulte, exprimé en milliers d'euros, est donné par la formule :

$$C(x; y) = 2x + 0,5y^2 + 4.$$

- La figure 1 représente la surface d'équation $z = C(x; y)$ pour $0 \leq x \leq 20$ et $0 \leq y \leq 12$.

**Figure 1**

- La figure 2 représente les courbes de niveau de cette surface pour z variant de 20 en 20.

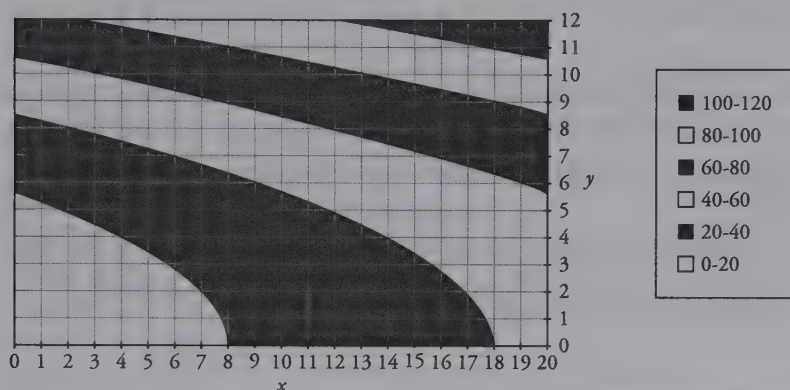


Figure 2

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Cette partie est un questionnaire à choix multiples constitué de deux questions, chacune comportant quatre propositions de réponse dont une seule est exacte.

Une bonne réponse rapportera 0,5 point.

Une mauvaise réponse sera pénalisée de 0,25 point.

Si le total des points de cette partie est négatif, la note attribuée sera 0.

Les réponses seront indiquées sur la copie. Aucune justification n'est demandée.

1. Lequel des points donnés ci-dessous est un point de la surface d'équation $z = C(x; y)$?

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a. M(13 ; 9 ; 60) | b. N(12 ; 4 ; 40) |
| c. R(12 ; 8 ; 60) | d. S(15 ; 4 ; 40) |

2. La courbe de niveau $z = 20$ est :

- | | |
|------------------|------------------|
| a. une parabole | b. une droite |
| c. une hyperbole | d. autre réponse |

Partie B

Les métaux A et B sont achetés respectivement 0,5 et 1 millier d'euros la tonne.

L'entreprise affecte 11 milliers d'euros à l'achat des métaux.

1. Un exemple

Si l'entreprise achète 4 tonnes de métal A, combien de tonnes de métal B achète-t-elle ?

2. Cas général

Soit x la quantité de métal A et y la quantité de métal B achetées : montrer que x et y sont liés par la relation $x + 2y = 22$.

3. a. Tracer sur la figure 2 ci-avant l'ensemble des points dont l'équation est :

$$x + 2y = 22.$$

b. En déduire, graphiquement le coût minimum de production des alliages pour un investissement de 11 milliers d'euros et les quantités correspondantes de métaux A et B achetées.

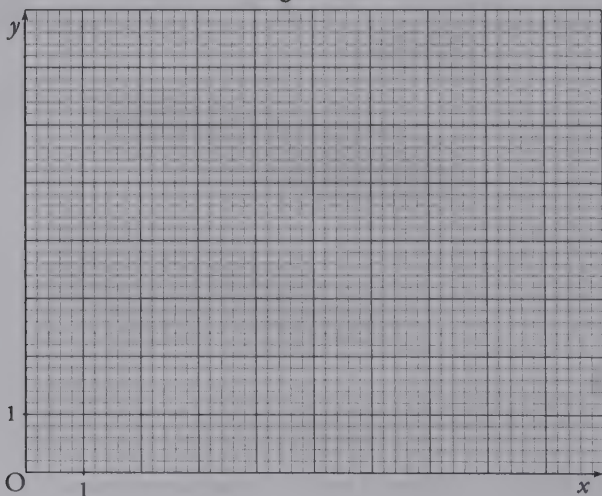
80

(spécialité)

LIBAN, Juin 2005

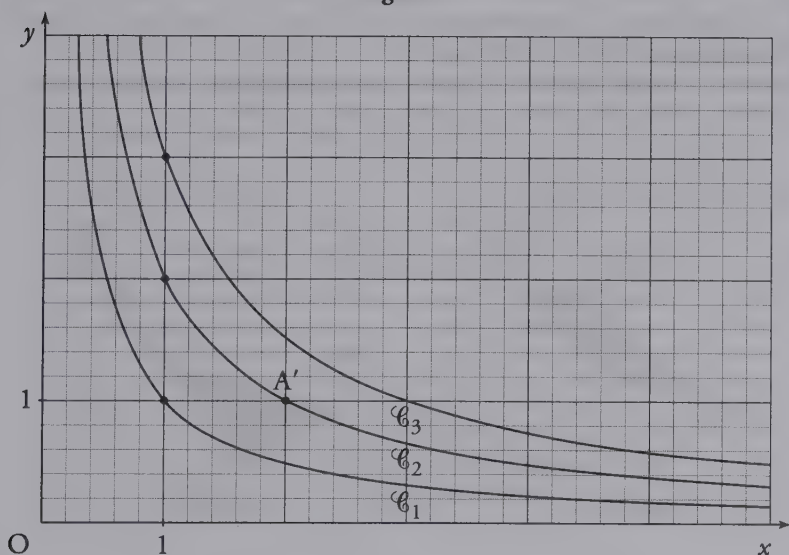
Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ de l'espace tel que $z = 3xy$. On dit que $\mathcal{S}$ est la surface d'équation $z = 3xy$.

Une courbe de niveau de cote z_0 est l'intersection d'un plan d'équation $z = z_0$, parallèle au plan (xOy) avec la surface $\mathcal{S}$. On définit de façon identique une courbe de niveau d'abscisse x_0 et une courbe de niveau d'ordonnée y_0 .

Figure 1

1. Soient les courbes de niveau d'abscisse 1, d'abscisse $\frac{3}{2}$ et d'abscisse 2. Tracer les projections orthogonales de ces courbes de niveau dans le plan (yOz) sur la figure 1.
2. a. Quelle est la nature des courbes de niveau d'abscisse constante ?
b. Montrer que les courbes de niveau de cote constante non nulle sont des hyperboles.
3. Sur la figure 2 page suivante sont représentées trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ représentant les projections orthogonales dans le plan (xOy) de trois courbes de niveau de cote constante k . Préciser, en le justifiant, la valeur de k associée à chaque courbe.
4. Le point A' représenté sur la courbe $\mathcal{C}_2$ de la figure 2 est la projection orthogonale dans le plan (xOy) d'un point $A(x; y; z)$, de la surface $\mathcal{P}$.
a. Déterminer les coordonnées du point A dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
b. Préciser les coordonnées du point A'' , projeté orthogonal de A dans le plan (yOz) , puis placer ce point A'' sur la figure 1.
5. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 6y - z - 6 = 0$.
a. Montrer que le point A appartient au plan $\mathcal{P}$.

Figure 2



- b. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ contient la courbe de niveau d'abscisse 2.
 c. Démontrer que l'intersection de la surface $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$ est la réunion de deux droites : la courbe de niveau d'abscisse 2 et une autre droite que l'on déterminera par un système d'équations cartésiennes.
 On pourra utiliser la factorisation $x + 2y - xy - 2 = (x - 2)(1 - y)$.

81

(spécialité)

NOUVELLE-CALÉDONIE, Septembre 2004

Pour modéliser la production d'une entreprise les économistes utilisent des fonctions qui suivent le modèle dit de Cobb-Douglas :

$$z = Ax^\alpha y^\beta \quad (A, \alpha, \beta \text{ réels strictement positifs}),$$

où z désigne une quantité obtenue à partir de deux quantités variables x et y .

Partie A

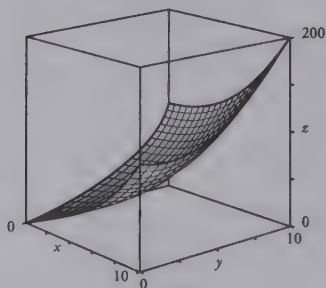
On considère les fonctions f et h définies pour $x \in [0 ; 10]$ et $y \in [0 ; 10]$ respectivement par :

$$f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}} \text{ et } h(x, y) = \frac{1}{4} x^2 y.$$

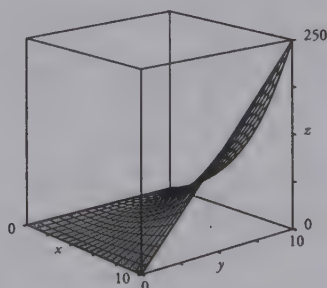
1. Vérifier que f et h sont deux fonctions de Cobb-Douglas en donnant pour chacune d'elles les valeurs A , α et β .

2. Les représentations graphiques de f et h figurent parmi les trois représentations graphiques ci-dessous.

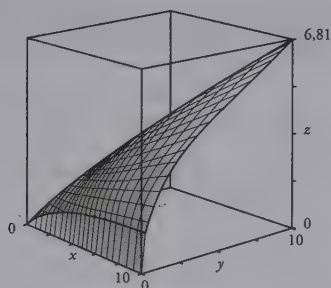
Associer à chaque fonction sa représentation graphique. Les choix seront justifiés.



Représentation 1



Représentation 2

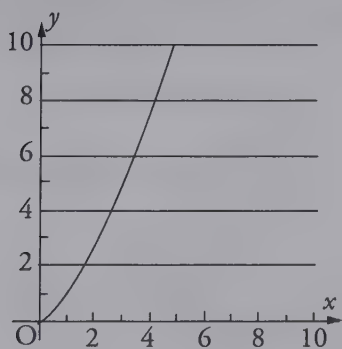


Représentation 3

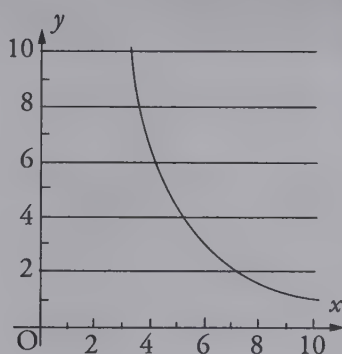
Partie B

La fabrication d'un produit dépend des durées de fonctionnement de deux machines M et M'. Les durées de fonctionnement des machines M et M' exprimées en centaines d'heures sont respectivement égales à x et y . La quantité produite, exprimée en tonnes, est $z = h(x, y)$, où h est la fonction définie à la **partie A**.

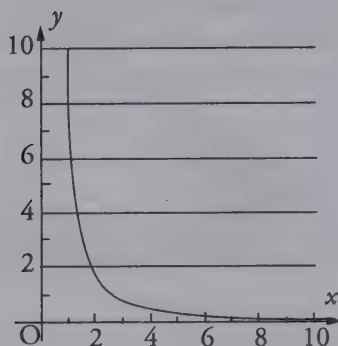
1. Dans cette question la quantité produite est fixée à 25 tonnes.
Quelle est, parmi les trois représentations graphiques suivantes, celle de la section du plan d'équation $z = 25$ avec la surface d'équation $z = \frac{1}{4} x^2 y$?



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

2. Les horaires de travail font que la somme des durées de fonctionnement des deux machines M et M' est de huit centaines d'heures.

a. Montrer que $z = 2x^2 - \frac{1}{4}x^3$.

b. Soit la fonction g définie par $g(x) = 2x^2 - \frac{1}{4}x^3$ pour $x \in [0 ; 8]$.

Étudier les variations de g et en déduire les durées de fonctionnement x et y qui assurent une production maximum.

(spécialité)

82 D'après sujet de bac

Soit f la fonction numérique de deux variables réelles, définie par :

$$f(x ; y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y$$

et soit (S) la surface représentant cette fonction, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x ; y ; z)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $z = f(x ; y)$.

1. Calculer $f(0 ; 0)$, $f(-1 ; 0)$, $f(1 ; 1)$ et $f(2 ; -1)$.

2. Déterminer trois réels x_0 , y_0 et a tels que, pour tout couple $(x ; y)$ de réels, on ait l'égalité : $f(x ; y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + a$.

En déduire que, pour tout x et tout y réels, on a l'inégalité $f(x ; y) \geq -5$.

3. Construire dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ les projections de l'intersection de (S) et des plans $z = 4$ et $z = -4$.

4. Quelle est la section de (S) par le plan $y = 0$?

83

(spécialité)

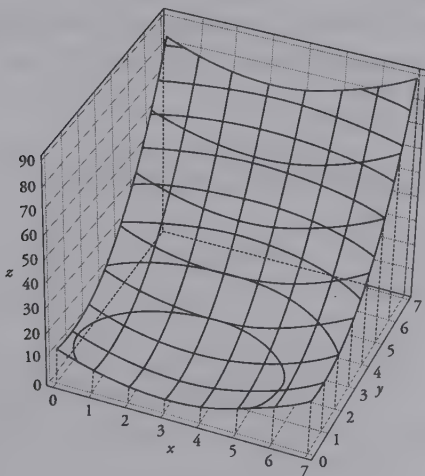
D'après sujet de bac

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

Une entreprise fabrique deux produits E et F en quantités respectives x et y exprimées en tonnes, pour lesquelles le coût de production z est donné par $z = x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 13$ où z est exprimé en milliers d'euros avec $x \in [0 ; 7]$ et $y \in [0 ; 7]$.

La surface représentant ce coût est donnée dans le repère de l'espace situé sur la figure page suivante.

1. a. Placer sur cette surface le point A d'abscisse 4 et d'ordonnée 6.
b. Donner graphiquement un encadrement d'amplitude 10 de la cote du point A.
c. Vérifier par le calcul.
2. a. Montrer que l'on a $z = (x - 3)^2 + 2(y - 1)^2 + 2$.
b. En déduire la production pour laquelle ce coût est minimal.
Quel est ce coût en euros ?
c. Placer le point B correspondant à cette production sur la surface.
3. L'entreprise doit fabriquer une quantité x du produit E et une quantité y du produit F avec la contrainte $x + y = 7$.
a. Vérifier que z peut s'écrire sous la forme $z = g(x)$ avec $x \in [0 ; 7]$ et $g(x) = 3x^2 - 30x + 83$.
b. Déterminer la valeur de x pour laquelle g admet un minimum.
Quel est alors le coût de production en euros ?
c. Placer le point C correspondant à cette production sur la surface.



GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE (SPÉCIALITÉ)

84 D'après sujet de bac

(spécialité)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ représenté page suivante. Le plan (R) est représenté par ses traces sur les plans de coordonnées ; il a pour équation $x + z = 2$.

1. On donne les points A, B, C définis par leurs coordonnées respectives :

$$A(6 ; 0 ; 0), \quad B(0 ; 3 ; 0) \quad \text{et} \quad C(0 ; 0 ; 6).$$

a. Placer les points A, B, C dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et tracer le triangle ABC.

b. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. Vérifier que le plan (P) a pour équation $x + 2y + z = 6$.

2. On a placé dans le repère les points G, E et F à coordonnées entières.

Le point G est situé sur l'axe $(O ; \vec{j})$, le point E dans le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et le point F dans le plan $(O ; \vec{j}, \vec{k})$.

Le plan (Q) passant par les points G, E et F est parallèle au plan $(O ; \vec{i}, \vec{k})$.

a. Donner l'équation du plan (Q) .

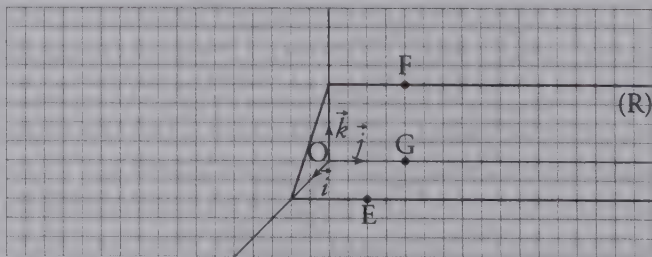
b. Donner les coordonnées des points G, E et F.

c. Parmi les points E, F et G, quels sont ceux situés dans le plan (P) ?

d. Quelle est la nature de l'ensemble des points M dont les coordonnées

$$(x ; y ; z) \text{ vérifient le système } \begin{cases} y = 2 \\ x + 2y + z = 6 \end{cases} ?$$

e. Représenter cet ensemble sur la figure ci-dessous.



3. On considère le système S de 3 équations à 3 inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y = 2 \\ x + 2y + z = 6 \end{cases}$$

Quel est l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées sont les solutions du système S ?

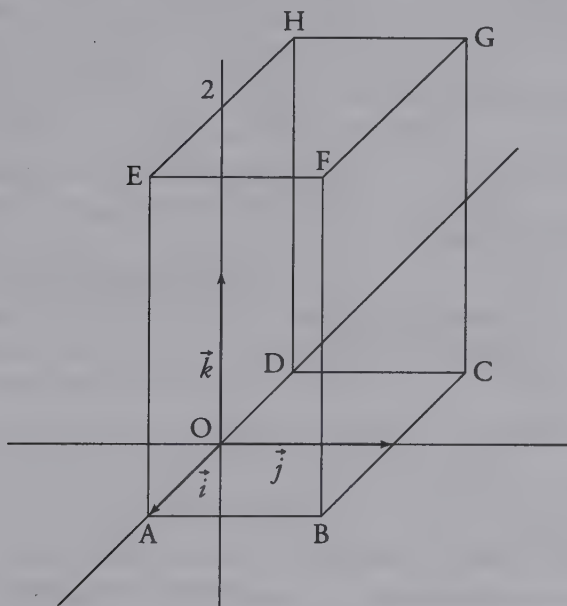
(spécialité)

85 POLYNÉSIE, Juin 2005

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

La figure ci-dessous représente un pavé droit ; le point O est le milieu de $[AD]$.

Soit P le milieu du segment $[EF]$.



1. a. Quel ensemble de points de l'espace a pour équation $z = 2$?
b. Déterminer une équation du plan (ABF) .
c. En déduire un système d'équations qui caractérise la droite (EF) .
2. a. Quelles sont les coordonnées des points A, G et P ?

- b. Placer sur la figure le point Q de coordonnées $(0 ; 0,5 ; 0)$.
- c. Déterminer une équation cartésienne du plan (APQ).
3. a. Construire sur la figure les segments [PQ] et [AG].
- b. Le point G appartient-il au plan (APQ) ? Justifier.
4. On construit la figure précédente à l'aide d'un logiciel de géométrie, puis on demande au logiciel de représenter le point d'intersection des droites (AG) et (PQ). Quelle pourrait être la réponse de l'ordinateur ?

86

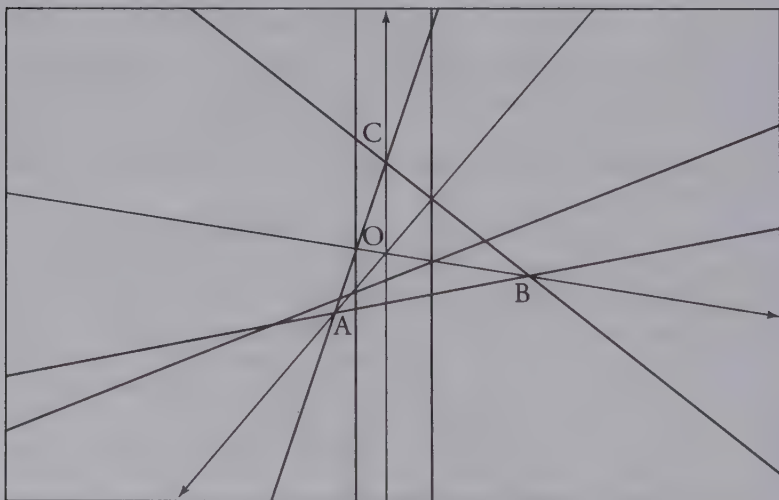
(spécialité)

ASIE, Juin 2001

L'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormal.

Représenter ce repère en prenant pour unité sur chaque axe 2 cm.

La qualité de cette représentation sera prise en compte. Le candidat pourra s'aider du graphique donné ci-dessous.



1. On donne le plan (P) d'équation $2x + 2y + 3z = 6$.
 - a. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, intersections du plan (P) avec les axes du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 - b. Tracer les droites d'intersection du plan (P) avec les plans de coordonnées du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2. On donne le plan (Q) d'équation $x + 2y = 2$.

- a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan (Q) avec les axes du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, quand ceux-ci existent.
 - b. Tracer les droites d'intersection du plan (Q) avec les plans de coordonnées du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 - c. Tracer l'intersection des deux plans (P) et (Q).
3. On donne les points $D(1 ; 0 ; 0)$, $E(0 ; -4 ; 0)$ et $F(0 ; 0 ; 4)$.
- a. Déterminer une équation du plan (R) qui contient les points D, E, F.
 - b. Calculer les coordonnées du point G, intersection des trois plans (P), (Q) et (R).

87

(spécialité)

FRANCE MÉTROPOLITAINE, Septembre 2002

1. Dans un repère orthonormal de l'espace $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points : $A(1, 0, 2)$ $B(2, 1, 0)$ et $C(0, 1, 2)$.

- a. Démontrer que ABC est un triangle rectangle.
- b. Vérifier que le vecteur $\vec{u}(1, 1, 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
- c. En déduire une équation cartésienne de ce plan.
- d. Quelles sont les coordonnées des points E, F et G intersections du plan (ABC) avec les droites $(O ; \vec{i})$, $(O ; \vec{j})$ et $(O ; \vec{k})$?
Représenter les points A, B, C et le triangle EFG dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- e. Soit D le point défini par $\overrightarrow{AD} = 3\vec{u}$.
Déterminer ses coordonnées, puis le placer sur le graphique.
- f. Pourquoi les triangles ABD et ACD sont-ils rectangles en A ?
Démontrer que BCD n'est pas rectangle.

2. Les points A, B, C et D déterminent un solide S à quatre faces triangulaires (tétraèdre) dont trois sont des triangles rectangles.

On considère un jeu où on lance le solide S. Il retombe sur une de ses faces. On a perdu si cette face est un triangle rectangle et on a gagné dans le cas contraire. Une étude statistique a montré que l'on avait deux fois plus de chance de perdre que de gagner.

- a. On lance le solide S une fois.
Quelle est alors la probabilité que S retombe sur la face (BCD) ?
- b. On lance le solide S quatre fois, les lancers étant indépendants.
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois la face (BCD) ?
(On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.)

SUITES NUMÉRIQUES (SPÉCIALITÉ)

88

(spécialité)

LA RÉUNION, Juin 2005

Le 1^{er} janvier 2005, une grande entreprise compte 1 500 employés. Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif du 1^{er} janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.

Pour tout entier naturel n , on appelle u_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1^{er} janvier de l'année $(2005 + n)$.

1. a. Calculer u_0, u_1, u_2 .

La suite u de terme général u_n est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier les réponses.

b. Expliquer ensuite pourquoi on a, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$.

2. Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = u_n - 1\,000$.

a. Démontrer que la suite v de terme général v_n est géométrique. Préciser sa raison.

b. Exprimer v_n en fonction de n .

En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 500 \times 0,9^n + 1\,000$.

c. Déterminer la limite de la suite u .

3. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = -50 \times 0,9^n$.

En déduire le sens de variation de la suite u .

4. Au 1^{er} janvier 2005, l'entreprise compte un sureffectif de 300 employés. À partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise ne sera-t-elle plus en sureffectif ?

89

(spécialité)

AMÉRIQUE DU SUD, Novembre 2002

On dispose d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée et de deux urnes, l'une marquée de la lettre 'F' et l'autre marquée de la lettre 'P'.

1. Chacune des deux urnes contient 6 boules. L'urne marquée 'F' contient 5 boules blanches et 1 boule noire alors que l'urne marquée 'P' contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

On lance la pièce de monnaie :

- si on obtient « face », on tire une boule dans l'urne marquée 'F'
- si on obtient « pile », on tire une boule dans l'urne marquée 'P'

On note P, F, B et N les événements suivants :

P : « on a obtenu pile au lancer de la pièce » ;

F : « on a obtenu face au lancer de la pièce » ;

B : « on a tiré une boule blanche » ;

N : « on a tiré une boule noire ».

a. Déterminer la probabilité de tirer une boule blanche sachant qu'on a obtenu « face » au lancer de la pièce.

b. En déduire la probabilité d'obtenir « face » au lancer de la pièce et de tirer une boule blanche.

c. Calculer la probabilité de l'événement $B \cap P$.

d. Déduire des questions précédentes que la probabilité de tirer une boule blanche est $\frac{7}{12}$.

2. On effectue la même expérience aléatoire, les deux urnes contenant à présent $2n$ boules, n étant un entier naturel non nul. L'urne marquée 'F' contient $(2n - 1)$ boules blanches et 1 boule noire alors que l'urne marquée 'P' contient $(n - 1)$ boules blanches et $(n + 1)$ boules noires.

Montrer que la probabilité de tirer une boule blanche est $\frac{3n - 2}{4n}$.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{3n - 2}{4n}$ pour tout n entier naturel non nul.

a. Déterminer la limite, quand n tend vers plus l'infini, de la suite (u_n) .

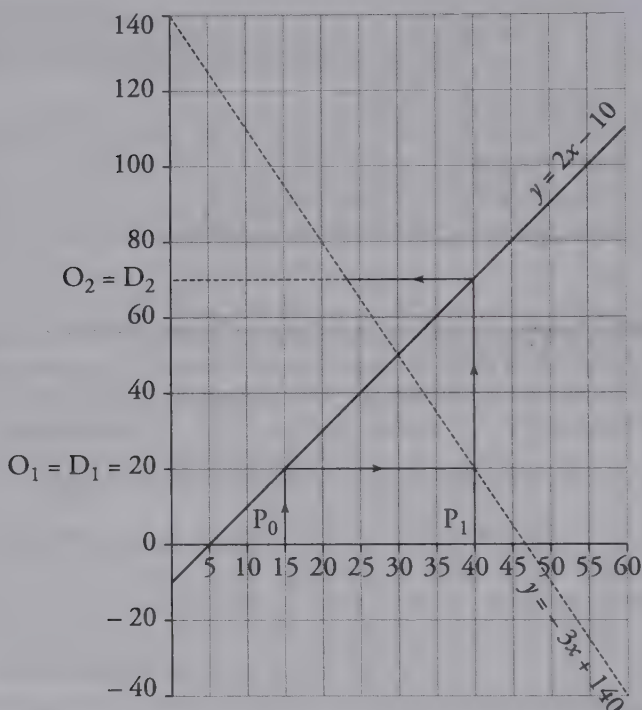
b. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{4n(n+1)}$.

c. Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite (u_n) .

Les fabricants d'ordinateurs portables vendent leurs machines à un prix P_n l'année n . Les quantités offertes O_n sont fonction du prix P_{n-1} (l'année $n - 1$), ceci du fait des délais de fabrication. Les quantités demandées D_n sur le marché sont, elles, fonction du prix P_n au cours de l'année n . Les fabricants recherchent l'équilibre du marché, c'est-à-dire qu'à chaque année n , on ait $O_n = D_n$ pour qu'il n'y ait pas de stock.

On a
$$\begin{cases} O_n = 2P_{n-1} - 10 & \text{avec } n \geq 1 \\ D_n = -3P_n + 140 & \text{avec } n \geq 0. \end{cases}$$

P_n est exprimé en milliers d'euros, O_n et D_n en centaines d'unités.



1. a. Sur le graphique, on a représenté les droites d'équations :

$$y = 2x - 10 \text{ et } y = -3x + 140.$$

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

b. On a $P_0 = 15$, déterminer la valeur de O_1 ; O_1 est représenté sur le graphique. Les quantités offertes doivent chaque année être égales aux quantités demandées, donc en particulier $O_1 = D_1$. En utilisant D_1 , on a représenté P_1 sur le graphique.

Ce prix P_1 détermine une offre O_2 qui doit être égale à D_2 . Cette valeur déclenche alors un prix P_2 ; le représenter sur le graphique ainsi que P_3 et P_4 . Peut-on émettre une conjecture quant à la limite de la suite (P_n) ?

2. a. Dans l'hypothèse d'équilibre, soit $O_n = D_n$, démontrer que :

$$P_n = -\frac{2}{3} P_{n-1} + 50 \text{ avec } n \geq 1.$$

b. (u_n) est la suite définie pour $n \geq 0$ par $u_n = P_n - 30$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

c. Exprimer u_n en fonction de n et montrer que :

$$P_n = 30 - 15 \left(-\frac{2}{3}\right)^n \text{ pour } n \geq 0.$$

d. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |P_n - 30| = 0$. Déterminer alors la limite P de la suite (P_n) . Pour ce prix d'équilibre P , quelles sont alors les quantités offertes et demandées ?

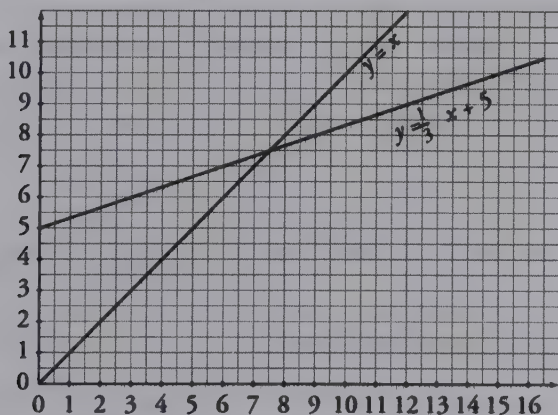
91 LA RÉUNION, Juin 2006

(spécialité)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 12 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 5 \text{ pour tout entier naturel } n \geq 1. \end{cases}$$

1. Utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = \frac{1}{3}x + 5$ pour construire les quatre premiers termes de la suite (u_n) . Cette construction est à faire sur le graphique ci-dessous.



Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?

2. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel $n \geq 1$, par :

$$v_n = u_n - \frac{15}{2}.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b. Exprimer alors v_n en fonction de n .

c. Déterminer la limite de la suite (v_n) , puis en déduire la limite de la suite (u_n) .

3. Est-il possible de déterminer n de sorte que :

a. $u_n - \frac{15}{2} \leq 10^{-6}$?

b. $u_n - \frac{15}{2} \geq 10^6$?

92

(spécialité)

ANTILLES-GUYANE, Juin 2005

Dans une zone de marais on s'intéresse à la population des libellules.

On note P_0 la population initiale et P_n la population au bout de n années.

Des études ont permis de modéliser l'évolution de P_n par la relation :

$$(R) \text{ Pour tout entier naturel } n, \text{ on a : } P_{n+2} - P_{n+1} = \frac{1}{2} (P_{n+1} - P_n).$$

On suppose que $P_0 = 40\,000$ et $P_1 = 60\,000$.

On définit l'accroissement de la population pendant la n -ième année par la différence $P_n - P_{n-1}$.

1. Calculer l'accroissement de la population pendant la première année, la deuxième année, la troisième année, puis en déduire P_2 et P_3 .

2. On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$U_n = P_{n+1} - P_n \quad \text{et} \quad V_n = P_{n+1} - \frac{1}{2} P_n.$$

a. Prouver que la suite (U_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

Exprimer U_n en fonction de n .

b. En utilisant la relation (R), calculer $V_{n+1} - V_n$.

En déduire que, pour tout n , on a $V_n = P_1 - \frac{1}{2} P_0$.

Calculer V_n .

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $P_n = 2(V_n - U_n)$.
En déduire une expression de P_n en fonction de n .

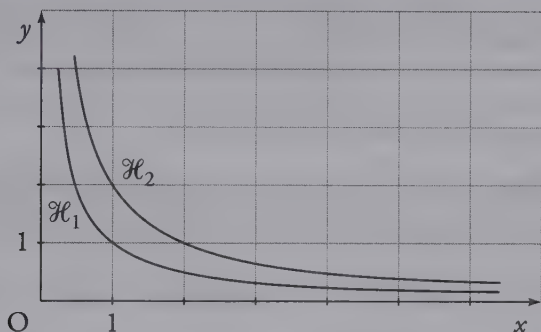
d. Montrer que la suite (P_n) converge et calculer sa limite.

Que peut-on en déduire en ce qui concerne l'évolution de cette population au bout d'un nombre d'années suffisamment grand ?

93

(spécialité)

AMÉRIQUE DU NORD, Juin 2005



Les courbes $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ représentées dans le repère orthonormal ci-dessus ont respectivement pour équation :

$$y = \frac{1}{x} \text{ et } y = \frac{2}{x}.$$

On note $\mathcal{D}_2$ le domaine délimité par les courbes $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

On note $\mathcal{D}'_2$ le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{H}_1$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

1. Colorier les domaines $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}'_2$ d'une couleur différente et montrer qu'ils ont la même aire.

Soit n un entier naturel strictement positif. On note u_n l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ délimité par les courbes $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ et les droites d'équation $x = n$ et $x = n + 1$.

2. Exprimer u_n en fonction de n .

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

On pourra comparer les nombres $n(n + 2)$ et $(n + 1)^2$.

4. Étudier la convergence de la suite (u_n) .

5. Déterminer la plus grande valeur de n telle que l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ reste supérieure à $\frac{1}{10}$ d'unité d'aire. Soit N cette valeur.
6. Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = N$.

94

(spécialité)

NOUVELLE-CALÉDONIE, Septembre 2003

Un magasin de logiciels de jeux décide de lancer la commercialisation d'un nouveau produit. Pour cela, il planifie sur 3 ans ses objectifs trimestriels de prix de vente en se basant sur la loi de l'offre et de la demande.

n étant un entier naturel, on désigne par v_n l'indice du prix de vente lors du n -ième trimestre. L'indice de départ est noté v_0 .

On a $v_0 = 100$ et $v_{n+1} = \frac{4}{5} v_n + 28$.

1. On pose $u_n = v_n - 140$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{5}$ et de premier terme (-40) .

b. Exprimer u_n en fonction de n , puis v_n en fonction de n .

2. On désigne par d_n l'indice de la demande lors du n -ième trimestre.

Sachant que $d_n = \frac{750}{7} - \frac{5}{7} v_n$, calculer d_0 et exprimer d_n en fonction de n .

3. Calculer les valeurs des deux indices au bout des 3 ans.

95

(spécialité)

FRANCE MÉTROPOLITAINE, Juin 2001

Un club de sport propose deux types d'abonnements non permutables.

Formule A : une cotisation annuelle de 100 € à laquelle s'ajoute la première année seulement un droit d'entrée de 2 000 €.

Formule B : une cotisation annuelle initiale de 200 € qui augmente de 10 % par an. Dès la seconde année, pour fidéliser la clientèle, on effectue une réduction de 10 € sur la cotisation annuelle. Si C_n est le montant, exprimé en euros, de la cotisation annuelle la n -ième année, on a $C_1 = 200$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $C_{n+1} = 1,1 C_n - 10$.

1. Déterminer la somme T_n versée au club de sport par membre pendant n années avec la formule A.
2. Soit (D_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $D_n = C_n + \alpha$ où α est un réel.
Déterminer le réel α pour que la suite (D_n) soit une suite géométrique de raison 1,1, et préciser le terme initial de la suite.
3. On suppose dans cette question que $\alpha = -100$.
 - a. Exprimer D_n puis C_n en fonction de n .
 - b. Soit S_n la somme versée au club par un membre pendant n années avec la formule B.
Montrer que $S_n = 1\,000[(1,1)^n - 1] + 100n$.
 - c. Quel nombre minimum d'années un membre doit-il cotiser pour que la formule A soit plus avantageuse que la formule B ?

96

(spécialité)

LIBAN, Juin 2001

Maud vise une cible avec une fléchette. La probabilité qu'elle atteigne la cible est $\frac{2}{3}$. Les résultats des lancers successifs sont supposés indépendants.

1. Si Maud effectue cinq lancers successifs, quelle est la probabilité qu'elle atteigne exactement deux fois la cible ?
2. Maud et Paul décident de jouer des billes avec la règle du jeu suivante :
 - Maud mise des billes puis lance une fléchette.
 - Avant le premier lancer, Maud mise une bille.
 - À chaque lancer :
 - si elle rate la cible, elle perd sa mise que Paul récupère ; le jeu continue ; elle triple sa mise avant de lancer une nouvelle fléchette ;
 - si elle atteint la cible, elle récupère sa mise et Paul lui donne autant de billes que ce qu'elle vient de miser ; le jeu s'arrête.

On suppose dans cette question que le jeu n'est pas limité par le nombre de billes.

- a. Soit a_n la mise de Maud avant le $n + 1^{\text{ème}}$ lancer. Ainsi $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.
Donner les valeurs de a_2 et a_3 . Quelle est la nature de la suite (a_n) ?
En déduire la valeur de a_n en fonction de n .
- b. Maud a raté la cible aux n premiers lancers : elle a donc perdu les mises $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

Montrer qu'elle a perdu $\frac{1}{2}(3^n - 1)$ billes depuis le début du jeu.

3. Lorsque Maud et Paul commencent le jeu défini dans le 2., ils ont chacun 160 billes.

a. Si Maud perd à toutes les parties successives, quel est le nombre k maximum de lancers qu'elle peut effectuer ?

b. Quelle est la probabilité que cette situation se réalise et que Maud atteigne la cible au $k^{\text{ième}}$ lancer ?

97

(spécialité)

FRANCE MÉTROPOLITAINE, Juin 2002

Julie possède depuis plusieurs mois un téléphone mobile pour lequel elle a souscrit un forfait mensuel de deux heures. Soucieuse de bien gérer ses dépenses, elle étudie l'évolution de ses consommations.

Elle a constaté que :

- Si pendant le mois noté n elle a dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant noté $(n+1)$ est $\frac{1}{5}$.

- Si pendant le mois noté n elle n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant est $\frac{2}{5}$.

Pour n entier naturel strictement positif, on désigne par A_n l'événement « Julie a dépassé son forfait le mois n » et par B_n l'événement contraire.

On pose $p_n = p(A_n)$ et $q_n = p(B_n)$; on a $p_1 = \frac{1}{2}$.

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. a. Donner les probabilités de A_{n+1} sachant que A_n est réalisé et de A_{n+1} sachant que B_n est réalisé.

b. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, les égalités suivantes sont vraies : $p(A_{n+1} \cap A_n) = \frac{1}{5} p_n$ et $p(A_{n+1} \cap B_n) = \frac{2}{5} q_n$.

En déduire que l'égalité suivante est vraie : $p_{n+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} p_n$.

2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $u_n = p_n - \frac{1}{3}$.

Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_1 .

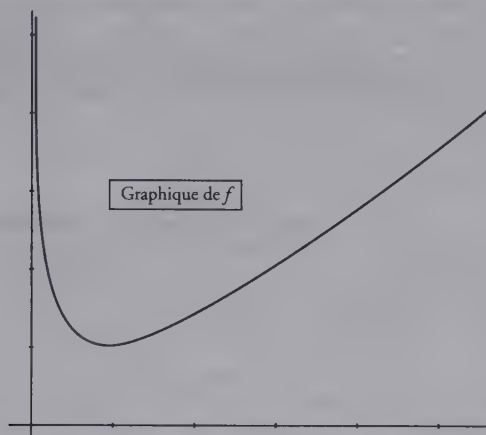
3. Écrire u_n puis p_n en fonction de n . Déterminer la limite de (p_n) .

98

(spécialité)

ANTILLES-GUYANE, Juin 2002

La courbe de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$ est donnée ci-dessous.



On considère la suite (u_n) à termes strictement positifs (*admis*) définie par :

$$u_0 = 7 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Partie A

1. Au moyen du graphique donné, déterminer le minimum de f sur $]0 ; +\infty[$ et en déduire que pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq 1$.

2. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n .

Montrer que la suite (u_n) est monotone décroissante.

Partie B

1. Construire dans le repère de la courbe (C) donné ci-contre la droite (D) d'équation $y = x$.

2. En vous aidant de la droite (D), représenter sur l'axe des abscisses du graphique ci-dessus les cinq premiers termes de la suite (u_n) .

3. Quelle conjecture peut-on faire en ce qui concerne la limite de la suite (u_n) ?

99

(spécialité)

ASIE, Juin 2002

Les résultats numériques seront donnés arrondis à l'unité.

En janvier 2002, un artisan a réalisé une recette de 2 300 euros alors que ses coûts se sont élevés à 800 euros. Son bénéfice est donc de 1 500 euros. Grâce à une clientèle en augmentation, la recette, c'est-à-dire le chiffre d'affaires de cet artisan, augmente de 1 % tous les mois.

Cependant les coûts, c'est-à-dire les frais, augmentent pendant le même temps de 2,5 %.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Janvier 2002	Février 2002	Mars 2002
Rang du mois	0	1	2
Recette	2 300		
Coûts	800		
Bénéfice	1 500		

2. Pour le mois de rang n , avec n entier naturel, on note R_n le montant de la recette, C_n le montant des coûts et B_n le montant du bénéfice.

a. Exprimer R_n et C_n en fonction de n ; justifier votre réponse.

b. Montrer que $B_n = 2\,300(1,01)^n - 800(1,025)^n$.

3. Pour étudier le sens de variation de la suite (B_n) , on étudie le signe de $B_{n+1} - B_n$.

a. Établir que, pour tout entier positif n :

$$B_{n+1} - B_n = 23(1,01)^n - 20(1,025)^n.$$

b. Établir que :

$$23(1,01)^n - 20(1,025)^n > 0 \text{ équivaut à } \left(\frac{1,025}{1,01}\right)^n < \frac{23}{20}.$$

En déduire les valeurs de n telles que l'inégalité $B_{n+1} - B_n > 0$ soit vérifiée. Que peut-on dire de la suite (B_n) dans ce cas ?

4. Le bénéfice de cet artisan peut-il diminuer ? Si oui, à partir de quel mois obtiendra-t-il une baisse par rapport au mois précédent ?

GRAPHES (SPÉCIALITÉ)

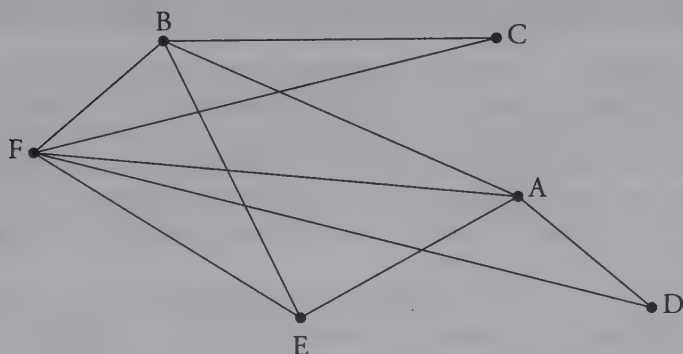
100 AMÉRIQUE DU NORD, Juin 2004

(spécialité)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère le graphe G_1 ci-dessous :



1. Justifier les affirmations suivantes :

- Le graphe G_1 admet au moins une chaîne eulérienne.
- La chaîne DABCFBEFAE n'est pas une chaîne eulérienne de G_1 .

2. Déterminer un sous-graphe complet de G_1 ayant le plus grand ordre possible. En déduire un minorant du nombre chromatique γ de ce graphe.

3. Déterminer un majorant de ce nombre chromatique (on justifiera la réponse).

4. En proposant une coloration du graphe G_1 , déterminer son nombre chromatique.

Partie B

Soit la matrice M d'un graphe orienté G_2 dont les sommets A, B, C, D et E sont pris dans l'ordre alphabétique. On donne :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Construire le graphe G_2 .
2. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant B à D. Les citer toutes.

(spécialité)

101**ANTILLES-GUYANE, Juin 2004**

On s'intéresse aux performances réalisées par des étudiants courant le 200 mètres dans les compétitions universitaires. Lors d'une compétition, le **score** d'un(e) étudiant(e) est son meilleur temps en secondes obtenu aux 200 m. Une enquête a permis d'établir le comportement général suivant, qu'on supposera valable pour les filles et les garçons dans toute la suite.

- Lors de la première compétition, le score d'un(e) étudiant(e) est toujours supérieur ou égal à 25 secondes.
- Si, lors de la n -ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score strictement inférieur à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement inférieur à 25 secondes lors de la $n + 1$ -ième compétition est de $\frac{2}{5}$.
- Si, lors de la n -ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score supérieur ou égal à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise un score strictement inférieur à 25 secondes est $\frac{1}{5}$.

On représente les données précédentes par un graphe probabiliste G à deux états.

On note A tout score strictement inférieur à 25 secondes et B tout score supérieur ou égal à 25 secondes.

On note a_n la probabilité d'obtenir un score A lors de la compétition n et b_n la probabilité d'obtenir un score B lors de la compétition n .

L'état probabiliste lors de la compétition n est donc représenté par la matrice ligne $(a_n \ b_n)$.

1. Représenter G et donner sa matrice.

2. Jamalia, jeune étudiante, se présente à sa première compétition universitaire.

a. Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de cette compétition.

b. Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de sa troisième compétition.

3. Déterminer l'état stable du graphe G.

4. Julien a déjà de nombreuses compétitions universitaires dans les jambes... Montrer que, pour sa prochaine compétition, il a environ une chance sur quatre de réaliser un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres.

(spécialité)

102 CENTRES ÉTRANGERS, Juin 2004

Un jardinier possède un terrain bien ensoleillé avec une partie plus ombragée. Il décide d'y organiser des parcelles où il plantera 8 variétés de légumes : de l'ail (A), des courges (Co), des choux (Ch), des poireaux (Px), des pois (Po), des pommes de terre (Pt), des radis (R) et des tomates (T).

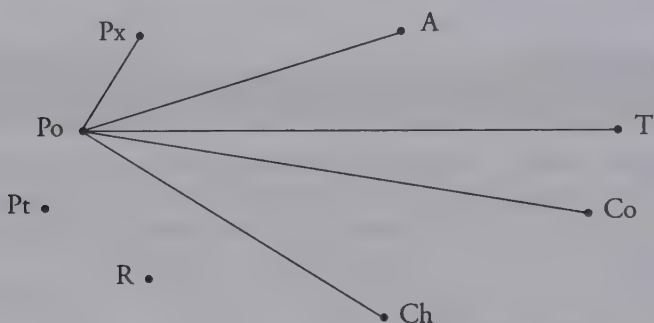
Il consulte un almanach où figurent des incompatibilités de plantes, données par les deux tableaux :

Expositions incompatibles de plantes	
Plantes d'ombre partielle	Plantes de plein soleil
pois radis	choux tomates courges
<i>par exemple :</i> les pois sont incompatibles avec les choux, les tomates et les courges.	

Associations incompatibles de plantes dans une même parcelle	
pois	ail, poireaux
pommes de terre	courges, radis et tomates
choux	tomates, ail, poireaux et courges
courges	tomates
<i>par exemple :</i> les pois sont incompatibles avec l'ail et les poireaux.	

Pour tenir compte de ces incompatibilités le jardinier décide de modéliser la situation sous la forme d'un graphe de huit sommets, chaque sommet représentant un légume.

1. Compléter le graphe page suivante mettant en évidence les incompatibilités d'exposition ou les associations incompatibles indiquées dans les deux tableaux ci-dessus.
2. Calculer la somme des degrés des sommets du graphe, en déduire le nombre de ses arêtes.
3. Rechercher un sous-graphe complet d'ordre 4, qu'en déduit-on pour le nombre chromatique du graphe ?

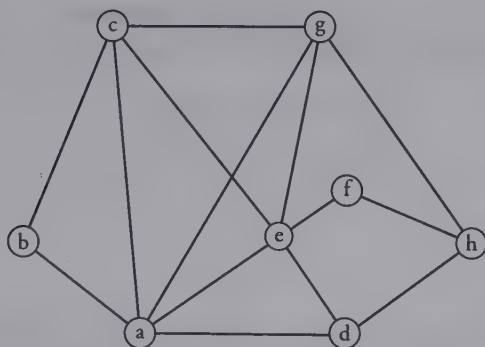


4. Donner le nombre chromatique du graphe et l'interpréter en nombre minimum de parcelles que le jardinier devra créer.
5. Donner une répartition des plantes par parcelle de façon à ce que chaque parcelle contienne exactement deux types de plantes et que le nombre de parcelles soit minimum.
6. Donner une répartition des plantes de façon à ce qu'une parcelle contienne trois plantes et que le nombre de parcelles soit minimum.

(spécialité)

103**Exercice-type****Partie A**

On note G le graphe représenté ci-dessous et M sa matrice obtenue en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. La matrice M^3 est également donnée.



$$M^3 = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 11 & 10 & 12 & 5 & 13 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 3 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 11 & 7 & 8 & 6 & 12 & 3 & 10 & 5 \\ 10 & 3 & 6 & 2 & 11 & 1 & 4 & 8 \\ 12 & 5 & 12 & 11 & 8 & 8 & 13 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 8 & 0 & 2 & 6 \\ 13 & 4 & 10 & 4 & 13 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

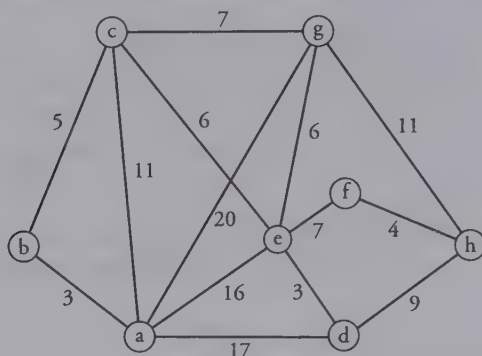
Dire, en justifiant votre réponse, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

- 1. a.** L'ordre du graphe est égal au plus grand des degrés des sommets.
- b.** Le graphe G contient un sous-graphe complet d'ordre 3.
- c.** Les sommets de G peuvent être coloriés avec trois couleurs sans que deux sommets adjacents soient de même couleur.
- d.** Il est possible de parcourir ce graphe en passant une fois et une seule par chaque arête.
- e.** Il existe au moins un chemin de longueur 3 qui relie chaque sommet à chacun des sept autres sommets du graphe.
- f.** Il y a 72 chemins de longueur 3 qui relient le sommet (e) à chacun des huit sommets du graphe.

Partie B

Le graphe ci-dessous représente un réseau de lignes d'autobus. Les sommets du graphe désignent les arrêts. Les poids des arêtes sont les durées de parcours, en minutes, entre deux arrêts (correspondances comprises).

Déterminer, à l'aide d'un algorithme, la durée minimum pour aller de l'arrêt (a) à l'arrêt (h) et donner ce trajet.



(spécialité)

104 CENTRES ÉTRANGERS, Juin 2005

On a divisé une population en deux catégories « fumeurs » et « non-fumeurs ». Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre :

- 60 % des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10 % des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non-fumeurs. On désigne par :

- f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n ,
- $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n , où n est un entier naturel.

On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs. On a donc $f_0 = g_0 = 0,5$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2. Justifier l'égalité matricielle :

$$(f_{n+1} \quad g_{n+1}) = (f_n \quad g_n) \times A \quad \text{où } A \text{ désigne la matrice } \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

3. Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.
4. Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
5. Montrer que pour tout entier naturel n , $f_{n+1} = 0,5 f_n + 0,1$.

6. On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = f_n - 0,2$.
- Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - Donner l'expression de u_n en fonction de n .
 - En déduire que, pour tout entier naturel n , $f_n = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$.
 - Déterminer la limite de la suite (f_n) lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

(spécialité)

105 NOUVELLE-CALÉDONIE, Novembre 2006

Une association sportive propose à ses adhérents de pratiquer au choix soit le karaté, soit le judo ; chaque adhérent pratique un et un seul de ces deux sports.

Chaque année les adhérents renouvellent tous leur adhésion. L'association n'accueille pas de nouveaux adhérents. Elle compte 800 adhérents.

Pour le renouvellement des adhésions, les données des années précédentes permettent d'envisager le modèle suivant :

- 70 % des adhérents qui étaient inscrits au karaté se réinscrivent au karaté ;

- 20 % des adhérents qui étaient inscrits au judo s'inscrivent au karaté.

En 2003, 200 adhérents étaient inscrits dans la section karaté et 600 adhérents étaient inscrits dans la section judo.

On appelle $P_n = (a_n \ b_n)$ la matrice traduisant la répartition des adhérents selon le sport pratiqué l'année 2003 + n :

- a_n représente la proportion des adhérents inscrits au karaté l'année 2003 + n ;

- b_n représente la proportion des adhérents inscrits au judo l'année 2003 + n ;

- $a_n + b_n = 1$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

2. Déterminer l'état initial $P_0 = (a_0 \ b_0)$.

3. a. Déterminer la matrice de transition M associée au graphe.

(Rappel : M est la matrice telle que : $P_{n+1} = P_n \times M$.)

b. En admettant que, en 2005, 36,25 % des adhérents sont inscrits au karaté et 63,75 % des adhérents sont inscrits au judo, déterminer la répartition que le modèle envisagé permet de prévoir pour 2006. (Exprimer les résultats sous forme de pourcentages, puis donner les nombres d'adhérents correspondants.)

4. Soit $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état stable, c'est-à-dire telle que $P \times M = P$. (Rappel : x et y sont des nombres réels tels que $x + y = 1$.)

a. Déterminer les nombres x et y .

b. En déduire la limite de a_n quand n tend vers l'infini.

Interpréter ce résultat.

5. Dans la même ville, un club de judo accepte de nouveaux adhérents : chaque année le nombre de ses adhérents augmente de 10 %. Le club comptait 405 adhérents en 2003. En utilisant une calculatrice, trouver en quelle année l'effectif de ce club sera pour la première fois supérieur à l'effectif de la section judo de l'association étudiée dans les questions précédentes ?

(spécialité)

106 ANTILLES-GUYANE, Septembre 2004

Lucien, fumeur impénitent, décide d'essayer de ne plus fumer.

S'il ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,3. Par contre, s'il fume un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est 0,9.

On note F l'événement « Lucien fume » et $\bar{F}$ l'événement contraire.

1. Traduire ces informations à l'aide d'un graphe probabiliste dont les sommets seront notés F et $\bar{F}$.

On admet que la matrice M associée au graphe est $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'état probabiliste le n -ième jour est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \ b_n)$ où a_n désigne la probabilité que Lucien fume le n -ième jour et b_n la probabilité que Lucien ne fume pas le n -ième jour.

a. On suppose que le premier jour la probabilité que Lucien fume est 0,2. Déterminer P_1 .

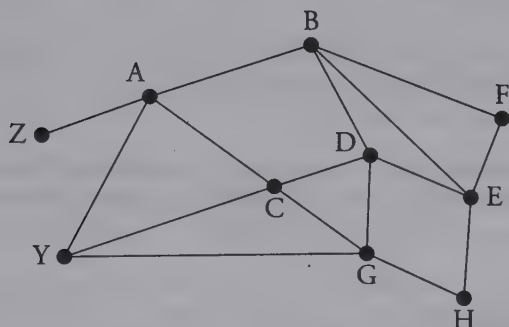
b. Calculer M^2 et en déduire P_3 .

c. Déterminer P_{n+1} en fonction de P_n et en déduire la probabilité que Lucien fume le $(n+1)$ -ième jour en fonction de a_n et b_n .

d. On considère la matrice ligne $P = (a \ b)$ où a et b sont deux réels tels que $a + b = 1$.

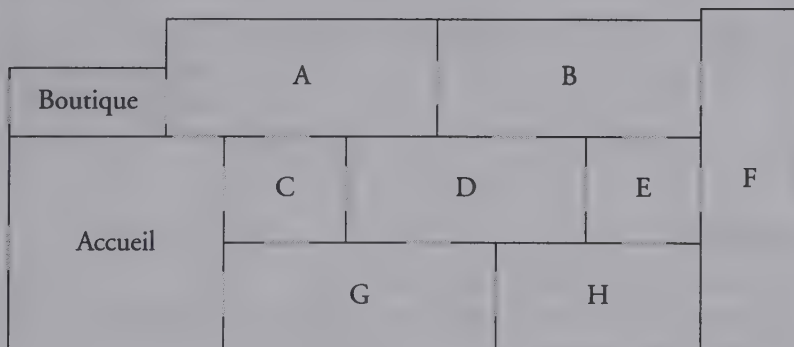
Déterminer a et b pour que $P = PM$.

En déduire la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$.

107 (spécialité) **AMÉRIQUE DU NORD, Juin 2007**
Partie A – Étude d'un graphe


On considère le graphe ci-dessus.

1. a. Ce graphe est-il connexe ?
 - b. Déterminer le degré de chacun des sommets.
On pourra donner le résultat sous forme de tableau.
 - c. Justifier l'existence d'une chaîne eulérienne.
2. a. Déterminer un encadrement du nombre chromatique de ce graphe.
 - b. Montrer que ce nombre chromatique est égal à 3.

Partie B – Visite d'un musée


Voici le plan d'un musée : les parties grisées matérialisent les portes et les visiteurs partent de l'accueil, visitent le musée et doivent terminer leur visite à la boutique.

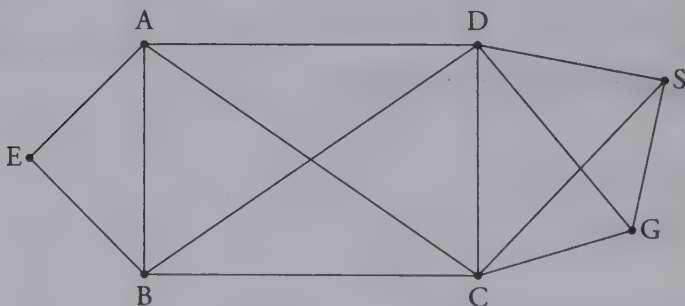
1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe en précisant ce que représentent arêtes et sommets.
2. a. Pourquoi est-il possible de trouver un circuit où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes ?
b. Donner un exemple d'un tel circuit.
3. Comment colorier les salles, y compris l'accueil et la boutique, en utilisant un minimum de couleurs, pour que deux salles qui communiquent par une porte aient des couleurs différentes ?

108**CENTRES ÉTRANGERS, Juin 2007**

(spécialité)

Les parties A et B sont indépendantes.

L'objet d'étude est le réseau des égouts d'une ville. Ce réseau est modélisé par le graphe ci-dessous où les sommets représentent les stations et les arêtes, les canalisations.

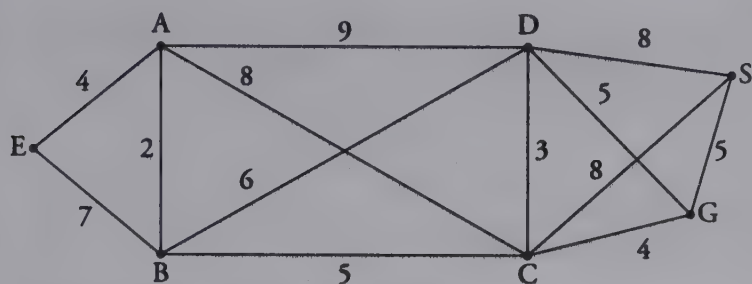


Partie A

1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ?
2. Justifier que le nombre chromatique de ce graphe est compris entre 4 et 6.

Partie B

Le graphe pondéré page suivante donne, en minutes, les durées des trajets existant entre les différentes stations du réseau des égouts.



1. Un ouvrier doit se rendre par ce réseau de la station E à la station S. Déterminer, en utilisant un algorithme, le trajet le plus rapide pour aller de E à S et préciser sa durée.

2. Ayant choisi le trajet le plus rapide, l'ouvrier arrivant en C, apprend que les canalisations CG et CS sont fermées pour cause de travaux et qu'il ne peut les utiliser.

a. Comment peut-il terminer, au plus vite, son trajet jusqu'à S ? Combien de temps le trajet entre E et S prendra-t-il dans ce cas ?

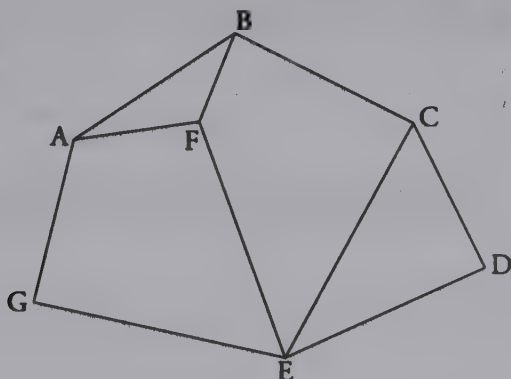
b. S'il avait su dès le départ que les canalisations CG et CS étaient impraticables, quel trajet aurait choisi l'ouvrier pour se rendre, au plus vite de E à S ? Combien de temps ce trajet aurait-il pris ?

109 AMÉRIQUE DU NORD, Juin 2003

(spécialité)

Soit le graphe G ci-dessous constitué des sommets A, B, C, D, E, F et G.

1. Quel est son ordre et le degré de chacun de ses sommets ?



2. Reproduire sur la copie et compléter le tableau des distances entre deux sommets de G :
En déduire le diamètre de ce graphe.

3. a. Donner un sous-graphe complet d'ordre 3 de G.
Qu'en déduire pour le nombre chromatique de G ?

Distance	A	B	C	D	E	F	G
A	X						
B	X	X					
C	X	X	X				
D	X	X	X	X			
E	X	X	X	X	X		
F	X	X	X	X	X	X	
G	X	X	X	X	X	X	X

b. Proposer une coloration du graphe G et en déduire son nombre chromatique.

4. Donner la matrice M associée à G (vous numéroterez les lignes et les colonnes dans l'ordre alphabétique).

5. En utilisant la matrice M^2 donnée ci-dessous, déduire le nombre de chaînes de longueur 2 partant de A sans y revenir.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

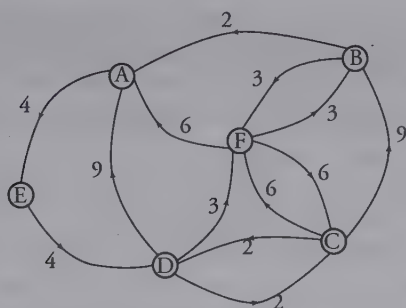
110

(spécialité)

CENTRES ÉTRANGERS, Juin 2003

Un livreur d'une société de vente à domicile doit, dans son après-midi, charger son camion à l'entrepôt noté A, livrer cinq clients que nous noterons B, C, D, E et F, puis retourner à l'entrepôt.

Le réseau routier, tenant compte des sens de circulation, et les temps de parcours (en minutes) sont indiqués sur le graphe G suivant :



1. Donner la matrice M associée au graphe G .

2. On donne la matrice M^6 :

$$M^6 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 19 & 11 & 12 & 9 & 6 & 16 \\ 36 & 28 & 23 & 22 & 18 & 34 \\ 37 & 24 & 25 & 17 & 15 & 31 \\ 15 & 12 & 9 & 10 & 8 & 15 \\ 28 & 22 & 19 & 15 & 15 & 26 \end{pmatrix}$$

On s'intéresse aux chemins partant de l'entrepôt A et se terminant en A.

a. Combien existe-t-il de chemins de longueur 6 reliant A à A ?

b. Citer ces chemins.

c. Parmi ceux qui passent par tous les sommets du graphe, lequel minimise le temps de parcours ?

d. Quelle conséquence peut tirer le livreur du dernier résultat ?

3. Au départ de sa tournée, le livreur a choisi de suivre l'itinéraire le plus rapide. Malheureusement le client C n'est pas présent au passage du livreur et celui-ci décide de terminer sa livraison par ce client. Indiquer quel est le chemin le plus rapide pour revenir à l'entrepôt A à partir de C. La réponse devra être justifiée.

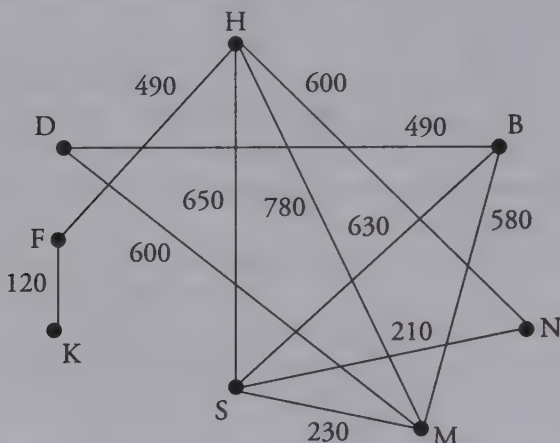
(spécialité)

111

AMÉRIQUE DU SUD, Novembre 2006

1. À l'occasion de la coupe du monde de football en 2006 en Allemagne, une agence touristique organise des voyages en car à travers les différentes villes où se joueront les matchs d'une équipe nationale. Les routes empruntées par les cars sont représentées par le graphe page suivante. Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres séparant les villes.

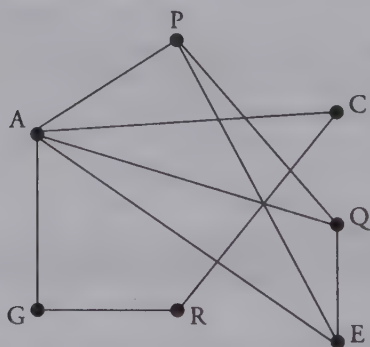
Les lettres B, D, F, H, K, M, N et S représentent les villes Berlin, Dortmund, Francfort, Hambourg, Kaiserslautern, Munich, Nuremberg et Stuttgart. En précisant la méthode utilisée, déterminer le plus court chemin possible pour aller de Kaiserslautern à Berlin en utilisant les cars de cette agence.



2. Pour des raisons de sécurité, les supporters de certaines équipes nationales participant à la coupe du monde de football en 2006 ne peuvent pas être logés dans le même hôtel.

L'objectif de cette question consiste à rechercher une répartition des supporters afin d'utiliser le minimum d'hôtels.

On donne ci-dessous le graphe d'incompatibilité entre les supporters de différentes équipes : par exemple, un supporter de l'équipe A ne peut être logé avec un supporter de l'équipe P.



a. Déterminer le nombre chromatique de ce graphe en justifiant la valeur trouvée.

b. Proposer une répartition des supporters par hôtels en utilisant un nombre minimum d'hôtels.

(spécialité)

112 ANTILLES-GUYANE, Juin 2006

Sur une population donnée, abonnée à deux opérateurs téléphoniques A et B, on considère que, chaque année, 40 % des abonnés à l'opérateur A le quitte pour l'opérateur B et 10 % des abonnés à l'opérateur B le quitte pour l'opérateur A. On néglige les nouveaux abonnés.

On suppose de plus qu'en 2005, 25 % de cette population est abonnée à l'opérateur A.

Partie A

1. Déterminer le graphe probabiliste correspondant à cette situation. En déduire la matrice de transition, notée M.

2. On note :

- a_n la part des abonnés à l'opérateur A l'année $2005 + n$;
- b_n la part des abonnés à l'opérateur B l'année $2005 + n$;
- E_n la matrice $(a_n \ b_n)$, correspondant à l'état probabiliste l'année $2005 + n$.

a. Préciser E_0 .

b. Calculer E_1 en faisant apparaître vos calculs.

c. Déterminer la répartition prévisible de cette population en 2013 (*On pourra utiliser la calculatrice et on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième*).

d. Soit E la matrice $(a \ b)$ où a et b sont deux réels positifs tels que $a + b = 1$.

Déterminer a et b tels que $E = E \times M$. Interpréter ce résultat.

Partie B

1. Montrer que $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1$.

2. On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = a_n - 0,2$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. En déduire l'expression de u_n , puis de a_n en fonction de n .

c. Déterminer la limite de la suite (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$. Que retrouve-t-on ?

EXERCICES ET PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

113**FRANCE MÉTROPOLITAINE, Septembre 2003**

On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions suivantes :

- L est définie sur $[0 ; 1]$;
- L est croissante sur $[0 ; 1]$;
- $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$;
- pour tout x de $[0 ; 1]$, $L(x) \leq x$.

Partie A

Les parties I et II sont indépendantes.

Le but de la partie A est de vérifier que les fonctions f et g considérées satisfont aux conditions énoncées ci-dessus.

I. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1.$$

1. Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; 1]$.

2. Déterminer le signe de $x - f(x)$ sur $[0 ; 1]$.

3. Conclure.

II. 1. Soit g la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $g(x) = e^x - (e - 2)x - 1$.

a. Calculer $g'(x)$. En déduire le sens de variation de g sur $[0 ; 1]$.

b. Calculer $g(0)$ et $g(1)$.

2. Soit h la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $h(x) = -e^x + (e - 1)x + 1$.

a. Le tableau suivant donne le signe de la dérivée de h (que l'on ne demande pas de calculer).

x	0	$\ln(e - 1)$	1
Signe de $h'(x)$	+	0	-

Dresser le tableau de variation de h .

On précisera l'arrondi à 0,1 de $h(\ln(e - 1))$.

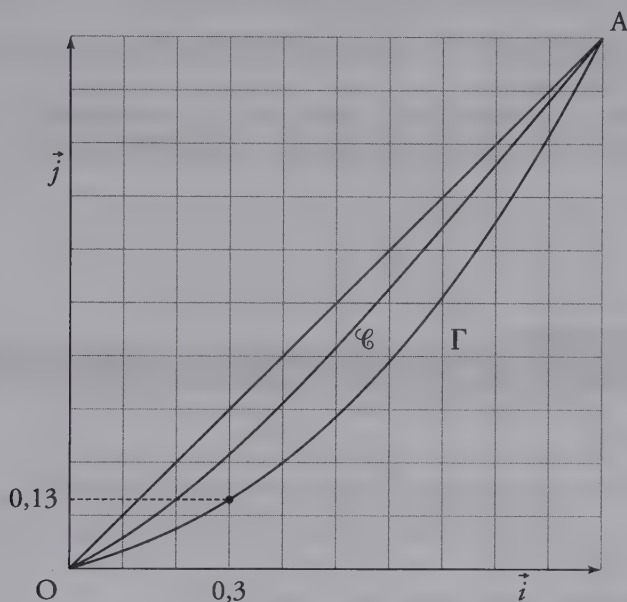
b. Vérifier que pour tout x de $[0 ; 1]$, on a $h(x) = x - g(x)$.

A l'aide de **II. 2. a.**, montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, on a $g(x) \leq x$.

3. Conclure.

Partie B

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes représentatives respectives $\mathcal{C}$ et Γ des fonctions f et g et le segment $[OA]$ où A est le point de coordonnées $(1; 1)$.



1. On suppose que la courbe de Lorenz Γ illustre la répartition des surfaces des exploitations agricoles d'un pays G .

En abscisse, x représente le pourcentage du nombre des exploitations les plus petites par rapport au nombre total des exploitations du pays.

En ordonnée, $g(x)$ représente le pourcentage total des superficies de ces exploitations.

Par exemple, comme l'arrondi de $g(0,3)$ à 10^{-2} est 0,13 on dit que 30 % des exploitations les plus petites représentent au total 13 % de la superficie des exploitations du pays G .

Donner la valeur arrondie à 0,01 de $g(0,5)$. Interpréter ce résultat.

2. On appelle coefficient de Gini pour le pays G , le nombre $2\mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par le segment $[OA]$ et la courbe Γ . On le note γ_G .

a. Exprimer cette aire $\mathcal{A}$ à l'aide d'une intégrale.

Déterminer la valeur exacte de cette aire.

b. Donner la valeur arrondie à 0,01 de γ_G .

3. La représentation graphique $\mathcal{C}$ de f est la courbe de Lorenz pour un pays F.

Calculer γ_F le coefficient de Gini pour le pays F.

En donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 0,01.

4. Plus le coefficient de Gini est petit, plus la répartition des exploitations est égalitaire.

a. Quel est le pays pour lequel la répartition est la plus égalitaire ?

b. Le graphique permettait-il de prévoir ce résultat ? Pourquoi ?

114 AMÉRIQUE DU SUD, Novembre 2006

Partie A

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'équation :

$$2X^2 - 15X + 18 = 0.$$

2. En déduire :

a. Les solutions de l'équation $2e^{2x} - 15e^x + 18 = 0$.

b. Le signe de $2e^{2x} - 15e^x + 18$ selon les valeurs du réel x .

Partie B

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $] \ln 3 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{3}{e^x - 3}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f relativement à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

1. Déterminer la limite de la fonction f en $\ln 3$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?

2. Démontrer que la droite D d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Quelle est la limite de la fonction f en $+\infty$?

3. Étudier la position relative de la droite D et de la courbe $\mathcal{C}_f$.
4. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $] \ln 3 ; +\infty[$; on note f' sa fonction dérivée.
- Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $] \ln 3 ; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 15e^x + 18}{(e^x - 3)^2}.$$

En déduire, à l'aide de la **partie A**, le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f .

5. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi que ses asymptotes. (Si la fonction présente un minimum ou un maximum, le mettre en évidence.)

6. a. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $] \ln 3 ; +\infty[$:

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{e^x}{e^x - 3}.$$

- b. Soit g la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $] \ln 3 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x - 3}.$$

Déterminer une primitive de la fonction g sur l'intervalle $] \ln 3 ; +\infty[$.

- c. En déduire, une primitive de la fonction f sur l'intervalle $] \ln 3 ; +\infty[$.

(spécialité)

115 LA RÉUNION, Juin 2006

Pour chacune des cinq questions suivantes numérotées de 1. à 5., une et une seule des trois propositions a., b., c. est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la proposition exacte. Aucune justification n'est attendue.

Pour chaque question, une réponse correcte rapporte 1 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, une absence de réponse ne rapporte et n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note pour cet exercice est ramenée à 0.

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n , par :

$$u_n = 1 - \frac{6}{n - 10,5}.$$

- a. La suite (u_n) est croissante.
- b. La suite (u_n) est décroissante.

c. La suite (u_n) n'est pas monotone.

2. La suite (u_n) est définie par :

$u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = -0,1 u_n$

a. La suite (u_n) est arithmétique.

b. La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

c. La suite (u_n) est géométrique.

3. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

– le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $x + y + z - 2 = 0$,

– la droite $(\mathcal{D})$ d'équations cartésiennes $y = 1$ et $z = 1 - x$.

a. La droite $(\mathcal{D})$ est sécante au plan $(\mathcal{P})$.

b. La droite $(\mathcal{D})$ est incluse dans le plan $(\mathcal{P})$.

c. La droite $(\mathcal{D})$ est strictement parallèle au plan $(\mathcal{P})$.

4. La matrice d'un graphe non orienté G , de sommets A, B, C, D, E est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Le graphe G comporte 12 arêtes.

b. Le graphe G admet une chaîne eulérienne.

c. Le graphe G est complet.

5. Les ventes d'un nouveau roman ont régulièrement progressé de 2 % chaque semaine depuis sa parution. Au cours de la première semaine il s'en était vendu dix mille exemplaires.

Le nombre d'exemplaires vendus au cours des 45 semaines écoulées depuis sa parution est :

a. 23 900.

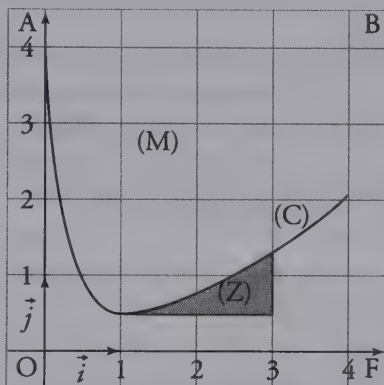
b. 718 927.

c. 743 306.

116 D'après sujet de bac

On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative (C) de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 4]$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} - \ln x.$$



Dans tout le problème on donnera les résultats arrondis à 10^{-3} .

Partie A – Étude théorique liée à la fonction f

1. a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; 4]$.
- b. Étudier la limite de f en 0.
- c. Donner le tableau de variation de f .

2. Soit (Z) la partie du plan délimitée par la courbe (C) et les droites d'équations : $y = \frac{1}{2}$, $x = 1$ et $x = 3$.

- a. Justifier que l'on a $f(x) \geq \frac{1}{2}$ sur $]0; 4]$ et exprimer à l'aide d'une intégrale (que l'on n'essaiera pas de calculer dans cette question) l'aire $\mathcal{A}_Z$, en unités d'aire, de la partie (Z) du plan.
- b. Soit g la fonction définie sur $]0; 4]$ par $g(x) = x \ln x - x$. Calculer $g'(x)$.
- c. En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}_Z$ en unités d'aire.

Partie B – Probabilité et jeu

Au cours de l'élaboration d'une phase d'un jeu vidéo inspiré du golf, on cherche à évaluer la probabilité de gagner.

L'écran est le carré AOFB. Les sommets du carré ont pour coordonnées :

$$A(0 ; 4) ; O(0 ; 0) ; F(4 ; 0) ; B(4 ; 4).$$

La courbe (C) partage l'écran en deux parties :

- la partie de l'écran située strictement au-dessus de la courbe représente une mare et elle est notée (M) ;
- la partie de l'écran située au-dessous de la courbe représente le terrain de jeu et elle est notée (T) .

La partie (Z) définie dans la partie A est donc incluse dans (T) .

1. Dans cette question, le jeu consiste à simuler le lancer d'une balle.

On admet que la probabilité d'atteindre une partie de l'écran est donnée par :

$$\frac{\text{Aire de la partie de l'écran considérée}}{\text{Aire du carré AOFB}}.$$

Cette probabilité est indépendante de l'unité graphique choisie.

Déterminer, par le calcul, la probabilité que la balle atteigne la zone (Z) .

2. Dans cette question, le jeu consiste à simuler trois lancers successifs et indépendants ; on admet que, pour chaque lancer, la probabilité d'atteindre (Z) est de 0,044.

On gagne lorsque deux au moins des trois balles lancées ont atteint la partie (Z) .

Calculer la probabilité de gagner.

On pourra s'aider d'un arbre et on fera figurer le détail des calculs sur la copie.

117 ASIE, Juin 2003

Le but de ce problème est de modéliser l'évolution de la cotation d'une action en bourse.

*On ne fera qu'un seul dessin qui sera complété tout au long des différentes questions.
Les parties sont indépendantes.*

Partie A – Étude statistique

La société « T-ES » est entrée en bourse en 1995. Le tableau suivant donne la valeur d'une action en euros le 1^{er} janvier de chaque année.

Année	1995	1996	1997	1998	1999
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4
Valeur de l'action en euros y_i	32	57	78	90	110

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$, le plan étant rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 10 euros sur l'axe des ordonnées).

2. Le graphique permet d'envisager un ajustement affine.

a. Calculer les coordonnées du point moyen G. Placer ce point sur le graphique précédent.

b. Déterminer une équation de la droite des moindres carrés de y en x (les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés).

c. En supposant que ce modèle reste valable jusqu'en 2003, quelle serait la valeur en euros, d'une action de cette société en 2003 ?

3. En fait, suite à un retournement de tendance, la valeur de l'action a commencé à baisser à partir de 1999 comme le montre le tableau suivant (valeur au 1^{er} janvier) :

Année	1999	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année x_i	4	5	6	7	8
Valeur de l'action en euros y_i	110	50	23	15	11

a. Compléter le nuage de points à l'aide de ces nouvelles valeurs.

b. Expliquer pourquoi l'ajustement précédent ne semble pas pertinent pour ces nouvelles données.

Partie B – Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 18,9x + 35,6 & \text{si } x \in [0; 4] \\ f(x) = e^{-0,58x + 6,85} & \text{si } x \in]4; +\infty[\end{cases}$$

On suppose que f modélise l'évolution du cours de l'action à partir de l'année 0.

1. a. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; 4]$.

b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Étudier les variations de f sur $]4; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation sur cet intervalle.

2. Tracer la courbe Γ représentative de la fonction f sur le graphique précédent. f est-elle continue sur $[0; +\infty[$?

3. Calculer, arrondie au centième, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[5 ; 10]$ (on rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur l'intervalle $[a ; b]$ est égale à $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$). Interpréter ce résultat.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 1,5$. À partir de quelle année la valeur de l'action sera-t-elle inférieure à 1,5 euros ?

(spécialité)

118 D'après sujet de bac

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$ et on appelle $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité 2 cm.

- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Montrer que la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$. Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}_1$.
- Montrer que pour tout réel x , $f(x) + f(-x) = 0$. En déduire que la fonction f est impaire et donner un élément de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$.
- Déduire de ce qui précède que la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $-\infty$. Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}_2$.
- a. Montrer que pour tout x , $f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$.

En déduire le sens de variation de f .

- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
- Tracer dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ les droites T , $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et la courbe $\mathcal{C}$.

Partie B

- a. Démontrer que pour tout réel x , $f(x) = x + 1 - 2 \frac{e^x}{e^x + 1}$.
- En déduire l'expression de la primitive F de f , définie sur $\mathbb{R}$, telle que $F(0) = -2 \ln 2$.

Pour tout entier naturel n , on appelle u_n l'aire exprimée en cm^2 du domaine γ_n délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite $\mathcal{D}_1$ et les droites Δ_n et Δ_{n+1} d'équations respectives $x = n$ et $x = n + 1$.

2. a. Démontrer que pour tout n , $u_n = 8 \int_n^{n+1} \left[1 - \frac{e^x}{e^x + 1} \right] dx$.
- b. Calculer u_n et montrer que pour tout n , $u_n = 8 \left[1 - \ln \left(\frac{e^{n+1} + 1}{e^n + 1} \right) \right]$.
- c. Représenter sur le graphique les domaines γ_0 , γ_1 , γ_2 ; donner une valeur approchée de u_0 à 10^{-2} près.
3. Démontrer que pour tout n , $u_n = 8 \left[1 - \ln \left(\frac{e + e^{-n}}{1 + e^{-n}} \right) \right]$ et en déduire la limite de (u_n) .

119 D'après sujet de bac

Nota : les parties B et C sont indépendantes.

Une étude statistique s'intéresse au prix d'un certain objet.

$f(x) = 4 \ln \left(\frac{6}{x} \right)$ et $g(x) = 4 \ln (x - 1)$ représentent respectivement les quantités demandées et offertes, c'est-à-dire :

- pour $f(x)$ les quantités d'objets, exprimées en milliers, que les consommateurs sont prêts à acheter en fonction du prix unitaire x de l'objet exprimé en euros ;
- pour $g(x)$ les quantités d'objets, exprimées en milliers, que les producteurs sont prêts à vendre en fonction du prix unitaire x de l'objet exprimé en euros.

Partie A

1. Résoudre le système $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$.

L'intervalle I solution du système est l'intervalle d'étude du modèle.

2. Étudier les variations de f et de g sur I. Tracer les représentations graphiques respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de f et de g , dans un plan muni d'un repère orthogonal $(O; i, j)$; on prendra 2 cm pour 1 euro en abscisse et 2 cm pour 1 000 objets en ordonnée.

- Déterminer les coordonnées $(x_0 ; y_0)$ du point A intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. La valeur de x_0 est appelée prix d'équilibre.
- Quel est le revenu total des producteurs pour le prix d'équilibre ?

Partie B

- Montrer que la fonction F définie par :

$$F(x) = 4 \left[x \ln \left(\frac{6}{x} \right) + x \right] \text{ est une primitive de } f \text{ sur }]0 ; +\infty[.$$

- Les consommateurs se procurent les quantités offertes à un prix supérieur à celui d'équilibre. La somme totale alors perçue en plus par les producteurs est représentée par l'aire de la partie du plan située entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = x_0$ et la droite d'équation $x = 6$, où x_0 est l'abscisse du point d'équilibre : elle traduit le surplus des consommateurs exprimé en euros. Calculer ce surplus.

Partie C

- Le prix x augmente de 1 %. Calculer, en fonction de x , la variation relative de la demande.
- Donner la valeur de la variation de la demande en pourcentage, arrondie à 0,1 %, pour un prix initial de 5 euros qui augmente de 1 %.

120 D'après sujet de bac

Partie A – Étude de la fonction g

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.

- Déterminer la fonction dérivée de g .
- Résoudre $g'(x) > 0$.
- En déduire le tableau de variation de g (l'étude des limites n'est pas demandée).
- Après avoir calculé $g(0)$, donner le signe de g pour $x \in \mathbb{R}$.

Partie B – Étude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \frac{x+2}{e^x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique : 2 cm.)

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a. On appelle f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$.
b. Dresser le tableau de variation de f .
3. a. Déterminer l'équation de la tangente T_1 à (C) au point d'abscisse 0.
b. On pose $u(x) = f(x) - x$. Calculer numériquement, à 10^{-8} près, $u(5)$, $u(10)$ et $u(20)$. On admettra que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
c. Calculer les coordonnées du point d'intersection de Δ et (C).
d. Montrer qu'il existe un point A et un seul de (C) en lequel la tangente T_2 à (C) est parallèle à Δ . (On précisera les coordonnées de A.)
4. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-2; -1]$ une solution et une seule α .
b. Montrer que $-1,69 \leq \alpha \leq -1,68$. Construire dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les tangentes T_1, T_2 , la droite Δ et la courbe (C).

Partie C – Calcul d'aire

1. a. Soit la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -(x+1)e^{-x}$. Montrer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h , définie par $h(x) = xe^{-x}$.
b. En déduire une primitive de f .
2. a. Calculer, en unités d'aire, en fonction de α , l'aire de la partie du plan comprise entre la droite d'équation $x = \alpha$, la droite d'équation $x = 0$, l'axe des abscisses et la courbe (C).
b. En déduire une valeur approchée, à 10^{-1} près, de l'aire, en cm^2 , de cette partie du plan. (On prendra $-1,69$ comme valeur approchée de α .)

121

ANTILLES-GUYANE, Septembre 2006

Pour cet exercice, il est conseillé aux candidats d'expliquer leurs recherches sur leur copie car toute démarche correcte, y compris avec la calculatrice, sera valorisée même si elle ne permet pas d'aboutir au résultat demandé.

Bruno a occupé un emploi saisonnier du 1^{er} juin 2005 au 30 septembre 2005 en tant que commercial pour une entreprise de produits surgelés. Pour ses besoins professionnels, il a utilisé un téléphone portable et l'opérateur téléphonique lui a proposé la formule suivante :

- au 1^{er} juin, il disposait d'un forfait de 420 minutes de communication ;
- au 1^{er} juillet, il lui restait 300 minutes sur son forfait et l'opérateur lui a offert une durée supplémentaire de communication égale à $t\%$ de la durée restante sur son forfait avec $5 < t < 20$;
- en juillet, il a consommé 120 minutes, et, au 1^{er} août, l'opérateur lui a à nouveau offert une durée supplémentaire de communication égale à $t\%$ de la durée restante sur son forfait ;
- en août, il a consommé 120 minutes, et, au 1^{er} septembre, l'opérateur lui a encore offert une durée supplémentaire de communication égale à $t\%$ de la durée restante sur son forfait ;
- en septembre, il a consommé 120 minutes, et, au 1^{er} octobre il a rendu son téléphone en ayant tout consommé.

Déterminer une approximation à 10^{-2} près de la valeur de t .

122 FRANCE MÉTROPOLITAINE, Juin 2003

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0 ; 50]$ par $g(x) = (x - 15)^2 e^{-\frac{x}{3}}$.

1. On note g' la fonction dérivée de g sur $[0 ; 50]$.

a. Montrer que $g'(x) = \frac{1}{3} (x - 15)(21 - x)e^{-\frac{x}{3}}$.

b. Étudier le signe de g' sur $[0 ; 50]$.

c. Dresser le tableau de variation de g sur $[0 ; 50]$.

2. Soit G la fonction définie pour tout x de $[0 ; 50]$ par :

$$G(x) = 3(-x^2 + 24x - 153)e^{-\frac{x}{3}}.$$

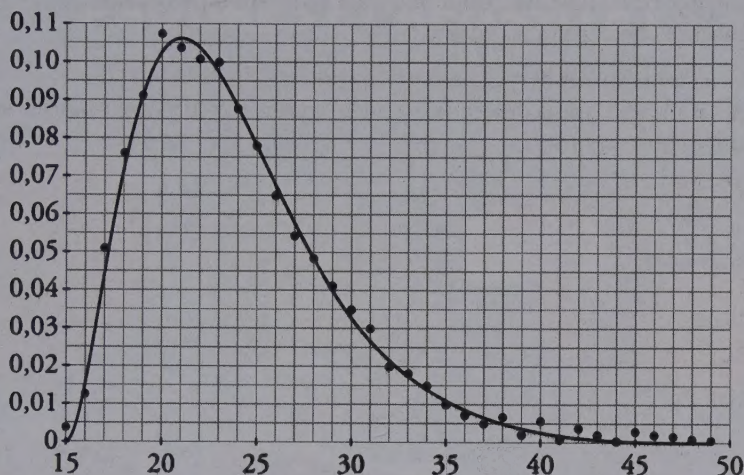
Montrer que G est une primitive de g sur $[0 ; 50]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[15 ; 49]$ par $f(x) = \frac{107e^7}{36\,000} g(x)$.

1. Justifier que f admet les mêmes variations que g sur l'intervalle $[15 ; 49]$.

2. La représentation graphique de f dans un repère orthogonal $\mathcal{R}$ est donnée ci-dessous.



Calculer l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine plan délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 15$ et $x = 49$ (on utilisera le résultat de la question A.2.).

On donnera la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis sa valeur arrondie à 10^{-1} .

Partie C

Dans une population et pour une génération donnée, le taux de fécondité $t(k)$ à l'âge k , où k est un entier compris entre 15 et 49, est le rapport entre le nombre de naissances chez les mères d'âge k et le nombre de femmes d'âge k de cette génération.

Le nuage de points représentant le taux de fécondité d'une population pour une génération donnée (l'âge étant représenté en abscisse et le taux de fécondité en ordonnée) est représenté dans le repère $\mathcal{R}$.

On appelle descendance finale la somme des taux de fécondité par âge

$t(k)$; elle est donc égale à $\sum_{k=15}^{49} t(k)$. On suppose qu'elle peut être modélisée par l'aire délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 15$ et $x = 49$.

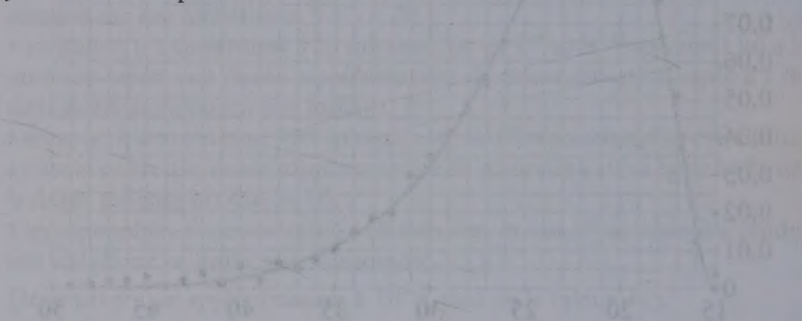
1. Utiliser les résultats de la **partie B** afin d'estimer la descendance finale de cette génération (on donnera un résultat arrondi à 10^{-1}).

2. Une valeur arrondie à 10^{-2} de la somme des taux de fécondité par âge est 1,20.

Comparer ce résultat avec celui obtenu à la question précédente.
Le modèle choisi paraît-il adapté ?

3. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[15 ; 49]$.

Peut-on affirmer que la descendance finale est égale à cette valeur moyenne ?
Justifier votre réponse.



Calculer l'âge x_0 , exprimé en années, d'une femme qui a eu son premier enfant à l'âge x_0 et qui a eu son dernier enfant à l'âge $x_0 + 49$.
On suppose que la fécondité est nulle à l'âge 0 et à l'âge 50.

Partie C

Dans une population, on suppose que la fécondité est nulle à l'âge 0 et à l'âge 50. On suppose que la fécondité est constante à l'âge x_0 et à l'âge $x_0 + 49$.
On suppose que la fécondité est constante à l'âge x_0 et à l'âge $x_0 + 49$.

On suppose que la fécondité est constante à l'âge x_0 et à l'âge $x_0 + 49$.
On suppose que la fécondité est constante à l'âge x_0 et à l'âge $x_0 + 49$.

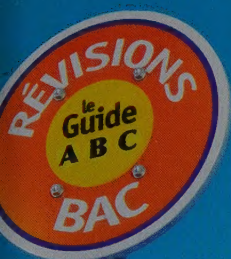
On suppose que la fécondité est constante à l'âge x_0 et à l'âge $x_0 + 49$.
On suppose que la fécondité est constante à l'âge x_0 et à l'âge $x_0 + 49$.

On suppose que la fécondité est constante à l'âge x_0 et à l'âge $x_0 + 49$.
On suppose que la fécondité est constante à l'âge x_0 et à l'âge $x_0 + 49$.

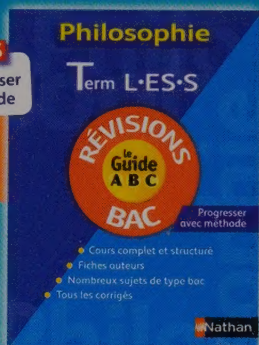
Dépôt légal août 2008 – N° projet 10147373
Imprimé en France par Maury-Eurolivres
45330 MALESHERBES

DU BREVET AU BAC UN SEUL CODE DE CONDUITE : PROGRÈS ET RÉUSSITE !

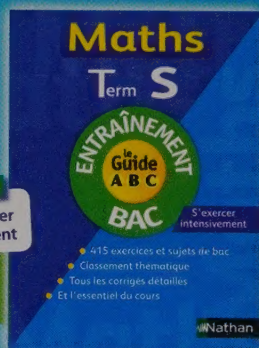
Nathan



LES GUIDES
Pour progresser
avec méthode



LES GUIDES
Pour s'exercer
intensivement



PRÉPAREZ-VOUS À RÉUSSIR !

www.abcbac.com

Mathématiques ES

Obligatoire et Spécialité

Des sujets pour préparer le bac

- Tous les sujets de **juin 2008** et **septembre 2007**.
- 185 exercices couvrant **tout le programme**.
- Un **barème** détaillé et une **estimation du temps imparti** pour chaque exercice.
- Un **dossier** pour tout savoir sur **l'épreuve**.

Annales 2009

Sujets

1. Mathématiques ES (obl. et spé.)
2. Mathématiques S (obl. et spé.)
3. Physique-Chimie S (obl. et spé.)
8. Ens. scientifique 1^{re} ES
9. Physique S (obl. et spé.)
10. Chimie S (obl. et spé.)
11. Sciences de la Vie et de la Terre S (obl. et spé.)
12. Histoire-Géographie L, ES, S
13. Histoire-Géographie STG
14. Sciences éco. et sociales ES (obl. et spé.)
15. Éco-Droit/Management des organisations STG
16. Philosophie L, ES, S
17. Philosophie STG, STI, STL, SMS
18. Français 1^{re} L, ES, S
19. Français 1^{re} STG, STI, STL, ST2S
20. Littérature L
21. Anglais LV1 et LV2 (toutes séries)
22. Allemand LV1 et LV2 (séries générales)
23. Espagnol LV1 et LV2 (toutes séries)

Sujets corrigés

4. Mathématiques ES (obl. et spé.)
5. Mathématiques S (obl. et spé.)
6. Mathématiques STG
7. Maths-Informatique Ens. scientifique 1^{re} L
28. Terminale S
29. Terminale STG

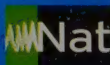
Maxi Annales

Les matières principales de chaque série en un seul volume

ISBN : 978 2 09 187521 7 **4,95 €**



www.abcbac.com

 Nat

KI-457-027

