

Annales Bac 2020

Sujets
2018 et 2019
inclus

SUJETS et CORRIGÉS

Maths

Obligatoire + Spécialité

Term **ES/L**

COURS
+ MÉTHODES

60
SUJETS-EXERCICES

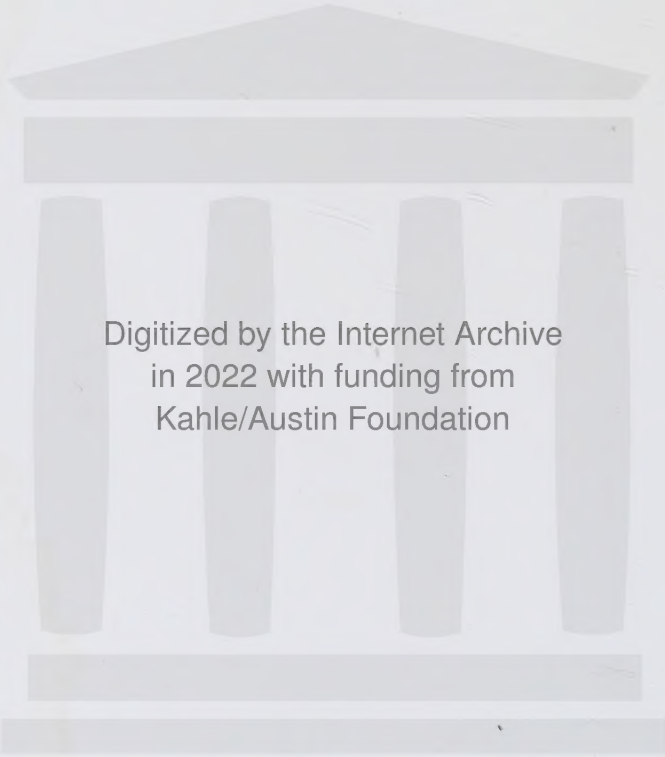
CORRIGÉS
+ CONSEILS

GRATUIT!

➔ 10 TUTOS VIDÉO
➔ DES ANNALES CORRIGÉES EN PLUS

🖱 hachette-education.com

hachette
ÉDUCATION



Digitized by the Internet Archive
in 2022 with funding from
Kahle/Austin Foundation

Annales Bac 2020

Sujets
2018 et 2019
inclus

SUJETS et CORRIGÉS

Maths

Obligatoire + Spécialité

T^{erm} ES/L

Jean-Pierre Haure

Professeur agrégé de Mathématiques

François Lavandier

Professeur certifié de Mathématiques

hachette
ÉDUCATION

Conception graphique de la couverture : Mélissa Chalot

Ligne graphique de l'intérieur

Jehanne-Marie Husson

Réalisation de la couverture : Audrey Izern

Réalisation de l'intérieur :

Schémas : Grafatom

Mise en pages : Grafatom – Facompo

www.hachette-education.com

ISBN : 978-2-01-708262-0

© Hachette-Livre 2019, 58, rue Jean Bleuzen, CS 70007, 92178 Vanves Cedex.

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Achevé d'imprimer en République tchèque par Finidr

Dépôt légal : Août 2019 - Édition 01

50/9016/8

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage a été conçu pour vous aider à **vous entraîner tout au long de l'année** de Terminale ES ou de Terminale L. Grâce à lui, vous vous préparerez aux contrôles et aux bacs blancs et vous réviserez efficacement en fin d'année, en vue de **l'épreuve de mathématiques du baccalauréat**. L'organisation de **l'épreuve écrite et orale** est présentée en pages 12 à 14. Ce livre s'adresse aux élèves de Terminale ES, obligatoire et spécialité, ou de Terminale L, spécialité.

■ L'organisation des sujets

Cet ouvrage comporte treize sujets complets de l'épreuve écrite du baccalauréat que nous avons sélectionnés pour leur intérêt et leurs différents niveaux de difficulté.

Ils sont tous récents ; certains exercices ont été adaptés des sessions antérieures pour permettre de couvrir l'ensemble du programme des enseignements obligatoire et de spécialité de Terminale ES. Pour un aspect pratique, le tableau des pages 10 et 11 présente les exercices corrigés dans chaque sujet en fonction des thèmes du programme.

À chaque thème est associée une couleur que vous retrouverez tout au long de l'ouvrage.

Ces indications vous permettront d'organiser votre travail au fur et à mesure de l'avancée des notions abordées en Terminale.

Il est conseillé, en fin d'année, de s'entraîner à faire des sujets entiers pour apprendre à maîtriser le temps imparti pendant l'épreuve.

Dans certains exercices, nous vous proposons également un rappel sur l'utilisation des calculatrices TI-82.fr et Casio GRAPH 35+, et quand cela a été nécessaire, les algorithmes ont été testés avec le logiciel Algobox. Vous approprier ce logiciel, très facile d'utilisation et libre (www.xmlmath.net/algobox), peut être intéressant en cours d'année pour bien comprendre les mécanismes des algorithmes.

■ L'organisation des corrigés

La durée indicative, donnée en début de sujet, vous conseille sur le temps que vous pouvez raisonnablement consacrer à chaque exercice. Elle laisse 10 minutes sur la durée totale, qui vous permettront de relire votre copie.

Les treize sujets font tous l'objet de corrections détaillées, mettant en évidence les méthodes les plus accessibles. Lorsque cela a été possible, nous vous avons proposé plusieurs méthodes, à la fois pour une meilleure maîtrise des thèmes proposés et pour que vous puissiez utiliser celle qui vous convient le mieux.

La rédaction des corrigés proposée est celle que l'on peut attendre sur la copie d'un élève de Terminale ; elle est complétée par des parties sur fond couleur qui peuvent être des commentaires permettant de mieux comprendre le sujet ou sa correction, des **rappels de cours**, d'autres méthodes, voire des astuces pour les QCM.

■ L'organisation des sujets d'oral

Huit sujets vous sont proposés pour vous entraîner à l'épreuve orale de rattrapage. Ils sont composés de deux exercices résolus, certains pouvant être partagés en deux pour respecter le temps imparti.

■ À ne pas oublier

– La **rédaction des réponses est importante** car elle doit mettre en évidence votre raisonnement et montrer que vous comprenez ce que vous cherchez. **Ne vous contentez pas d'une succession de calculs** mais essayez de percevoir l'utilité des questions précédentes dans la résolution d'un problème. Pensez aussi que la réponse que vous cherchez peut également se trouver dans une des questions suivantes.

– Enfin, gardez à l'esprit que **rien n'est insurmontable** ; vos premières difficultés seront vite balayées avec un peu d'entraînement. Dans un second temps, réussir à résoudre un exercice sans s'aider du corrigé vous apportera une aisance nouvelle face aux difficultés et vous procurera une fierté bien légitime.

Nous vous souhaitons une bonne année de Terminale, et qu'elle ne soit qu'une étape dans votre réussite future. N'hésitez pas à nous faire part de vos remarques et des éventuelles coquilles qui peuvent nous avoir échappées. Bon courage !

Les auteurs

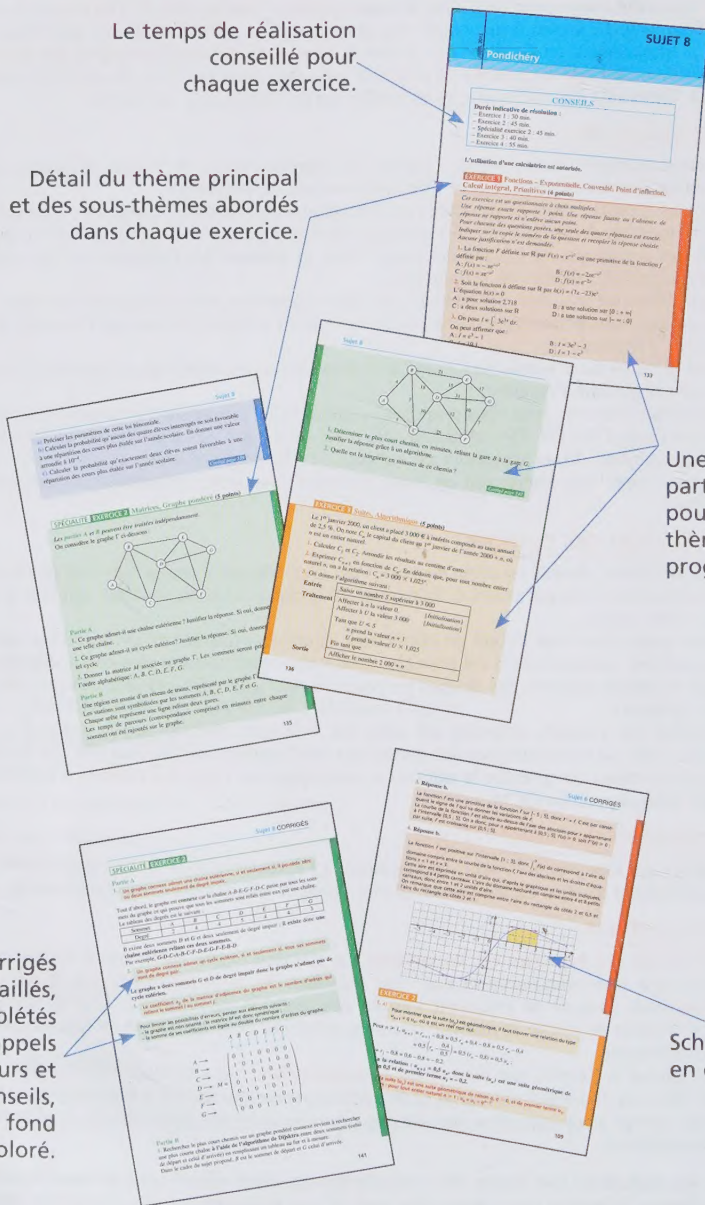
MODE D'EMPLOI

Le temps de réalisation
conseillé pour
chaque exercice.

Détail du thème principal
et des sous-thèmes abordés
dans chaque exercice.

Une couleur
particulière
pour chaque
thème du
programme.

Schémas
en couleurs.



SOMMAIRE

Avant-propos	3
Mode d'emploi	4

Se préparer à l'épreuve du Bac

Tableau des sujets	10
Descriptif de l'épreuve de mathématiques au baccalauréat	12

S'entraîner sur les sujets d'écrit

Le sujet de 2019 est présenté et corrigé en page 212.

SUJET 1 France métropolitaine – Juin 2016	15
EXERCICE 1 : Fonctions – Exponentielle, Convexité, Point d'inflexion, Lecture graphique, Loi uniforme, Intervalle de confiance ..	15
EXERCICE 2 : Suites – Algorithmique	16
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 : Graphe probabiliste – Suites	17
EXERCICE 3 : Probabilités – Loi normale	18
EXERCICE 4 : Fonctions – Logarithme népérien, Calcul intégral, Primitives, Lecture graphique	19
Corrigés	21

SUJET 2 France Métropolitaine – Juin 2018	33
EXERCICE 1 : Probabilités – Loi normale, Intervalle de fluctuation	33
EXERCICE 2 : Probabilités – Probabilités conditionnelles, Calcul intégral	34
EXERCICE 3 : Suites – Algorithmique	35
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 3 : Matrices, Graphe pondéré	37
EXERCICE 4 : Fonctions – Exponentielle, Convexité, Calcul intégral, Primitives	39
Corrigés	41

SUJET 3	Pondichéry – Mai 2018	55
EXERCICE 1 :	Fonctions – Logarithme népérien, Point d'inflexion, Lecture graphique	55
EXERCICE 2 :	Probabilités – Probabilités conditionnelles, Loi normale	57
EXERCICE 3 :	Suites – Algorithmique	58
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 3 :	Résolution de système, Graphe pondéré, Graphe probabiliste	59
EXERCICE 4 :	Fonctions – Exponentielle	61
Corrigés		63
SUJET 4	Pondichéry – Avril 2015	77
EXERCICE 1 :	Probabilités – Probabilités conditionnelles, Loi normale, Intervalle de fluctuation	77
EXERCICE 2 :	Suites – Algorithmique	78
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 :	Graphe probabiliste	79
EXERCICE 3 :	Fonctions – Exponentielle, Convexité, Point d'inflexion, Lecture graphique	80
EXERCICE 4 :	Fonctions – Logarithme népérien, Lecture graphique, Application à l'économie	81
Corrigés		83
SUJET 5	Pondichéry – Avril 2013	97
EXERCICE 1 :	Fonctions – Exponentielle, Convexité, Point d'inflexion, Calcul intégral, Primitives	97
EXERCICE 2 :	Probabilités – Probabilités conditionnelles, Loi binomiale	98
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 :	Matrices – Graphe pondéré	99
EXERCICE 3 :	Suites, Algorithmique	100
EXERCICE 4 :	Fonctions – Exponentielle, Calcul intégral, Primitives, Application à l'économie	101
Corrigés		102
SUJET 6	Liban – Mai 2013	111
EXERCICE 1 :	Logarithme népérien, Convexité, Point d'inflexion, Calcul intégral, Primitives, Loi normale, Intervalle de confiance	111
EXERCICE 2 :	Suites, Algorithmique	112
EXERCICE 3 :	Fonctions – Exponentielle, Application à l'économie	113

EXERCICE 4 : Probabilités – Probabilités conditionnelles, Loi de probabilité, Espérance	114
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 4 : Matrices – Graphe pondéré	115
Corrigés	117
SUJET 7 Amérique du Nord – Mai 2013	126
EXERCICE 1 : Fonctions – Exponentielle, Logarithme népérien	126
EXERCICE 2 : Probabilités – Loi normale, Intervalle de fluctuation	127
EXERCICE 3 : Suites, Algorithmique	128
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 3 : Graphe probabiliste, Suites	129
EXERCICE 4 : Fonctions – Exponentielle, Calcul intégral, Primitives, Lecture graphique	130
Corrigés	131
SUJET 8 Polynésie Française – Juin 2013	140
EXERCICE 1 : Fonctions – Exponentielle, Convexité, Point d’inflexion, Calcul intégral, Primitives	140
EXERCICE 2 : Probabilités – Probabilités conditionnelles, Loi de probabilité, Espérance	141
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 : Matrices, Résolution de système, Graphe probabiliste	142
EXERCICE 3 : Suites, Algorithmique, Pourcentages	143
EXERCICE 4 : Probabilités – Loi normale, Intervalle de confiance	144
Corrigés	147
SUJET 9 Pondichéry – Avril 2014	155
EXERCICE 1 : Fonctions – Exponentielle, Convexité, Point d’inflexion, Calcul intégral, primitives, Lecture graphique	155
EXERCICE 2 : Suites – Algorithmique	156
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 : Résolution de système, Graphe probabiliste, Suites, Algorithmique	158
EXERCICE 3 : Probabilités – Probabilités conditionnelles, Loi normale, Intervalle de fluctuation	160
EXERCICE 4 : Fonctions – Logarithme népérien, Calcul intégral, Primitives, Lecture graphique	161
Corrigés	163

SUJET 10	France métropolitaine – Juin 2014.....	175
EXERCICE 1 :	Fonctions – Logarithme népérien, Calcul intégral, Primitives, Probabilités conditionnelles	175
EXERCICE 2 :	Suites – Algorithmique	176
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 :	Suites, Algorithmique, Graphe probabiliste	177
EXERCICE 3 :	Probabilités – Loi uniforme, Loi normale, Intervalle de confiance	179
EXERCICE 4 :	Fonctions – Exponentielle, Convexité, Point d'uniflexion, Lecture graphique	180
Corrigés		182
SUJET 11	France métropolitaine – Juin 2017.....	195
EXERCICE 1 :	Probabilités – Loi uniforme, Loi normale, Loi binomiale, Espérance, Intervalle de fluctuation	195
EXERCICE 2 :	Suites – Algorithmique	196
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 :	Suites – Graphe pondéré, Graphe probabiliste ...	197
EXERCICE 3 :	Fonctions – Fonction exponentielle, Convexité, Aire	199
EXERCICE 4 :	Statistiques – Intervalle de fluctuation, Logarithme, Pourcentages	200
Corrigés		202
SUJET 12	France métropolitaine – Juin 2019.....	212
EXERCICE 1 :	Probabilités – Logarithme – Convexité	212
EXERCICE 2 :	Suites, Algorithmique	213
SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 :	Graphe probabiliste, Algorithmique, Suites	214
EXERCICE 3 :	Probabilités – Loi binomiale, Loi normale, Intervalle de confiance	215
EXERCICE 4 :	Fonctions – Exponentielle, Convexité, Calculs intégrales – primitives, Lecture graphique, Application à l'économie	217
Corrigés		219

S'entraîner sur les sujets d'oral

ORAL	Sujet 1	233
	EXERCICE 1 : Fonctions – Exponentielle	233
	EXERCICE 2 : Probabilités – Probabilités conditionnelles	233
ORAL	Sujet 2	235
	EXERCICE 1 : Fonctions – Calcul intégral, Primitives, Lecture graphique	235
	EXERCICE 2 : Suites.....	235
ORAL	Sujet 3	237
	EXERCICE 1 : Fonctions – Exponentielle, Logarithme népérien	237
	EXERCICE 2 : Probabilités – Loi normale	237
ORAL	Sujet 4	238
	EXERCICE 1 : Fonctions – Logarithme népérien, Lecture graphique ...	238
	SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 : Matrices, Polynôme, Convexité, Point d'inflexion	238
ORAL	Sujet 5	241
	EXERCICE 1 : Fonctions – Exponentielle	241
	EXERCICE 2 : Statistiques – Intervalle de fluctuation	242
ORAL	Sujet 6	244
	SPÉCIALITÉ – EXERCICE 1 : Graphe probabiliste	244
	EXERCICE 2 : Statistiques – Intervalle de fluctuation	245
ORAL	Sujet 7	249
	EXERCICE 1 : Statistiques – Intervalle de confiance	249
	SPÉCIALITÉ – EXERCICE 2 : Matrices – Graphe pondéré	249
ORAL	Sujet 8	254
	EXERCICE 1 : Fonctions – Calcul intégral, Primitives, Lecture graphique	254
	EXERCICE 2 : Probabilités – Loi binomiale, Loi uniforme, Loi normale	255

TABLEAU DES SUJETS PAR THÈMES DU PROGRAMME

Les nombres dans les carrés bleus correspondent aux numéros de sujets, ceux à la couleur aux numéros d'exercices.

THEMES ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE	SUJETS											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
FONCTIONS												
Exponentielle	E1	E4	E4	E3	E1-E4	E3	E1-E4	E1	E1	E4	E3	E4
Logarithme népérien	E4		E1	E4		E1	E1		E4	E1		E1
Fonction rationnelle - Polynôme		E2										
Convexité - Point d'inflexion	E1	E4	E1	E3	E1	E1		E1	E1	E4	E3	E4+E1
Calcul intégral - Primitives	E4	E2-E4	E1-E4		E1-E4	E1	E4	E1	E1-E4	E1	E3	E4
Lecture graphique	E1-E4	E4	E1	E3-E4			E4		E1-E4	E4		E4
Application à l'économie				E4	E4	E3						E4
SUITES							E3-E4	E1	E2-E3	E2-	E2-	E2-
TABLEUR												
ALGORITHMIQUE					E3	E2	E3	E3	E2-Spé	E2-Spé	E2	E2-E2Spé

THÈMES ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE											
PROBABILITÉS											
SUIJETS											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilités conditionnelles	E2	E2	E2	E2	E4		E2	E3	E1		E1
Loi binomiale				E2						E1	E3
Loi de probabilité					E4		E2			E4	
Espérance					E4		E2			E1	
Loi uniforme	E1								E3	E1	E1
Loi normale	E3	E1	E2	E4	E1	E2	F4	E3	E3	E1	E3
STATISTIQUES											
Intervalle de fluctuation		E1		E1		E2		E3		E1-E4	
Intervalle de confiance	E1		E2		E1		E4		E3		E3
Pourcentages							E3			E4	

THÈMES ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ											
SUIJETS											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Matrices		E3Spé		E4Spé	E4Spé		E2Spé				
Résolution de système			E3Spé				E2Spé	E2Spé			
Graphe pondéré		E3Spé	F3Spé		F4Spé	E4Spé				E2Spé	
Graphe probabiliste	E2Spé		E3Spé	E2Spé		E3Spé	E2Spé	E2Spé	E2Spé	E2Spé	E2Spé

DESCRIPTIF DE L'ÉPREUVE

L'épreuve (B.O. spécial n° 7 du 6 octobre 2011) est destinée à évaluer la façon dont les candidats ont atteint les grands objectifs de formation mathématique visés par le programme commun aux séries ES et L :

- acquérir des connaissances et les organiser ;
- mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
- mener des raisonnements ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer à l'écrit.

Épreuve écrite

■ Coefficient :

• Série ES :

– **5** ;

– 7 pour les candidats ayant choisi cette discipline comme enseignement de spécialité.

• Série L : **4**.

■ **Durée : 3 h.**

■ **Structure de l'épreuve**

Le sujet comporte **trois ou quatre exercices indépendants** les uns des autres, notés chacun sur 3 à 10 points et pouvant comporter plusieurs questions.

Ils abordent une grande variété de domaines du programme de mathématiques commun aux séries ES et L.

Pour la série ES, le sujet proposé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité diffère de celui proposé aux candidats ne l'ayant pas suivi par l'un de ces exercices, noté sur 5 points. Cet exercice peut porter sur la totalité du programme (enseignement obligatoire et de spécialité). Le sujet porte clairement la mention « obligatoire » ou « spécialité ».

■ **Contenus du sujet**

L'épreuve sera conçue de telle sorte que chaque élève, qu'il ait suivi régulièrement l'enseignement de spécialité de mathématiques ou non, ait **largement le temps d'aborder l'ensemble des questions** posées et puisse en tirer un bénéfice appréciable au niveau de l'évaluation de l'épreuve.

Le sujet abordera une grande partie des connaissances envisagées dans le programme. L'application directe de résultats ou de méthodes, l'étude d'une situation conduisant à choisir un modèle simple, à présenter ou exploiter des données ou une information, la formulation d'un raisonnement sont des trames possibles.

Les notions rencontrées en classe de première mais non approfondies en terminale doivent être connues et mobilisables mais ne peuvent constituer un ressort essentiel du sujet.

Certains exercices peuvent faire **référence à d'autres disciplines de la série** considérée, mais les connaissances spécifiques requises doivent être fournies dans l'énoncé. La forme des questions ne sera pas source de difficultés supplémentaires. Si des questionnaires à choix multiple (QCM) sont proposés, les modalités de notation seront précisées.

D'autre part, même si les capacités attendues dans le domaine de l'algorithmique doivent rester modestes, elles feront probablement l'objet d'un questionnement au baccalauréat. Dans cette optique, nous avons choisi, dans certains sujets, de proposer au moins un exercice nécessitant l'écriture ou la compréhension d'un algorithme. Pour se familiariser avec cette partie du programme, nous avons utilisé le logiciel gratuit ALGOBOX, très simple d'utilisation, que nous vous conseillons de télécharger (www.xmlmath.net/algobox) et de vous approprier.

■ Calculatrices et formulaires

La maîtrise de l'usage des calculatrices est un objectif important pour la formation des élèves. L'emploi de ce matériel est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur. **L'autorisation ou non d'utiliser une calculatrice lors de l'épreuve sera précisée en tête des sujets.**

Dans certains exercices, nous proposons un rappel sur l'utilisation des calculatrices TI-82.fr et Casio GRAPH 35+, en mettant en évidence les fonctionnalités essentielles. Les programmes, depuis la classe de seconde, accordent une part importante à l'utilisation des calculatrices et des logiciels ; leur connaissance et leur maîtrise deviennent indispensables.

Il n'y a pas de formulaire de mathématiques pour cette épreuve. En revanche, les concepteurs de sujets pourront inclure certaines formules dans le corps du sujet ou en annexe, en fonction de la nature des questions.

■ Notation

Les correcteurs ne manifesteront **pas d'exigences de formulation démesurées** et prêteront une attention particulière aux démarches engagées, aux tentatives pertinentes, aux résultats partiels.

Les concepteurs de sujets veilleront, dans l'attendu des questions et les propositions de barème, à permettre aux correcteurs de prendre réellement et largement en compte **la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, la cohérence globale des réponses** dans l'appréciation des copies. Les copies satisfaisantes de ce point de vue devront être valorisées.

Épreuve orale de contrôle

■ **Durée : 20 minutes.**

■ **Temps de préparation : 20 minutes.**

■ L'épreuve consiste en une interrogation du candidat visant à apprécier sa maîtrise des connaissances de base. Pour préparer l'entretien, **l'examineur propose au moins deux questions** au candidat, portant sur des parties différentes du programme.

■ **Pour la série ES :**

– Les candidats qui n'ont pas choisi les mathématiques comme enseignement de spécialité devront répondre à des questions portant exclusivement sur le programme de l'enseignement obligatoire.

– Les candidats ayant choisi les mathématiques comme enseignement de spécialité devront répondre à une question portant sur le programme de spécialité ; les autres questions aborderont exclusivement le programme de l'enseignement obligatoire.

■ Le candidat peut, au cours de l'entretien, **s'appuyer sur les notes prises pendant sa préparation**. L'examineur permet au candidat de mettre en évidence ses connaissances en lui posant des questions adaptées aux modalités de cette épreuve. L'épreuve se déroule au tableau.

■ **L'usage des calculatrices électroniques est autorisé** dans le cadre de la réglementation en vigueur et l'aptitude à mobiliser l'outil informatique peut également être évaluée. Certaines formules jugées nécessaires peuvent être fournies avec les questions.

France métropolitaine

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 20 min.
- Exercice 2 : 50 min.
- Spécialité exercice 2 : 50 min.
- Exercice 3 : 50 min.
- Exercice 4 : 50 min.

EXERCICE 1 Fonctions – Exponentielle, Convexité, Point d'inflexion, Lecture graphique, Loi uniforme, Intervalle de confiance (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des quatre questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie sans justifier le choix effectué.

Une bonne réponse rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Un organisme de formation désire estimer la proportion de stagiaires satisfaits de la formation reçue au cours de l'année 2013. Pour cela, il interroge un échantillon représentatif de 300 stagiaires. On constate que 225 sont satisfaits. Alors, un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion de stagiaires satisfaits de la formation reçue au cours de l'année 2013 est :

- a) $[0,713 ; 0,771]$. b) $[0,692 ; 0,808]$.
c) $[0,754 ; 0,813]$. d) $[0,701 ; 0,799]$.

2. En suivant la loi uniforme, on choisit un nombre au hasard dans l'intervalle $[4 ; 11]$. La probabilité que ce nombre soit inférieur à 10 est :

- a) $\frac{6}{11}$. b) $\frac{10}{7}$. c) $\frac{10}{11}$. d) $\frac{6}{7}$.

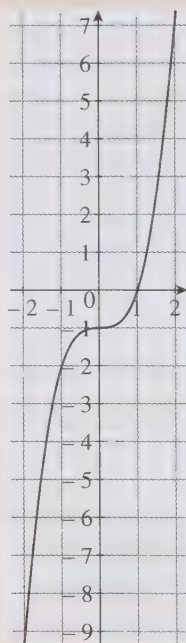
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-2x+3}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' est donnée par :

- a) $f'(x) = -2e^{-2x+3}$. b) $f'(x) = e^{-2x+3}$.
c) $f'(x) = (-2x+3)e^{-2x+3}$. d) $f'(x) = (-2x-1)e^{-2x+3}$.

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que sa fonction dérivée f' soit aussi dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe ci-contre représente la fonction f'' .

On peut alors affirmer que :

- a) f est convexe sur $[-2; 2]$.
b) f est concave sur $[-2; 2]$.
c) la courbe représentative de f sur $[-2; 2]$ admet un point d'inflexion.
d) f' est croissante sur $[-2; 2]$.



Corrigé page 21

EXERCICE 2 Suites – Algorithmique (5 points)

Un loueur de voitures dispose au 1^{er} mars 2015 d'un total de 10 000 voitures pour l'Europe.

Afin d'entretenir son parc automobile, il décide de revendre, au 1^{er} mars de chaque année, 25 % de son parc et d'acheter 3 000 voitures neuves.

On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite :

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1^{er} mars de l'année 2015 + n .

On a donc $u_0 = 10\,000$.

1. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 3\,000$.
2. Pour tout entier naturel n , on considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 12\,000$.
3. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,75$. Préciser le premier terme.
4. Exprimer v_n en fonction de n . Déterminer la limite de la suite (v_n) .
5. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_n = 12\,000 - 2\,000 \times 0,75^n$.
6. En vous appuyant sur les réponses données aux deux questions précédentes, que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout d'un grand nombre d'années ?
7. On admet dans cette question que la suite (u_n) est croissante.
On aimerait déterminer l'année à partir de laquelle le parc automobile comptera au moins 11 950 voitures.
8. Recopier l'algorithme suivant et compléter les pointillés afin qu'il permette de répondre au problème posé.

Initialisation	U prend la valeur 10 000 N prend la valeur 0
Traitement	Tant que ... N prend la valeur U prend la valeur Fin Tant que
Sortie	Afficher ...

- a) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année recherchée.
- b) Retrouver ce résultat en résolvant l'inéquation :
 $12\,000 - 2\,000 \times 0,75^n \geq 11\,950$.

SPECIALITÉ EXERCICE 2 Graphe probabiliste – Suites (5 points)

Afin de se préparer à courir des marathons, Hugo aimerait effectuer quotidiennement un footing à compter du 1^{er} janvier 2014.

On admet que :

- Si Hugo court un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de $0,2$;
- s'il ne court pas un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le lendemain est de $0,4$.

On note C l'état « Hugo court » et R l'état « Hugo ne court pas ».

Pour tout entier naturel n , on note :

- c_n la probabilité de l'événement « Hugo court le $(n + 1)$ -ième jour » ;
- r_n la probabilité de l'événement « Hugo ne court pas le $(n + 1)$ -ième jour » ;
- P_n la matrice $(c_n \ r_n)$ correspondant à l'état probabiliste le $(n + 1)$ -ième jour.

Le 1^{er} janvier 2014, motivé, le jeune homme court.

On a donc : $P_0 = (c_0 \ r_0) = (1 \ 0)$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et R.

2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

3. On donne $M^6 = \begin{pmatrix} 0,750 \ 016 & 0,249 \ 984 \\ 0,749 \ 952 & 0,250 \ 048 \end{pmatrix}$.

Quel calcul matriciel permet de déterminer la probabilité c_6 qu'Hugo coure le 7^e jour ? Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de c_6 .

4. a) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n .

b) Montrer que, pour tout entier naturel n , $c_{n+1} = 0,2c_n + 0,6$.

5. Pour tout entier naturel n , on considère la suite (v_n) définie par $v_n = c_n - 0,75$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,2. Préciser le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n . Déterminer la limite de la suite (v_n) .

c) Justifier que, pour tout entier naturel n , $c_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$.

d) Que peut-on conjecturer concernant la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre 2014 ?

e) Conjecturer alors l'état stable de ce graphe. Comment valider votre conjecture ?

Corrigé page 24

EXERCICE 3 Probabilités – Loi normale (5 points)

Un téléphone portable contient en mémoire 3 200 chansons archivées par catégories : rock, techno, rap, reggae... dont certaines sont interprétées en français. Parmi toutes les chansons enregistrées, 960 sont classées dans la catégorie rock. Une des fonctionnalités du téléphone permet d'écouter de la musique en mode « lecture aléatoire » : les chansons écoutées sont choisies au hasard et de façon équiprobable parmi l'ensemble du répertoire.

Au cours de son footing hebdomadaire, le propriétaire du téléphone écoute une chanson grâce à ce mode de lecture.

On note :

- R l'événement : « la chanson écoutée est une chanson de la catégorie rock » ;
- F l'événement : « la chanson écoutée est interprétée en français ».

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Calculer $P(R)$, la probabilité de l'événement R .
2. 35 % des chansons de la catégorie rock sont interprétées en français ; traduire cette donnée en utilisant les événements R et F .
3. Calculer la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock et qu'elle soit interprétée en français.
4. Parmi toutes les chansons enregistrées, 38,5 % sont interprétées en français. Montrer que $P(F \cap \bar{R}) = 0,28$.
5. En déduire $P_R(F)$ et exprimer par une phrase ce que signifie ce résultat.

Partie B

Les résultats de cette partie seront arrondis au millième.

Le propriétaire du téléphone écoute régulièrement de la musique à l'aide de son téléphone portable.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque écoute de musique, associe la durée (en minutes) correspondante ; on admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 10$. Le propriétaire écoute de la musique.

1. Quelle est la probabilité que la durée de cette écoute soit comprise entre 15 et 45 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que cette écoute dure plus d'une heure ?

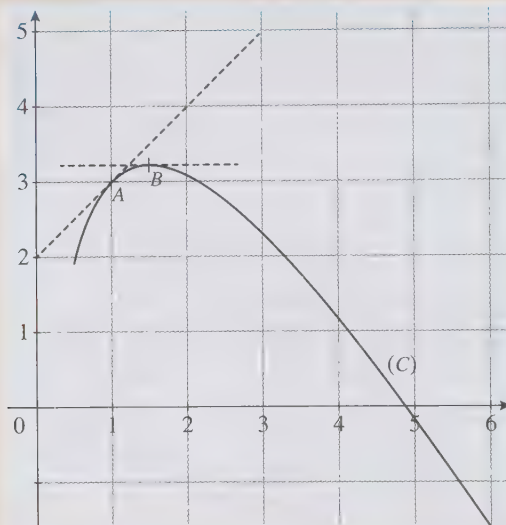
Corrige page 26

EXERCICE 4 Fonctions – Logarithme népérien, Calcul intégral, Primitives, Lecture graphique (6 points)

La courbe (C) ci-après représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0,5 ; 6]$. Les points $A(1 ; 3)$ et B d'abscisse 1,5 sont sur la courbe (C) .

Les tangentes à la courbe (C) aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale.

On note f' la fonction dérivée de f .



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A. Étude graphique

1. Déterminer $f'(1,5)$.
2. La tangente à la courbe (C) au point A passe par le point de coordonnées $(0 ; 2)$. Déterminer une équation de cette tangente.
3. Donner un encadrement de l'aire, en unités d'aire et à l'unité près, du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
4. Déterminer la convexité de la fonction f sur $[0,5 ; 6]$. Argumenter la réponse.

Partie B. Étude analytique

On admet que la fonction f est définie sur $[0,5 ; 6]$ par $f'(x) = -2x + 5 + 3\ln(x)$.

1. Pour tout réel x de $[0,5 ; 6]$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{-2x + 3}{x}$.
2. Étudier le signe de f' sur $[0,5 ; 6]$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0,5 ; 6]$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution α sur $[0,5 ; 6]$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. En déduire le tableau de signes de f sur $[0,5 ; 6]$.

5. On considère la fonction F définie sur $[0,5 ; 6]$ par $F(x) = -x^2 + 2x + 3x \ln(x)$.
- a. Montrer que F est une primitive de f sur $[0,5 ; 6]$.
- b. En déduire l'aire exacte, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. En donner ensuite une valeur arrondie au dixième.

Corrigé page 28

Corrigés

EXERCICE 1

1. Réponse b.

Soit f , la fréquence du caractère étudié, observée dans un échantillon représentatif de la population.

Si n est « assez grand », l'intervalle de confiance au seuil de confiance de 95 % est :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

En pratique, on considère que n est « assez grand » sous les conditions : $n \geq 30$; $nf \geq 5$ et $n(1-f) \geq 5$.

Dans le cas présent, $n = 300$, $f = \frac{225}{300} = 0,75$.

Donc $n \geq 30$, $nf = 225 \geq 5$ et $n(1-f) = 75 \geq 5$.

Les conditions du rappel sont vérifiées ; l'intervalle de confiance au seuil de confiance de 95 % est :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,75 - \frac{1}{\sqrt{300}} ; 0,75 + \frac{1}{\sqrt{300}} \right] \approx [0,692 ; 0,808].$$

2. Réponse d.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur un intervalle $I = [a ; b]$.

Pour tout intervalle $J = [c ; d]$ inclus dans l'intervalle $I = [a ; b]$, la probabilité $P(X \in J)$ est donnée par :

$$P(X \in J) = P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}.$$

Dans le cas présent, on cherche à déterminer $P(X < 10)$ pour une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans l'intervalle $I = [4 ; 11]$.

$$\text{Donc } P(X < 10) = P(4 < X < 10) = \frac{10-4}{11-4} = \frac{6}{7}.$$

3. Réponse d.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x , $g'(x) = a e^{ax+b}$.

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-2x+3}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = x+1 \text{ et } v(x) = e^{-2x+3}.$$

La forme $f = u \times v$ entraîne que $f' = u'v + uv'$, avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -2e^{-2x+3}$ d'après le rappel de cours.

Ainsi, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{-2x+3} + (x+1)(-2e^{-2x+3}) \\ &= e^{-2x+3} + (-2x-2)(e^{-2x+3}). \end{aligned}$$

$$f'(x) = e^{-2x+3}(1-2x-2) = e^{-2x+3}(-2x-1).$$

4. Réponse c.

f est convexe sur l'intervalle I si, et seulement si, $f'' \geq 0$ sur I .

f est concave sur l'intervalle I si, et seulement si, $f'' \leq 0$ sur I .

Sur le graphique de f'' , nous observons que $f'' \leq 0$ sur $[-2; 1]$ et $f'' \geq 0$ sur $[1; 2]$.

On en déduit que f est concave sur $[-2; 1]$ et f est convexe sur $[1; 2]$.

On peut donc éliminer les réponses a) et b).

Une fonction est croissante sur un intervalle si sa dérivée est positive sur cet intervalle.

On en déduit que, pour que f' soit croissante sur $[-2; 2]$, il faut que sa dérivée, à savoir f'' , soit positive sur $[-2; 2]$, ce qui n'est pas le cas.

On peut donc éliminer la réponse d).

On en déduit donc que seule la réponse c) peut convenir, ce que nous allons vérifier.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $I =]a; b[$, f'' sa dérivée seconde. Le point $C(c; f(c))$ est un point d'inflexion pour la courbe C_f si, et seulement si, $f''(x)$ s'annule en $x = c$ en changeant de signe.

Il est clair que, sur le graphique de f'' , nous observons que :

$$f''(1) = 0; f''(x) < 0 \text{ pour } x \in [-2; 1[; f''(x) > 0 \text{ pour } x \in]1; 2].$$

Donc f possède un point d'inflexion d'abscisse $x = 1$. Ceci confirme que la réponse est bien la réponse c).

EXERCICE 2

Diminuer une quantité de $t\%$ revient à multiplier cette quantité par $1 - \frac{t}{100}$.

Chaque année, 25 % du parc automobile est vendu, donc u_n est multiplié par :

$$1 - \frac{25}{100} = 0,75.$$

Pour obtenir le nombre de voitures l'année $n + 1$, il faut donc multiplier u_n par 0,75 puis ajouter 3 000, pour les 3 000 voitures neuves achetées d'une année sur l'autre. On obtient bien la relation :

$$u_{n+1} = 0,75u_n + 3\,000, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

a) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = u_n - 12\,000$.

On veut montrer que la suite (v_n) est géométrique. Pour cela, on exprime v_{n+1} en fonction de v_n .

Si chaque terme de la suite est obtenu en multipliant le terme précédent par un nombre constant, alors la suite est géométrique, de raison le nombre trouvé.

Dans le cas d'une suite arithmético-géométrique, la raison de la suite introduite est toujours le nombre en facteur devant u_n dans la relation de récurrence :

$u_{n+1} = 0,75 u_n - 3\,000$; il faudra donc démontrer que la raison est 0,75.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 12\,000 = 0,75 u_n + 3\,000 - 12\,000$$

$$= 0,75 u_n - 9\,000$$

$$= 0,75 \left(u_n - \frac{9\,000}{0,75} \right) \quad \text{on factorise par 0,75 pour faire apparaître } v_n$$

$$= 0,75 (u_n - 12\,000)$$

$$= 0,75 v_n.$$

Autre méthode de calcul :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 12\,000 = 0,75 u_n + 3\,000 - 12\,000$$

$$= 0,75 u_n - 9\,000$$

on utilise la relation donnée $v_n = u_n - 12\,000$ donc
 $u_n = 12\,000 + v_n$

$$= 0,75 (v_n + 12\,000) - 9\,000$$

$$= 0,75 v_n + 9\,000 - 9\,000 = 0,75 v_n.$$

Pour tout entier naturel n , on a : $v_{n+1} = 0,75 v_n$.

$v_{n+1} = 0,75 v_n$; la suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,75$.

Le premier terme est $v_0 = u_0 - 12\,000$ soit $v_0 = 10\,000 - 12\,000 = -2\,000$.

b)

Pour toute suite géométrique (v_n) , on a, pour tout $n \geq 0$: $v_n = v_0 \times q^n$.

Pour tout entier naturel n : $v_n = -2\,000 \times 0,75^n$.

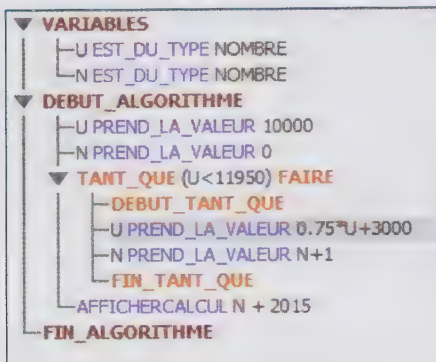
$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0 \quad \text{car } 0 < q = 0,75 < 1.$$

Pour tout entier naturel n , $u_n = 12\,000 + v_n = 12\,000 - 2\,000 \times 0,75^n$.

De la relation précédente et de $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$, on déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 12\,000$.

Cela signifie que, au bout d'un certain nombre d'années, le parc automobile se stabilisera à 12 000 véhicules.

L'algorithme doit permettre d'afficher l'année au cours de laquelle le nombre d'automobiles dépassera les 11 950. Le résultat attendu est donc celui de n . Pour obtenir l'année, on doit donc afficher $2015 + n$.



À la calculatrice, on obtient : $u_{12} \approx 11\,936 < 11\,950$ et $u_{13} \approx 11\,952 > 11\,950$, donc $n = 13$.

L'année durant laquelle le parc automobile comptera plus de 11 950 véhicules est 2028.

$$c) 12\,000 - 2000 \times 0,75^n \geq 11\,950 \Leftrightarrow 12\,000 - 11\,950 \geq 2\,000 \times 0,75^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{50}{2\,000} \geq 0,75^n$$

$$\Leftrightarrow 0,025 \geq 0,75^n$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,025) \geq \ln(0,75^n)$$

car la fonction logarithme est strictement croissante

$$\Leftrightarrow \ln(0,025) \geq n \ln(0,75) \quad \text{car, pour tout réel } x \text{ et tout entier } n, \ln(x^n) = n \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(0,025)}{\ln(0,75)} \leq n \quad \text{le sens de l'inégalité change, car } \ln(0,75) < 0$$

$$\frac{\ln(0,025)}{\ln(0,75)} \approx 12,82 \text{ donc } n \geq 12,8.$$

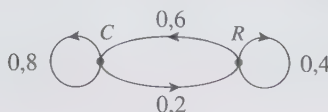
Finalement, $n = 13$ et l'année demandée est $2015 + 13 = 2028$.

SPECIALITÉ EXERCICE 2

1. Si Hugo court un jour donné, la probabilité qu'il coure le jour suivant est 0,2 ; ainsi, la probabilité qu'il ne coure pas le jour suivant est 0,8.

Si Hugo ne court pas un jour donné, la probabilité qu'il ne coure pas le jour suivant est 0,4 ; ainsi, la probabilité qu'il coure le jour suivant est 0,6.

Le graphe probabiliste représentant la situation est donc le suivant :



2.

Hugo court le jour n , puis aussi le jour $n + 1$

Hugo court le jour n , mais ne court pas le jour $n + 1$

$$\begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Hugo ne court pas le jour n , puis court le jour $n + 1$

Hugo ne court pas le jour n ni le jour $n + 1$

La matrice de transition associée au graphe probabiliste est : $\begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix}$.

3. Pour tout entier naturel n , $P_n = P_0 \times M^n$.

Donc $(c_6 \ r_6) = (c_0 \ r_0) \times M^6 \approx (0,750 \ 016 \ 0,249 \ 984)$.

Ainsi, $c_6 \approx 0,75$.

4. a) On a la relation matricielle $P_{n+1} = P_n \times M$, pour tout n entier naturel strictement positif.

b) $P_{n+1} = (c_{n+1} \ r_{n+1})$

$$= (c_n \ r_n) \times M$$

$$= (c_n \times 0,8 + r_n \times 0,6 \quad c_n \times 0,2 + r_n \times 0,4)$$

d'où : $c_{n+1} = c_n \times 0,8 + r_n \times 0,6$ avec $r_n = 1 - c_n$.

On en déduit : $c_{n+1} = c_n \times 0,8 + (1 - c_n) \times 0,6 = 0,8 c_n + 0,6 - 0,6 c_n = 0,2 c_n + 0,6$.

Et donc, pour tout entier $n \geq 0$, $c_{n+1} = 0,2 c_n + 0,6$.

5. a) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = c_n - 0,75$.

On veut montrer que la suite (v_n) est géométrique. Pour cela, on exprime v_{n+1} en fonction de v_n .

Si chaque terme de la suite est obtenu en multipliant le terme précédent par un nombre constant, alors la suite est géométrique, de raison le nombre trouvé.

Dans le cas d'une suite arithmético-géométrique, la raison de la suite introduite est toujours le nombre en facteur devant c_n dans la relation de récurrence : $c_{n+1} = 0,2 c_n + 0,6$; il faudra donc démontrer que la raison est 0,2.

$$v_{n+1} = c_{n+1} - 0,75 = 0,2 c_n + 0,6 - 0,75$$

$$= 0,2 c_n - 0,15$$

$$= 0,2 \left(c_n - \frac{0,15}{0,2} \right) \quad \text{on factorise par 0,2 pour faire apparaître } v_n$$

$$= 0,2 (c_n - 0,75)$$

$$= 0,2 v_n$$

Autre méthode de calcul :

$$v_{n+1} = c_{n+1} - 0,75 = 0,2 c_n + 0,6 - 0,75$$

$$= 0,2 c_n - 0,15 \quad \text{on utilise la relation donnée } v_n = c_n - 0,75 \text{ donc } c_n = 0,75 + v_n$$

$$= 0,2 (v_n + 0,75) - 0,15$$

$$= 0,2 v_n + 0,15 - 0,15 = 0,2 v_n$$

Pour tout entier naturel n , on a : $v_{n+1} = 0,2 v_n$.

$v_{n+1} = 0,2 v_n$; la suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,2$.
Le premier terme est $v_0 = c_0 - 0,75$ soit $v_0 = 1 - 0,75 = 0,25$.

b)

Pour toute suite géométrique (v_n) , on a, pour tout $n \geq 0$: $v_n = v_0 \times q^n$.

Pour tout entier naturel n : $v_n = 0,25 \times 0,2^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0 \quad \text{car } 0 < q = 0,2 < 1.$$

c) Pour tout entier naturel n , $c_n = 0,75 + v_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$.

d) Le 29 décembre 2014 est le 363^e jour de l'année 2014 qui n'est pas une année bissextile. Cela correspond à $n = 362$, car le 1^{er} janvier correspond à $n = 0$.

$$c_{362} = 0,75 + 0,25 \times 0,2^{362} \approx 0,75.$$

Ainsi, la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre 2014 est d'environ 0,75.

e) Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0,75$.

On peut donc conjecturer que l'état stable P est : $(0,75 \quad 0,25)$.

Pour valider cette conjecture, il suffit de vérifier la propriété de l'état stable, à savoir : $P = P \times M$.

$$\begin{aligned} \text{Or, } P \times M &= (0,75 \quad 0,25) \times \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \\ &= (0,75 \times 0,8 + 0,25 \times 0,6 \quad 0,75 \times 0,2 + 0,25 \times 0,4) \\ &= (0,6 + 0,15 \quad 0,15 + 0,1) = (0,75 \quad 0,25) = P. \end{aligned}$$

$P = (0,75 \quad 0,25)$ est bien l'état stable.

EXERCICE 3

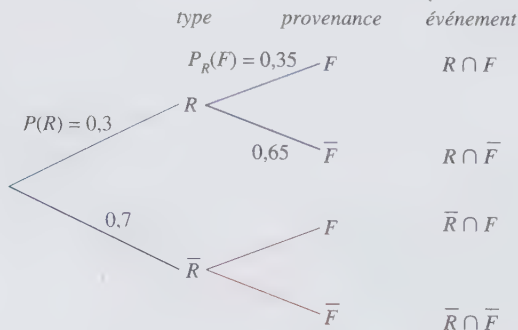
Partie A

1. Les chansons écoutées étant choisies au hasard et de façon équiprobable, on peut écrire que :

$$P(R) = \frac{\text{nombre de cas possibles}}{\text{nombre total de cas}} = \frac{960}{3\,200} \text{ soit } P(R) = 0,3.$$

2. « 35 % des chansons de catégories rock sont interprétées en français » se traduit par : $P_R(F) = 0,35$.

3. La situation peut être modélisée par l'arbre pondérée suivant :



La probabilité que la chanson soit une chanson de catégorie rock **et** qu'elle soit interprétée en français se traduit par :

$$P(R \cap F) = P(R) \times P_R(F) = 0,3 \times 0,35 ,$$

soit $P(R \cap F) = 0,105$.

4.

Dans un arbre de probabilité, la probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins qui conduisent à cet événement.

« Parmi toutes les chansons enregistrées, 38,5 % sont interprétées en français » se traduit par : $P(F) = 0,385$.

$$\text{Or, } P(F) = P(F \cap R) + P(F \cap \bar{R}),$$

$$\text{donc } P(F \cap \bar{R}) = P(F) - P(F \cap R) = 0,385 - 0,105$$

soit $P(F \cap \bar{R}) = 0,28$.

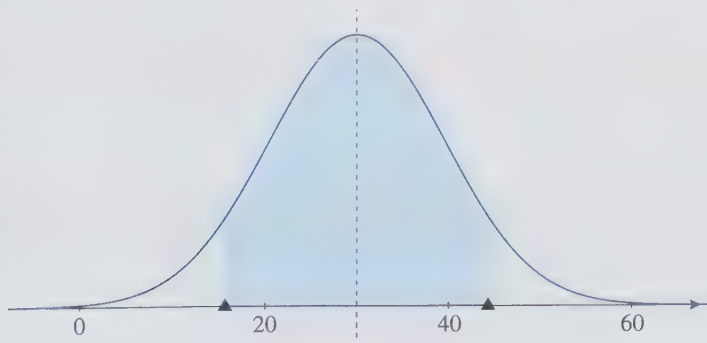
$$5. P_{\bar{R}}(F) = \frac{P(F \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{0,28}{1 - P(R)} = \frac{0,28}{0,7}$$

soit $P_{\bar{R}}(F) = 0,4$.

La probabilité qu'une chanson, écoutée au hasard, qui ne soit pas de catégorie rock soit interprétée en français est de 0,4.

Partie B

1.



$P(15 \leq X \leq 45)$ s'obtient à la calculatrice par la séquence de touches suivante :

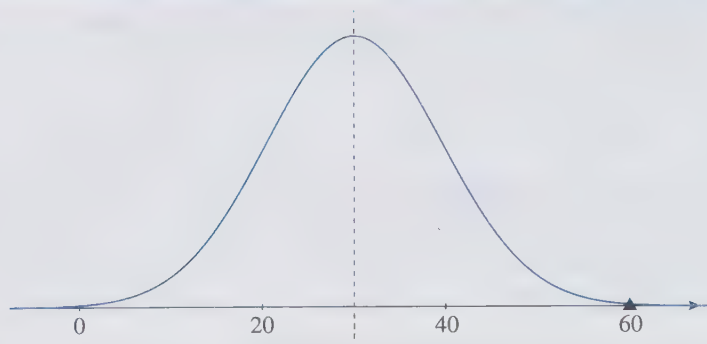
- avec une calculatrice Casio par : **MENU**, choisir **STAT DIST NORM** Ncd (15, 45, 10, 30).

- avec une calculatrice Texas par : **distrib** (**2nde** **var**), choisir **normalFRép** (15, 45, 30, 10).

$P(15 \leq X \leq 45) \approx 0,866$ arrondi au millième.

La probabilité que la durée d'écoute soit comprise entre 15 et 45 minutes est d'environ 0,866.

2. Une heure = 60 minutes.



On cherche à déterminer $P(X \geq 60)$.

Sur le schéma ci-dessus, on constate que l'aire de la surface située sous la courbe et au-delà de la droite verticale $x = 60$ est à peine perceptible. On s'attend donc à trouver un nombre très petit.

$$P(X \geq 60) = P(X \geq 30) - P(30 \leq X \leq 60) = 0,5 - P(30 \leq X \leq 60).$$

On a alors : $P(X \geq 60) \approx 0,001$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 4

1.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a est $f'(a)$. Lorsque cette tangente est horizontale, le coefficient directeur est nul.

La tangente au point d'abscisse 1,5 est représentée sur le graphique. C'est la tangente au point B . Elle est horizontale.

Donc $f'(1,5) = 0$.

2. Appelons D le point de coordonnées $(2 ; 0)$. La tangente à la courbe (C) au point A est la droite (DA) . Cette droite n'est ni verticale ni horizontale. Son équation est donc de la forme $y = ax + b$.

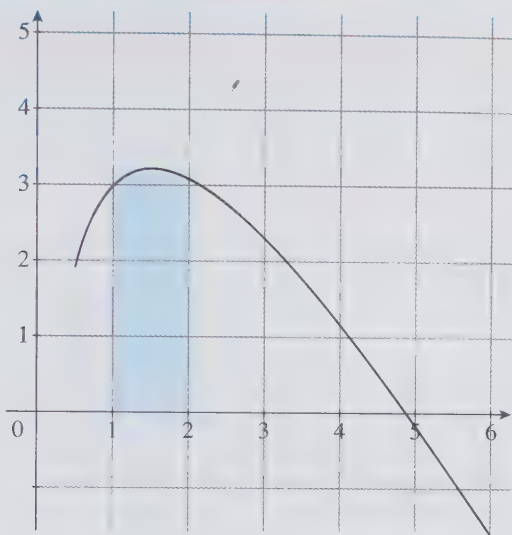
Le coefficient directeur a se calcule avec la formule :

$$a = \frac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \frac{3 - 2}{1 - 0} = 1.$$

Le nombre b , appelé ordonnée à l'origine, n'est autre que l'ordonnée du point D , c'est-à-dire 2.

L'équation de la tangente au point A est : $y = x + 2$.

3.



L'aire demandée est l'aire de la surface coloriée ci-dessus.

Une unité d'aire = un carreau.

Un encadrement, en unités d'aire, de l'aire coloriée est donc : $3 < \text{Aire} < 4$.

4. Sur $[0,5 ; 6]$, la courbe semble être tournée vers les $y < 0$. La fonction f est donc concave sur $[0,5 ; 6]$.

De plus, deux tangentes sont tracées et la courbe est située sous ces tangentes, ce qui confirme la concavité de la fonction.

Partie B

1.

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$,

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Pour tout réel x de l'intervalle $[0,5 ; 6]$, on a :

$$f'(x) = -2 + 3 \times \frac{1}{x} = -2 + \frac{3}{x} = \frac{-2x}{x} + \frac{3}{x}; \text{ soit } f'(x) = \frac{-2x + 3}{x}.$$

2. Sur $[0,5 ; 6]$, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $-2x + 3$ car $x > 0$.

$$-2x + 3 > 0 \Leftrightarrow -2x > -3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}, \text{ donc } f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}.$$

D'où le tableau de signes :

x	0,5	1,5	6
$-2x + 3$	+	0	-
Signe de $f'(x)$	+	0	-

f croissante sur l'intervalle I si, et seulement si, f' positive sur I .
 f décroissante sur l'intervalle I si, et seulement si, f' négative sur I .

Il en résulte le tableau de variations suivant :

x	0,5	1,5	α	6
Signe de $f'(x)$	+	0	-	
Variations de f	$f(0,5) \approx 1,92$ $\swarrow$ $f(0,5) \approx 3,22$ $\searrow$ $f(6) \approx -1,63$ $\nwarrow$ $f(0,5) \approx 1,92$ $\nearrow$ $f(6) \approx -1,63$			

$$f(0,5) = 4 - 3\ln 2; f(1,5) = 2 + 3\ln 1,5; f(6) = -7 + 3\ln 6.$$

3. Sur l'intervalle $[0,5; 1,5]$, $f(x)$ passe de façon continue de 1,92 à 3,22. Sur cet intervalle, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.

Par contre, sur l'intervalle $[1,5; 6]$, $f(x)$ passe de façon continue de environ $3,22 > 0$ à environ $-1,63 < 0$. De plus, la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle ; alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α ; comme indiqué sur le tableau de variations.

Par balayage à la calculatrice (voir tableau ci-dessous), on obtient :

$$f(4,876) \approx 0,009\ 8 > 0 \text{ et } f(4,877) \approx -0,000\ 4 < 0.$$

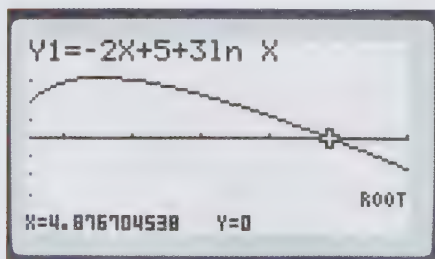
On en déduit : $\alpha \approx 4,88$ à 10^{-2} près.

NORMAL FLOTT AUTO REEL RAD MP	
CONFIG TABLE	
DébutTbl=4.87	
ΔTbl=0.001	
Indent :	Demande
Dépendte :	Auto Demande

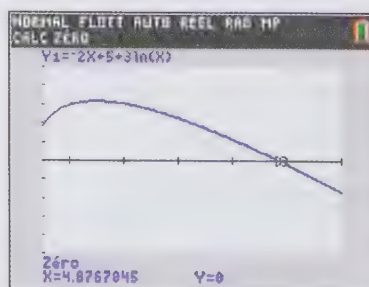
NORMAL FLOTT AUTO REEL RAD MP				
APP SUR + FOUR ΔTbl				
X	Y1			
4.87	0.0093			
4.871	0.0079			
4.872	0.0065			
4.873	0.0051			
4.874	0.0037			
4.875	0.0024			
4.876	9.8E-4			
4.877	-4E-4			
4.878	-0.002			
4.879	-0.003			
4.88	-0.005			
X=4.87				

On peut faire une vérification à la calculatrice :

Casio



TI



4. On déduit le tableau de signes de f du tableau de variations :

x	0,5	α	6
Signe de $f(x)$	+	0	-

5. a)

F primitive de f sur l'intervalle I si, et seulement si, $F' = f$ sur I .

$$F(x) = -x^2 + 2x + u(x) \times v(x), \text{ avec } u(x) = 3x; u'(x) = 3 \text{ et } v(x) = \ln(x); v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Pour tout réel $x \in [0,5; 6]$,

$$F'(x) = -2x + 2 + u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$= -2x + 2 + 3 \ln(x) + 3x \times \frac{1}{x}$$

$$= -2x + 2 + 3 \ln(x) + 3 = -2x + 5 + 3 \ln(x) = f(x).$$

Donc F est bien une primitive de f sur $[0,5; 6]$.

b) Comme f est positive et continue sur l'intervalle $[1; 2]$, alors l'aire du domaine, en unités d'aire, compris entre la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ s'exprime à l'aide d'une intégrale :

$$\text{Aire} = \int_1^2 f(x) dx = F(2) - F(1).$$

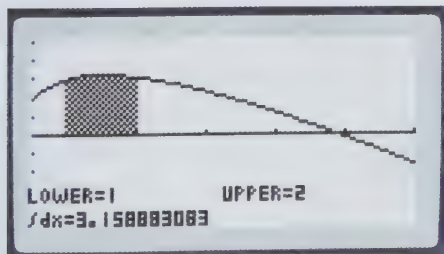
Avec $F(2) = -4 + 4 + 6 \ln(2) = 6 \ln(2)$; $F(1) = -1 + 2 + 3 \ln(1) = 1$, car $\ln(1) = 0$.

Donc **Aire = $6 \ln(2) - 1$ et Aire $\approx 3,16$ unités d'aire.**

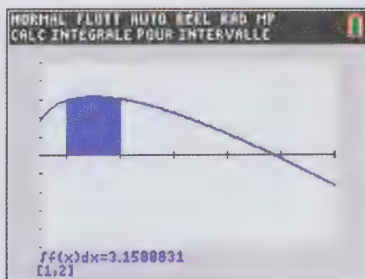
Ce résultat est cohérent avec l'estimation graphique de la **partie A**.

On peut faire une vérification à la calculatrice :

Casio



TI



CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 40 min.
- Exercice 2 : 30 min.
- Exercice 3 : 50 min.
- Spécialité exercice 3 : 50 min.
- Exercice 4 : 40 min.

EXERCICE 1 Probabilités – Loi normale, Intervalle de fluctuation
(5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Le temps passé par un client, en minute, dans un supermarché peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart type $\sigma = 12$.

Pour tout événement E , on note $p(E)$ sa probabilité.

1. Déterminer, en justifiant :

- a) $p(X = 10)$;
- b) $p(X \geq 45)$;
- c) $p(21 \leq X \leq 69)$;
- d) $p(21 \leq X \leq 45)$.

2. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'un client passe entre 30 et 60 minutes dans ce supermarché.

3. Déterminer la valeur de a , arrondie à l'unité, telle que $P(X \leq a) = 0,30$. Interpréter la valeur de a dans le contexte de l'énoncé.

Partie B

En 2013, une étude a montré que 89 % des clients étaient satisfaits des produits de ce supermarché.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la proportion de clients satisfaits pour un échantillon de 300 clients pris au hasard en 2013.

Lors d'une enquête réalisée en 2018 auprès de 300 clients choisis au hasard, 286 ont déclaré être satisfaits.

2. Calculer la fréquence de clients satisfaits dans l'enquête réalisée en 2018.

3. Peut-on affirmer, au seuil de 95 %, que le taux de satisfaction des clients est resté stable entre 2013 et 2018 ? Justifier.

Corrigé page 41

EXERCICE 2 Probabilités – Probabilités conditionnelles, Calcul intégral (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Reporter sur la copie le numéro de la question, ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Aucune justification n'est demandée.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans un établissement scolaire, 30 % des élèves sont inscrits dans un club de sport, et parmi eux, 40 % sont des filles. Parmi ceux n'étant pas inscrits dans un club de sport, 50 % sont des garçons.

Pour tout événement E , on note $\bar{E}$ l'événement contraire de E et $p(E)$ sa probabilité. Pour tout événement F de probabilité non nulle, on note $p_F(E)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

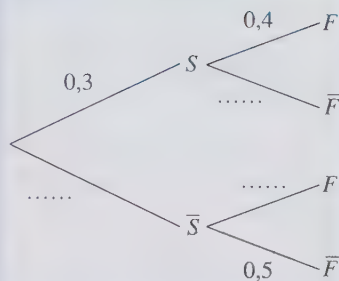
On interroge un élève au hasard et on considère les événements suivants :

- S : « l'élève est inscrit dans un club de sport » ;
- F : « l'élève est une fille ».

La situation est représentée par l'arbre pondéré ci-contre.

1. La probabilité $p_{\bar{F}}(S)$ est la probabilité que l'élève soit :

- a) inscrit dans un club de sport sachant que c'est un garçon ;
- b) un garçon inscrit dans un club de sport ;
- c) inscrit dans un club de sport ou un garçon ;
- d) un garçon sachant qu'il est inscrit dans un club de sport.



2. On admet que $p(F) = 0,47$. La valeur arrondie au millième de $p_{\bar{F}}(S)$ est :

- a) 0,141 ;
- b) 0,255 ;
- c) 0,400 ;
- d) 0,638.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $[-1 ; 4]$ par $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.

1. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1 a pour équation :

- a) $y = -3x^2 + 6x$;
- b) $y = 3x - 2$;
- c) $y = 3x - 3$;
- d) $y = 2x - 1$.

2. La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[-1 ; a]$ est nulle pour :

- a) $a = 0$;
- b) $a = 1$;
- c) $a = 2$;
- d) $a = 3$.

Corrigé page 43

EXERCICE 3 Suites – Arithmétique (5 points)

Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage, situé en aval, d'une hauteur de 10 m.

On mesure le niveau d'eau du lac chaque jour à midi.

Le 1^{er} janvier 2018, à midi, le niveau d'eau du lac était de 6,05 m.

Entre deux mesures successives, le niveau d'eau du lac évolue de la façon suivante :

- d'abord une augmentation de 6 % (apport de la rivière) ;
- ensuite une baisse de 15 cm (écoulement à travers le barrage).

1. On modélise l'évolution du niveau d'eau du lac par une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, le terme u_n représentant le niveau d'eau du lac à midi, en cm, n jours après le 1^{er} janvier 2018.

Ainsi, le niveau d'eau du lac le 1^{er} janvier 2018 à midi est donné par $u_0 = 605$.

a) Calculer le niveau du lac, en cm, le 2 janvier 2018 à midi.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,06u_n - 15$.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 1,06.

Préciser son terme initial.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 355 \times 1,06^n + 250$.

Lorsque le niveau du lac dépasse 10 m, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage.

a) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

b) L'équipe d'entretien devra-t-elle ouvrir les vannes afin de réguler le niveau d'eau ?

Justifier la réponse.

Afin de déterminer la première date d'intervention des techniciens, on souhaite utiliser l'algorithme incomplet ci-dessous.

```

N ← 0
U ← 605
Tant que ..... faire
    U ← .....
    N ← N + 1
Fin Tant que
  
```

a) Recopier et compléter l'algorithme.

b) À la fin de l'exécution de l'algorithme, que contient la variable N ?

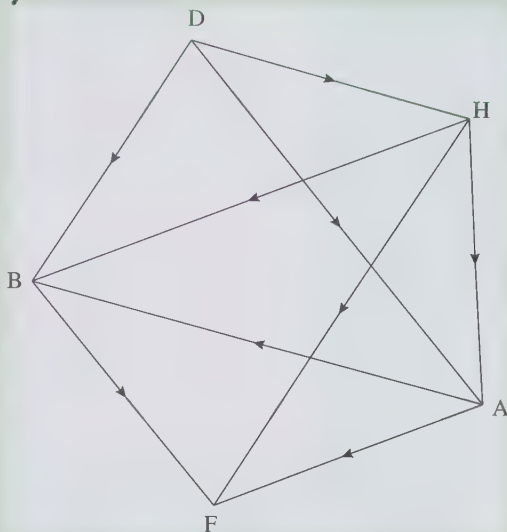
c) En déduire la première date d'intervention des techniciens sur les vannes du barrage.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 3 Matrices, Graphe pondéré (5 points)**Partie A**

Un parcours sportif est composé d'un banc pour abdominaux, de haies et d'anneaux. Le graphe orienté ci-contre indique les différents parcours conseillés partant de D et terminant à F.

Les sommets sont : D (départ), B (banc pour abdominaux), H (haies), A (anneaux) et F (fin du parcours).

Les arêtes représentent les différents sentiers reliant les sommets.



1. Quel est l'ordre du graphe ?

2. On note M la matrice d'adjacence de ce graphe où les sommets sont rangés dans l'ordre alphabétique.

a) Déterminer M .

b) On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Assia souhaite aller de D à F en faisant un parcours constitué de 3 arêtes.

Est-ce possible ? Si oui, combien de parcours différents pourra-t-elle emprunter ?

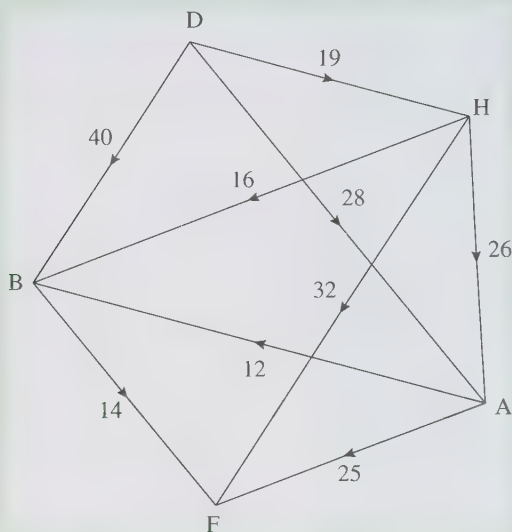
Préciser ces trajets.

3. Assia a relevé ses temps de course en minute entre les différents sommets. Ces durées sont portées sur le graphe ci-après.

Lors d'un entraînement, Assia souhaite courir le moins longtemps possible en allant de D à F.

Sujet 2

Déterminer le trajet pour lequel le temps de course est minimal et préciser la durée de sa course.



Partie B

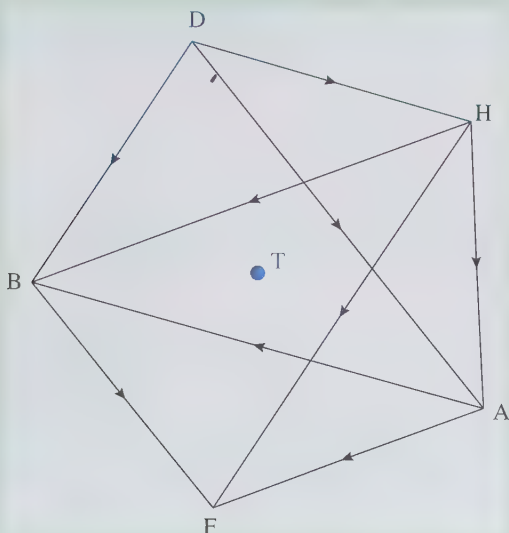
Le responsable souhaite ajouter une barre de traction notée T. De nouveaux sentiers sont construits et de nouveaux parcours sont possibles.

La matrice d'adjacence N associée au graphe représentant les nouveaux parcours, dans lequel les sommets sont classés dans l'ordre alphabétique, est :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Compléter l'annexe 1, en ajoutant les arêtes nécessaires au graphe orienté correspondant à la matrice N .

Annexe 1



Corrige page 48

EXERCICE 4 Fonctions – Exponentielle, Convexité, Calcul intégral, Primitives (6 points)

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ par

$$f(x) = (2x + 1)e^{-2x} + 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère. Une représentation graphique est donnée en **annexe**.

1. On note f' la fonction dérivée de f . Montrer que, pour tout $x \in [-2 ; 4]$,

$$f'(x) = -4xe^{-2x}.$$

2. Étudier les variations de f .

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-2 ; 0]$ et donner une valeur approchée au dixième de cette solution.

4. On note f'' la fonction dérivée de f' . On admet que, pour tout $x \in [-2 ; 4]$,

$$f''(x) = (8x - 4)e^{-2x}.$$

a) Étudier le signe de f'' sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.

b) En déduire le plus grand intervalle dans $[-2 ; 4]$ sur lequel f est convexe.

5. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ par $g(x) = (2x + 1)e^{-2x}$.

a) Vérifier que la fonction G définie pour tout $x \in [-2 ; 4]$ par :

$$G(x) = (-x - 1)e^{-2x}$$

est une primitive de la fonction g .

b) En déduire une primitive F de f .

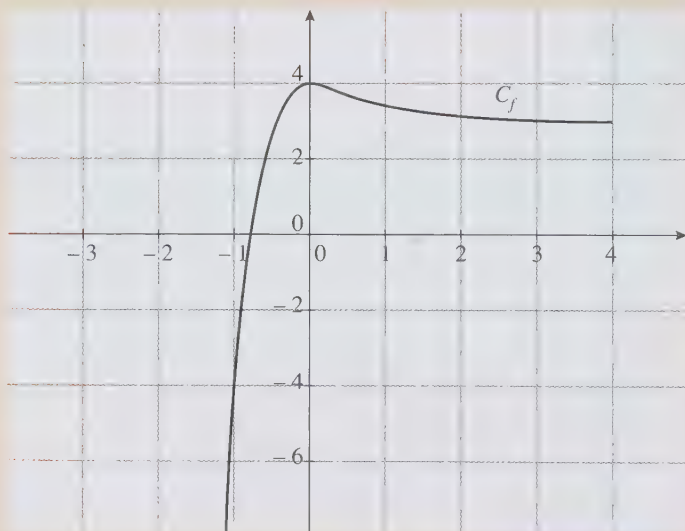
6. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine $\mathcal{D}$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

a) Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique donné en annexe.

b) Par lecture graphique, donner un encadrement de $\mathcal{A}$, en unité d'aire, par deux entiers consécutifs.

c) Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis une valeur approchée au centième.

Annexe



Corrigés

EXERCICE 1

Partie A

1. a)

Soit X est une variable aléatoire qui suit une loi normale, alors, pour tout réel a , $P(X = a) = 0$.

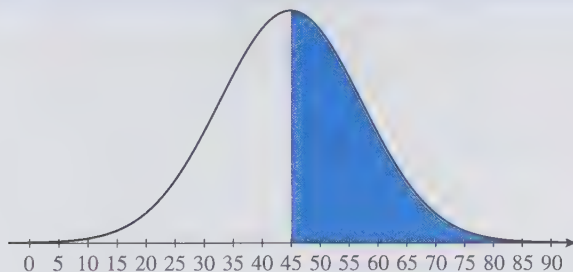
Donc $P(X = 10) = 0$.

b)

X est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 45$.

Alors :

- la courbe de la densité de cette loi normale est symétrique par rapport à l'axe vertical $X = 45$;
- l'aire totale du domaine situé sous cette courbe est égale à 1.



De sorte que l'on peut affirmer que $P(X \geq 45) = 0,5$.

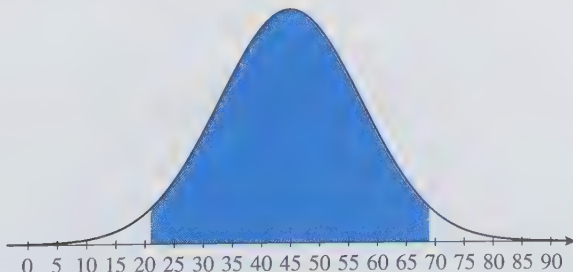
c)

X est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ .

Alors : $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$.

Dans le cas qui nous intéresse, $\mu - 2\sigma = 45 - 2 \times 12 = 21$ et $\mu + 2\sigma = 45 + 2 \times 12 = 69$.

Ainsi, $P(21 \leq X \leq 69) \approx 0,95$.



d) Par symétrie de la courbe par rapport à la droite d'équation $X = 45$,

$$P(21 \leq X \leq 45) = \frac{1}{2} \times P(21 \leq X \leq 69) \approx 0,475.$$

2. $P(30 \leq X \leq 60) \approx 0,789$ arrondi au millième.

La probabilité qu'un client passe entre 30 minutes et 60 minutes dans ce supermarché est d'environ 0,789.

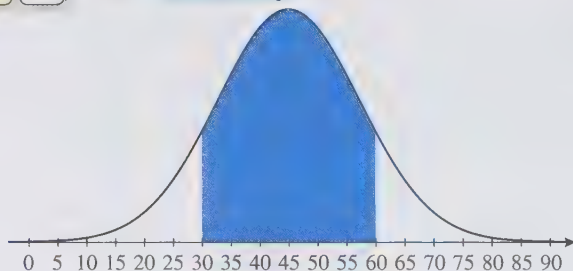
Résultat obtenu à la calculatrice par la séquence de touches suivante :

• avec une calculatrice Casio par :

MENU, choisir **STAT DIST NORM Ncd** (21,45,12,45),

• avec une calculatrice Texas par :

distrib (**2nde** **var**), choisir **normalFRép** (21,45,45,12).



$$P(30 \leq X \leq 60) = 0.7887$$

3. On cherche le réel a pour que : $P(X \leq a) = 0,30$.

Le réel a s'obtient à la calculatrice par la séquence de touches suivante :

• avec une calculatrice Casio par :

MENU, choisir **STAT DIST NORM InvN** (0.30,12,45).

• avec une calculatrice Texas par :

distrib (**2nde** **var**), **FracNormal** (0.30,45,12).

On obtient $a \approx 39$ arrondi à l'unité.

Cela signifie que les personnes qui restent moins de 39 minutes dans le supermarché représentent 30 % de la clientèle.

Partie B

1. On utilise le résultat de cours suivant :

Si n est « assez grand », alors la variable aléatoire F_n , qui, à tout échantillon de taille n associe la fréquence, prend ses valeurs dans l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % suivant :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right].$$

En pratique, on considère que n est « assez grand » sous les conditions : $n \geq 30$; $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

Dans le cas présent, $n = 300$, $p = 0,89$.

On a $n \geq 30$, $np = 267 \geq 5$ et $n(1-p) = 33 \geq 5$.

Les conditions ci-dessus sont donc vérifiées : l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$I = \left[0,89 - 1,96 \frac{\sqrt{0,89 \times 0,11}}{\sqrt{300}} ; 0,89 + 1,96 \frac{\sqrt{0,89 \times 0,11}}{\sqrt{300}} \right] \approx [0,85 ; 0,93].$$

2. Fréquence observée : $f = \frac{286}{300} \approx 0,953$.

3. Comme f n'appartient pas à l'intervalle I , on peut rejeter, au risque de 5 %, l'hypothèse que le taux de satisfaction des clients est resté stable entre 2013 et 2018.

EXERCICE 2

Partie A

1.

La probabilité que l'événement A se réalise sachant que l'événement B s'est réalisé se note : $p_B(A)$.

$p_B(A)$ est une probabilité dite « probabilité conditionnelle ».

La probabilité $p_{\bar{F}}(S)$ est une probabilité conditionnelle.

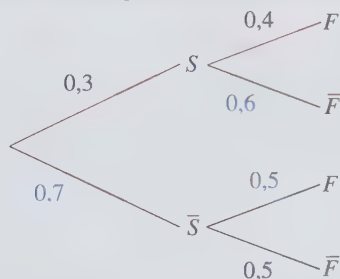
On peut donc éliminer les réponses b) et c) dans lesquelles ne figurent pas l'expression « sachant que » ou une expression équivalente qui indique que l'on calcule la probabilité de S sous une condition particulière.

L'événement $\bar{F}$ est l'événement contraire de l'événement F : « l'élève est une fille » ; donc l'événement $\bar{F}$ est : « l'élève est un garçon ».

Ainsi, $p_{\bar{F}}(S)$ est la probabilité que l'élève choisi soit inscrit dans un club de sport sachant que cet élève est un garçon.

Réponse a).

2. Commençons par compléter l'arbre pondéré illustrant la situation :



À partir des trois renseignements figurant dans l'arbre de l'énoncé (en noir sur l'arbre ci-dessus), on peut déterminer les trois probabilités manquantes (en bleu sur le même arbre) en appliquant la règle suivante :

La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.

Par définition, puisque $p(F) = 0,47 \neq 0$, alors $p_F(S) = \frac{p(S \cap F)}{p(F)}$.

L'événement $S \cap F$ est représenté sur l'arbre par le chemin rouge.

La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées sur ce chemin.

De sorte que : $p(S \cap F) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$.

Finalement : $p_F(S) = \frac{p(S \cap F)}{p(F)} = \frac{0,12}{0,47} \approx 0,255$.

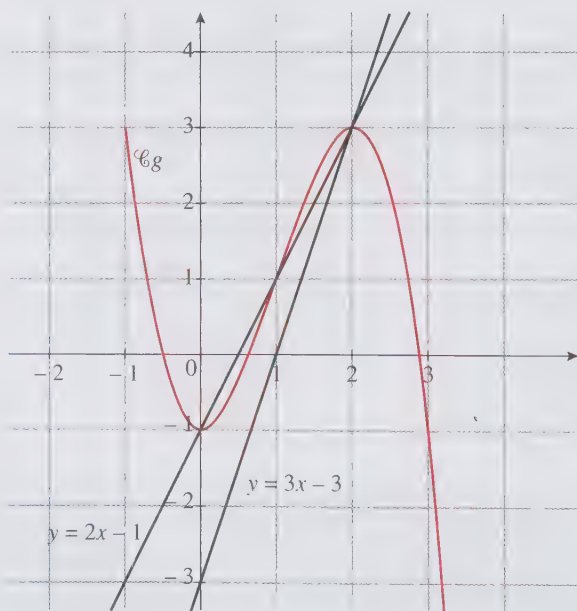
Réponse b).

Partie B

1. Une tangente à une courbe est une droite dont l'équation est de la forme : $y = ax + b$.
On élimine la proposition a) : $y = -3x^2 + 6x$ qui est l'équation d'une parabole

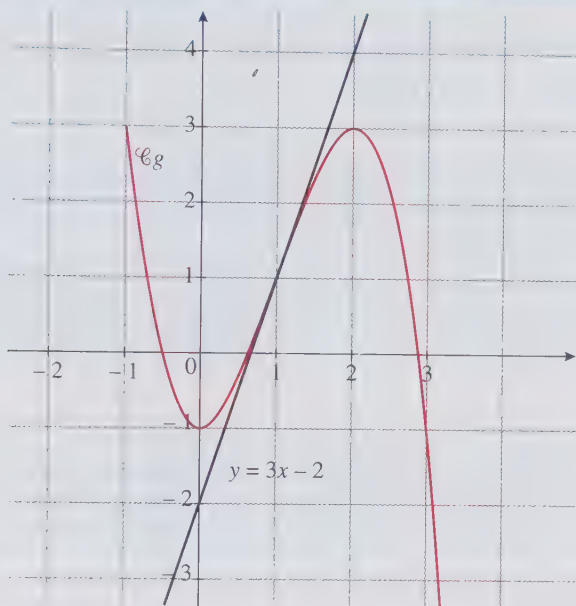
Première méthode : calculatrice

On trace à l'écran de la calculatrice, simultanément, les courbes de la fonction g et de chacune des trois droites proposées.



On remarque que les propositions c) et d) ne conviennent pas.

En revanche, la proposition b) semble acceptable comme le prouve le graphe ci-après.



Réponse b).

Deuxième méthode : formule

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I . La tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse a , $a \in I$, a pour équation : $y = g'(a)(x - a) + g(a)$.

$$g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1 \text{ et } g'(x) = -3x^2 + 6x.$$

Comme $a = 1$, alors $g(1) = -1 + 3 - 1 = 1$ et $g'(1) = -3 + 6 = 3$.

Donc l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est :

$$y = 3(x - 1) + 1 = 3x - 3 + 1 = 3x - 2.$$

Réponse b).

2. Première méthode : calculatrice

g est une fonction continue sur l'intervalle $[-1; a]$.

La valeur moyenne de g sur $[-1; a]$ est le réel : $\frac{1}{a - (-1)} \int_{-1}^a g(x) dx = \frac{1}{a + 1} \int_{-1}^a g(x) dx$.

Cette valeur moyenne est nulle si, et seulement si :

$$\int_{-1}^a g(x) dx = \int_{-1}^a (-x^3 + 3x^2 - 1) dx = 0.$$

À la calculatrice, on calcule l'intégrale précédente avec chacune des quatre valeurs proposées pour le nombre a .

On obtient :

$$\int_{-1}^0 (-x^3 + 3x^2 - 1) dx = 0,25$$

$$\int_{-1}^1 (-x^3 + 3x^2 - 1) dx = 0$$

$$\int_{-1}^2 (-x^3 + 3x^2 - 1) dx = 2,25 \qquad \int_{-1}^3 (-x^3 + 3x^2 - 1) dx = 4.$$

Réponse b).

Seconde méthode : calcul

g est une fonction continue sur l'intervalle $[-1 ; a]$.

La valeur moyenne de g sur $[-1 ; a]$ est le réel :

$$\frac{1}{a - (-1)} \int_{-1}^a g(x) dx = \frac{1}{a + 1} \int_{-1}^a g(x) dx = \frac{1}{a + 1} [G(a) - G(-1)],$$

où G est une primitive de g sur $[-1 ; a]$.

On en déduit que la valeur moyenne est nulle si, et seulement si, $G(a) - G(-1) = 0$ ou encore $G(a) = G(-1)$.

Il ne reste plus qu'à déterminer une primitive G de g sur $[-1 ; a]$.

Une primitive de la fonction $x \rightarrow x^n$, où n est un entier naturel, est la fonction

$$x \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Une primitive de la fonction g définie sur $[-1 ; a]$ par $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ est la fonction G définie par :

$$G(x) = \frac{-x^4}{4} + x^3 - x.$$

$$G(-1) = -\frac{1}{4} + (-1) - (-1) = -0,25.$$

$$G(0) = 0 \neq G(-1).$$

$$G(1) = -\frac{1}{4} + 1 - 1 = -0,25 = G(-1), \text{ donc } a = 1 \text{ convient.}$$

$$G(2) = -\frac{16}{4} + 8 - 2 = 2 \neq G(-1) \text{ et } G(3) = -\frac{81}{4} + 27 - 3 = 23,75 \neq G(-1).$$

Réponse b).

EXERCICE 3

Si u_0 représente le niveau d'eau du lac le 1^{er} janvier, alors u_1 représente le niveau d'eau du lac le 2 janvier.

$$u_1 = u_0 + u_0 \times \frac{6}{100} - 15 = 605 + 605 \times \frac{6}{100} - 15 = 626,3.$$

Le niveau du lac est de 626,3 cm le 2 janvier.

b)

Augmenter un nombre N de 6 %, c'est multiplier ce nombre N par $1 + \frac{6}{100} = 1,06$.

D'un jour à l'autre, le niveau du lac à midi est multiplié par 1,06 puis baisse de 15 cm. Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,06u_n - 15$.

2. a) Pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 250$ ou encore $u_n = v_n + 250$.

$$\begin{aligned}\text{Pour tout entier naturel } n, v_{n+1} &= u_{n+1} - 250 \\ &= 1,06u_n - 15 - 250 \\ &= 1,06(v_n + 250) - 265 \\ &= 1,06v_n + 265 - 265 = 1,06v_n.\end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 1,06v_n$.

Ainsi, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,06$.

$$v_0 = u_0 - 250 = 605 - 250 = 355.$$

b)

$$\text{Pour tout entier naturel } n, v_n = q^n \times v_0.$$

$$\text{Donc, pour tout entier naturel } n, v_n = 355 \times (1,06)^n.$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, u_n = v_n + 250,$$

$$\text{soit } u_n = 355 \times (1,06)^n + 250.$$

3. a)

$$\text{Si } q > 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} (q^n) = +\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1,06^n) = +\infty \text{ et, ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty.$$

b) Cette limite traduit le fait que, au bout d'un grand nombre de jours, le niveau de l'eau à midi sera très élevé et dépassera aisément les 10 mètres autorisés. **L'équipe d'entretien devra donc ouvrir les vannes pour réguler le niveau de l'eau.**

c) L'algorithme doit permettre de déterminer la première date d'intervention des techniciens. On cherche donc à déterminer la 1^{re} valeur de n pour laquelle $u_n > 1\,000$ cm.

$N \leftarrow 0$

$U \leftarrow 605$

Tant que $U < 1000$ faire

$U \leftarrow 1,06U - 15$

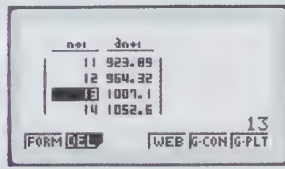
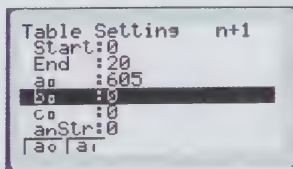
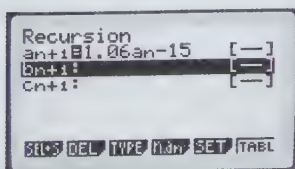
$N \leftarrow N + 1$

Fin du tant que.

d) N est le compteur. Il compte le nombre de boucles effectuées jusqu'à la 1^{re} intervention.

À la calculatrice, on obtient : $u_{12} = 964,33$ et $u_{13} = 1\,007,2$.

Avec une Casio :



Avec une TI :

NORMAL FLOTT AUTO REEL RAD MP			
CONDITION INITIALE			
Graph1	Graph2	Graph3	
TYPE: SUITE(n)	SUITE(n+1)	SUITE(n+2)	
nMin=0			
u(n+1)=1.06u(n)-15			
u(0)=605			
u(1)=			
v(n+1)=			
v(0)=			
v(1)=			
w(n+1)=			

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP			
APP SUR + POUR ΔT=1			
n	u		
4	698.18		
5	725.87		
6	753.57		
7	783.79		
8	815.82		
9	849.77		
10	885.75		
11	923.9		
12	964.33		
13	1007.2		
14	1052.6		
n=13			

À la fin de l'exécution de l'algorithme, on a : $N = 13$.

u_0 est le niveau d'eau à midi au 1^{er} janvier, donc u_{13} est le niveau d'eau à midi au 14 janvier.

La première date d'intervention des techniciens est donc le 14 janvier.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 3

Partie A

1.

L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets du graphe.

Dans le cas présent, il y a 5 sommets : A-B-D-F-H. L'ordre du graphe est 5.

2. a)

La matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre n est la matrice carrée M de dimension $n \times n$ dont l'élément m_{ij} est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j .

Si les sommets i et j ne sont pas adjacents, alors $m_{ij} = 0$.

Pour un graphe orienté, m_{ij} est le nombre d'arêtes allant du sommet i vers le sommet j .

Pour notre graphe, il y a 9 arêtes orientées :

$A \rightarrow B$; $A \rightarrow F$; $B \rightarrow F$; $D \rightarrow A$; $D \rightarrow B$; $D \rightarrow H$; $H \rightarrow A$; $H \rightarrow B$; $H \rightarrow F$.

On obtient ainsi la matrice d'adjacence suivante :

$$M = \begin{pmatrix} & A & B & D & F & H \\ A & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ D & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

Dans la matrice M^p , l'élément m_{ij}^p représente le nombre de chaînes de longueur p reliant le sommet i au sommet j .

$$M^3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & D & F & H \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ D \\ F \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

On lit dans la matrice M^3 : $m_{DF}^3 = 3$.

Assia peut donc aller de D à F en trois étapes. Pour cela, il existe trois parcours différents :

$$D \rightarrow H \rightarrow A \rightarrow F ; D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow F ; D \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow F.$$

3. Rechercher le chemin de durée minimale sur un graphe pondéré connexe revient à rechercher une plus courte chaîne à l'aide de l'algorithme de Dijkstra entre deux sommets (celui de départ D et celui d'arrivée F) en remplissant un tableau au fur et à mesure.

Étape 1 (première ligne)

- D est le sommet de départ, donc fixé avec la marque 0(D).
- Le trajet DA dure 28 minutes, donc A est marqué 28(D).
- Le trajet DB dure 40 minutes, donc B est marqué 40(D).
- Le trajet DH dure 19 minutes, donc H est marqué 19(D).
- Les autres sommets ne sont pas adjacents à D et sont marqués ∞ .

Étape 2 (deuxième ligne)

- H est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet H avec la marque 19(D).
- Le trajet DA dure 45 minutes en passant par H, donc A reste marqué 28(D) qui est inférieur.
- Le trajet DB dure 35 minutes en passant par H, donc B est marqué 35(H).
- Le trajet DF dure 51 minutes en passant par H, donc F est marqué 51(H).

Étape 3 (troisième ligne)

- A est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet A avec la marque 28(D).
- Le trajet DB dure 40 minutes en passant par A, donc B reste marqué 35(H) qui est inférieur.
- Le trajet DF dure 53 minutes en passant par A, donc F reste marqué 51(H) qui est inférieur.

Étape 4 (quatrième ligne)

- B est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet B avec la marque 35(H).
- Le trajet DF dure 49 minutes en passant par B, donc F est marqué 49(B) qui est inférieur 51(H).

Dernière étape

– F est marqué 49(B).

On remonte l'algorithme en suivant les flèches de sommet en sommet :

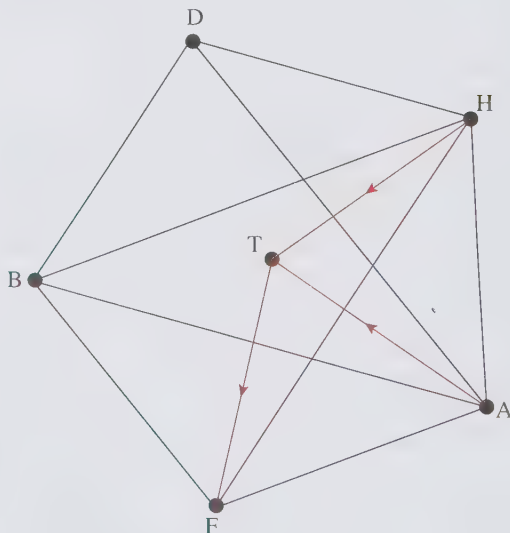
Le chemin qui minimise le temps du trajet allant de D à F est $D \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow F$. Ce trajet dure 49 minutes.

Étape	A	B	D	F	H	Sommet fixé
1	28(D)	40(D)	0(D)	∞	19(D)	D
2	28(D)	35(H)		51(H)	19(D)	H
3	28(D)	35(H)		51(H)		A
4		35(H)		49(B)		B
5				49(B)		F

Partie B

$$N = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & D & F & H & T \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ D \\ F \\ H \\ T \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Il faut rajouter 3 liaisons : $A \rightarrow T$; $H \rightarrow T$; $T \rightarrow F$.



EXERCICE 4

1.

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction composée e^u est dérivable sur I et sa dérivée est : $(e^u)' = u' \times e^u$.

Ainsi, $(e^{-2x})' = -2e^{-2x}$ car $u(x) = -2x$.

Dans le cas qui nous intéresse, $f(x) = (2x + 1)e^{-2x} + 3$.

f est de la forme $f = u \times v + 3$, donc $f' = u' \times v + u \times v'$ avec $u(x) = 2x + 1$; $u'(x) = 2$ et $v(x) = e^{-2x}$; $v'(x) = -2e^{-2x}$.

Ainsi, pour tout réel x de l'intervalle $[-2 ; 4]$,

$f'(x) = 2 \times e^{-2x} + (2x + 1) \times (-2e^{-2x}) = 2e^{-2x} + (-4x - 2)e^{-2x} = e^{-2x}(2 - 4x - 2)$
soit $f'(x) = -4xe^{-2x}$.

2.

x	-2	0	4
$-4x$	+	0	-
e^{-2x}	+		+
$f'(x)$	+	0	-

$$-4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$-4x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Le signe de f' donne le sens de variation de f :

si $f'(x) \leq 0$ sur $[a ; b]$, alors f est décroissante sur $[a ; b]$;

si $f'(x) \geq 0$ sur $[a ; b]$, alors f est croissante sur $[a ; b]$.

On en déduit que : f est croissante sur $[-2 ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; 4]$.

3. On en déduit le tableau de variations de f :

x	-2	α	0	4
$f(x)$				
		$\nearrow$	$\searrow$	
		0	4	
		$-3e^4 + 3 < 0$		$9e^{-8} + 3 > 0$

D'après le tableau de variation complété ci-dessus et le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α , avec $-2 < \alpha < 0$.

À la calculatrice, on obtient : $f(-0,81) \approx -0,133 < 0$ et $f(-0,8) \approx 0,02 > 0$.

Donc $\alpha \approx 0,8$.

4. a)

f est de la forme $f' = u \times v$, donc $f'' = u' \times v + u \times v'$ avec $u(x) = -4x$; $u'(x) = -4$ et $v(x) = e^{-2x}$; $v'(x) = -2e^{-2x}$.

Ainsi, pour tout réel x de l'intervalle $[-2 ; 4]$,

$$f''(x) = -4 \times e^{-2x} + (-4x) \times (-2e^{-2x}) = -4e^{-2x} + 8xe^{-2x} = (8x - 4)e^{-2x}.$$

Le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $8x - 4$, car $e^{-2x} > 0$, pour tout x réel.

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 8x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 8x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 0,5.$$

D'où :

x	-2	0,5	4
Signe de $f''(x)$	-	0	+

b)

 f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $[a ; b]$: **f convexe sur $[a ; b]$ si, et seulement si, $f'' \geq 0$ sur $[a ; b]$.** **f concave sur $[a ; b]$ si, et seulement si, $f'' \leq 0$ sur $[a ; b]$.**On en déduit que **la fonction f est convexe sur $[0,5 ; 4]$.**

5. a) $g(x) = (2x + 1)e^{-2x}$; $G(x) = (-x - 1)e^{-2x}$.

G est une primitive de g sur l'intervalle si, et seulement si, pour tout réel x de l'intervalle $[a ; b]$: $G'(x) = g(x)$.

G est de la forme $G = u \times v$, donc $G' = u' \times v + u \times v'$ avec $u(x) = -x - 1$; $u'(x) = -1$ et $v(x) = e^{-2x}$; $v'(x) = -2e^{-2x}$.

Pour tout $x \in [-2 ; 4]$,

$$G'(x) = -1 \times e^{-2x} + (-x - 1) \times (-2e^{-2x}) = e^{-2x} + (2x + 2)e^{-2x}$$

$$G'(x) = e^{-2x}(-1 + 2x + 2) = e^{-2x}(2x + 1) = g(x).$$

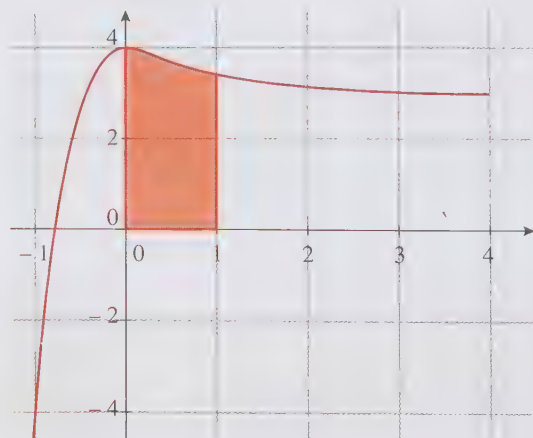
 G est donc bien une primitive de g sur $[-2 ; 4]$.

b) $f(x) = (2x + 1)e^{-2x} + 3 = g(x) + 3$.

Ainsi, une primitive F de f sur $[-2 ; 4]$ est définie par :

$$F(x) = G(x) + 3x = (-x - 1)e^{-2x} + 3x.$$

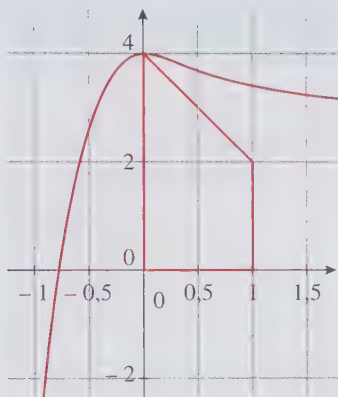
6. a)



b) Un carreau = 2 unités d'aire.

L'aire du domaine est comprise entre 1,5 et 2 carreaux, de sorte que :

$$3 \text{ u. a.} \leq \mathcal{A} \leq 4 \text{ u. a.}$$



c) $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0).$

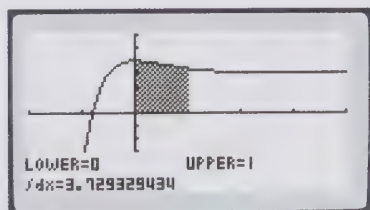
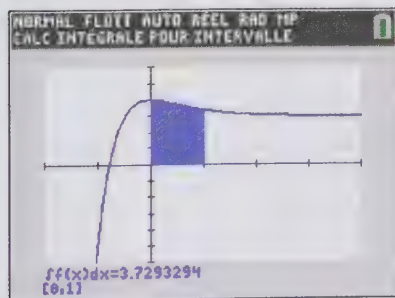
$$F(1) = (-1 - 1)e^{-2} + 3 \times 1 = 3 - 2e^{-2} \text{ et } F(0) = (0 - 1)e^0 + 3 \times 0 = -1$$

$$\mathcal{A} = 3 - 2e^{-2} - (-1)$$

$$\mathcal{A} = 4 - 2e^{-2}$$

$$\mathcal{A} \approx 3,73.$$

Il faut vérifier le résultat à la calculatrice (TI ou Casio) :



CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 30 min.
- Exercice 2 : 40 min.
- Exercice 3 : 40 min.
- Spécialité exercice 3 : 40 min.
- Exercice 4 : 50 min.

EXERCICE 1 Fonctions – Logarithme népérien, Point d'inflexion, Lecture graphique (5 points)

Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5 ; 5]$ par :

$$f(x) = \frac{5 + 5 \ln x}{x}.$$

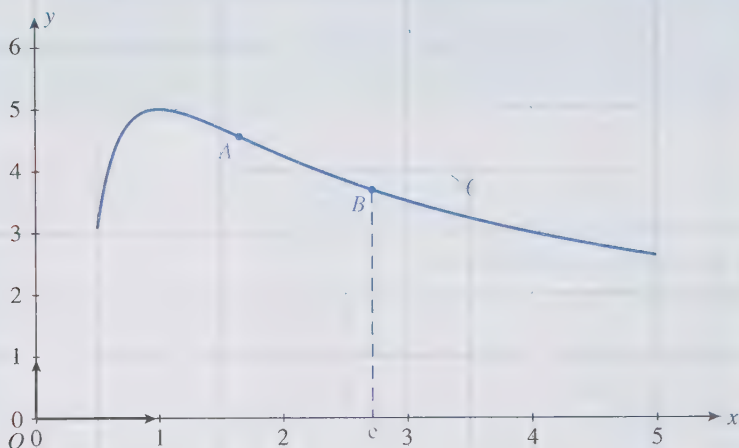
Sa représentation graphique est la courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-après dans un repère d'origine O .

On admet que le point A placé sur le graphique est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0,5 ; 5]$.

On note B le point de cette courbe d'abscisse e .

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur cet intervalle.

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa fonction dérivée seconde.



On admet que, pour tout x de l'intervalle $[0,5 ; 5]$, on a :

$$f'(x) = \frac{-5 \ln x}{x^2} \quad f''(x) = \frac{10 \ln x - 5}{x^3}.$$

1. La fonction f' est :

- a) positive ou nulle sur l'intervalle $[0,5 ; 5]$;
- b) négative ou nulle sur l'intervalle $[1 ; 5]$;
- c) négative ou nulle sur l'intervalle $[0,5 ; 1]$.

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B est égal à :

- a) $-\frac{5}{e^2}$;
- b) $\frac{10}{e}$;
- c) $\frac{5}{e^3}$.

3. La fonction f' est :

- a) croissante sur l'intervalle $[0,5 ; 1]$;
- b) décroissante sur l'intervalle $[1 ; 5]$;
- c) croissante sur l'intervalle $[2 ; 5]$.

4. La valeur exacte de l'abscisse du point A de la courbe $\mathcal{C}$ est égale à :

- a) 1,65 ;
- b) 1,6 ;
- c) $e^{0,5}$.

5. On note $\mathcal{A}$ l'aire, mesurée en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$. Cette aire vérifie :

- a) $20 \leq \mathcal{A} \leq 30$;
- b) $10 \leq \mathcal{A} \leq 15$;
- c) $5 \leq \mathcal{A} \leq 8$.

EXERCICE 2 Probabilités – Probabilités conditionnelles,**Loi normale (5 points)**

Les différentes parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Les résultats numériques seront donnés, si nécessaire, sous forme approchée à 0,01 près.

Partie A

Un commerçant dispose dans sa boutique d'un terminal qui permet à ses clients, s'ils souhaitent régler leurs achats par carte bancaire, d'utiliser celle-ci en mode sans contact (quand le montant de la transaction est inférieur ou égal à 30 €) ou bien en mode code secret (quel que soit le montant de la transaction).

Il remarque que :

- 80 % de ses clients règlent des sommes inférieures ou égales à 30 €. Parmi eux :
 - 40 % paient en espèces ;
 - 40 % paient avec une carte bancaire en mode sans contact ;
 - les autres paient avec une carte bancaire en mode code secret.
- 20 % de ses clients règlent des sommes strictement supérieures à 30 €. Parmi eux :
 - 70 % paient avec une carte bancaire en mode code secret ;
 - les autres paient en espèces.

On interroge au hasard un client qui vient de régler un achat dans la boutique.

On considère les événements suivants :

- V : « pour son achat, le client a réglé un montant inférieur ou égal à 30 € » ;
- E : « pour son achat, le client a réglé en espèces » ;
- C : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en mode code secret » ;
- S : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en mode sans contact ».

1. a) Donner la probabilité de l'évènement V , notée $P(V)$, ainsi que la probabilité de S sachant V notée $P_V(S)$.

b) Traduire la situation de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. a) Calculer la probabilité que, pour son achat, le client ait réglé un montant inférieur ou égal à 30 € et qu'il ait utilisé sa carte bancaire en mode sans contact.

b) Montrer que la probabilité de l'évènement : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en utilisant l'un des deux modes » est égale à 0,62.

Partie B

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la dépense en euros d'un client suite à un achat chez ce commerçant.

On admet que X suit la loi normale de moyenne 27,5 et d'écart-type 3.

On interroge au hasard un client qui vient d'effectuer un achat dans la boutique.

1. Calculer la probabilité que ce client ait dépensé moins de 30 €.
2. Calculer la probabilité que ce client ait dépensé entre 24,50 € et 30,50 €.

Partie C

Une enquête de satisfaction a été réalisée auprès d'un échantillon de 200 clients de cette boutique. Parmi eux, 175 trouvent que le dispositif sans contact du terminal est pratique.

Déterminer, avec un niveau de confiance de 0,95, l'intervalle de confiance de la proportion p de clients qui trouvent que le dispositif sans contact est pratique.

Corrigé page 66

EXERCICE 3 Suites – Algorithmique (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 18.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = u_n - 90$.
3. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8.

On précisera la valeur de v_0 .

- b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 90 - 25 \times 0,8^n.$$

3. On considère l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	$u \leftarrow 65$
ligne 2	$n \leftarrow 0$
ligne 3	Tant que
ligne 4	$n \leftarrow n + 1$
ligne 5	$u \leftarrow 0,8 \times u + 18$
ligne 6	Fin Tant que

- Recopier et compléter la ligne 3 de cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 85$.
- Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
- Retrouver par le calcul le résultat de la question précédente en résolvant l'inéquation $u_n \geq 85$.

La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de 52 € par mois qui permet de recevoir chaque semaine ce panier bio.

En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement.

Les responsables de la société Biocagette font les hypothèses suivantes :

- d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés ;
 - chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent l'abonnement.
- Justifier que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n -ième mois qui suit le mois de juillet 2017.

Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4 420 € durant l'année 2018 ?

Justifier la réponse.

Selon ce modèle, vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société Biocagette ?

Argumenter la réponse.

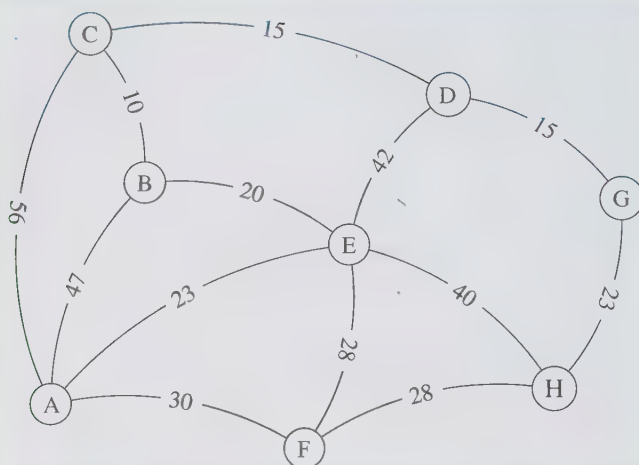
Corrigé page 68

SPÉCIALITÉ EXERCICE 3 Résolution de système, Graphe pondéré, Graphe probabiliste (5 points)

Les différentes parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Le graphe pondéré ci-après représente les différents lieux A, B, C, D, E, F, G et H dans lesquels Louis est susceptible de se rendre chaque jour. Le lieu A désigne son domicile et G le lieu de son site de travail. Le poids de chaque arête représente la distance, en kilomètres, entre les deux lieux reliés par l'arête.



Déterminer le chemin le plus court qui permet à Louis de relier son domicile à son travail. On pourra utiliser un algorithme. Préciser la distance, en kilomètres, de ce chemin.

Partie B

Afin de réduire son empreinte énergétique, Louis décide d'utiliser lors de ses trajets quotidiens soit les transports en commun, soit le covoiturage.

- s'il a utilisé les transports en commun lors d'un trajet, il utilisera le covoiturage lors de son prochain déplacement avec une probabilité de 0,53 ;
- s'il a utilisé le covoiturage lors d'un trajet, il effectuera le prochain déplacement en transport en commun avec une probabilité de 0,78.

Louis décide de mettre en place ces résolutions au 1^{er} janvier 2018.

Pour tout entier naturel n , on note :

- c_n la probabilité que Louis utilise le covoiturage n jour(s) après le 1^{er} janvier 2018 ;
- t_n la probabilité que Louis utilise les transports en commun n jour(s) après le 1^{er} janvier 2018 ;

La matrice ligne $P_n = (c_n \quad t_n)$ traduit l'état probabiliste n jour(s) après le 1^{er} janvier 2018.

Le 1^{er} janvier 2018, Louis décide d'utiliser le covoiturage.

1. a) Préciser l'état probabiliste initial P_0 .

b) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste. On notera « C » et « T » ses deux sommets :

- « C » pour indiquer que Louis utilise le covoiturage ;
 - « T » pour indiquer que Louis utilise les transports en commun.
2. Déterminer la matrice de transition du graphe probabiliste en considérant ses sommets dans l'ordre alphabétique.
 3. Calculer l'état probabiliste P_2 et interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
 4. Soit la matrice ligne $P = (x \quad y)$ associée à l'état stable du graphe probabiliste.
 - a) Calculer les valeurs exactes de x et de y , puis en donner une valeur approchée à 0,01 près.
 - b) Selon ce modèle, peut-on dire qu'à long terme, Louis utilisera aussi souvent le covoiturage que les transports en commun ? Justifier la réponse.

Corrigé page 70

EXERCICE 4 Fonctions – Exponentielle (5 points)

Dans cet exercice, si nécessaire, les valeurs numériques approchées seront données à 0,01 près.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par :

$$f(x) = (3,6x + 2,4)e^{-0,6x} - 1,4.$$

Partie A

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 4]$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Justifier que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 4]$, on a :

$$f'(x) = (-2,16x + 2,16)e^{-0,6x}.$$

2. a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 4]$.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur cet intervalle.

On donnera les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variations sous forme approchée.

3. On admet que la fonction F définie par :

$$F(x) = (-6x - 14)e^{-0,6x} - 1,4x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

Calculer la valeur exacte de $\int_0^4 f(x) dx$, puis en donner une valeur numérique approchée.

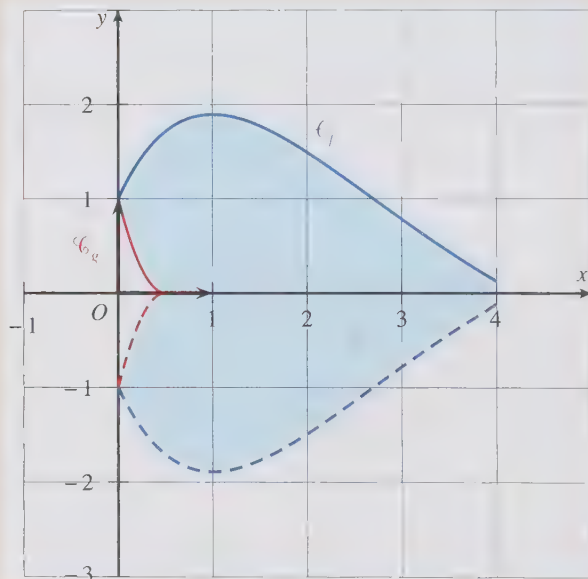
Partie B

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 4]$. On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = 4x^2 - 4x + 1.$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de cette fonction sur l'intervalle $[0 ; 0,5]$.

On a tracé ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère d'origine O et, en pointillés, les courbes obtenues par symétrie de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ par rapport à l'axe des abscisses :



1. Montrer que $\int_0^{0,5} g(x) dx = \frac{1}{6}$.

2. On considère le domaine plan délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$, leurs courbes symétriques (en pointillés), ainsi que la droite d'équation $x = 4$.

Ce domaine apparaît bleuté sur la figure ci-dessus.

Calculer une valeur approchée de l'aire, en unités d'aire, de ce domaine.

Corrigé page 73

Corrigés

EXERCICE 1

1. Réponse b.

Par lecture graphique :

La fonction f est décroissante sur $[1; 5]$, donc sa dérivée est négative ou nulle sur l'intervalle $[1; 5]$: la réponse b. convient et cela permet d'éliminer la réponse a.

De plus, f est croissante sur $[0,5; 1]$, donc sa dérivée est positive, ce qui permet d'éliminer la réponse c.

Par le calcul :

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-5\ln x}{x^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -5\ln x \leq 0 \quad \text{car } x^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x \geq 0 \quad \text{car } -5 < 0$$

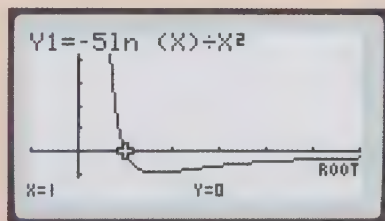
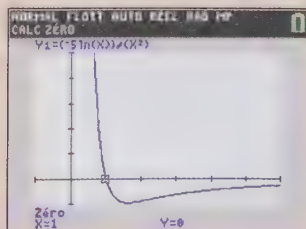
$$\Leftrightarrow \ln x \geq \ln 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1 \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[$$

Autre méthode en utilisant la calculatrice :

À l'aide du graphique de la calculatrice, on détermine sur quel intervalle la fonction f est négative.

La courbe de la dérivée coupe l'axe des abscisses en $x = 1$ et est en dessous de l'axe des abscisses pour $x > 1$. Elle est donc négative ou nulle sur l'intervalle $[1; 5]$.



2. Réponse a.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B est égal à $f'(e)$.

$$f'(e) = \frac{-5\ln e}{e^2} = \frac{-5}{e^2} \quad \text{car } \ln e = 1$$

Remarque : la fonction f étant décroissante sur l'intervalle $[1; 5]$, sa dérivée est négative ; le coefficient directeur de la tangente qui est égal au nombre dérivé est donc négatif. Seule la première réponse peut convenir.

3. Réponse c.

Pour déterminer le sens de variation de f' , il faut déterminer le signe de la dérivée seconde de f .

Sur l'intervalle $[0,5; 5]$, $x^3 > 0$, donc le signe de $f''(x)$ est celui de $(10\ln x - 5)$.

$$10\ln x - 5 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{5}{10} \Leftrightarrow \ln x > 0,5$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln x} > e^{0,5} \quad \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } [0,5; 5].$$

$$\Leftrightarrow x > e^{0,5} \quad e^{0,5} \approx 1,649$$

x	0,5	$e^{0,5}$	5
Signe de (x^3)	+		+
Signe de $(10\ln x - 5)$	-	0	+
Signe de $f''(x)$	-	0	+

On en déduit que la fonction f'' est positive sur $[e^{0,5}; 5]$; la fonction f' est croissante sur $[e^{0,5}; 5]$ avec $e^{0,5} < 2$, donc la fonction f' est croissante sur $[2; 5]$.

Autre méthode en utilisant la calculatrice :

À l'aide du graphique de la calculatrice de la question 1., on détermine sur quel intervalle la fonction f' est croissante, soit sur l'intervalle $[2; 5]$.

4. Réponse c.

Le point A est le seul point d'inflexion de la courbe.

Pour déterminer l'abscisse du point d'inflexion de la courbe, il faut déterminer pour quelle valeur de x la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe.

$$f''(x) = \frac{10\ln x - 5}{x^3}. \text{ On se sert du signe de la dérivée seconde étudié à la question 3.}$$

x	0,5	$e^{0,5}$	5
Signe de $f''(x)$	-	0	+

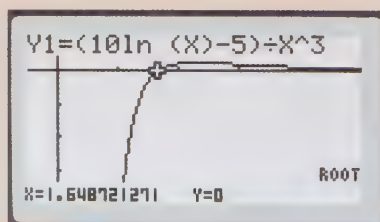
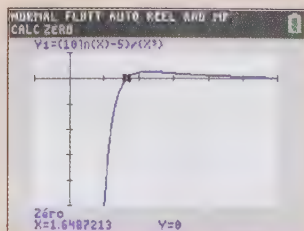
La dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en $x = e^{0,5}$.

Autre méthode en utilisant la calculatrice :

On fait tracer le graphe de la fonction f'' et on demande la valeur où elle s'annule, puis on vérifie avec les réponses proposées.

Avec une TI : **[calculs]** (**[2nde]** **[trace]**), choisir zéro puis les bornes de l'intervalle, soit 0,5 et 5.

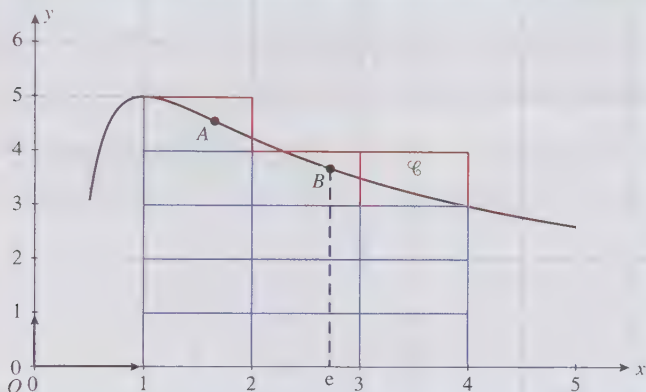
Avec une Casio : **[G-solv]** (**[SHIFT]** **[F5]**), choisir root.



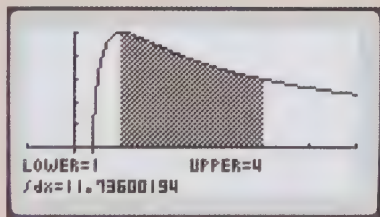
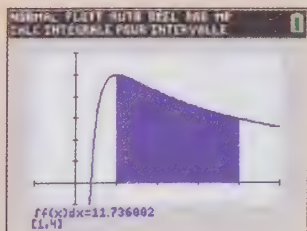
5. Réponse b.

Première méthode en utilisant le quadrillage :

On remarque qu'une unité d'aire correspond à 2 carreaux. L'aire, mesurée en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$ est donc comprise entre 10 et 13 unités d'aire.



Autre méthode en utilisant la calculatrice :



Par le calcul (difficile) :

$$f(x) = \frac{5 + 5\ln x}{x} = \frac{5}{x} + \frac{5\ln x}{x} = 5 \times \frac{1}{x} + 5 \times \frac{1}{x} \times \ln x$$

Soit la fonction g définie sur $[0,5; 5]$ par $g(x) = \frac{1}{x} \times \ln x$.

g est de la forme $u' \times u$, avec $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = \frac{1}{x}$.

Sa primitive est de la forme $\frac{1}{2}u^2$, soit $G(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$

Une primitive de la fonction f sur $[0,5; 5]$ est donc : $F(x) = 5\ln x + 5 \times \frac{1}{2}(\ln x)^2$

La fonction f étant positive sur l'intervalle $[1; 4]$, l'aire du domaine considéré est donnée par le calcul suivant :

$$\mathcal{A} = \int_1^4 f(x) dx = [F(x)]_1^4 = F(4) - F(1) = 5\ln 4 + \frac{5}{2}(\ln 4)^2 - 0, \text{ soit } \mathcal{A} \approx 11,736 \text{ u. a.}$$

EXERCICE 2

Partie A

1. a) 80 % de ses clients règlent des sommes inférieures ou égales à 30 €, donc $P(V) = 0,8$.

Parmi eux, 40 % paient avec une carte bancaire en mode sans contact, donc $P_V(S) = 0,4$.

b) • 80 % de ses clients règlent des sommes inférieures ou égales à 30 € et, parmi eux :
 – 40 % paient en espèces, donc $P_V(E) = 0,4$;
 – les autres, soit 20 %, paient avec une carte bancaire en mode code secret, soit $P_V(C) = 0,2$.

• 20 % de ses clients règlent des sommes strictement supérieures à 30 €, donc $P(\bar{V}) = 0,2$ et, parmi eux :

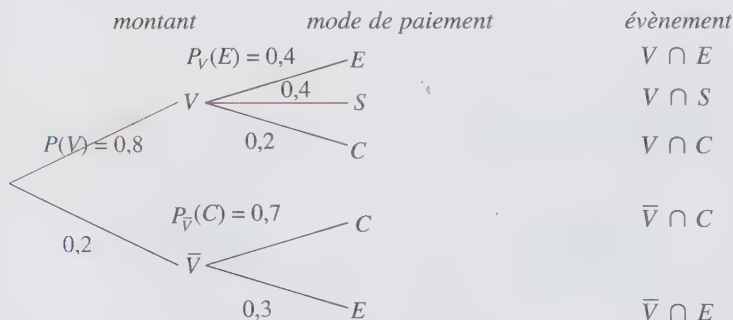
– 70 % paient avec une carte bancaire en mode code secret,

soit $P_{\bar{V}}(C) = 0,7$;

– les autres, soit 30 %, paient en espèces,

soit $P_{\bar{V}}(E) = 0,3$.

On peut compléter l'arbre de probabilité :



2. a) Pour calculer la probabilité que, pour son achat, le client ait réglé un montant inférieur ou égal à 30 € et qu'il ait utilisé sa carte bancaire en mode sans contact, on doit calculer $P(V \cap S)$. C'est le chemin rouge indiqué sur l'arbre.

$$P(V \cap S) = P(V) \times P_V(S) = 0,8 \times 0,4 = 0,32.$$

La probabilité que, pour son achat, le client ait réglé un montant inférieur ou égal à 30 € et qu'il ait utilisé sa carte bancaire en mode sans contact est égale à 0,32.

b) La probabilité de l'évènement : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en utilisant l'un des deux modes » correspond à la probabilité des événements $V \cap S$, $V \cap C$ et $\bar{V} \cap C$. C'est aussi la probabilité de l'évènement $\bar{E}$ puisqu'il n'a pas payé en espèce.

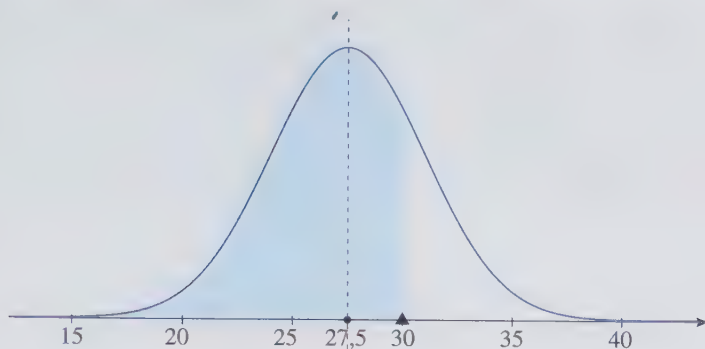
$$P(\bar{E}) = P(V \cap S) + P(V \cap C) + P(\bar{V} \cap C).$$

$$P(\bar{E}) = 0,32 + 0,8 \times 0,2 + 0,2 \times 0,7 = 0,62.$$

La probabilité de l'évènement : « pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en utilisant l'un des deux modes » est bien égale à 0,62.

Partie B

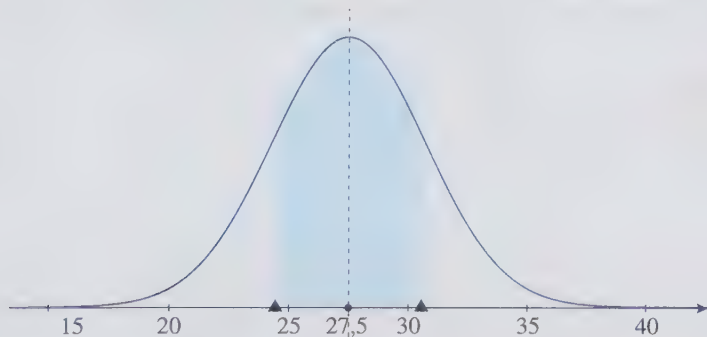
1.



$P(X < 30) = P(X \leq 27,5) + P(27,5 \leq X < 30) = 0,5 + P(27,5 \leq X < 30)$. donc :

$P(X < 30) \approx 0,8$ à 10^{-2} près.

2.



$P(24,5 \leq X \leq 30,5)$ s'obtient à la calculatrice par la séquence de touches suivante :

- avec une calculatrice Casio par : **MENU**, choisir **STAT DIST NORM Ncd** (24.5, 30.5, 3, 27.5).
- avec une calculatrice TI par : **distrib** (**2nde** **var**), choisir **normalFRép** (24.5, 30.5, 27.5, 3).

$P(24,5 \leq X \leq 30,5) \approx 0,68$ arrondi au centième.

On peut aussi utiliser le résultat du cours suivant :

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$, alors :

$P(X \in [\mu - \sigma ; \mu + \sigma]) \approx 0,68$.

$P(X \in [\mu - \sigma ; \mu + \sigma]) = P(X \in [27,5 - 3 ; 27,5 + 3]) = P(24,5 \leq X \leq 30,5) \approx 0,68$.

Partie C

Rappel de cours : Soit f , la fréquence du caractère étudié, observée dans un échantillon représentatif de la population.

Si n est « assez grand », l'intervalle de confiance au seuil de confiance de 95 % est :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

En pratique, on considère que n est « assez grand » sous les conditions : $n \geq 30$; $nf \geq 5$ et $n(1-f) \geq 5$.

Dans le cas présent, $n = 200$, $f = \frac{175}{200} = 0,825$.

On a : $n \geq 30$, $nf = 175 \geq 5$ et $n(1-f) = 25 \geq 5$.

Les conditions du rappel sont vérifiées ; l'intervalle de confiance au seuil de confiance de 95 % est :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,825 - \frac{1}{\sqrt{200}} ; 0,825 + \frac{1}{\sqrt{200}} \right], \text{ soit } I \approx [0,804 ; 0,946].$$

Avec un niveau de confiance de 0,95, l'intervalle de confiance de la proportion p de clients qui trouvent que le dispositif sans contact est pratique est $I \approx [0,80 ; 0,95]$.

EXERCICE 3

$$1. u_1 = 0,8 \times u_0 + 18 = 0,8 \times 65 + 18 = 70.$$

$$u_2 = 0,8 \times u_1 + 18 = 0,8 \times 70 + 18 = 74.$$

On veut montrer que la suite (v_n) est géométrique. Pour cela, on exprime v_{n+1} en fonction de v_n .

Si chaque terme de la suite est obtenu en multipliant le terme précédent par un nombre constant, alors la suite est géométrique, de raison le nombre trouvé.

Dans le cas d'une suite arithmético-géométrique, la raison de la suite introduite est toujours le nombre en facteur devant u_n dans la relation de récurrence : $u_{n+1} = 0,8 u_n + 18$; il faudra donc démontrer que la raison est 0,8.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 90 = 0,8 u_n + 18 - 90.$$

$$= 0,8 u_n - 72$$

$$= 0,8 \left(u_n - \frac{72}{0,8} \right) \quad \text{on factorise par 0,8 pour faire apparaître } v_n$$

$$= 0,8 (u_n - 90)$$

$$= 0,8 v_n.$$

Autre méthode de calcul :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 90 = 0,8 u_n + 18 - 90$$

$$= 0,8 u_n - 72 \quad \text{on utilise la relation donnée : } v_n = u_n - 90 \text{ donc } u_n = 90 + v_n$$

$$= 0,8 (90 + v_n) - 72$$

$$= 0,8 v_n + 72 - 72 = 0,8 v_n.$$

Pour tout entier naturel n , on a : $v_{n+1} = 0,8 v_n$.

$v_{n+1} = 0,8 v_n$, donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$.

Le premier terme est $v_0 = u_0 - 90$, soit $v_0 = -25$.

b) On exprime ensuite v_n en fonction de n en utilisant la relation suivante :

Pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 \times q^n$ d'où : $v_n = -25 \times 0,8^n$, pour tout entier naturel n .

$u_n = 90 + v_n$, donc $u_n = 90 - 25 \times 0,8^n$, pour tout entier naturel n .

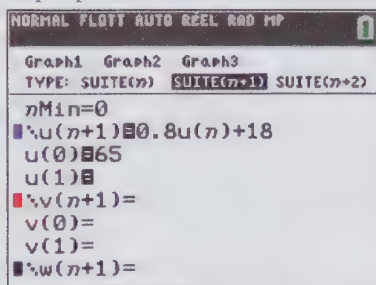
3. a) Cet algorithme doit déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 85$.

Tant que u_n n'a pas atteint la valeur 85, l'algorithme doit chercher des valeurs de u_n .

L'instruction à ajouter est donc : Tant que $u < 85$.

b) Pour obtenir le résultat souhaité, on calcule les termes de la suite à la calculatrice et la première valeur de n telle que $u_n \geq 85$ est 8.

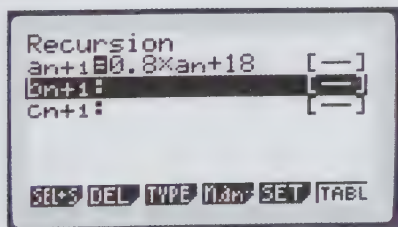
Avec une calculatrice TI, en utilisant le mode suite et en faisant afficher le tableau de valeurs par pas de 1 :



n	u			
0	65			
1	70			
2	74			
3	77.2			
4	79.76			
5	81.808			
6	83.446			
7	84.757			
8	85.806			
9	86.645			
10	87.316			

n=0

Avec une calculatrice Casio, dans le menu Recur pour l'écriture de la suite et en faisant afficher le tableau de valeurs par pas de 1, avec un début à 0 et une valeur initiale pour la suite de 65 :



n+1	an+1
6	83.446
7	84.757
8	85.806
9	86.645

FORM DEL WEB G-CON G-PLT 8

$$c) u_n \geq 85 \Leftrightarrow 90 - 25 \times 0,8^n \geq 85 \Leftrightarrow -25 \times 0,8^n \geq -5$$

$$\Leftrightarrow 0,8^n \leq \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,8^n) \leq \ln\left(\frac{1}{5}\right) \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,8) \leq \ln\left(\frac{1}{5}\right) \text{ car } \ln(a^n) = n \ln a, \text{ pour } a > 0$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\ln(0,8)} \text{ car } \ln(0,8) < 0$$

$\frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\ln(0,8)} = \frac{-\ln 5}{\ln(0,8)} \approx 7,21$ donc la première valeur entière de n satisfaisant l'inéquation est 8.

En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement, donc $u_0 = 65$.

D'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés, donc u_n est multiplié par $\left(1 - \frac{20}{100}\right)$, soit par 0,8.

Chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent un nouvel abonnement, donc on ajoute 18 à $0,8u_n$.

On en déduit alors u_{n+1} à partir de u_n , soit $u_{n+1} = 0,8u_n + 18$.

On retrouve la suite étudiée aux questions précédentes.

Chaque panier rapporte 52 €, donc pour avoir la recette mensuelle, il faut multiplier le nombre d'abonnés par 52. La recette mensuelle dépassera 4 420 € au cours de l'année 2018 s'il existe n tel que : $52 \times u_n \geq 4\,420$.

$$52 \times u_n \geq 4\,420 \Leftrightarrow u_n \geq \frac{4\,420}{52} \Leftrightarrow u_n \geq 85.$$

D'après la question 3. b), on sait que $u_n \geq 85$ pour $n \geq 8$.

Le mois correspondant à $n = 0$ est juillet 2017 : c'est donc en mars 2018 que la recette mensuelle dépassera 4 420 €.

b) Si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q)^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,8)^n = 0$ et ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -25 \times 0 + 90 = 90$.

Cette limite traduit le fait qu'au bout d'un grand nombre de mois, le nombre d'abonnés va se stabiliser à 90 et la recette mensuelle à $52 \times 90 = 4\,680$ €.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 3

Partie A

Ce graphe est connexe, car la chaîne A-B-C-D-E-F-H-G passe par tous les sommets et permet ainsi de les relier 2 à 2.

Rechercher le chemin de longueur minimale sur un graphe pondéré connexe revient à rechercher une plus courte chaîne à l'aide de l'algorithme de Dijkstra entre deux sommets (celui de départ A et celui d'arrivée G) en remplissant un tableau au fur et à mesure.

Étape 1 (première ligne)

- A est le sommet de départ, donc fixé avec la marque 0(A).
- B est à 47 km de A, donc B est marqué 47(A) ; C est à 56 km de A, donc C est marqué 56(A) ; E est à 23 km de A, donc E est marqué 23(A), et F est à 30 km de A, donc F est marqué 30(A).
- Les autres sommets ne sont pas adjacents à A, donc marqués ∞ .

Étape 2 (deuxième ligne)

- E est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet E avec la marque 23(A).
- B est à $23 + 20$ km de A en passant par E, donc B est marqué 43(E) qui est inférieur à la marque précédente 47(A).
- D est à $23 + 42$ km de A en passant par E, donc D est marqué 65(E).
- F est à $23 + 28$ km de A en passant par E, donc F reste marqué 30(A) qui est inférieur à la marque 51(E).
- H est à $23 + 40$ km de A en passant par E, donc H est marqué 63(E).
- C et G ne sont pas adjacents à E, donc ils restent marqués comme précédemment.

Étape 3 (troisième ligne)

- F est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet F avec la marque 30(A).
- H est à $30 + 28$ km de A en passant par F, donc H est marqué 58(F) qui est inférieur à la marque précédente 63(E).
- B, C, D et G ne sont pas adjacents à F, donc ils restent marqués comme précédemment.

Étape 4 (quatrième ligne)

- B est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet B avec la marque 43(E).
- C est à $43 + 10$ km de A en passant par B, donc C est marqué 53(B) qui est inférieur à la marque précédente 56(A).
- H, D et G ne sont pas adjacents à B, donc ils restent marqués comme précédemment.

Étape 5 (cinquième ligne)

- C est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet C avec la marque 53(B).
- D est à $53 + 15$ km de A en passant par C, donc C reste marqué 65(E) qui est inférieur à la marque 68(C).
- H et G ne sont pas adjacents à C, donc ils restent marqués comme précédemment.

Étape 6 (sixième ligne)

- H est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet H avec la marque 58(F).
- G est à $58 + 23$ km de A en passant par H, donc G est marqué 81(H).
- D n'est pas adjacent à H, donc il reste marqué comme précédemment.

Étape 7 (septième ligne)

- D est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet D avec la marque 65(E).
- G est à $65 + 15$ km de A en passant par D, donc G est marqué 80(D) qui est inférieur à la marque précédente 81(H).

Dernière étape

G est marqué 80(D).

Étape	A	B	C	D	E	F	H	G	Sommet fixé
1	0(A)	47(A)	56(A)	∞	23(A)	30(A)	∞	∞	A
2		43(E)	56(A)	65(E)	23(A)	30(A)	63(E)	∞	E
3		43(E)	56(A)	65(E)		30(A)	58(F)	∞	F
4		43(E)	53(B)	65(E)			58(F)	∞	B
5			53(B)	65(E)			58(F)	∞	C
6				65(E)			58(F)	81(H)	H
7				65(E)				80(D)	D
8								80(D)	G

On remonte l'algorithme en suivant les flèches de sommet en sommet :

Le trajet le plus court pour aller du domicile au lieu de travail est A-E-D-G et a pour longueur 80 km.

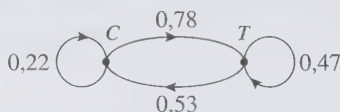
Partie B

1. a) Le 1^{er} janvier 2018, Louis décide d'utiliser le covoiturage, donc $c_0 = 1$ et $t_0 = 0$, soit $P_0 = (1 \ 0)$.

b) • S'il a utilisé les transports en commun lors d'un trajet, il utilisera le covoiturage lors de son prochain déplacement avec une probabilité de 0,53 ; et donc réutilisera les transports en commun avec une probabilité de 0,47.

• S'il a utilisé le covoiturage lors d'un trajet, il effectuera le prochain déplacement en transport en commun avec une probabilité de 0,78 ; et donc réutilisera le covoiturage avec une probabilité de 0,22.

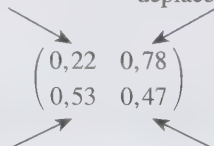
Ainsi, le graphe probabiliste représentant la situation est le suivant :



2.

S'il a utilisé le covoiturage, la probabilité qu'il utilise de nouveau le covoiturage au déplacement suivant est de 0,22.

S'il a utilisé le covoiturage, la probabilité qu'il utilise les transports en commun au déplacement suivant est de 0,78.



S'il a utilisé les transports en commun, la probabilité qu'il utilise le covoiturage au déplacement suivant est de 0,53.

S'il a utilisé les transports en commun, la probabilité qu'il utilise de nouveau les transports en commun au déplacement suivant est de 0,47.

La matrice de transition associée au graphe probabiliste est : $M = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix}$.

3. $P_2 = P_0 \times M^2 = (1 \ 0) \times \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix}^2$, soit $P_2 = (0,4618 \ 0,5382)$.

Au troisième jour de janvier, la probabilité que Louis utilise le covoiturage est de 0,4618 et celle qu'il utilise les transports en commun est de 0,5382.

4. a)

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, l'état probabiliste P_n tend vers un état stable P indépendant de l'état initial, tel que $P = P \times M$, si M a ses coefficients non nuls.

L'état stable $P = (x \ y)$ doit vérifier $P = P \times M$ ou encore :

$$(x \ y) = (x \ y) \times \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix} \text{ avec } x + y = 1 \text{ ou } y = 1 - x.$$

On doit donc résoudre le système :
$$\begin{cases} x = 0,22x + 0,53y \\ y = 0,78x + 0,47y \\ x + y = 1. \end{cases}$$

La première équation donne :

$$x = x \times 0,22 + (1 - x) \times 0,53 \Leftrightarrow x - 0,22x + 0,53x = 0,53 \Leftrightarrow 1,31x = 0,53$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{0,53}{1,31} = \frac{53}{131} \approx 0,40.$$

$$y = 1 - x = 1 - \frac{53}{131} = \frac{78}{131} \approx 0,60.$$

L'état probabiliste stable est donc $P = \left(\frac{53}{131} \ \frac{78}{131} \right)$.

b) Selon ce modèle, on ne peut pas dire que, à long terme, Louis utilisera aussi souvent le covoiturage que les transports en commun. Il utilisera le covoiturage dans environ 40 % des jours et les transports en commun dans environ 60 % des jours.

EXERCICE 4

Partie A

1.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x , $g'(x) = ae^{ax+b}$.

f est définie sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = (3,6x + 2,4)e^{-0,6x} - 1,4$.

f est dérivable sur $[0 ; 4]$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $[0 ; 4]$, les fonctions u et v définies sur $[0 ; 4]$ par : $u(x) = 3,6x + 2,4$ et $v(x) = e^{-0,6x}$.

La forme $f = u \times v - 1,4$ entraîne que :

$$f' = u'v + uv', \text{ avec } u'(x) = 3,6 \text{ et } v'(x) = -0,6e^{-0,6x}.$$

$$f'(x) = 3,6 \times e^{-0,6x} + (3,6x + 2,4)(-0,6e^{-0,6x})$$

$$f'(x) = 3,6 \times e^{-0,6x} - 2,16xe^{-0,6x} - 1,44e^{-0,6x}$$

$$f'(x) = e^{-0,6x}(3,6 - 2,16x - 1,44).$$

Ainsi, pour tout réel $x \in [0 ; 4]$, $f'(x) = (-2,16x + 2,16)e^{-0,6x}$.

2. a) Sur $[0 ; 4]$, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $(-2,16x + 2,16)$, car $e^{-0,6x} > 0$, pour tout x réel.

$$-2,16x + 2,16 > 0 \Leftrightarrow -2,16x > -2,16 \Leftrightarrow x < \frac{2,16}{2,16}, \text{ donc } f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

D'où le tableau de signes :

x	0	1	4
$-2,16x + 2,16$	+	0	-
Signe de $f(x)$	+	0	-

b)

f croissante sur l'intervalle I si, et seulement si, f positive sur I et f décroissante sur l'intervalle I si, et seulement si, f' négative sur I .

Il en résulte le tableau de variations suivant :

x	0	1	4
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variation de f	$f(0) = 1$ $\nearrow$ $f(1) \approx 1,89$ $\searrow$ $f(4) \approx 0,12$		

$$f(0) = (3,6 \times 0 + 2,4)e^{-0,6 \times 0} - 1,4 = 2,4 - 1,4 = 1.$$

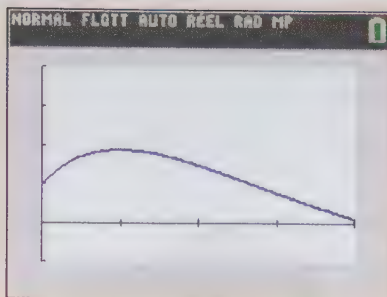
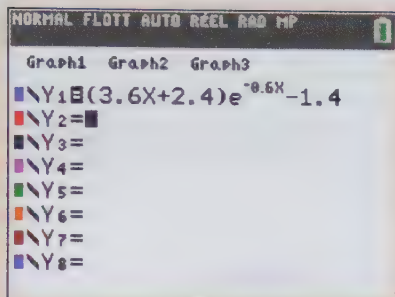
$$f(1) = (3,6 \times 1 + 2,4)e^{-0,6 \times 1} - 1,4 = 6e^{-0,6} - 1,4 \approx 1,89.$$

$$f(4) = (3,6 \times 4 + 2,4)e^{-0,6 \times 4} - 1,4 = 16,8e^{-2,4} - 1,4 \approx 0,12.$$

Les valeurs approchées sont obtenues en faisant afficher le tableau de valeurs de la calculatrice :

X	Y1
0	1
1	1.8929
2	1.4915
3	0.7819
4	0.1241
5	-0.384
6	-0.744
7	-0.986
8	-1.143
9	-1.243
10	-1.305

Il faut penser à vérifier les variations à la calculatrice en faisant tracer la courbe :



3.

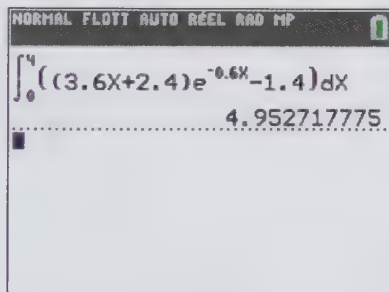
$$\mathcal{A} = \int_0^4 f(x) dx = F(4) - F(0)$$

$$F(4) = (-6 \times 4 - 14)e^{-0,6 \times 4} - 1,4 \times 4 = -38e^{-2,4} - 5,6 \text{ et}$$

$$F(0) = (-6 \times 0 - 14)e^{-0,6 \times 0} - 1,4 \times 0 = -14.$$

$$\mathcal{A} = -38,4e^{-2,4} - 5,6 - (-14), \text{ soit } \mathcal{A} = -38,4e^{-2,4} + 8,4 \approx 4,95.$$

On peut vérifier le résultat à la calculatrice en comparant la valeur approchée obtenue par le calcul à l'aire calculée par la calculatrice : $-38,4e^{-2,4} + 8,4 \approx 4,95$ à 10^{-2} près.



Partie B

1.

Une primitive de la fonction $x \mapsto x^n$, où n est un entier naturel, sur $\mathbb{R}$, est la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$

Une primitive de la fonction g , sur $[0; 0,5]$, définie par $g(x) = 4x^2 - 4x + 1$ est la fonction G définie par :

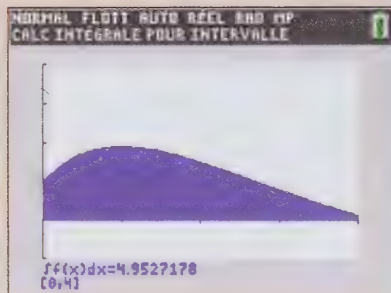
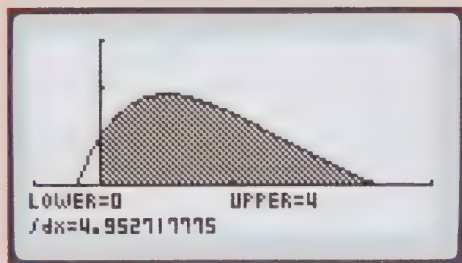
$$G(x) = 4 \times \frac{1}{3} x^3 - 4 \times \frac{1}{2} x^2 + x, \text{ soit } G(x) = \frac{4}{3} x^3 - 2x^2 + x.$$

$$\int_0^{0,5} g(x) dx = G(0,5) - G(0) = \frac{4}{3} \times 0,5^3 - 2 \times 0,5^2 + 0,5 = \frac{1}{6} - 0,5 + 0,5.$$

$$\text{Soit } \int_0^{0,5} g(x) dx = \frac{1}{6}.$$

2.

Comme f est positive et continue sur l'intervalle $[0; 4]$, l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = 0$, $x = 4$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_f$ est égale à l'intégrale $\mathcal{A}$, calculée à la **partie A** :



De même, g est positive et continue sur $[0; 0,5]$, donc l'aire sous la courbe de g est égale à l'intégrale calculée à la question **B-1**.

Le domaine plan délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$, leurs courbes symétriques (en pointillé), ainsi que la droite d'équation $x = 4$ et l'axe des ordonnées a une aire $\mathcal{D}$ égale au calcul de l'aire sous la courbe de la fonction f entre 0 et 4 à laquelle on ôte l'aire sous la courbe de la fonction g entre 0 et 0,5, résultat multiplié par 2 par symétrie.

On a alors :

$$\mathcal{D} = 2 \times \left(\int_0^4 f(x) dx - \int_0^{0.5} g(x) dx \right) \approx 9,57 \text{ u. a.}$$

Pondichéry

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 45 min.
- Exercice 2 : 45 min.
- Spécialité exercice 2 : 45 min.
- Exercice 3 : 30 min.
- Exercice 4 : 55 min.

EXERCICE 1 Probabilités – Probabilités conditionnelles,
Loi normale, Intervalle de fluctuation (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

L'entreprise MICRO vend en ligne du matériel informatique notamment des ordinateurs portables et des clés USB.

Partie A

Durant la période de garantie, les deux problèmes les plus fréquemment relevés par le service après-vente portent sur la batterie et sur le disque dur, ainsi :

- Parmi les ordinateurs vendus, 5 % ont été retournés pour un défaut de batterie et, parmi ceux-ci, 2 % ont aussi un disque dur défectueux.
- Parmi les ordinateurs dont la batterie fonctionne correctement, 5 % ont un disque dur défectueux.

On suppose que la société MICRO garde constant le niveau de qualité de ses produits.

Suite à l'achat en ligne d'un ordinateur :

Proposition 1

La probabilité que l'ordinateur acheté n'ait ni problème de batterie ni problème de disque dur est égale à 0,08 à 0,01 près.

Proposition 2

La probabilité que l'ordinateur acheté ait un disque dur défectueux est égale à 0,048 5.

Proposition 3

Sachant que l'ordinateur a été retourné pendant sa période de garantie car son disque dur était défectueux, la probabilité que sa batterie le soit également est inférieure à 0,02.

Partie B

L'autonomie de la batterie qui équipe les ordinateurs portables distribués par la société MICRO, exprimée en heure, suit une loi normale d'espérance $\mu = 8$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

Proposition 4

La probabilité que l'ordinateur ait une autonomie supérieure ou égale à 10 h est inférieure à 0,2.

Partie C

L'entreprise MICRO vend également des clés USB et communique sur ce produit en affirmant que 98 % des clés commercialisées fonctionnent correctement. Sur 1 000 clés prélevées dans le stock, 50 clés se révèlent défectueuses.

Proposition 5

Ce test, réalisé sur ces 1 000 clés, ne remet pas en cause la communication de l'entreprise.

Corrigé page 83

EXERCICE 2 Suites – Algorithmique (5 points)

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région.

Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8 % des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables : n est un nombre entier naturel
 C est un nombre réel
Traitement : Affecter à C la valeur 300
 Affecter à n la valeur 0
 Tant que $C < 400$ faire
 C prend la valeur $C - C \times 0,08 + 50$
 n prend la valeur $n + 1$
 Fin Tant que
Sortie : Afficher n

Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.

Test $C < 400$	XXX	vrai		...
Valeur de C	300	326		...
Valeur de n	0	1		...

Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de ce problème.

On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n) , le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2014 + n$. Ainsi, $C_0 = 300$ est le nombre de colonies en 2014.

Exprimer, pour tout entier n , le terme C_{n+1} en fonction de C_n .

On considère la suite (V_n) définie, pour tout entier n , par $V_n = 625 - C_n$. Montrer que, pour tout nombre entier n , on a $V_{n+1} = 0,92 \times V_n$.

En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$.

Combien de colonies l'apiculteur peut-il espérer posséder en juillet 2024 ?

L'apiculteur espère doubler son nombre initial de colonies. Il voudrait savoir combien d'années il lui faudra pour atteindre cet objectif.

Comment modifier l'algorithme pour répondre à sa question ?

Donner une réponse à cette question de l'apiculteur.

Continuer page 86

SPECIALITÉ EXERCICE 2 Graphe probabiliste (5 points)

Les sites Internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, à toutes les minutes, soit y rester, soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

- Pour un internaute connecté sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.
- Pour un internaute connecté sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.
- Pour un internaute connecté sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.

L'unité de temps est la minute, et à un instant $t=0$, le nombre de visiteurs est, respectivement sur les sites A, B et C : 100, 0 et 0.

On représente la distribution des internautes sur les trois sites après t minutes par une matrice N_t ; ainsi $N_0 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On suppose qu'il n'y a ni déconnexion pendant l'heure (de $t=0$ à $t=60$), ni nouveaux internautes visiteurs.

1. Représenter le graphe probabiliste de sommets A, B et C correspondant à la situation décrite.
2. Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe (dans l'ordre A, B, C).
3. On donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix} \text{ et } M^{20} \approx \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix}$$

Calculer N_2 . Interpréter le résultat obtenu.

4. Calculer $N_0 \times M^{20}$. Conjecturer la valeur de l'état stable et interpréter la réponse.
5. Un des internautes transmet un virus à tout site qu'il visitera. Il se connecte initialement sur le site C et commence sa navigation. À l'instant $t=0$, le site C est donc infecté.

- a) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t=1$ le site A soit infecté ?
- b) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t=2$ les trois sites soient infectés ?

Corrigé page 88

EXERCICE 3 Fonctions – Exponentielle. Convexité. Point d'inflexion. Lecture graphique (4 points)

On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x+2)e^{-x}$.

Partie A

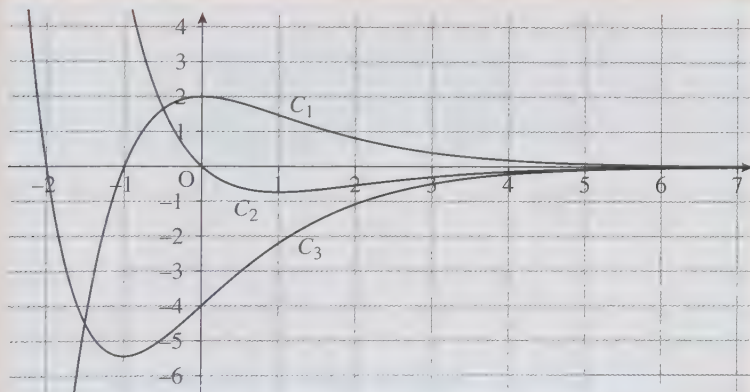
1. Calculer $f(-1)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
2. Justifier que $f'(x) = 2(x+1)e^{-x}$, où f' est la fonction dérivée de f .
3. En déduire les variations de la fonction f .

Partie B

Dans le repère orthogonal ci-dessous, trois courbes C_1 , C_2 et C_3 ont été représentées. L'une de ces courbes représente la fonction f , une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.

Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f .

Indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe.



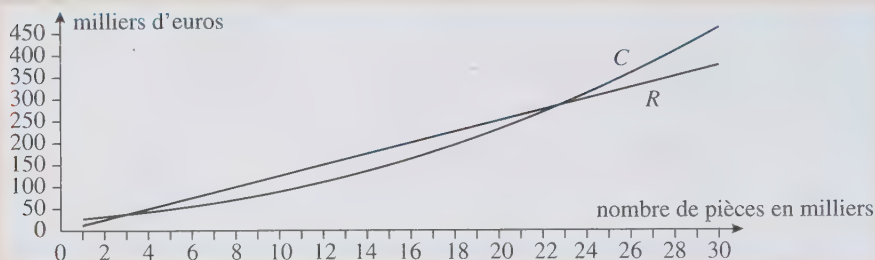
Corrigé page 90

EXERCICE 4 Fonctions – Logarithme népérien, Lecture graphique, Application à l'économie (6 points)

Une entreprise produit et vend des composants électroniques. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 1 000 et 30 000 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée. Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On donne ci-après R et C les représentations graphiques respectives des fonctions recette et coût sur l'intervalle $[1 ; 30]$.



Par lecture graphique, donner une estimation des valeurs demandées.

1. Quel est le coût de production de 21 000 pièces ?
2. Pour quelles quantités de pièces produites l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?
3. Pour quel nombre de pièces produites le bénéfice est-il maximal ?

Partie B

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces, est donné sur l'intervalle $[1 ; 30]$ par :

$$B(x) = -0,5x^2 + 6x - 20 + 2x \ln x.$$

1. Montrer que $B'(x) = -x + 8 + 2 \ln x$, où B' est la dérivée de B sur l'intervalle $[1 ; 30]$.
2. On admet que $B''(x) = -1 + \frac{2}{x}$, où B'' est la dérivée seconde de B sur l'intervalle $[1 ; 30]$. Justifier le tableau de variations ci-dessous de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1 ; 30]$.

x	1	2	30
$B'(x)$	7	$6 + 2 \ln 2$	$-22 + 2 \ln 30$

3. a) Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1 ; 30]$.
b) Donner une valeur approchée au millièmes de la valeur de α .
4. En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 30]$, et donner le tableau de variations de la fonction bénéfice B sur ce même intervalle.
5. Quel est le nombre de pièces à produire, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal ?
Quel est ce bénéfice maximal (arrondi au millier d'euros) ?

Corrigé page 92

Corrigés

EXERCICE 1

Partie A

Proposition 1

Il faut dans un premier temps définir des événements pour construire un arbre de probabilité qui favorisera les calculs et la compréhension.

On appelle B l'événement : « l'ordinateur a un défaut de batterie ».

On appelle D l'événement : « l'ordinateur a un défaut de disque dur ».

L'énoncé permet de donner les probabilités suivantes :

– Parmi les ordinateurs vendus, 5 % ont été retournés pour un défaut de batterie, donc

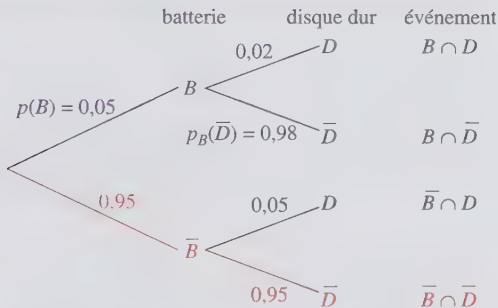
$$p(B) = 0,05.$$

– Parmi ceux-ci, 2 % ont aussi un défaut de disque dur, donc $p_B(D) = 0,02$.

Pour compléter l'arbre de probabilités, avec les données de l'énoncé, on utilise :

la somme des probabilités des branches qui partent d'un même nœud de l'arbre vaut 1.

Il est intéressant de donner l'événement obtenu en bout de branche pour faciliter les calculs des questions suivantes.



L'événement « l'ordinateur acheté n'a ni un problème de batterie, ni un problème de disque dur » est $\bar{B} \cap \bar{D}$.

Première méthode : avec une formule du cours

$$p(\bar{B} \cap \bar{D}) = p(\bar{B}) \times p_{\bar{B}}(\bar{D}) = 0,95 \times 0,95 = 0,9025.$$

Seconde méthode : utilisation de l'arbre pondéré

Il y a un chemin de l'arbre pondéré correspondant à l'événement $\bar{B} \cap \bar{D}$, représenté en rouge sur l'arbre pondéré.

La probabilité de cet événement s'obtient en multipliant les probabilités rencontrées sur ce chemin.

$$p(\bar{B} \cap \bar{D}) = 0,95 \times 0,95 = 0,9025.$$

La probabilité que l'ordinateur acheté n'ait ni un problème de batterie, ni de disque dur est égale à 0,9025, donc la proposition 1 est fausse.

Proposition 2

Les événements B et $\bar{B}$ représentent une partition de l'univers (les ordinateurs vendus) ; ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$p(D) = p(B \cap D) + p(\bar{B} \cap D) = p(B) \times p_B(D) + p(\bar{B}) \times p_{\bar{B}}(D) \\ = 0,05 \times 0,02 + 0,95 \times 0,05 = 0,0485$$

donc $p(D) = 0,0485$.

Autre méthode : utilisation de l'arbre pondéré

On peut aussi remarquer qu'il y a deux chemins de l'arbre qui permettent d'obtenir l'événement D : la probabilité de D s'obtient donc en ajoutant les probabilités des deux chemins qui conduisent à la réalisation de D :

$$p(D) = 0,05 \times 0,02 + 0,95 \times 0,05 = 0,0485.$$

La probabilité que l'ordinateur acheté ait un disque dur défectueux est égale à 0,0485 : la proposition 2 est donc vraie.

Proposition 3

Sachant que l'ordinateur a été retourné car son disque dur était défectueux, la probabilité que sa batterie le soit aussi est la probabilité conditionnelle $p_D(B)$.

$$p_D(B) = \frac{p(B \cap D)}{p(D)} = \frac{0,05 \times 0,02}{0,0485} \approx 0,0206 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

La probabilité que l'ordinateur ait un problème de batterie sachant qu'il avait un problème de disque dur est supérieure à 0,02 : la proposition 3 est donc fausse.

Partie B

Proposition 4

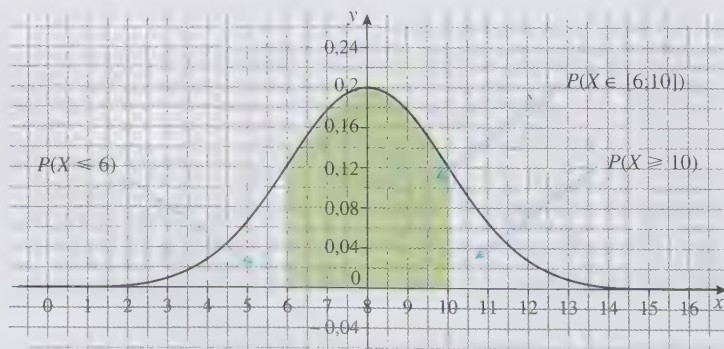
Première méthode : avec un résultat du cours

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$, d'espérance μ et d'écart-type σ alors :

$$P(X \in [\mu - \sigma ; \mu + \sigma]) \approx 0,68.$$

On a $\mu = 8$ et $\sigma = 2$, donc $[\mu - \sigma ; \mu + \sigma] = [6 ; 10]$ et ainsi $P(X \in [6 ; 10]) \approx 0,68$.

Cette probabilité correspond à l'aire sous la courbe coloriée sur le graphique ci-dessous :



La probabilité que l'ordinateur ait une autonomie supérieure ou égale à 10 heures est $P(X \geq 10)$.

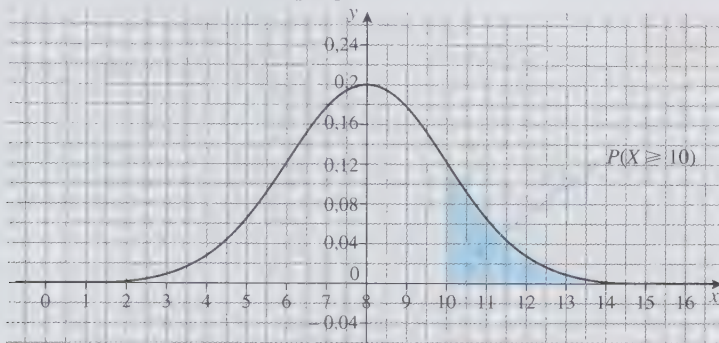
En utilisant les propriétés de symétrie de la courbe par rapport à la droite d'équation $x = \mu$ et sachant que l'aire totale sous la courbe est égale à 1, on a :

$$P(X \geq 10) = P(X \leq 6) \approx \frac{1 - 0,68}{2} = 0,16.$$

Seconde méthode : avec la calculatrice

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$, d'espérance μ et d'écart-type σ alors : $P(X \geq \mu) = 0,5$.

La probabilité que l'ordinateur ait une autonomie supérieure ou égale à 10 heures est $P(X \geq 10)$ qui est coloriée sur le graphique ci-dessous.



$$P(X \geq 10) = P(X \geq 8) - P(8 \leq X \leq 10) = 0,5 - P(8 \leq X \leq 10) \approx 0,159 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

$P(8 \leq X \leq 10)$ s'obtient à la calculatrice par la séquence de touches suivante :

- avec une calculatrice Casio par : **MENU**, choisir **STAT DIST NORM Ncd** (8, 10, 2, 8) ;
- avec une calculatrice TI par : **distrib** (**2nde** **var**), choisir **normalFRép** (8, 10, 8, 2).

La probabilité que l'ordinateur ait une autonomie supérieure ou égale à 10 heures est ainsi inférieure à 0,2 : la proposition 4 est donc vraie.

Partie C

Proposition 5

On connaît la proportion proposée par l'entreprise MICRO de clés fonctionnant correctement, soit $p = 0,98$. Pour vérifier l'affirmation de l'entreprise, on va calculer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % en utilisant la propriété suivante :

Si n est « assez grand », alors la variable aléatoire F_n qui, à tout échantillon de taille n , associe la fréquence, prend ses valeurs dans l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % suivant :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right].$$

En pratique, on considère que n est « assez grand » sous les conditions : $n \geq 30$; $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

$n = 1\,000 \geq 30$, $np = 980 \geq 5$ et $n(1-p) = 20 \geq 5$, donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$I = \left[0,98 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,98(1-0,98)}}{\sqrt{1\,000}} ; 0,98 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,98(1-0,98)}}{\sqrt{1\,000}} \right] \approx [0,972 ; 0,988].$$

Dans l'échantillon choisi, 50 clés sont défectueuses, donc 950 fonctionnent correctement, soit une fréquence de clés fonctionnant correctement : $f = \frac{950}{1\,000} = 0,95$.

0,95 $\notin$ I : il faut donc remettre en cause la communication de l'entreprise et la proposition 5 est fausse.

Remarque : on aurait aussi pu étudier la proportion de clés défectueuses ; les calculs auraient été différents mais pas la conclusion.

EXERCICE 2

1. a)

Test $C < 400$	xxx	vrai $300 < 400$	vrai $326 < 400$	vrai	vrai	vrai	faux
Valeur de C	300	326 $300 - 300 \times 0,08 + 50$	350 $326 - 326 \times 0,08 + 50$	372	392	411	
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	

L'algorithme s'arrête dès que la valeur de C dépasse 400 et que l'instruction « Tant que... » n'est plus vérifiée.

Remarque : que le calcul soit fait en gardant les arrondis précédents ou pas ne change pas les résultats arrondis à l'entier le plus proche.

1. L'algorithme affiche la valeur $n = 5$ en sortie : cela signifie que le nombre de ruches dépassera les 400 pour la première fois 5 ans après l'installation des premières ruches, soit en 2019 (si bien sûr ce modèle est respecté).

2. a)

Diminuer une quantité de 8 %, c'est multiplier cette quantité par $1 - \frac{8}{100} = 0,92$.

Le nombre de ruches l'année $(2014 + n)$ est C_n . Chaque année, 8 % des colonies sont perdues, donc il en reste 92 %, soit $0,92 \times C_n$. De plus, l'apiculteur installe 50 nouvelles ruches chaque année ; ainsi, l'année $(2014 + n + 1)$, le nombre de ruches est donné par :

$$C_{n+1} = 0,92 C_n + 50, \text{ pour tout nombre entier naturel } n.$$

On a obtenu l'expression d'une suite arithmético-géométrique.

1. On veut montrer que la suite (V_n) est géométrique. Pour cela, on exprime V_{n+1} en fonction de V_n .

Si chaque terme de la suite est obtenu en multipliant le terme précédent par un nombre constant, alors la suite est géométrique, de raison le nombre trouvé.

Dans le cas d'une suite arithmético-géométrique, la raison de la suite introduite est toujours le nombre en facteur devant C_n dans la relation de récurrence : $C_{n+1} = 0,92 C_n + 50$, donc il faudra démontrer que la raison est 0,92.

$$\begin{aligned}
 V_{n+1} &= 625 - C_{n+1} = 625 - 0,92 C_n - 50 \\
 &= -0,92 C_n + 575 \\
 &= 0,92 \left(-C_n + \frac{57,5}{0,92} \right) \quad \text{on factorise par 0,92 pour faire apparaître } V_n \\
 &= 0,92 (-C_n + 625) = 0,92 V_n.
 \end{aligned}$$

Autre méthode de calcul

$$\begin{aligned}
 V_{n+1} &= 625 - C_{n+1} = 625 - 0,92 C_n - 50 \\
 &= -0,92 C_n + 575 \quad \text{on utilise la relation donnée } V_n = 625 - C_n, \\
 &= -0,92 (625 - V_n) + 575 \quad \text{donc } C_n = 625 - V_n \\
 &= 0,92 V_n + 575 - 575 = 0,92 V_n
 \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n , on a : $V_{n+1} = 0,92 V_n$.

c) $V_{n+1} = 0,92 V_n$, donc la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,92$.

Le premier terme est $V_0 = 625 - C_0$, soit $V_0 = 325$.

On exprime ensuite V_n en fonction de n en utilisant la relation suivante :

Pour tout entier naturel n : $V_n = V_0 \times q^n$, d'où : $V_n = 325 \times 0,92^n$.

$$V_n = 625 - C_n, \text{ donc } C_n = 625 - V_n.$$

Pour tout entier naturel n : $C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$.

■ Pour déterminer le nombre de ruches qu'il peut espérer posséder en juillet 2024, on calcule C_{10} .

$$C_{10} = 625 - 325 \times 0,92^{10}, \text{ d'où } C_{10} \approx 484 \text{ arrondi à l'entier le plus proche.}$$

L'apiculteur peut espérer posséder 484 ruches en juillet 2024.

■ Pour doubler le nombre initial de colonies, il faut en avoir 600. Il suffit donc, pour obtenir l'année désirée, de remplacer l'instruction « Tant que $C < 400$ faire » par l'instruction « Tant que $C < 600$ faire ».

■ On cherche la plus petite valeur de n telle que $C_n > 600$, soit $625 - 325 \times 0,92^n > 600$.

$$625 - 325 \times 0,92^n > 600 \Leftrightarrow -325 \times 0,92^n > -25$$

$$\Leftrightarrow 0,92^n < \frac{25}{325} \quad \text{et} \quad \frac{25}{325} = \frac{1}{13}$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,92^n) < \ln\left(\frac{1}{13}\right) \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,92) < \ln\left(\frac{1}{13}\right) \quad \text{pour } a > 0 \text{ et } n \text{ entier, } \ln(a^n) = n \ln(a)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{1}{13}\right)}{\ln(0,92)} \quad \text{car } \ln(0,92) < 0$$

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{13}\right)}{\ln(0,92)} \approx 30,8; \text{ c'est donc au bout de 31 ans, soit en 2049 que le nombre de ruches}$$

aura doublé.

Avec la calculatrice pour une vérification

On fait afficher le tableau de valeurs de la calculatrice pour donner les termes successifs de la suite (C_n) :

n	$u(n)$	
27	590.79	
28	593.53	
29	596.04	
30	598.36	
31	600.49	
32	602.45	
33	604.26	

$n=33$

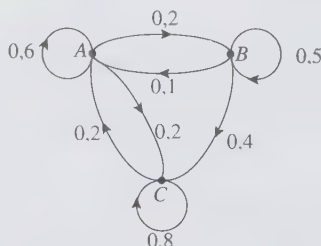
Le tableau permet de vérifier que $C_{30} < 600$ et $C_{31} > 600$. C'est donc pour $n = 31$.

Méthode de programmation de la suite (C_n) :

- Avec une calculatrice TI en mode Suite :
 - Appuyer sur la touche $f(x)$ pour entrer le terme général :
 - La plus petite valeur de n dans **nMin** est 1.
 - Entrer l'expression de C_n ou u_n (comme pour une fonction) en fonction de C_{n-1} ou u_{n-1} .
 - Comme la suite (C_n) est définie par une relation de récurrence, entrer le premier terme dans **u(nMin)**.
 - Afficher le tableau de valeurs de la même façon que pour les fonctions, mais la première valeur de n et le pas doivent être des entiers.
- Avec une calculatrice Casio, choisir le menu suites avec **MENU** RECUR, puis **TYPE** pour le type de suite :
 - **F2** si on a une relation entre a_{n+1} et a_n .
 - Entrer la suite comme une fonction, puis les éléments pour la définir avec **SET** :
 - La première valeur de n dans **Start**.
 - La dernière valeur de n dans **End**.
 - L'expression de a_n (comme pour une fonction) :
 - Comme la suite (a_n) est définie par une relation de récurrence, entrer le premier terme dans **a₀** ou **a₁**.
 - Afficher le tableau de valeurs avec **TABLE**.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

1. Le graphe probabiliste associé à la situation est le suivant :



2. On considère a_n , b_n et c_n qui correspondent au nombre de personnes connectées la minute n aux sites A, B et C. Le nombre de personnes connectées aux sites est représenté par la matrice ligne $N_n = (a_n \ b_n \ c_n)$.

On a, d'après le graphe probabiliste, les relations suivantes donnant l'état à la minute $(n+1)$:

$$N_{n+1} = (a_{n+1} \quad b_{n+1} \quad c_{n+1}) \\ = (0,6a_n + 0,1b_n + 0,2c_n \quad 0,2a_n + 0,5b_n \quad 0,2a_n + 0,4b_n + 0,8c_n)$$

La matrice de transition associée à ce graphe, en respectant l'ordre des sommets A, B et C, est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

$$3. N_2 = N_0 \times M^2 = (100 \ 0 \ 0) \times \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix}, \text{ donc } N_2 = (42 \ 22 \ 36).$$

Au bout de 2 minutes, 42 internautes sont connectés sur le site A, 22 sur le site B et 36 sur le site C.

$$4. N_{20} = N_0 \times M^{20} = (100 \ 0 \ 0) \times \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix},$$

donc $N_{20} = (31,25 \ 12,5 \ 56,25)$.

Si l'on considère que l'état stable est atteint, on peut conjecturer qu'il est égal à N_{20} .

En effet, on vérifie que $N_{20} \times M = N_{20}$:

$$(31,25 \ 12,5 \ 56,25) \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} \\ = (31,25 \times 0,6 + 12,5 \times 0,1 + 56,25 \times 0,2 \quad 31,25 \times 0,2 + 12,5 \times 0,5 + 56,25 \times 0 \quad 31,25 \times 0,2 + 12,5 \times 0,4 + 56,25 \times 0,8) \\ = (31,25 \ 12,5 \ 56,25)$$

L'état stable est donc bien $(31,25 \ 12,5 \ 56,25)$.

Cela signifie qu'à terme (au-delà de 20 minutes), le nombre d'internautes connectés sera de 31,25 pour le site A, de 12,5 pour le site B et de 56,25 pour le site C.

On peut arrondir les résultats à respectivement 31, 13 et 56 pour les sites A, B et C puisqu'il est indiqué un nombre d'internautes dans l'énoncé.

5. a) La probabilité qu'un internaute connecté sur le site C utilise le lien, la minute suivante, vers le site A est 0,2.

La probabilité que le site A soit infecté est donc de 0,2.

Autre méthode

On considère que l'état initial est $N_0 = (0 \ 0 \ 1)$ puisque l'internaute est sur le site C.

$$N_1 = N_0 \times M = (0 \ 0 \ 1) \times \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}, \text{ donc } N_1 = (0,2 \ 0 \ 0,8).$$

La probabilité que l'internaute soit sur le site A est donnée par $a_1 = 0,2$.

b) Pour que les trois sites soient infectés, il faut que l'internaute soit sur le site A à la minute 1, puis aille sur le site B à la minute 2. C'est la seule possibilité car il n'y a pas de liaison directe entre C et B.

On multiplie les probabilités de passage de C vers A et de A vers B, soit : $0,2 \times 0,2 = 0,4$.

La probabilité que les trois sites soient infectés au bout de 2 minutes est de 0,04.

Autre méthode

On peut retrouver ce résultat en effectuant le calcul suivant :

$$N_2 = N_0 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix}, \text{ donc } N_2 = \begin{pmatrix} 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix}.$$

N_2 donne la probabilité que l'internaute soit sur un des trois sites au bout de 2 minutes. Il n'y a qu'un seul chemin possible pour que les trois sites soient infectés, donc **la probabilité que le site B soit infecté, et par suite les trois sites, au bout de 2 minutes est donc $b_2 = 0,04$.**

EXERCICE 3

Partie A

1. $f(-1) = -2(-1+2)e^{(-1)} = -2e \approx -5,44$ à 10^{-2} près.

2. La fonction f est un produit de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$, on utilise les formules suivantes :

La dérivée d'un produit de deux fonctions u et v est $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.

On pose $u(x) = -2(x+2) = -2x-4$, d'où $u'(x) = -2$.

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction e^u est dérivable sur I et sa dérivée est :

$$(e^u)' = u' \times e^u.$$

On pose $v(x) = e^{-x}$, donc $v'(x) = -e^{-x}$.

$$f'(x) = -2e^{-x} + (-2(x+2) \times (-e^{-x})) = e^{-x}(-2 + (2x+4)) = e^{-x}(2x+2) = 2(x+1)e^{-x}.$$

Dans un calcul de dérivée avec une exponentielle, il faut penser à factoriser l'expression par l'exponentielle : cela simplifie l'écriture et permet une étude du signe beaucoup plus simple, car une exponentielle est toujours positive.

On a alors, pour tout réel x , $f'(x) = 2(x+1)e^{-x}$.

3.

Pour étudier les variations d'une fonction :

- on détermine le signe de la dérivée ;
- on en déduit les variations de la fonction à partir de la règle liant le signe de f' et les variations de f .

Pour tout x réel, $2e^{-x} > 0$, donc le signe de la dérivée dépend de celui de $(x+1)$.

$x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$, donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1$ et $f'(-1) = 0$; ainsi, **la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$.**

$x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$, donc $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$ et $f'(-1) = 0$; ainsi, **la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; -1]$.**

$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$, donc $f'(-1) = 0$ et la fonction f admet un minimum en $x = -1$.

Partie B

• D'après la question **A-1.**, $f(-1) \approx -5,44$.

La courbe C_3 est celle de la fonction f .

Autre méthode

D'après la question **A-3.**, la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; -1]$ et croissante sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$ donc la seule courbe correspondant à ces variations est la courbe C_3 .

La courbe C_3 est celle de la fonction f .

• D'après la question **A-3.**, la fonction f' est négative sur $]-\infty ; -1]$, s'annule en (-1) et est positive sur $[-1 ; +\infty[$. La courbe de la dérivée de f doit être située en dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty ; -1]$ et au-dessus sur $[-1 ; +\infty[$. La seule courbe correspondant à ces conditions est la courbe C_1 .

La courbe C_1 est celle de la fonction dérivée de f .

• Par élimination, on en déduit que la courbe de la dérivée seconde de f est la courbe C_2 .

• Pour étudier la convexité de la fonction f , on utilise les propriétés suivantes :

Méthode 1

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , f'' sa dérivée seconde :

Propriété : f est convexe sur I si, et seulement si, f'' est positive sur I .

La courbe C_2 est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et en dessous sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, donc la fonction dérivée seconde de f est positive sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et négative sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

La fonction f est convexe sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et concave sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Méthode 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , f' sa dérivée :

Propriété : f est convexe sur I si, et seulement si, f' est croissante sur I .

D'après le graphique de la courbe C_1 , la fonction dérivée f' est croissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

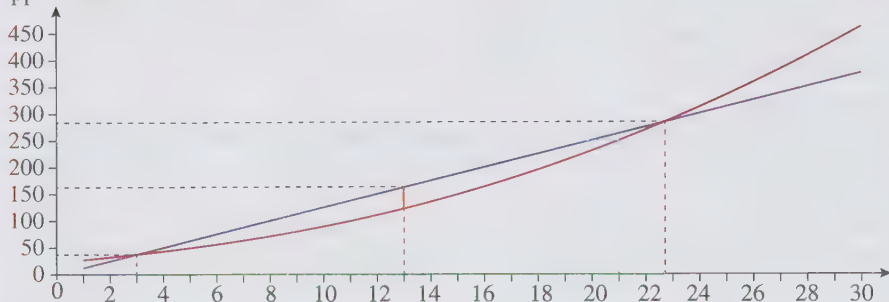
La fonction f est convexe sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et concave sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Remarque : le point de coordonnées $(0 ; -4)$ où la courbe change de convexité est le point d'inflexion de la courbe de la fonction f . Pour la courbe C_3 , on note qu'elle est au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et en dessous sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

EXERCICE 4

Partie A

Pour répondre aux questions suivantes, on s'aide du graphique ci-dessous, avec les approximations dues à la lecture :



1. D'après le graphique (en bleu clair), $C(21) \approx 250$, donc **le coût de production de 21 000 pièces est d'environ 250 000 €.**

2. L'entreprise réalise un bénéfice lorsque la recette est supérieure au coût, donc lorsque la courbe de la fonction R est au-dessus de celle de la fonction C (les solutions sont sur l'axe des abscisses et la plage de bénéfice est représentée en vert).

L'entreprise réalise un bénéfice pour une production comprise entre 3 000 et 22 750 pièces.

3. Le bénéfice est maximal lorsque, sur la plage de bénéfice, l'écart entre les deux courbes est le plus important (matérialisé en orange sur le graphique).

Le bénéfice est maximal pour une production d'environ 13 000 pièces.

Partie B

1. La fonction B est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables sur l'intervalle $[1 ; 30]$.

Posons $B(x) = -0,5x^2 + 6x - 20 + g(x)$, avec $g(x) = 2x \ln x$, pour x appartenant à l'intervalle $[1 ; 30]$.

$g = u \times v$, donc $g' = u' \times v + u \times v'$, avec $u(x) = 2x$; $u'(x) = 2$ et $v(x) = \ln x$; $v'(x) = \frac{1}{x}$.
C'est-à-dire, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1 ; 30]$:

$$g'(x) = 2 \times \ln x + 2x \times \frac{1}{x} = 2 \ln x + 2.$$

On termine le calcul de $B'(x)$:

$$B'(x) = -0,5 \times 2x + 6 + 2 \times \ln x + 2x \times \frac{1}{x} = -x + 6 + 2 \ln x + 2,$$

$$\text{donc } B'(x) = -x + 8 + 2 \ln x.$$

2.

La fonction B' est dérivable sur $[1 ; 30]$ comme somme de fonctions dérivables sur l'intervalle $[1 ; 30]$.

$$B''(x) = -1 + 2 \times \frac{1}{x} = -1 + \frac{2}{x}$$

$$B''(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$B''(x) > 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{2}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} > 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} < 1 \text{ (par inverse)} \Leftrightarrow x < 2$$

$$B''(x) < 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{2}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} < 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} > 1 \text{ (par inverse)} \Leftrightarrow x > 2$$

Autre méthode pour l'étude du signe de la dérivée seconde

$$B''(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{-x + 2}{x}$$

x	1	2	30
Signe de $(-x + 2)$	+	0	-
Signe de (x)	+		+
Signe de $B''(x)$	+	0	-

Sur $[1 ; 2[$, $B''(x) > 0$ et $B''(2) = 0$, donc la fonction B' est strictement croissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

Sur $]2 ; 30]$, $B''(x) < 0$ et $B''(2) = 0$, donc la fonction B' est strictement décroissante sur l'intervalle $[2 ; 30]$.

$$B'(1) = -1 + 8 + 2 \ln 1 = 7; B'(2) = -2 + 8 + 2 \ln 2 = 6 + 2 \ln 2;$$

$$B'(30) = -30 + 8 + 2 \ln 30 = -22 + 2 \ln 30.$$

On en déduit le tableau de variations de la fonction B' sur l'intervalle $[1 ; 30]$.

x	1	2	30
$B''(x)$	+	0	-
$B'(x)$	7	$6 + 2 \ln 2$	$-22 + 2 \ln 30$

3. a) D'après le tableau de variations, le minimum de la fonction B' sur l'intervalle $[1 ; 2]$ est 7, donc l'équation $B'(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

D'après le tableau de variations de la fonction B' , elle est continue et strictement décroissante sur $[2 ; 30]$.

De plus, $B'(2) = 6 + 2 \ln 2 > 0$ et $B'(30) = -22 + 2 \ln 30 \approx -15,2 < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire, l'équation $B'(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[2 ; 30]$.

On peut aussi compléter le tableau donné et conclure directement :

x	1	2	α	30
$B'(x)$	7	$6 + 2 \ln 2$	0	$-22 + 2 \ln 30$

b) Par balayages successifs à la calculatrice, on a :

$$B'(13) > 0 \text{ et } B'(14) < 0,$$

$$\text{donc : } \alpha \in]13; 14[;$$

$$B'(13,1) > 0 \text{ et } B'(13,2) < 0,$$

$$\text{donc : } \alpha \in]13,1; 13,2[;$$

$$B'(13,15) > 0 \text{ et } B'(13,16) < 0,$$

$$\text{donc : } \alpha \in]13,15; 13,16[;$$

$$B'(13,153) > 0 \text{ et } B'(13,154) < 0,$$

$$\text{donc : } \alpha \in]13,153; 13,154[;$$

$$B'(13,1533) \approx 0,0005 > 0 \text{ et } B'(13,1534) \approx -0,00004 < 0,$$

$$\text{donc } \alpha \in]13,1533; 13,1534[.$$

Une valeur approchée à 0,001 près de α est donc 13,153.

Pour obtenir une valeur approchée, la plus précise possible, à 0,001 près, on doit avoir un encadrement à 0,0001 près.

En effet, le nombre a est une valeur approchée du nombre A à 0,001 près si :

$$a - 0,001 \leq A \leq a + 0,001.$$

Dans certains cas, on peut demander une **valeur approchée par défaut** (13,153) ou une **valeur approchée par excès** (13,154).

4. D'après la question précédente, on a le tableau de variations de B' , que l'on peut compléter avec son signe :

x	1	2	α	30
$B'(x)$	7	$6 + 2 \ln 2$	0	$-22 + 2 \ln 30$
Signe de $B'(x)$		+	0	-

Pour $1 \leq x < \alpha$, $B'(x) > 0$; $B'(\alpha) = 0$;

pour $\alpha < x \leq 30$, $B'(x) < 0$.

On en déduit le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[1; 30]$:

x	1	α	30
Signe de $B'(x)$	+	0	-
$B(x)$	$B(1)$	$B(\alpha)$	$B(30)$

On complète le tableau avec les valeurs prises par B en 1 et 3.

$$B(1) = -0,5 \times 1^2 + 6 \times 1 - 20 + 2 \times 1 \times \ln 1$$

$$= -14,5 ;$$

$$B(30) = -0,5 \times 30^2 + 6 \times 30 - 20 + 2 \times 30 \times \ln 30$$

$$= -290 + 60 \ln 30.$$

5.

Attention aux unités dans cette question !

La fonction B admet un maximum en α soit, d'après la question 3. b), l'entreprise réalise un bénéfice maximal pour une production égale à 13 153 pièces à l'unité près. Le bénéfice maximal est $B(\alpha)$. On a $B(13,153) \approx 40,2$: le bénéfice maximal, arrondi au millier d'euros, est de donc 40 000 euros.

On peut remarquer que $B(13,154) \approx 40,2$, donc l'arrondi reste valable.

Pondichéry

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 30 min.
- Exercice 2 : 45 min.
- Spécialité exercice 2 : 45 min.
- Exercice 3 : 40 min.
- Exercice 4 : 55 min.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 Fonctions – Exponentielle, Convexité, Point d'inflexion, Calcul intégral, Primitives (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^{-x^2}$ est une primitive de la fonction f définie par :

A : $f(x) = -xe^{-x^2}$

B : $f(x) = -2xe^{-x^2}$

C : $f(x) = xe^{-x^2}$

D : $f(x) = e^{-2x}$

2. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (7x - 23)e^x$.

L'équation $h(x) = 0$

A : a pour solution 2,718

B : a une solution sur $[0 ; +\infty[$

C : a deux solutions sur $\mathbb{R}$

D : a une solution sur $] -\infty ; 0]$

3. On pose $I = \int_0^1 3e^{3x} dx$.

On peut affirmer que :

A : $I = e^3 - 1$

B : $I = 3e^3 - 3$

C : $I = 19,1$

D : $I = 1 - e^3$

4. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 9x$ est convexe sur l'intervalle :

A : $] -\infty ; +\infty[$

B : $[0 ; +\infty[$

C : $] -\infty ; 0]$

D : $[-3 ; 3]$

Corrigé page 102

EXERCICE 2 Probabilités – Probabilités conditionnelles, Loi binomiale (5 points)

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi, ainsi que sur les rythmes scolaires.

L'enquête révèle que 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et, parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

On choisit un élève au hasard dans le lycée.

On considère les événements suivants :

L : l'élève choisi est favorable à une pause plus longue le midi ;

C : l'élève choisi souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2. Calculer $P(L \cap C)$, la probabilité de l'événement $L \cap C$.

3. Montrer que $P(C) = 0,5675$.

4. Calculer $P_C(L)$, la probabilité de l'événement L sachant l'événement C réalisé.

En donner une valeur arrondie à 10^{-4} .

5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on considère que X suit une loi binomiale.

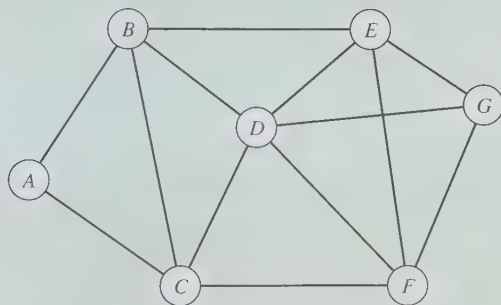
- a) Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
- b) Calculer la probabilité qu'aucun des quatre élèves interrogés ne soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. En donner une valeur arrondie à 10^{-4} .
- c) Calculer la probabilité qu'exactement deux élèves soient favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

Corrigé page 103

SPECIALITÉ EXERCICE 2 Matrices – Graphe pondéré (5 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

On considère le graphe Γ ci-dessous :



Partie A

1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? Justifier la réponse. Si oui, donner une telle chaîne.
2. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? Justifier la réponse. Si oui, donner un tel cycle.
3. Donner la matrice M associée au graphe Γ . Les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique : A, B, C, D, E, F, G.

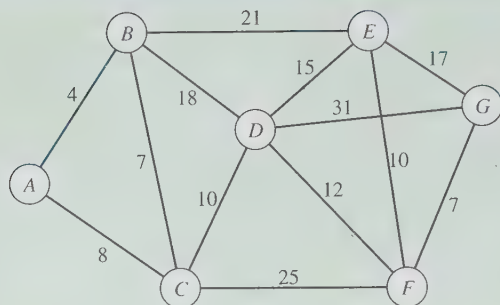
Partie B

Une région est munie d'un réseau de trains, représenté par le graphe Γ ci-après.

Les stations sont symbolisées par les sommets A, B, C, D, E, F et G.

Chaque arête représente une ligne reliant deux gares.

Les temps de parcours (correspondance comprise) en minutes entre chaque sommet ont été rajoutés sur le graphe.



1. Déterminer le plus court chemin, en minutes, reliant la gare B à la gare G . Justifier la réponse grâce à un algorithme.
2. Quelle est la longueur en minutes de ce chemin ?

Corrige page 105

EXERCICE 3 Suites Algorithmique (5 points)

Le 1^{er} janvier 2000, un client a placé 3 000 € à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %. On note C_n le capital du client au 1^{er} janvier de l'année 2000 + n , où n est un entier naturel.

1. Calculer C_1 et C_2 . Arrondir les résultats au centime d'euro.
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n . En déduire que, pour tout nombre entier naturel n , on a la relation : $C_n = 3\,000 \times 1,025^n$.

3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée

Saisir un nombre S supérieur à 3 000

Traitement

Affecter à n la valeur 0. {Initialisation}

Affecter à U la valeur 3 000 {Initialisation}

Tant que $U \leq S$

n prend la valeur $n + 1$

U prend la valeur $U \times 1,025$

Fin tant que

Sortie

Afficher le nombre $2\,000 + n$

- 41) Pour la valeur $S = 3\,300$ saisie, recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à l'unité.

Valeur de n	0	1		
Valeur de U	3 000			
Condition $U \leq S$	vrai			

- 42) En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de S saisie est 3 300.
- 43) Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme quand on saisit un nombre S supérieur à 3 000.
- 44) Au 1^{er} janvier 2013, le client avait besoin d'une somme de 5 000 €. Montrer que le capital de son placement n'est pas suffisant à cette date.
- 45) Déterminer, en détaillant la méthode, à partir du 1^{er} janvier de quelle année le client pourrait avoir son capital initial multiplié par 10.

Corrigé page 107

EXERCICE 4 Fonctions – Exponentielle, Calcul intégral, Primitives, Application à l'économie (6 points)

La *partie C* peut être traitée indépendamment des *parties A et B*.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par $f(x) = 1 - (x + 1)e^{-x}$.

- Montrer que $f'(x) = xe^{-x}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .
- Démontrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0 ; 6]$. Déterminer une valeur arrondie de α à 0,01.
- On admet que la fonction F définie sur $[0 ; 6]$ par $F(x) = x + (x + 2)e^{-x}$ est une primitive de f sur $[0 ; 6]$. Donner la valeur exacte, puis une valeur arrondie à 10^{-3} de $I = \int_0^6 f(x) dx$.

Partie B

Une entreprise lance la production de batteries pour véhicules électriques.

Une étude a modélisé le rythme de la production journalière sur les six premiers mois à l'aide de la fonction f définie dans la *partie A* pour x compris entre 0 et 6. x représente le nombre de mois (de 30 jours) depuis le lancement du produit. $f(x)$ représente la production journalière de batteries en milliers.

1. Exprimer en mois, puis en jours, le moment où la production atteindra 0,5 millier, soit 500 unités.
2. Déterminer une valeur arrondie à 10^{-3} de la valeur moyenne, exprimée en milliers, de la production sur les six premiers mois.

Partie C

Il est prévu que l'autonomie permise par ce type de batteries, sous certaines conditions de conduite, soit de 200 km.

Sur un parcours joignant une ville située à 160 km, on suppose que l'autonomie, exprimée en km, permise par ces batteries suit une loi normale d'espérance $\mu = 200$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de ne pas atteindre cette ville ?
2. La probabilité de pouvoir faire l'aller-retour jusqu'à cette ville sans recharge des batteries est-elle supérieure à 0,01 ? Justifier votre réponse.

Corrigé page 108

Corrigés

EXERCICE 1

1. Réponse B.

F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, si et seulement si, pour tout réel x : $F'(x) = f(x)$.

Or, F est de la forme e^u , avec $u(x) = -x^2$ et $u'(x) = -2x$, donc, pour tout réel x , $F'(x) = -2xe^{-x^2}$, car $(e^u)' = u'e^u$.

2. Réponse B.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow (7x - 23)e^x = 0.$$

Un produit de facteurs est nul, si et seulement si, un de ses facteurs est nul.

$$\text{Donc } h(x) = 0 \Leftrightarrow (7x - 23) = 0 \text{ ou } e^x = 0.$$

$$\text{Or, pour tout réel } x, e^x > 0, \text{ donc } h(x) = 0 \Leftrightarrow (7x - 23) = 0 \Leftrightarrow 7x = 23 \Leftrightarrow x = \frac{23}{7}.$$

$\frac{23}{7} \approx 2,718$: l'équation n'admet donc qu'une seule solution appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$

3. Réponse A.

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur $[a; b]$.

Donc $I = \int_0^1 3e^{3x}dx = F(1) - F(0)$, où F est une primitive de f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 3e^{3x}$.

Une primitive de $x \mapsto e^{ax+b}$ est $x \mapsto \frac{e^{ax+b}}{a}$, donc une primitive de $x \mapsto 3 \times e^{3x}$ est

$$x \mapsto 3 \times \frac{e^{3x}}{3} = e^{3x}.$$

$$\text{Ainsi, } I = \int_0^1 3e^{3x}dx = e^{3 \times 1} - e^{3 \times 0} = e^3 - e^0 = e^3 - 1.$$

4. Réponse B.

Première méthode :

Une fonction g , deux fois dérivable, est convexe (resp. concave) sur un intervalle I , si et seulement si, g'' est positive (resp. négative) sur I .

Pour tout réel x , $g(x) = x^3 - 9x$, donc $g'(x) = 3x^2 - 9$ et $g''(x) = 6x$.

Donc $g''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$, $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $g''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

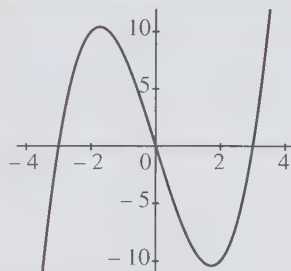
Ainsi, g est convexe sur $[0; +\infty[$ et g concave sur $]-\infty; 0]$.

Seconde méthode :

On utilise la définition « graphique » de la convexité.

g est convexe sur un intervalle I lorsque sa courbe est située au-dessus de chacune de ses tangentes.

On trace alors la courbe de g sur l'écran de la calculatrice et on élimine aisément les réponses A, C et D.



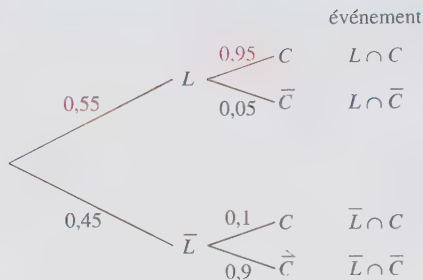
EXERCICE 2

1. L'enquête révèle que 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue à midi : donc $P(L) = 0,55$. Parmi ces élèves, 95 % sont pour une répartition plus étalée des cours : donc $P_L(C) = 0,95$.

Parmi ceux qui ne veulent pas d'une pause plus longue le midi, 10 % sont pour une répartition plus étalée des cours : donc $P_{\bar{L}}(C) = 0,1$.

On complète les données de l'énoncé en utilisant : la somme des probabilités des branches qui partent d'un même nœud de l'arbre vaut 1.

L'arbre pondéré représentant la situation est le suivant :



2. Première méthode : avec une formule du cours

$$P(L \cap C) = P(L) \times P_L(C) = 0,55 \times 0,95 = \mathbf{0,5225}.$$

Deuxième méthode : utilisation de l'arbre pondéré

Il y a un chemin de l'arbre pondéré correspondant à l'événement $L \cap C$, représenté en **rouge** sur l'arbre pondéré.

La probabilité de cet événement s'obtient en multipliant les probabilités rencontrées sur ce chemin.

$$P(L \cap C) = 0,55 \times 0,95 = 0,5225.$$

3. Les événements L et $\bar{L}$ représentent une partition de l'univers ; ainsi, d'après **la formule des probabilités totales**, on a :

$$P(C) = P(L \cap C) + P(\bar{L} \cap C)$$

$$P(C) = P(L) \times P_L(C) + P(\bar{L}) \times P_{\bar{L}}(C) = 0,5225 + 0,45 \times 0,1, \text{ donc } P(C) = \mathbf{0,5675}.$$

$$4. P_C(L) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{0,5225}{0,5675} = \frac{209}{227}, \text{ donc } P_C(L) \approx \mathbf{0,9207} \text{ arrondi à } 10^{-4} \text{ près.}$$

5. a) Les paramètres de la loi binomiale sont :

$n = 4$, c'est-à-dire le nombre d'élèves interrogés ;

$p = P(C) = 0,5675$, la probabilité du succès, à savoir la probabilité d'être favorable à une répartition plus étalée.

b)

Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n; p)$, où n est le nombre d'épreuves de Bernoulli et p la probabilité d'un succès, alors :

pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, on a : $P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$.

La probabilité qu'aucun des quatre élèves ne soit favorable à une répartition des cours plus étalée se traduit par :

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \times 0,5675^0 \times (1 - 0,5675)^4 = 1 \times 1 \times 0,4325^4 \approx \mathbf{0,0350} \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

c) La probabilité qu'exactement deux des quatre élèves soient favorables à une répartition des cours plus étalée se traduit par :

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0,5675^2 \times (1 - 0,5675)^2 = 6 \times 0,5675^2 \times 0,4325^2 \approx \mathbf{0,3615} \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

Partie A

1. Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne, si et seulement si, il possède zéro ou deux sommets seulement de degré impair.

Tout d'abord, le graphe est **connexe** car la chaîne $A-B-E-G-F-D-C$ passe par tous les sommets du graphe ce qui prouve que tous les sommets sont reliés entre eux par une chaîne. Le tableau des degrés est le suivant :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	2	4	4	5	4	4	3

Il existe deux sommets D et G et deux seulement de degré impair ; il existe donc une chaîne eulérienne reliant ces deux sommets.

Par exemple, $G-D-C-A-B-C-F-D-E-G-F-E-B-D$.

2. Un graphe connexe admet un cycle eulérien, si et seulement si, tous ses sommets sont de degré pair.

Le graphe a deux sommets G et D de degré impair donc le graphe n'admet pas de cycle eulérien.

3. Le coefficient a_{ij} de la matrice d'adjacence du graphe est le nombre d'arêtes qui relient le sommet i au sommet j .

Pour limiter les possibilités d'erreurs, penser aux éléments suivants :

- le graphe est non orienté : la matrice M est donc symétrique ;
- la somme de ses coefficients est égale au double du nombre d'arêtes du graphe.

$$\begin{array}{l}
 A \rightarrow \\
 B \rightarrow \\
 C \rightarrow \\
 D \rightarrow \\
 E \rightarrow \\
 F \rightarrow \\
 G \rightarrow
 \end{array}
 M = \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
 \end{pmatrix}$$

Partie B

1. Rechercher le plus court chemin sur un graphe pondéré connexe revient à rechercher une plus courte chaîne à l'aide de l'algorithme de Dijkstra entre deux sommets (celui de départ et celui d'arrivée) en remplissant un tableau au fur et à mesure.

Dans le cadre du sujet proposé, B est le sommet de départ et G celui d'arrivée.

Étape 1 (première ligne)

- B est le sommet de départ, donc fixé avec la marque $0(B)$.
- A est à 4 minutes de B , donc marqué $4(B)$, et C à 7 minutes de B , donc marqué $7(B)$; D est à 18 minutes de B , donc marqué $18(B)$ et E est 21 minutes de B donc marqué $21(B)$; les autres sommets ne sont pas adjacents à B donc marqués ∞ .

Étape	B	A	C	D	E	F	G	Sommet fixé
1	$0(B)$	$4(B)$	$7(B)$	$18(B)$	$21(B)$	∞	∞	B

Étape 2 (deuxième ligne)

- A est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet A avec la marque $4(B)$.
- C est à $4 + 8$, soit 12 minutes de B en passant par A , donc il reste marqué $7(B)$, car la marque précédente était inférieure à $12(A)$.
- D, E, F et G ne sont pas adjacents à A : ils restent donc marqués comme précédemment.

Étape	B	A	C	D	E	F	G	Sommet fixé
1	$0(B)$	$4(B)$	$7(B)$	$18(B)$	$21(B)$	∞	∞	B
2		$4(B)$	$7(B)$	$18(B)$	$21(B)$	∞	∞	A

On applique la même méthode pour fixer les sommets suivants en complétant le tableau après chaque étape.

Étape 3 (troisième ligne)

- C est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet C avec la marque $7(B)$.
- D est à $7 + 10$, soit 17 minutes de B en passant par C , donc il est marqué $17(C)$, la marque $17(C)$ étant inférieure à la marque $18(B)$.
- F est à $7 + 25$, soit 32 minutes de B en passant par C , donc il est marqué $32(C)$.
- E et G ne sont pas adjacents à C : ils restent donc marqués comme précédemment.

Étape 4 (quatrième ligne)

- D est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet D avec la marque $17(C)$.
- E est à $17 + 15$, soit 32 minutes de B en passant par D , donc il reste marqué $21(B)$, car la marque précédente est inférieure à $32(D)$.
- F est à $17 + 12$, soit 29 minutes de B en passant par D , donc il est marqué $29(D)$.
- G est à $17 + 31$, soit 48 minutes de B en passant par D , donc il est marqué $48(D)$.

Étape 5 (cinquième ligne)

- E est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet E avec la marque $21(B)$.
- F est à $21 + 10$, soit 31 minutes de B en passant par E , donc il reste marqué $29(D)$, la marque $31(E)$ étant supérieure au $29(D)$ précédent.
- G est à $21 + 17$, soit 38 minutes de B en passant par E , donc il est marqué $38(E)$, la marque étant inférieure au $48(D)$ précédent.

Étape 6 (sixième ligne)

- F est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet F avec la marque $29(D)$.

– G est à $29 + 7$, soit 36 minutes de B en passant par F , donc il est marqué $36(F)$, la marque étant inférieure au $38(E)$ précédent.

Dernière étape

– G est marqué $36(F)$.

Étape	B	A	C	D	E	F	G	Sommet fixé
1	0(A)	4(B)	7(B)	18(B)	21(B)	∞	∞	B
2		4(B)	7(B)	18(B)	21(B)	∞	∞	A
3			7(B)	17(C)	21(B)	32(C)	∞	C
4				17(C)	21(B)	29(D)	48(D)	D
5					21(B)	29(D)	38(E)	E
6						29(D)	36(F)	F
7							36(F)	G

On remonte l'algorithme en suivant les flèches de sommet en sommet : G est à 36 minutes de B en passant par F ; F est à 29 minutes de B en passant par D ; D est à 17 minutes de B en passant par C ; C est à 7 minutes de B .

Un trajet qui minimise le temps de parcours entre B et G est donc $B-C-D-F-G$.

2. La longueur du chemin $B-C-D-F-G$ est :

7 minutes + 10 minutes + 12 minutes + 7 minutes = **36 minutes**.

EXERCICE 3

1. • Intérêts au 1^{er} janvier 2001 : $3\,000 \text{ €} \times \frac{2,5}{100} = 75 \text{ €}$.

Capital au 1^{er} janvier 2001 : $C_1 = 3\,000 \text{ €} + 75 \text{ €}$, donc $C_1 = 3\,075 \text{ €}$.

• Intérêts au 1^{er} janvier 2002 : $3\,075 \text{ €} \times \frac{2,5}{100} = 76,875 \text{ €}$.

Capital au 1^{er} janvier 2002 : $C_2 = 3\,075 \text{ €} + 76,875 \text{ €} = 3\,151,875$, donc $C_2 = 3\,151,88 \text{ €}$ **arrondi au centime d'euro**.

Augmenter une quantité C de 2,5 %, c'est multiplier cette quantité C par $1 + \frac{2,5}{100} = 1,025$.

Donc, pour tout entier $n \geq 0$, $C_{n+1} = C_n \times 1,025$.

Ainsi, la suite (C_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,025$ et de premier terme $C_0 = 3\,000$.

Pour toute suite géométrique (C_n) de raison q et de premier terme C_0 , on a, pour tout $n \geq 0$, $C_n = C_0 \times q^n$.

Donc, pour tout $n \geq 0$, $C_n = 3\,000 \times (1,025)^n$.

La valeur de U dans le tableau est arrondie à l'unité et correspond au calcul successif des termes de la suite (C_n) .

Valeur de n	0	1	2	3	4
Valeur de U	3 000	3 075	3 152	3 231	3 311
Condition $U \leq S$	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

13) Pour $S = 3\,300$, $n = 4$, d'après le tableau ci-dessus, l'affichage est $2000 + 4 = 2004$.
 14) Le nombre affiché est $2000 + n$, où n est le premier entier pour lequel $U > S$.
L'algorithme donne donc la première année au cours de laquelle le capital dépassera la somme S choisie.

15) Au premier janvier 2013, le capital est : $C_{13} = 3\,000 \times (1,025)^{13} \approx 4\,135,53$.

Ce capital est inférieur aux 5 000 € espérés.

On cherche le premier entier naturel n pour lequel $C_n \geq 3\,000 \times 10$, c'est-à-dire :
 on cherche à déterminer le premier entier naturel n pour lequel :
 $3\,000 \times (1,025)^n \geq 30\,000$ ou encore $(1,025)^n \geq 10$.

Première méthode de résolution : utilisation de la calculatrice

À la calculatrice, on obtient par balayage : $(1,025)^{93} \approx 9,93$ et $(1,025)^{94} \approx 10,19$.

Donc $n = 94$: par conséquent, c'est au 1^{er} janvier 2094 que le capital sera multiplié par 10.

Seconde méthode : utilisation de la fonction $\ln$

$(1,025)^n \geq 10 \Leftrightarrow \ln(1,025)^n \geq \ln(10)$ car $\ln(a) \geq \ln(b)$, si et seulement si, $a \geq b$
 $\Leftrightarrow n \ln(1,025) \geq \ln(10)$ car, pour tout entier n et tout nombre $a > 0$, $\ln(a)^n = n \ln(a)$,

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 10}{\ln 1,025} \quad \text{car } \ln(1,025) > 0 \text{ puisque } 1,025 > 1,$$

$\frac{\ln 10}{\ln 1,025} \approx 93,25$, donc $n = 94$ et la réponse est 2094.

EXERCICE 4

Partie A

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 6]$, $f(x) = 1 - (x + 1)e^{-x}$.

Donc, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 6]$, f est de la forme $1 - uv$, avec :

$$u(x) = x + 1, \quad u'(x) = 1 \text{ et } v(x) = e^{-x}, \quad v'(x) = -e^{-x}, \quad \text{car } (e^{ax+by})' = ae^{ax+b}.$$

Ainsi, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 6]$, f' est de la forme $0 - (u'v + uv')$.

$$f'(x) = 0 - [1 \times e^{-x} + (x + 1) \times (-e^{-x})] = -e^{-x} + (x + 1)e^{-x} = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = xe^{-x}.$$

2. On sait que, pour tout réel x , $e^{-x} > 0$; ainsi, sur l'intervalle $[0 ; 6]$,
 $f'(x) = xe^{-x} \geq 0$, car $x \geq 0$.

Il s'ensuit que la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; 6]$ comme l'indique le tableau de variations ci-dessous :

x	0	α	6
Variations de $f(x)$	0	0,5	$1 - \frac{7}{e^6} \approx 0,98$

$$f(0) = 1 - (0 + 1)e^0 = 1 - 1 = 0 \text{ car } e^0 = 1 \text{ et } f(6) = 1 - (6 + 1)e^{-6} = 1 - 7e^{-6} > 0,5.$$

D'après le tableau de variations de f et le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0 ; 6]$.

À la calculatrice, on obtient : $f(1,678) \approx 0,499 < 0,5$ et $f(1,679) \approx 0,5002 > 0,5$, d'où $\alpha \approx 1,68$.

Remarques :

- pour obtenir une valeur arrondie de α au centième, il faut déterminer un encadrement de α au millième ;
- pour justifier de l'existence de α , on peut citer les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires en indiquant que f est strictement croissante sur $[0 ; 6]$, continue car dérivable sur $[0 ; 6]$ et que $f(0) < 0,5 < f(6)$.

3. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a ; b]$ et F une primitive de f sur $[a ; b]$, alors :

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Donc $I = \int_0^6 f(x) \, dx = F(6) - F(0)$.

Or, $F(x) = x + (x + 2)e^{-x}$, donc $F(0) = 0 + 2e^0 = 0 + 2 \times 1 = 2$ et $F(6) = 6 + 8e^{-6}$.

Donc $I = 6 + 8e^{-6} - 2$, soit $I = 4 + \frac{8}{e^6}$ et $I \approx 4,020$ arrondi à 10^{-3} .

Partie B

1. On cherche x pour que $f(x) = 0,5$; donc, d'après la question 2. de la **partie A**, $x \approx 1,68$. Il faut donc 1,68 mois pour que la production atteigne 0,5 millier d'unités, soit 500 unités ; c'est au cours du deuxième mois que la production atteindra les 500 unités. $1,68 \times 30 \approx 50,4$: il faut donc environ 51 jours pour que la production atteigne 500 unités.

2. f est une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$, avec $a < b$. La valeur moyenne de f sur $[a ; b]$ est le réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$.

La valeur moyenne de la production f sur les six premiers mois s'obtient par :

$$\mu = \frac{1}{6-0} \int_0^6 f(x) \, dx = \frac{1}{6} \times I \approx \frac{1}{6} \times 4,020 \approx 0,670.$$

Comme μ est exprimée en milliers d'unités (comme l'est $f(x)$), on en conclut que la production moyenne par jour durant les six premiers mois est d'environ 670 unités.

Partie C

1. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de kilomètres d'autonomie des batteries.

X suit la loi normale de paramètres $\mu = 200$ et $\sigma = 40$.

La probabilité de ne pas atteindre la ville située à 160 km se traduit par : $P(X \leq 160)$.

Pour déterminer la valeur de $P(X \leq a)$, on utilise la règle suivante :

si $a \geq \mu$, $P(X \leq a) = 0,5 + P(\mu \leq X \leq a)$;

si $a \leq \mu$, $P(X \leq a) = 0,5 - P(a \leq X \leq \mu)$.

Comme $160 < \mu = 200$, alors, $P(X \leq 160) = 0,5 - P(160 \leq X \leq 200)$.

$P(a \leq X \leq b)$ s'obtient :

avec une calculatrice Casio par : **MENU**, choisir **STAT DIST NORM Ncd** (a, b, σ, μ).

avec une calculatrice Texas par : **distrib** (**2nde** **var**), choisir **normalFRép** (a, b, μ, σ).

On obtient alors $P(X \leq 160) = 0,5 - P(160 \leq X \leq 200) \approx 0,5 - 0,34 \approx 0,16$ arrondi à 10^{-2} .

La probabilité de ne pas atteindre la ville est d'environ 0,16.

2. L'aller-retour jusqu'à cette ville représente 320 km.

La probabilité de faire l'aller-retour jusqu'à cette ville sans recharger les batteries se traduit par : $P(X \geq 320)$.

Pour déterminer la valeur de $P(X \geq a)$, on utilise la règle suivante :

si $a \geq \mu$, $P(X \geq a) = 0,5 - P(\mu \leq X \leq a)$;

si $a \leq \mu$, $P(X \geq a) = 0,5 + P(a \leq X \leq \mu)$.

Comme $320 > \mu = 200$, alors :

$P(X \geq 320) = 0,5 - P(200 \leq X \leq 320) \approx 0,5 - 0,4987 \approx 0,0013 < 0,01$.

La probabilité de faire l'aller-retour jusqu'à cette ville sans recharger les batteries n'est pas supérieure à 0,01.

On aurait aussi pu calculer $P(X \geq 320)$ par $1 - P(X \leq 320)$, où $P(X \leq 320)$ se calcule avec la méthode de la question 1.

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 35 min.
- Exercice 2 : 45 min.
- Exercice 3 : 50 min.
- Exercice 4 : 40 min.
- Spécialité exercice 4 : 40 min.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 Logarithme népérien, Convexité, Point d'inflexion, Calcul intégral, Primitives, Loi normale, Intervalle de confiance (4 points)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples).

Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.

Recopier le numéro de la question et la réponse exacte.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Parmi toutes les fonctions définies sur $]0 ; +\infty[$ et dont l'expression algébrique est donnée ci-dessous, la seule qui est convexe est :

- a) $x^3 - 3x^2 + 4$ b) $\ln(x)$ c) $-e^x$ d) $x^2 + x + 5$

2. Une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$ définie par $f(x) = \ln(x)$ est la fonction F définie par :

- a) $F(x) = \frac{1}{x}$ b) $F(x) = x \ln(x) - x$ c) $F(x) = x \ln(x)$ d) $F(x) = \ln(x)$

3. La valeur exacte de l'intégrale $\int_0^1 e^{2x} dx$ est égale à :

- a) 3,19 b) $e^2 - 1$ c) $\frac{1}{2} e^2$ d) $\frac{1}{2} (e^2 - 1)$

4. Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(1; 4)$, alors une valeur approchée au centième de $P(2 \leq X \leq 3)$ est :

- a) 0,15 b) 0,09 c) 0,34 d) 0,13

5. Dans une commune comptant plus de 100 000 habitants, un institut réalise un sondage auprès de la population. Sur 100 personnes interrogées, 55 affirment être satisfaites de leur maire.

L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 permettant de connaître la cote de popularité du maire est :

- a) [0,35 ; 0,75] b) [0,40 ; 0,70] c) [0,45 ; 0,65] d) [0,50 ; 0,60]

Corrigé page 117

EXERCICE 2 Suites, Algorithmique (5 points)

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,2$.

- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12$.
- Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- Exprimer v_n en fonction de n .
- En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 12 - 2 \times 0,9^n$.
- Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n) .

Partie B

En 2012, la ville de Bellecité compte 10 milliers d'habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que chaque année :

- 10 % des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville ;
- 1 200 personnes naissent ou emménagent dans cette ville.

1. Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) , où u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité l'année 2012 + n .

2. Un institut statistique décide d'utiliser un algorithme pour prévoir la population de la ville de Bellecité dans les années à venir.

Recopier et compléter l'algorithme ci-après pour qu'il calcule la population de la ville de Bellecité l'année 2012 + n .

VARIABLES $a, i, n.$ **INITIALISATION**Choisir n a prend la valeur 10**TRAITEMENT**Pour i allant de 1 à n , a prend la valeur**SORTIE**Afficher a 3. a) Résoudre l'inéquation $12 - 2 \times 0,9^n > 11,5$.

b) En donner une interprétation.

Corrige page 118

EXERCICE 3 Fonctions – Exponentielle, Application à l'économie**(5 points)****Partie A**On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[5 ; 60]$ par :

$$C(x) = \frac{e^{0,1x} + 20}{x}.$$

1. On désigne par C' la dérivée de la fonction C .Montrer que, pour tout $x \in [5 ; 60]$, $C'(x) = \frac{0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20}{x^2}$.2. On considère la fonction f définie sur $[5 ; 60]$ par :

$$f(x) = 0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20.$$

a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[5 ; 60]$.b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[5 ; 60]$.c) Donner un encadrement à l'unité de α .d) En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[5 ; 60]$.3. En déduire le tableau de variations de C sur $[5 ; 60]$.

4. En utilisant le tableau de variations précédent, déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :

a) $C(x) = 2$;

b) $C(x) = 5$.

Partie B

Une entreprise fabrique chaque mois x vélos de course, avec x appartenant à l'intervalle $[5 ; 60]$.

Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production de x vélos de course, est donné par la fonction C définie dans la **partie A**.

Déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût de fabrication moyen soit minimal.

Corrigé page 120

EXERCICE 4 Probabilités – Probabilités conditionnelles,

Loi de probabilité, Espérance (5 points)

Un propriétaire d'une salle louant des terrains de squash s'interroge sur le taux d'occupation de ses terrains. Sachant que la location d'un terrain dure une heure, il a classé les heures en deux catégories : les heures pleines (soir et week-end) et les heures creuses (le reste de la semaine). Dans le cadre de cette répartition, 70 % des heures sont creuses.

Une étude statistique sur une semaine lui a permis de s'apercevoir que :

- lorsque l'heure est creuse, 20 % des terrains sont occupés ;
- lorsque l'heure est pleine, 90 % des terrains sont occupés.

On choisit un terrain de la salle au hasard. On notera les événements :

- C : « l'heure est creuse » ;
- T : « le terrain est occupé ».

1. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé et que l'heure soit creuse.
3. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé.
4. Montrer que la probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé, est égale à $\frac{27}{41}$.

Dans le but d'inciter ses clients à venir hors des heures de grande fréquentation, le propriétaire a instauré, pour la location d'un terrain, des tarifs différenciés :

- 10 € pour une heure pleine,
- 6 € pour une heure creuse.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la recette en euros obtenue grâce à la location d'un terrain de la salle, choisi au hasard. Ainsi, X prend 3 valeurs :

- 10 lorsque le terrain est occupé et loué en heure pleine,
- 6 lorsque le terrain est occupé et loué en heure creuse,
- 0 lorsque le terrain n'est pas occupé.

5. Construire le tableau décrivant la loi de probabilité de X .

6. Déterminer l'espérance de X .

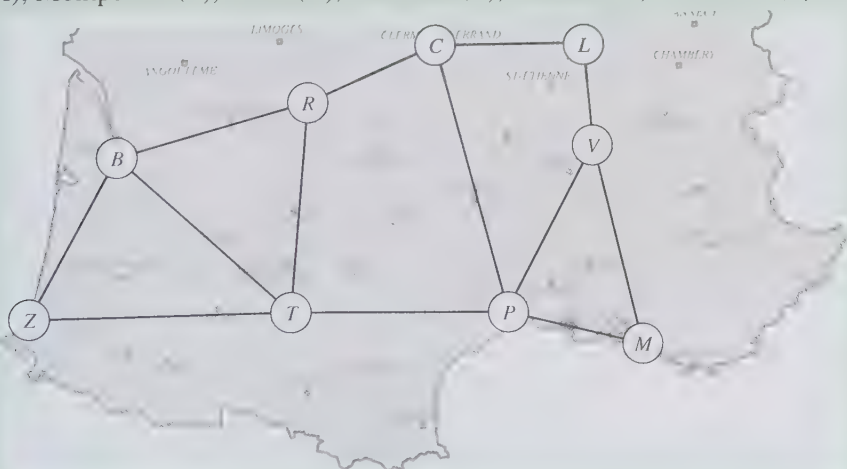
7. La salle comporte 10 terrains et est ouverte 70 heures par semaine.

Calculer la recette hebdomadaire moyenne de la salle.

Corrige page 121

SPÉCIALITÉ EXERCICE 4 Matrices – Graphe pondéré (5 points)

Le graphe ci-dessous représente les autoroutes entre les principales villes du Sud de la France : Bordeaux (B), Clermont-Ferrand (C), Lyon (L), Marseille (M), Montpellier (P), Brive (R), Toulouse (T), Valence (V) et Biarritz (Z).



Pour cette question, on justifiera chaque réponse.

1. a) Déterminer l'ordre du graphe.

Sujet 6

b) Déterminer si le graphe est connexe.

c) Déterminer si le graphe est complet.

2. Un touriste atterrit à l'aéroport de Lyon et loue une voiture.

Déterminer, en justifiant, s'il pourra visiter toutes les villes en empruntant une et une seule fois chaque autoroute.

3. Il décide finalement d'aller seulement de Lyon (L) à Biarritz (Z).

On note N la matrice associée au graphe, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique : B, C, L, M, P, R, T, V, Z.

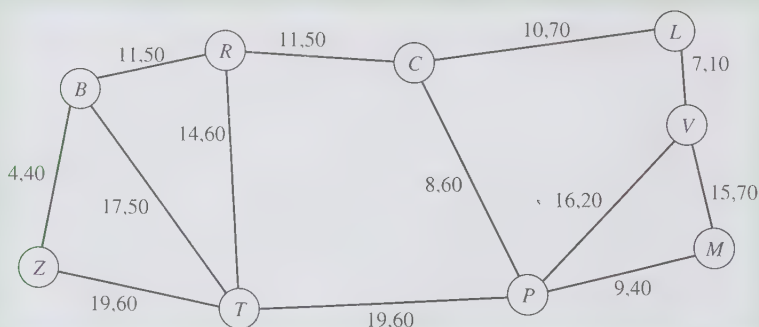
Voici les matrices N et N^3 :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 3 & 6 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 2 & 8 & 6 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 5 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 5 & 2 & 1 & 8 & 7 & 1 \\ 6 & 6 & 0 & 2 & 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 1 & 8 & 8 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 7 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) En détaillant le calcul, déterminer le coefficient de la troisième ligne et dernière colonne de la matrice N^4 .

b) En donner une interprétation.

4. Sur les arêtes du graphe sont maintenant indiqués les prix des péages en euro.



a) À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin que doit prendre le touriste pour minimiser le coût des péages de Lyon à Biarritz.

b) Déterminer le coût, en euro, de ce trajet.

Corrigés

EXERCICE 1

1. Réponse d.

Méthode 1

f est convexe sur $]0; +\infty[$, si et seulement si, f'' est positive sur $]0; +\infty[$.

Les trois premières fonctions ne conviennent pas ; en effet :

• si $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, alors $f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6 < 0$ pour $0 < x < 1$;

• si $f(x) = \ln(x)$, alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$;

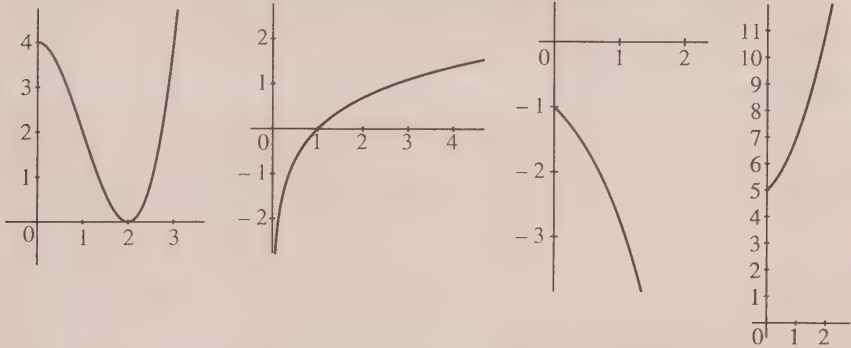
• si $f(x) = -e^x$, alors $f'(x) = -e^x$ et $f''(x) = -e^x < 0$.

La seule réponse possible est alors la **d**. En effet :

si $f(x) = x^2 + x + 5$, alors $f'(x) = 2x + 1$ et $f''(x) = 2 > 0$: donc f est convexe.

Méthode 2

Tracer sur l'écran de la calculatrice les courbes des 4 fonctions :



a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

b. $f(x) = \ln(x)$

c. $f(x) = -e^x$

d. $f(x) = x^2 + x + 5$

Il est clair que les fonctions **b**. et **c**. sont concaves (courbes tournées vers les « y négatifs »), et que la fonction **a**. est concave au voisinage de 0, puis convexe. Comme une réponse et une seule est correcte, c'est donc la **réponse d**.

Cette méthode n'est pas une démonstration rigoureuse, mais permet de répondre à la question dans le cadre de l'exercice où aucune justification n'est demandée.

2. Réponse b.

F est une primitive de f sur un intervalle I , si et seulement si, $F' = f$ sur I .

Si $F(x) = \frac{1}{x}$ alors $F'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et la réponse **a** ne convient pas.

Si $F(x) = x \ln(x) - x$, alors $F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$ (formule $(u \times v)'$).

La deuxième fonction convient ; il est donc inutile de continuer.

3. Réponse d.

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, où F désigne une primitive quelconque de f sur l'intervalle $[a; b]$.

Une primitive de $f(x) = e^{cx+d}$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = \frac{e^{cx+d}}{c}$, donc une primitive de $f(x) = e^{2x}$ est

$$F(x) = \frac{e^{2x}}{2}.$$

$$\text{Ainsi : } \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

4. Réponse a.

Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(1; 4)$, cela signifie que son espérance est $\mu = 1$ et son écart-type est $\sigma = \sqrt{4} = 2$.

$P(2 < X < 3)$ se calcule alors avec la calculatrice :

– TI : **2nde** **var** **normalFRép** (valeur mini, valeur maxi, μ , σ) ;

donc ici : **normalFRép** **(2, 3, 1, 2)** $\approx 0,15$.

– Casio : **MENU** **STAT DIST NORM Ncd** (Lower, Upper, σ , μ) ;

donc ici : **Ncd** **(2, 3, 2, 1)** $\approx 0,15$.

5. Réponse c.

Soit f , la fréquence du caractère étudié, observée dans un échantillon représentatif de la population.

Si n est « assez grand », l'intervalle de confiance au seuil de confiance de 95 % est :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

En pratique, on considère que n est « assez grand » sous les conditions : $n \geq 30$; $nf \geq 5$ et $n(1-f) \geq 5$.

Dans ce cas, l'échantillon est de taille 100 et $f = \frac{55}{100} = 0,55$.

$n = 100 > 30$; $n \times f = 55 > 5$; $n \times (1-f) = 45 > 5$: les conditions d'application de la formule de calcul de I sont vérifiées.

L'intervalle de confiance au seuil de 0,95 est par conséquent :

$$\left[0,55 - \frac{1}{\sqrt{100}} ; 0,55 + \frac{1}{\sqrt{100}} \right] = [0,45 ; 0,65].$$

EXERCICE 2

Partie A

1. a) $v_0 = u_0 - 12 = 10 - 12 = -2$.

Une suite (v_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout entier n , $v_{n+1} = q \times v_n$.

Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = 0,9 u_n + 1,2 - 12 = 0,9 u_n - 10,8$

$$= 0,9 \left(u_n - \frac{10,8}{0,9} \right) = 0,9(u_n - 12) = 0,9 v_n.$$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = -2$.

b) La suite (v_n) est géométrique ; ainsi, pour tout entier naturel n , $v_n = q^n \times v_0$.

Pour tout entier naturel n , $v_n = (0,9)^n \times (-2)$.

c) Pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 12 \Leftrightarrow u_n = v_n + 12$.

Donc, pour tout entier naturel n , $u_n = (0,9)^n \times (-2) + 12$, soit $u_n = 12 - 2 \times (0,9)^n$.

Si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Comme $q = 0,9$, alors $0 < q < 1$ et ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} (0,9)^n = 0$ et $\lim v_n = 0$.

Finalement, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 12 - 2 \times 0 = 12$.

Partie B

1. 1 200 habitants = 1,2 millier d'habitants.

Enlever 10 % à un nombre u_n , c'est multiplier le nombre u_n par $1 - \frac{10}{100} = 1 - 0,1 = 0,9$.

Ainsi, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = 0,9 u_n + 1,2$.

Si, de plus, on pose $u_0 = 10$, la suite (u_n) ainsi définie modélise le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité en 2012 + n .

2. Interprétation de l'algorithme :

La variable a correspond à u_n et n correspond au nombre d'années qui se sont écoulées après 2012. L'algorithme permet de calculer u_n pour n choisi, soit la population de Bellecité l'année 2012 + n .

La ligne à compléter est : pour i allant de 1 à n , a prend la valeur $1,2 + 0,9a$.

$$12 - 2 \times (0,9)^n > 11,5 \Leftrightarrow -2 \times (0,9)^n > -0,5$$

$$\Leftrightarrow (0,9)^n < \frac{-0,5}{-2} = 0,25 \quad \text{car diviser par un nombre négatif change le sens de l'inégalité}$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,9)^n < \ln(0,25) \quad \text{car, si } a < b, \text{ alors } \ln a < \ln b$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln(0,9) < \ln(0,25) \quad \text{car, si } a > 0, \ln(a^n) = n \ln(a)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,9)} \quad \text{car } \ln 0,9 < 0 \text{ puisque } 0,9 < 1.$$

$$\frac{\ln(0,25)}{\ln(0,9)} \approx 13,16 \text{ et } n \text{ est un nombre entier, donc } n \geq 14.$$

Le nombre d'habitants de cette ville sera supérieur à 11,5 milliers pour la première fois dans 14 ans.

C'est en 2026 que le nombre d'habitants dépassera 11 500.

EXERCICE 3

Partie A

1. Pour tout nombre x de l'intervalle $[5 ; 60]$, $C(x) = \frac{e^{0,1x} + 20}{x}$.

La dérivée du quotient de deux fonctions u et v est : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[5 ; 60]$ et v ne s'annule pas sur cet intervalle, donc $\frac{u}{v}$ est dérivable sur l'intervalle $[5 ; 60]$.

$C = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^{0,1x} + 20$, $u'(x) = 0,1e^{0,1x}$ et $v(x) = x$, $v'(x) = 1$ et donc $C' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Ainsi, pour tout réel x de l'intervalle $[5 ; 60]$, $C'(x) = \frac{0,1e^{0,1x} \times x - (e^{0,1x} + 20) \times 1}{x^2}$, soit

$$C'(x) = \frac{0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20}{x^2}.$$

2. a) Pour tout nombre x de l'intervalle $[5 ; 60]$, $f(x) = 0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20$.
Pour calculer la dérivée de la fonction f , on utilise les théorèmes suivants :

On utilise la dérivée d'un produit de deux fonctions u et v : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction composée e^u est dérivable sur I et sa dérivée est : $(e^u)' = u' \times e^u$.

On a alors : $f = uv - w - 20$, et donc $f' = u'v + uv' - w'$,
avec $u(x) = 0,1x$; $u'(x) = 0,1$ et $v(x) = e^{0,1x}$; $v'(x) = w'(x) = 0,1e^{0,1x}$.
 $f'(x) = 0,1e^{0,1x} + 0,1 \times 0,1xe^{0,1x} - 0,1e^{0,1x} = 0,01e^{0,1x}$.

Donc, pour tout réel x , $f'(x) > 0$, car $e^{0,1x} > 0$.

Ainsi, f est strictement croissante sur $[5 ; 60]$.

b) On obtient le tableau de variations suivant :

x	5	α	60
$f(x)$	-20,8	0	1 997,1

Les valeurs de $f(5)$ et $f(60)$ sont des valeurs approchées données par la calculatrice :
 $f(5) = -0,5e^{0,5} - 20 \approx -20,8$ et $f(60) = 5e^6 - 20 \approx 1\,997,1$.

La fonction f étant continue et strictement croissante sur l'intervalle $[5 ; 60]$, avec $f(5) < 0$ et $f(60) > 0$, alors :

d'après le tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[5 ; 60]$.

c) À la calculatrice, on obtient $f(25) \approx -1,73 < 0$ et $f(26) \approx 1,54 > 0$, donc $25 < \alpha < 26$.

d) On déduit du tableau de variations le tableau de signes ci-dessous :

x	5	α	60
$f(x)$	-	0	+

3. D'après la question 1., $C'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$. Le signe de $C'(x)$ est donc le même que celui de $f(x)$, car $x^2 > 0$ sur $[5 ; 60]$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	5	α	60
$C'(x) = f(x)$	+	0	-
$C(x)$	4,3	1,29	7,1

$C(5) \approx 4,3$; $C(60) \approx 7,1$ et $C(\alpha) \approx 1,29$ (valeurs obtenues à l'aide de la calculatrice).

a) D'après le tableau de variations ci-dessus, l'équation $C(x) = 2$ possède deux solutions, l'une sur l'intervalle $[5 ; \alpha]$, l'autre sur l'intervalle $[\alpha ; 60]$.

On pourrait aussi appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur les deux intervalles ci-dessus pour retrouver ces deux solutions.

b) D'après le tableau de variations ci-dessus, l'équation $C(x) = 5$ possède une unique solution située dans l'intervalle $[\alpha ; 60]$.

Partie B

D'après l'étude de la fonction C faite à la **partie A**, $C(x)$ est minimum pour $x = \alpha$, avec $25 < \alpha < 26$.

Comme $C(25) \approx 1,2873$ et $C(26) \approx 1,2871$, l'entreprise devra produire 26 vélos de course pour que le coût moyen soit le plus faible possible. Ce coût moyen sera alors de 1 287,10 €.

EXERCICE 4

1. On sait que :

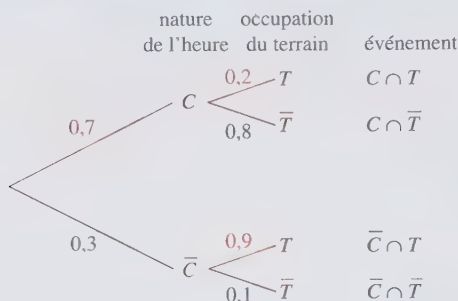
• « 70 % des heures sont creuses », donc $P(C) = \frac{70}{100} = 0,7$.

• « Lorsque l'heure est creuse, 20 % des terrains sont occupés » que l'on peut traduire par la probabilité conditionnelle suivante : $P_C(T) = 0,20$.

• « Lorsque l'heure est pleine, 90 % des terrains sont occupés » que l'on peut traduire par la probabilité conditionnelle suivante : $P_{\bar{C}}(T) = 0,90$.

À partir de ces trois renseignements, on peut renseigner les branches rouges de l'arbre.

Les trois autres branches sont complétées à partir de la règle suivante : la somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.



2. L'événement « le terrain est occupé et l'heure est creuse » se traduit par $T \cap C$.
 $P(T \cap C) = P(C \cap T) = P(C) \times P_C(T) = 0,7 \times 0,2$, donc **$P(T \cap C) = 0,14$** .

On peut aussi calculer cette probabilité à partir de l'arbre en faisant le produit des probabilités permettant d'obtenir cet événement.

3. On cherche à déterminer $P(T)$. D'après la règle des probabilités totales,
 $P(T) = P(T \cap C) + P(T \cap \bar{C}) = 0,14 + 0,3 \times 0,9 = 0,14 + 0,27$, donc **$P(T) = 0,41$** .

4. La probabilité de l'événement « l'heure est pleine sachant que le terrain est occupé » se traduit par $P_T(\bar{C})$.

$$P_T(\bar{C}) = \frac{P(T \cap \bar{C})}{P(T)} = \frac{0,27}{0,41}, \text{ donc } P_T(\bar{C}) = \frac{27}{41}.$$

5. $P(X = 10) = P(T \cap \bar{C}) = 0,27$; $P(X = 6) = P(T \cap C) = 0,14$.
 $P(X = 0) = 1 - (P(X = 6) + P(X = 10)) = 1 - (0,14 + 0,27) = 0,59$.

D'où le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de X :

x_i	0	6	10
$P(X = x_i)$	0,59	0,14	0,27

6. $E(X) = 0 \times 0,59 + 6 \times 0,14 + 10 \times 0,27$, d'où **$E(X) = 3,54$** .

7. $E(X)$ représente la recette moyenne par heure et par terrain. Par suite, si la salle comporte 10 terrains et fonctionne 70 heures par semaine, la recette hebdomadaire est alors de : $3,54 \times 10 \times 70 = \mathbf{2\,478\,€}$.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 4

1. a) L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets du graphe.

Le graphe possède 9 sommets : l'ordre du graphe est donc 9.

b) Un graphe est connexe si deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne.

Or, la chaîne B-R-C-L-V-M-P-T-Z passe par tous les sommets du graphe. Donc tous les sommets sont reliés entre eux par une chaîne : ainsi, **le graphe est connexe**.

- c) **Un graphe est complet si tous les sommets sont reliés entre eux par une arête ; on dit que les sommets sont adjacents entre eux.**

Or, les sommets R et P ne sont pas adjacents, donc **le graphe n'est pas complet**.

2. Visiter toutes les villes en empruntant une et seule fois chaque autoroute, c'est réaliser une chaîne eulérienne.

Théorème d'Euler

Un graphe connexe possède une chaîne eulérienne, si et seulement si, ce graphe possède zéro ou deux sommets de degré impair et deux seulement.

Le graphe qui nous intéresse est connexe (question 1. b)).

On dresse le tableau des sommets et de leurs degrés :

Sommet	L	V	C	P	M	R	T	B	Z
Degré	2	3	3	4	2	3	4	3	2

Quatre sommets sont de degré impair ; donc, d'après le théorème d'Euler, le graphe n'admet pas de chaîne eulérienne.

Il n'est donc pas possible de visiter toutes les villes en empruntant une et une seule fois chaque autoroute.

3. a) **Soit A, B, C trois matrices telles que $C = A \times B$. Le coefficient c_{ij} de la matrice C s'obtient en multipliant la i -ième ligne de A par la j -ième colonne de B .**

Or, $N^4 = N \times N^3$. Donc le coefficient $n_{3,9}^4$ de N^4 est le produit de la troisième ligne de N par la neuvième colonne de N^3 .

$n_{3,9}^4 = 0 \times 5 + 1 \times 3 + 0 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 6 + 1 \times 1 + 2 \times 0$, donc $n_{3,9}^4 = 4$.

On peut aussi calculer N^4 par $N^3 \times N$ et trouver le même résultat.

- b) **Dans la matrice MP , le nombre de chemins de longueur p reliant le sommet i au sommet j est le coefficient a_{ij}^p .**

L, correspondant à Lyon, est le sommet n° 3 et Z, correspondant à Biarritz, est le sommet n° 9. Dans N^4 , le coefficient $n_{3,9}^4$ est égal à 4.

En conséquence, **il existe 4 chemins permettant d'aller de Lyon à Biarritz en quatre étapes.**

4. a) Rechercher le plus court chemin sur un graphe pondéré connexe revient à rechercher une plus courte chaîne à l'aide de l'algorithme de Dijkstra entre deux sommets (celui de départ et celui d'arrivée) en remplissant un tableau au fur et à mesure. Dans le cadre du sujet proposé, L est le sommet de départ et Z celui d'arrivée.

Étape 1 (première ligne)

– L est le sommet de départ, donc fixé avec la marque 0(L).

– Le trajet L-V coûte 7,1 €, donc V est marqué 7,1(L), et le trajet L-C coûte 10,7 €, donc C est marqué 10,7(L) ; les autres sommets ne sont pas adjacents à L, donc marqués ∞.

Étape	L	V	C	P	M	R	T	B	Z	Sommet fixé
1	0(L)	7,1(L)	10,7(L)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	L

Étape 2 (deuxième ligne)

- V est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet V avec la marque 7,1(L).
- Le trajet P-V coûte 16,2 €, donc le trajet P-L coûte 23,3 € en passant par V ; ainsi, P est marqué 23,3(V).
- Le trajet M-V coûte 15,7 €, donc le trajet M-L coûte 22,8 € en passant par V ; ainsi, M est marqué 22,8(V).
- C et V ne sont pas adjacents, donc C reste marqué 10,7(L).
- R, T, B et Z ne sont pas adjacents à V, donc ils restent marqués ∞ .

Étape	L	V	C	P	M	R	T	B	Z	Sommet fixé
1	0(L)	7,1(L)	10,7(L)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	L
2		7,1(L)	10,7(L)	23,3(V)	22,8(V)	∞	∞	∞	∞	V

On applique la même méthode pour fixer les sommets suivants en complétant le tableau après chaque étape.

Étape 3 (troisième ligne)

- C est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet C avec la marque 10,7(L).
- Le trajet R-C coûte 11,5 €, donc le trajet R-L coûte 22,2 € en passant par C ; ainsi, R est marqué 22,2(C).
- Le trajet P-C coûte 8,6 €, donc le trajet P-L coûte 19,3 € en passant par C ; ainsi, P est marqué 19,3(C) qui est inférieur à 23,3.
- Les sommets C et M ne sont pas adjacents, donc M reste marqué 22,8(V).
- T, B et Z ne sont pas adjacents à C, donc ils restent marqués ∞ .

Étape 4 (quatrième ligne)

- P est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet P avec la marque 19,3(C).
- Le trajet T-P coûte 19,6 €, donc le trajet T-L coûte 38,9 € en passant par P ; ainsi, T est marqué 38,9(P).
- Le trajet M-P coûte 9,4 €, donc le trajet P-L coûte 28,7 € en passant par P ; ainsi, M reste marqué 22,8(V) qui est une marque inférieure à 28,7(P).
- Les sommets P et R ne sont pas adjacents, donc R reste marqué 22,2(C).
- Les sommets Z et B ne sont pas adjacents à P et restent donc marqués ∞ .

Étape 5 (cinquième ligne)

- R est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet R avec la marque 22,2(C).
- Le trajet B-R coûte 11,5 €, donc le trajet B-L coûte 33,7 € en passant par R ; ainsi, B est marqué 33,7(R).

- Le trajet T-R coûte 14,6 €, donc le trajet T-L coûte 36,8 € en passant par **R** ; ainsi, T est marqué 36,8(R) qui est inférieur au 38,9(P) précédent.
- M n'est pas adjacent à R, donc il reste marqué 22,8(V).
- Z n'est pas adjacent à R, donc il reste marqué ∞ .

Étape 6 (sixième ligne)

- **M** est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet M avec la marque 22,8(V).
- T, B et Z ne sont pas adjacents à M et restent marqués comme précédemment.

Étape 7 (septième ligne)

- **B** est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet B avec la marque 33,7(R).
- Le trajet Z-B coûte 4,4 €, donc le trajet Z-L coûte 38,1 € en passant par **B** ; ainsi, Z est marqué 38,1(B).
- Le trajet T-B coûte 17,5 €, donc le trajet T-L coûte 51,2 € en passant par **B** ; ainsi, T reste marqué 36,8(R) qui est une marque inférieure à 51,2(B).

Étape 8 (huitième ligne)

- **T** est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet T avec la marque 36,8(R).
- Le trajet Z-T coûte 19,6 €, donc le trajet Z-L coûte 56,4 € en passant par **T** ; ainsi, Z reste marqué 38,1(B) qui est une marque inférieure à 56,4(T).

Dernière étape

- Z est marqué 38,1(B).

Étape	L	V	C	P	M	R	T	B	Z	Sommet fixé
1	0(L)	7,1(L)	10,7(L)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	L
2		7,1(L)	10,7(L)	23,3(V)	22,8(V)	∞	∞	∞	∞	V
3			10,7(L)	19,3(C)	22,8(V)	22,2(C)	∞	∞	∞	C
4				19,3(C)	22,8(V)	22,2(C)	38,9(P)	∞	∞	P
5					22,8(V)	22,2(C)	36,8(R)	33,7(R)	∞	R
6					22,8(V)		36,8(R)	33,7(R)	∞	M
7							36,8(R)	33,7(R)	38,1(B)	B
8							36,8(R)		38,1(B)	T
9									38,1(B)	Z

On remonte l'algorithme en suivant les flèches de sommet en sommet : Z est à 38,1 de L en passant par B ; B est à 33,7 de L en passant par R ; R est à 22,2 de L en passant par C ; C est à 10,7 de L.

Le trajet qui minimise le coût est L-C-R-B-Z.

b) Le trajet Lyon-Biarritz qui minimise les frais de péage coûte 38,1 €.

Amérique du Nord

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 30 min.
- Exercice 2 : 40 min.
- Exercice 3 : 50 min.
- Spécialité exercice 3 : 50 min.
- Exercice 4 : 50 min.

EXERCICE 1 Fonctions – Exponentielle, Logarithme népérien
(4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Chaque question ci-après comporte quatre réponses possibles. Pour chacune de ces questions, **une seule** des quatre réponses proposées est exacte.

Recopier pour chaque question la réponse exacte ; **on ne demande pas de justification.**

Chaque réponse exacte rapportera 1 point, une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. Pour tout réel a non nul, le nombre réel $e^{-\frac{1}{a}}$ est égal à :

- a) $-e^{\frac{1}{a}}$ b) $\frac{1}{e^{\frac{1}{a}}}$ c) $\frac{1}{e^a}$ d) e^a

2. Pour tout réel a , le nombre réel $e^{\frac{a}{2}}$ est égal à :

- a) $\sqrt{e^a}$ b) $\frac{e^a}{2}$ c) $\frac{e^a}{e^2}$ d) $e^{\sqrt{a}}$

3. Pour tout réel $x < 0$, le nombre réel $\ln\left(-\frac{1}{x}\right)$ est égal à :

- a) $\ln(x)$ b) $-\ln(-x)$ c) $-\ln(x)$ d) $\frac{1}{\ln(-x)}$

4. On donne la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x)$.

La dérivée de f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

a) $f'(x) = 1$ b) $f'(x) = \ln(x)$ c) $f'(x) = \frac{1}{x}$ d) $f'(x) = \ln(x) + 1$

Corrige page 131

EXERCICE 2 Probabilités – Loi normale, Intervalle de fluctuation (5 points)

Dans cet exercice, les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

1. Une étude interne à une grande banque a montré qu'on peut estimer que l'âge moyen d'un client demandant un crédit immobilier est une variable aléatoire, notée X , qui suit la loi normale de moyenne 40,5 et d'écart type 12.

a) Calculer la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans.

b) Calculer la probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans.

2. Dans un slogan publicitaire, la banque affirme que 75 % des demandes de prêts immobiliers sont acceptées.

Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 demandes choisies au hasard et de façon indépendante, associe la fréquence de demandes de prêt immobilier acceptées.

a) Donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de prêts acceptés par la banque.

b) Dans une agence de cette banque, on a observé que, sur les 1 000 dernières demandes effectuées, 600 demandes ont été acceptées.

Énoncer une règle de décision permettant de valider ou non le slogan publicitaire de la banque, au niveau de confiance 95 %.

c) Que peut-on penser du slogan publicitaire de la banque ?

Corrige page 132

EXERCICE 3 Suites, Algorithmique (5 points)

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total. Pour l'ouverture prévue le 1^{er} janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Partie A

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5 % des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.

On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1^{er} janvier de l'année (2013 + n).

On donne $u_0 = 42$.

1 Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n \times 0,95 + 6$.

2 On propose, ci-dessous, un algorithme en langage naturel. Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

Variables : U, N Initialisation : Mettre 42 dans U Mettre 0 dans N Traitement : Tant que U < 100 U prend la valeur $U \times 0,95 + 6$ N prend la valeur $N + 1$ Fin du Tant que Sortie Afficher N.
--

3 À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

Partie B

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse : elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus. On appelle v_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1^{er} janvier de l'année (2013 + n).

1. Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.

2. On admet que $v_{n+1} = v_n \times 0,95 + 4$ avec $v_0 = 42$. On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier n , par $w_n = v_n - 80$.

Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et préciser son premier terme w_0 .

3. On admet que, pour tout entier naturel n : $w_n = -38 \times (0,95)^n$.

a) Déterminer la limite de (w_n) .

b) En déduire la limite de (v_n) .

c) Interpréter ce résultat.

Corrigé page 133

SPECIALITÉ EXERCICE 3 Graphe probabiliste, Suites (5 points)

Léa est inscrite sur les réseaux sociaux et consulte régulièrement sa page.

On considère que :

- Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,9.

- Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,8.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note a_n la probabilité que Léa se connecte le n -ième jour et b_n la probabilité qu'elle ne se connecte pas le n -ième jour.

On a donc : $a_n + b_n = 1$.

Le premier jour, Léa ne s'est pas connectée : on a donc $a_1 = 0$.

1. a) Traduire les données par un graphe probabiliste.

b) Préciser la matrice M de transition associée à ce graphe.

c) Déterminer la probabilité que Léa se connecte le troisième jour.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $a_{n+1} = 0,1a_n + 0,8$.

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geq 1$, par $u_n = a_n - \frac{8}{9}$.

a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

b) Exprimer u_n , puis a_n en fonction de n .

4. a) Déterminer en justifiant la limite de (a_n) .

b) Interpréter ce résultat.

Corrigé page 135

EXERCICE 4 Fonctions – Exponentielle, Calcul intégral, Primitives, Lecture graphique (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.

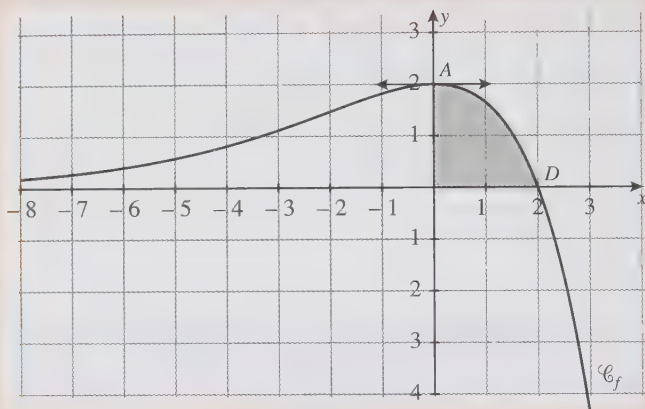


Figure 1

Partie A

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b - x)e^{ax}$, où a et b désignent deux constantes.

On sait que :

- Les points $A(0 ; 2)$ et $D(2 ; 0)$ appartiennent à la courbe C_f .
- La tangente à la courbe C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

On note f' la fonction dérivée de f , définie sur $\mathbb{R}$.

1. Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. En utilisant les questions précédentes, montrer que a et b sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} b - 2 = 0 \\ ab - 1 = 0. \end{cases}$$

4. Calculer a et b et donner l'expression de $f(x)$.

Partie B

On admet que $f(x) = (-x + 2)e^{0,5x}$.

1. À l'aide de la figure 1, justifier que la valeur de l'intégrale $\int_0^2 f(x) dx$ est comprise entre 2 et 4.

2. a) On considère F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x + 8)e^{0,5x}$. Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer la valeur exacte de $\int_0^2 f(x) dx$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On considère G une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Parmi les trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ ci-dessous, une seule est la représentation graphique de G .

Déterminer la courbe qui convient et justifier la réponse.

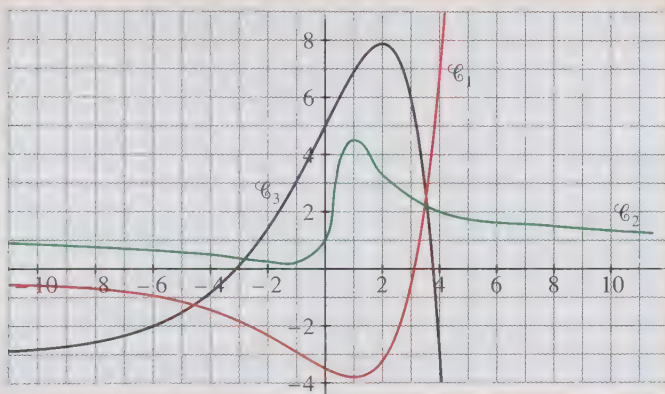


Figure 2

Corrigé page 137

Corrigés

EXERCICE 1

1. Réponse b.

Pour tout x réel, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, donc, pour tout réel a non nul, $e^{-\frac{1}{a}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{a}}}$.

2. Réponse a.

Pour tout réel $x \geq 0$, $x^2 = \sqrt{x}$.

Pour tout réel a , $e^{\frac{a}{2}} = e^{a \times \frac{1}{2}} = (e^a)^{\frac{1}{2}}$.

Or, pour tout réel a , $e^a > 0$, donc $e^{\frac{a}{2}} = (e^a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e^a}$.

3. Réponse b.

Pour tout réel $a > 0$, $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$, donc, pour tout réel $x < 0$, $\ln \left(-\frac{1}{x}\right) = \ln \left(\frac{1}{-x}\right) = -\ln(-x)$.

Remarque : les réponses a) et c) pouvaient être éliminées, car, dans le cas où x est négatif, $\ln(x)$ n'existe pas.

4. Réponse d.

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

On utilise la dérivée d'un produit de deux fonctions u et v : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.

On pose $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x)$, donc $v'(x) = \frac{1}{x}$.

On a alors : $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

EXERCICE 2

1. a) L'âge moyen d'un client demandant un crédit immobilier est une variable aléatoire, notée X , qui suit la loi normale de moyenne (ou d'espérance) 40,5 et d'écart type 12. On cherche $P(30 \leq X \leq 35)$, qui s'obtient à la calculatrice par :

• Calculatrice TI : avec **distrib** (**2nde** **var**) et choisir **normalFRép** (30,35,40.5,12).

• Calculatrice Casio : avec **Ncd** **MENU**, choisir **STAT DIST NORM** **Ncd**, puis **Lower** : (30) ; **Upper** : (35) **σ** : (12) **μ** : (40.5).

$P(30 \leq X \leq 35) \approx 0,133$ arrondi à 10^{-3} près, donc la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans est d'environ 0,133.

b) On cherche $P(X \geq 55)$ qui est aussi égale à $1 - P(X \leq 55)$.

Si on cherche $P(X \leq x)$, on utilise la règle suivante :

si $x \geq \mu$, $P(X \leq x) = 0,5 + P(\mu \leq X \leq x)$;

si $x \leq \mu$, $P(X \leq x) = 0,5 - P(x \leq X \leq \mu)$.

$P(X \leq 55)$ pour la loi normale $\mathcal{N}(40,5 ; 12^2)$ s'obtient :

• Avec une calculatrice TI : (0,5 +) **normalFRép** (40.5,55,40.5,12).

• Avec une calculatrice Casio : (0,5 +) **Ncd**, puis **Lower** : (40.5) ; **Upper** : (55) **σ** : (12) **μ** : (40.5).

$P(X \leq 55) \approx 0,887$ arrondi à 10^{-3} près, donc $P(X \geq 55) \approx 0,113$ arrondi à 10^{-3} près.

La probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans est d'environ 0,113.

Autre méthode :

Étant donné que la moyenne est 40,5, alors $P(X \geq 40,5) = 0,5$, donc :

$P(X \geq 55) = 0,5 - P(40,5 \leq X \leq 55)$ qui donne ensuite le résultat précédent.

2. a)

Si n est « assez grand », alors la variable aléatoire F_n qui, à tout échantillon de taille n , associe la fréquence, prend ses valeurs dans l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % suivant :

$$\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

En pratique, on considère que n est « assez grand » sous les conditions : $n \geq 30$; $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

75 % des demandes de prêts sont acceptées selon la banque, donc $p = 0,75$. F est la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille $n = 1\,000$ demandes choisies au hasard et de façon indépendante, associe la fréquence de demandes de prêt immobilier acceptées. On calcule l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % en vérifiant au préalable que les conditions d'application sont vérifiées : $n = 1\,000 \geq 30$; $np = 1\,000 \times 0,75 = 750 \geq 5$ et $n(1-p) = 1\,000 \times 0,25 = 250 \geq 5$.

$$I = \left[0,75 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,75(1-0,75)}}{\sqrt{1000}} ; 0,75 + 1,96 \frac{\sqrt{0,75(1-0,75)}}{\sqrt{1000}} \right] \approx [0,723 ; 0,777]$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de prêts accordés par la banque est d'environ $[0,723 ; 0,777]$.

b) Règle de décision :

Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, alors on accepte l'hypothèse que le slogan publicitaire est valide ; sinon on la rejette.

Attention ! Même si, dans la question, le mot confiance apparaît, ce n'est pas l'intervalle de confiance qui est attendu, mais une interprétation du résultat précédent.

c) Dans une agence de cette banque, on a observé que, sur les 1 000 dernières demandes effectuées, 600 demandes ont été acceptées. La fréquence de l'échantillon dans l'agence de cette banque est $f = \frac{600}{1000} = 0,6$.

0,6 n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, donc on rejette l'hypothèse que le slogan de la banque est valide.

EXERCICE 3

Partie A

1.

Diminuer une quantité de 5 %, c'est multiplier cette quantité par $1 - \frac{5}{100} = 0,95$.

Le nombre de livres l'année $(2013 + n)$ est u_n . Chaque année, 5 % des livres sont détruits : donc il en reste 95 %, soit $0,95 \times u_n$. De plus, 6 000 ou 6 milliers d'ouvrages neufs sont achetés ; ainsi, l'année $(2013 + n + 1)$, le nombre d'ouvrages est donné par :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 6, \text{ pour tout nombre entier naturel } n.$$

On a obtenu l'expression d'une suite arithmético-géométrique.

■ Pour les variables, U désigne les termes de la suite et N le rang du terme dans la suite. Elles sont initialisées à 42 et 0, car $u_0 = 42$.

L'algorithme calcule les termes successifs de la suite (u_n) puisque la formule de calcul de U est « U prend la valeur $0,95 \cdot U + 6$ » qui correspond à la relation de récurrence $u_{n+1} = 0,95 u_n + 6$.

La valeur de N est incrémentée de 1 à chaque passage dans l'instruction « Tant que » : **N a un rôle de compteur qui permet de donner en sortie la première valeur de n telle que $u_n \geq 100$.**

3.

La suite est donnée avec une relation de récurrence entre deux termes consécutifs de la suite ; le tableau de valeurs de la calculatrice permet d'obtenir le résultat souhaité :

- Avec une calculatrice TI en mode Suite :

- Appuyer sur la touche $f(x)$ pour entrer le terme général :

- La plus petite valeur de n dans nMin est 0.

- Entrer l'expression de u_n (comme pour une fonction) en fonction de u_{n-1} .

- Comme la suite (u_n) est définie par une relation de récurrence, entrer le premier terme dans u(nMin).

- Afficher le tableau de valeurs de la même façon que pour les fonctions, mais la première valeur de n et le pas doivent être des entiers.

- Avec une calculatrice Casio, choisir le menu suites avec **MENU** RECUR, puis TYPE pour le type de suite :

- **F2** si on a une relation entre u_{n+1} et u_n .

- Entrer la suite comme une fonction, puis les éléments pour la définir avec SET :

- La première valeur de n dans Start.

- La dernière valeur de n dans End.

- L'expression de u_n (comme pour une fonction) :

- Comme la suite (u_n) est définie par une relation de récurrence, entrer le premier terme dans a_0 ou a_1 .

- Afficher le tableau de valeurs avec table.

D'après le tableau de valeurs de la calculatrice, c'est pour $n > 26$, soit à partir de $n = 27$, que les valeurs de la suite dépassent 100. **La première valeur de n permettant d'avoir $u_n \geq 100$ est 27.**

L'algorithme programmé avec le logiciel Algobox a la même structure que celui proposé dans le sujet et s'écrit :

Code de l'algorithme

```

VARIABLES
├── u EST_DU_TYPE NOMBRE
├── n EST_DU_TYPE NOMBRE
└── DEBUT_ALGORITHME
    ├── u PREND_LA_VALEUR 42
    ├── n PREND_LA_VALEUR 0
    ├── TANT_QUE (u < 100) FAIRE
    │   ├── DEBUT_TANT_QUE
    │   ├── u PREND_LA_VALEUR u*0.95+6
    │   ├── n PREND_LA_VALEUR n+1
    │   └── FIN_TANT_QUE
    ├── AFFICHER n
    └── FIN_ALGORITHME
    
```

Résultats

```

***Algorithme lancé***
27
***Algorithme terminé***
    
```

D'après le résultat de l'algorithme, $n = 27$, c'est en 2040 que le nombre d'ouvrages dépassera les 100 000.

Partie B

La ligne à modifier est celle du calcul des différents termes de la suite, soit U dans l'algorithme. Le nombre d'ouvrages neufs achetés étant maintenant de 4 000 au lieu des 6 000, il faut remplacer 6 par 4 dans la ligne de calcul de U :

U prend la valeur $U \times 0,95 + 4$.

Pour montrer que la suite (w_n) est géométrique, il faut trouver une relation du type $w_{n+1} = q w_n$, où q est un réel non nul.

Pour $n \geq 0$, $w_{n+1} = v_{n+1} - 80 = 0,95 v_n + 4 - 80 = 0,95 v_n - 76$.

À ce stade du calcul :

• soit on factorise par 0,95, car la raison ne peut être que 0,95 et on obtient alors :

$$w_{n+1} = 0,95 \left(v_n - \frac{76}{0,95} \right) = 0,95(v_n - 80) = 0,95 w_n ;$$

• soit on utilise $w_n = v_n - 80$, donc $v_n = w_n + 80$ et on obtient :

$$w_{n+1} = 0,95 v_n - 76 = 0,95(w_n + 80) - 76 = 0,95 w_n + 76 - 76 = 0,95 w_n.$$

$$w_0 = v_0 - 80 = 42 - 80 = -38.$$

On a la relation : $w_{n+1} = 0,95 w_n$, donc la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $w_0 = -38$.

3. a)

Si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$; on dit que la suite converge vers 0.

$0 < 0,95 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -38 \times 0,95^n = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

b) $w_n = v_n - 80$, donc $v_n = w_n + 80$, soit $v_n = -38 \times 0,95^n + 80$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 80$.

On peut en déduire, qu'à terme, la bibliothèque aura 80 000 ouvrages en rayon.

SPECIALITÉ EXERCICE 3

1. a) On note A_n l'état probabiliste « Léa s'est connectée un jour n » et B_n « Léa ne s'est pas connectée un jour n ».

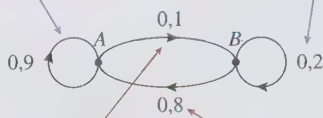
Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,9 ; ainsi, $p_{A_n}(A_{n+1}) = 0,9$; puis celle qu'elle ne se connecte pas le lendemain est 0,1, soit $p_{A_n}(B_{n+1}) = 0,1$.

Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à 0,8 ; ainsi, $p_{B_n}(A_{n+1}) = 0,8$; puis la probabilité qu'elle ne se connecte pas non plus le lendemain est 0,2, soit $p_{B_n}(B_{n+1}) = 0,2$.

On en déduit le graphe probabiliste suivant :

Léa s'est connectée un certain jour
et s'est connectée le lendemain.

Léa ne s'est pas connectée un certain jour
et ne s'est pas connectée non plus le lendemain.



Léa s'est connectée un certain jour
et ne s'est pas connectée le lendemain.

Léa ne s'est pas connectée un certain jour
et s'est connectée le lendemain.

Remarque : la somme des probabilités issues d'un sommet doit toujours être égale à 1.

b) Pour tout entier $n \geq 1$, on note a_n la probabilité que Léa se connecte le $n^{\text{ième}}$ jour et b_n la probabilité qu'elle ne se connecte pas le $n^{\text{ième}}$ jour. D'après le graphe probabiliste, la matrice de transition M telle que $(a_{n+1} \ b_{n+1}) = (a_n \ b_n) \times M$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

c) Le premier jour, Léa ne s'est pas connectée : on a donc $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$, d'où $P_1 = (0 \ 1)$.

La probabilité que Léa se connecte le troisième jour est a_3 ; il faut donc calculer l'état probabiliste $P_3 = (a_3 \ b_3)$ tel que :

$$P_3 = P_1 \times M^2 = (0 \ 1) \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}^2 = (0,88 \ 0,12).$$

La probabilité que Léa se connecte le troisième jour est 0,88.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, $(a_{n+1} \ b_{n+1}) = (a_n \ b_n) \times M$.

En effectuant le produit matriciel, on obtient : $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,8b_n$
 $b_{n+1} = 0,1a_n + 0,2b_n$.

Or, $a_n + b_n = 1$, donc $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,8(1 - a_n)$, d'où le résultat : $a_{n+1} = 0,1a_n + 0,8$.

3. a)

Pour montrer que la suite (u_n) est géométrique, il faut trouver une relation du type $u_{n+1} = q u_n$, où q est un réel non nul.

$$\text{Pour } n \geq 1, u_{n+1} = a_{n+1} - \frac{8}{9} = 0,1a_n + 0,8 - \frac{8}{9} = 0,1a_n - \frac{8}{90}.$$

À ce stade du calcul :

• soit on factorise par 0,1, car la raison ne peut être que 0,1 et on obtient alors :

$$u_{n+1} = 0,1 \left(a_n - \frac{8}{90} \right) = 0,1 \left(a_n - \frac{8}{9} \right) = 0,1u_n;$$

• soit on utilise $u_n = a_n - \frac{8}{9}$, donc $a_n = u_n + \frac{8}{9}$ et on obtient :

$$u_{n+1} = 0,1a_n - \frac{8}{90} = 0,1 \left(u_n + \frac{8}{9} \right) - \frac{8}{90} = 0,1u_n + \frac{8}{90} - \frac{8}{90} = 0,1u_n.$$

$$u_1 = a_1 - \frac{8}{9} = -\frac{8}{9}.$$

On a la relation : $u_{n+1} = 0,1 u_n$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,1$ et de premier terme $u_1 = -\frac{8}{9}$.

b) Si la suite (u_n) est une suite géométrique de raison q , $q > 0$, et de premier terme u_1 , alors :

pour tout entier naturel $n \geq 1$: $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

On a donc : $u_n = u_1 \times 0,1^{n-1}$, soit $u_n = -\frac{8}{9} \times 0,1^{n-1}$.

$u_n = a_n - \frac{8}{9}$, donc $a_n = u_n + \frac{8}{9}$, d'où $a_n = -\frac{8}{9} \times 0,1^{n-1} + \frac{8}{9}$.

4. a) Si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$; on dit que la suite converge vers 0.

La limite de $0,1^{n-1}$ est la même que celle de $0,1^n$, car $0,1^{n-1} = 0,1 \times 0,1^n$.

$0 < 0,1 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1^{n-1} = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{8}{9} \times 0,1^{n-1} = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{8}{9} \times 0,1^{n-1} + \frac{8}{9} \right) = \frac{8}{9}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{8}{9}.$$

b) La limite de la suite (a_n) étant $\frac{8}{9}$, on en déduit qu'à terme, la probabilité que Léa se connecte est égale à $\frac{8}{9}$.

EXERCICE 4

Partie A

1. $D(2 ; 0)$ appartient à la courbe C_f , donc $f(2) = 0$.

La tangente à la courbe C_f au point $A(0 ; 2)$ est parallèle à l'axe des abscisses : son coefficient directeur au point d'abscisse 0 est donc nul, soit $f'(0) = 0$.

2. $f(x) = (b-x)e^{ax}$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On utilise les formules suivantes :

- la dérivée d'un produit de deux fonctions u et v : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$;
- la dérivée de l'exponentielle d'une fonction : $(e^u)' = u' \times e^u$.

On pose $u(x) = b-x$, donc $u'(x) = -1$ et $v(x) = e^{ax}$, donc $v'(x) = a e^{ax}$.

On a alors : $f'(x) = -1 \times e^{ax} + (b-x) \times a e^{ax}$, donc $f'(x) = e^{ax}(-1 + ab - ax)$.

Il est toujours important, dans des expressions comportant des exponentielles, de mettre les exponentielles en facteur pour simplifier les calculs et rendre les études de signes plus aisées.

3. D'après la question 1., $f(2) = 0$, donc $(b-2)e^{2a} = 0$. Or, pour tout réel x , $e^x > 0$, donc $b-2 = 0$.

D'après la question 1., $f'(0) = 0$, donc $e^0(-1 + ab) = 0$. Or, $e^0 = 1$, donc $-1 + ab = 0$.

Les réels a et b sont donc solutions du système $\begin{cases} b - 2 = 0 \\ -1 + ab = 0. \end{cases}$

4.

$$\begin{cases} b - 2 = 0 \\ -1 + ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ -1 + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

On a alors l'expression de $f(x)$: $f(x) = (2 - x)e^{\frac{1}{2}x}$.

On peut remarquer que l'on trouve l'expression de la fonction donnée à la **partie B**, d'où l'intérêt de lire chaque exercice en entier avant de se lancer dans les calculs.

Partie B

1. La fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[0 ; 2]$, donc l'intégrale $\int_0^2 f(x) dx$ correspond à l'aire du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. Chaque carreau du quadrillage correspond à une unité d'aire ; ainsi, le graphique permet d'encadrer l'aire, et, donc, l'intégrale de la partie hachurée :

$$2 < \int_0^2 f(x) dx < 4.$$

2. a) Pour montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, il faut montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.

On procède de la même manière qu'à la question 2. de la **partie A** :

On pose $u(x) = 8 - 2x$, donc $u'(x) = -2$ et $v(x) = e^{0,5x}$, donc $v'(x) = 0,5 e^{0,5x}$.

On a alors : $F'(x) = -2 \times e^{0,5x} + (8 - 2x) \times 0,5e^{0,5x} = e^{0,5x} (-2 + 8 \times 0,5 - 2x \times 0,5)$, donc $F'(x) = e^{0,5x}(2 - x) = f(x)$.

$F'(x) = f(x)$ pour tout x réel, donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. b)

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } [a ; b].$$

$$\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0) = (-2 \times 2 + 8)e^{0,5 \times 2} - (-2 \times 0 + 8)e^{0,5 \times 0} = 4e - 8, \text{ donc}$$

$$\int_0^2 f(x) dx = 4e - 8 \text{ (valeur exacte).}$$

$$\int_0^2 f(x) dx = 4e - 8 \approx 2,87 \text{ arrondi à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Le résultat trouvé est cohérent par rapport à l'estimation donnée à la question 1. ; en effet, on peut vérifier que la valeur de l'intégrale est bien comprise entre 2 et 4.

3. D'après la représentation graphique de la fonction f et la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses, la fonction f est positive sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$ et négative sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

La fonction G est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, donc $G' = f$. La dérivée de G a donc le même signe que f , à savoir positive sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$ et négative sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$. On en déduit que G doit être croissante sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$ et décroissante sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$G'(x) = f(x)$	+	0	-
$G(x)$			

La seule courbe correspondant à ces variations est donc la courbe $\mathcal{C}_3$.

Autre méthode en étudiant le signe de f à partir de l'expression de $f(x)$:

Le signe de la fonction f est donné par le signe de $(-x + 2)$, car une exponentielle est toujours strictement positive. La fonction f , soit G' , est donc positive pour $x \leq 2$ et négative pour $x \geq 2$. On peut alors conclure comme précédemment ou bien en remarquant que G' , étant positive, puis négative, la fonction G admet alors un maximum en $x = 2$; seule la courbe $\mathcal{C}_3$ admet un tel maximum.

Polynésie Française

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 35 min.
- Exercice 2 : 45 min.
- Exercice 3 : 50 min.
- Exercice 4 : 40 min.
- Spécialité exercice 4 : 40 min.

EXERCICE 1 Fonctions – Exponentielle, Convexité, Point d'inflexion, Calcul intégral, Primitives (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Une réponse juste rapporte 1 point ; une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Reporter sur le sujet le numéro de la question, ainsi que la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{-x}$.

1. L'image $f(\ln 2)$ de $\ln 2$ par f est égale à :

- | | |
|-------------|------------------------|
| a) $\ln 2$ | b) $-2\ln 2$ |
| c) $2\ln 2$ | d) $\frac{1}{2} \ln 2$ |

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Alors, pour tout nombre réel x , on a :

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) $f'(x) = e^{-x}$ | b) $f'(x) = -e^{-x}$ |
| c) $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$ | d) $f'(x) = (1 + x)e^{-x}$ |

3. L'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 est :

- | | |
|-------------|-----------------|
| a) $y = 2x$ | b) $y = x - 1$ |
| c) $y = x$ | d) $y = 2x - 1$ |

4. La fonction f est :

- a) concave sur $[0 ; 1]$ b) concave sur $[0 ; +\infty[$
 c) convexe sur $[0 ; +\infty[$ d) convexe sur $[0 ; 1]$

5. L'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ est égale à :

- a) $e - 5$ b) 5
 c) $\frac{e-2}{e}$ d) 1

Corrigé page 147

EXERCICE 2 Probabilités – Probabilités conditionnelles,

Loi de probabilité, Espérance (5 points)

Une agence de voyages propose des formules week-end à Londres au départ de Paris pour lesquelles le transport et l'hôtel sont compris.

Les clients doivent choisir entre les deux formules : « avion + hôtel » ou « train + hôtel » et peuvent compléter ou non leur formule par une option « visites guidées ».

Une étude a produit les données suivantes :

- 40 % des clients optent pour la formule « avion + hôtel » et les autres pour la formule « train + hôtel » ;
- parmi les clients ayant choisi la formule « train + hôtel », 50 % choisissent aussi l'option « visites guidées » ;
- 12 % des clients ont choisi la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées ».

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule week-end à Londres. On note :

A l'événement : le client interrogé a choisi la formule « avion + hôtel » ;

T l'événement : le client interrogé a choisi la formule « train + hôtel » ;

V l'événement : le client interrogé a choisi l'option « visites guidées ».

1. a) Quelle est la probabilité de l'événement :

le client interrogé a choisi la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées » ?

b) Calculer la probabilité $P_A(V)$.

c) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. a) Montrer que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option « visites guidées » est égale à 0,42.

b) Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option « visites guidées ».

Arrondir le résultat au millième.

3. L'agence pratique les prix (par personne) suivants :

Formule « avion + hôtel » : 390 €

Formule « train + hôtel » : 510 €

Option « visites guidées » : 100 €

Quel montant du chiffre d'affaires l'agence de voyage peut-elle espérer obtenir avec 50 clients qui choisissent un week-end à Londres ?

Corrigé page 148

SPECIALITÉ EXERCICE 2 Matrices, Résolution de système, Graphe probabiliste (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes

Alors qu'une entreprise A possédait le monopole de l'accès à Internet des particuliers, une entreprise concurrente B est autorisée à s'implanter.

Lors de l'ouverture au public en 2010 des services du fournisseur d'accès B, l'entreprise A possède 90 % du marché et l'entreprise B possède le reste du marché.

Dans cet exercice, on suppose que, chaque année, chaque internaute est client d'une seule entreprise A ou B.

On observe à partir de 2010 que, chaque année, 15 % des clients de l'entreprise A deviennent des clients de l'entreprise B, et 10 % des clients de l'entreprise B deviennent des clients de l'entreprise A.

Pour tout entier naturel n , on note a_n la probabilité qu'un internaute de ce pays, choisi au hasard, ait son accès à Internet fourni par l'entreprise A pour l'année $2010 + n$, et b_n , la probabilité pour que son fournisseur d'accès en $2010 + n$ soit l'entreprise B.

On note $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010 + n$ et on a ainsi $a_0 = 0,9$ et $b_0 = 0,1$.

Partie A

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.

2. a) Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
 b) Montrer qu'en 2013, l'état probabiliste est environ $(0,61 \quad 0,39)$.
 c) Déterminer l'état stable $P = (a \quad b)$ de la répartition des clients des entreprises A et B . Interpréter le résultat.

Partie B

Lors d'une campagne de marketing, l'entreprise B distribue un stylo ou un porte-clés ; il en coûte à l'entreprise 0,80 € par stylo et 1,20 € par porte-clés distribué.

À la fin de la journée, l'entreprise a distribué 550 objets et cela lui a coûté 540 €.

On cherche le nombre s de stylos et le nombre c de porte-clés distribués.

1. Écrire un système traduisant cette situation.
2. Montrer que le système précédent est équivalent à $R \times X = T$, où $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix}$ et X et T sont des matrices que l'on précisera.
3. Résoudre le système à l'aide de la calculatrice.
Interpréter le résultat.

Corrigé page 150

EXERCICE 3 Suites, Algorithmique, Pourcentages (5 points)

La production des perles de culture de Tahiti est une activité économique importante pour la Polynésie Française.

Les montants réalisés à l'exportation des produits perliers de 2008 à 2011 sont donnés dans le tableau suivant, en milliers d'euros :

Années	2008	2009	2010	2011
Valeurs brutes des produits perliers (en milliers d'euros)	81 295	66 052	64 690	63 182

Source : ISPF ((Institut de Statistiques de Polynésie Française)

Montrer que le taux d'évolution annuel moyen des montants à l'exportation des produits perliers de Polynésie entre 2008 et 2011 est $- 8,06 \%$ arrondi au centième.

On admet, pour la suite de l'exercice, que la production continuera à baisser de 8% par an à partir de 2011.

2. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un nombre positif P
	Affecter la valeur 0 à la variable N {initialisation}
	Affecter la valeur 63 182 à U {initialisation}
Traitement :	Tant que $U > P$
	Affecter la valeur $N + 1$ à N
	Affecter la valeur $0,92 \times U$ à U
	Fin de Tant que
	Affecter la valeur $N + 2011$ à N
Sortie	Afficher N

Si on saisit $P = 50\,000$ en entrée, qu'obtient-on en sortie par cet algorithme ? Interpréter ce résultat dans le contexte de la production de perles.

Pour prévoir les montants réalisés à l'exportation des perles de Tahiti, on modélise la situation par une suite (u_n) . On note u_0 le montant en 2011, en milliers d'euros, et u_n le montant en $2011 + n$, en milliers d'euros. On a donc $u_0 = 63\,182$ et on suppose que la valeur baisse tous les ans de 8 %.

Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

Exprimer, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .

Avec ce modèle, quel montant peut-on prévoir pour l'exportation des produits perliers de Polynésie Française en 2016 ? On arrondira le résultat au millier d'euros.

Calculer le montant cumulé des produits perliers exportés que l'on peut prévoir avec ce modèle à partir de 2011 (comprise) jusqu'à 2020 (comprise). On donnera une valeur approchée au millier d'euros.

Corrigé page 151

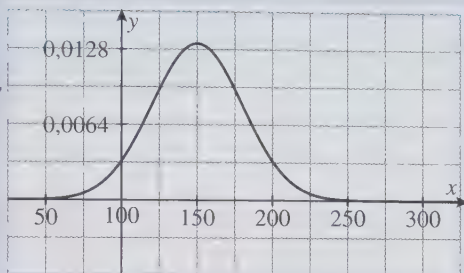
EXERCICE 4 Probabilités – Loi normale, Intervalle de confiance (5 points)

On s'intéresse à une espèce de poissons présente dans deux zones différentes (zone 1 et zone 2) de la planète.

A. Étude de la zone 1

On note X la variable aléatoire qui, à chaque poisson observé dans la zone 1, associe sa taille en cm.

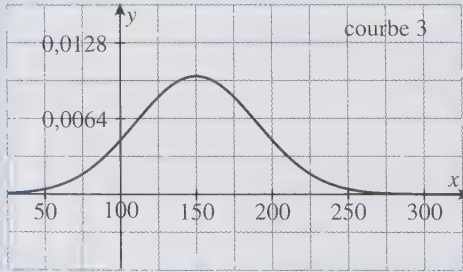
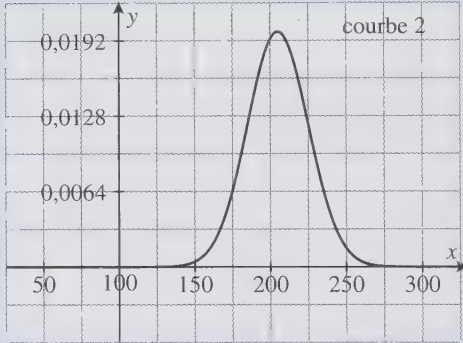
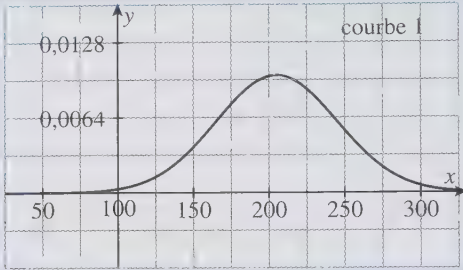
Une étude statistique sur ces poissons de la zone 1 a montré que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type $\sigma = 30$. La courbe de la densité de probabilité associée à X est représentée ci-contre.



1. Par lecture graphique, donner la valeur de μ .
2. On pêche un de ces poissons dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2} , d'avoir un poisson dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm.
3. Un poisson de cette espèce de la zone 1 est considéré comme adulte quand il mesure plus de 120 cm.
On pêche un poisson de l'espèce considérée dans la zone 1.
Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2} , de pêcher un poisson adulte.
4. On considère un nombre k strictement plus grand que la valeur moyenne μ .
Est-il vrai que $P(X < k) < 0,5$?
Justifier.

B. Étude de la zone 2

1. Certains poissons de la zone 2 sont atteints d'une maladie. On prélève de façon aléatoire un échantillon de 50 poissons de cette espèce dans la zone 2 et on constate que 15 poissons sont malades.
a) Calculer la fréquence f de poissons malades dans l'échantillon.
b) Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de 95 %, de la proportion p de poissons malades dans toute la zone 2.
On arrondira les bornes au millième.
2. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque poisson de l'espèce considérée de la zone 2, associe sa taille en cm. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne $\mu' = 205$ et d'écart type $\sigma' = 40$.
En comparant avec le graphique de la zone 1 donné à la question 1. qui représente une loi normale d'écart type $\sigma = 30$, dire laquelle des trois courbes ci-après représente la densité de probabilité de la variable aléatoire Y . Justifier la réponse.



Corrigés

EXERCICE 1

1. Réponse d.

Pour tout réel $x > 0$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ et $e^{\ln x} = x$.

Donc, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$. En particulier, $f(\ln 2) = \frac{\ln 2}{e^{\ln 2}} = \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} \ln 2$.

2. Réponse c.

f est de la forme $u \times v$, avec $u(x) = x$, $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$.

On utilise la dérivée d'un produit de deux fonctions u et v : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.

Donc, pour tout réel x , $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$.

3. Réponse c.

L'équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, où $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a .

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est :

$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$, avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = e^{-0} \times (1 - 0) = 1 \times 1 = 1$.

Donc $y = 1(x - 0) + 0 = x$, soit $y = x$.

4. Réponse a.

Méthode 1 :

On trace la courbe de f à l'écran de la calculatrice. Les réponses suggèrent de se limiter à $x \in [0 ; +\infty[$.

On prend, par exemple, $x_{\min i} = 0$ et $x_{\max i} = 5$.

Il est clair que la courbe de f est d'abord concave (tournée vers les y négatifs), puis convexe (tournée vers les y positifs). La seule réponse qui convient est la réponse a.

Méthode 2 :

f est convexe sur un intervalle I , si et seulement, si $f'' > 0$ sur I .

f est concave sur un intervalle I , si et seulement si, $f'' < 0$ sur I .

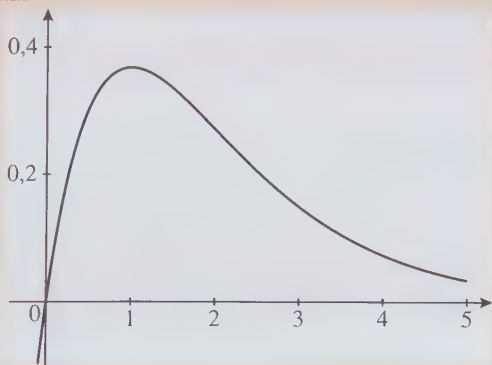
f' est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 1 - x$, $u'(x) = -1$ et $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$.

Donc $f'' = u'v + uv'$.

Pour tout réel x , $f''(x) = -1 \times e^{-x} + (1 - x) \times (-e^{-x}) = -e^{-x} - (1 - x)e^{-x} = e^{-x}(-1 - 1 + x) = e^{-x}(x - 2)$.

Comme, pour tout x , $e^{-x} > 0$, alors le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $x - 2$.

Ainsi, $f''(x) \geq 0$ pour $x \geq 2$ et $f''(x) \leq 0$ pour $x \leq 2$. Donc f est concave sur $]-\infty ; 2]$ et convexe sur $[2 ; +\infty[$.



La seule réponse compatible avec ce résultat est la réponse a.

Remarque : la réponse a. est plus « faible » que la réponse exacte. En effet, f est concave sur $]-\infty; 2]$ et pas seulement sur $[0; 1]$. Mais cela n'empêche pas que l'affirmation a. soit vraie.

5. Réponse c.

Comme f est positive et continue sur $[0; 1]$, le nombre $\int_0^1 f(x)dx$ représente l'aire, en unité d'aire, du domaine situé sous la courbe représentative de f , au-dessus de l'axe des abscisses entre les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

À la calculatrice, on obtient $\int_0^1 f(x)dx \approx 0,264$ et $\frac{e-2}{e} \approx 0,264$.

- Pour Texas :

La séquence $\boxed{\text{math}} \boxed{9 : \text{fonctIntégr}}(\boxed{\text{var}} \boxed{\text{VAR-Y= Fonction}} \boxed{\text{Y1}} \boxed{,} \boxed{x, t, \theta, n} \boxed{,} \boxed{0} \boxed{,} \boxed{1} \boxed{)} \boxed{)}$ calcule l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$.

- Pour Casio :

Dans le menu **RUN**, pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, faire $\boxed{\text{MENU}} \boxed{\text{RUN}} \boxed{\text{OPTN}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{\int dx} \boxed{\text{VARS}} \boxed{\text{GRPH}} \boxed{\text{Y}} \boxed{1}$, puis compléter les bornes a et b voulues en se déplaçant avec le curseur.

Autres méthodes :

- On peut remarquer que la fonction f est positive et, pour tout x appartenant à $[0; 1]$, $f(x) \leq 1$.

On a donc, pour tout réel $x \in [0; 1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$, donc $0 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 1 dx = 1$.

On peut alors éliminer les réponses a. et b. ; la fonction f n'étant pas constante et égale à 1, on peut aussi éliminer la réponse d.

- On peut essayer de chercher une primitive de la fonction f qui permet ensuite de calculer l'intégrale. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-x - 1)e^{-x}$. Le calcul $F(1) - F(0)$ donne ensuite le résultat.

EXERCICE 2

1. a) On sait que :

La formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées » correspondent à l'événement $A \cap V$.

12 % des clients optent pour la formule « avion + hôtel » et l'option « visites guidées » : donc la probabilité que le client interrogé choisisse cette formule et cette option est :

$$P(A \cap V) = \frac{12}{100} = 0,12.$$

Remarque : même si la question n'est pas posée dès le début, il est conseillé de commencer à construire l'arbre de probabilités et de le compléter au fur et à mesure des questions pour avoir une bonne vue d'ensemble du problème.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

Partie A

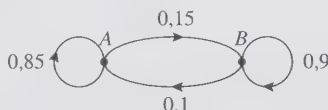
1. On note : A_n l'événement « l'internaute est client de l'entreprise A l'année $2010 + n$ » ;

B_n l'événement « l'internaute est client de l'entreprise B l'année $2010 + n$ ».

Si un internaute est un client de l'entreprise A pendant l'année $2010 + n$, alors la probabilité qu'il devienne un client de l'entreprise B l'année suivante est égale à 0,15, donc $p_{A_n}(B_{n+1}) = 0,15$; donc la probabilité qu'il reste client de l'entreprise A l'année suivante est $1 - 0,15 = 0,85$, par suite, $p_{A_n}(A_{n+1}) = 0,85$.

Si un internaute est un client de l'entreprise B pendant l'année $2010 + n$, alors la probabilité qu'il devienne un client de l'entreprise A l'année suivante est égale à 0,10, donc $p_{B_n}(A_{n+1}) = 0,10$; donc la probabilité qu'il reste client de l'entreprise B l'année suivante est $1 - 0,10 = 0,90$, par suite, $p_{B_n}(B_{n+1}) = 0,90$.

On en déduit le graphe probabiliste suivant :



2. a) D'après le graphe probabiliste, la matrice de transition M telle que $(a_{n+1} \ b_{n+1}) = (a_n \ b_n) \times M$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix},$$

où, par exemple, 0,1 correspond à la probabilité de passer à l'état A sachant qu'on était à l'état B l'année précédente.

Il faut penser à vérifier son résultat en remarquant que la somme des nombres suivant chaque ligne est 1.

b) Lors de l'ouverture, l'entreprise A possède 90 % du marché, donc $a_0 = 0,9$ et l'entreprise B possède le reste donc $b_0 = 0,1$. Ainsi, l'état initial est $P_0 = (a_0 \ b_0) = (0,9 \ 0,1)$.

Soit M la matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre k ; P_0 la matrice ligne décrivant l'état initial et P_n la matrice représentant l'état probabiliste à l'étape n .

L'état probabiliste à l'étape $n + 1$ est $P_{n+1} = P_n \times M$ et $P_n = P_0 \times M^n$.

En 2013, $n = 3$ et $P_3 = P_0 \times M^3 = (0,9 \ 0,1) \times M^3$; donc, d'après le calcul effectué avec la calculatrice, on a :

$$P_3 \approx (0,61 \ 0,39).$$

c) L'état stable $P = (a \ b)$ vérifie $P = P \times M$, soit $(a \ b) = (a \ b) \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$, avec $a + b = 1$.

D'où le système :
$$\begin{cases} a = 0,85a + 0,1b \\ b = 0,15a + 0,9b \\ a + b = 1 \end{cases} \quad \text{qui équivaut à} \quad \begin{cases} a = 0,85a + 0,1b \\ b = 0,15a + 0,9b \\ b = 1 - a. \end{cases}$$

En utilisant la première et la troisième équation du système, on obtient :

$$a = 0,85a + 0,1(1 - a) \Leftrightarrow a - 0,85a + 0,1a = 0,1 \Leftrightarrow 0,25a = 0,1, \text{ d'où :}$$

$$a = \frac{0,1}{0,25} = 0,4 \quad \text{et} \quad b = 0,6.$$

Cela signifie qu'à long terme, 40 % des internautes seront des clients de l'entreprise A et 60 %, des clients de l'entreprise B.

Partie B

1. On pose s le nombre de stylos et c le nombre de porte-clés distribués.

Le nombre total d'objets distribués est 550, donc $s + c = 550$.

Un stylo coûte 0,80 €, donc s stylos coûtent $0,80 \times s$. De même, c porte-clés coûtent $1,20 \times c$.

$$\text{Donc } 0,80 \times s + 1,20 \times c = 540 \text{ €}.$$

Ainsi, s et c sont solutions du système :

$$\begin{cases} s + c = 550 \\ 0,80s + 1,20c = 540. \end{cases}$$

2. Si l'on pose $X = \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 550 \\ 540 \end{pmatrix}$, le système précédent s'écrit alors :

$$R \times X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,80 & 1,20 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 550 \\ 540 \end{pmatrix} = T.$$

3. Si X est la solution de $R \times X = T$, alors $X = R^{-1} \times T$, où R^{-1} est la matrice inverse de la matrice R (elle s'obtient à la calculatrice).

$$\text{Donc } X = R^{-1} \times T = \begin{pmatrix} 3 & -2,5 \\ -2 & 2,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 550 \\ 540 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 250 \end{pmatrix}.$$

L'entreprise B a distribué 300 stylos et 250 porte-clés.

EXERCICE 3

1. Le taux d'évolution, T , des montants à l'exportation des produits perliers de la

$$\text{Polynésie Française entre 2008 et 2011, est : } T = \frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}} = \frac{63\,182}{81\,295} \approx 0,7772.$$

Cela signifie que les montants ont été multipliés par environ 0,7772 entre 2008 et 2011.

Le taux moyen d'évolution sur ces 3 ans, noté t , est le taux unique qui appliqué trois années consécutivement aboutirait à un taux $T = 0,7772$.

On cherche donc à déterminer t pour que : valeur initiale $\times t \times t \times t =$ valeur finale.

$$\text{Soit } t^3 = T = 0,7772 \text{ ou encore } t = (0,7772)^{\frac{1}{3}} \approx 0,9194.$$

$$(1 - 0,9194) \times 100 = 8,06.$$

Ce taux correspond à une baisse d'environ 8,06 % des montants à l'exportation des produits perliers de la Polynésie Française entre 2008 et 2011.

1. Faisons tourner cet algorithme étape par étape. Pour cela, aidons-nous du tableau ci-dessous :

À chaque étape, tant que $U > 50\,000$, on remplace U par $0,92 \times U$.

Variables	U	N	P
Initialisation	63 182	0	50 000
Étape 1	58 127,4	1	50 000
Étape 2	53 477,2	2	50 000
Étape 3	49 199,1	3	50 000
Affichage	2014		

Si l'on saisit $P = 50\,000$, on obtient $3 + 2011 = 2014$ en sortie de l'algorithme.

Cela signifie que, si la baisse de 8,06 % ($\approx 8\%$) se poursuit, les montants à l'exportation des produits perliers de la Polynésie Française descendront sous la barre des 50 000 milliers d'euros en 2014.

3. a) Diminuer un nombre de $t\%$ c'est multiplier ce nombre par $1 - \frac{t}{100}$.

Diminuer les montants de 8 %, c'est donc multiplier ces montants par $1 - 0,08 = 0,92$. Ainsi, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = 0,92u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $u_0 = 63\,182$.

b)

Pour toute suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 , on a, pour tout $n \geq 0$, $u_n = u_0 \times q^n$.

Soit, pour tout $n \geq 0$, $u_n = (0,92)^n \times 63\,182$.

En 2016, $n = 5$ et $u_5 = (0,92)^5 \times 63\,182$, d'où $u_5 \approx 41\,642$ arrondi à l'unité qui correspond aux milliers d'euros donnés en unité.

En 2016, le montant prévu pour l'exportation des produits perliers de Polynésie Française sera d'environ 41 642 milliers d'euros.

On cherche à calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9$ qui correspond aux montants des exportations des années 2011 à 2020 comprises.

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 , alors la somme de

ses premiers termes consécutifs vérifie : $S = u_0 \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$.

Le nombre de termes est 10 (de 0 à 9), d'où :

$$S = 63\,182 \times \frac{1 - 0,92^{10}}{1 - 0,92} \approx 446\,705, \text{ arrondi au milliers d'euro.}$$

Le montant cumulé des produits perliers exportés que l'on peut prévoir avec ce modèle entre 2011 et 2020 s'élève environ à 446 705 milliers d'euros.

EXERCICE 4

A. Étude de la zone 1

1. La courbe de densité de probabilité associée à la variable aléatoire X , où X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ , est symétrique par rapport à la droite $x = \mu$. D'après le graphique, on a donc $\mu = 150$.

2. La taille du poisson doit être comprise entre 150 cm et 210 cm ; on cherche donc à déterminer $P(150 \leq X \leq 210)$, qui s'obtient à la calculatrice par :

• Calculatrice TI : avec **distrib** (**2nde**) **var** et choisir **normalFRép** (**(150,210,150,30)**).

• Calculatrice Casio : avec **Ncd** (**MENU**), choisir **STAT DIST NORM Ncd**, puis

Lower : **(150)** ; Upper : **(210)** σ : **(30)** μ : **(150)**.

$P(150 \leq X \leq 210) \approx 0,48$ arrondi à 10^{-2} près ; ainsi, la probabilité d'avoir un poisson dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm est d'environ 0,48.

3. Si on cherche $P(X \geq x)$, on utilise la règle suivante :

- Si $x \geq \mu$, $P(X \geq x) = 0,5 - P(\mu \leq X \leq x)$.
- Si $x \leq \mu$, $P(X \geq x) = 0,5 + P(x \leq X \leq \mu)$.

La probabilité de pêcher un poisson adulte est $P(X \geq 120) = 0,5 + P(120 \leq X \leq 150)$, car $\mu = 150 > 120$.

• Calculatrice TI : $0,5 + \text{normalFRép}$ (**(120,150,150,30)**).

• Calculatrice Casio : $0,5 + \text{NORM Ncd}$, puis Lower : **(120)** ; Upper : **(150)** σ : **(30)**

μ : **(150)**.

$P(X \geq 120) \approx 0,84$ arrondi à 10^{-2} près.

La probabilité de pêcher un poisson adulte est d'environ 0,84.

4. Si on cherche $P(X \leq x)$, on utilise la règle suivante :

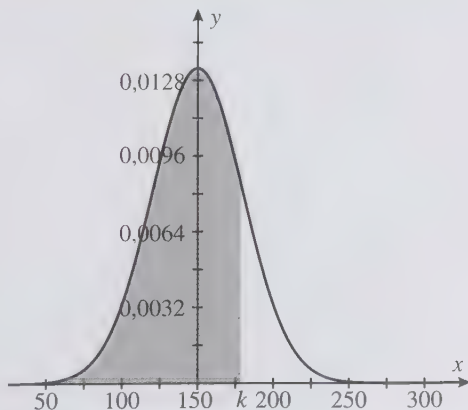
- Si $x \geq \mu$, $P(X \leq x) = 0,5 + P(\mu \leq X \leq x)$.
- Si $x \leq \mu$, $P(X \leq x) = 0,5 - P(x \leq X \leq \mu)$.

Donc, si $k > \mu$, $P(X < k) = 0,5 + P(\mu \leq X < k) > 0,5$, car $P(\mu \leq X < k)$ est un nombre strictement positif.

L'affirmation est fausse.

Méthode graphique :

La courbe de la densité de probabilité associée à X est donnée ci-contre ; la valeur de $P(X < k)$ est représentée par la valeur de l'aire sous la courbe (partie grisée sur le graphique). Sachant que la valeur totale de cette aire est 1 et, par symétrie de la densité de probabilité, si $k > \mu$, alors $P(X < k) > 0,5$.



B. Étude de la zone 2

1. a) $f = \frac{15}{50}$, soit $f = 0,30$.

b) Soit f , la fréquence du caractère étudié, observée dans un échantillon représentatif de la population.

Si n est « assez grand », l'intervalle de confiance au seuil de confiance de 95 % est :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

En pratique, on considère que n est « assez grand » sous les conditions : $n \geq 30$; $nf \geq 5$ et $n(1-f) \geq 5$.

$$n = 50 \geq 30 ; nf = 50 \times 0,3 = 15 \geq 5 ; n(1-f) = 50 \times 0,7 = 35 \geq 5.$$

Les trois conditions pour n assez grand sont vérifiées ; l'intervalle de confiance, au niveau de 95 %, de la proportion de poissons malades est donc :

$$I = \left[0,3 - \frac{1}{\sqrt{50}} ; 0,3 + \frac{1}{\sqrt{50}} \right] ;$$

soit, en arrondissant les bornes au millième : $I \approx [0,159 ; 0,441]$.

2. Puisque $\mu' = 205$, on peut éliminer la courbe 3 qui n'est pas symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 205$.

Comme $\sigma' = 40 > \sigma = 30$, cela signifie que les tailles des poissons de la zone 2 sont plus dispersées que dans la zone 1. La courbe de Gauss de la zone 2 doit donc être plus « aplatie » que celle de la zone 1.

La courbe représentant la densité de probabilité de la variable aléatoire Y est donc la courbe 1.

Pondichéry

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 25 min.
- Exercice 2 : 55 min.
- Spécialité exercice 2 : 55 min.
- Exercice 3 : 40 min.
- Exercice 4 : 50 min.

EXERCICE 1 Fonctions – Exponentielle, Convexité.

Point d'inflexion. Calcul d'intégrales, primitives,

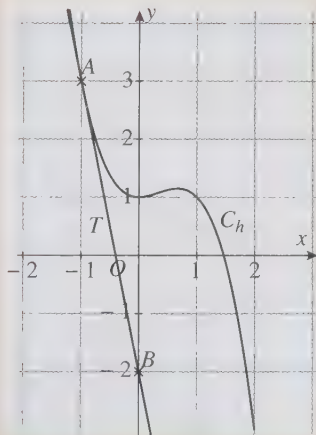
Lecture graphique (4 points)

Pour chacune des propositions, déterminer si la proposition est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. La courbe C_h représentative d'une fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est représentée ci-contre.

On a tracé la tangente T à C_h au point $A(-1; 3)$.
 T passe par le point $B(0; -2)$.

Proposition : le nombre dérivé $h'(-1)$ est égal à -2 .



2. On désigne par f une fonction définie et deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$.
 La courbe représentative de la fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f , est donnée ci-après.

Le point de coordonnées (1 ; 0) est le seul point d'intersection de cette courbe et de l'axe des abscisses.

Proposition : la fonction f est convexe sur l'intervalle $[1 ; 4]$.

3. Proposition : on a l'égalité

$$e^{5\ln 2} \times e^{7\ln 4} = 2^{19}.$$

4. La courbe représentative d'une fonction g définie et continue sur l'intervalle $[0 ; 2]$ est donnée en **figure 1**.

La courbe représentative d'une de ses primitives, G , est donnée sur la **figure 2**. La courbe représentative de G passe par les points A(0 ; 1), B(1 ; 1) et C(2 ; 5).

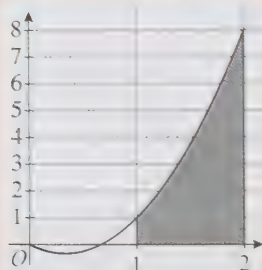
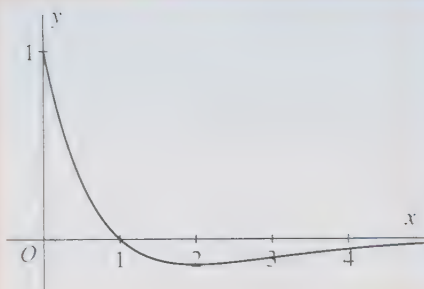


figure 1

figure 2

Proposition : la valeur exacte de l'aire de la partie grisée sous la courbe de g en **figure 1** est 4 unités d'aires.

Corrigé page 163

EXERCICE 2 Suites – Algorithmique (5 points)

Une association décide d'ouvrir un centre de soin pour les oiseaux sauvages victimes de la pollution.

Leur but est de soigner puis relâcher ces oiseaux une fois guéris.

Le centre ouvre ses portes le 1^{er} janvier 2013 avec 115 oiseaux.

Les spécialistes prévoient que 40 % des oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier d'une année restent présents le 1^{er} janvier suivant et que 120 oiseaux nouveaux sont accueillis dans le centre chaque année.

On s'intéresse au nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier des années suivantes.

La situation peut être modélisée par une suite (u_n) admettant pour premier terme $u_0 = 115$, le terme u_n donnant une estimation du nombre d'oiseaux l'année $2013 + n$.

Calculer u_1 et u_2 . Avec quelle précision convient-il de donner ces résultats ?

Les spécialistes déterminent le nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier de chaque année à l'aide d'un algorithme.

Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul l'**algorithme 3** permet d'estimer le nombre d'oiseaux présents au 1^{er} janvier de l'année $2013 + n$.

Expliquer pourquoi les deux premiers algorithmes ne donnent pas le résultat attendu.

Variables :

U est un nombre réel

i et N sont des nombres entiers

Début

Saisir une valeur pour N

Affecter 115 à U

Pour i de 1 à N faire

| Affecter $0,6 \times U + 120$ à U

Fin Pour

Afficher U

Fin

algorithme 1

Variables :

U est un nombre réel

i et N sont des nombres entiers

Début

Saisir une valeur pour N

Pour i de 1 à N faire

| Affecter 115 à U

| Affecter $0,4 \times U + 115$ à U

Fin Pour

Afficher U

Fin

algorithme 2

Variables :

U est un nombre réel

i et N sont des nombres entiers

Début

Saisir une valeur pour N

Affecter 115 à U

Pour i de 1 à N faire

| Affecter $0,4 \times U + 120$ à U

Fin Pour

Afficher U

Fin

algorithme 3

- Donner, pour tout entier naturel n , l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .
- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.
- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,4. Préciser v_0 .
- Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
- En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 200 - 85 \times 0,4^n$.
- La capacité d'accueil du centre est de 200 oiseaux. Est-ce suffisant ? Justifier la réponse.

Chaque année, le centre touche une subvention de 20 euros par oiseau présent au 1^{er} janvier.

Calculer le montant total des subventions perçues par le centre entre le 1^{er} janvier 2013 et le 31 décembre 2018 si l'on suppose que l'évolution du nombre d'oiseaux se poursuit selon les mêmes modalités durant cette période.

Corrigé page 164

SPECIALITÉ EXERCICE 2 Résolution de système, Graphe probabiliste, Suites, Algorithmique (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes

Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

Partie A

En 2013, l'entreprise U avait 45 % du marché et l'entreprise V le reste. Chaque année, l'entreprise U conserve 90 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise V.

Quant à l'entreprise V, elle conserve 85 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise U.

On choisit un client au hasard tous les ans et on note, pour tout entier naturel n :

u_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise U l'année 2013 + n , ainsi $u_0 = 0,45$;

v_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise V l'année 2013 + n .

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets U et V.
2. Donner v_0 ; calculer u_1 et v_1 .
3. On considère l'algorithme (incomplet) donné ci-après. Celui-ci doit donner en sortie les valeurs de u_n et v_n pour un entier naturel n saisi en entrée. Compléter les lignes (L5) et (L8) de l'algorithme pour obtenir le résultat attendu. Recopier sur la copie la partie « traitement » (lignes L3 à L9) en complétant les lignes L5 et L8.

Variables :	N est un nombre entier naturel non nul	L1
	U et V sont des nombres réels	L2
Traitement :	Saisir une valeur pour N	L3
	Affecter à U la valeur 0,45	L4
	Affecter à V la valeur	L5
	Pour i allant de 1 jusqu'à N	L6
	Affecter à U la valeur $0,9 \times U + 0,15 \times V$	L7
	Affecter à V la valeur	L8
	Fin Pour	L9
Sortie :	Afficher U et Afficher V	L10

4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 0,15$. On note, pour tout nombre entier naturel n , $w_n = u_n - 0,6$.

a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

b) Quelle est la limite de la suite (w_n) ? En déduire la limite de la suite (u_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

Partie B

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 10]$ par :

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10 \quad a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

On admet que le triplet (a, b, c) est solution du système (S) .

$$(S) \begin{cases} a + b + c & = 1 \\ 27a + 9b + 3c & = 17,4 \\ 125a + 25b + 5c & = 73 \end{cases} \text{ et on pose } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

1. a) Écrire ce système sous la forme $MX = Y$, où M et Y sont des matrices que l'on précisera.

b) On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet (a, b, c) solution du système (S) .

2. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites ?

EXERCICE 3 Probabilités – Probabilités conditionnelles, Loi normale, Intervalle de fluctuation (5 points)

Les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A

Une société s'est intéressée à la probabilité qu'un de ses salariés, choisi au hasard, soit absent durant une semaine donnée de l'hiver 2014.

On a évalué à 0,07 la probabilité qu'un salarié ait la grippe une semaine donnée. Si le salarié a la grippe, il est alors absent.

Si le salarié n'est pas grippé cette semaine-là, la probabilité qu'il soit absent est estimée à 0,04.

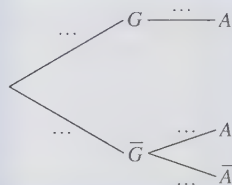
On choisit un salarié de la société au hasard et on considère les événements suivants :

- G : le salarié a la grippe une semaine donnée ;
- A : le salarié est absent une semaine donnée.

1. Reproduire et compléter l'arbre en indiquant les probabilités de chacune des branches.

2. Montrer que la probabilité $p(A)$ de l'évènement A est égale à 0,107 2.

3. Pour une semaine donnée, calculer la probabilité qu'un salarié ait la grippe sachant qu'il est absent. Donner un résultat arrondi au millièm.



Partie B

On admet que le nombre de journées d'absence annuel d'un salarié peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 14$ et d'écart type $\sigma = 3,5$.

1. Justifier, en utilisant un résultat du cours, que $p(7 \leq X \leq 21) \approx 0,95$.
2. Calculer la probabilité, arrondie au millièm, qu'un salarié comptabilise au moins 10 journées d'absence dans l'année.

Partie C

Une mutuelle déclare que 22 % de ses adhérents ont dépassé 20 journées d'absence au travail en 2013.

Afin d'observer la validité de cette affirmation, un organisme enquête sur un échantillon de 200 personnes, choisies au hasard et de façon indépendante, parmi les adhérents de la mutuelle.

Parmi celles-ci, 28 ont comptabilisé plus de 20 journées d'absence en 2013.
Le résultat de l'enquête remet-il en question l'affirmation de la mutuelle ?
Justifier la réponse. On pourra s'aider du calcul d'un intervalle de fluctuation.

Corrigé page 168

EXERCICE 4 Fonctions – Logarithme népérien, Calcul intégral, Primitives, Lecture graphique (6 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Un artisan glacier commercialise des « sorbets bio ». Il peut en produire entre 0 et 300 litres par semaine.

Cette production est vendue dans sa totalité.

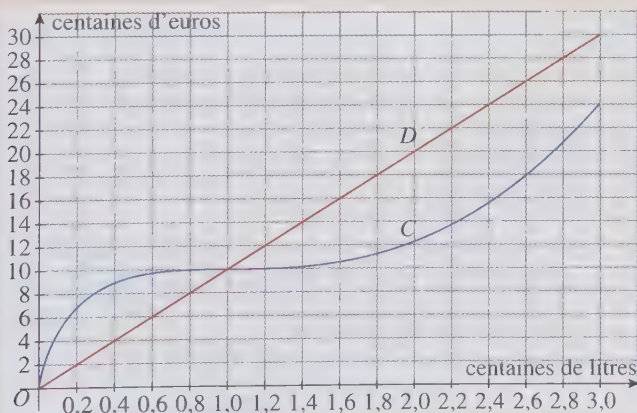
Le coût total de fabrication est modélisé par la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $I =]0 ; 3]$ par $f(x) = 10x^2 - 20x \ln x$.

Lorsque x représente le nombre de centaines de litres de sorbet, $f(x)$ est le coût total de fabrication en centaines d'euros.

La recette, en centaines d'euros, est donnée par une fonction r définie sur le même intervalle I .

Partie A

La courbe C représentative de la fonction f et la droite D représentative de la fonction linéaire r sont données ci-dessous.



1. Répondre aux questions suivantes par lecture graphique et sans justification.

a) Donner le prix de vente en euros de 100 litres de sorbet.

- b) Donner l'expression de $r(x)$ en fonction de x .
 c) Combien l'artisan doit-il produire au minimum de litres de sorbet pour que l'entreprise dégage un bénéfice ?

2. On admet que $\int_1^3 20x \ln x \, dx = 90 \ln 3 - 40$.

a) En déduire la valeur de $\int_1^3 f(x) dx$.

- b) En déduire, pour une production comprise entre 100 et 300 litres, la valeur moyenne (arrondie à l'euro) du coût total de production.

Partie B

On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de x centaines de litres de sorbet produits.

D'après les données précédentes, pour tout x de l'intervalle $[1 ; 3]$, on a :

$$B(x) = -10x^2 + 10x + 20x \ln x$$

où $B(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

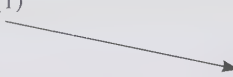
1. On note B' la fonction dérivée de la fonction B .

Montrer que, pour tout nombre x de l'intervalle $[1 ; 3]$, on a :

$$B'(x) = -20x + 20 \ln x + 30.$$

2. On donne le tableau de variations de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1 ; 3]$.

x	1	3
$B'(x)$	$B'(1)$	$B'(3)$



- a) Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1 ; 3]$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} .
 b) En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 3]$, puis dresser le tableau de variations de la fonction B sur ce même intervalle.
 3. L'artisan a décidé de maintenir sa production dans les mêmes conditions s'il peut atteindre un bénéfice d'au moins 850 euros. Est-ce envisageable ?

Corrigé page 171

Corrigés

EXERCICE 1

1. La proposition 1 est fausse.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a est $f'(a)$.

Le coefficient directeur d'une droite se calcule avec : $\frac{\text{variation des ordonnées}}{\text{variation des abscisses}}$.

La tangente T à la courbe C_h passe par les points $A(-1; 3)$ et $B(0; -2)$.

Son coefficient directeur au point A est donc $h'(-1)$ et

$$h'(-1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 3}{0 - (-1)} = \frac{-5}{1} ; \text{ ainsi : } h'(-1) = -5.$$

2. La proposition 2 est fausse.

Si la courbe d'une fonction est située en-dessous de l'axe des abscisses sur un intervalle I , alors cette fonction est négative sur cet intervalle.

La position de la courbe de la fonction f'' indique que la fonction f'' est négative sur l'intervalle $[1; 4]$.

Une fonction f est convexe sur un intervalle I si, et seulement si, $f'' \geq 0$ sur I .

La fonction f n'est donc pas convexe mais concave sur l'intervalle $[1; 4]$.

3. La proposition 3 est vraie.

Le résultat donne une puissance de 2 donc il est judicieux de commencer par transformer $\ln 4$, qui s'écrit, en utilisant la propriété $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$: $\ln 2^2 = 2 \ln 2$.

$$e^{7 \ln 4} = e^{7 \ln(2^2)} = e^{7 \times 2 \ln 2} = e^{14 \ln 2} \text{ et en utilisant la propriété, } e^{a+b} = e^a \times e^b, \text{ on a :}$$

$$e^{5 \ln 2} \times e^{7 \ln 4} = e^{19 \ln 2} = e^{\ln(2^{19})}.$$

D'autre part, pour tout réel x strictement positif, $e^{\ln x} = x$.

On en déduit : $e^{\ln(2^{19})} = 2^{19}$.

4. La proposition 4 est vraie.

D'après l'énoncé, la fonction g est définie, continue sur l'intervalle $[0; 2]$. De plus, pour x compris entre 1 et 2, la courbe de la fonction g est située au-dessus de l'axe des abscisses, donc g est positive sur l'intervalle $[1; 2]$.

Si f est une fonction continue, positive sur un intervalle $[a; b]$, l'aire du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations respectives

$x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b f(x) dx$, exprimée en unités d'aire.

De plus, $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur $[a ; b]$.

L'aire de la partie grisée est donc : $\int_1^2 g(x) dx = G(2) - G(1)$, où G est une primitive de g sur $[1 ; 2]$.

Si le point M de coordonnées $(x_M ; y_M)$ appartient à la courbe d'une fonction f , alors $f(x_M) = y_M$.

La courbe représentative de G passe par les points $B(1 ; 1)$ et $C(2 ; 5)$, donc $G(1) = 1$ et $G(2) = 5$.

$G(2) - G(1) = 5 - 1 = 4$, donc l'aire de la partie grisée sous la courbe de g est de 4 unités d'aires.

EXERCICE 2

1. 40 % des oiseaux présents en 2013 reviennent et 120 nouveaux arrivent, donc :

$$u_1 = \frac{40}{100} \times 115 + 120, \text{ soit } u_1 = 166 \text{ et } u_2 = \frac{40}{100} \times 166 + 120, \text{ soit } u_2 = 186,4.$$

Le terme u_n désignant un nombre d'oiseaux, il faut arrondir à l'unité, soit $u_2 = 186$.

2. a) • L'algorithme 1 ne donne pas le résultat attendu : il y a une erreur dans la ligne « Affecter $0,6 \times U + 120$ à U » ; en effet, 40 % des oiseaux reviennent, donc l'instruction devrait être « Affecter $0,4 \times U + 120$ à U ».

• L'algorithme 2 ne donne pas le résultat attendu : il y a une erreur dans l'initialisation qui ne doit pas être située dans la boucle « Pour ». Le résultat en sortie de l'algorithme serait toujours $0,4 \times 115 + 115$, quelle que soit la valeur de N entrée.

Il y a une seconde erreur, car le nombre de nouveaux oiseaux arrivant dans le centre chaque année est de 120 et non 115, donc l'instruction devrait être :

« Affecter $0,4 \times U + 120$ à U ».

b) Pour calculer le nombre d'oiseaux u_{n+1} au 1^{er} janvier de l'année $(2013 + n + 1)$, il faut garder 40 % des oiseaux présents l'année précédente, soit multiplier u_n qui est le nombre d'oiseaux présents en $(2013 + n)$ par 0,4, et ajouter l'arrivée de 120 oiseaux.

On obtient donc, pour tout entier n , $u_{n+1} = 0,4 u_n + 120$.

On a l'expression d'une suite arithmético-géométrique.

3. a) On veut montrer que la suite (v_n) est géométrique. Pour cela, on exprime v_{n+1} en fonction de v_n .

Si chaque terme de la suite est obtenu en multipliant le terme précédent par un nombre constant, alors la suite est géométrique, de raison le nombre trouvé.

Dans le cas d'une suite arithmético-géométrique, la raison de la suite introduite est toujours le nombre en facteur devant u_n dans la relation de récurrence : $u_{n+1} = 0,4 u_n + 120$; il faudra donc démontrer que la raison est 0,4.

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+1} - 200 = 0,4 u_n + 120 - 200 \\
 &= 0,4 u_n - 80 \\
 &= 0,4 \left(u_n - \frac{80}{0,4} \right) \text{ on factorise par } 0,4 \text{ pour faire apparaître } v_n \\
 &= 0,4 (u_n - 200) \\
 &= 0,4 v_n
 \end{aligned}$$

$v_{n+1} = 0,4 v_n$; ainsi, **la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,4$.**

Autre méthode de calcul

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+1} - 200 = 0,4 u_n + 120 - 200 \\
 &= 0,4 u_n - 80 \quad \text{on utilise la relation donnée } v_n = u_n - 200, \text{ donc } u_n = v_n + 200 \\
 &= 0,4 (v_n + 200) - 80 \\
 &= 0,4 v_n + 80 - 80 = 0,4 v_n.
 \end{aligned}$$

Le premier terme est $v_0 = u_0 - 200$, soit **$v_0 = -85$.**

On exprime ensuite v_n en fonction de n en utilisant la relation suivante :
pour tout entier naturel n : **$v_n = v_0 \times q^n$, d'où : $v_n = -85 \times 0,4^n$.**

c) $v_n = u_n - 200$, donc $u_n = v_n + 200$, soit :
pour tout entier naturel n : **$u_n = -85 \times 0,4^n + 200$.**

Il faut déterminer si la valeur de u_n va dépasser 200 pour une valeur de n donnée.
On peut remarquer que, pour tout entier n , $-85 \times 0,4^n < 0$, donc
 $-85 \times 0,4^n + 200 < 200$, soit $u_n < 200$.

La suite (u_n) est donc majorée par 200.

Le nombre d'oiseaux accueillis restera inférieur à 200 oiseaux ; ainsi, la capacité du centre ne pourra donc pas être dépassée.

Il faut compter le nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier de chacune des années 2013, 2014, 2015, 2016, 2017 et 2018 :

$$\begin{aligned}
 S &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 \\
 S &= 200 - 85 \times 0,4^0 + 200 - 85 \times 0,4^1 + \dots + 200 - 85 \times 0,4^5 \\
 S &= 6 \times 200 - 85 \times (0,4^0 + 0,4^1 + \dots + 0,4^5)
 \end{aligned}$$

Somme des puissances consécutives d'un réel strictement positif différent de 1 :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$0,4^0 + 0,4^1 + \dots + 0,4^5 = \frac{1 - 0,4^6}{1 - 0,4}$$

On obtient alors le nombre d'oiseaux (une valeur approchée), qu'il faut multiplier par 20 pour obtenir la subvention, soit un montant de 21 178 euros.

Autre méthode

On peut aussi calculer chacun des termes de la suite séparément, puis faire la somme :

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 115 + 166 + 186 + 194 + 197 + 199 = 1\,057.$$

En multipliant par 20, on a le montant de la subvention, soit 21 140 euros.

L'écart entre les deux résultats trouvés s'explique par les arrondis, par défaut, effectués pour chacun des termes de la suite.

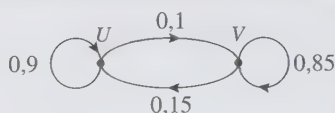
SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

Partie A

1.

Chaque année, l'entreprise U conserve 90 % de ses clients, donc 10 % de ses clients choisissent l'entreprise V l'année suivante. Quant à l'entreprise V, elle conserve 85 % de ses clients, donc 15 % de ses clients choisissent l'entreprise U l'année suivante.

Le graphe probabiliste représentant la situation est par conséquent le suivant :



2. En 2013, l'entreprise U avait 45 % du marché, donc l'entreprise V en avait 55 %, et **par suite, $v_0 = 0,55$** .

L'état initial est donc représenté par la matrice ligne $P_0 = [0,45 \quad 0,55]$.

Si l'on considère que P_n la matrice ligne $[u_n \quad v_n]$ correspond à l'état l'année n et P_{n+1} la matrice ligne $[u_{n+1} \quad v_{n+1}]$ correspond à l'état de l'année $n+1$, alors $P_{n+1} = P_n \times M$, où

M est la matrice de transition associée au graphe probabiliste. On a $M = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{bmatrix}$.

le client est client de U l'année n ,
puis aussi l'année $n+1$

le client est client de U l'année n ,
puis de V l'année $n+1$

$$\begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{bmatrix}$$

le client est client de V l'année n ,
puis de U l'année $n+1$

le client est client de V l'année n ,
puis aussi l'année $n+1$

$P_1 = [u_1 \quad v_1]$, où P_1 s'obtient avec la relation $P_1 = P_0 \times M$.

$P_1 = [0,45 \times 0,9 + 0,55 \times 0,15 \quad 0,45 \times 0,1 + 0,55 \times 0,85] = [0,4875 \quad 0,5125]$.

On a donc : **$u_1 = 0,4875$ et $v_1 = 0,5125$** .

3. La ligne (L5) correspond à l'initialisation de V, donc on doit entrer la valeur v_0 :

AFFECTER À V LA VALEUR 0,55

La ligne (L8) correspond au calcul de l'état probabiliste l'année $n+1$ et, plus particulièrement, le calcul de v_{n+1} correspondant à la variable V :

De la relation matricielle $P_{n+1} = P_n \times M$, on déduit :

$P_{n+1} = [u_{n+1} \quad v_{n+1}] = [u_n \times 0,9 + v_n \times 0,15 \quad u_n \times 0,1 + v_n \times 0,85]$, donc la ligne (L8) doit être :

AFFECTER À V LA VALEUR $0,1U + 0,85V$

4. a)

Explication de la relation fournie

De la relation matricielle précédente, on obtient, pour tout n entier naturel,

$$u_{n+1} = u_n \times 0,9 + v_n \times 0,15.$$

D'autre part, les deux entreprises se partageant le marché, on a, pour tout n entier naturel, $u_n + v_n = 1$. De cette relation, on obtient $v_n = 1 - u_n$.

On en déduit

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n \times 0,9 + v_n \times 0,15 = u_n \times 0,9 + (1 - u_n) \times 0,15 = 0,9 u_n + 0,15 - 0,15 u_n \\ &= 0,75 u_n + 0,15. \end{aligned}$$

On veut montrer que la suite (w_n) est géométrique. Pour cela, on exprime w_{n+1} en fonction de w_n .

Si chaque terme de la suite est obtenu en multipliant le terme précédent par un nombre constant, alors la suite est géométrique, de raison le nombre trouvé.

Dans le cas d'une suite arithmético-géométrique, la raison de la suite introduite est toujours le nombre en facteur devant u_n dans la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 0,75 u_n + 0,15, \text{ donc il faudra démontrer que la raison est } 0,75.$$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - 0,6 = 0,75 u_n + 0,15 - 0,6 \\ &= 0,75 u_n - 0,45 \end{aligned}$$

$$= 0,75 \left(u_n - \frac{0,45}{0,75} \right)$$

on factorise par 0,75 pour faire apparaître w_n

$$= 0,75 (u_n - 0,6)$$

$$= 0,75 w_n.$$

$$w_{n+1} = 0,75 w_n; \text{ ainsi, la suite } (w_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = 0,75.$$

Autre méthode de calcul

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 0,6 = 0,75 u_n + 0,15 - 0,6$$

$$= 0,75 u_n - 0,45$$

on utilise la relation donnée $w_n = u_n - 0,6$,

$$\text{donc } u_n = w_n + 0,6$$

$$= 0,75 (w_n + 0,6) - 0,45$$

$$= 0,75 w_n + 0,45 - 0,45 = 0,75 w_n.$$

Le premier terme est $w_0 = u_0 - 0,6 = -0,15$.

b) On exprime ensuite w_n en fonction de n en utilisant la relation suivante :

Pour tout entier naturel n : $w_n = w_0 \times q^n$, d'où : $w_n = -0,15 \times 0,75^n$.

Si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

$$0 < 0,75 < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0;$$

$$u_n = w_n + 0,6, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0,6.$$

On peut considérer qu'à terme, l'entreprise U aura 60 % du marché et l'entreprise V, 40 % du marché.

Partie B

1. a)

Explication du système fourni

Le coût total de production est modélisé par la fonction C , où x désigne le nombre de recharges produites en milliers.

Le tableau fourni permet donc de trouver trois indications, à savoir : $C(1) = 11$; $C(3) = 27,4$ et $C(5) = 83$.

$$\begin{aligned} C(1) = 1 \\ C(3) = 27,4 \\ C(5) = 83 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 1^3 + b \times 1^2 + c \times 1 + 10 = 11 \\ a \times 3^3 + b \times 3^2 + c \times 3 + 10 = 27,4 \\ a \times 5^3 + b \times 5^2 + c \times 5 + 10 = 83 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 27a + 9b + 3c = 17,4 \\ 125a + 25b + 5c = 73. \end{cases}$$

Le système fourni s'écrit sous forme matricielle $MX = Y$, où M et Y sont les matrices suivantes :

La matrice M est formée par les coefficients des inconnues du système, soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 \\ 125 & 25 & 5 \end{pmatrix}.$$

La matrice Y est donnée par le second membre des équations, soit $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 17,4 \\ 73 \end{pmatrix}$.

b) Si la matrice M est inversible, on obtient la solution du système en multipliant l'inverse de la matrice, obtenue à l'aide de la calculatrice, par le second membre de l'équation : $X = M^{-1} \times Y$.

$$\text{D'après la calculatrice, on a : } M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{-1}{12} & \frac{1}{40} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{10} \\ \frac{15}{8} & \frac{-5}{12} & \frac{3}{40} \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,4 \\ 0,1 \end{pmatrix}.$$

Le triplet $(a ; b ; c)$ est donc $(0,5 ; 0,4 ; 0,1)$ et $C(x) = 0,5x^3 + 0,4x^2 + 0,1x + 10$.

2. On doit chercher, en utilisant cette modélisation, le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau, soit 8 milliers ; cela revient à calculer $C(8)$.

$C(8) = 0,5 \times 8^3 + 0,4 \times 8^2 + 0,1 \times 8 + 10 = 292,4$ exprimé en centaines d'euros.

Le coût de production de 8 000 recharges, avec cette modélisation, serait de 29 240 €.

EXERCICE 3

Partie A

1. On a évalué à 0,07 la probabilité qu'un salarié ait la grippe une semaine donnée, donc $p(G) = 0,07$.

On en déduit : $p(\overline{G}) = 1 - 0,07 = 0,93$.

Si le salarié a la grippe, il est alors absent, donc $p_G(A) = 1$.

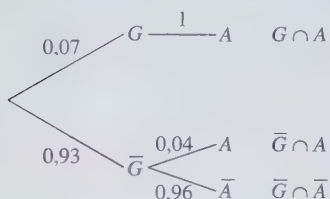
Il est sous-entendu que $p_G(\bar{A}) = 0$, ce qui explique qu'il n'y ait qu'une seule branche partant de G sur l'arbre.

Si le salarié n'est pas grippé cette semaine-là, la probabilité qu'il soit absent est estimée à 0,04, donc $p_{\bar{G}}(A) = 0,04$.

On en déduit : $p_{\bar{G}}(\bar{A}) = 0,96$.

À partir des données, on peut aussi compléter l'arbre de probabilités en utilisant : **la somme des probabilités des branches qui partent d'un même nœud de l'arbre vaut 1.**

L'arbre pondéré représentant la situation est donc :



Il est intéressant de faire figurer les événements correspondant à chaque chemin de l'arbre pour faciliter les calculs par la suite.

2.

Les événements G et $\bar{G}$ représentent une partition de l'univers (les salariés) donc d'après **la formule des probabilités totales**, on a :

$$p(A) = p(G \cap A) + p(\bar{G} \cap A)$$

$$p(A) = p(G) \times p_G(A) + p(\bar{G}) \times p_{\bar{G}}(A) = 0,07 \times 1 + 0,93 \times 0,04, \text{ donc } p(A) = 0,1072.$$

Autre méthode : utilisation de l'arbre pondéré

On peut aussi remarquer qu'il y a deux chemins de l'arbre qui permettent d'obtenir l'événement A , donc la probabilité de A s'obtient en ajoutant les probabilités des deux chemins qui conduisent à la réalisation de A :

$$p(A) = 0,07 \times 1 + 0,93 \times 0,04 = 0,1072.$$

3. La probabilité que le salarié ait la grippe sachant qu'il est absent est : $p_A(G)$.

$$p_A(G) = \frac{p(G \cap A)}{p(A)} = \frac{0,07}{0,1072} \approx 0,653 \text{ arrondi au millième.}$$

La probabilité que le salarié ait la grippe sachant qu'il est absent est environ 0,653.

Partie B

1.

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, de moyenne μ et d'écart type σ , alors :

$$p(X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]) \approx 0,95.$$

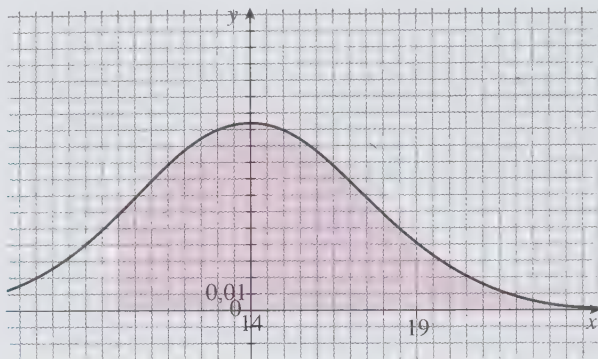
La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $\mu = 14$ et d'écart type $\sigma = 3,5$.

$$\text{On a : } [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma] = [14 - 2 \times 3,5; 14 + 2 \times 3,5] = [7; 21],$$

$$\text{donc } p(X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]) = p(7 \leq X \leq 21) \approx 0,95.$$

2. On veut calculer la probabilité qu'un salarié comptabilise au moins 10 journées d'absence dans l'année, donc on veut calculer $p(X \geq 10)$.

X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(14; 3,5^2)$ donc, graphiquement, cela revient à calculer l'aire sous la courbe de Gauss représentée sur le graphique ci-dessous :



Par symétrie de la courbe, on a toujours : $p(X \geq \mu) = p(X \leq \mu) = 0,5$.

On en déduit : $p(X \geq 10) = p(10 \leq X \leq 14) + p(X \geq 14) = p(10 \leq X \leq 14) + 0,5$.
 $p(10 \leq X \leq 14)$ s'obtient à la calculatrice par :

• Calculatrice Casio : **MENU**, choisir **STAT DIST NORM** Ncd **(10,14,3.5,14)**.

• Calculatrice Texas : **distrib** **(2nde)** **(var)**, choisir **normalFRép** **(10,14,14,3.5)**.

$p(10 \leq X \leq 14) \approx 0,373$, donc : $p(X \geq 10) \approx 0,373 + 0,5 \approx 0,873$.

La probabilité qu'un salarié comptabilise au moins 10 journées d'absence dans l'année est d'environ 0,873.

Partie C

L'énoncé suggère d'utiliser un intervalle de fluctuation ; on va prendre l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % étudié en terminale.

Si n est « assez grand », alors la variable aléatoire F_n qui à tout échantillon de taille n associe la fréquence, prend ses valeurs dans l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % suivant :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

Il faut d'abord vérifier si l'on se trouve dans le champ d'application de cette propriété :

En pratique, on considère que n est « assez grand » sous les conditions : $n \geq 30$; $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

$n = 200 \geq 30$; $np = 200 \times 0,22 = 44 \geq 5$ et $n(1-p) = 200 \times 0,78 = 156 \geq 5$; on peut donc appliquer la propriété.

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

$$= \left[0,22 - 1,96 \frac{\sqrt{0,22(1-0,22)}}{\sqrt{200}} ; 0,22 + 1,96 \frac{\sqrt{0,22(1-0,22)}}{\sqrt{200}} \right]$$

D'où $I \approx [0,1626 ; 0,2774] \subset [0,16 ; 0,28]$.

On compare maintenant la fréquence observée dans l'échantillon choisi à cet intervalle.

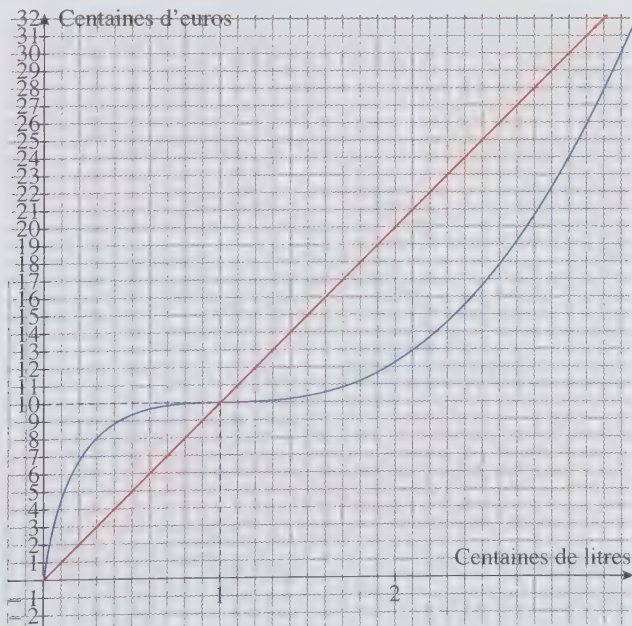
$f = \frac{28}{200} = 0,14$ et $f \notin [0,16 ; 0,28]$; donc $f \notin I$ et le résultat de l'enquête remet en question l'affirmation de la mutuelle au risque d'erreur de 5 %.

EXERCICE 4

Partie A

1. a) Le prix de vente de 100 litres de sorbet est de 1 000 euros.

D'après le graphique, la courbe C passe par le point de coordonnées (1 ; 10) (voir le tracé en pointillés sur le graphique ci-dessous), donc $f(1) = 10$, ce qui, en tenant compte des unités données, pour une centaine de litres de sorbet produite, donne un coût de 10 centaines d'euros.



b) L'expression de $r(x)$ en fonction de x est : $r(x) = 10x$.

La fonction r est linéaire, donc son expression en fonction de x est de la forme $r(x) = ax$, où a est le coefficient directeur de la droite qui la représente.

D'après le graphique, la droite D passe par le point A de coordonnées $(1 ; 10)$ et par l'origine du repère, donc son coefficient directeur est : $a = \frac{y_O - y_A}{x_O - x_A} = \frac{0 - 10}{0 - 1} = 10$.

On en déduit : $r(x) = 10x$.

c) L'entreprise dégage un bénéfice dès que la production est supérieure à 100 litres de sorbet.

L'entreprise dégage un bénéfice lorsque la recette est supérieure aux coûts de production. Graphiquement, on trouve ce résultat en cherchant pour quelles valeurs de x la courbe de la fonction r est située au-dessus de celle de la fonction f . C'est donc pour x supérieur à 1 que l'on a $r(x) > f(x)$, donc pour une production supérieure à une centaine de litres.

2. a)

L'énoncé donne une partie du calcul à effectuer, à savoir : $\int_1^3 (20x \ln x) dx = 90 \ln 3 - 40$. La propriété de linéarité de l'intégrale de fonctions f et g continues sur un intervalle $[a ; b]$ donne :

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

On obtient alors, en l'appliquant à la fonction f :

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (10x^2 - 20x \ln x) dx = \int_1^3 (10x^2) dx - \int_1^3 (20x \ln x) dx.$$

Une primitive de la fonction $x \mapsto 10x^2$ est la fonction $x \mapsto 10 \frac{x^3}{3}$, donc :

De plus, $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f sur $[a ; b]$.

$$\int_1^3 (10x^2) dx = \left[10 \frac{x^3}{3} \right]_1^3 = 10 \times \frac{3^3}{3} - 10 \times \frac{1^3}{3} = 90 - \frac{10}{3}$$

On en déduit alors :

$$\int_1^3 f(x) dx = 90 - \frac{10}{3} - (90 \ln 3 - 40), \text{ soit } \int_1^3 f(x) dx = 130 - \frac{10}{3} - 90 \ln 3$$

$$\int_1^3 f(x) dx = \frac{380}{3} - 90 \ln 3.$$

b)

La valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a ; b]$ est le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Pour calculer la valeur moyenne du coût total de production, pour une production comprise entre 100 et 300 litres, on applique la formule précédente à la fonction f , en prenant $a = 1$ et $b = 3$ pour respecter les unités.

On arrondit le résultat à 10^{-2} pour avoir une valeur approchée à l'euro près.

$$\mu = \frac{1}{3-1} \int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{380}{3} - 90 \ln 3 \right) \approx 13,90.$$

La valeur moyenne du coût total de production, pour une production comprise entre 100 et 300 litres, est d'environ 1 390 euros.

Partie B

1. Posons $B(x) = -10x^2 + 10x + g(x)$, avec $g(x) = 20x \ln x$, pour x appartenant à l'intervalle $[1; 3]$.

$g = u \times v$ donc $g' = u' \times v + u \times v'$, avec $u(x) = 20x$; $u'(x) = 20$ et $v(x) = \ln x$; $v'(x) = \frac{1}{x}$.

C'est-à-dire, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1; 3]$:

$$g'(x) = 20 \times \ln x + 20x \times \frac{1}{x} = 20 \ln x + 20.$$

On a alors $B'(x) = -20x + 10 + 20 \ln x + 20$, soit $B'(x) = -20x + 20 \ln x + 30$.

2. a) D'après le tableau de variations de la fonction B' , celle-ci est continue et strictement décroissante sur $[1; 3]$.

De plus, $B'(1) = -20 \times 1 + 20 \ln 1 + 30 = 10 > 0$

et $B'(3) = -20 \times 3 + 20 \ln 3 + 30 = -30 + 20 \ln 3 \approx -8 < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire, l'équation $B'(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[1; 3]$.

On peut aussi compléter le tableau et conclure directement :

x	1	α	3
$B'(x)$	$B'(1) = 10$	0	$B'(3) \approx -8$

Par balayages successifs à la calculatrice, on a :

$B'(2,3) > 0$ et $B'(2,4) < 0$, donc $\alpha \in]2,3; 2,4[$

$B'(2,35) > 0$ et $B'(2,36) < 0$, donc $\alpha \in]2,35; 2,36[$.

$B'(2,357) \approx 0,008 > 0$ et $B'(2,358) \approx -0,004 < 0$, donc $\alpha \in]2,357; 2,358[$.

Une valeur approchée à 0,01 près de α est donc 2,36.

Pour obtenir une valeur approchée, la plus précise possible, à 0,01 près, on doit avoir un encadrement à 0,001 près.

En effet, le nombre a est une valeur approchée du nombre A à 0,01 près si :

$$a - 0,01 \leq A \leq a + 0,01.$$

Dans certains cas, on peut demander une valeur approchée par défaut (2,35) ou une valeur approchée par excès (2,36).

b) D'après la question précédente, on a le tableau de variations de B' , que l'on peut compléter avec son signe :

x	1	α	3
$B'(x)$	$B'(1) = 10$	0	$B'(3) \approx -8$
Signe de $B'(x)$	-	0	+

Pour $1 \leq x < \alpha$, $B'(x) > 0$; $B'(\alpha) = 0$; pour $\alpha < x \leq 3$, $B'(x) < 0$.

On en déduit le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[1 ; 3]$:

x	1	α	3
Signe de $B'(x)$	+	0	-
$B(x)$	$B(1)$	$B(\alpha)$	$B(3)$

On complète le tableau avec les valeurs prises par B en 1 et 3.

$$B(1) = -10 \times 1^2 + 10 \times 1 + 20 \times 1 \times \ln 1 = 0 ;$$

$$B(3) = -10 \times 3^2 + 10 \times 3 + 20 \times 3 \times \ln 3 = -60 + 60 \ln 3.$$

3. $B(2,36) = -10 \times 2,36^2 + 10 \times 2,36 + 20 \times 2,36 \times \ln 2,36 \approx 8,433.$

Le bénéfice maximal ne dépassera pas les 844 euros, donc n'atteindra pas les 850 euros souhaités.

L'artisan ne maintiendra donc pas sa production dans les mêmes conditions.

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 30 min.
- Exercice 2 : 55 min.
- Spécialité exercice 2 : 55 min.
- Exercice 3 : 35 min.
- Exercice 4 : 50 min.

EXERCICE 1 Fonctions – Logarithme népérien, Calcul intégral, Primitives, Probabilités conditionnelles (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

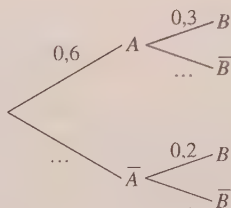
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. L'arbre de probabilités ci-dessous représente une situation où A et B sont deux évènements, dont les évènements contraires sont respectivement notés $\bar{A}$ et $\bar{B}$.



Alors :

- a) $P_A(B) = 0,18$ b) $P(A \cap B) = 0,9$ c) $P_A(\bar{B}) = 0,7$ d) $P(B) = 0,5$

2. Avec le même arbre, la probabilité de l'évènement B est égale à :

- a) 0,5 b) 0,18 c) 0,26 d) 0,38

3. On considère une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[1 ; 15]$. Son tableau de variations est indiqué ci-dessous.

x	1	3	4	12	15
$f(x)$	3		-2	-1	-3

Diagramme de variation : une flèche descendante de 3 à -2 sur l'intervalle [3; 4] est étiquetée 0. Une flèche ascendante de -2 à -1 sur l'intervalle [4; 12] est étiquetée -1. Une flèche descendante de -1 à -3 sur l'intervalle [12; 15] est étiquetée -3.

Soit F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 15]$. On peut être certain que :

- a) La fonction F est négative sur l'intervalle $[3 ; 4]$.
 b) La fonction F est positive sur l'intervalle $[4 ; 12]$.
 c) La fonction F est décroissante sur l'intervalle $[4 ; 12]$.
 d) La fonction F est décroissante sur l'intervalle $[1 ; 3]$.

4. Pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$:

l'équation $\ln x + \ln(x + 3) = 3\ln 2$ est équivalente à l'équation :

- a) $2x + 3 = 6$ b) $2x + 3 = 8$ c) $x^2 + 3x = 6$ d) $x^2 + 3x = 8$

5. g est la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{5}{x}$.

On note C sa courbe représentative.

L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe C , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 6$, est égale à :

- a) $5(\ln 6 - \ln 2)$ b) $\frac{1}{6-2} \int_2^6 g(x) \, dx$ c) $5\ln 6 + 5\ln 2$ d) $g(6) - g(2)$

Corrigé page 182

EXERCICE 2 Suites – Algorithmique (5 points)

À l'automne 2010, Claude achète une maison à la campagne ; il dispose d'un terrain de $1\,500 \text{ m}^2$ entièrement engazonné. Mais, tous les ans, 20 % de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50 m^2 et la remplace par du gazon. Pour tout nombre entier naturel n , on note u_n la surface en m^2 de terrain engazonné au bout de n années, c'est-à-dire à l'automne $2010 + n$.

On a donc $u_0 = 1\,500$.

1. Calculer u_1 .

Justifier que, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$.

On considère la suite (v_n) définie pour tout nombre entier naturel n par :
 $v_n = u_n - 250$.

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

b) Exprimer v_n en fonction de n .

En déduire que, pour tout nombre entier naturel n , $u_n = 250 + 1\,250 \times 0,8^n$.

Quelle est la surface de terrain engazonné au bout de 4 années ?

Déterminer par le calcul la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que :
 $250 + 1\,250 \times 0,8^n < 500$

Interpréter le résultat obtenu.

Compléter l'algorithme pour qu'il affiche la solution obtenue à la question précédente.

Initialisation

u prend la valeur 1 500

n prend la valeur 0

Traitement

Tant que faire

u prend la valeur

n prend la valeur

Fin Tant que

Sortie

Afficher n

Claude est certain que les mauvaises herbes ne peuvent envahir la totalité de son terrain. A-t-il raison? Justifier la réponse.

Corrigé page 183

SPECIALITÉ EXERCICE 2 Suites, Algorithmique, Graphe probabiliste (5 points)

Alice participe à une compétition de tir à l'arc ; elle effectue plusieurs lancers de flèches.

Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,9.

Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, Alice se déconcentre et la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,4.

On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.

Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

a_n la probabilité qu'Alice atteigne la cible au n -ième lancer ;

b_n la probabilité qu'Alice manque la cible au n -ième lancer ;

$P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste au n -ième lancer.

1. a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état « Alice atteint la cible » et B l'état « Alice manque sa cible »).

b) Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B) .

c) Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \end{pmatrix}$.

2. a) Montrer que, pour tout nombre entier n strictement positif,

$$a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4b_n.$$

b) En déduire que, pour tout nombre entier n strictement positif,

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4.$$

3. a) Compléter l'algorithme ci-dessous de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au n -ième lancer.

Entrées

Saisir n

Traitement

a prend la valeur 0,5

b prend la valeur 0,5

Pour i allant de 2 à n

a prend la valeur $\dots \times a + \dots$

b prend la valeur $1 - a$

Fin Pour

Sortie

Afficher a, b

b) Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $n = 5$.

4. a) On considère la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n strictement positif par : $u_n = a_n - 0,8$.

Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

- b) Donner l'expression de u_n en fonction de n , puis en déduire que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, $a_n = 0,8 - 0,3 \times 0,5^{n-1}$.
- c) À long terme, que peut-on penser de la probabilité qu'Alice atteigne la cible ?
- d) Par quelle autre méthode aurait-on pu trouver le résultat précédent ?

Corrigé page 186

EXERCICE 3 Probabilités – Loi uniforme, Loi normale, Intervalle de confiance (5 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Chaque jour, Antoine s'entraîne au billard américain pendant une durée comprise entre 20 minutes et une heure. On modélise la durée de son entraînement, en minutes, par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[20 ; 60]$.

1. Calculer la probabilité p pour que l'entraînement dure plus de 30 minutes.
2. Calculer l'espérance de X . Interpréter ce résultat

Partie B

Dans cette partie, les probabilités seront, si besoin, arrondies au millièème.

Les boules de billard américain avec lesquelles Antoine s'entraîne sont dites de premier choix si leur diamètre est compris entre 56,75 mm et 57,25 mm ; sinon elles sont dites de second choix.

On note D la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée au hasard dans la production de l'entreprise, associe son diamètre, en millimètres.

On suppose que D suit la loi normale d'espérance 57 et d'écart-type 0,11.

1. Déterminer la probabilité p_1 que la boule prélevée ait un diamètre inférieur à 57 mm.
2. Déterminer la probabilité p_2 que la boule prélevée soit une boule de premier choix.
3. En déduire la probabilité p_3 que la boule prélevée soit une boule de second choix.

Partie C

Le président de la fédération française de billard (FFB) souhaite estimer le niveau de satisfaction de ses 14 000 licenciés quant à l'organisation des tournois.

Antoine estime que les 80 adhérents de son club constituent un échantillon représentatif des licenciés de la FFB. Il est chargé de faire une étude au sein de son club : les 80 adhérents ont répondu, et 66 ont déclaré qu'ils étaient satisfaits.

1. Quelle est, sur cet échantillon, la fréquence observée f de personnes satisfaites de la FFB ?
2. Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion p de licenciés satisfaits de la FFB. Les bornes de l'intervalle seront arrondies au millième.

Corrigé page 190

EXERCICE 4 Fonctions – Exponentielle, Convexité, Point d'inflexion, Lecture graphique (5 points)

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie en **annexe**.

A. Étude graphique

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

1. la concentration à l'instant initial ;
2. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre.

On fera apparaître sur le graphique les traits de construction nécessaires.

B. Étude théorique

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 15]$ par $f(x) = (x + 2)e^{-0,5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Justifier que $f'(x) = -0,5xe^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur $[0 ; 15]$.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0 ; 15]$.

3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude un dixième.

4. Un logiciel de calcul formel donne le résultat ci-dessous :

1	deriver $((x + 2) \cdot \exp(-0.5 \cdot x))$	$\exp(-0.5 \cdot x) - 0.5 \cdot \exp(-0.5 \cdot x) \cdot (x + 2)$
2	deriver $(\exp(-0.5 \cdot x) - 0.5 \cdot \exp(-0.5 \cdot x) \cdot (x + 2))$	$-\exp(-0.5 \cdot x) + 0.25 \cdot \exp(-0.5 \cdot x) \cdot (x + 2)$
3	factoriser $(-\exp(-0.5 \cdot x) + 0.25 \cdot \exp(-0.5 \cdot x) \cdot (x + 2))$	$(0.25 \cdot x - 0.5) \cdot \exp(-0.5 \cdot x)$

En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 15]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

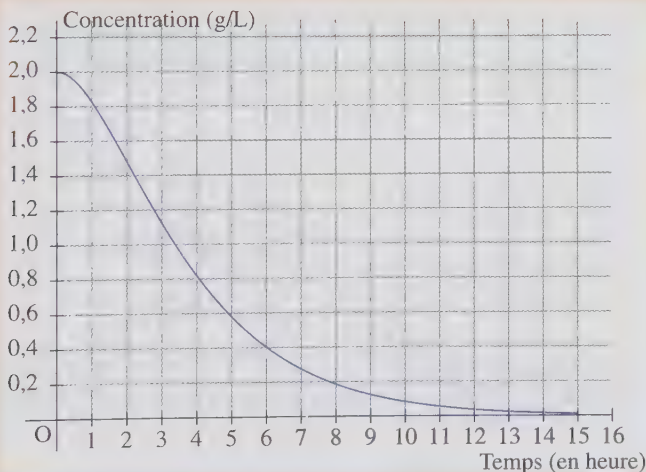
C. Interprétation des résultats

En vous aidant des résultats obtenus, soit dans la **partie B**, soit par lecture graphique et sans justifier, répondre aux questions ci-dessous.

1. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?

2. Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?

Annexe



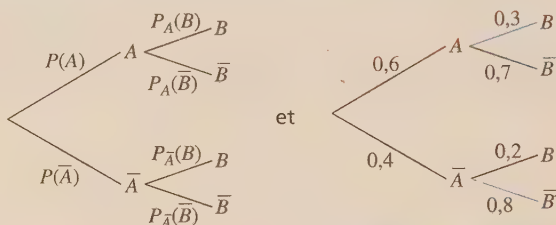
Corrige page 191

Corrigés

EXERCICE 1

1. Réponse c).

On a les arbres complets ci-dessous :



On complète l'arbre de probabilités en utilisant : **la somme des probabilités des branches qui partent d'un même nœud de l'arbre vaut 1.**

Donc, par identification, $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - 0,3 = 0,7$.

2. Réponse c).

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ en utilisant la formule des probabilités totales, donc $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,2 = 0,18 + 0,08$, soit $P(B) = 0,26$.

On peut aussi remarquer qu'il y a deux chemins de l'arbre qui permettent d'obtenir l'événement B , donc la probabilité de B s'obtient en ajoutant les probabilités des deux chemins qui conduisent à la réalisation de B .

3. Réponse c).

F est une primitive de f sur $[1 ; 15]$, ce qui signifie que $F' = f$ sur $[1 ; 15]$.

C'est donc le signe de f sur $[0 ; 15]$ qui donne le sens de variation de F sur $[0 ; 15]$:

x	1	3	15
$F'(x) = f(x)$	+	0	-
F			

Ainsi, $f \geq 0$ sur $[1 ; 3]$, donc F est croissante sur $[1 ; 3]$: la réponse d) est donc inexacte.

De même, $f \leq 0$ sur $[4 ; 12]$, donc F est décroissante sur $[4 ; 12]$, soit la réponse c).

Dans un QCM où une seule réponse est exacte, la recherche de la solution s'arrête dès que celle-ci est trouvée.

Remarque : Il n'y a aucune indication de l'énoncé qui permette de donner le signe de F : on ne peut donc pas savoir si les réponses a) et b) sont exactes ou pas.

4. Réponse d).

$$\ln x + \ln(x+3) = 3\ln 2 \text{ pour } x > 0.$$

Ceci est une équation comportant des logarithmes népériens. Pour résoudre ce type d'équation, on se ramène, après avoir déterminé le domaine de validité de cette équation, à une équation du type $\ln a = \ln b$ qui équivaut à $a = b$.

Domaine de validité :

Il est clair que si $x > 0$, alors $x+3 > 0$, donc $\ln x$ et $\ln(x+3)$ existent. L'équation a donc un sens pour tout $x > 0$.

Pour le terme de gauche, on a :

$$\ln x + \ln(x+3) = \ln(x(x+3)) = \ln(x^2 + 3x), \text{ car pour tout } a > 0 \text{ et tout } b > 0, \ln a + \ln b = \ln ab.$$

Pour le terme de droite, on a :

$$3\ln 2 = \ln(2^3) = \ln 8, \text{ car pour tout } a > 0 \text{ et tout entier } n, \ln(a^n) = n \times \ln a.$$

$$\text{Pour tout } x > 0, \ln x + \ln(x+3) = 3\ln 2 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 3x) = \ln 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x = 8, \text{ car pour tout } a > 0 \text{ et tout } b > 0, \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b.$$

5. Réponse a).

Soient g une fonction définie, positive sur un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$ et C sa représentation graphique dans un repère orthogonal du plan.

Le calcul de l'aire du domaine délimité par C , l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ se fait par étapes :

- Vérifier que g est positive sur $[a; b]$.
- Déterminer une primitive G de g sur $[a; b]$.
- Calculer $G(a)$ et $G(b)$.

$$\text{L'aire du domaine, en unités d'aire, est : } \mathcal{A} = \int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a).$$

$$\bullet g(x) = \frac{5}{x} > 0 \text{ pour tout } x > 0; a = 2 \text{ et } b = 6, \text{ donc } g \text{ est positive sur l'intervalle } [2; 6].$$

$$\bullet \text{ Une primitive } G \text{ de } g \text{ sur }]0; +\infty[\text{ est définie par } G(x) = 5 \ln x.$$

$$\bullet G(a) = G(2) = 5 \ln 2 \text{ et } G(b) = G(6) = 5 \ln 6.$$

$$\bullet \mathcal{A} = \int_2^6 g(x) dx = G(6) - G(2) = 5 \ln 6 - 5 \ln 2, \text{ soit } \mathcal{A} = 5(\ln 6 - \ln 2).$$

EXERCICE 2

1. En 2011, 20 % des 1 500 m² engazonnés sont remplacés par de la mousse, soit $\frac{20}{100} \times 1\,500 = 300$ m² sont remplacés par de la mousse.

Claude arrache 50 m² de mousse et la remplace par du gazon.

La surface engazonnée est alors de $1\,500 - 300 + 50$, soit 1 250 m², donc $u_1 = 1\,250$.

2.

$$\text{Diminuer une quantité de 20 \%, c'est multiplier cette quantité par } 1 - \frac{20}{100} = 0,8.$$

La surface engazonnée l'année $(2010 + n)$ est u_n . Chaque année, 20 % du gazon est détruit, donc il en reste 80 %, soit $0,80 \times u_n$. De plus, Claude remplace 50 m² de mousse par du gazon chaque année : donc, l'année $(2010 + n + 1)$, la surface engazonnée est donnée par :

$$u_{n+1} = 0,8 u_n + 50 \text{ pour tout nombre entier naturel } n.$$

On a obtenu l'expression d'une suite arithmético-géométrique.

On veut montrer que la suite (v_n) est géométrique. Pour cela, on exprime v_{n+1} en fonction de v_n .

Si chaque terme de la suite est obtenu en multipliant le terme précédent par un nombre constant, alors la suite est géométrique, de raison le nombre trouvé.

Dans le cas d'une suite arithmético-géométrique, la raison de la suite introduite est toujours le nombre en facteur devant u_n dans la relation de récurrence : $u_{n+1} = 0,8 u_n + 50$, donc il faudra démontrer que la raison est **0,8**.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 250 = 0,8 u_n + 50 - 250 \\ &= 0,8 u_n - 200 \\ &= 0,8 \left(u_n - \frac{200}{0,8} \right) \quad \text{on factorise par 0,8 pour faire apparaître } v_n \\ &= 0,8 (u_n - 250) \\ &= 0,8 v_n \\ v_{n+1} &= 0,8 v_n \text{ donc la suite } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = 0,8. \end{aligned}$$

Autre méthode de calcul

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 250 = 0,8 u_n + 50 - 250 \\ &= 0,8 u_n - 200 \quad \text{on utilise la relation donnée } v_n = u_n - 250, \\ &\quad \text{donc } u_n = v_n + 250 \\ &= 0,8 (v_n + 250) - 200 \\ &= 0,8 v_n + 200 - 200 = 0,8 v_n. \end{aligned}$$

Le premier terme est $v_0 = u_0 - 250$, soit **$v_0 = 1\,250$** .

On exprime ensuite v_n en fonction de n en utilisant la relation suivante :

Pour tout entier naturel n : **$v_n = v_0 \times q^n$** d'où : **$v_n = 1\,250 \times 0,8^n$** .

$v_n = u_n - 250$, donc $u_n = v_n + 250$, soit :

Pour tout entier naturel n : **$u_n = 250 + 1\,250 \times 0,8^n$** .

Pour déterminer la surface engazonnée au bout de 4 ans, on calcule u_4 .

$$u_4 = 250 + 1\,250 \times 0,8^4, \text{ d'où } u_4 = 762.$$

La surface de terrain engazonné au bout de 4 ans sera de 762 m².

4. a) On cherche n tel que $u_n < 500$, soit $250 + 1\,250 \times 0,8^n < 500$.

$$250 + 1\,250 \times 0,8^n < 500 \Leftrightarrow 1\,250 \times 0,8^n < 250$$

$$\Leftrightarrow 0,8^n < \frac{250}{1250}$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,8^n) < \ln\left(\frac{1}{5}\right) \quad \text{car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,8) < \ln\left(\frac{1}{5}\right) \quad \text{pour } a > 0 \text{ et } n \text{ entier, } \ln(a^n) = n \ln(a)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\ln(0,8)} \approx 7,2 \quad \text{car } \ln(0,8) < 0$$

C'est donc au bout de 8 ans, soit en 2018, que la surface de terrain engazonné sera inférieure à 500 m².

Avec la calculatrice pour une vérification

On fait afficher le tableau de valeurs de la calculatrice pour donner les termes successifs de la suite (u_n) :

n	$u(n)$
2	1050
3	890
4	762
5	659,6
6	577,68
7	512,14
8	459,71
$u(n)=459.7152$	

Le tableau permet de vérifier que $u_7 > 500$ et $u_8 < 500$. C'est donc pour $n = 8$, soit en 2018, que la surface engazonnée sera inférieure à 500 m².

Le but est de calculer la première valeur de n telle que $u_n < 500$, donc de calculer u_n tant qu'il reste supérieur à 500.

L'instruction à afficher est « Tant que $u \geq 500$ faire ».

La variable u de l'algorithme permet d'obtenir les termes successifs de u_n , donc il faut lui appliquer la relation de récurrence obtenue à la question 3. b).

L'instruction à afficher est « u prend la valeur $0,8*u + 50$ ».

La valeur de n doit suivre les années, donc être augmentée de 1 chaque année.

L'instruction à afficher est « n prend la valeur $n + 1$ ».

Attention ! Si l'on utilise la relation qui donne l'expression de la suite (u_n) obtenue à la question 3. b), on obtient 9 comme valeur pour n : il faudrait alors faire afficher $n - 1$ au lieu de n et l'instruction aurait été « u prend la valeur $250 + 1250*0,8^n$ ».

En programmant l'algorithme avec le logiciel Albox, on obtient la valeur de n souhaitée :

CODE DE L'ALGORITHME :

```

1  VARIABLES
2  n EST_DU_TYPE NOMBRE
3  u EST_DU_TYPE NOMBRE
4  DEBUT_ALGORITHME
5  n PREND_LA_VALEUR 0
6  u PREND_LA_VALEUR 1500
7  TANT_QUE (u ≥ 500) FAIRE
8  DEBUT_TANT_QUE
9  u PREND_LA_VALEUR 0.8*u+50
10 n PREND_LA_VALEUR n+1
11 FIN_TANT_QUE
12 AFFICHER "n = "
13 AFFICHER n
14 FIN_ALGORITHME

```

Résultats

```

***Algorithme lancé***
n = 9
***Algorithme terminé***

```

5. Si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

$0 < 0,8 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

$u_n = v_n + 250$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 250$.

On peut considérer qu'à terme, la surface engazonnée sera de 250 m^2 : les mauvaises herbes ne pourront donc pas envahir totalement son jardin.

Autre méthode

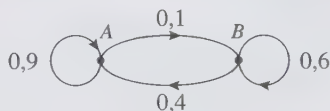
$u_n = 250 + 1250 \times 0,8^n$ et, pour tout entier naturel n , $1250 \times 0,8^n > 0$, donc $u_n > 250$: ainsi, les mauvaises herbes ne pourront pas envahir totalement son jardin.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

1. a)

Si Alice réussit son tir, elle réussit son tir suivant avec une probabilité de 0,9, donc elle échoue avec une probabilité de 0,1. Si elle ne réussit pas son tir, elle réussit le suivant avec une probabilité de 0,4, donc elle échoue au suivant avec une probabilité de 0,6.

Le graphe probabiliste représentant la situation est donc le suivant :



b)

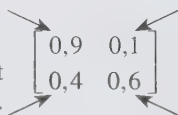
Si l'on considère que P_n la matrice ligne $[a_n \ b_n]$ correspondant à l'état du $n^{\text{ième}}$ tir et P_{n+1} la matrice ligne $[a_{n+1} \ b_{n+1}]$ correspondant à l'état du $(n+1)^{\text{ème}}$ tir, alors $P_{n+1} = P_n \times M$, où M est la matrice de transition associée au graphe probabiliste.

On a si l'on prend les lettres dans l'ordre alphabétique $M = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$.

Alice réussit le tir n et le tir $n+1$.

Alice réussit le tir n , puis échoue au tir $n+1$.

Alice échoue au tir n , puis réussit le tir $n+1$.



Alice échoue au tir n et au tir $n+1$.

c) Pour tout entier $n > 0$, on a $a_n + b_n = 1$; en particulier, $a_1 + b_1 = 1$.

Au premier lancer, Alice a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer, donc : $a_1 = b_1$.

Finalement, $a_1 + b_1 = 1$ et $a_1 = b_1$ donc $a_1 = b_1 = 0,5$.

L'état initial est donc représenté par la matrice ligne $P_1 = [0,5 \ 0,5]$.

$P_2 = [a_2 \ b_2]$, où P_2 s'obtient avec la relation $P_2 = P_1 \times M$.

$P_2 = [0,5 \times 0,9 + 0,5 \times 0,4 \quad 0,5 \times 0,1 + 0,5 \times 0,6]$, donc $P_2 = [0,65 \ 0,35]$.

2. a) De la relation matricielle $P_{n+1} = P_n \times M$, on obtient, pour tout n entier naturel strictement positif :

$P_{n+1} = [a_{n+1} \ b_{n+1}] = [a_n \ b_n] \times M = [a_n \times 0,9 + b_n \times 0,4 \quad a_n \times 0,1 + b_n \times 0,6]$

$a_{n+1} = a_n \times 0,9 + b_n \times 0,4$, soit, pour tout entier $n > 0$, $a_{n+1} = 0,9 a_n + 0,4 b_n$.

On a aussi, pour tout entier $n > 0$, $b_{n+1} = 0,1 a_n + 0,6 b_n$.

b) D'autre part, soit elle réussit son tir, soit elle échoue ; on a alors, pour tout n entier naturel strictement positif, $a_n + b_n = 1$. De cette relation, on obtient $b_n = 1 - a_n$. On en déduit : $a_{n+1} = a_n \times 0,9 + b_n \times 0,4 = a_n \times 0,9 + (1 - a_n) \times 0,4 = 0,9 a_n + 0,4 - 0,4 a_n$. Et donc, pour tout entier $n > 0$, $a_{n+1} = 0,5 a_n + 0,4$.

3. a) Dans l'algorithme, les nombres a et b vont permettre de calculer les termes successifs des suites (a_n) et (b_n) . On peut remarquer que les deux suites sont bien initialisées à 0,5. La ligne à compléter est celle correspondant au calcul des termes de la suite (a_n) . Deux options sont possibles :

- On utilise la relation trouvée à la question 2. a) : pour tout entier $n > 0$, $a_{n+1} = 0,9 a_n + 0,4 b_n$.

L'instruction à donner est alors : « a prend la valeur $0,9 \times a + 0,4 \times b$ ».

- On utilise la relation trouvée à la question 2. b) : pour tout entier $n > 0$, $a_{n+1} = 0,5 a_n + 0,4$.

L'instruction à donner est alors : « a prend la valeur $0,5 \times a + 0,4$ ».

b) La question posée demande de faire tourner l'algorithme. On peut utiliser différentes méthodes :

- On programme la suite (a_n) en entrant son expression trouvée à la question 2. b) dans la calculatrice, ci-dessous avec une calculatrice TI.

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=1
u(n)B1.5u(n-1)
u(nMin)B(.5)
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=
w(nMin)=

```

n	u(n)
1	.5
2	.65
3	.725
4	.7625
5	.78125
6	.79063
7	.79531
u(n)=.78125	

On demande ensuite d'afficher le tableau de valeurs avec un début à 1 et un pas de 1.

Le résultat est surligné dans le tableau ci-dessus, soit $a_5 = 0,78125$.

On en déduit alors $b_5 = 1 - a_5 = 1 - 0,78125$, soit $b_5 = 0,21875$.

Quelques remarques sur la calculatrice

– La calculatrice donne le terme u_n , alors que la relation de récurrence donne a_{n+1} en fonction de a_n : $a_{n+1} = 0,5 a_n + 0,4$. Il faut donc entrer celle-ci au rang précédent pour les TI, soit : $a_n = 0,5 a_{n-1} + 0,4$.

– Attention à l'affichage ! On demande une valeur exacte ; ainsi, pour être sûr qu'on n'a pas seulement une valeur approchée, on place le curseur sur le résultat attendu, et en bas de l'écran, on a la valeur affichée par la calculatrice.

Méthode de programmation de la suite (a_n)

→ Avec une calculatrice TI en mode Suite :

– Appuyer sur la touche $f(x)$ pour entrer le terme général :

– La plus petite valeur de n dans $nMin$ est 1.

– Entrer l'expression de a_n ou u_n (comme pour une fonction) en fonction de a_{n-1} ou u_{n-1} .

– Comme la suite (a_n) est définie par une relation de récurrence, entrer le premier terme dans $u(nMin)$.

– Afficher le tableau de valeurs de la même façon que pour les fonctions, mais la première valeur de n et le pas doivent être des entiers.

→ Avec une calculatrice Casio, choisir le menu suites avec **MENU** RECUR, puis **TYPE** pour le type de suite :

– **F2** si l'on a une relation entre a_{n+1} et a_n .

– Entrer la suite comme une fonction, puis les éléments pour la définir avec **SET** :

– La première valeur de n dans **Start**.

– La dernière valeur de n dans **End**.

– L'expression de a_n (comme pour une fonction) :

– Comme la suite (a_n) est définie par une relation de récurrence, entrer le premier terme dans a_0 ou a_1 .

– Afficher le tableau de valeurs avec **TABLE**.

• On a la relation de récurrence fournie par les matrices, à savoir $P_{n+1} = P_n \times M$.

L'état probabiliste à l'étape $n+1$ est $P_{n+1} = P_n \times M$ et on a alors, pour $n > 0$, $P_n = P_1 \times M^{n-1}$.

Pour $n = 5$ et $P_5 = P_1 \times M^4 = (0,5 \quad 0,5) \times M^4$, d'après le calcul effectué avec la calculatrice, on a :

$P_5 = (0,78125 \quad 0,21875)$. On en déduit : $a_5 = 0,78125$ et $b_5 = 0,21875$.

L'écran ci-contre a été obtenu en entrant la matrice P_1 dans A et la matrice M dans B.

Le premier calcul est celui de P_2 (question 2. a)) et le second calcul est celui de P_5 qui permet d'obtenir a_5 et b_5 .

• En programmant l'algorithme avec le logiciel Albox, on obtient les résultats a_5 et b_5 souhaités :

CODE DE L'ALGORITHME :

```
1  VARIABLES
2  n EST_DU_TYPE NOMBRE
3  i EST_DU_TYPE NOMBRE
4  a EST_DU_TYPE NOMBRE
5  b EST_DU_TYPE NOMBRE
6  DEBUT_ALGORITHME
7  LIRE n
8  b PREND_LA_VALEUR 0.5
9  a PREND_LA_VALEUR 0.5
10 POUR i ALLANT_DE 2 A n
11   DEBUT_POUR
12   a PREND_LA_VALEUR 0.9*a+0.4*b
13   b PREND_LA_VALEUR 1-a
14   FIN_POUR
15 AFFICHER "a("
16 AFFICHER n
```

Résultats

4. a) On veut montrer que la suite (u_n) est géométrique. Pour cela, on exprime u_{n+1} en fonction de u_n .

Si chaque terme de la suite est obtenu en multipliant le terme précédent par un nombre constant, alors la suite est géométrique, de raison le nombre trouvé.

Dans le cas d'une suite arithmético-géométrique, la raison de la suite introduite est toujours le nombre en facteur devant a_n dans la relation de récurrence : $a_{n+1} = 0,5 a_n + 0,4$, donc il faudra démontrer que la raison est **0,5**.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,8 = 0,5 a_n + 0,4 - 0,8 \\ &= 0,5 a_n - 0,4 \\ &= 0,5 \left(a_n - \frac{0,4}{0,5} \right) \quad \text{on factorise par 0,5 pour faire apparaître } u_n \\ &= 0,5 (a_n - 0,8) \\ &= 0,5 u_n. \end{aligned}$$

$u_{n+1} = 0,5 u_n$ donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,5$.

Autre méthode de calcul

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,8 = 0,5 a_n + 0,4 - 0,8 \\ &= 0,5 a_n - 0,4 \quad \text{on utilise la relation donnée } u_n = a_n - 0,8, \text{ donc } a_n = u_n + 0,8 \\ &= 0,5 (u_n + 0,8) - 0,4 \\ &= 0,5 u_n + 0,4 - 0,4 = 0,5 u_n. \end{aligned}$$

Le premier terme est $u_1 = a_1 - 0,8$, donc $u_1 = -0,3$.

b) On exprime ensuite u_n en fonction de n en utilisant la relation suivante :

Pour tout entier naturel $n > 0$: $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ d'où : $u_n = -0,3 \times 0,5^{n-1}$.

$a_n = u_n + 0,8$ donc, pour tout entier naturel $n > 0$, $a_n = 0,8 - 0,3 \times 0,5^{n-1}$.

c) L'énoncé suggère de calculer la limite de la suite (a_n) .

Si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

$$0 < 0,5 < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n-1} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

$$a_n = u_n + 0,8, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,8.$$

On peut considérer qu'à long terme, Alice atteindra sa cible avec une probabilité égale à 0,8 (soit 4 fois sur 5).

d) Une autre méthode aurait été le calcul de l'état probabiliste stable.

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, l'état probabiliste P_n tend vers un état stable P indépendant de l'état initial, tel que $P = P \times M$.

La question posée revient donc à déterminer l'état stable $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ qui doit vérifier $P = P \times M$ ou encore,

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix} \text{ avec } a + b = 1 \text{ ou } b = 1 - a.$$

$$\text{On doit donc résoudre le système : } \begin{cases} a = 0,9a + 0,4b \\ b = 0,1a + 0,6b \\ a + b = 1. \end{cases}$$

La première équation donne :

$$a = a \times 0,9 + (1 - a) \times 0,4 \Leftrightarrow a - 0,9a + 0,4a = 0,4 \Leftrightarrow 0,5a = 0,4$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{0,4}{0,5} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$b = 1 - a = 0,2$$

L'état probabiliste stable est donc $P = (0,8 \quad 0,2)$; on peut considérer qu'à long terme, Alice atteindra sa cible avec une probabilité égale à 0,8 (soit 4 fois sur 5).

EXERCICE 3

Partie A

1.

Pour tout intervalle $J = [c ; d]$ inclus dans l'intervalle $I = [a ; b]$, la probabilité $P(X \in J)$, où X suit une loi uniforme sur I , est donnée par :

$$P(X \in J) = \int_c^d f(x) dx = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{d-c}{b-a} = \frac{\text{longueur de } J}{\text{longueur de } I}.$$

$$p = P(X \geq 30) = P(30 \leq X \leq 60) = \frac{60-30}{60-20} = \frac{30}{40} = 0,75.$$

La probabilité p pour que l'entraînement dure plus de 30 minutes est égale à 0,75.

2.

L'espérance de la loi uniforme sur $[a ; b]$ est : $E(X) = \frac{b+a}{2}$; c'est le centre de l'intervalle.

$$E(X) = \frac{60+20}{2}, \text{ soit } E(X) = 40.$$

Antoine s'entraîne en moyenne 40 minutes par jour.

Partie B

1.

Par symétrie de la courbe de la loi normale d'espérance μ , on a toujours :

$$p(X \geq \mu) = p(X \leq \mu) = 0,5.$$

$$p_1 = p(X \leq 57) = 0,5 \text{ car } 57 \text{ est l'espérance.}$$

La probabilité p_1 que la boule prélevée ait un diamètre inférieur à 57 mm est égale à 0,5.

2. Si la boule est de premier choix, son diamètre est compris entre 56,75 mm et 57,25 mm.

Si D est une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne 57 et d'écart type 0,11 alors :

$$p_2 = p(56,75 \leq D \leq 57,25) \text{ s'obtient à la calculatrice par :}$$

• calculatrice Casio par : **MENU**, choisir **STAT DIST NORM Ncd**
 $(56.75, 57.25, 0.11, 57)$.

• calculatrice Texas par : **distrib** (**2nde** **var**)), choisir **normalFRép**
(56,75,57,25,57,0,11).

$p_2 = p(56,75 \leq D \leq 57,25) \approx 0,977$ arrondi au millième.

La probabilité p_2 que la boule prélevée soit une boule de premier choix est environ égale à 0,977.

3. L'événement « la boule prélevée est une boule de second choix » est l'événement contraire de « la boule prélevée est une boule de premier choix ».

On a alors $p_3 = 1 - p_2 \approx 0,023$.

La probabilité p_3 que la boule prélevée soit une boule de second choix est environ égale à 0,023.

Partie C

1. Sur les 80 adhérents, 66 étaient satisfaits, donc $f = \frac{66}{80} = \frac{33}{40} = 0,825$.

La fréquence observée de personnes satisfaites à la FFB est 0,825.

2.

Soit f , la fréquence du caractère étudié, observée dans un échantillon représentatif de la population.

Si n est « assez grand », l'intervalle de confiance au seuil de confiance de 95 % est :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

En pratique, on considère que n est « assez grand » sous les conditions : $n \geq 30$; $nf \geq 5$ et $n(1 - f) \geq 5$.

$n = 80 \geq 30$; $nf = 80 \times 0,825 = 66 \geq 5$; $n(1 - f) = 80 \times 0,175 = 14 \geq 5$.

Les trois conditions pour n assez grand sont vérifiées, donc l'intervalle de confiance, au niveau de 95 %, de la proportion de licenciés satisfaits de la FFB, est :

$$I = \left[0,825 - \frac{1}{\sqrt{80}} ; 0,825 + \frac{1}{\sqrt{80}} \right], \text{ donc, en arrondissant les bornes au millième :}$$

$$I \approx [0,713 ; 0,937].$$

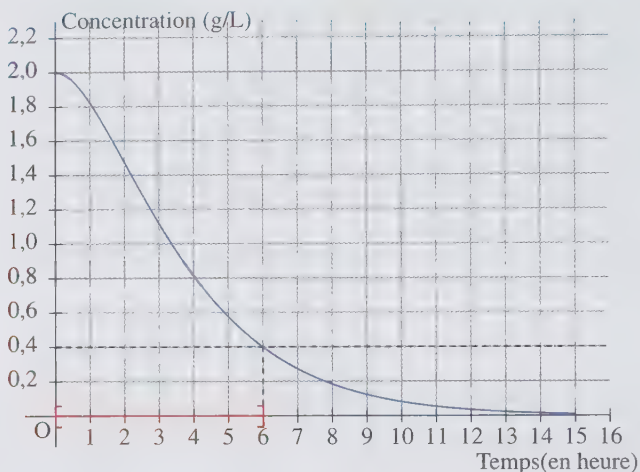
La borne inférieure est donnée par défaut et la borne supérieure est par excès.

EXERCICE 4

Partie C

1. Cette concentration se lit à $t = 0$ et le point de coordonnées $(0 ; 2)$ appartient à la courbe, d'où la concentration initiale est de 2 g/L.

2.



On cherche les abscisses des points de la courbe situés sur ou au-dessus de la droite d'équation $y = 0,4$.

L'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure à $0,4$ g/L est $[0 ; 6]$.

Partie B

1. f est de la forme $f = u \times v$, donc $f' = u'v + uv'$, avec $u(x) = x + 2$, $u'(x) = 1$.
 v est de la forme $v = e^u$, donc $v' = u' e^u$, soit $v(x) = e^{-0,5x}$, $v'(x) = -0,5e^{-0,5x}$.
 Donc, pour tout $x \in [0 ; 15]$, $f'(x) = 1 \times e^{-0,5x} + (x + 2) \times (-0,5e^{-0,5x})$

$$f'(x) = 1 \times e^{-0,5x} - (x + 2) \times 0,5e^{-0,5x}$$

$$f'(x) = e^{-0,5x} (1 - 0,5(x + 2))$$

$$f'(x) = e^{-0,5x} (1 - 0,5x - 1)$$

$$f'(x) = -0,5xe^{-0,5x}$$

Le sens de variation de f sur $[0 ; 15]$ est donné par le signe de f' sur $[0 ; 15]$.

Or, pour tout $x > 0$, $e^{-0,5x} > 0$ et $-0,5x < 0$, donc, par produit, $f'(x) < 0$ sur $[0 ; 15]$.

Ainsi, f est strictement décroissante sur $[0 ; 15]$.

On obtient le tableau de variations ci-dessous :

x	0	15
Signe de $f'(x)$	0	-
Sens de variations de f	2	$f(15)$

avec $f(15) = 17e^{-7,5} \approx 0,0094$.

2. Sur l'intervalle $[0 ; 15]$, $f(x)$ passe de façon continue de 2 à $f(15) \approx 0,0094$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,1$ possède au moins

une solution. Comme f est strictement décroissante sur $[0 ; 15]$, l'équation $f(x) = 0,1$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[0 ; 15]$.

Illustration

x	0	α	15
Signe de $f'(x)$	0	-	
Sens de variations de f	2	0,1	0,0094

3. À la calculatrice, $f(9,5) \approx 0,09949 < 0,1$ et $f(9,4) \approx 0,1037 > 0,1$, donc $9,4 < \alpha < 9,5$.

4. Le logiciel de calcul formel affiche :

en instruction 1 : l'expression de $f'(x)$ non factorisée,

en instruction 2 : l'expression de la dérivée de $f'(x)$ non factorisée,
c'est-à-dire l'expression de $f''(x)$,

en instruction 3 : l'expression factorisée de $f''(x)$.

On lit : $f''(x) = (0,25x - 0,5)e^{-0,5x}$.

Pour étudier la convexité de la fonction f sur $[0 ; 15]$, on étudie le signe de f'' sur $[0 ; 15]$ en s'appuyant sur la propriété :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , f'' sa dérivée seconde.

f est convexe sur I si, et seulement si, f'' est positive sur I .

f est concave sur I si, et seulement si, f'' est négative sur I .

Or, $f''(x)$ est du signe de $(0,25x - 0,5)$ car, pour tout x , $e^{-0,5x} > 0$.

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 0,25x - 0,5 > 0 \Leftrightarrow 0,25x > 0,5 \Leftrightarrow x > 2$.

De même, $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 0,25x - 0,5 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.

On a aussi $f''(2) = 0$.

Donc f est concave sur $[0 ; 2]$ et f est convexe sur $[2 ; 15]$.

Le point $C(c ; f(c))$ est un point d'inflexion pour la courbe C_f si, et seulement si, $f''(x)$ s'annule en $x = c$ en changeant de signe.

Le point $A(2 ; f(2))$ est un point d'inflexion pour la courbe de la fonction f , car, en ce point la fonction f'' s'annule en changeant de signe.

Partie C

1. Le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à $0,1$ g/L, c'est-à-dire lorsque $f(x) < 0,1$.

x	0	α	15
Signe de $f'(x)$	0	-	
Sens de variations de f	2	0,1	0,0094

D'après le tableau de variations de f , $f(x) < 0,1 \Leftrightarrow x > \alpha$ et $f(x) > 0,1 \Leftrightarrow x < \alpha$.

On a alors, $f(x) \geq 0,1 \Leftrightarrow x \in [0 ; \alpha]$.

Donc **le médicament reste actif pendant α heures, soit environ 9,4 heures ou 9 h 24 min.**

2. La concentration baisse pendant les 15 heures de l'étude car f est décroissante sur l'intervalle $[0 ; 15]$, mais cette baisse n'est pas uniforme et se fait plus ou moins rapidement. Clairement, sur le graphique, on observe que la baisse est plus rapide dans les premières heures qu'à la fin.

Plus précisément, la baisse s'accélère sur la partie concave de la courbe et se ralentit sur la partie convexe. Ainsi, la baisse de concentration ralentit au point d'inflexion. **La baisse de la concentration ralentit au bout de 2 heures.**

Remarque : Si le déplacement d'un point est modélisé par une fonction f , sa vitesse est modélisée par la dérivée de f et l'accélération par la dérivée seconde de f . La vitesse diminue lorsque l'accélération devient négative, soit lorsque la fonction est concave. On peut assimiler la baisse de la concentration à une vitesse et donc elle ralentit lorsque la concentration est une fonction concave.

France métropolitaine

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

- Exercice 1 : 50 min.
- Exercice 2 : 40 min.
- Spécialité exercice 2 : 40 min.
- Exercice 3 : 40 min.
- Exercice 4 : 30 min.

EXERCICE 1 Probabilités – Loi uniforme, Loi normale,
Loi binomiale, Espérance, Intervalle de fluctuation (6 points)

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis au millième près.

1. Un supermarché dispose de plusieurs caisses. Un client qui se présente à une caisse doit attendre un certain temps T_1 avant d'être pris en charge par le caissier. On considère que ce temps d'attente T_1 , exprimé en minute, est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 12]$.

a) Quelle est la probabilité qu'un client attende au moins 5 minutes avant d'être pris en charge ?

b) Quel est le temps moyen d'attente à une caisse ?

2. Le gérant du magasin décide de mettre à disposition des clients des caisses automatiques, de façon à réduire le temps d'attente pour les clients ayant un panier contenant peu d'articles.

Le temps d'attente T_2 , exprimé en minute, à chacune de ces caisses automatiques est modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 5 et d'écart type 1,5.

Calculer la probabilité que le temps d'attente à une caisse automatique soit compris entre 0,75 minute et 6 minutes.

3. Ces caisses automatiques tombent souvent en panne. On donne les informations suivantes :

- Le nombre de caisses automatiques est $n = 10$.
- La probabilité qu'une caisse automatique tombe en panne pendant une journée donnée est $p = 0,1$.
- Une panne constatée sur une caisse automatique n'influence pas les autres caisses automatiques.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de caisses automatiques qui tombent en panne pendant une journée donnée.

- Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.
- Calculer la probabilité pour qu'aucune caisse automatique ne tombe en panne pendant une journée donnée.

4. Sur la devanture de son magasin, le gérant du supermarché affiche :

« Plus de 90 % des clients de notre magasin sont satisfaits par la mise en place de nos caisses automatiques. »

Une association de consommateurs souhaite examiner cette affirmation. Pour cela, elle réalise un sondage : 860 clients sont interrogés, et 763 d'entre eux se disent satisfaits par la mise en place de ces caisses automatiques.

Cela remet-il en question l'affirmation du gérant ?

Corrige page 202

EXERCICE 2 Suites – Algorithmique (5 points)

Au 1^{er} janvier 2017, une association sportive compte 900 adhérents. On constate que chaque mois :

- 25 % des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 12 nouvelles personnes décident d'adhérer à l'association.

PARTIE A

On modélise le nombre d'adhérents de l'association par la suite (u_n) telle que $u_0 = 900$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 12$.

Le terme u_n donne ainsi une estimation du nombre d'adhérents de l'association au bout de n mois.

I. Déterminer une estimation du nombre d'adhérents au 1^{er} mars 2017.

II. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 48$, pour tout entier naturel n .

III. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

b) Préciser v_0 et exprimer v_n en fonction de n .

c) En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 852 \times 0,75^n + 48.$$

3. La présidente de l'association déclare qu'elle démissionnera si le nombre d'adhérents devient inférieur à 100. Si l'on fait l'hypothèse que l'évolution du nombre d'adhérents se poursuit de la même façon, faudra-t-il que la présidente démissionne ? Si oui, au bout de combien de mois ?

PARTIE B

Chaque adhérent verse une cotisation de 10 euros par mois. Le trésorier de l'association souhaite prévoir le montant total des cotisations pour l'année 2017. Le trésorier souhaite utiliser l'algorithme suivant dans lequel la septième et la dernière ligne sont restées incomplètes (pointillés).

Recopier et compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le montant total des cotisations de l'année 2017.

Variables	S est un nombre réel N est un entier U est un nombre réel
Initialisation	S prend la valeur 0 U prend la valeur 900
	Pour N allant de 1 à 12 : Affecter à S la valeur ... Affecter à U la valeur $0,75U+12$ Fin pour
Sortie	...

Quelle est la somme totale des cotisations perçues par l'association pendant l'année 2017 ?

Corrigé page 204

SPECIALITÉ EXERCICE 2 Suites – Graphe pondéré, Graphe probabiliste (5 points)

PARTIE A

Dans un jeu vidéo, une suite d'énigmes est proposée au joueur. Ces énigmes sont classées en deux catégories : les énigmes de catégorie A sont les énigmes faciles ; les énigmes de catégorie B sont les énigmes difficiles.

Le choix des énigmes successives est aléatoire et vérifie les conditions suivantes :

- la première énigme est facile ;
- si une énigme est facile, la probabilité que la suivante soit difficile est égale à 0,15 ;

- si une énigme est difficile, la probabilité que la suivante soit facile est égale à 0,1.
- Pour $n \geq 1$, on note :
- a_n , la probabilité que l'énigme numéro n soit facile (de catégorie A) ;
 - b_n , la probabilité que l'énigme numéro n soit difficile (de catégorie B) ;
 - $P_n = (a_n \ b_n)$, l'état probabiliste pour l'énigme numéro n .

1. Donner la matrice P_1 .

2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

3. Écrire la matrice M associée à ce graphe, puis donner la matrice ligne P_2 .

4. Sachant que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $a_n + b_n = 1$, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $a_{n+1} = 0,75a_n + 0,1$.

5. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $v_n = a_n - 0,4$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer v_n en fonction de n , puis montrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

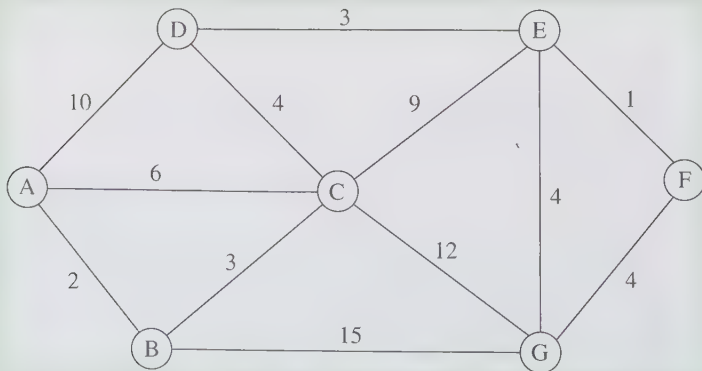
$$a_n = 0,8 \times 0,75^n + 0,4.$$

c) Préciser la limite de la suite (v_n) .

d) Une revue spécialisée dans les jeux vidéo indique que plus le joueur évolue dans le jeu plus il risque d'avoir à résoudre des énigmes difficiles. Que penser de cette analyse ?

PARTIE B

Une des énigmes consiste à réaliser un parcours en le minimum de temps. Le graphe suivant schématise le parcours. L'étiquette de chaque arête indique le temps de parcours, en minute, entre les deux sommets qu'elle relie. Par exemple, le temps de parcours de C vers D, ou de D vers C, est égal à quatre minutes.



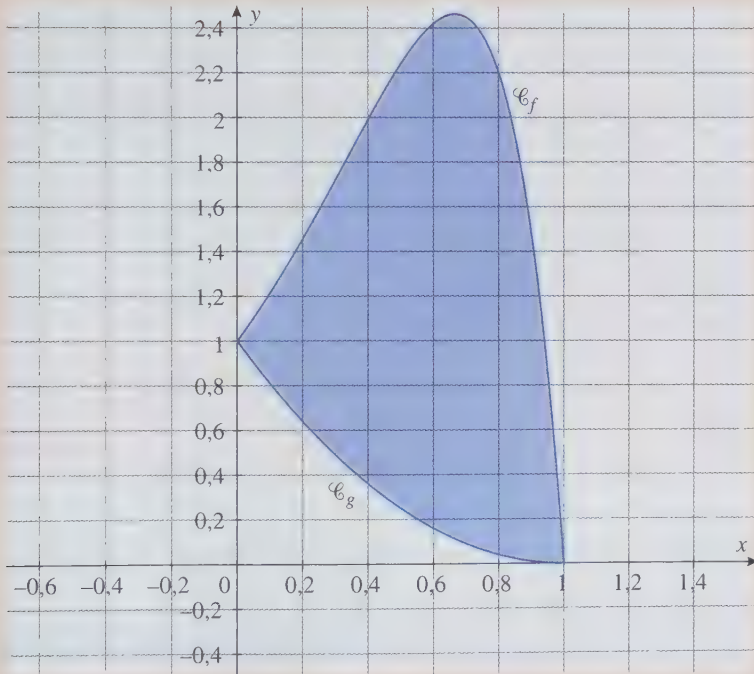
Quel chemin le joueur doit-il prendre pour aller de A à G en minimisant son temps de parcours ? Expliquer la démarche utilisée.

EXERCICE 3 Fonctions – Fonction exponentielle, Convexité, Aire (6 points)

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication. Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies par :

pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $f(x) = (1 - x)e^{3x}$ et $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

Leurs courbes représentatives seront notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants.

```
dériver((1-x)*exp(3x))
: -3x*exp(3*x)+2*exp(3*x)
```

```
factoriser(-3x*exp(3*x)+2*exp(3*x))
: exp(3x)*(-3x+2)
```

```
factoriser(dériver(exp(3x)*(-3x+2)))
: 3*exp(3*x)(1-3x)
```

Lecture : la dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x) = -3xe^{3x} + 2e^{3x}$, ce qui, après factorisation, donne $f'(x) = (-3x + 2)e^{3x}$.

1. Étudier sur $[0 ; 1]$ le signe de la fonction dérivée f' , puis donner le tableau de variations de f sur $[0 ; 1]$ en précisant les valeurs utiles.
2. La courbe $\mathcal{C}_f$ possède un point d'inflexion. Déterminer ses coordonnées.

Partie B

On se propose de calculer l'aire de la partie en bleu sur le graphique.

1. Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives $(1 ; 0)$ et $(0 ; 1)$ sont des points communs aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2. On admet que : pour tout x dans $[0 ; 1]$, $f(x) - g(x) = (1 - x)(e^{3x} - 1 + x)$.

a) Justifier que, pour tout x dans $[0 ; 1]$, $e^{3x} - 1 \geq 0$.

b) En déduire que, pour tout x dans $[0 ; 1]$, $e^{3x} - 1 + x \geq 0$.

c) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$, pour tout x dans $[0 ; 1]$.

3. a) Calculer $\int_0^1 g(x) dx$.

b) On admet que : $\int_0^1 f(x) dx = \frac{e^3 - 4}{9}$.

Calculer l'aire S , en unité d'aire, de la partie en bleu. Arrondir le résultat au dixième.

Corrigé page 209

EXERCICE 4 Statistiques – Intervalle de fluctuation, Logarithme, Pourcentages (3 points)

Dans cet exercice, on considère le premier chiffre des entiers naturels non nuls, en écriture décimale. Par exemple, le premier chiffre de 2017 est 2 et le premier chiffre de 95 est 9.

Dans certaines circonstances, le premier chiffre d'un nombre aléatoire non nul peut être modélisé par une variable aléatoire X telle que, pour tout entier c compris entre 1 et 9,

$$P(X = c) = \frac{\ln(c + 1) - \ln(c)}{\ln(10)}$$

Cette loi est appelée loi de Benford.

1. Que vaut $P(X = 1)$?

2. On souhaite examiner si la loi de Benford est un modèle valide dans deux cas particuliers.

a) Premier cas.

Un fichier statistique de l'INSEE indique la population des communes en France au 1^{er} janvier 2016 (champ : France métropolitaine et départements d'outre-mer de la Guadeloupe, de la Guyane, de la Martinique et de la Réunion). À partir de ce fichier, on constate qu'il y a 36 677 communes habitées. Parmi elles, il y a 11 094 communes dont la population est un nombre qui commence par le chiffre 1.

Cette observation vous semble-t-elle compatible avec l'affirmation : « le premier chiffre de la population des communes en France au 1^{er} janvier 2016 suit la loi de Benford » ?

b) Deuxième cas.

Pour chaque candidat au baccalauréat de la session 2017, on considère sa taille en centimètres.

On désigne par X la variable aléatoire égale au premier chiffre de la taille en centimètres d'un candidat pris au hasard.

La loi de Benford vous semble-t-elle une loi adaptée pour X ?

Corrigé page 211

Corrigés

EXERCICE 1

1. a)

Soit T_1 une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur un intervalle $I = [a ; b]$. Pour tout intervalle $J = [c ; d]$ inclus dans l'intervalle $I = [a ; b]$, la probabilité $P(T_1 \in J)$ est donnée par :

$$P(T_1 \in J) = P(c \leq T_1 \leq d) = \frac{d - c}{b - a}.$$

Dans le cas présent, on cherche à déterminer $P(T_1 \geq 5)$ pour une variable aléatoire T_1 prenant ses valeurs dans l'intervalle $I = [0 ; 12]$.

$$\text{Donc } P(T_1 \geq 5) = P(5 \leq T_1 \leq 12) = \frac{12 - 5}{12 - 0} = \frac{7}{12} \approx 0,583.$$

La probabilité qu'un client attende au moins 5 minutes est environ 0,583.

b)

La moyenne en statistique s'appelle l'espérance.

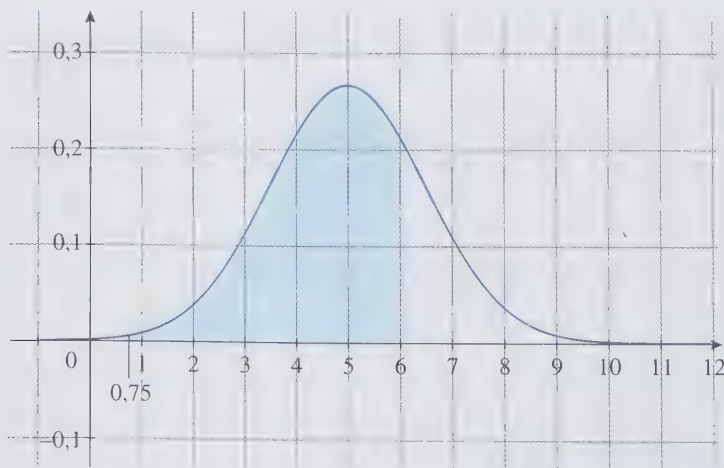
L'espérance d'une variable aléatoire T_1 qui suit une loi uniforme sur un intervalle $I = [a ; b]$ est :

$$E(T_1) = \frac{a + b}{2}.$$

$$\text{Donc } E(T_1) = \frac{0 + 12}{2} = 6.$$

Le temps moyen d'attente à une caisse est de 6 minutes.

2.



$P(0,75 \leq T_2 \leq 6)$ s'obtient à la calculatrice par la séquence de touches suivante :

- avec une calculatrice Casio par : **MENU**, choisir **STAT DIST NORM Ncd** (0.75, 6, 1.5, 5).

• avec une calculatrice Texas par : **distrib** (**2nde** **var**), choisir **normalFRép** (0,75, 6, 5, 1,5).

$P(0,75 \leq T_2 \leq 6) \approx 0,745$ arrondi au millième.

La probabilité que le temps d'attente à une caisse automatique soit compris entre 0,75 et 6 minutes est d'environ 0,745.

3. a) Tester une caisse automatique est une expérience de Bernoulli à deux issues : la caisse automatique est en panne (succès) ou ne l'est pas (échec). Le paramètre de cette expérience est $p = 0,1$.

Tester dix caisses automatiques identiques et indépendantes est un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès (caisse automatique en panne) suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,1$.

b)

Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n; p)$, où n est le nombre d'épreuves de Bernoulli et p la probabilité d'un succès, alors, pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n - k}.$$

La probabilité qu'aucune caisse ne tombe en panne est :

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} \times 0,1^0 \times (1 - 0,1)^{10 - 0} = 0,9^{10} \approx 0,349.$$

4.

Si n est « assez grand », alors la variable aléatoire F_n qui, à tout échantillon de taille n , associe la fréquence, prend ses valeurs dans l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % suivant :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1 - p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1 - p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

En pratique, on considère que n est « assez grand » sous les conditions : $n \geq 30$; $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$.

Dans le cas qui nous intéresse, $n = 860$ et $p = 0,9$.

$n = 860 > 30$; $np = 860 \times 0,9 = 774 > 5$ et $n(1 - p) = 860 \times 0,1 = 86 > 5$. Les trois conditions sont vérifiées.

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est donc :

$$I = \left[0,9 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,9(1 - 0,9)}}{\sqrt{860}} ; 0,9 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,9(1 - 0,9)}}{\sqrt{860}} \right] \approx [0,880 ; 0,920].$$

Dans l'échantillon sondé, 763 personnes sur 860 se disent satisfaites.

La fréquence correspondante est donc : $f = \frac{763}{860} \approx 0,887$. Donc $f \in I$: on ne peut pas

rejeter au risque de 5 % l'hypothèse formulée par le gérant du supermarché.

EXERCICE 2

Partie A

1. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75 u_n + 12$.

Donc $u_1 = 0,75 u_0 + 12 = 0,75 \times 900 + 12 = 687$.

$u_2 = 0,75 u_1 + 12 = 0,75 \times 687 + 12 \approx 527$.

Si le terme u_0 est une estimation du nombre d'adhérents au mois de janvier, alors u_2 est une estimation du nombre d'adhérents au mois de mars. **Ainsi, au mois de mars, on peut estimer le nombre d'adhérents à 527.**

2. a) Pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 48$ ou encore $u_n = v_n + 48$.

Donc, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = u_{n+1} - 48 = (0,75 u_n + 12) - 48 = 0,75 u_n - 36$

$$= 0,75(v_n + 48) - 36$$

$$= 0,75 v_n + 36 - 36 = 0,75 v_n.$$

Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,75 v_n$.

Ainsi, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,75$.

b) $v_0 = u_0 - 48 = 900 - 48 = 852$.

Pour tout entier naturel n , $v_n = q^n \times v_0$.

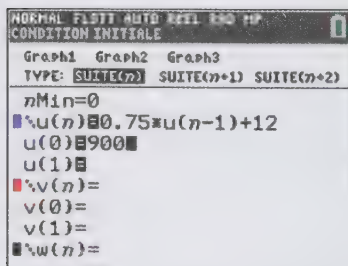
Donc, pour tout entier naturel n , $v_n = 852 \times (0,75)^n$.

• Pour tout entier naturel n , $u_n = v_n + 48$, soit $u_n = 852 \times (0,75)^n + 48$.

3. Méthode 1

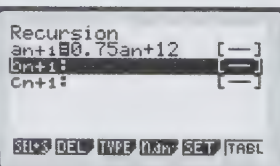
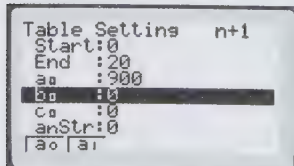
On calcule à l'aide de la calculatrice les termes de la suite que l'on affiche dans un tableau de valeurs.

• Avec une calculatrice TI, en utilisant le mode suite :



n	u(n)			
0	900			
1	687			
2	527.25			
3	407.44			
4	317.58			
5	250.18			
6	199.64			
7	161.73			
8	133.3			
9	111.97			
10	95.979			

• Avec une calculatrice Casio, dans le menu Recur pour l'écriture de la suite :



n+1	an+1
0	900.00
1	687.00
2	527.25
3	407.44
4	317.58
5	250.18
6	199.64
7	161.73
8	133.30
9	111.97
10	95.984

On observe que, pour $n = 9$, $u_9 = 852 \times 0,75^9 + 48 \approx 112 > 100$.

On observe que, pour $n = 10$, $u_{10} = 852 \times 0,75^{10} + 48 \approx 96 < 100$.

Il faudra donc que la présidente démissionne au bout de 10 mois.

Méthode 2

Si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (q)^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (0,75)^n = 0$ et, ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 852 \times 0 + 48 = 48$.

Cette limite traduit le fait que, au bout d'un grand nombre de mois, le nombre d'adhérents se stabilisera autour de 48, donc descendra en dessous des 100 personnes.

La présidente devra donc démissionner.

Méthode 3

On résout l'inéquation $u_n < 100$ dans l'ensemble des entiers naturels :

$$u_n < 100 \Leftrightarrow 852 \times 0,75^n + 48 < 100$$

$$\Leftrightarrow 852 \times 0,75^n < 52$$

$$\Leftrightarrow 0,75^n < \frac{52}{852}$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,75^n) < \ln\left(\frac{52}{852}\right) \text{ la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,75) < \ln\left(\frac{52}{852}\right) \text{ pour } a > 0, \ln(a^n) = n \ln a$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{52}{852}\right)}{\ln(0,75)} \quad \ln(0,75) < 0, \text{ donc on change le sens de l'inégalité.}$$

$$\frac{\ln\left(\frac{52}{852}\right)}{\ln(0,75)} \approx 9,7 \text{ donc la présidente démissionnera au bout de 10 mois.}$$

Partie B

1. Il s'agit d'ajouter les termes de la suite pour avoir la cotisation totale sur l'année. Il faut alors calculer la somme des termes. On complète ainsi les lignes :

Affecter à S la valeur S + U

Afficher S

2. • En programmant l'algorithme sur Algobox, on a :

```

CODE DE L'ALGORITHME :
1  VARIABLES
2  S EST_DU_TYPE NOMBRE
3  N EST_DU_TYPE NOMBRE
4  U EST_DU_TYPE NOMBRE
5  DEBUT_ALGORITHME
6  S PREND_LA_VALEUR 0
7  U PREND_LA_VALEUR 0,75
8  POUR N ALLANT_DE 1 A 12
9  DEBUT_POUR
10 S PREND_LA_VALEUR S+U
11 U PREND_LA_VALEUR 0,75*U+12
12 FIN_POUR
13 S PREND_LA_VALEUR S*10
14 AFFICHER S
15 FIN_ALGORITHME

RÉSULTATS :
***Algorithme lancé***
38760,47
***Algorithme terminé***

```

• On peut aussi ajouter les termes de $n = 0$ à $n = 11$. En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice (question A.1.) : $S = (900 + 687 + \dots + 83,984) \times 10 \approx 38\,760$.

La somme totale des cotisations perçues par l'association pendant l'année 2017 est de 38 760 € à l'euro près.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

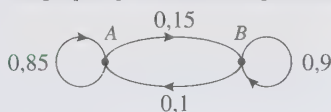
Partie A

1. La première énigme est facile, donc $P_1 = (1 \ 0)$.

2. Si une énigme est facile, la probabilité que la suivante soit difficile est 0,15 donc la probabilité qu'elle soit facile est 0,85.

Si une énigme est difficile, la probabilité que la suivante soit facile est 0,1 donc la probabilité qu'elle soit difficile est 0,9.

Le graphe probabiliste représentant la situation est par conséquent le suivant :



3. Si une énigme est facile, la probabilité que la suivante soit facile est 0,85

Si une énigme est facile, la probabilité que la suivante soit difficile est 0,15

$$\begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}$$

Si une énigme est difficile, la probabilité que la suivante soit facile est 0,1

Si une énigme est difficile, la probabilité que la suivante soit difficile est 0,9

La matrice de transition associée au graphe probabiliste est $M = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}$

$$P_2 = P_1 \times M = (1 \ 0) \times \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix} = (0,85 \ 0,15)$$

soit $P_2 = (0,85 \ 0,15)$.

4. On a, pour tout entier n , la relation : $P_{n+1} = P_n \times M$.

$$\text{Donc } (a_{n+1} \ b_{n+1}) = (a_n \ b_n) \times \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}.$$

$$\text{D'où } a_{n+1} = 0,85 a_n + 0,1 b_n.$$

$$\text{Mais } a_n + b_n = 1, \text{ donc } b_n = 1 - a_n.$$

Ainsi, $a_{n+1} = 0,85 a_n + 0,1(1 - a_n) = 0,85 a_n + 0,1 - 0,1a_n$ et donc
 $a_{n+1} = 0,75 a_n + 0,1$.

5. a) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $v_n = a_n - 0,4$ ou encore $a_n = v_n + 0,4$.
 Pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$v_{n+1} = a_{n+1} - 0,4 = 0,75 a_n + 0,1 - 0,4 = 0,75(v_n + 0,4) - 0,3 = 0,75 v_n + 0,3 - 0,3$$

soit $v_{n+1} = 0,75 v_n$.

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,75$.

Le premier terme est $v_1 = a_1 - 0,4 = 1 - 0,4 = 0,6$.

b)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ $v_n = q^{n-1} \times v_1$.

Donc $v_n = 0,75^{n-1} \times 0,6$.

Et $a_n = v_n + 0,4 = 0,75^{n-1} \times 0,6 + 0,4$.

Mais $0,75^{n-1} = \frac{0,75^n}{0,75}$, donc $a_n = \frac{0,75^n}{0,75} \times 0,6 + 0,4$ et $\frac{0,6}{0,75} = 0,8$

soit $a_n = 0,8 \times 0,75^n + 0,4$.

c) La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75 avec $0 < 0,75 < 1$. On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = 0.$$

d) Par opération sur les limites, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0,8 \times 0 + 0,4 = 0,4 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = 1 - 0,4 = 0,6.$$

Plus le joueur avance dans le jeu, plus il va avoir à résoudre des énigmes difficiles et, au fur et à mesure de l'avancement du jeu, la probabilité de résoudre une énigme difficile va se stabiliser à 0,6.

Partie B

Rechercher le chemin de durée minimale sur un graphe pondéré connexe revient à rechercher une plus courte chaîne à l'aide de l'algorithme de Dijkstra entre deux sommets (celui de départ A et celui d'arrivée G) en remplissant un tableau au fur et à mesure.

Étape 1 (première ligne)

- A est le sommet de départ, donc fixé avec la marque 0(A).
- Le trajet AB dure 2 minutes, donc B est marqué 2(A).
- Le trajet AD dure 10 minutes, donc D est marqué 10(A).
- Le trajet AC dure 6 minutes, donc C est marqué 6(A).
- Les autres sommets ne sont pas adjacents à A et sont marqués ∞ .

Étape 2 (deuxième ligne)

- B est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet B avec la marque 2(A).
- Le trajet AC dure 5 minutes en passant par B, donc C est marqué 5(B) qui est inférieur à la marque précédente 6(A).
- Le trajet AG dure 17 minutes en passant par B, donc G est marqué 17(B).
- D n'est pas relié à B et reste marqué 10(A).
- Les autres sommets ne sont pas adjacents à B et sont marqués ∞ .

Étape 3 (troisième ligne)

- C est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet C avec la marque 5(B).
- Le trajet AE dure 14 minutes en passant par C, donc E est marqué 14(C).
- Le trajet AG dure 17 minutes en passant par C, donc G reste marqué 17(B).
- Le trajet AD dure 9 minutes en passant par C, donc D est marqué 9(C) qui est inférieur à la marque précédente 10(A).
- F n'est pas adjacent à C, donc il reste marqué ∞ .

Étape 4 (quatrième ligne)

- D est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet D avec la marque 9(C).
- Le trajet AE dure 12 minutes en passant par D, donc E est marqué 12(D) qui est inférieur à 14(C).
- G et F ne sont pas adjacents à D et conservent leurs marques.

Étape 5 (cinquième ligne)

- E est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet E avec la marque 12(D).
- Le trajet AF dure 13 minutes en passant par E, donc F est marqué 13(E).
- Le trajet AG dure 16 minutes en passant par E, donc G est marqué 16(E) qui est inférieur à la marque précédente.

Étape 6 (sixième ligne)

- F est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet F avec la marque 13(E).
- Le trajet AG dure 17 minutes en passant par F, donc G reste marqué 16(E) qui est inférieur.

Dernière étape

- G est marqué 16(E).

On remonte l'algorithme en suivant les flèches de sommet en sommet :

Le trajet qui minimise le chemin allant de A à G est A-B-C-D-E-G. Ce trajet dure 16 minutes.

Étape	A	B	C	D	E	F	G	Sommet fixé
1	0(A)	2(A)	6(A)	10(A)	∞	∞	∞	A
2		2(A)	5(B)	10(A)	∞	∞	17(B)	B
3			5(B)	9(C)	14(C)	∞	17(B)	C
4				9(C)	12(D)	∞	17(B)	D
5					12(D)	13(E)	16(E)	E
6						13(E)	16(E)	F
7							16(E)	G

EXERCICE 3

Partie A

1. Pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $f(x) = (1 - x)e^{3x}$.

Pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $f'(x) = (-3x + 2)e^{3x}$, d'après le logiciel de calcul formel.

Pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $-3x + 2 > 0 \Leftrightarrow -3x > -2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$.

Étude du signe de la fonction dérivée f' :

x	0	$\frac{2}{3}$	1
$-3x + 2$	+	0	-
e^{3x}	+		+
Signe de $f'(x)$	+	0	-

Le signe de f' donne le sens de variation de f :

si $f'(x) < 0$ sur $[a ; b]$, alors f est décroissante sur $[a ; b]$; $f'(x) \geq 0$ sur $[a ; b]$, alors f est croissante sur $[a ; b]$.

On en déduit donc le tableau de variations de f :

x	0	$\frac{2}{3}$	1
$f(x)$	1	$\frac{1}{3}e^2$	0

Avec : $f(0) = (1 - 0)e^0 = 1 \times 1 = 1$; $f(1) = (1 - 1)e^1 = 0 \times 1 = 0$;

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(1 - \frac{2}{3}\right)e^{3 \times \frac{2}{3}} = \frac{1}{3}e^2.$$

2.

Le point $C(c ; f(c))$ est un point d'inflexion pour la courbe $\mathcal{C}_f$ si, et seulement si, $f''(x)$ s'annule en $x = c$ en changeant de signe.

D'après le logiciel de calcul formel, $f''(x) = 3e^{3x}(1 - 3x)$.

Or, $3e^{3x} > 0$, donc le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $1 - 3x$.

$$1 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} ; 1 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3} \text{ et } 1 - 3x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}.$$

La dérivée seconde de f s'annule en $\frac{1}{3}$ en changeant de signe.

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ possède un point d'inflexion d'abscisse $x = \frac{1}{3}$.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)e^1 = \frac{2}{3}e.$$

Le couple de coordonnées du point d'inflexion est : $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}e\right)$.

Partie B

1. $f(1) = (1-1)e^3 = 0 \times e^3 = 0$, donc $A \in \mathcal{C}_f$. $g(1) = 1^2 - 2 + 1 = 0$, donc $A \in \mathcal{C}_g$.

$f(0) = (1-0)e^0 = 1 \times 1 = 1$, donc $B \in \mathcal{C}_f$. $g(0) = 0^2 - 0 + 1 = 1$, donc $B \in \mathcal{C}_g$.

Les points A et B sont bien des points communs aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2. a) Pour tout x dans $[0; 1]$, $3x \geq 0$, donc $e^{3x} \geq e^0 = 1$, car $a \geq b \Leftrightarrow e^a \geq e^b$.

Soit, pour tout x dans $[0; 1]$, $e^{3x} - 1 \geq 0$.

b) Pour tout x dans $[0; 1]$, $e^{3x} - 1 + x \geq e^{3x} - 1$ car $x \geq 0$.

Ainsi, d'après la question 1. a), pour tout x dans $[0; 1]$, $e^{3x} - 1 + x \geq 0$.

c) Pour tout x dans $[0; 1]$, $f(x) - g(x) = (1-x)(e^{3x} - 1 + x)$. (admis dans le texte)

Donc le signe de $f(x) - g(x)$ dans $[0; 1]$ est le même que celui de $(1-x)$, car $e^{3x} - 1 + x \geq 0$.

Or, dans $[0; 1]$, $1-x \geq 0$, donc $f(x) - g(x) \geq 0$ dans $[0; 1]$.

Remarque : cette réponse traduit le fait que, dans l'intervalle $[0; 1]$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours située au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ sauf en leurs points d'intersection.

3. a)

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I , F l'une de ses primitives et a, b deux réels appartenant à I .

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

$g(x) = x^2 - 2x + 1$, donc une primitive de g est G définie par : $G(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$.

Ainsi, $\int_0^1 g(x) dx = G(1) - G(0) = \frac{1}{3} - 1 + 1 - (0 - 0 + 0)$, soit $\int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{3}$.

b) L'aire S , en unité d'aire, de la partie en bleu est l'aire comprise entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites verticales $x=0$ et $x=1$.

Comme, sur cet intervalle, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ alors :

$$S = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = \frac{e^3 - 4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{e^3 - 4}{9} - \frac{3}{9}.$$

$$S = \frac{e^3 - 7}{9} \text{ u.a. et, arrondi au dixième, } S \approx 1,5 \text{ u.a.}$$

EXERCICE 4

1. $P(X = 1) = \frac{\ln(1+1) - \ln(1)}{\ln(10)}$ et $\ln(1) = 0$, d'où $P(X = 1) = \frac{\ln(2)}{\ln(10)}$.

2. a) Le problème posé est similaire à la question 4. de l'exercice 1 avec

$$p = P(X = 1) = \frac{\ln(2)}{\ln(10)} \approx 0,301 \text{ et } n = 36\,677.$$

Dans ce cas, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \approx [0,296 ; 0,306].$$

On vérifie que les conditions du théorème sont bien vérifiées, à savoir :

$$n = 36\,667 > 30 ; np = 36\,667 \times 0,301 \approx 11\,036 > 5$$

$$\text{et } n(1-p) = 36\,667 \times 0,699 = 25\,630 > 5.$$

La fréquence observée est : $f = \frac{11\,094}{36\,667} \approx 0,303.$

Donc $f \in I$: **on ne peut pas rejeter au risque de 5 % l'hypothèse formulée ; l'observation est donc compatible avec l'affirmation proposée.**

b) Dans le cas de la taille des élèves, la loi de Benford ne semble pas adaptée.

En effet, la fréquence observée du premier chiffre de la taille des candidats au baccalauréat est sans doute proche de 1, car il y a très peu de candidats au baccalauréat mesurant moins d'un mètre ou plus de deux mètres. On est donc loin du résultat prévu par la loi de Benford qui est environ de 0,3.

On peut aussi calculer $P(X = 3) = \frac{\ln(3+1) - \ln(3)}{\ln(10)} = \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{\ln(10)} \approx 0,125.$

Environ 12,5 % des élèves candidats au baccalauréat devraient mesurer plus de 3 mètres, ce qui est absurde, donc la loi de Benford n'est pas adaptée pour X .

CONSEILS

Durée indicative de résolution :

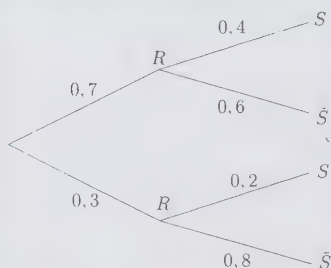
- Exercice 1 : 40 min.
- Exercice 2 : 40 min.
- Spécialité exercice 2 : 40 min.
- Exercice 3 : 30 min.
- Exercice 4 : 50 min.

EXERCICE 1 Probabilités – Logarithme – Convexité (5 points)

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

1. Pour tout événement E , on note $\bar{E}$ l'événement contraire de E .

On considère l'arbre pondéré suivant :



Affirmation 1 : La probabilité de $\bar{R}$ sachant S est 0,06.

2. Soit k un réel tel que $0 \leq k < 18$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[k ; 18]$. On suppose que l'espérance de X est égale à 12.

Affirmation 2 : La valeur de k est 9.

3. On considère l'équation suivante :

$$\ln(x^2) - \ln\left(\frac{x^5}{e}\right) + \ln(2) = \ln(2x) + 5.$$

Affirmation 3 : $\frac{1}{e}$ est l'unique solution de cette équation.

4. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0 ; 15]$. On suppose que sa fonction dérivée, notée f' , est continue sur $[0 ; 15]$. Les variations de f' sont représentées dans le tableau ci-dessous.

x	0	5	15
$f'(x)$	30	-5	20

Affirmation 4 : La courbe représentative C_f de la fonction f admet une et une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Affirmation 5 : La fonction f est convexe sur $[5 ; 15]$.

Corrige page 219

EXERCICE 2 Suites – Algorithme (5 points)

En 2018, Laurence, souhaitant se lancer dans l'agriculture biologique, a acheté une ferme de 14 hectares de pommiers. Elle estime qu'il y a 300 pommiers par hectare. Chaque année, Laurence éliminera 4 % des pommiers existants et replantera 22 nouveaux pommiers par hectare.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre de pommiers par hectare l'année 2018 + n . On a ainsi $u_0 = 300$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = 0,96u_n + 22$.

2. Estimer le nombre de pommiers par hectare, arrondi à l'unité, en 2020.

3. Laurence veut savoir à partir de quelle année la densité de pommiers dépassera 400 pommiers par hectare. Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

```

N ← 0
U ← 300
Tant que U...
    N ← N + 1
    U ← ...
Fin Tant que
    
```

- Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus pour qu'il détermine le rang de l'année cherchée.
- b) Quelle est la valeur de N en sortie de l'algorithme ?
- On définit la suite (v_n) en posant $v_n = u_n - 550$, pour tout entier naturel n .
- Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .
- Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n puis démontrer que :
- $$u_n = 550 - 250 \times 0,96^n$$
- Estimer le nombre de pommiers de l'exploitation de Laurence en 2025.
- En résolvant l'inéquation $u_n > 400$, retrouver le résultat obtenu à la question 2. b).

Corrigé page 221

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2 Graphe probabiliste – Suites

– Algorithme (5 points)

Pour se rendre à l'université, Julie peut emprunter deux itinéraires, l'un passant par des routes départementales, l'autre par une voie rapide. Elle teste les deux itinéraires.

Lorsque Julie emprunte la voie rapide un jour, la probabilité qu'elle emprunte le même itinéraire le lendemain est de 0,6.

Lorsque Julie emprunte les routes départementales un jour, la probabilité qu'elle emprunte la voie rapide le lendemain est de 0,2.

Le premier jour, Julie emprunte la voie rapide. On note :

- D l'événement « Julie emprunte les routes départementales » ;
- R l'événement « Julie emprunte la voie rapide ».

1. a) Traduire ces informations à l'aide d'un graphe probabiliste dont les sommets seront notés D et R .

b) Donner la matrice de transition M correspondant au graphe probabiliste.

Les sommets du graphe seront rangés dans l'ordre alphabétique.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'état probabiliste le n -ième jour est défini par la matrice $P_n = (d_n \ r_n)$ où d_n désigne la probabilité que Julie emprunte les routes départementales le n -ième jour et r_n la probabilité que Julie emprunte la voie rapide le n -ième jour.

- a) Donner P_1 .
- b) Calculer M^2 et en déduire la probabilité que Julie emprunte les routes départementales le 3^e jour.
3. a) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, P_{n+1} en fonction de P_n et en déduire les expressions de d_{n+1} et r_{n+1} en fonction de d_n et r_n .
- b) Parmi les algorithmes suivants, lequel donne les termes d_3 et r_3 ?

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
$D \leftarrow 0$	$D \leftarrow 0$	$D \leftarrow 0$
$R \leftarrow 1$	$R \leftarrow 1$	$R \leftarrow 1$
Pour N allant de 1 à 3	Pour N allant de 1 à 3	Pour N allant de 2 à 3
$D \leftarrow 0,8D + 0,4R$	$D \leftarrow 0,8D + 0,4R$	$D \leftarrow 0,8D + 0,4R$
$R \leftarrow 0,2D + 0,6R$	$R \leftarrow 1 - D$	$R \leftarrow 1 - D$
Fin Pour	Fin Pour	Fin Pour

4. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,4 r_n + 0,2$.
5. On définit la suite (v_n) par $v_n = r_n - \frac{1}{3}$ pour tout entier naturel n non nul.
- a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_1 .
- b) Exprimer v_n en fonction de n puis démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$r_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,4^{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times 0,4^n.$$

- c) Que peut-on prévoir sur le long terme ?

Corrigé page 223

EXERCICE 3 Probabilité – Loi binomiale, Loi uniforme, Loi normale, Intervalle de confiance (5 points)

*Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.
Les résultats seront arrondis au centième.*

Partie A

Les cours d'eau français sont surveillés quotidiennement afin de prévenir la population en cas de crue ou pénurie d'eau.

Dans une station hydrométrique, on mesure le débit quotidien d'une rivière.

Ce débit en mètre cube par seconde ($\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$) peut être modélisé par une variable aléatoire D qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 15,5$ et $\sigma = 6$.

On estime qu'il y a pénurie d'eau lorsque le débit de la rivière est inférieur à $8 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. On estime qu'il y a un risque de crue lorsque le débit est supérieur à $26 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Entre ces deux débits, il n'y a pas de vigilance particulière.

1. Calculer la probabilité qu'il y ait pénurie d'eau.
2. Calculer la probabilité qu'il n'y ait pas de vigilance particulière.
3. Justifier, sans utiliser la calculatrice, que la probabilité que le débit observé soit compris entre $3,5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ et $27,5 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ est d'environ 0,95.

Partie B

Deux équipes effectuent les relevés de débit du cours d'eau sur la station hydro-métrique. Sébastien appartient à la première équipe.

Un quart des relevés est effectué par l'équipe de Sébastien, le reste par la seconde équipe.

On choisit 10 relevés au hasard sur l'ensemble des relevés de la station, ensemble qui est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à 10 tirages avec remise. On s'intéresse au nombre de relevés effectués par l'équipe de Sébastien parmi ces 10 relevés.

1. Quelle loi de probabilité modélise cette situation ? Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que 4 relevés exactement soient effectués par l'équipe de Sébastien.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 2 relevés soient effectués par l'équipe de Sébastien.

Partie C

Ces relevés sont utilisés pour tester la qualité de l'eau : « satisfaisante » ou « non satisfaisante ». On s'intéresse à la proportion de relevés de qualité « satisfaisante ». Combien, au minimum, faut-il effectuer de relevés pour obtenir un intervalle au niveau de confiance de 95 % dont l'amplitude est inférieure à 0,1 ?

EXERCICE 4 Fonctions – Exponentielle, Convexité,
Calculs intégrales-primitives, Lecture graphique,
Application à l'économie (5 points)

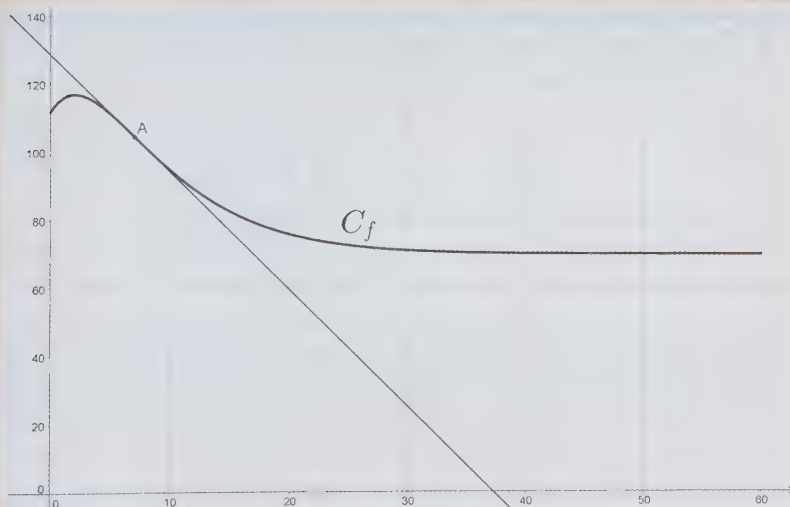
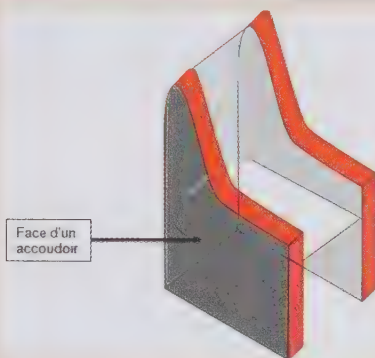
Un ébéniste décide de refaire les accoudoirs d'un fauteuil (ébauche du fauteuil ci-contre). On modélise l'accoudoir à l'aide de la fonction f définie sur $[0 ; 60]$ par :

$$f(x) = 70 + (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}}.$$

La courbe représentative de f , notée C_f est donnée ci-après.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0 ; 60]$.

On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.



Partie A

Dans toute cette partie, les réponses sont obtenues graphiquement à partir de la courbe représentative de f donnée sur le graphique ci-dessus.

On admet que le point A de C_f d'abscisse 7 est un point d'inflexion de C_f .

1. Déterminer une valeur approchée de $f(0)$ et $f(60)$.
2. Déterminer $f''(7)$.
3. On considère la surface située entre l'axe des abscisses, la courbe C_f , et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 60$.
 - a) Hachurer la surface décrite ci-dessus sur le graphique.
 - b) L'ébéniste estime l'aire de cette surface à 3 800 unités d'aire. Cette estimation est-elle correcte ?

Partie B

1. Justifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 60]$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{5}(-14x + 28)e^{-\frac{x}{5}}.$$

- a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 60]$.
 - b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 60]$.
On arrondira à l'unité près les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variations.
3. Un logiciel de calcul formel permet d'afficher les lignes suivantes :

$$\begin{array}{l}
 \text{Dérivée (Dérivée (70 + (14 x + 42) e^{-\frac{x}{5}}))} \\
 \rightarrow \frac{1}{25} (14 x + 42) e^{-\frac{1}{5}x} - \frac{28}{5} e^{-\frac{1}{5}x} \\
 \text{Factoriser} \left(\frac{1}{25} (14 x + 42) e^{-\frac{1}{5}x} - \frac{28}{5} e^{-\frac{1}{5}x} \right) \\
 \rightarrow 14 e^{-\frac{1}{5}x} \cdot \frac{x - 7}{25}
 \end{array}$$

En utilisant les résultats ci-dessus, étudier la convexité de f .

4. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 60]$, on pose :

$$g(x) = (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}}$$

et

$$G(x) = (-70x - 560)e^{-\frac{x}{5}}.$$

- a) Montrer que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0 ; 60]$.
- b) En déduire une primitive de f sur l'intervalle $[0 ; 60]$.

c) Calculer la valeur exacte de $\int_0^{60} f(x) dx$, puis en donner une valeur approchée à l'unité d'aire près.

Partie C

L'ébéniste découpe 2 accoudoirs identiques sur le modèle de la surface hachurée sur le graphique 1 en choisissant comme unité le cm.

Il souhaite vernir les deux faces de chaque accoudoir (voir dessin ci-avant) ainsi que le dossier du fauteuil dont l'aire est égale à 5 400 cm². Or il lui reste le quart d'un petit pot de vernis pouvant couvrir 10 m². Aura-t-il suffisamment de vernis ?

Corrigé page 227

Corrigés

EXERCICE 1

1. Affirmation 1 : fausse

« La probabilité de $\bar{R}$ sachant S est 0,06 » se traduit par : $p_S(\bar{R}) = 0,06$.

$$\text{Or } p_S(\bar{R}) = \frac{p(\bar{R} \cap S)}{p(S)}.$$

Il nous suffit alors de calculer $p(S)$ et $p(\bar{R} \cap S)$.

On rappelle que dans un arbre pondéré, la probabilité d'un chemin est égal au produit des probabilités des branches de ce chemin.

$$p(\bar{R} \cap S) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$$

$$p(S) = p(R \cap S) + p(\bar{R} \cap S).$$

Formule des probabilités totales qui correspond aux deux chemins de l'arbre menant à l'événement S .

$$p(S) = 0,7 \times 0,4 + 0,3 \times 0,2 = 0,28 + 0,06 = 0,34$$

$$p_S(\bar{R}) = \frac{p(\bar{R} \cap S)}{p(S)} = \frac{0,06}{0,34} = \frac{3}{17} \text{ donc } p_S(\bar{R}) \approx 0,176 \text{ et } p_S(\bar{R}) \neq 0,06.$$

2. Affirmation 2 : fausse

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a ; b]$ alors son espérance est : $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Sur l'intervalle $[k ; 18]$, l'espérance de X est donc : $\frac{k+18}{2}$.

On doit donc avoir : $\frac{k+18}{2} = 12 \Leftrightarrow k+18 = 24 \Leftrightarrow k = 24-18 \Leftrightarrow k = 6$.

3. Affirmation 3 : vraie

Rappel : la fonction logarithme népérien n'est définie que pour des nombres strictement positifs.

Il faut donc étudier le domaine de validité de l'équation : $\begin{cases} x^2 > 0 \\ x^5 > 0 \text{ donc } x > 0. \\ 2x > 0 \end{cases}$

Pour tous nombres strictement positifs a et b : $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$

et $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$.

Pour tout nombre strictement positif a et pour tout entier naturel n : $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

Pour tout nombre strictement positif a : $\ln(a) = b \Leftrightarrow a = e^b$.

Pour $x > 0$, en utilisant les propriétés des logarithmes ci-dessus, l'équation s'écrit :

$$\ln(x^2) - \ln\left(\frac{x^5}{e}\right) + \ln(2) - \ln(2x) = 5$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(x) - (\ln(x^5) - \ln(e)) + \ln(2) - (\ln(2) + \ln(x)) = 5$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(x) - 5\ln(x) + \ln(e) + \ln(2) - \ln(2) - \ln(x) = 5$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4\ln(x) = 5$$

$$\Leftrightarrow -4\ln(x) = 4$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = -1$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

4. Affirmation 4 : fausse

D'après le tableau de variations de la fonction f' , on peut affirmer :

Sur l'intervalle $[0 ; 5]$, f' est continue et strictement décroissante. $f'(x)$ passe de 30 à -5 donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f' s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

Sur l'intervalle $[5 ; 15]$, f' est continue et strictement croissante. $f'(x)$ passe de -5 à 20 donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f' s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $[5 ; 15]$.

Au final, f' s'annule deux fois sur l'intervalle $[0 ; 30]$.

On peut également noter que f' s'annule deux fois en complétant le tableau de variations donné :

x	0	a	5	b	15
$f'(x)$	30	0	-5	0	20

Rappel : Une courbe admet en un point d'abscisse a une tangente parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si la dérivée en a est nulle.

La courbe de la fonction f admet alors deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

5. Affirmation 5 : vraie

Une fonction est convexe sur un intervalle $[a ; b]$ si et seulement si sa dérivée est croissante sur cet intervalle.

D'après le tableau de variations donné, la fonction f' est strictement croissante sur l'intervalle $[5 ; 15]$.

EXERCICE 2

1. a) Diminuer un nombre N de 4 %, c'est multiplier ce nombre N par :

$$\left(1 - \frac{4}{100}\right) = 1 - 0,04 = 0,96.$$

D'une année sur l'autre, 4 % des pommiers sont éliminés donc le nombre de pommiers est multiplié par 0,96.

De plus, 22 pommiers sont replantés soit rajoutés donc on a bien : $u_{n+1} = 0,96u_n + 22$.

1. b) Si u_0 représente le nombre de pommiers par hectare en 2018 alors u_2 représente celui de 2020.

$$u_1 = 0,96u_0 + 22 = 0,96 \times 300 + 22 = 310 ;$$

$$u_2 = 0,96u_1 + 22 = 0,96 \times 310 + 22 = 319,6 \approx 320, \text{ arrondi à l'unité.}$$

En 2020, il y aura 320 pommiers par hectare sur l'exploitation.

2. a) $N \leftarrow 0$

$U \leftarrow 300$

Tant que $U \leq 400$

$N \leftarrow N + 1$

$U \leftarrow 0,96 * U + 22$

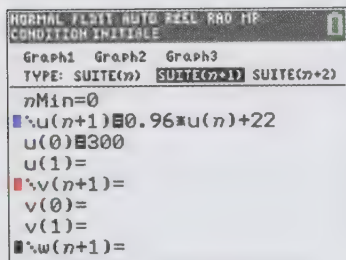
Il faut dépasser 400 pommiers donc l'algorithme doit calculer tant que U reste inférieur ou égal à 400.

D'une année sur l'autre, le nombre de pommiers est donné par la relation donnée à la question 1a, soit :
 $u_{n+1} = 0,96u_n + 22$ qui se traduit par :
 « U prend la valeur $0,96 * U + 22$ ».

Fin du tant que

2. b) À la calculatrice :

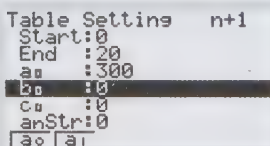
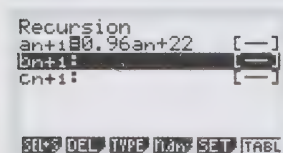
• Avec une TI



n	u			
4	337.66			
5	346.16			
6	354.31			
7	362.14			
8	369.65			
9	376.87			
10	383.79			
11	390.44			
12	396.82			
13	402.95			
14	408.82			

u(13)=402.94965824086

• Avec une Casio



n	an	bn	cn
10	383.79		
11	390.44		
12	396.82		
13	402.95		

402.9496582
 FORM DEL WEB G-CON G-PLT

$u_{12} \approx 396,82$ et $u_{13} \approx 402,95$

Donc l'algorithme affiche : $N = 13$.

3. a) Pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 550$ ou encore $u_n = v_n + 550$.

Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = u_{n+1} - 550$

$$= 0,96u_n + 22 - 550$$

$$= 0,96(v_n + 550) + 22 - 550$$

$$= 0,96v_n + 528 + 22 - 550$$

$$= 0,96v_n$$

Chaque terme de la suite (v_n) se déduit du précédent en multipliant par le même nombre égal à 0,96.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 550 = 300 - 550 = -250$.

3. b) Pour tout entier naturel n , $v_n = q^n \times v_0$.

Pour tout entier naturel n , on a donc : $v_n = 0,96^n \times (-250) = -250 \times 0,96^n$.

Comme $u_n = v_n + 550$ alors pour tout entier naturel n : $u_n = 550 - 250 \times 0,96^n$.

3. a) u_7 représente le nombre de pommiers à l'hectare en 2025. Laurence exploite une surface de 14 hectares donc elle peut estimer le nombre de pommiers à :

$$14 \times u_7 = 14 \times (550 - 250 \times 0,96^7) \approx 5\,070.$$

Le nombre de pommiers de l'exploitation de Laurence peut être estimé à 5 070.

$$u_n > 400 \Leftrightarrow 550 - 250 \times 0,96^n > 400 \Leftrightarrow 550 - 400 > 250 \times 0,96^n$$

$$\Leftrightarrow 150 > 250 \times 0,96^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{150}{250} > 0,96^n \Leftrightarrow 0,6 > 0,96^n$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,6) > \ln(0,96^n) \text{ car } a = b > 0 \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b),$$

$$\Leftrightarrow \ln(0,6) > n \ln(0,96) \text{ car pour } a > 0 \text{ et tout entier } n, \ln(a^n) = n \ln(a),$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(0,6)}{\ln(0,96)} < n \text{ on change le sens de l'inégalité car } \ln(0,96) < 0,$$

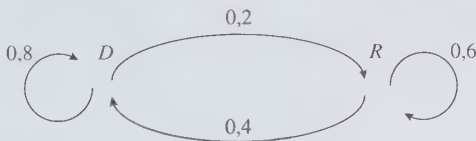
$$\frac{\ln(0,6)}{\ln(0,96)} \approx 12,5 \text{ et } n \geq 13 \text{ donc on retrouve bien } n = 13.$$

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

1. a). Si Julie a utilisé la voie rapide un jour, la probabilité qu'elle emprunte la même itinéraire le lendemain est de 0,6; et donc elle utilisera les routes départementales le lendemain avec une probabilité de 0,4.

Si Julie emprunte les routes départementales un jour, la probabilité qu'elle emprunte la voie rapide le lendemain est de 0,2; et donc elle réutilisera les routes départementales le lendemain avec une probabilité de 0,8.

Le graphe probabiliste représentant la situation est donc le suivant :



1. b) Matrice de transition

Julie emprunte la départementale le jour n puis le jour $n + 1$.

Julie emprunte la départementale le jour n puis la voie rapide le jour $n + 1$.

$$M = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Julie emprunte la voie rapide le jour n puis la départementale le jour $n + 1$.

Julie emprunte la voie rapide le jour n puis la voie rapide le jour $n + 1$.

2. a) Le premier jour, Julie emprunte la voie rapide donc $d_1 = 0$ et $r_1 = 1$ d'où $P_1 = (0 \ 1)$.

2. b) À la calculatrice $M^2 = \begin{bmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,56 & 0,44 \end{bmatrix}$.

La probabilité que Julie emprunte la départementale le 3^e jour se lit dans P_3 .

Pour tout entier naturel n , $P_n = P_1 \times M^{n-1}$.

$$P_3 = P_1 \times M^2 = (0 \ 1) \times \begin{bmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,56 & 0,44 \end{bmatrix} = (0,56 \ 0,44) = (d_3 \ r_3).$$

On a donc : $d_3 = 0,56$. **La probabilité que Julie emprunte la départementale le 3^e jour est 0,56.**

3. a) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $P_{n+1} = P_n \times M$.

$$P_{n+1} = P_n \times M \Leftrightarrow (d_{n+1} \ r_{n+1}) = (d_n \ r_n) \times \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

En effectuant le produit matriciel, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} d_{n+1} = 0,8d_n + 0,4r_n \\ r_{n+1} = 0,2d_n + 0,6r_n \end{cases}, \text{ avec pour tout entier naturel } n \geq 1 : r_n + d_n = 1.$$

3. b) L'algorithme 2 ne convient pas car la boucle est effectuée 3 fois à partir de P_1 . On obtient ainsi P_4 au lieu de P_3 . L'algorithme 1 ne convient pas car pour calculer R_2 , on utilise D_2 et non pas D_1 . **L'algorithme 3 est donc celui qui convient.**

4. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $r_n + d_n = 1$, ou encore, $d_n = 1 - r_n$.
 $r_{n+1} = 0,2d_n + 0,6r_n = 0,2(1 - r_n) + 0,6r_n = 0,2 - 0,2r_n + 0,6r_n$ soit $r_{n+1} = 0,4r_n + 0,2$.

5. a) Pour tout entier naturel $n \geq 1$: $v_n = r_n - \frac{1}{3}$ donc $r_n = v_n + \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout entier naturel } n \geq 1 : v_{n+1} &= r_{n+1} - \frac{1}{3} \\ &= 0,4r_n + 0,2 - \frac{1}{3} \\ &= 0,4r_n + \frac{0,6}{3} - \frac{1}{3} \\ &= 0,4r_n - \frac{0,4}{3} \\ &= 0,4\left(v_n + \frac{1}{3}\right) - \frac{0,4}{3} \\ &= 0,4v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et $v_1 = r_1 - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

5. b) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = q^{n-1}v_1$.

On a donc : $v_n = \frac{2}{3} \times 0,4^{n-1}$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $r_n = v_n + \frac{1}{3}$ et donc $r_n = \frac{2}{3} \times 0,4^{n-1} + \frac{1}{3}$.

Mais $0,4^n = 0,4 \times 0,4^{n-1}$ donc $0,4^{n-1} = \frac{0,4^n}{0,4} = \frac{0,4^n}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} \times 0,4^n$.

On en déduit : $r_n = \frac{2}{3} \times \frac{5}{2} \times 0,4^n + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \times 0,4^n + \frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $r_n = \frac{5}{3} \times 0,4^n + \frac{1}{3}$.

5. c) Si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (q^n) = 0$.

Comme $q = 0,4$ alors $0 < q < 1$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,4)^n = 0 \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (r_n) = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times 0 = \frac{1}{3}.$$

À long terme, Julie empruntera la voie rapide une fois sur 3.

EXERCICE 3

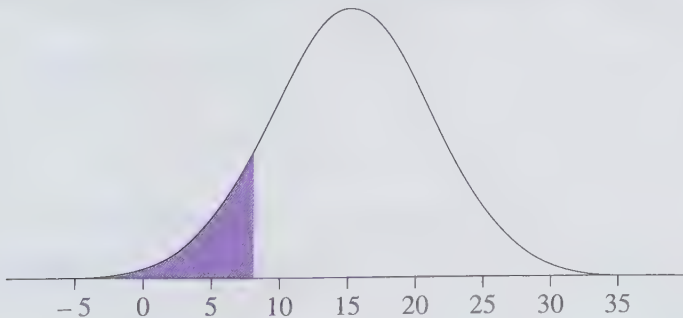
Partie A

1. La probabilité qu'il y ait pénurie se traduit par : $P(D \leq 8)$.

Si D est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, de moyenne μ et d'écart type σ alors :

$$\text{pour tout nombre } k \leq \mu : P(D \leq k) = 0,5 - P(k \leq D \leq \mu)$$

La probabilité qu'il y ait pénurie est l'aire coloriée du graphique ci-dessous :



$$P(D \leq 8) = 0,5 - P(8 \leq D \leq 15,5) \approx 0,11 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

$P(8 \leq D \leq 15,5)$ s'obtient à la calculatrice par la séquence de touches suivante :

• avec une calculatrice Casio par : MENU, choisir **STAT DIST NORM Ncd**

(8, 15.5, 6, 15.5).

- avec une calculatrice Texas par : **distrib** (**2nde** **var**), choisir **normalFRép** (8, 15.5, 15.5, 6)

2. La probabilité qu'il n'y ait pas de vigilance particulière se traduit par : $P(8 \leq D \leq 26)$.
 $P(8 \leq D \leq 26) \approx 0,85$ à 10^{-2} près.

- avec une calculatrice Casio par : **MENU**, choisir **STAT DIST NORM Ncd** (8, 26, 6, 15.5).

- avec une calculatrice Texas par : **distrib** (**2nde** **var**), choisir **normalFRép** (8, 26, 15.5, 6).

3.

Rappel de la règle des 2 sigmas :

Si D est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, de moyenne μ et d'écart type σ alors :

$$P(\mu - 2\sigma \leq D \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95.$$

Or ici, $\mu - 2\sigma = 15,5 - 2 \times 6 = 3,5$ et $\mu + 2\sigma = 15,5 + 2 \times 6 = 27,5$.
 donc $P(3,5 \leq D \leq 27,5) \approx 0,95$.

Partie B

1. Un quart des relevés sont effectués par l'équipe de Sébastien donc, la probabilité qu'un test soit effectué par l'équipe de Sébastien est $p = 0,25$.

Tester si un relevé est effectué par l'équipe de Sébastien est une épreuve de Bernoulli (2 issues). Répéter cette expérience 10 fois, de façon indépendante, est un schéma de Bernoulli. **La variable aléatoire X qui compte le nombre de relevés effectués par l'équipe de Sébastien parmi 10 relevés suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,25$.**

2. La probabilité que 4 relevés exactement soient effectués par l'équipe de Sébastien est :

$$P(X = 4) \approx 0,15 \text{ arrondi au centième}$$

- avec une calculatrice Casio par : **MENU**, choisir **STAT DIST BINM Bpd** (4, 10, 0.25).

- avec une calculatrice Texas par : **distrib** (**2nde** **var**), choisir **BinomFdp** (10, 0.25, 4).

3. La probabilité qu'au moins 2 relevés soient effectués par l'équipe de Sébastien est :
 $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0,76$ arrondi au centième.

$P(X \leq 1)$ se calcule :

- avec une calculatrice Casio par : **MENU**, choisir **STAT DIST BINM Bcd** (1, 10, 0.25).

- avec une calculatrice Texas par : **distrib** (**2nde** **var**), choisir **BinomFrep** (10, 0.25, 1).

Partie C

Soit f , la fréquence du caractère étudié, observée dans un échantillon représentatif de la population.

Si n est « assez grand », l'intervalle de confiance au seuil de confiance de 95 % est :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

L'amplitude, ou longueur, de cet intervalle est donc : $\left(f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \left(f - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

On cherche n pour que $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,1$.

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,1 \Leftrightarrow 2 \leq 0,1\sqrt{n} \Leftrightarrow 20 \leq \sqrt{n} \Leftrightarrow 400 \leq n.$$

Il faut donc effectuer au moins 400 relevés pour que l'intervalle de confiance ait une amplitude inférieure à 0,1.

EXERCICE 4

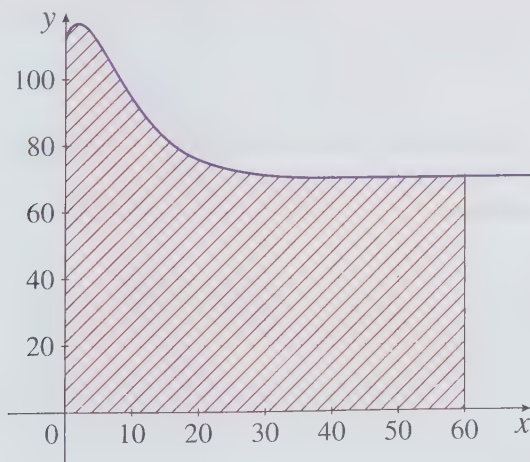
Partie A

1. Par lecture graphique : $f(0) \approx 112$ et $f(60) \approx 70$.

2. Si $M(x; y)$ est un point d'inflexion pour la courbe représentative d'une fonction f alors : $f''(x) = 0$.

Le point A d'abscisse 7 est un point d'inflexion pour la courbe C_f donc $f''(7) = 0$.

3. a) La surface décrite est :



3. b) À l'aide de la grille du graphique on peut encadrer l'aire A de la surface hachurée : 21 rectangles $< A < 25$ rectangles avec 1 rectangle = 200 unités d'aire. Donc $4\,200 \text{ u. a.} < A < 5\,000 \text{ u.a.}$. **L'estimation est incorrecte.**

Partie B

1. $f(x) = 70 + (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}}$

f est de la forme $f = 70 + u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec :

$$u(x) = 14x + 42; u'(x) = 14 \text{ et } v(x) = e^{-\frac{x}{5}}; v'(x) = -\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}} \quad (e^{ax})' = ae^{ax}.$$

Donc pour tout réel x de l'intervalle $[0; 60]$:

$$f'(x) = 14e^{-\frac{x}{5}} + (14x + 42) \times \left(-\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}\right) = 14e^{-\frac{x}{5}} - \frac{1}{5}(14x + 42)e^{-\frac{x}{5}}$$

$$f'(x) = \frac{70}{5}e^{-\frac{x}{5}} - \frac{1}{5}(14x + 42)e^{-\frac{x}{5}} = \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}(70 - 14x - 42) \text{ donc } f'(x) = \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}(28 - 14x).$$

2. a) Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $(28 - 14x)$ car pour tout x réel, $\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}} > 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 28 - 14x = 0 \Leftrightarrow 28 = 14x \Leftrightarrow 2 = x.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 28 - 14x > 0 \Leftrightarrow 28 > 14x \Leftrightarrow 2 > x.$$

Le signe de $f'(x)$ peut être résumé dans le tableau suivant :

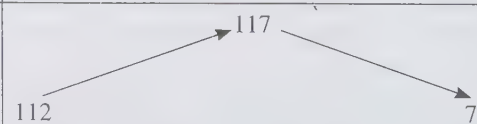
x	0	2	60
$f'(x)$	+	0	-

2. b) Le signe de f' détermine le sens de variation de f :

Si $f'(x) \geq 0$ sur l'intervalle $[a; b]$ alors f est croissante sur $[a; b]$.

Si $f'(x) \leq 0$ sur l'intervalle $[a; b]$ alors f est décroissante sur $[a; b]$.

On en déduit le tableau de variation de f :

x	0	2	60	
$f'(x)$		+	0	-
Variations de f	112		117	70

$$f(2) = 70 + 70e^{-\frac{2}{5}} \approx 117 \text{ et } f(60) = 70 + 882e^{-\frac{60}{5}} \approx 70.$$

3. D'après le logiciel de calcul formel :

$$f''(x) = 14e^{-\frac{1}{5}x} \times \frac{x - 7}{25}.$$

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

Si $f'' \geq 0$ sur I alors f est convexe sur I ! Si $f'' \leq 0$ sur I alors f est concave sur I .

Le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $(x-7)$ car $14e^{-\frac{1}{5}x} > 0$ pour tout x réel. Donc $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 7$ et $f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 7$.

Ainsi f est convexe sur $[7 ; 60]$ et concave sur $[0 ; 7]$. Le point A est donc un point d'inflexion pour la courbe C_f .

4. a)

G est une primitive de g sur l'intervalle $[0 ; 60]$ si et seulement si pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 60]$:

$$G'(x) = g(x).$$

Pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 60]$, $G(x) = (-70x - 560)e^{-\frac{1}{5}x}$.

$$G'(x) = -70 \times e^{-\frac{1}{5}x} + (-70x - 560) \times \left(-\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}\right) \quad G \text{ est de la forme } (uv) \text{ et } (uv)' = u'v + uv'$$

$$G'(x) = -70 \times e^{-\frac{1}{5}x} + \left(-\frac{70}{5}x + \frac{560}{5}\right)e^{-\frac{1}{5}x} = -70 \times e^{-\frac{1}{5}x} + (14x + 112)e^{-\frac{1}{5}x} = e^{-\frac{1}{5}x}(-70 + 14x + 112)$$

$$G'(x) = e^{-\frac{1}{5}x}(14x + 42) = g(x).$$

Donc G est bien une primitive de g sur $[0 ; 60]$.

4. b) $f(x) = 70 + g(x)$. Donc une primitive de f sur $[0 ; 60]$ est F telle que :

$$F(x) = 70x + G(x).$$

$$4. c) \int_0^{60} f(x) dx = F(60) - F(0). \text{ Avec } F(0) = 0 + G(0) = 0 + (0 - 560)e^0 = -560$$

$$F(60) = 70 \times 60 + (-70 \times 60 - 560)e^{-\frac{60}{5}} = 4\,200 - 4\,760e^{-12} \approx 4\,200.$$

$$\int_0^{60} f(x) dx = F(60) - F(0)$$

$$\int_0^{60} f(x) dx = 4\,200 - 4\,760e^{-12} - (-560)$$

$$\int_0^{60} f(x) dx = 4\,760 - 4\,760e^{-12}$$

$$\int_0^{60} f(x) dx \approx 4\,760 \text{ u. a.}$$

Partie C

Il faut vernir le dossier et 4 faces (les deux faces de chaque accoudoir).

Aire totale à vernir : $4 \times 4\,760 \text{ cm}^2 + 5\,400 \text{ cm}^2 = 24\,440 \text{ cm}^2$.

$10 \text{ m}^2 = 100\,000 \text{ cm}^2$.

Le quart du pot de vernis permet de recouvrir $25\,000 \text{ cm}^2$.

L'ébéniste aura suffisamment de vernis pour son fauteuil.

ORAL

EXERCICE 1 Fonctions – Exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \frac{e^x}{1 + e^x}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x , on a : $f(x) = \frac{e^{2x}}{1 + e^x}$.
2. Calculer, pour tout réel x , $f'(x)$.
3. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2 Probabilités – Probabilités conditionnelles

Une urne contient 3 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher. On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules.

1. Modéliser cette expérience par un arbre.
On notera B_1 l'événement : « la première boule tirée est blanche » ; N_1 l'événement : « la première boule tirée est noire ».
2. Déterminer les probabilités suivantes : $P_{N_1}(B_2)$ et $P(B_1 \cap N_2)$.
3. Calculer la probabilité de l'événement A : « tirer deux boules de couleurs différentes ».

► SUR VOTRE BROUILLON

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \frac{e^x}{1 + e^x}$.

1. Pour tout réel x , $f(x) = e^x - \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{e^x(1 + e^x) - e^x}{1 + e^x} = \frac{e^x + e^x \times e^x - e^x}{1 + e^x} = \frac{e^{2x}}{1 + e^x}$.
2. La fonction f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^{2x}$ et $v(x) = 1 + e^x \neq 0$ pour tout x réel. La dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle et celle de la fonction e^u est $u'e^u$, donc $u'(x) = 2e^{2x}$ et $v'(x) = e^x$.
 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, donc $f'(x) = \frac{2e^{2x} \times (1 + e^x) - e^{2x} \times e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{2e^{2x} + 2e^{3x} - e^{3x}}{(1 + e^x)^2} = \frac{2e^{2x} + e^{3x}}{(1 + e^x)^2}$.
3. Pour tout x réel, $(1 + e^x)^2 > 0$, $e^{2x} > 0$ et $e^{3x} > 0$; ainsi $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

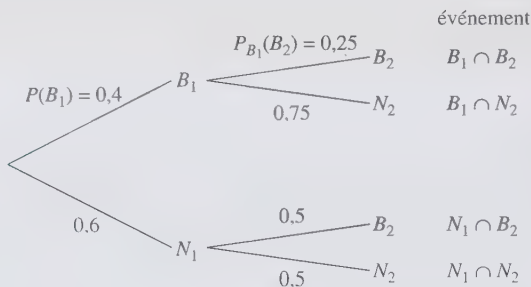
EXERCICE 2

1. L'urne contient 3 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher ; on est donc en situation d'équiprobabilité avec : $P(N_1) = \frac{3}{5}$ et $P(B_1) = \frac{2}{5}$.

Si la première boule tirée est blanche, il reste une blanche et trois noires, donc :

$$P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{4} \text{ et } P_{B_1}(N_2) = \frac{3}{4}.$$

L'arbre modélisant la situation est :



2. • $P_{N_1}(B_2)$ est la probabilité que la seconde boule soit blanche sachant que la première est noire. Si la première est noire, alors il reste deux blanches et deux noires, donc $P_{N_1}(B_2) = \frac{1}{2}$.

• D'après l'arbre de probabilités : $P(B_1 \cap N_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(N_2) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$.

3. Tirer deux boules de couleurs différentes correspond aux deux événements incompatibles $B_1 \cap N_2$ et $N_1 \cap B_2$.

On en déduit : $P(A) = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = 0,3 + 0,6 \times 0,5 = 0,6$.

La probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes est de 0,6.

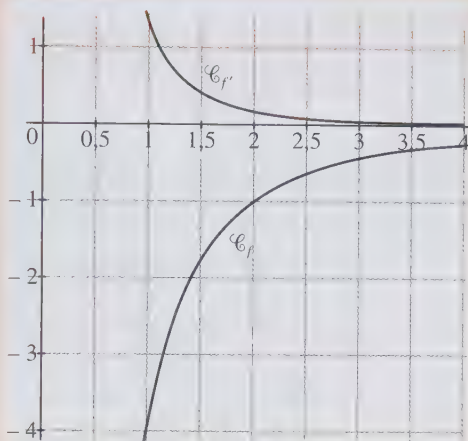
EXERCICE 1 Fonctions – Calcul intégral, Primitives, Lecture graphique

Sur le graphique ci-contre :
 C_f représente une fonction f définie sur $[0,9 ; 4]$;
 $C_{f'}$ représente la fonction f' , dérivée de f .

1. Que représente géométriquement le nombre A où :

$$A = \int_1^2 f'(t) dt ?$$

2. Calculer A .



EXERCICE 2 Suites

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1\,000$ et $U_{n+1} = 0,2 U_n + 40$, avec $n \geq 0$.

1. Calculer U_1 et U_2 .

2. Pour tout entier naturel n , on pose $V_n = U_n - 50$.

Montrer que, pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = 0,2 V_n$.

En déduire la nature de la suite (V_n) et donner l'expression de V_n en fonction de n .

4. Exprimer U_n en fonction de n .

5. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

► SUR VOTRE BROUILLON

EXERCICE 1

1. D'après le graphique, la courbe de la fonction f' est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1 ; 2]$, donc f' est positive sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

Le nombre A est donc l'aire (sous la courbe) du domaine délimité par la courbe de f' , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

2. Une primitive de la fonction f' est la fonction f , donc :

$$A = \int_1^2 f'(t) dt = f(2) - f(1).$$

D'après le graphique, la courbe de la fonction f passe par les points $B(1 ; -4)$ et $D(2 ; -1)$, donc $f(1) = -4$ et $f(2) = -1$.

On a ainsi $A = -1 - (-4) = -1 + 4 = 3$.

EXERCICE 2

1. $U_1 = 0,2 U_0 + 40 = 0,2 \times 1\,000 + 40$, soit $U_1 = 240$.

$U_2 = 0,2 U_1 + 40 = 0,2 \times 240 + 40$, soit $U_2 = 88$.

2. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - 50 = 0,2 U_n + 40 - 50 = 0,2 U_n - 10 = 0,2 \left(U_n - \frac{10}{0,2} \right) \\ &= 0,2(U_n - 50) = 0,2 V_n. \end{aligned}$$

3. $V_0 = U_0 - 50 = 1\,000 - 50 = 950$.

Pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = 0,2 V_n$, donc la suite (V_n) est une suite géométrique de premier terme $V_0 = 950$ et de raison $0,2$.

$V_n = V_0 \times q^n$, soit $V_n = 950 \times 0,2^n$.

4. $V_n = U_n - 50$, donc $U_n = V_n + 50$, soit $U_n = 950 \times 0,2^n + 50$.

5. $0 < 0,2 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^n = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 50$.

EXERCICE 1 Fonctions – Exponentielle, Logarithme népérien

1. $A = \ln 9 + \ln 4 - 2 \ln 6$. Montrer que $A = 0$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{1-x} \times e^{3x-2} = \frac{1}{e} \times e^{2x}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{x(x+1)} = 1$.

EXERCICE 2 Probabilités – Loi normale

Lors d'une épreuve au baccalauréat, 80 % des individus ont une note inférieure à 14. De plus, les résultats suivent une loi normale d'écart-type 2,5. Calculer l'espérance μ de cette loi normale.

► SUR VOTRE BROUILLON

EXERCICE 1

1. D'après les propriétés du logarithme, on a :
 $\ln(9) = \ln(3^2) = 2 \ln(3)$, $\ln(4) = \ln(2^2) = 2 \ln(2)$ et $\ln(6) = \ln(2) + \ln(3)$.
 $A = 2 \ln(3) + 2 \ln(2) - 2 (\ln(2) + \ln(3)) = 0$.
2. Pour tout x réel, $e^{1-x} \times e^{3x-2} = e^{1-x+3x-2} = e^{2x-1}$;
 $\frac{1}{e} = e^{-1}$ et $\frac{1}{e} \times e^{2x} = e^{2x-1}$, donc $e^{1-x} \times e^{3x-2} = \frac{1}{e} \times e^{2x}$.
3. Pour tous réels a et b , $e^a = e^b$ équivaut à $a = b$.
 Pour tout x réel, $e^{x(x+1)} = 1 = e^0$ équivaut à $x(x+1) = 0$ qui équivaut à $x = 0$ ou $x + 1 = 0$.
 Les solutions de l'équation sont donc 0 et -1.

EXERCICE 2

On note X la variable aléatoire qui donne la note d'un candidat à l'épreuve.

On pose $T = \frac{X - \mu}{2,5}$; alors T suit la loi normale $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

$$P(X \leq 14) = P\left(T \leq \frac{14 - \mu}{2,5}\right) = 80 \% = 0,8.$$

Avec la calculatrice, on détermine le nombre y tel que $P(T \leq y) = 0,8$.

– TI : **2nde** **var** **FracNormale** (probabilité, μ , σ) ,
 donc ici : **FracNormale** (0,8,0,1) $\approx 0,842$.

– Casio : **MENU** **STAT** **DIST** **NORM** **InvN** (probabilité, σ , μ) ,
 donc ici : **InvN** (0,8,1,0) $\approx 0,842$.

On obtient $y \approx 0,842$.

Ainsi $\frac{14 - \mu}{2,5} = 0,842$, d'où $14 - \mu = 0,842 \times 2,5 = 2,105$, puis $\mu \approx 11,9$.

L'espérance de cette loi normale est d'environ 11,9.

EXERCICE 1 Fonctions – Logarithme népérien, Lecture graphique

Sur le graphique ci-contre, on a représenté la courbe C_f d'une fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

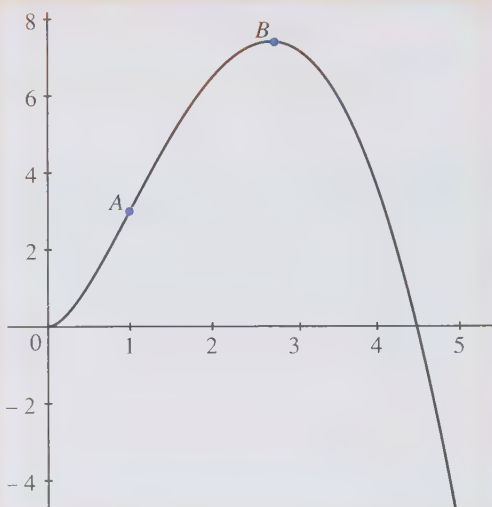
$$f(x) = x^2(a + b \times \ln(x)), \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des constantes.}$$

1. Sachant que C_f passe par les points $A(1; 3)$ et $B(e; e^2)$, calculer a et b .

2. Dans toute la suite, on suppose que la fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x^2(3 - 2 \ln(x))$ et on note f' sa fonction dérivée.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$.

b) En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$, puis dresser son tableau de variations.



SPÉCIALITÉ EXERCICE 2 Matrices, Polynôme, Convexité, Point d'inflexion

Déterminer les réels a , b , c et d tels que la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ passe par les points suivants : $A(1; 0)$, $B(-1; 8)$ et admette un point d'inflexion au point $D(0,5; 0,5)$.

► SUR VOTRE BROUILLON

EXERCICE 1

1. Comme $A(1; 3)$ est situé sur C_f , alors $1^2 \times (a + b \ln(1)) = 3$, donc $a = 3$ car $\ln(1) = 0$. Comme $B(e; e^2)$ est situé sur C_f , alors $e^2 \times (a + b \ln(e)) = e^2$.

Or, $a = 3$ et $\ln(e) = 1$, donc, $e^2 \times (3 + b) = e^2 \Leftrightarrow b + 3 = 1 \Leftrightarrow b = -2$.

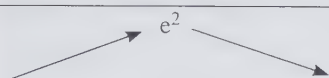
Finalement, $f(x) = x^2 \times (3 - 2 \ln(x))$.

2. a) $f = u \times v$, avec $u(x) = x^2$; $u'(x) = 2x$ et $v(x) = 3 - 2 \ln(x)$; $v'(x) = -2 \times \frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$.

$f' = u' \times v + u \times v'$; donc, pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \times (3 - 2 \ln(x)) + x^2 \times \left(-\frac{2}{x}\right) = 6x - 4x \ln(x) - 2x = 4x - 4x \ln(x) \\ &= 4x(1 - \ln(x)). \end{aligned}$$

b) Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $1 - \ln(x)$, c'est-à-dire :
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$.
 $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln(x) \Leftrightarrow e > x$ ou encore $x < e$.
 Donc f est strictement croissante sur $]0 ; e[$ et strictement décroissante sur $]e ; +\infty[$.

x	0	e	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de $f(x)$			

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

$A(1 ; 0) \in \mathcal{C}$, donc $a \times 1^3 + b \times 1^2 + c \times 1 + d = 0$,

soit $a + b + c + d = 0$.

$B(-1 ; 8) \in \mathcal{C}$, donc $a \times (-1)^3 + b \times (-1)^2 + c \times (-1) + d = 8$,

soit $-a + b - c + d = 8$.

$D(0,5 ; 0,5) \in \mathcal{C}$, donc $a \times 0,5^3 + b \times 0,5^2 + c \times 0,5 + d = 0,5$,

soit $a \times \frac{1}{8} + b \times \frac{1}{4} + c \times \frac{1}{2} + d = \frac{1}{2}$

ou encore $a + 2b + 4c + 8d = 4$.

D est un point d'inflexion pour la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Cela signifie que $f''(0,5) = 0$.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donc $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et $f''(x) = 6ax + 2b$.

$f''(0,5) = 0 \Leftrightarrow 6a \times 0,5 + 2b = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b = 0$.

Ainsi a, b, c, d sont solutions du système :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -a + b - c + d = 8 \\ a + 2b + 4c + 8d = 4 \\ 3a + 2b = 0. \end{cases}$$

L'écriture matricielle du système est $AX = C$, avec :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc $X = A^{-1}C$.

La calculatrice donne $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ et $A^{-1}C = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Donc $a = -2$, $b = 3$, $c = -2$ et $d = 1$.

L'équation de la courbe est : $y = -2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.

EXERCICE 1 Fonctions – Exponentielle

On cherche une fonction dont l'allure de la courbe représentative dans un repère orthonormé prend la forme d'une rampe d'escalier.

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 3]$ et C_f sa courbe représentative dans un repère.

On souhaite que la fonction f remplit les cinq conditions suivantes :

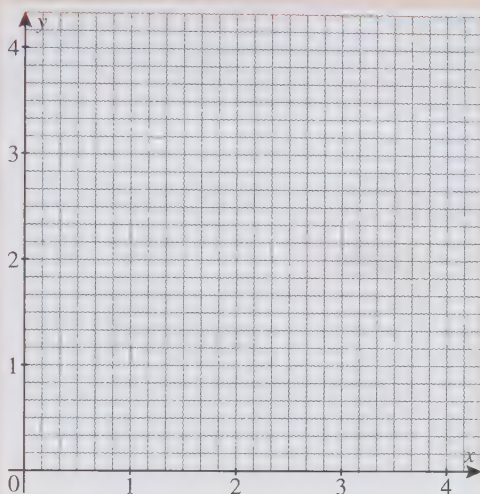
(1) Le point D de coordonnées $(0 ; 4)$ est un point de la courbe C_f .

(2) La tangente à la courbe C_f au point D passe par le point E de coordonnées $\left(2 ; \frac{5}{2}\right)$

(3) f est décroissante sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

(4) C_f passe par le point B de coordonnées $(3 ; 0)$.

(5) La tangente (T) à C_f en son point d'abscisse 3 est l'axe des abscisses.



1. a) Tracer la droite (DE) sur le graphique ci-dessus.

b) Démontrer que la droite (DE) a pour équation $y = -\frac{3}{4}x + 4$.

c) Sur le graphique, tracer le dessin d'une courbe représentative d'une fonction f vérifiant les cinq conditions imposées.

2. On considère la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par :

$$f(x) = 5 + \frac{1}{4} \times (x - 4)e^x.$$

a) Calculer $f(0)$.

La condition (1) est-elle vérifiée ?

b) Vérifier que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie pour tout x de l'intervalle $[0 ; 3]$ par :

$$f'(x) = \frac{1}{4} \times (x - 3)e^x.$$

c) Calculer $f'(0)$. La condition (2) est-elle vérifiée ? Justifier précisément la réponse.

d) La condition (3) est-elle vérifiée ?

Justifier précisément la réponse.

e) La courbe représentative de f correspond-elle au problème posé, autrement dit les conditions (4) à (5) sont-elles vérifiées ?

Justifier précisément la réponse.

EXERCICE 2 Statistiques – Intervalle de fluctuation

Dans un casino, un joueur ayant perdu beaucoup d'argent pense que le jeu de dé est truqué. Il suit le jeu pendant deux heures et constate que, sur 400 lancers d'un dé, la face 6 est sortie 90 fois. Que peut-il en conclure ?

► SUR VOTRE BROUILLON

EXERCICE 1

1. a) Voir ci-contre.

b) L'équation de la droite (DE) est de la forme $y = ax + b$ car la droite (DE) n'est pas parallèle à l'axe (Oy).

Coefficient directeur de la droite (DE) :

$$a = \frac{y_D - y_E}{x_D - x_E} = \frac{4 - 2,5}{0 - 2} = \frac{1,5}{-2} = -\frac{3}{4}.$$

L'équation de (DE) est donc :

$$y = -\frac{3}{4}x + b.$$

Or, $D(0 ; 4)$ est un point de la droite (DE), donc $b = 4$.

Équation réduite de (DE) :

$$y = -\frac{3}{4}x + 4.$$

c) Voir graphique ci-contre.

$$\begin{aligned} 2. a) f(0) &= 5 + \frac{1}{4}(0 - 4)e^0 \\ &= 5 + \frac{1}{4} \times (-4) \times 1 = 5 - 1 = 4. \end{aligned}$$

Le point $D(0 ; 4)$ est donc un point de la courbe C_f .

La condition (1) est vérifiée.

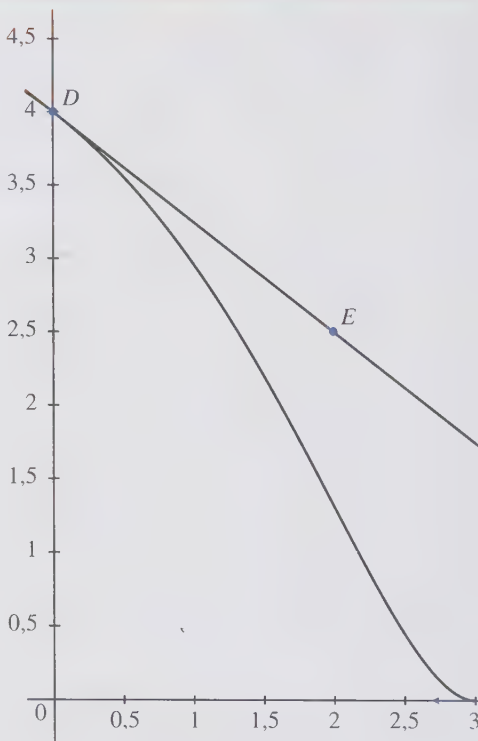
b) Pour tout x appartenant à $[0 ; 3]$:

$$f'(x) = \frac{1}{4} \times 1 \times e^x + \frac{1}{4}(x - 4)e^x = \frac{1}{4}(1 + x - 4)e^x.$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{1}{4}(x - 3)e^x.$$

$$c) f'(0) = \frac{1}{4}(0 - 3)e^0 = -\frac{3}{4}.$$

Par définition, $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point D . La droite (DE) et la tangente à la courbe C_f au point D ont le même coefficient directeur.



Deux droites issues d'un même point, ici D , et possédant le même coefficient directeur sont confondues, donc :

La condition (2) est vérifiée.

d) Pour tout x appartenant à $[0 ; 3]$, $f'(x) = \frac{1}{4}(x-3)e^x$.

Or, pour tout x , $e^x > 0$ et, pour tout x appartenant à $[0 ; 3]$: $x-3 \leq 0$.

Donc, par produit, pour tout x appartenant à $[0 ; 3]$, $f'(x) \leq 0$.

La condition (3) est vérifiée.

e) On a $f(3) = 5 + \frac{1}{4}(3-4)e^3 \approx -0,02 \neq 0$; donc le point $B(3 ; 0)$ n'est pas situé sur C_f .

La condition (4) n'est pas vérifiée.

La courbe représentative de f ne correspond pas au problème posé.

EXERCICE 2

La question que l'on se pose est : le dé est-il truqué ?

On fait l'hypothèse que le dé n'est pas truqué et donc que la fréquence théorique d'apparition du 6 est $p = \frac{1}{6}$.

On calcule l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % en vérifiant au préalable que les conditions d'application sont vérifiées : $n = 400 \geq 30$;

$$np = 400 \times \frac{1}{6} \geq 5 \text{ et } n(1-p) = 400 \times \frac{5}{6} \geq 5.$$

$$\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \approx [0,130 ; 0,203].$$

Or, $\frac{90}{400} = 0,225 \notin [0,130 ; 0,203]$; on va donc rejeter l'hypothèse selon laquelle le dé n'est pas truqué. Le joueur a donc raison d'avoir des doutes.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 1 Graphe probabiliste

Chaque année, une association de cyclotourisme prépare de nouveaux circuits. Pour satisfaire ses nombreux membres, elle élabore des circuits de différents niveaux : « niveau facile », « niveau moyen » et « niveau difficile ».

Au premier janvier 2010, l'association a fait son bilan :

- 20 % de ses adhérents ont choisi le niveau facile, noté A ;
- 70 % de ses adhérents ont choisi le niveau moyen, noté B ;
- 10 % de ses adhérents ont choisi le niveau difficile, noté C.

Pour répondre aux attentes des adhérents et les fidéliser sur le long terme, une enquête est effectuée.

Il s'avère que, d'une année à l'autre :

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau A, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau B ;
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau B, 70 % restent à ce niveau, 20 % reviennent au niveau A et les autres passent au niveau C ;
- parmi les adhérents ayant choisi le niveau C, 85 % restent à ce niveau et les autres reviennent au niveau B.

On note :

- A l'état « l'adhérent a choisi le niveau A » ;
- B l'état « l'adhérent a choisi le niveau B » ;
- C l'état « l'adhérent a choisi le niveau C ».

Pour n entier naturel positif ou nul, on note $P_n = (a_n \ b_n \ c_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste de la répartition dans les différents niveaux (indiqués dans l'ordre donné dans l'énoncé), au premier janvier de l'année 2010 + n . Ainsi $P_0 = (0,2 \ 0,7 \ 0,1)$. On se décide se baser uniquement sur ces résultats pour prévoir l'évolution de la répartition à partir du premier janvier 2010 (on néglige donc les nouveaux membres et les départs).

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A, B et C.
2. Reproduire et compléter la matrice de transition M de ce graphe probabiliste, en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

$$M = \begin{pmatrix} \dots & \dots & 0 \\ 0,2 & \dots & \dots \\ \dots & 0,15 & \dots \end{pmatrix}$$

3. Une seule des trois matrices Q , R , T ci-dessous correspond à l'état probabiliste stable.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Le président de l'association affirme qu'environ 50 % des adhérents choisiront après un certain nombre d'années le niveau B. Cette affirmation est-elle correcte ?

EXERCICE 2 Statistiques – Intervalle de fluctuation

Chaque groupe parlementaire doit respecter la parité homme-femme sur les listes électorales, ce qui ne se répercute pas nécessairement sur le nombre de députés. Le président du groupe socialiste estime que son groupe respecte la parité à l'Assemblée nationale alors que le groupe UMP ne la respecte pas.

Dans le groupe socialiste, on compte 104 femmes pour 280 députés alors que, dans le groupe UMP, on compte 27 femmes pour 188 députés.

1. Dans chacun des deux groupes, déterminer le pourcentage de femmes députés.

2. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de députés féminins dans le groupe socialiste.

Déterminer la loi de X , puis préciser l'intervalle I de fluctuation asymptotique de $\frac{X}{280}$ au seuil de 95 %.

3. On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de députés féminins dans le groupe UMP.

Déterminer la loi de Y , puis préciser l'intervalle de fluctuation asymptotique J de $\frac{Y}{188}$ au seuil de 95 %.

4. Conclure.

► SUR VOTRE BROUILLON

SPÉCIALITÉ EXERCICE 1

1. Notons A_n l'événement « l'adhérent a choisi le niveau A » l'année $2010 + n$; B_n l'événement « l'adhérent a choisi le niveau B » l'année $2010 + n$ et C_n l'événement « l'adhérent a choisi le niveau C » l'année $2010 + n$.

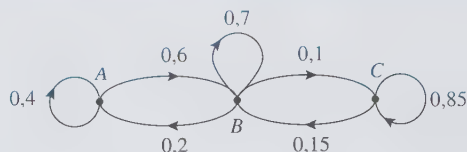
Il s'avère que, d'une année à l'autre :

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau A, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau B, d'où $p_{A_n}(A_{n+1}) = 0,4$ et $p_{A_n}(B_{n+1}) = 0,6$.

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau B, 70 % restent à ce niveau, 20 % reviennent au niveau A et les autres passent au niveau C, d'où $p_{B_n}(B_{n+1}) = 0,7$; $p_{B_n}(A_{n+1}) = 0,2$ et $p_{B_n}(C_{n+1}) = 0,1$.

- parmi les adhérents ayant choisi le niveau C, 85 % restent à ce niveau et les autres reviennent au niveau B, d'où $p_{C_n}(C_{n+1}) = 0,85$ et $p_{C_n}(B_{n+1}) = 0,15$.

On en déduit le graphe probabiliste qui représente la situation :



2. La matrice de transition associée au graphe précédent est $M = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Sommets} & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 A \rightarrow & & B \rightarrow \\
 B \rightarrow & M = & C \rightarrow \\
 C \rightarrow & &
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0,4 & 0,6 & 0 \\
 0,2 & 0,7 & 0,1 \\
 0 & 0,15 & 0,85
 \end{bmatrix}$$

0,15 est la probabilité de passage de l'état C à l'état B :
15 % des adhérents reviennent du niveau C au niveau B.

3. L'état probabiliste stable $P = (a \ b \ c)$ doit vérifier $P = P \times M$ ou encore

$$(a \ b \ c) = (a \ b \ c) \times \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{bmatrix}.$$

Il suffit donc de vérifier laquelle des trois matrices données dans l'énoncé vérifie la relation $P = P \times M$.

$$\begin{aligned}
 R \times M &= \left(\frac{1}{6} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{3} \right) \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} \\
 &= \left(\frac{1}{6} \times 0,4 + \frac{1}{2} \times 0,2 \quad \frac{1}{6} \times 0,6 + \frac{1}{2} \times 0,7 + \frac{1}{3} \times 0,15 \quad \frac{1}{2} \times 0,1 + \frac{1}{3} \times 0,85 \right) \\
 &= \left(\frac{1}{6} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{3} \right) = R,
 \end{aligned}$$

donc **R est la matrice correspondant à l'état probabiliste stable.**

On en déduit qu'après un certain nombre d'années, 1 adhérent sur 6 choisira le niveau A, 1 sur 2 le niveau B et 1 sur 3 le niveau C. **Le président de l'association a donc raison d'affirmer qu'environ 50 % des adhérents choisiront le niveau B.**

Remarque :

$$Q \times M = \left(\frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \right) \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{5} \ \frac{29}{60} \ \frac{19}{60} \right) \neq Q, \text{ donc } Q \text{ ne vérifie pas l'état stable.}$$

$$T \times M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = (0,24 \quad 0,68 \quad 0,08) \neq T, \text{ donc } T \text{ ne vérifie}$$

pas l'état stable.

Autre méthode :

$$P = P \times M, \text{ donc } (a \ b \ c) = (a \ b \ c) \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}, \text{ avec } a + b + c = 1.$$

On est amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} a = 0,4a + 0,2b \\ b = 0,6a + 0,7b + 0,15c \\ c = 0,1b + 0,85c \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,6a = 0,2b \\ 0,6a - 0,3b + 0,15c = 0 \\ 0,15c = 0,1b \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{0,2}{0,6}b = \frac{1}{3}b \\ 0,6a - 0,3b + 0,15c = 0 \\ c = \frac{0,1}{0,15}b = \frac{2}{3}b \\ \frac{1}{3}b + b + \frac{2}{3}b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \\ c = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On a donc la matrice R qui correspond à l'état probabiliste stable.

La deuxième équation du système ne sert pas à la résolution, mais peut permettre de vérifier le résultat trouvé.

EXERCICE 2

1. Proportion de femmes dans le groupe socialiste : $\frac{104}{280} \approx 0,37$, soit 37 %.

Proportion de femmes dans le groupe UMP : $\frac{27}{188} \approx 0,14$, soit 14 %.

2. On suppose que le nombre de députés est suffisamment grand pour que le choix d'un député pris au hasard s'apparente à un tirage avec remise. Si l'on suppose que le groupe socialiste respecte la parité, alors X suit la loi binomiale de paramètres $p = 0,5$ et $n = 280$. On vérifie que l'on est dans les conditions de la propriété :

$$n = 280 > 30, n \times p = 140 > 5, n \times (1 - p) = 140 > 5.$$

$$I_A = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

$$= \left[0,5 - 1,96 \frac{\sqrt{0,5(1-0,5)}}{\sqrt{280}} ; 0,5 + 1,96 \frac{\sqrt{0,5(1-0,5)}}{\sqrt{280}} \right]$$

$$I_A \approx [0,44 ; 0,56].$$

3. De même, Y suit la loi binomiale de paramètres $p = 0,5$ et $n = 188$.
 $n = 188 > 30$, $n \times p = 94 > 5$, $n \times (1 - p) = 94 > 5$.

$$\begin{aligned} J_B &= \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \\ &= \left[0,5 - 1,96 \frac{\sqrt{0,5(1-0,5)}}{\sqrt{188}} ; 0,5 + 1,96 \frac{\sqrt{0,5(1-0,5)}}{\sqrt{188}} \right]. \end{aligned}$$

$$J_B \approx [0,43 ; 0,57].$$

4. Conclusion

La proportion 0,14 n'est pas dans l'intervalle de fluctuation asymptotique J_B . Autrement dit, la proportion de 0,14 s'observe dans moins de 5 % des cas. On peut donc rejeter l'hypothèse que le groupe UMP respecte la parité.

De même, la proportion 0,37 ne se trouve pas dans l'intervalle de fluctuation asymptotique I_A . Autrement dit, la proportion de 0,34 s'observe dans moins de 5 % des cas. On peut donc rejeter l'hypothèse que le groupe socialiste respecte la parité et donc le président du groupe socialiste a tort.

EXERCICE 1 Statistiques – Intervalle de confiance

Une entreprise de matériel pour l'industrie automobile produit une pièce P constituée de deux objets O_1 et O_2 .

On considère l'événement A : « aucun des deux objets constituant la pièce n'est défectueux ».

1. Dans un important stock de ces pièces, on prélève au hasard 10 pièces pour vérification. Le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pièces.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 pièces, associe le nombre de pièces réalisant l'événement A .

On suppose que la probabilité de l'événement A est 0,902.

- Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Déterminer les paramètres de cette loi.
- Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que, dans un tel prélèvement, 9 pièces au moins réalisent l'événement A .

2. L'entreprise fabrique les objets O_2 dans deux ateliers différents. Le responsable qualité doit contrôler le taux de défectuosité de l'objet O_2 dans les deux ateliers pour pouvoir les utiliser ensemble dans l'assemblage de la pièce.

En effet, des taux de défectuosité trop différents entraîneraient des retours qualité et il faudrait commercialiser les pièces sous deux appellations différentes.

L'entreprise adopte la stratégie suivante :

- elle calcule les intervalles de confiance à 0,95 du taux de défectuosité dans les deux ateliers ;
- si les deux intervalles sont disjoints, alors elle peut conclure à une différence du taux de défectuosité dans les deux ateliers et elle doit les commercialiser sous deux appellations différentes.

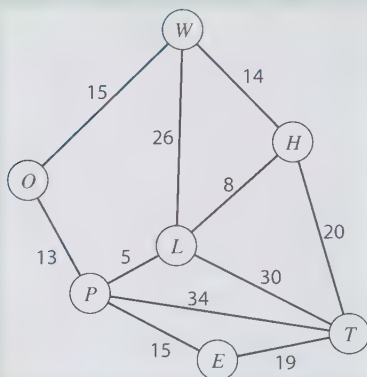
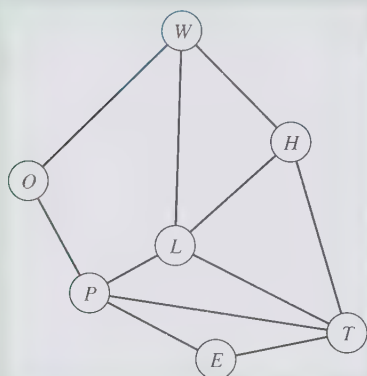
Dans le premier atelier, 198 objets sur les 250 contrôlés sont bons et, dans le second atelier, 230 sur les 250. Que doit conclure l'entreprise ?

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2 Matrices – Graphe pondéré

Une seule, au choix, des deux parties sera posée en questionnement pour un exercice d'oral.

La classe de Terminale d'Arthur est en voyage scolaire en Angleterre.

Les professeurs organisateurs de ce voyage décident de visiter plusieurs sites de Londres. Les sites retenus dans Londres sont les suivants : *Warren Street*, *Oxford Circus*, *Piccadilly Circus*, *Leicester Square*, *Holborn*, *Embankment* et *Temple*. Ces lieux sont désignés respectivement par les lettres W , O , P , L , H , E et T , et sont représentés dans le graphe Γ donné ci-après (chaque sommet représente un site à visiter et chaque arête une route reliant deux sites).



Partie A

1. Ce graphe est-il connexe ?
2. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? (La réponse devra être justifiée.) Si oui, donner une telle chaîne.
3. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? (La réponse devra être justifiée.) Si oui, donner un tel cycle.
4. Donner la matrice M associée au graphe Γ . (Les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique : E, H, L, O, P, T, W .)

Partie B

Les élèves sont laissés en autonomie deux heures pour faire du shopping et ramener des souvenirs à leur famille. Le point de rendez-vous avec les organisateurs est fixé à *Temple*. Les temps de parcours en minutes entre chaque sommet ont été ajoutés sur le graphe.

Arthur, qui est à *Oxford Circus*, n'a pas vu le temps passer. Lorsqu'il s'en rend compte, il ne lui reste plus que 40 minutes pour arriver à *Temple*.

1. Déterminer le plus court chemin en minutes reliant *Oxford Circus* à *Temple*. Justifier la réponse à l'aide d'un algorithme.
2. Quelle est la longueur en minutes de ce chemin ? Arthur sera-t-il en retard ?

► SUR VOTRE BROUILLON

EXERCICE 1

1. a) On effectue 10 tirages indépendants et l'expérience a deux issues possibles : A ou son événement contraire ; on est donc dans le cadre de la répétition d'épreuves de Bernoulli et X suit la loi binomiale de paramètres n et p , avec $n = 10$ et $p = P(A) = 0,902$.

$$b) P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9} \times 0,902^9 \times 0,098^1 + \binom{10}{10} \times 0,902^{10} \times 0,098^0 \approx 0,744.$$

2. L'intervalle de confiance à 95 % de la proportion d'objets défectueux dans le premier atelier est :

$$\left[\frac{52}{250} - \frac{1}{\sqrt{250}}; \frac{52}{250} + \frac{1}{\sqrt{250}} \right] \approx [0,145; 0,271].$$

L'intervalle de confiance à 95 % de la proportion d'objets défectueux dans le second atelier est :

$$\left[\frac{20}{250} - \frac{1}{\sqrt{250}}; \frac{20}{250} + \frac{1}{\sqrt{250}} \right] \approx [0,017; 0,143].$$

Les deux intervalles sont disjoints ; l'entreprise doit donc commercialiser les pièces sous deux appellations différentes.

SPÉCIALITÉ EXERCICE 2

Partie A

1. La chaîne $O-P-E-T-H-W-L$ passe par tous les sommets du graphe, donc celui-ci est connexe.

2. Seuls deux sommets H et W sont de degré impair, tous les autres sommets sont de degré pair ; ainsi, d'après le théorème d'Euler, le graphe admet une chaîne eulérienne entre les sommets H et W .

Par exemple, la chaîne $H-T-L-H-W-L-P-E-T-P-O-W$ est une chaîne eulérienne.

3. Le graphe a deux sommets de degré impair, donc il n'admet pas de cycle eulérien.

4. Le graphe n'étant pas orienté, la matrice M est symétrique, chaque coefficient de M étant le nombre d'arêtes entre deux sommets distincts.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Partie B

1. Le graphe étant connexe, d'après la **partie A**, pour déterminer le chemin permettant d'aller d'*Oxford Circus*, noté O , à *Temple*, noté T , en un temps minimum, on cherche une plus courte chaîne en utilisant l'algorithme de Dijkstra entre les sommets de départ et d'arrivée :

Étape 1 (première ligne)

- O est le sommet de départ, donc fixé avec la marque $0(O)$.
- P est à 13 minutes de O , donc marqué $13(O)$, et W à 15 minutes de O , donc marqué $15(O)$; les autres sommets ne sont pas adjacents à O donc marqués ∞ .

Étape	O	P	W	L	E	H	T	Sommet fixé
1	$0(O)$	$13(O)$	$15(O)$	∞	∞	∞	∞	O

Étape 2 (deuxième ligne)

- P est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet P avec la marque $13(O)$.
- W n'est pas adjacent à P , donc il reste marqué $15(O)$.
- L est à $13 + 5$, soit 18 minutes de O en passant par P , donc il est marqué $18(P)$.
- T est à $13 + 34$, soit 47 minutes de O en passant par P , donc il est marqué $47(P)$.
- E est à $13 + 15$, soit 28 minutes de O en passant par P , donc il est marqué $28(P)$.
- H n'est pas adjacent à P , donc il reste marqué ∞ .

On applique la même méthode pour fixer les sommets suivants en complétant le tableau après chaque étape.

Étape 3 (troisième ligne)

- W est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet W avec la marque $15(O)$.
- L est à $15 + 26$, soit 41 minutes de O en passant par W , donc il reste marqué $18(P)$, la marque $41(W)$ n'étant pas inférieure.
- H est à $15 + 14$, soit 29 minutes de O en passant par W , donc il est marqué $29(W)$.
- E et T ne sont pas adjacents à W , donc ils gardent leur marque précédente.

Étape 4 (quatrième ligne)

- L est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet L avec la marque $18(P)$.
- H est à $18 + 8$, soit 26 minutes de O en passant par L , donc il est marqué $26(L)$, la marque étant inférieure au $29(W)$ précédent.
- T est à $18 + 30$, soit 48 minutes de O en passant par L , donc il reste marqué $47(P)$, la marque $48(L)$ n'étant pas inférieure.
- E n'est pas adjacent à L , donc il reste marqué $28(P)$.

Étape 5 (cinquième ligne)

- H est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet H avec la marque $26(L)$.
- T est à $26 + 20$, soit 46 minutes de O en passant par H , donc il est marqué $46(H)$, la marque étant inférieure au $47(P)$ précédent.
- E n'est pas adjacent à H , donc il reste marqué $28(P)$.

Étape 6 (sixième ligne)

- E est le sommet de la ligne précédente de poids minimal, donc on fixe le sommet E avec la marque $28(P)$.
- T est à $28 + 19$, soit 47 minutes de O en passant par E , donc il reste marqué $46(H)$, la marque $47(E)$ n'étant pas inférieure.

Dernière étape

– T est marqué 46(H).

Étape	O	P	W	L	E	H	T	Sommet fixé
1	0(O)	13(O)	15(O)	∞	∞	∞	∞	O
2		13(O)	15(O)	18(P)	28(P)	∞	47(P)	P
3			15(O)	18(P)	28(P)	29(W)	47(P)	W
4				18(P)	28(P)	26(L)	47(P)	L
5					28(P)	26(L)	46(H)	H
6					28(P)		46(H)	E
7							46(H)	T

On remonte l'algorithme en suivant les flèches de sommet en sommet : T est à 46 minutes de O en passant par H , H est à 26 minutes de O en passant par L , L est à 18 minutes de O en passant par P , P est 13 minutes de O .

Un trajet qui minimise le temps de parcours entre O et T est donc $O-P-L-H-T$: il dure 46 minutes.

2. Le temps de parcours minimal pour aller d'Oxford Circus à Temple est de 46 minutes d'après la question précédente : **Arthur sera donc en retard au rendez-vous.**

EXERCICE 1 Fonctions – Calcul intégral, Primitives, Lecture graphique

Courbes avec dérivées et primitives

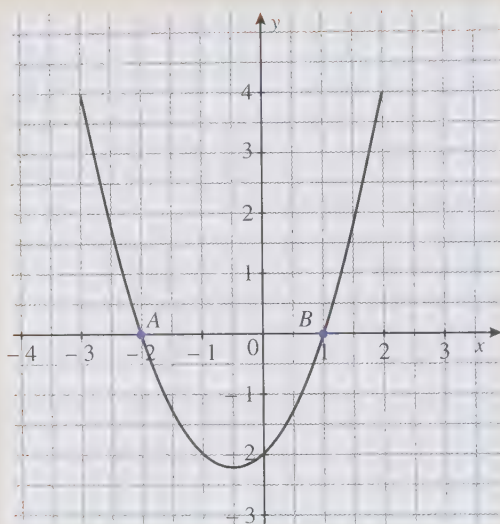
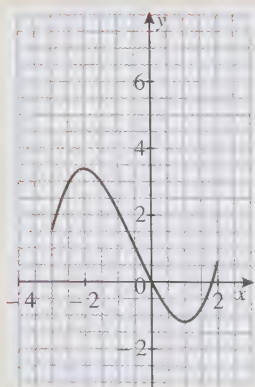
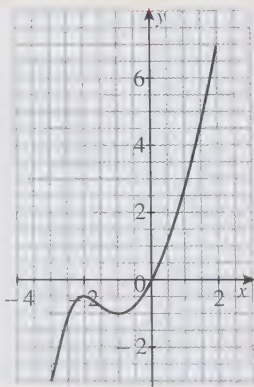


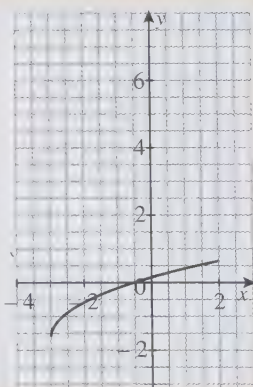
Figure 1



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

Figure 2

La courbe de la figure 1 est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 2]$. Les points A et B sont les points d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses ; ils ont pour abscisses respectives -2 et 1 .

1. Déterminer, parmi les trois courbes des fonctions de la **figure 2**, la seule qui corresponde à une primitive F de f .
2. Déterminer, parmi les trois courbes des fonctions de la **figure 2**, la seule qui corresponde à une dérivée f' de f .

EXERCICE 2 Probabilités – Loi binomiale, Loi uniforme, Loi normale

1. Lou attend sa mère à l'entrée d'un magasin. Elle lui a dit qu'elle mettrait au minimum 10 minutes et au maximum 1 heure.
Quelle est la probabilité qu'elle mette entre 30 et 40 minutes ?
2. Pour s'occuper, Lou compte le nombre de clients sortant du magasin. La clientèle du magasin est composée à 70 % de femmes.
Quelle est la probabilité que, sur les 5 prochains clients qui vont quitter le magasin, deux exactement soient des femmes ?
3. On considère que le temps passé par les clients dans le magasin suit une loi normale de moyenne 30 minutes et d'écart-type 15.
 - a) Déterminer le pourcentage de clients sortant avant 40 minutes.
 - b) Déterminer le pourcentage de clients passant entre 30 et 40 minutes dans le magasin.

► SUR VOTRE BROUILLON

EXERCICE 1

1. La courbe C est au-dessus de l'axe des abscisses si $-3 < x < -2$, au-dessous si $-2 < x < 1$, et au-dessus si $1 < x < 2$.
Donc f est négative si $-2 < x < 1$ et positive si $-3 < x < -2$ ou si $1 < x < 2$.
 F est une primitive de f . On a donc, pour $x > 0$, $F'(x) = f(x)$. Le tableau de signes de f donne donc le tableau de signes de F' dont on peut déduire les variations de F .
 F est croissante sur $] -3 ; -2[$, décroissante sur $] -2 ; 1[$ et croissante sur $] 1 ; 2[$.
On a le tableau de variations suivant :

x	-3	-2	1	2	
Signe de $f(x) = F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Variations de $F(x)$					

La seule courbe correspondant à ces variations est donc la courbe 1 qui est alors la courbe de la primitive de f .

2. D'après la courbe C , la fonction f est décroissante sur $] - 3 ; - 0,5[$ et croissante sur $] - 0,5 ; 2[$. La dérivée de f est donc négative sur $] - 3 ; - 0,5[$ et positive sur $] - 0,5 ; 2[$. La seule courbe correspondant à ces signes est donc la courbe 3 qui est alors la courbe de la dérivée de f .

EXERCICE 2

1. Le temps passé par la mère dans le magasin suit la loi uniforme sur l'intervalle $[10 ; 60]$. La probabilité que la mère mette entre 30 et 40 minutes est :

$$P(30 < X < 40) = \frac{40 - 30}{60 - 10} = \frac{1}{5}.$$

2. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour que la succession de clients sortants s'apparente à un tirage avec remise. La variable aléatoire Y comptant le nombre de femmes parmi les clients sortant du magasin suit alors la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,7$.

On veut qu'il y ait exactement 2 femmes, donc on calcule ensuite $P(Y = 2)$ par :

$$P(Y = 2) = \binom{5}{2} 0,7^2 (1 - 0,7)^3 = 0,1323.$$

3. Soit X la variable aléatoire continue représentant le temps passé par un client dans le magasin ; X suit la loi normale $\mathcal{N}(30 ; 15^2)$ avec $\mu = 30$ et $\sigma = 15$.

a) Il s'agit de calculer $P(X < 40)$, avec $\mu = 30 < 40$:

– TI : $0,5 + \text{2nde} \text{ var normalFRép (valeur mini, valeur maxi, } \mu, \sigma)$

donc ici : $0,5 + \text{normalFRép} (30,40,30,15) \approx 0,7475$.

– Casio : $0,5 + \text{MENU STAT DIST NORM Ncd (Lower,Upper, } \sigma, \mu)$.

donc ici : $0,5 + \text{Ncd} (30,40,15,30) \approx 0,7475$.

Environ 75 % des clients sortent avant 40 minutes du magasin.

b) Pour déterminer le pourcentage de clients passant entre 30 et 40 minutes dans le magasin, on doit calculer $P(30 < X < 40)$.

Ce calcul s'effectue à la calculatrice :

– TI : $\text{2nde} \text{ var normalFRép (valeur mini, valeur maxi, } \mu, \sigma)$.

donc ici : $\text{normalFRép} (30,40,30,15) \approx 0,2475$.

– Casio : $\text{MENU STAT DIST NORM Ncd (Lower,Upper, } \sigma, \mu)$.

donc ici : $\text{Ncd} (30,40,15,30) \approx 0,2475$.

Environ 25 % des clients passent entre 30 et 40 minutes dans le magasin.

Sujets
et corrigés

Annales Bac 2020

Mathématiques T^{erm} ES/L

Obligatoire + Spécialité

Pour s'entraîner et réussir l'épreuve du bac !

- 12 sujets complets (60 exercices), bac 2019 inclus, tous corrigés.
- 8 sujets pour préparer l'oral.
- Ces sujets traitent tous les thèmes du programme repérés par des couleurs spécifiques.
- Chaque sujet fait l'objet d'un corrigé rédigé à l'identique de ce que l'on attend de vous le jour de l'examen, accompagné de conseils, d'astuces et de rappels de cours.
- Le descriptif des épreuves, des conseils généraux et un tableau des exercices classés par thèmes complètent utilement cet ouvrage.

Annales 2020

Sujets et corrigés

- | | | |
|--------------------------------------|--|------------------------------------|
| • Physique-Chimie T ^{erm} S | • Philosophie T ^{erm} L/ES/S | • Français 1 ^{res} L/ES/S |
| • Maths T ^{erm} S | • Anglais T ^{erm} Toutes séries | • Tout-en-un Bac S |
| • Maths T ^{erm} ES/L | • Histoire-Géo T ^{erm} L/ES/S | • Tout-en-un Bac L |
| • SVT T ^{erm} S | • SES T ^{erm} ES | |

50/9016/8
ISBN : 978-2-01-708262-0



9 782017 082620

hachette
ÉDUCATION

hachette-education.com

 **GRATUIT!** hachette-education.com
→ 10 Tutos Vidéo
→ Des Annales Corrigées

 **KR-062-322**

