

exercices corrigés de  
mathématiques spéciales

# suites et séries de fonctions

Jacques MOISAN  
André VERNOTTE  
Nicolas TOSEL





ANALYSE

*SUITES ET SÉRIES*

DE

*FONCTIONS*

Exercices corrigés de mathématiques spéciales





ACQUISITION

**Jacques MOISAN**

Professeur en classe de Mathématiques Spéciales M'  
au Lycée Descartes de Tours

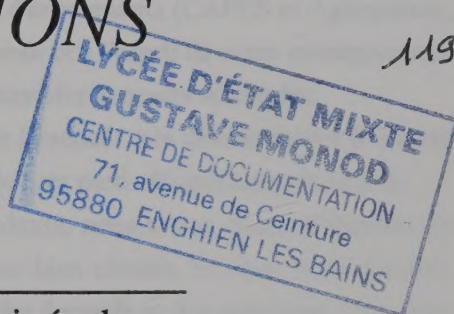
**André VERNOTTE**

Professeur en classe de Mathématiques Spéciales M  
au Lycée Victor Hugo de Besançon

**Nicolas TOSEL**

Professeur en classe de Mathématiques Supérieures  
au Lycée Descartes de Tours

ANALYSE  
*SUITES ET SÉRIES*  
DE  
*FONCTIONS*



---

Exercices corrigés de  
mathématiques spéciales

---



Déjà parus :

■ aux éditions ELLIPSES :

- ❑ *MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE aux concours scientifiques*  
Jacques MOISAN et Gérard DEBEAUMARCHÉ (1989)
- ❑ *INFORMATIQUE pour les classes préparatoires H.E.C.*  
Jacques MOISAN (1990)
- ❑ Exercices corrigés de Mathématiques Spéciales  
*Analyse : TOPOLOGIE et SÉRIES*  
Jacques MOISAN et André Vernotte (1991)

■ aux éditions EYROLLES :

- ❑ Exercices corrigés de Mathématiques pour les classes de Math Sup  
*Analyse* Jacques MOISAN et Martine PAGÈS (1990)  
*Algèbre* Jacques MOISAN, Martine PAGÈS et Nicolas TOSEL (1991)

La loi du 11 mars 1957 n'autorise que les "copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective". Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'éditeur, est illicite.

© COPYRIGHT 1992

EDITION MARKETING  
EDITEUR DES PREPARATIONS  
GRANDES ECOLES MEDECINE  
32, rue Bague 75015 PARIS

ISBN 2-7298-9293-1

# Avant-propos

Cet ouvrage fait partie d'une collection d'exercices corrigés de mathématiques, qui a pour but principal d'aider les étudiants des classes de *Mathématiques Spéciales* dans la préparation des épreuves écrites et orales des concours.

Les exercices proposés, qui sont de niveau et de difficulté variés, ont été rédigés dans ce souci de liaison entre le cours et les concours. Si certains ne sont que des applications directes du cours, les plus délicats demandent au lecteur un effort de recherche personnelle important.

La plupart d'entre eux s'inspirent d'exercices posés aux oraux des concours des grandes écoles, ou des concours de recrutement d'enseignants (CAPES et Agrégation). Quelques-uns sont des *classiques* adaptés au niveau et à l'esprit de notre enseignement. Nous les avons très souvent complétés par des *exemples* et *contre-exemples*.

C'est à dessein que la solution a été séparée de l'énoncé: cela devrait inciter le lecteur à un effort personnel de recherche, seul moyen de tirer parti efficacement de ce livre.

Plutôt que de multiplier les exercices redondants, nous avons choisi d'illustrer les principales techniques par un ou deux exercices bien choisis, et nous nous sommes attachés à la *rédaction détaillée et progressive* des énoncés et des solutions. L'étudiant trouvera sur le sujet traité une illustration complète et des approfondissements variés des grands résultats du cours. Les techniques essentielles utilisées sont d'ailleurs rappelées en début de paragraphe.

Le présent volume est consacré à l'étude des suites et des séries de fonctions, et comprend notamment l'étude des séries entières et des séries de Fourier. Fidèles à l'esprit des classes de *Taupe*, nous avons cherché à maintenir un certain équilibre entre les approches abstraites et pratiques, voire numériques, nous refusant à privilégier un point de vue au détriment de l'autre.

Les auteurs.



# Table des matières

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| <b>Avant-propos</b> .....                        | 3   |
| <b>I. SUITES DE FONCTIONS</b> .....              | 9   |
| A - Convergence simple et uniforme .....         | 9   |
| B - Séries de fonctions .....                    | 14  |
| C - Contexte topologique .....                   | 18  |
| D - Approximation des fonctions continues .....  | 22  |
| <b>Solutions</b> .....                           | 28  |
| A - Convergence simple et uniforme .....         | 28  |
| B - Séries de fonctions .....                    | 41  |
| C - Contexte topologique .....                   | 55  |
| D - Approximation des fonctions continues .....  | 64  |
| <b>II. SÉRIES ENTIÈRES</b> .....                 | 77  |
| A - Domaine de convergence .....                 | 77  |
| B - Étude au bord du disque de convergence ..... | 80  |
| C - Développement en série entière .....         | 83  |
| D - Fonctions analytiques .....                  | 87  |
| E - Applications des séries entières .....       | 91  |
| <b>Solutions</b> .....                           | 96  |
| A - Domaine de convergence .....                 | 96  |
| B - Étude au bord du disque de convergence ..... | 107 |
| C - Développement en série entière .....         | 114 |

|                                              |            |
|----------------------------------------------|------------|
| D - Fonctions analytiques .....              | 131        |
| E - Applications des séries entières .....   | 140        |
| <b>III. SÉRIES DE FOURIER .....</b>          | <b>155</b> |
| A - Exemples de développement .....          | 155        |
| B - Séries trigonométriques .....            | 158        |
| C - Problème de convergence .....            | 162        |
| D - Applications des séries de Fourier ..... | 167        |
| <i><b>Solutions</b></i> .....                | 173        |
| A - Exemples de développement .....          | 173        |
| B - Séries trigonométriques .....            | 186        |
| C - Problème de convergence .....            | 198        |
| D - Applications des séries de Fourier ..... | 209        |

# I

## SUITES DE FONCTIONS

### A - Convergence simple et uniforme

Une série d'applications  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'un ensemble  $X$  dans un espace métrique  $F$  est **simplement convergente** si pour tout  $x$  de  $X$ , la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente dans l'espace  $F$ .

La suite  $(f_n)$  converge **uniformément** vers  $f$  si la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\alpha_n = \sup_{x \in X} d(f_n(x), f(x))$  converge vers 0. Si l'espace métrique  $E$  est complet, on dispose du **critère de Cauchy uniforme**:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \forall x \in X, (n \geq N \Rightarrow d(f_{n+p}(x), f_n(x)) \leq \varepsilon).$$

Rappelons les théorèmes essentiels relatifs à la convergence uniforme que nous aurons à utiliser dans toutes les parties de ce chapitre.

**Théorème de continuité:**

Si  $E$  et  $F$  sont deux espaces métriques et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications continues de  $E$  dans  $F$  convergeant uniformément vers une application  $f : E \rightarrow F$ , alors  $f$  est continue.

**Théorème de la double limite:**

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces métriques,  $A$  une partie de  $E$  et  $(f_n)$  une suite d'application de  $A$  dans  $F$ .

On suppose que  $F$  est complet et que  $a$  est un point de  $E$  adhérent à  $A$  ( $a \in \bar{A}$ ).

Si la suite  $f_n$  converge uniformément vers  $f : A \rightarrow F$  et si pour tout  $n$ ,  $f_n(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l_n$ ,

alors la suite  $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a une limite  $l$  dans  $F$  et  $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l$ .

Ainsi on peut écrire:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f_n(x) \right)$$

**Théorème de dérivation:**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $F$  un espace de Banach et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications de classe  $C^1$  de  $I$  dans  $F$ . On suppose que:

i) il existe  $a_0 \in I$  tel que  $(f_n(a_0))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  dans  $F$ .

ii) la suite des dérivées  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **uniformément convergente** vers  $g : I \rightarrow F$ .

Alors la suite  $(f_n)$  converge simplement vers une application  $f$  de classe  $C^1$  et  $f' = g$ . De plus, la convergence de  $(f_n)$  vers  $f$  est **uniforme sur toute partie bornée** de  $I$ .

**Théorème d'intégration:**

Soit  $a < b$  deux réels et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications continues par morceaux de  $[a, b]$  dans un Banach  $F$ , convergeant uniformément vers  $f : [a, b] \rightarrow F$ . Alors  $f$  est continue par morceaux et

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$
**A-1 Études de convergence.**

Etudier la convergence simple et uniforme pour les suites de fonctions  $(f_n)$  suivantes:

a)  $f_n(x) = \left( \frac{\cos(x)}{\sqrt{n}} \right)^n, x \in \mathbb{R}.$

b)  $f_n(x) = \frac{2nx}{n^2 x^4 + 1}, x \in \mathbb{R}.$

c)  $f_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{1+nx}, x \in \mathbb{R}^+.$

d) 
$$\begin{cases} f_n(x) = 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ f_n(x) = \frac{1}{n \ln\left(1 - \frac{1}{nx}\right)} & \text{pour } x < 0 \text{ ou } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

**A-2 Irrationalité de  $\pi^2$ .**

Soit la suite de fonctions  $(u_n)$  définies sur  $\mathbb{R}$ , par:

$$\forall x, u_0(x) = \sin x \text{ et } \forall n \geq 0, \forall x, u_{n+1}(x) = \int_0^x t u_n(t) dt.$$

a) Déterminer les fonctions  $u_1, u_2, \dots$  et montrer qu'il existe des polynômes  $P_n$  et  $Q_n$  tels que, pour tout  $x$ ,  $u_n(x) = P_n(x^2) \sin x + x Q_n(x^2) \cos x$ .

Déterminer les degrés de  $P_n$  et  $Q_n$  et montrer que ces polynômes sont à coefficients entiers.

b) Montrer que pour tout  $x$ ,  $|u_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{2 \cdot 4 \dots (2n)}.$

- c) Donner une relation liant  $u_{n+1}$ ,  $u_n$  et  $u_{n-1}$ .  
 d) Déterminer une équation différentielle vérifiée par  $u_n$ .  
 e) Montrer que  $\pi^2$  est irrationnel. (On pourra étudier  $P_n(\pi^2/4)$ ).

### A-3 Étude de l'exponentielle comme limite.

- a) On considère la suite  $f_n$  de fonctions de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par:

$$f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

En développant à l'aide de la formule du binôme et en employant une interversion de limites, montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ , et que la convergence est uniforme sur tout compact.

- b) On considère la suite de fonctions  $(g_n)$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  définies par:

$$\begin{cases} g_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{pour } x \leq n \\ g_n(x) = 0 & \text{pour } x \geq n. \end{cases}$$

Montrer que cette suite tend, en croissant, uniformément vers  $g$  définie par  $g(x) = e^{-x}$  pour  $x \geq 0$ .

On se propose dans la suite de trouver un équivalent de  $\|g - g_n\|_{\infty}$ .

- c) On pose  $\varphi_n(x) = g(x) - g_n(x)$ . Montrer qu'il existe un unique  $x_n$  de  $\mathbb{R}^+$  où  $\varphi_n$  est maximum.

En étudiant la fonction  $\psi_n$  définie par  $\psi_n(x) = (n-1) \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) + x$ , pour tout  $x \leq n$ , montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = 2$ .

Trouver un développement de  $x_n$  et en déduire un équivalent de  $\varphi_n(x_n)$ .

### A-4 Développements Eulériens.

- a) En partant de l'égalité vue à l'exercice A-3, on peut écrire:

$$\sin z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1}}{2i}.$$

En factorisant, montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\sin z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( z \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right) \right).$$

b) En utilisant le *théorème de la double limite*, montrer que pour tout  $z$  complexe,  $\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)$ .

*Indication:* on aura intérêt à écrire, à partir de l'expression trouvée à la question

a),  $\sin z = \lim_{n \rightarrow \infty} z \prod_{k=1}^n (1 - u_k(n))$ .

c) En décomposant en éléments simples la fraction rationnelle:

$$\frac{1}{z \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right)}$$

montrer la formule d'Euler valable pour  $z$  dans  $\mathbb{C} \setminus \pi \mathbb{Z}$ :

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right).$$

## A-5 La fonction $\Gamma$ comme limite.

On définit pour  $x$  réel strictement positif la fonction  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ .

a) En utilisant l'exercice A-3. b, montrer que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Calculer l'intégrale trouvée en utilisant l'équivalent des intégrales de Wallis:

$$\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

b) Montrer que pour  $x > 0$ ,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

c) En déduire l'expression:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k},$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler,  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$ .

d) En utilisant la factorisation d'Euler de  $\sin x$  (voir exercice A-4.b), montrer que pour  $x$  dans  $]0, 1[$ ,

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

## A-6 Séries doubles.

On considère une série  $\sum u_{p,q}$  indexée par  $(p, q)$  dans  $\mathbb{N}^2$ . On suppose que pour tout  $q$  la série  $\sum_{p=0}^{\infty} |u_{p,q}|$  est convergente de somme  $S_q$ , et que la série  $\sum S_q$  est convergente.

Montrer que pour tout  $p$ , la série  $\sum_{q=0}^{\infty} |u_{p,q}|$  est convergente de somme  $S_p'$  et que la série  $\sum S_p'$  est convergente.

Montrer que dans l'hypothèse formulée qui peut s'écrire  $\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} |u_{p,q}| < \infty$ , et s'appelle **convergence absolue de la série double**, on a existence et égalité de deux sommes:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q}.$$

**Indication:** on pourra poser  $f_q(p) = \sum_{k=0}^p u_{k,q}$  et étudier la convergence uniforme par rapport à  $p$  de la série de fonctions  $\sum f_q$ .

**Application:** calculer  $\sum_{p=2}^{\infty} \sum_{q=2}^{\infty} \frac{(-1)^p}{q^p}$ .

## A-7 Fonctions réglées.

Dans cet exercice  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $F$  un espace de *Banach*.

Une application  $f$  de  $I$  dans  $F$  est dite *régulée* si elle admet en tout point  $x$  de  $I$  où cela a un sens, une *limite à gauche* notée  $f(x-0)$  et une *limite à droite* notée  $f(x+0)$ .

Comme exemple d'applications réglées on connaît les applications continues par morceaux, les applications du type  $f: x \mapsto \varphi(x)A$  où  $A$  est un vecteur fixe de  $F$  et  $\varphi$  une application monotone de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , ainsi que leurs combinaisons linéaires.

On désigne par  $\mathcal{R}(I, F)$  l'espace vectoriel des applications réglées de  $I$  dans  $F$ .

a) Montrer que si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'applications réglées de  $I$  dans  $F$  convergeant uniformément vers  $f: I \rightarrow F$ , alors  $f$  est réglée.

b) Montrer que si  $I$  est compact et  $f$  réglée de  $I$  dans  $F$ , alors  $f$  est bornée. Par quelle propriété topologique se traduit le a) dans ce cas?

c) D'après le a), toute limite uniforme d'une suite d'applications en escalier de  $I$  dans  $F$  est une fonction réglée.

c-1) Réciproquement, si  $I = [a, b]$  est un segment ( $a < b$ ), montrer que toute application réglée  $f$  de  $I$  dans  $F$  est limite uniforme d'une suite d'applications en escalier.

**Indication:** soit  $\mathcal{E}$  l'espace vectoriel des applications en escalier de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

On définit pour  $x \in [a, b]$   $\varphi(x, f) = \inf_{g \in \mathcal{E}} \left( \sup_{y \in [a, x]} \|f(y) - g(y)\| \right)$ .

Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble des  $x$  de  $[a, b]$  tel que  $\varphi(x, f) < \varepsilon$  est  $[a, b]$  tout entier.

c-2) Par quelle propriété topologique se traduit le résultat du c-1)?

## B - Séries de fonctions

*Les théorèmes vus pour les suites de fonctions s'appliquent bien entendu aux séries de fonctions. C'est ainsi que par exemple sous réserve de convergence de la série et de convergence uniforme de la série des dérivées, on peut dériver une série de fonctions terme à terme.*

On dit qu'une série de fonctions  $\sum u_n$  d'un ensemble  $X$  dans un Banach  $F$  est **normalement convergente** si chaque  $u_n$  est bornée et si la série  $\sum \|u_n\|_\infty$  est convergente avec  $\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in X} \|u_n(x)\|$ . Une série normalement convergente est uniformément convergente.

Une autre technique utile pour l'étude de la convergence uniforme des séries de fonctions est la **transformation d'Abel** qui permet de majorer un paquet de Cauchy de manière uniforme si les majorations initiales le sont. Nous détaillerons les diverses transformations d'Abel dans les exercices qui les utiliseront.

### B-1 Études de convergence et d'équivalents.

Pour les fonctions ci-dessous, définies par une série, étudier l'ensemble de définition, la continuité, la dérivabilité et donner éventuellement les limites ou équivalents demandés.

a)  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ . Equivalent quand  $x \rightarrow +\infty$ .

b)  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + (n(x-n))^2}$ . Etudier la convergence normale et la convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$  entier. Trouver la limite quand  $x \rightarrow +\infty$ .

c)  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n^{3/2}}$ . Etudier la dérivabilité au point 0 et déterminer un équivalent simple au voisinage de  $+\infty$ .

d)  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(E(nx))^2 - 2(nx - E(nx))^2}{n^2(n+1)^2}$ . Déterminer les points de continuité de l'application  $f$ .

e)  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n + e^{inx}}$ . Trouver la limite et un équivalent lorsque  $x \rightarrow 0$  (on pourra introduire la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$ , et utiliser son calcul proposé au B-2a)).

## B-2 Calcul de la somme d'une série de fonctions.

Calculer la somme des séries définies ci-dessous:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$ , en utilisant  $\frac{1}{n} = \int_0^1 t^{n-1} dt$ .

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{th}\left(\frac{\lambda}{2^n}\right)$ , en introduisant une primitive de la fonction de  $\lambda$ .

## B-3 Étude des fonctions de *Riemann*.

On considère les deux fonctions  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$  et  $\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ , de la variable réelle  $x$ .

a) Déterminer l'ensemble de définition de  $\zeta$  et  $\alpha$  et étudier la continuité et la dérivabilité.

b) Etablir pour  $x > 1$  une relation entre  $\zeta(x)$  et  $\alpha(x)$ . En déduire un équivalent de  $\zeta(x)$  lorsque  $x \rightarrow 1$ .

c) Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \alpha(x)$ .

**Indication:** en groupant par 2 les termes de  $\alpha(x)$ , on déterminera un encadrement de  $\frac{\alpha(x)}{\zeta(x+1)}$ .

d) Par un autre groupement de termes, montrer qu'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}: \frac{1}{2} < \alpha(x) < 1.$$

### B-4 Séries de Dirichlet.

Etant donnée une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de nombres complexes, on lui associe la série de fonctions  $\sum u_n(z)$ , avec  $u_n(z) = \frac{a_n}{n^z}$ , appelée *série de Dirichlet* de la variable complexe  $z$ .

a) On suppose donné un nombre complexe  $b$  tel que  $\sum u_n(b)$  est convergente. En employant la transformation d'Abel sur les restes (voir notre livre *Analyse topologie et séries* § III-A), montrer que pour tout  $\theta$  dans l'intervalle  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , la série  $\sum u_n(z)$  est uniformément convergente dans l'ensemble  $D_\theta(b)$  des  $z$  vérifiant les conditions:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) \geq b \\ -\theta \leq \operatorname{Arg}(z-b) \leq \theta \end{cases}$$

b) Montrer qu'il existe  $\sigma \in \overline{\mathbb{R}}$  tel que:

i) pour  $\operatorname{Re}(z) > \sigma$ ,  $\sum u_n(z)$  converge,

ii) pour  $\operatorname{Re}(z) < \sigma$ ,  $\sum u_n(z)$  diverge.

$\sigma$  s'appelle l'abscisse de convergence de  $\sum u_n$ , et sera noté  $\sigma_c(a)$ . On définira de même l'abscisse de convergence absolue,  $\sigma_c(|a|)$ .

On suppose dans toute la suite que  $\sigma_c(a) < +\infty$ , donc qu'il existe un  $b$  réel tel que  $\sum u_n(b)$  converge.

c) Montrer que l'application  $f: z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$  est continue dans le demi-plan ouvert  $D(\sigma_c(a))$ , ensemble des  $z$  tels que  $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c(a)$ .

d) Démontrer la double inégalité  $\sigma_c(a) \leq \sigma_c(|a|) \leq \sigma_c(a) + 1$ , et prouver par un exemple que chacune des deux inégalités peut être une égalité.

### B-5 La fonction de Weierstrass.

On considère  $b$  un entier multiple de 4 et au moins égal à 12.

On pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \cos(\pi b^n x)$ .

a) Montrer que  $f$  est une application continue sur  $\mathbb{R}$ .

b) On pose  $g(y) = \max(|\cos(-y + \pi) - \cos y|, |\cos(-y + \pi/2) - \cos y|)$ .

Calculer le minimum  $c$  de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ , et vérifier que  $2\left(\frac{\pi}{c} + 1\right) < 12$ .

c) Pour  $p \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on note:

$$\alpha_p(x) = b^p (f(x + b^{-p}) - f(x))$$

$$\beta_p(x) = 2b^p \left( f\left(x + \frac{b^{-p}}{2}\right) - f(x) \right).$$

Montrer que  $\lim_{p \rightarrow \infty} (\max (a_p(x), b_p(x))) = +\infty$ .

En déduire que  $f$  n'est dérivable en aucun point de  $\mathbb{R}$ .

## B-6 Procédé de sommation de Riemann.

Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, définie pour  $x \neq 0$  par  $\varphi(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$ .

Soit par ailleurs, une suite complexe  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\sum \alpha_n$  converge.

On pose  $u_n(t) = \alpha_n \varphi(nt)$  pour tout  $t$  réel.

a) Montrer que  $\varphi$  est de classe  $C^1$  et que  $\int_0^{+\infty} |\varphi'(t)| dt$  est convergente.

b) Montrer que pour tout  $t$  réel,  $\sum u_n(t)$  est convergente.

On pose alors  $U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ .

c) On définit  $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k$  puis  $\varepsilon_n = \sup_{k \geq n} (|r_k|)$ .

Montrer, en utilisant une transformation d'Abel que:

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} u_k(t) \right| \leq \left( 1 + \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)| dt \right) \varepsilon_n.$$

En déduire que l'application  $U$  est continue.

## B-7 Zéros des fonctions $C^\infty$ .

Pour une application bornée de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ .

a) On considère deux points  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$ , avec  $a < b$ , et on définit la fonction  $f_{a,b}$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par:

$$\begin{cases} \text{pour } x \in ]a, b[, f_{a,b}(x) = \exp\left(\frac{1}{(x-a)(x-b)}\right) \\ \text{pour } x \notin ]a, b[, f_{a,b}(x) = 0 \end{cases}$$

Montrer que  $f_{a,b}$  est de classe  $C^\infty$ .

b) Montrer que si  $\Omega$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ , il existe deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  de réels vérifiant  $a_n < b_n$  pour tout  $n$  et telles que  $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ]a_n, b_n[$ .

c) Avec les notations des parties a) et b), on pose maintenant  $f_n = f_{a_n, b_n}$ .

La fonction  $f_n$  étant à support compact et  $C^\infty$ , a toutes ses dérivées bornées.

On pose alors  $\alpha_n = 2^n \sup_{0 \leq k \leq n} \|f_n^{(k)}\|_\infty$ , puis  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} f_n(x)$ .

Montrer que  $f$  est une application de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et que  $F$  est l'ensemble des zéros de  $f$ .

Ainsi, tout fermé de  $\mathbb{R}$  est l'ensemble des zéros d'une fonction de classe  $C^\infty$ . (Théorème de Whitney en dimension 1).

## C - Contexte topologique

On peut munir divers espaces vectoriels de fonctions d'une structure d'espace normé grâce à la norme de la convergence uniforme  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ . C'est le cas de  $\mathcal{B}(X, F)$  espace vectoriel des fonctions bornées de  $X$  dans l'espace de Banach  $F$ , ou de  $C(X, F)$  espace des applications continues de  $X$  dans  $F$  si  $X$  est compact.

L'utilisation de la compacité est d'ailleurs un des ressorts principaux des exercices suivants qui tournent tous autour de la notion de convergence uniforme.

### C-1 Suite de rang fini dans $C(K, \mathbb{R})$ .

Soit  $K$  un espace métrique compact, et  $E = C(K, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des applications continues de  $K$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme de la convergence uniforme:  $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$ .

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie  $p$  et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $F$  convergeant simplement vers un élément  $f$  de  $E$ .

Montrer que  $f$  est dans  $F$  et que la convergence est uniforme.

**Indication:** on montrera d'abord l'existence de deux  $p$ -uplets  $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in K^p$  et  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p) \in F^p$  tels que pour tous  $i$  et  $j$  dans  $[1, p]$ ,  $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ .

### C-2 Propriété de Dini généralisée.

On considère un espace métrique compact  $X$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications continues de  $X$  dans  $\mathbb{C}$ , et  $f$  une application continue de  $X$  dans  $\mathbb{C}$  telles que:

- i) la suite  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$ ,
- ii)  $\exists K > 0; \forall i, j \in \mathbb{N}, \forall x \in X, |f_{i+j}(x) - f(x)| \leq K |f_i(x) - f(x)|$

Montrer que la convergence est uniforme.

**Application:** (premier *théorème de Dini*) si  $(f_n)$  est une suite croissante d'applications continues de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  convergeant simplement vers  $f$  continue, alors la convergence est uniforme.

### C-3 Suites équicontinues.

Soit  $K$  un espace métrique compact et  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $K$  dans  $\mathbb{C}$ , normé par la norme uniforme:  $\|f\| = \sup_{x \in K} \|f(x)\|$ .

On dit qu'une partie  $F$  de  $E$  est **équicontinue** si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0; \forall (x, y) \in K^2, \forall f \in F, (d(x, y) \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon).$$

a) On considère une suite d'application  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  éléments de  $E$ , telle que  $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$  est équicontinu et convergeant simplement vers  $f$ . Montrer que la convergence est uniforme (*Arzela*).

b) Soit  $A$  une partie de  $K$ , dense dans  $K$ . On suppose que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  est équicontinue et converge simplement sur  $A$  vers une application  $f$  de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ .

Montrer que  $f$  peut se prolonger par continuité en une application de  $K$  dans  $\mathbb{C}$  et que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ .

c) Dans cette question, on prend pour  $K$  un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  ( $a < b$ ), et on considère une partie  $F$  de  $E$  fermée et bornée.

Montrer que pour que  $F$  soit une partie compacte, il faut et il suffit qu'elle soit équicontinue.

**Indication pour la condition suffisante:** on pourra montrer que de toute suite d'éléments de  $F$  on peut extraire une suite convergeant simplement dans  $[a, b] \cap \mathbb{Q}$  par le biais d'un procédé diagonal (voir l'exercice I.B.4 de notre livre "Analyse topologie et séries")

d) Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés, tels que  $E$  est de dimension finie. La norme naturelle dans  $\mathcal{L}(E, F)$  sera notée  $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$ .

Soit par ailleurs,  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , et  $A$  une partie de  $E$  dense dans  $E$ .

On considère une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'applications linéaires de  $E$  dans  $F$  vérifiant:

$$\text{i) } \forall x \in A, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x),$$

$$\text{ii) } \exists M \in \mathbb{R}^+; \forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\| \leq M.$$

Montrer que  $(f_n)$  converge vers  $f$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$  (i.e.  $\|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ).

## C-4 Suites de fonctions convexes.

On considère une suite  $(f_n)$  de fonctions *convexes continues* définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et convergeant simplement vers une application  $f$  continue.

a) Montrer que  $f$  est convexe.

b) *On suppose  $I$  ouvert*, et on considère un segment  $[a, b]$  inclus dans  $I$ .

Montrer qu'il existe  $K > 0$  tel que, pour tout  $n$  entier, la restriction de  $f_n$  à  $[a, b]$  est  $K$ -Lipschitzienne. En utilisant l'exercice C-3, montrer que la suite  $(f_n)$  converge vers  $f$  uniformément sur tout compact.

c) *On suppose maintenant  $I = [a, b]$  compact.*

c-1) Soit  $\varphi$  une application convexe continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\varepsilon$  un réel  $> 0$ .

Montrer qu'il existe une application convexe  $\psi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\sup_{x \in I} |\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon.$$

Dans quel cas peut-on prolonger  $\varphi$  en une application convexe sur  $\mathbb{R}$  ?

c-2) Montrer que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ .

d) *Si  $I$  est un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$* , montrer que  $(f_n)$  converge vers  $f$  uniformément sur tout compact.

## C-5 Convergence diagonale.

Soit  $X$  un espace métrique compact et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications continues de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ .

a) Montrer que si  $(f_n)$  converge uniformément vers une application  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , alors pour tout  $x$  de  $X$  et toute suite  $(x_n)$  convergeant vers  $x$ , la suite  $f_n(x_n)$  converge vers  $f(x)$ .

Montrer que si l'on suppose seulement la convergence simple de  $(f_n)$  vers  $f$ , ce résultat peut tomber en défaut.

b) Réciproquement, on suppose que pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente de  $X$  la suite  $(f_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

Montrer que la suite  $(f_n)$  est uniformément convergente.

**Indication:** si  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  on posera  $f(x) = \lim f_n(x_n)$  et on montrera d'abord que  $f$  est continue.

## C-6 Extension d'une fonction continue sur un fermé.

On considère un espace métrique  $(E, d)$ .

a) Soit  $A$  et  $B$  deux fermés de  $E$  disjoints. On définit  $f_{A,B} : E \rightarrow \mathbb{R}$  par:

$$\forall x \in E, f_{A,B}(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Montrer que l'on définit ainsi une application continue de  $E$  dans  $[0, 1]$  vérifiant:

$$\begin{cases} f_{A,B}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A \\ f_{A,B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in B. \end{cases}$$

b) Soit  $F$  un fermé de  $E$  et  $f$  une application continue de  $F$  dans  $[0, 1]$ . On se propose de démontrer qu'il existe une application  $f$  de  $E$  dans  $[0, 1]$  continue prolongeant  $f$  (*lemme d'extension de Tietze*).

b-1) Montrer qu'il existe  $f_1 : E \rightarrow [0, 1/3]$  continue telle que:

$$\begin{cases} f_1(x) = 1/3 & \text{si } x \in F \text{ et } f(x) \geq 2/3 \\ f_1(x) = 0 & \text{si } x \in F \text{ et } f(x) \leq 1/3. \end{cases}$$

Pour  $x \in F$ , on pose  $g_1(x) = f(x) - f_1(x)$ .

Montrer que pour tout  $x$  de  $F$ ,  $0 \leq g_1(x) \leq 2/3$ .

b-2) Montrer que l'on peut définir deux suites  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions continues définies respectivement sur  $E$  et sur  $F$  et vérifiant:

$$\text{i) } \forall x \in E, f_n(x) \in \left[0, \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right],$$

$$\text{ii) } f_n(x) = 0 \text{ si } x \in F \text{ et } g_{n-1}(x) \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

$$\text{iii) } f_n(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \text{ si } x \in F \text{ et } g_{n-1}(x) \geq \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

$$\text{iv) } \forall x \in F, g_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x),$$

$$\text{v) } \forall x \in F, 0 \leq g_n(x) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

b-3) On pose  $\hat{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ . Montrer qu'on définit bien ainsi une application

continue de  $E$  dans  $[0, 1]$ , prolongeant  $f$ .

c) Montrer que le résultat du b) est encore vrai pour une application continue  $g$  de  $F$  dans  $\mathbb{R}$  non nécessairement bornée.

**Indication:** composer  $g$  avec une application convenable et remarquer dans b-3)

que  $\hat{f} \in \{0, 1\} \Rightarrow x \in F$ .

## C-7 Une caractérisation des espaces compacts.

Soit  $(E, d)$  un espace métrique. On se propose de démontrer le critère de compacité suivant (Hewitt):

$E$  est compact ssi toute application continue de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  est bornée.

Pour montrer la condition suffisante (la condition nécessaire étant un théorème du cours), on suppose  $E$  non compact.

a) Montrer qu'il existe dans  $E^{\mathbb{N}}$  une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , telle que  $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$  est fermé, et une application  $f$  de  $A$  dans  $\mathbb{R}$  non bornée et continue.

b) En utilisant le *lemme d'extension de Tietze* (exercice C-6) montrer qu'on peut prolonger continûment  $f$  à  $E$  et conclure.

## D - Approximation des fonctions continues

*Les exercices présentés ici ont pour but de familiariser le lecteur à diverses approximations d'applications continues par des applications plus régulières et à diverses techniques pour obtenir ces approximations. On ne s'étonnera donc pas que le théorème d'approximation de Weierstrass puisse être obtenu par différents détours, puisque c'est la propriété essentielle.*

La "version trigonométrique" sera développée dans le chapitre consacré aux séries de Fourier (exercice III C-3)

### D-1 Approximations de $|x|$ .

Il s'agit d'exhiber, par différentes méthodes, une suite de polynômes convergeant sur l'intervalle  $[-1, 1]$  uniformément vers  $f: x \mapsto |x|$ .

a) Etudier la suite de polynômes  $(P_n)$  définie par:

$$P_0 = 0 \text{ et pour } n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}:$$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2} (x - P_n^2(x)).$$

Donner la limite simple sur  $[0, 1]$  et montrer que la convergence est uniforme.  
Conclure.

b) A partir du développement en série de Fourier de la fonction  $g$   $2\pi$ -périodique qui vaut  $|x|$  sur  $[-\pi, \pi]$  (voir l'exercice III A-2), définir une suite de polynômes convergeant uniformément vers  $f$  sur  $[-1, 1]$ .

c) On écrit le développement en série entière de la fonction  $g: x \mapsto \sqrt{1+x}$ .

Montrer qu'il y a convergence normale de la série de *Taylor* de  $g$  sur tout le segment  $[-1, 1]$ .

Définir alors, à partir de ce développement en série entière, une suite de polynômes convergeant uniformément vers  $f$  sur  $[-1, 1]$ .

## D-2 Approximation par des fonctions polynômes.

Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{C}$  muni de la norme uniforme, et  $f$  un élément de  $E$ .

a) Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une application continue affine par morceaux  $g$  telle que:

$$\|g - f\| = \sup_{x \in [0,1]} |g(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

b) Pour  $a \in \mathbb{R}$  on désigne par  $\varphi_a$  l'application  $x \mapsto |x - a|$ .

Montrer que  $(\varphi_a)_{a \in [0,1]}$  est une famille génératrice de l'ensemble des applications continues affines par morceaux de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{C}$ .

c) En utilisant le résultat démontré dans l'exercice D-1, montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction polynôme  $P$  telle que  $\|f - P\| \leq \varepsilon$ .

d) En déduire le théorème d'approximation de *Weierstrass*:

"Toute application continue définie sur un compact de  $\mathbb{R}$  est limite uniforme d'une suite de polynômes".

(On pourra utiliser l'exercice C-6).

## D-3 Approximation par convolution.

Soit une suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'applications continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^+$ , telles que:

i) chaque  $\varphi_n$  est nulle hors de l'intervalle  $[-1, 1]$ ,

ii)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t) dt = 1$  pour tout  $n$ ,

iii) pour tout  $\delta > 0$ ,  $\sup_{|x| > \delta} \varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Soit  $f$  une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ . On définit la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  par:

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi_n(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \varphi_n(t) dt.$$

a) Montrer que la suite  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$ , uniformément sur tout compact.

b) Montrer que si les  $\varphi_n$  sont de classe  $C^\infty$ , il en est de même des  $f_n$ .

c) On considère l'application  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par:

$$g(x) = e^{1/(x^2-1)} \text{ pour } x \in [-1, 1]$$

$$g(x) = 0 \text{ pour } |x| > 1.$$

Montrer que  $g$  est de classe  $C^\infty$ . On pose  $a = \int_{-1}^1 g(t) dt$ , puis pour tout  $x$  réel

$$\varphi_n(x) = \frac{n}{a} g(nx).$$

Montrer que la suite  $\varphi_n$  vérifie les conditions posées au début de l'énoncé.

En déduire que toute application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  est limite d'une suite de fonctions de classe  $C^\infty$ , la convergence étant uniforme sur tout compact.

#### D-4 Le théorème de Weierstrass par la méthode de Landau.

On considère une application  $f$  continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  et nulle hors de l'intervalle  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

On pose  $a_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$ , puis on définit la suite  $\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par:

$$\varphi_n(x) = \frac{(1-x^2)^n}{a_n} \text{ pour } -1 \leq x \leq 1$$

$$\varphi_n(x) = 0 \text{ pour } |x| > 1.$$

On pose ensuite  $f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \varphi_n(t) dt$ , pour tout  $x$  réel.

a) En utilisant D-3, montrer que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ .

b) En déduire une nouvelle démonstration du *théorème d'approximation de Weierstrass* (exercice D-2).

c) Montrer que si  $f$  est une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  il existe une suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes convergeant vers  $f$ , uniformément sur tout compact.

Que peut-on dire de  $f$  si la convergence est uniforme sur  $\mathbb{R}$  tout entier?

#### D-5 Approximation de Laguerre.

a) On pose  $f_N(x) = e^{-2x} - e^{-x} \sum_{k=0}^N \frac{(-x)^k}{k!}$ , pour  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

Montrer que  $|f_N|$  a un maximum sur  $]0, +\infty[$  obtenu pour  $x = x_N$ , et calculer en fonction de  $N$  et  $x_N$  ce maximum.

En utilisant la *formule de Stirling*  $\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \right) = \sqrt{2\pi} \right)$ , montrer qu'il existe un réel  $K > 0$  tel que pour tout  $x \geq 0$ , on a  $|f_N(x)| \leq \frac{K}{\sqrt{N}}$ , pour tout  $N$  de  $\mathbb{N}^*$ .

b) On se propose de démontrer par récurrence la propriété  $(\mathcal{P}_n)$

$$" \forall \alpha > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{R}[X]; \sup_{x \in [0, +\infty[} |e^{-n\alpha x} - e^{-\alpha x} P(x)| \leq \varepsilon "$$

b-1) Vérifier  $(\mathcal{P}_1)$  et  $(\mathcal{P}_2)$ .

b-2) On suppose  $(\mathcal{P}_n)$  vraie, et on fixe un réel  $\varepsilon > 0$ .

Montrer qu'il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$ , tel que:

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} |e^{-(n+1)x} - e^{-nx/2} e^{-x/2} Q(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et qu'il existe  $R \in \mathbb{R}[X]$  tel que:

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} |e^{-(n+1)x} - e^{-x} Q(x) R(x)| \leq \varepsilon.$$

b-3) Conclure que  $(\mathcal{P}_n)$  est vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

c) Soit  $f$  une application continue de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  et un réel  $\alpha > 0$ .

Montrer qu'il existe une suite de polynômes  $(P_n)$  telle que la suite de fonctions  $x \mapsto e^{-\alpha x} P_n(x)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Indication:** on pourra poser  $\phi(t) = f\left(-\frac{1}{\alpha} \ln t\right)$  pour  $t \in ]0, 1]$ , et montrer qu'il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $\sup_{t \in ]0, 1]} |\phi(t) - t Q(t)| \leq \varepsilon$ .

## D-6 Approximation par une série entière universelle.

**Note:** cet exercice utilise le *théorème d'approximation de Weierstrass* (voir D-4).

a) On considère une application  $f$  continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f(0) = 0$ .

Soit  $m$  un entier et  $\varepsilon$  un réel  $> 0$ . Montrer qu'il existe un polynôme non nul  $P$  de  $\mathbb{Q}[X]$  tel que:

$$\forall x \in [0, 1], |f(x) - x^m P(x)| \leq \varepsilon.$$

b) L'ensemble  $\mathcal{P}_0$  des polynômes de  $\mathbb{Q}[X]$  s'annulant en 0 étant dénombrable, on définit une bijection  $n \mapsto P_n$  de  $\mathbb{N}^*$  sur  $\mathcal{P}_0$  telle que  $P_1 \neq 0$ .

b-1) Montrer qu'il existe une suite  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes dans  $\mathcal{P}_0$  de degrés respectifs strictement croissants, tels que:

$$\text{i) } Q_1 = P_1,$$

$$\text{ii) } \forall n \geq 2, \text{ val}(Q_n) > \deg(Q_{n-1}),$$

$$\text{iii) } \forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| P_n(x) - \sum_{k=1}^n Q_k(x) \right| \leq \frac{1}{n}.$$

b-2) Montrer qu'il existe une série entière  $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$  à coefficients rationnels et une injection croissante  $\varphi$  de  $\mathbb{N}^*$  dans lui-même telles que:

$$\forall x \in [0, 1], \left| P_n(x) - \sum_{k=1}^{\varphi(n)} a_k x^k \right| \leq \frac{1}{n}.$$

c) Montrer que pour toute  $f$  continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  et s'annulant en 0, il existe une injection croissante  $\psi$  de  $\mathbb{N}^*$  dans lui-même telle qu'en posant:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\psi(1)} a_k x^k \quad \text{et pour } n \geq 1,$$

$$u_n(x) = \sum_{k=\psi(n)+1}^{\psi(n+1)} a_k x^k,$$

la série de polynômes  $\sum u_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

Quel est le rayon de convergence de la série  $\sum a_n x^n$ ?

On a démontré un résultat dû à Mazurkiewicz par la méthode de Sierpinsky:

« Il existe une série entière universelle  $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$  à coefficients rationnels telle que pour toute application continue  $f$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  s'annulant en 0, il existe un groupement des termes de la série entière donnant une série de fonctions qui converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ . »

## D-7 Méthode de Korovkine et polynômes de Bernstein.

On désigne par  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , normé par la norme uniforme  $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ .

On dit qu'une application linéaire  $T$  de  $E$  dans  $E$  est *positive*, si pour toute  $f$  de  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ ,  $T(f)$  est également à valeurs positives.

On définit les applications monômes  $(e_p)_{p \in \mathbb{N}}$  par:

$$e_p(x) = x^p \quad \text{pour } x \in [0, 1].$$

a) Soit  $f$  un élément de  $E$  et  $\varepsilon > 0$ . Justifier l'existence d'un  $\delta > 0$  tel que:

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|}{\delta^2} (x - y)^2.$$

b) On considère une suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'applications linéaires positives de  $E$  dans  $E$ , vérifiant pour  $i = 0, 1$ , et  $2$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(e_i) - e_i\| = 0$ .

Déduire du a) que si  $x$  et  $y$  sont dans  $[0, 1]$  et  $f$  dans  $E$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a:

$$|T_n(f)(x) - f(y) T_n(e_0)(x)| \leq \varepsilon T_n(e_0)(x) + \frac{2\|f\|}{\delta^2} (T_n(e_2)(x) - 2y T_n(e_1)(x) + y^2 T_n(e_0)(x)).$$

Montrer alors pour tout  $y$  de  $[0, 1]$ , l'inégalité:

$$|T_n(e_2)(y) - 2y T_n(e_1)(y) + y^2 T_n(e_0)(y)| \leq \|T_n(e_2) - e_2\| + 2 \|T_n(e_1) - e_1\| + \|T_n(e_0) - e_0\|.$$

En déduire que pour toute  $f$  de  $E$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f) - f\| = 0$ .

c) On définit  $T_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ .

Montrer que les  $T_n$  vérifient les conditions du b) et en déduire que  $(T_n(f))$  suite des polynômes de *Bernstein* de  $f$  converge uniformément vers  $f$ .

## Solutions

### A - Convergence simple et uniforme

#### A-1 Etude de convergence:

a) Etudions d'abord la convergence simple.

Pour  $n$  assez grand,  $\left| \frac{x}{\sqrt{n}} \right| < \frac{\pi}{2}$  et  $\cos \left( \frac{x}{\sqrt{n}} \right)$  est strictement positif. On peut écrire alors:

$$f_n(x) = e^{n \ln(\cos x / \sqrt{n})}.$$

Or, quand  $n$  tend vers l'infini,  $n \ln \left( \cos \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \sim n \left( \cos \frac{x}{\sqrt{n}} - 1 \right) \sim -\frac{x^2}{2}$ . Ainsi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = e^{-x^2/2}$$

Il n'y a pas convergence uniforme puisque pour  $x_n = 2\pi n\sqrt{n}$ ,  $\cos \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 1$ , alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-x^2/2} = 0.$$

Il y a en revanche, **convergence uniforme sur tout compact** de  $\mathbb{R}$ .

Choisissons en effet  $A > 0$ , puis  $n_0 > \left( \frac{2A}{\pi} \right)^2$ , de telle sorte que pour  $n \geq n_0$ , et  $x \leq A$ ,

$$\text{on ait } \left| \frac{x}{\sqrt{n}} \right| < \frac{\pi}{2} \text{ donc } \cos \frac{x}{\sqrt{n}} > 0 \text{ et } f_n(x) = e^{n \ln(\cos x / \sqrt{n})}.$$

L'application  $g_n : x \mapsto \ln(f_n(x) e^{x^2/2})$  a pour dérivée

$$g'_n(x) = -\sqrt{n} \tan \frac{x}{\sqrt{n}} + x = \sqrt{n} \left( -\tan \left( \frac{x}{\sqrt{n}} \right) + \frac{x}{\sqrt{n}} \right).$$

Comme pour  $u \in [0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\tan u \geq u$ ,  $g_n$  est décroissante (et négative puisque  $g_n(0) = 0$ ) sur l'intervalle  $[0, A]$ .

$$\text{Finalement } \sup_{x \in [0, A]} |g_n(x)| = |g_n(A)|.$$

Comme  $g_n(A) \rightarrow 0$ ,  $g_n$  converge uniformément vers 0 sur l'intervalle  $[0, A]$ .

Mais alors, toujours pour  $x$  dans  $[0, A]$ ,

$$|f_n(x) - e^{-x^2/2}| = e^{-x^2/2} |e^{g_n(x)} - 1| \leq |g_n(x)| \leq |g_n(A)|$$

puisque d'après l'inégalité des accroissements finis, pour  $u < 0$ ,

$$0 \leq 1 - e^u \leq \left( \sup_{x \in [u, 0]} e^x \right) (0 - u) = |u|.$$

On en déduit (par considération de parité) que la suite  $(f_n)$  converge vers sa limite **uniformément sur**  $[-A, A]$ .

b) Pour  $x$  fixé dans  $\mathbb{R}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2nx}{n^2 x^4 + 1} \right) = 0$ . La fonction  $f_n$  étant impaire, étudions ses variations sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .

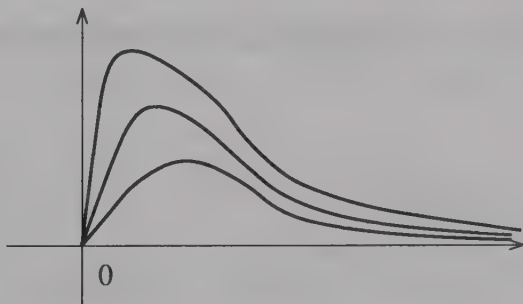
$$f'_n(x) = \frac{2n(n^2 x^4 + 1) - 8n^3 x^4}{(n^2 x^4 + 1)^2} = \frac{2n(1 - 3n^2 x^4)}{(n^2 x^4 + 1)^2}.$$

La fonction  $f_n$  qui vaut 0 en 0 et tend vers 0 en  $+\infty$ , est donc maximale en  $x_n = \left( \frac{1}{3n^2} \right)^{1/4} = \frac{1}{3^{1/4} \sqrt{n}}$ .

Ce maximum vaut  $\frac{2n}{3^{1/4} \sqrt{n} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{3^{3/4} \sqrt{n}}{2}$  et tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers l'infini.

Il n'y a pas convergence uniforme dans  $\mathbb{R}$ . On peut montrer néanmoins qu'il y a convergence uniforme sur tout  $[\alpha, +\infty[$  pour  $\alpha > 0$ .

*Allure des  $f_n$ :*



c) On a  $f_n(0) = 0$  et pour  $x > 0$ ,  $f_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln n}{n x}$ , donc la suite  $(f_n)$  converge **simplement vers 0**.

Mais pour  $n x = 1$ ,  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\ln 2}{2}$  ne tend pas vers 0, et il n'y a pas convergence uniforme sur  $\mathbb{R}^+$ .

Étudions les variations de  $g(u) = \frac{\ln(1+u)}{1+u}$ .

$$g'(u) = \frac{1}{(1+u)^2} (1 - \ln(1+u)) < 0 \text{ pour } u > e - 1.$$

Considérons alors  $\alpha > 0$ .

Pour  $n_0 = E\left(\frac{e-1}{\alpha}\right) + 1$ ,  $n \geq n_0$  et  $x \in [\alpha, +\infty[$ , on a  $f_n(x) \leq f_n(\alpha)$ .

**Il y a donc convergence uniforme sur  $[\alpha, +\infty[$  pour tout  $\alpha > 0$ .**

d) On a  $f_n(0) = 0$  et pour  $x > 0$  fixé, il existe un rang  $n_0$  à partir duquel:

$$f_n(x) = \frac{1}{n \ln \left(1 - \frac{1}{nx}\right)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -x.$$

**Conclusion:** la suite  $(f_n(x))$  converge simplement vers  $-x$ .

Y a-t-il convergence uniforme?

Posons  $g_n(x) = f_n(x) + x = \frac{1}{n} h(nx)$ , avec:

$$\begin{cases} h(u) = u & \text{pour } 0 \leq u \leq 1 \\ h(u) = \frac{1}{\ln \left(1 - \frac{1}{u}\right)} + u & \text{si } u < 0 \text{ ou } u > 1 \end{cases}.$$

Comme  $\lim_{u \rightarrow 0} h(u) = 0$  et  $\lim_{u \rightarrow 1} h(u) = 1$ , l'application  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . De plus:

$$h(u) = \frac{1}{-\frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2} + o\left(\frac{1}{u^2}\right)} + u = u \left(1 - \left(1 + \frac{1}{2u} + o\left(\frac{1}{u}\right)\right)^{-1}\right) \underset{u \rightarrow \pm\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

L'application  $h$  est donc bornée sur  $\mathbb{R}$  et si  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| = \alpha$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |g_n(x)| = \frac{1}{n} |h(nx)| \leq \frac{\alpha}{n}.$$

$(g_n)$  converge uniformément vers 0, et la suite  $(f_n)$  est uniformément convergente.

## A-2 Irrationalité de $\pi^2$ :

$$\text{a) } u_1(x) = \int_0^x t \sin t \, dt = -[t \cos t]_0^x + \int_0^x \cos t \, dt = -x \cos x + \sin x \quad \text{de même}$$

$$u_2(x) = \int_0^x (-t^2 \cos t + t \sin t) \, dt = -x^2 \sin x - 3x \cos x + 3 \sin x.$$

Supposons que pour tout  $k$ ,  $k < n$ ,  $u_k(x)$  peut s'écrire:

$u_k(x) = P_k(x^2) \sin x + x Q_k(x^2) \cos x$ , relation vérifiée par les fonctions  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$ .

Nous pouvons alors montrer que  $u_n$  s'exprime sous la même forme, en constatant que:

$$I_n = \int_0^x t^{2n+1} \sin t \, dt = -x^{2n+1} \cos x + (2n+1) \int_0^x t^{2n} \cos t \, dt$$

$$J_n = \int_0^x t^{2n} \cos t \, dt = x^{2n} \sin x - 2n \int_0^x t^{2n-1} \sin t \, dt.$$

Les polynômes  $P_n$  et  $Q_n$  sont à coefficients entiers, et ont pour degrés respectifs:

$$\deg(P_n) = E\left(\frac{n}{2}\right), \text{ et } \deg(Q_n) = E\left(\frac{n-1}{2}\right).$$

b)  $|u_0(x)| \leq 1$  pour tout  $x$ .

En majorant l'intégrale définissant  $u_1$ , on obtient  $|u_1(x)| \leq \frac{x^2}{2}$ , pour tout  $x$ , et, par le même procédé, il vient :

$$\forall n, \forall x, |u_n(x)| \leq \frac{x^{2n}}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}.$$

Donc, pour tout  $x$ , la suite  $(u_n(x))$  tend vers 0.

La suite des fonctions  $(u_n)$  converge simplement vers la fonction nulle, et cette convergence est uniforme sur tout compact.

c) Nous constatons que, pour tout  $x$ ,  $u_2(x) = 3u_1(x) - x^2 u_0(x)$ .

Supposons, que pour une valeur donnée de  $n$ ,  $u_{n+1}(x) = (2n+1)u_n(x) - x^2 u_{n-1}(x)$ , et calculons  $u_{n+2}(x)$  à l'aide de cette relation :

$$u_{n+2}(x) = \int_0^x t u_{n+1}(t) dt = (2n+1) u_{n+1}(x) - \int_0^x t^3 u_{n-1}(t) dt$$

et puisque  $u_n$  est une primitive de la fonction :  $x \mapsto x u_{n-1}(x)$ :

$$\int_0^x t^3 u_{n-1}(t) dt = [t^2 u_n(t)]_0^x - \int_0^x 2t u_n(t) dt = -2u_{n+1}(x) + x^2 u_n(x).$$

La relation  $u_{n+1}(x) = (2n+1)u_n(x) - x^2 u_{n-1}(x)$  est donc vraie pour tout  $n$ .

d) En dérivant cette dernière relation, on obtient :

$$u'_{n+1}(x) = (2n+1) u'_n(x) - 2x u_{n-1}(x) - x^2 u'_{n-1}(x) = x u_n(x),$$

ce qui peut également s'écrire :

$$u_n(x) = (2n+1) u_{n-1}(x) - 2u_{n-1}(x) - x u'_{n-1}(x),$$

d'où, en dérivant à nouveau :

$$u'_n(x) = (2n-1) u'_{n-1}(x) - u'_{n-1}(x) - x u''_{n-1}(x) = x u_{n-1}(x).$$

On en déduit donc l'équation différentielle vérifiée par la fonction  $u_n$  :

$$x u''_n - 2n u'_n + x u_n = 0$$

e) Pour tout  $n$ ,  $u_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = P_n\left(\frac{\pi^2}{4}\right)$ .

Si  $\pi^2$  est rationnel,  $\frac{\pi^2}{4}$  est aussi rationnel. Posons  $\frac{\pi^2}{4} = \frac{p}{q}$ .

Alors la suite  $\left(q^n P_n\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\right)$  est une suite d'entiers tendant vers 0 d'après l'inégalité de la question (b).

Donc  $P_n\left(\frac{\pi^2}{4}\right)$  est nul à partir d'un certain rang, ainsi que  $u_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$  et, d'après la relation

de la question (c),  $u_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$  est nul pour tout  $n$ . Or,  $u_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$  n'est pas nul.

**Donc  $\pi^2$  est irrationnel.**

### A-3 Étude de l'exponentielle comme limite:

a) On peut développer  $f_n(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{z^k}{n^k}$ .

Posons alors  $u_k(n, z) = C_n^k \frac{z^k}{n^k}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , avec la convention habituelle  $C_n^k = 0$

pour  $k > n$ , de sorte que  $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(n, z) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^K u_k(n, z)$ .

i) Si nous considérons  $z$  fixé dans  $\mathbb{C}$ , nous pouvons écrire pour  $k \leq n$ ,

$$|u_k(n, z)| = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} \frac{|z|^k}{k!} \leq \frac{|z|^k}{k!}$$

et cette majoration reste valable pour  $k > n$  puisqu'alors  $u_k(n, z)$  est nul.

De plus  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} = 1$ ,  $u_k(n, z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{z^k}{k!}$ .

La série  $\sum u_k(n, z)$  est donc *normalement convergente par rapport à  $n$* , et on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_k(n, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

ii) Considérons  $A$  un réel  $> 0$  et  $D$  le disque fermé de centre 0 et de rayon  $A$ .

Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $D$  dans  $\mathbb{C}$  normé par la "norme sup":  $\|f\| = \sup_{z \in D} |f(z)|$ .

Montrons que *la suite  $f_n$  converge vers la fonction exponentielle dans l'espace vectoriel normé  $E$* .

Il suffit de reprendre la démonstration précédente:

-  $\|u_k(n, \cdot)\| \leq \frac{A^k}{k!}$  montre la *convergence normale dans  $E$  de la série  $\sum u_k(n, \cdot)$* .

- si  $\varphi_k$  désigne la fonction  $z \mapsto \frac{z^k}{k!}$ , le théorème de la double limite, valable dans

l'espace complet  $E$ , donne:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} u_k(n, \cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k = \exp.$$

*La convergence de la suite  $(f_n)$  vers la fonction exponentielle est donc uniforme sur  $D$ , et donc sur tout compact de  $\mathbb{C}$ .*

b) Pour  $x$  fixé, considérons l'application  $\varphi_x$  définie par:

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq x, & \varphi_x(t) = 0 \\ t > x, & \varphi_x(t) = \left(1 - \frac{x}{t}\right)^t \end{cases}$$

Elle est croissante car, pour  $t > x$ ,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (\ln (\varphi_x (t))) &= \frac{d}{dt} \left( t \ln \left( 1 - \frac{x}{t} \right) \right) = \ln \left( 1 - \frac{x}{t} \right) + \frac{x}{t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{t}} \\ &= \ln \left( 1 - \frac{x}{t} \right) + \frac{x}{t-x}\end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln (\varphi_x (t)) = \frac{x}{t(t-x)} - \frac{x}{(t-x)^2} = \frac{-x^2}{t(t-x)^2}.$$

La dérivée est **décroissante jusqu'à 0** (quand  $t \rightarrow +\infty$ ) donc positive et  $\varphi_x$  est **croissante sur  $[x, +\infty[$** . La suite  $g_n$  converge donc en croissant vers  $g$ .

*Montrons que la convergence est uniforme.*

Pour  $\varepsilon > 0$  fixé, on peut choisir  $A > 0$  tel que  $e^{-A} < \varepsilon$  et alors, pour  $x \geq A$  et pour tout  $n$  entier,  $n \geq x$ ,  $0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x} \leq e^{-A} \leq \varepsilon$ , donc pour tout  $n$  entier,

$$0 \leq g(x) - g_n(x) \leq \varepsilon.$$

Mais on sait d'après a) que  $g_n$  converge uniformément vers  $g$  sur  $[0, A]$ . Il existe donc  $N$  tel que pour  $n \geq N$ ,

$$0 \leq g(x) - g_n(x) \leq \varepsilon \text{ pour tout } x \text{ de } [0, A] \text{ donc finalement pour tout } x \geq 0.$$

c) On observe d'abord que  $g_n$  est de classe  $C^{n-1}$  sur  $\mathbb{R}^+$ , donc aussi  $\varphi_n$ .

Pour  $x$  dans  $[0, n]$   $\varphi_n(x) = e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$  et  $\varphi'_n(x) = -e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}$  est du signe de  $\psi_n(x) = (n-1) \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) + x$  (croissance du logarithme).

Mais  $\psi'_n(x) = -\frac{n-1}{n-x} + 1 = \frac{1-x}{n-x}$ , ce qui donne le tableau de variations suivant:

| $x$          | 0 | 1 | $x_n$ | $n$ | $+\infty$ |
|--------------|---|---|-------|-----|-----------|
| $\psi'_n$    | + | 0 | -     |     |           |
| $\psi_n$     | 0 |   | 0     |     |           |
| $\varphi'_n$ | + |   | 0     | -   | -         |
| $\varphi_n$  | 0 |   | $y_n$ |     | 0         |

Les **croissances** indiquées sur ce tableau de variation **étant strictes**,  $\varphi_n$  a un unique maximum  $y_n$  obtenu pour  $x_n$  racine de l'équation  $\psi_n(x) = 0$ .

$$\begin{aligned}\text{Mais } \psi_n(x) &= (n-1) \ln \left( 1 - \frac{x}{n} \right) + x = (n-1) \left( -\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + x \\ &= -x - \frac{x^2}{2n} + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} + x + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{x(2-x)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Pour  $x$  fixé  $> 0$ , à partir d'un certain rang on a:

$$\begin{array}{l} \text{si } x < 2, \psi_n(x) > 0, \text{ donc } x < x_n \\ \text{si } x > 2, \psi_n(x) < 0, \text{ donc } x > x_n \end{array}$$

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = 2$ . Posons alors  $x_n = 2 + \alpha_n$ , de sorte que  $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , et écrivons que  $\psi_n(x_n) = 0$ .

$$(n-1) \ln \left( 1 - \frac{2}{n} - \frac{\alpha_n}{n} \right) = -2 - \alpha_n$$

$$(n-1) \left( -\frac{2}{n} - \frac{\alpha_n}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{2\alpha_n}{n^2} - \frac{\alpha_n^2}{2n^2} - \frac{8}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = -2 - \alpha_n$$

$$-2 - \alpha_n - \frac{2}{n} - \frac{2\alpha_n}{n} - \frac{\alpha_n^2}{2n} - \frac{8}{3n^2} + \frac{2}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -2 - \alpha_n,$$

soit en simplifiant et en multipliant par  $n$ ,  $-\alpha_n - \frac{\alpha_n^2}{2} - \frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ .

On en déduit  $\alpha_n \sim -\frac{2}{3n}$ , soit:

$$x_n = 2 - \frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Pour trouver un équivalent de  $y_n$  écrivons:

$$\begin{aligned} y_n &= \varphi_n(x_n) = \exp(-x_n) - \exp\left(n \ln \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(-2 + \frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \exp\left(n\left(-\frac{2}{n} + \frac{2}{3n^2} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= e^{-2} \left(1 + \frac{2}{3n} - 1 - \frac{2}{3n} + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Finalement:

$$y_n \sim \frac{2e^{-2}}{n}$$

#### A-4 Développements Eulériens:

a) De  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$  on déduit  $\sin z = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z)$ , avec

$$P_n(z) = \frac{\left(1 + \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{iz}{2n+1}\right)^{2n+1}}{2i}.$$

Factorisons dans  $\mathbb{C}[X]$  le polynôme  $P(X) = (1+X)^{2n+1} - (1-X)^{2n+1}$ .

Cherchons ses racines:

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (1+z)^{2n+1} = (1-z)^{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow z \neq 1 \text{ et } \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n+1} = 1$$

On en tire:  $\frac{1+z}{1-z} = e^{2ik\pi/(2n+1)} \quad k = 0, 1, \dots, 2n$

soit  $z = \frac{e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1}{e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1} = i \tan \frac{k\pi}{2n+1} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, 2n.$

La réciproque est immédiate puisque la valeur 1 n'est pas atteinte.

Comme  $P'(0) = 2(2n+1)$ , on peut écrire en regroupant les racines opposées:

$$P(X) = 2(2n+1)X \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{X^2}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \text{ et}$$

$$P_n(z) = \frac{1}{2i} P\left(\frac{iz}{2n+1}\right) = z \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

b) Pour  $z$  fixé dans  $\mathbb{C}$  considérons la suite de fonctions de la variable entière  $n$ :

$$u_k(n) = - \frac{z^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n$$

$$u_k(n) = 0 \quad \text{pour } k > n, \text{ de telle sorte que:}$$

$$P_n(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - u_k(n)) = \lim_{K \rightarrow \infty} z \prod_{k=1}^K (1 - u_k(n)).$$

**Remarque:** cet artifice permet de rendre indépendants les indices variables  $k$  et  $n$ .

Montrons que lorsque  $K \rightarrow \infty$ , la convergence vers  $P_n(z)$  est uniforme par rapport à  $n$ .

$$\begin{aligned} \left| z \prod_{k=1}^{K+p} (1 - u_k(n)) - z \prod_{k=1}^K (1 - u_k(n)) \right| &\leq |z| \prod_{k=1}^K (1 + |u_k(n)|) \left| \prod_{k=K+1}^{K+p} (1 - u_k(n)) - 1 \right| \\ &\leq |z| \prod_{k=1}^K (1 + |u_k(n)|) \left( \prod_{k=K+1}^{K+p} (1 + |u_k(n)|) - 1 \right) \\ &\leq |z| \prod_{k=1}^{K+p} \left( 1 + \frac{|z|^2}{k^2 \pi^2} \right) - |z| \prod_{k=1}^K \left( 1 + \frac{|z|^2}{k^2 \pi^2} \right) \end{aligned}$$

en utilisant pour la dernière étape:

$$\tan^2 \frac{k\pi}{2n+1} \geq \frac{k^2 \pi^2}{(2n+1)^2} \quad \text{pour } k \leq n, \text{ et } |u_k(x)| = 0 < \frac{|z|^2}{k^2 \pi^2} \quad \text{pour } k > n.$$

De la convergence de la série  $\sum \ln \left( 1 + \frac{|z|^2}{k^2 \pi^2} \right)$  on déduit celle du produit infini

$$\prod \left( 1 + \frac{|z|^2}{k^2 \pi^2} \right) \text{ donc la convergence uniforme par rapport à } n \text{ vers } P_n(z).$$

En appliquant alors *le théorème de la double limite*, on obtient:

$$\sin z = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - u_k(n)), \text{ soit:}$$

$$\boxed{\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right)}$$

$$c) \frac{1}{z \prod_{n=1}^N \left( 1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right)} = \frac{a_0(N)}{z} + \sum_{n=1}^N a_n(N) \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) \text{ à cause de}$$

l'imparité de la fonction rationnelle.

On obtient en multipliant par  $z - n\pi$  et en remplaçant  $z$  par  $n\pi$ ,

$$a_0(N) = 1 \text{ puis pour } n = 1, 2, \dots, N$$

$$a_n(N) = \frac{-1}{n\pi \prod_{k \neq n} \left( 1 - \frac{n^2}{k^2} \right) \cdot 2}$$

$$= \frac{-1^2 \cdot 2^2 \dots (n-1)^2 \cdot (n+1)^2 \dots N^2}{2(-1)^{n-1}(n-1)(n-2) \dots 1 \cdot 1 \cdot 2 \dots (N-n) \cdot (n+1) \dots (2n-1) \cdot (2n+1) \dots (n+N)}$$

$$= \frac{(-1)^n (N!)^2}{(n+N)! (N-n)!} = (-1)^n \frac{N(N-1) \dots (N-n+1)}{(N+1)(N+2) \dots (N+n)}$$

$$\text{mais } \left| a_n(N) \left( \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right) \right| \leq \frac{2|z|}{|z^2 - n^2 \pi^2|} \sim \frac{2|z|}{\pi^2 n^2}$$

*La convergence est uniforme par rapport à  $N$ .* On peut appliquer encore une fois le *théorème de la double limite* et conclure puisque  $\lim_{N \rightarrow \infty} a_n(N) = 1$ .

### A-5 La fonction $\Gamma$ comme limite:

a) Si nous considérons la suite  $g_n$  définie au A-3.b, nous avons:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left( 1 - \frac{t^2}{n} \right)^n dt = \int_0^{+\infty} g_n(t^2) dt.$$

Gardons en mémoire les propriétés:

i) pour tout  $x \geq 0$ ,  $0 \leq g_n(x) \leq e^{-x} = g(x)$ ,

ii)  $g_n$  converge uniformément vers  $g$  sur  $\mathbb{R}^+$ ,

iii) l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$  converge car pour  $t \geq 1$ ,  $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ .

Pour  $\varepsilon > 0$  fixé, on peut, d'après iii), trouver  $A > 0$  tel que  $\int_A^{+\infty} e^{-t^2} dt < \frac{\varepsilon}{2}$ , puis un

$N \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq N$  implique  $\sup_{0 \leq x \leq A} |g(x^2) - g_n(x^2)| < \frac{\varepsilon}{2A}$ , de telle sorte que:

$$0 \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt - \int_0^{+\infty} g_n(t^2) dt \leq \int_0^A |g(t^2) - g_n(t^2)| dt + \int_A^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

$$< A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Calculons alors  $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$  en posant  $t = \sqrt{n} \sin x$ .

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2n+1} dx \sim \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}, \text{ donc}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

b) Si  $\Gamma_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^{+\infty} g_n(t) t^{x-1} dt$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe

$A > 0$  tel que  $\int_A^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt < \frac{\varepsilon}{2}$  et alors, si  $y_n = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} (g(t) - g_n(t))$ ,

$$0 \leq \Gamma(x) - \Gamma_n(x) \leq y_n \int_0^A t^{x-1} dt + \int_A^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$\leq \frac{A^x}{x} y_n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ pour } n \geq N, \text{ puisque } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0.$$

Il ne reste plus qu'à calculer  $\Gamma_n(x)$ .

$$\text{En posant } t = nu, \Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du.$$

Si  $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$ , en intégrant par parties:

$$I_n(x) = \left[ \frac{u^x}{x} (1-u)^n \right]_0^1 + \frac{n}{x} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^{x-1} du = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1)$$

$$= \frac{n(n-1) \dots 1}{x(x+1) \dots (x+n-1)} I_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

Finalement,  $\Gamma_n(x) = \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}$ , et

$$\boxed{\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}}$$

c) On peut écrire alors:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^{-x} x(1+x) \left(1 + \frac{x}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{n}\right) \right)$$

$$n^{-x} = e^{-x \ln n} = \exp\left(-x \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma + \varepsilon_n\right)\right) \text{ où } \gamma \text{ est la constante d'Euler}$$

et  $\lim(\varepsilon_n) = 0$ .

Étudions le produit infini  $A_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k}$ .

$$\ln(A_n) = \sum_{k=1}^n \left( \ln \left( 1 + \frac{x}{k} \right) - \frac{x}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{-x^2}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \right)$$

donc la suite  $A_n$  est convergente.

On peut donc écrire pour tout  $x > 0$ ,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{x}{k} \right) e^{-x/k}$$

d) Rappelons que  $\sin \pi x = \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{k^2} \right)$  (voir exercice A-4).

Prenons  $x$  dans  $]0, 1[$ , de telle sorte que:

$$\begin{aligned} \Gamma(x) \Gamma(1-x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)} \cdot \frac{n^{1-x} n!}{(1-x)(2-x) \dots (n+1-x)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x(1-x^2) \left( 1 - \frac{x^2}{4} \right) \dots \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right)} \cdot \frac{n}{n+1-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{x^2}{k^2} \right)} = \frac{1}{x \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{k^2} \right)}. \end{aligned}$$

On en déduit bien la formule des compléments:

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

## A-6 Séries doubles:

Si on pose  $f_q(p) = \sum_{k=0}^p u_{k,q}$ , on peut écrire:  $|f_q(p)| \leq \sum_{k=0}^p |u_{k,q}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_{k,q}| = S_q$ .

On en déduit que la série  $\sum f_q$  série de fonctions de la variable  $p$  est normalement convergente puisque  $\sum S_q$  est convergente.

D'après le théorème de la double limite, énoncé en préambule, les limites suivantes existent et sont égales:

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} u_{p,q} &= \lim_{q \rightarrow \infty} \left( \sum_{l=0}^q \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^p u_{k,l} \right) \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^p \lim_{q \rightarrow \infty} \left( \sum_{l=0}^q u_{k,l} \right) \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} u_{p,q}. \end{aligned}$$

**Application:** 
$$\sum_{p=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^p}{q^p} \right| = \frac{1}{q^2 \left(1 - \frac{1}{q}\right)} = \frac{1}{q(q-1)}$$

$$\sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q(q-1)} = \sum_{q=2}^{\infty} \left( \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q} \right) = 1 \text{ converge, donc}$$

$$\begin{aligned} \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{q=2}^{\infty} \frac{(-1)^p}{q^p} &= \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=2}^{\infty} \left( -\frac{1}{q} \right)^p = \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q(q+1)} \\ &= \sum_{q=2}^{\infty} \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{q+1} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{p=2}^{\infty} \left( \sum_{q=2}^{\infty} \frac{(-1)^p}{q^p} \right) = \frac{1}{2}}$$

### A-7 Fonctions réglées:

a) Soit  $a \in I$  avec  $a > \inf I$ . Montrons que  $f$  a une limite à gauche au point  $a$  (pour les limites à droite il suffirait de considérer les fonctions  $x \mapsto f_n(-x)$ ).

Désignons par  $g_n$  (resp par  $g$ ) la restriction de  $f_n$  (resp  $f$ ) à  $J = ]-\infty, a[ \cap I$ . La suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $g$ .

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n(x) \xrightarrow[x \in J]{x \rightarrow a} f_n(a-0)$ .

On peut alors appliquer le *théorème de la double limite* et existe donc:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in J}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a-0).$$

L'application  $f$  a en tout point où cela a un sens une limite à droite et une limite à gauche donc est réglée.

b) Soit  $f$  une application non bornée de  $[a, b]$  dans  $F$ . On peut alors définir une suite  $(x_n)$  de  $[a, b]$  telle que  $\|f(x_n)\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ .

De la suite  $(x_n)$  on peut extraire une suite convergente  $(y_n)$  dont nous appelons  $x$  la limite. Comme  $\|f(y_n)\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ , pour  $n \geq N$ ,  $y_n \neq x$ , donc l'un des deux ensembles  $A$  ou  $B$  avec  $A = \{n \in \mathbb{N}; y_n < x\}$  et  $B = \{n \in \mathbb{N}; y_n > x\}$ , est infini. **Supposons par exemple que  $A$  est infini.** On peut extraire à nouveau une suite  $z_n$  tendant vers  $x$  par valeurs strictement inférieures avec  $\|f(z_n)\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ .

L'application  $f$  n'a alors pas de limite à gauche en  $x$  et donc n'est pas réglée, ce qui démontre la propriété par contraposition.

Si on se place dans l'espace vectoriel  $\mathcal{B}([a, b], F)$  muni de **la norme de la convergence uniforme** ( $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} \|f(x)\|$ ), la propriété démontrée se traduit par:

$\mathcal{R}([a, b], F)$  est un **sous espace fermé** de  $\mathcal{B}([a, b], F)$ .

c-1) i) Fixons donc  $\varepsilon > 0$  et désignons par  $A(\varepsilon)$  l'ensemble des  $x \in [a, b]$  tels que  $\varphi(x, f) < \varepsilon$ . Il est immédiat que  $A(\varepsilon)$  **est non vide** car il contient  $a$  puisque  $\varphi(a, f) = 0$  (prendre pour  $g$  la constante  $f(a)$ ). Par ailleurs,  $A(\varepsilon)$  **est un sous-intervalle de  $[a, b]$**  car  $x \in A(\varepsilon)$  implique  $[a, x] \subset A(\varepsilon)$  puisque l'application  $x \mapsto \varphi(x, f)$  est croissante.

Soit  $c = \sup A(\varepsilon)$ .

ii) **Montrons d'abord que  $c \in A(\varepsilon)$ .**

C'est vrai si  $c = a$ . Si  $c > a$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\alpha < c - a$  et:

$$\forall x \in ]c - \alpha, c[, \|f(x) - f(c - 0)\| < \varepsilon.$$

Comme  $c - \alpha \in A(\varepsilon)$ , il existe  $g_1$  en escalier de  $[a, c - \alpha]$  dans  $F$  tel que:

$$\sup_{x \in [a, c - \alpha]} \|f(x) - g_1(x)\| < \varepsilon.$$

Si nous définissons  $g : [a, c] \rightarrow F$  par:

$$i) g(c) = f(c)$$

$$ii) \forall x \in ]c - \alpha, c[, g(x) = f(c - 0)$$

$$iii) \forall x \in [a, c - \alpha], g(x) = g_1(x),$$

nous aurons  $\sup_{x \in [a, c]} \|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$  et  $c \in A(\varepsilon)$ .

iii) **Supposons  $c < b$ .** Il existe alors  $\beta \in ]0, b - c[$  tel que:

$$\forall x \in ]c, c + \beta], \|f(x) - f(c + 0)\| < \varepsilon.$$

Si nous définissons alors  $g_2 : [a, c + \beta] \rightarrow F$  par:

$$i) \forall x \in [a, c], g_2(x) = g(x)$$

$$ii) \forall x \in ]c, c + \beta], g_2(x) = f(c + 0),$$

nous aurons immédiatement  $\sup_{x \in [a, c + \beta]} \|f(x) - g_2(x)\| < \varepsilon$  donc  $c + \beta \in A(\varepsilon)$  **ce qui contredit la définition de  $c$ .**

On a donc montré que  $\sup A(\varepsilon) = b$  et finalement que  $A(\varepsilon) = [a, b]$

iv) Prenons alors **une suite de  $\varepsilon$  tendant vers 0**, par exemple  $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe alors  $g_n$  en escalier tel que  $\sup_{y \in [a, b]} \|f(y) - g_n(y)\| \leq \frac{1}{n+1}$ .

La suite  $(g_n)$  converge donc uniformément vers  $f$ .

c-2) Si  $\mathcal{R}([a, b], F)$  est muni de **la norme uniforme** ( $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} \|f(x)\|$ ), **l'espace  $\mathcal{E}$  des fonctions en escalier est dense dans  $\mathcal{R}([a, b], F)$ :**

$$\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{R}([a, b], F).$$

## B - Séries de fonctions

### B-1 Études de convergence et d'équivalents:

a) Pour  $x \in \mathbb{Z}^-$ ,  $f(x)$  n'est pas définie. Pour  $x \notin \mathbb{Z}^-$ , la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$  est une série alternée à partir du rang  $m = E(-x) + 1$ . Comme le terme général tend vers 0 et décroît en valeur absolue, la série est convergente.

L'application  $f$  est donc définie sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ .

La série dérivée  $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$  est pour tout  $\alpha \in ]0, 1/2[$ , et  $N \in \mathbb{N}$  normalement convergente sur l'ensemble:

$$A_N(\alpha) = [-N+\alpha, -N+1-\alpha] \cup [-N+1+\alpha, -N+2-\alpha] \dots \cup [-1+\alpha, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty[$$

car pour  $x \in A_N(\alpha)$ , le terme général est en valeur absolue majoré par  $\alpha_n$  avec:

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{\alpha^2} & \text{pour } n \leq N \\ \alpha_n = \frac{1}{(n-N)^2} & \text{pour } n > N \end{cases}$$

et la série  $\sum \alpha_n$  est convergente.

La série dérivée étant normalement convergente sur tout  $A_N(\alpha)$ , la fonction  $f$  y est de classe  $C^1$ , et finalement  $f$  est de classe  $C^1$  sur son ensemble de définition  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ , et y

$$\text{a pour dérivée } f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Pour chercher un équivalent, regroupons les termes 2 à 2,

$$\frac{1}{2n+x} - \frac{1}{2n+1+x} = \frac{1}{(2n+x)(2n+1+x)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+x)(2n+2+x)} \leq f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+x)(2n+1+x)}$$

$$\leq \frac{1}{x(x+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1+x)(2n+1+x)}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2n+x} - \frac{1}{2n+2+x} \right) \leq f(x) \leq \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n-1+x} - \frac{1}{2n+1+x} \right)$$

$$\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)}.$$

On a donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  et:

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}$$

$$\text{b) } \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n + (n(x-n))^2} = \frac{1}{n}. \text{ Il n'y a donc pas convergence normale sur } \mathbb{R} \text{ tout}$$

entier (il y a en fait convergence normale sur tout intervalle  $]-\infty, A[$ ).

Montrons néanmoins qu'il y a **convergence uniforme** sur  $\mathbb{R}$ .

Dans un *paquet de Cauchy*  $\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)$ , il y a au plus deux termes ( $k = E(x)$  et  $k = E(x+1)$ ) tels que  $|x - k| < 1$ . Chacun de ces termes est majoré par  $\frac{1}{n+1}$ . Pour les autres termes,  $\frac{1}{k+(k(x-k))^2} \leq \frac{1}{k+k^2}$ , de sorte que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} + \frac{2}{n+1} \leq \frac{3}{n+1}. \end{aligned}$$

**La série est uniformément de Cauchy donc converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  entier.**

$$\text{La série dérivée est } v_n(x) = \frac{-2n^2(x-n)}{(n+(n(x-n))^2)^2}.$$

Pour  $x \in ]-\infty, N]$  et  $n \geq N+1$ , on a:

$$|v_n(x)| \leq \frac{2n^2|x-n|}{(n+n^2(x-n)^2)^2} \leq \frac{2}{n+n^2}, \text{ puisque } x-n \geq 1 \text{ et } |x-n| \leq (x-n)^2.$$

**La série dérivée est normalement convergente sur  $] -\infty, N]$  donc  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $] -\infty, N]$ , donc sur  $\mathbb{R}$ , la dérivée étant:**

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n-x)}{(1+n(x-n)^2)^2}$$

En raison de la convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$  entier, on peut appliquer le *théorème de la double limite* en  $+\infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n+n^2(n-x)^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

c) i) Pour  $x < 0$ , le terme général  $u_n(x)$  ne tend pas vers 0, et il n'y a pas convergence. De plus,  $\sup_{x \in \mathbb{R}^+} (u_n(x)) = \frac{1}{3/2}$ , et il y a convergence normale sur  $\mathbb{R}^+$ .

La série dérivée  $v_n(x) = -\frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$  est **normalement convergente sur tout intervalle**  $[\alpha, +\infty[$  avec  $\alpha > 0$  mais n'est pas convergente pour  $x = 0$ .

L'application  $f$  est donc de classe  $C^1$  sur  $[\alpha, +\infty[$  pour tout  $\alpha > 0$  donc sur  $]0, +\infty[$ , de dérivée:

$$f'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n}$$

ii) Pour étudier la dérivabilité (à droite) en 0, mettons en évidence la limite de  $f'(x)$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .

Pour tout  $A > 0$ , il existe  $N > 0$  tel que  $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} > A + 1$  et comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ ,

il existe  $\alpha > 0$  tel que  $|x| < \alpha \Rightarrow \sum_{n=1}^N \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n} \geq A$ . On a alors, pour  $0 < x < \alpha$ ,

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n} < -\sum_{n=1}^N \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n} \leq -A.$$

On en déduit que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = -\infty$  et la fonction  $f$  n'est pas dérivable en 0 (la courbe

représentative a une demi-tangente verticale).

iii) Remarquons que  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n^{3/2}} \leq e^{-x\sqrt{2}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} = 0$  ( $e^{-x}$ ) lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

Ainsi:

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}}$$

d)  $nx - 1 < E(nx) \leq nx$ , donc

si  $x \geq 0$ ,  $|E(nx)| \leq nx$

si  $x < 0$ ,  $|E(nx)| < |nx - 1| = n|x| + 1$ .

Dans tous les cas,  $|E(nx)| \leq n|x| + 1$ , et comme  $|nx - E(nx)| < 1$ ,

$$|\varphi_n(x)| = |(E(nx))^2 - 2(nx - E(nx))^2| \leq (n|x| + 1)^2 + 2 \leq n^2((|x| + 1)^2 + 2),$$

donc pour  $|x| \leq A$ , on a  $|u_n(x)| \leq \frac{(A+1)^2 + 2}{(n+1)^2}$ . Il y a convergence normale sur tout

intervalle  $[-A, A]$ .

La fonction  $f$  est donc continue en tout point où tous les  $u_n$  sont continus.

La fonction  $u_n$  est a priori discontinue pour les  $x$  de la forme  $x = \frac{N}{n}$  avec  $N \in \mathbb{Z}$ .

Pour  $\frac{N-1}{n} \leq y < \frac{N}{n}$ ,

$$\varphi_n(y) = (N-1)^2 - 2(ny - N + 1)^2 \xrightarrow[\substack{ny \rightarrow N \\ ny < N}]{ny \rightarrow N} (N-1)^2 - 2 = N^2 - 2N - 1.$$

Pour  $\frac{N}{n} \leq y < \frac{N+1}{n}$ ,

$$\varphi_n(y) = N^2 - 2(ny - N)^2 \xrightarrow[\substack{ny \rightarrow N \\ ny \geq N}]{ny \rightarrow N} N^2.$$

Ces deux limites sont distinctes (car  $2N + 1 \neq 0$ ). De plus, le saut  $\varphi_n(x+0) - \varphi_n(x-0)$  vaut  $2N + 1$  et est du signe de  $N$  donc de  $x$ .

Plus précisément:

-si  $x \geq 0$ ,  $N \geq 0$ , donc  $N + \frac{1}{2} > 0$  et le saut est  $> 0$

-si  $x < 0$ ,  $N < 0$ , donc  $N + \frac{1}{2} < 0$  et le saut est  $< 0$ .

Si  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $r = \frac{p}{q}$ , avec  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , les  $u_n$  sont discontinues ou continues en  $r$ , selon que  $n$  est multiple de  $q$  ou non.

Si  $r \geq 0$ , les  $u_{kq}$  ont tous un saut  $> 0$  au point  $r$  et il en est de même de  $f$ . Si  $r < 0$ , les  $u_{kq}$  ont un saut  $< 0$  au point  $r$  donc  $f$  aussi.

Finalement  $f$  est continue en tout point de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  et discontinue en tout point de  $\mathbb{Q}$ .

Le saut  $f(r+0) - f(r-0)$  au point  $r = \frac{p}{q}$  de  $\mathbb{Q}$  vaut:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2kp+1}{(kq)^2 (kq+1)^2}.$$

e) i) Utilisons une transformation d'Abel, pour  $e^{ix} \neq 1$ :

$$|B_n(x)| = |1 + e^{ix} + \dots + e^{inx}| = \left| \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right| = \left| \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}.$$

Sur tout intervalle  $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$ , avec  $\alpha \in ]0, \pi[$ , on a  $|B_n(x)| \leq K$ ,  
en posant  $K = \frac{1}{\sin(\alpha/2)}$ .

$$\begin{aligned} S_{n,p}(x) &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k + e^{ikx}} (B_k(x) - B_{k-1}(x)) \\ &= -\frac{1}{n+1 + e^{i(n+1)x}} B_n(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left( \frac{1}{k + e^{ikx}} - \frac{1}{k+1 + e^{i(k+1)x}} \right) B_k(x) \\ &\quad + \frac{1}{n+p + e^{i(n+p)x}} B_{n+p}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |S_{n,p}(x)| &\leq K \left( \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left| \frac{1}{k + e^{ikx}} - \frac{1}{k+1 + e^{i(k+1)x}} \right| + \frac{1}{n+p-1} \right) \\ &\leq K \left( \frac{2}{n} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \frac{|1 + e^{i(k+1)x} - e^{ikx}|}{|(k + e^{ikx})(k+1 + e^{i(k+1)x})|} \right) \\ &\leq K \left( \frac{2}{n} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \frac{3}{(k-1)k} \right) = K \left( \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \frac{3}{n+p} \right) \leq K \left( \frac{2}{n} + \frac{3}{n} \right) = \frac{5K}{n}. \end{aligned}$$

Il y a donc convergence uniforme sur tout intervalle de la forme  $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$  et comme pour  $x = 2k\pi$ , il y a divergence,  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ .

ii) La série dérivée  $u_n'(x) = \frac{in e^{inx}}{(n + e^{inx})^2}$  n'est pas absolument convergente, mais

on démontre comme au i), qu'elle est uniformément convergente sur les intervalles  $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$  pour  $k \in \mathbb{Z}$  et  $\alpha \in ]0, \pi[$ .

En effet, en groupant les termes par deux, on majore

$$\begin{aligned} |u_n'(x) + u_{n+1}'(x)| &= \left| \frac{n}{(n + e^{inx})^2} - \frac{n+1}{(n+1 + e^{i(n+1)x})^2} \right| = \\ &= \left| \frac{n(n+1)^2 + 2e^{i(n+1)x} n(n+1) + n e^{2i(n+1)x} - (n+1)n^2 - 2e^{inx} n(n+1) - (n+1)e^{2inx}}{(n + e^{inx})^2 (n+1 + e^{i(n+1)x})^2} \right| \\ &= \left| \frac{n(n+1)(1 + 2e^{i(n+1)x} - 2e^{inx}) + n e^{2i(n+1)x} - (n+1)e^{2inx}}{(n + e^{inx})^2 (n+1 + e^{i(n+1)x})^2} \right|. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } |u_n'(x) + u_{n+1}'(x)| \leq \frac{5n(n+1) + n + n + 1}{(n-1)^2 n^2} = \frac{5n^2 + 7n + 1}{n^2(n-1)^2} \leq \frac{13}{(n-1)^2}.$$

iii) On démontre au B-2a) de ce chapitre que la fonction  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n}$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$  et vaut  $g(x) = -\ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) + i\left(\frac{\pi-x}{2}\right)$  pour  $0 < x < 2\pi$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ , posons  $h(x) = g(x) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2inx}}{n(n+e^{inx})}$ , de sorte que la série définissant  $h$  est **normalement convergente sur**  $\mathbb{R}$  car  $\left| \frac{e^{2inx}}{n(n+e^{inx})} \right| \leq \frac{1}{n(n-1)}$

donc  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

$$\text{En particulier } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

$$\text{Quand } x \rightarrow 0, x > 0, \quad g(x) \sim -\ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) \sim -\ln(x).$$

La fonction  $g$  ayant une partie réelle paire et une partie imaginaire impaire, cette formule reste valable pour  $x < 0$  à condition de remplacer  $x$  par  $-x$ . Enfin, la différence  $g - f$  ayant une limite finie, on obtient:

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln|x|}$$

## B-2 Calcul de la somme d'une série de fonctions:

a)i) Effectuons une *transformation d'Abel*, en posant, pour  $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n e^{ikx} = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} e^{inx/2} \text{ de telle sorte que } |B_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}.$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{e^{ikx}}{k} \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} (B_k(x) - B_{k-1}(x)) \right| \\ &= \left| -\frac{1}{n+1} B_n(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} B_k(x) \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{n+p} B_{n+p}(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \left( \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{n+p} \right) \\ &\leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \frac{2}{n+1} \quad \text{pour } 2k\pi + \alpha \leq x \leq 2(k+1)\pi - \alpha. \end{aligned}$$

La série est donc convergente sur  $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{ii) Ecrivons } \sum_{n=1}^N \frac{e^{inx}}{n} &= \sum_{n=1}^N e^{inx} \int_0^1 t^{n-1} dt \\
 &= e^{ix} \int_0^1 \sum_{n=0}^{N-1} (te^{ix})^n dt \\
 &= e^{ix} \int_0^1 \frac{1-t^N e^{iNx}}{1-te^{ix}} dt.
 \end{aligned}$$

Nous avons, pour  $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

$$\left| \int_0^1 \frac{t^N e^{iNx}}{1-te^{ix}} dt \right| \leq \frac{1}{1-|\cos x|} \int_0^1 t^N dt \leq \frac{1}{1-|\cos x|} \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \text{car}$$

$$|1-te^{ix}|^2 = (1-t\cos x)^2 + t^2 \sin^2 x \geq (1-t|\cos x|)^2 \geq (1-|\cos x|)^2$$

lorsque  $t$  varie dans  $[0, 1]$ .

Calculons l'autre terme, pour  $0 < x < \pi$ :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{e^{ix}}{1-te^{ix}} dt &= \int_0^1 \frac{dt}{e^{-ix}-t} = \int_0^1 \frac{dt}{\cos x - t - i \sin x} \\
 &= - \int_0^1 \frac{t - \cos x}{t^2 - 2t \cos x + 1} + i \sin x \int_0^1 \frac{dt}{(t - \cos x)^2 + \sin^2 x} \\
 &= - \frac{1}{2} [\ln(t^2 - 2t \cos x + 1)]_0^1 + i \left[ \operatorname{Arctan} \frac{t - \cos x}{\sin x} \right]_0^1 \\
 &= - \frac{1}{2} \ln \left( 4 \sin^2 \frac{x}{2} \right) + i \frac{\pi - x}{2} \\
 &= - \ln \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right) + i \frac{\pi - x}{2}.
 \end{aligned}$$

Soit maintenant  $\pi < x < 2\pi$ . Posons  $y = 2\pi - x$ .

$$\int_0^1 \frac{e^{ix}}{1-te^{ix}} dt = \int_0^1 \frac{e^{i(2\pi-y)}}{1-te^{i(2\pi-y)}} dt = \int_0^1 \frac{e^{-iy}}{1-te^{-iy}} dt,$$

qui est le *conjugué* de  $\int_0^1 \frac{e^{iy}}{1-te^{iy}} dt$ .

Comme  $y$  est dans  $]0, \pi[$ ,

$$\int_0^1 \frac{e^{ix}}{1-te^{ix}} dt = - \ln \left( 2 \sin \frac{y}{2} \right) - i \frac{\pi - y}{2} = - \ln \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right) + i \frac{\pi - x}{2},$$

et la formule précédente reste valable, et elle est encore valable pour  $x = \pi$  car

$$\int_0^1 \frac{e^{i\pi}}{1-te^{i\pi}} dt = - \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = - \ln 2.$$

Compte tenu du i), on a donc:  $f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{e^{inx}}{n} = \int_0^1 \frac{e^{ix}}{1-te^{ix}} dt$ ,

Finalement, pour  $0 < x < 2\pi$ :

$$f(x) = -\ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) + i \frac{\pi - x}{2}$$

**Remarque:** pour les autres valeurs de  $x$ ,  $f(x)$  s'obtient par  $2\pi$ -périodicité.

$$\text{Si } x \in ]2k\pi, 2(k+1)\pi[, f(x) = -\ln\left(2 \left|\sin \frac{x}{2}\right|\right) + i \frac{(2k+1)\pi - x}{2}.$$

$$\text{b) Posons } f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{th} \frac{\lambda}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{\operatorname{sh}(\lambda 2^{-n})}{\operatorname{ch}(\lambda 2^{-n})} \text{ et}$$

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\operatorname{ch} \frac{\lambda}{2^n}\right) \text{ en partant de } \frac{d}{d\lambda} \left(\ln \operatorname{ch} \frac{\lambda}{2^n}\right) = 2^{-n} \operatorname{th} \frac{\lambda}{2^n}.$$

La série  $\sum 2^{-n} \operatorname{th}\left(\frac{\lambda}{2^n}\right)$  est **normalement convergente** sur  $\mathbb{R}$  et la série  $\sum \ln\left(\operatorname{ch} \frac{\lambda}{2^n}\right)$

simplement convergente puisque:

$$\left|2^{-n} \operatorname{th}\left(\frac{\lambda}{2^n}\right)\right| \leq 2^{-n} \text{ et } \ln\left(\operatorname{ch} \frac{\lambda}{2^n}\right) \sim \operatorname{ch} \frac{\lambda}{2^n} - 1 \sim \frac{\lambda^2}{2^{2n+1}}.$$

**On en déduit que  $f(\lambda) = g'(\lambda)$ .**

$$\text{Posons } G(\lambda) = e^{g(\lambda)} = \prod_{n=0}^{\infty} \operatorname{ch}\left(\frac{\lambda}{2^n}\right).$$

En utilisant la formule **sh 2t = 2 sh t ch t**, on obtient:

$$\operatorname{sh} 2\lambda = 2 \operatorname{ch} \lambda \operatorname{sh} \lambda = 4 \operatorname{ch} \lambda \operatorname{ch} \frac{\lambda}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda}{2} = \dots$$

$$= 2^{N+1} \operatorname{ch} \lambda \operatorname{ch} \frac{\lambda}{2} \dots \operatorname{ch} \frac{\lambda}{2^N} \operatorname{sh} \frac{\lambda}{2^N} \text{ de sorte que}$$

$$\prod_{n=0}^N \operatorname{ch}\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) = \frac{\operatorname{sh} 2\lambda}{2^{N+1} \operatorname{sh}(\lambda 2^{-N})} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh} 2\lambda}{2\lambda} \text{ puisque } \operatorname{sh}(\lambda 2^{-N}) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \lambda 2^{-N}.$$

$$\text{Finalement, } G(\lambda) = \frac{\operatorname{sh} 2\lambda}{2\lambda}, \text{ donc } g(\lambda) = \ln \operatorname{sh} 2\lambda - \ln 2\lambda, f(\lambda) = \frac{2 \operatorname{ch} 2\lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda} - \frac{1}{\lambda} \text{ soit:}$$

$$f(\lambda) = 2 \coth 2\lambda - \frac{1}{\lambda}$$

### B-3 Étude des fonctions de Riemann:

a) La fonction  $\zeta$  est simplement convergente si  $x > 1$ ;

De plus, si  $a > 1$ , pour  $x \in [a, +\infty[$ , on a  $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$ , alors que  $\sum \frac{1}{n^a}$  est une série convergente.

Il y a donc **convergence normale de  $\zeta$  sur tout intervalle  $[a, +\infty[$  avec  $a > 1$** . On en déduit la continuité de  $\zeta$  sur son ensemble de définition  $\mathcal{D}_\zeta = ]1, +\infty[$ .

La fonction  $\alpha$  est simplement convergente ssi  $x > 0$ , en vertu de la *règle spéciale des séries alternées*.

Cette même règle permet de majorer le reste  $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$  et l'on choisit

$a > 0$  puis  $x$  dans  $[a, +\infty[$ :

$$\left| \alpha(x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^a}.$$

Il y a donc **convergence uniforme sur tout intervalle  $[a, +\infty[$  avec  $a > 0$** . On en déduit la continuité de  $\alpha$  sur son ensemble de définition  $\mathcal{D}_\alpha = ]0, +\infty[$ .

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{n^x} \right) = \frac{d}{dx} (e^{-x \ln n}) = - \frac{\ln n}{n^x}.$$

Pour  $a > 1$  et  $x \in [a, +\infty[$ ,  $\left| - \frac{\ln n}{n^x} \right| \leq \frac{\ln n}{n^a}$ , et la série  $\sum \frac{\ln n}{n^a}$  est convergente.

**La série dérivée** de  $\zeta(x)$  est donc **normalement convergente** sur tout intervalle  $[a, +\infty[$  avec  $a > 1$ . La fonction  $\zeta$  est donc de classe  $C^1$  sur  $]1, +\infty[$  et

$$\zeta'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$$

Prenons maintenant  $a > 0$  et  $x$  dans  $[a, +\infty[$ .

La fonction  $t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$  est strictement décroissante à partir d'un certain rang car :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\ln t}{t^x} \right) = \frac{1 - x \ln t}{t^{x+1}} < 0 \text{ pour } t > e^{1/x}.$$

La série  $\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n^x}$  a donc son terme général qui, en valeur absolue, **tend vers 0 en décroissant** à partir du rang  $N_x = E(e^{1/x}) + 1$ .

Elle est donc convergente, et de plus pour  $n \geq N_a = E(e^{1/a}) + 1$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k^x} \right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

Ainsi la convergence est uniforme sur  $[a, +\infty[$ .

On en déduit que  $\alpha$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , de dérivée:

$$\alpha'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}$$

Le lecteur pourra vérifier que  $\alpha$  et  $\zeta$  sont de classe  $C^\infty$ .

b) Pour  $x > 1$ , on peut écrire:

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} - 2^{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \\ &= (1 - 2^{1-x}) \zeta(x).\end{aligned}$$

Quand  $x$  tend vers 1 par valeurs supérieures,

$$\alpha(x) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \quad \text{et} \quad 1 - 2^{1-x} = 1 - e^{(1-x)\ln 2} \sim (x-1) \ln 2, \text{ donc}$$

$$\boxed{\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}}$$

**Remarque:** on peut aussi montrer cette équivalence par encadrement de  $\zeta(x)$  à l'aide d'intégrales.

c) On va grouper les termes de  $\alpha(x)$  deux par deux, ce qui est possible sans changer la somme **puisque le terme général tend vers 0**.

$$\frac{1}{(2n+1)^x} - \frac{1}{(2n+2)^x} = \int_{2n+1}^{2n+2} \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{t^x} \right) dt = x \int_{2n+1}^{2n+2} \frac{dt}{t^{x+1}}$$

$$\text{On en déduit l'encadrement} \quad \frac{x}{(2n+2)^{x+1}} \leq \frac{1}{(2n+1)^x} - \frac{1}{(2n+2)^x} \leq \frac{x}{(2n+1)^{x+1}},$$

$$\text{d'où par sommation} \quad x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)^{x+1}} \leq \alpha(x) \leq x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{x+1}}.$$

$$\text{Mais} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{x+1}} = \zeta(x+1) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)^{x+1}} = (1 - 2^{-x-1}) \zeta(x+1), \text{ et}$$

finalement:

$$x 2^{-x-1} \zeta(x+1) \leq \alpha(x) \leq x (1 - 2^{-x-1}) \zeta(x+1).$$

$$\text{Comme} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \zeta(x+1) = 1 \text{ d'après b) et } \lim_{x \rightarrow 0} (2^{-x-1}) = \frac{1}{2},$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \alpha(x) = \frac{1}{2}}$$

$$\text{d) Ecrivons } \alpha(x) = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(2p-1)^x} + \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p)^x} \right)$$

Pour  $x > 0$ , la fonction  $u \in \mathbb{R}^{++} \mapsto u^{-x}$  est convexe (sa dérivée seconde est  $\geq 0$ ).

Ainsi tous les termes de la série sont  $> 0$ , et alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}^{++}$ ,  $\alpha(x) > \frac{1}{2}$ .

D'autre part, d'après la règle spéciale des séries alternées,  $\alpha(x)$  est inférieur au premier terme de la série qui est 1.

On a donc bien pour tout  $x \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\frac{1}{2} < \alpha(x) < 1$ .

#### B-4 Séries de Dirichlet:

a) On écrit  $\frac{a_n}{n^z} = \frac{a_n}{n^b} \cdot \frac{1}{n^{z-b}}$ .

Posons  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{k^b}$  de sorte que  $\frac{a_n}{n^b} = R_{n-1} - R_n$ .

Nous pouvons alors transformer un paquet de Cauchy

$$\begin{aligned} S_{n,p}(z) &= \sum_{k=n+1}^{n+p} (R_{k-1} - R_k) \frac{1}{k^{z-b}} \\ &= \frac{R_n}{(n+1)^{z-b}} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} R_k \left( \frac{1}{k^{z-b}} - \frac{1}{(k+1)^{z-b}} \right) - \frac{R_{n+p}}{(n+p)^{z-b}}. \end{aligned}$$

En posant  $z = b + \alpha + iy$  avec  $\alpha$  réel  $> 0$ , et en utilisant  $|n^{z-b}| = n^\alpha$ , on obtient:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{k^{z-b}} - \frac{1}{(k+1)^{z-b}} \right| &= \left| \int_k^{k+1} \frac{z-b}{t^{z-b+1}} dt \right| \\ &\leq \int_k^{k+1} \left| \frac{z-b}{t^{z-b+1}} \right| dt = \int_k^{k+1} \frac{|z-b|}{t^{\alpha+1}} dt \\ &\leq \frac{|z-b|}{\alpha} \left( \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right). \end{aligned}$$

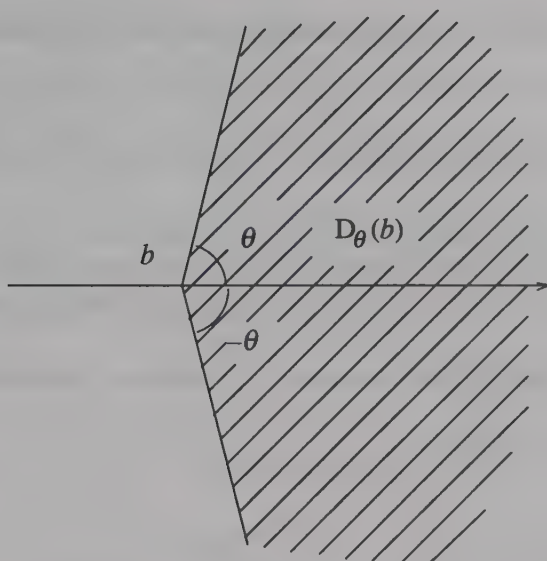
En considérant  $\varepsilon_n = \sup_{k \geq n} |R_k|$ , on obtient les majorations:

$$|S_{n,p}(z)| \leq \varepsilon_n \left( \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \frac{|z-b|}{\alpha} \left( \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) + \frac{1}{(n+p)^\alpha} \right)$$

Dans  $D_\theta(b)$ , on peut majorer  $\frac{|z-b|}{\alpha} \leq \frac{1}{\cos \theta}$ , donc:

$$\begin{aligned} |S_{n,p}(z)| &\leq \varepsilon_n \left( \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{\cos \theta} \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \left( \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) + \frac{1}{(n+p)^\alpha} \right) \\ &\leq \varepsilon_n \left( \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{(n+p)^\alpha} \right) + \frac{1}{(n+p)^\alpha} \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon_n}{(n+1)^\alpha} \left( 2 + \frac{1}{\cos \theta} \right). \end{aligned}$$

La série est donc uniformément de Cauchy dans  $D_\theta(b)$  donc y est uniformément convergente (voir le dessin page ci-contre).



b) Nous venons de voir que si pour un certain complexe  $b$ ,  $\sum u_n(b)$  est convergente, alors  $\sum u_n(z)$  converge pour tout  $z$  du demi-plan ouvert :

$$D(b) = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(b)\} \text{ puisque } D(b) \subset \bigcup_{\theta \in ]0, \pi/2[} D_\theta(b).$$

Si  $\sum u_n(z)$  diverge pour tout  $z$ , on a  $\sigma = +\infty$ , et si  $\sum u_n(z)$  converge pour tout  $z$ ,  $\sigma = -\infty$ .

Dans les autres cas, posons  $\sigma = \inf \{\operatorname{Re}(z); \sum u_n(z) \text{ converge}\}$ .

Par définition de la borne inférieure, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $z_0$  tel que  $\sigma \leq \operatorname{Re}(z_0) < \sigma + \varepsilon$  et alors d'après la remarque préliminaire,  $\sum u_n(z)$  converge dans le demi-plan  $D(z_0)$ . Finalement, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\sum u_n(z)$  converge dans le demi-plan  $D(\sigma + \varepsilon)$ . On en déduit la convergence dans tout le demi-plan  $D(\sigma)$ , et c'est la propriété i).

Mais si pour un  $z$  de  $\mathbb{C}$ ,  $\sum u_n(z)$  converge, on a  $\operatorname{Re}(z) \geq \sigma$  d'après la définition de  $\sigma$  et c'est la contraposée de la propriété ii).

c) Soit  $z_0 \in D(\sigma_c(a))$ .

Prenons  $\alpha = \frac{\operatorname{Re}(z_0) + \sigma_c(a)}{2}$  si  $\sigma_c(a) > -\infty$  et  $\alpha = \operatorname{Re}(z_0) - 1$  si  $\sigma_c(a) = -\infty$ .

Prenons par ailleurs  $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} |\operatorname{Arg}(z_0 - \alpha)|$  (où les arguments sont pris dans  $]-\pi, \pi[$ ),

de telle sorte que  $z_0$  soit à l'intérieur de  $D_\theta(\alpha)$ .

D'après a), il y a convergence uniforme de la série  $\sum u_n(z)$  dans  $D_\theta(\alpha)$  et la somme est continue comme chaque  $u_n(z)$  au point  $z_0$ . Finalement  $f$  est continue dans  $D(\sigma_c(a))$ .

d) La convergence absolue implique la convergence, ce qui prouve l'inégalité  $\sigma_c(a) \leq \sigma_c(|a|)$ .

Mais si nous posons  $\sigma = \sigma_c(a)$ , et choisissons  $\alpha > \sigma + 1$ , *il existe*  $\beta > 0$  tel que  $\alpha = \sigma + 1 + 2\beta$ , de telle sorte que  $\frac{|a_n|}{n^\alpha} = \left| \frac{a_n}{n^{\sigma+\beta}} \right| \cdot \frac{1}{n^{1+\beta}} = o\left(\frac{1}{n^{1+\beta}}\right)$ , puisque  $\sum \frac{a_n}{n^{\sigma+\beta}}$  est convergente. On en déduit la convergence de  $\sum \frac{|a_n|}{n^\alpha}$  pour tout  $\alpha > \sigma + 1$ , donc l'inégalité  $\sigma_c(|a|) \leq \sigma_c(a) + 1$ .

Pour avoir l'égalité  $\sigma_c(a) = \sigma_c(|a|)$ , il suffit de choisir *une suite*  $(a_n)$  *réelle positive*, et pour avoir  $\sigma_c(|a|) = \sigma_c(a) + 1$ , on peut considérer l'exemple de la fonction de Riemann  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^z}$  étudiée dans l'exercice B-3, (dans le cas particulier  $z \in \mathbb{R}$ ) pour laquelle  $\sigma_c(a) = 0$  et  $\sigma_c(|a|) = 1$ .

### B-5 La fonction de Weierstrass:

a) Puisque  $|2^{-n} \cos(\pi b^n x)| \leq 2^{-n}$  pour tout  $x$  réel, il y a *convergence normale sur*  $\mathbb{R}$ , et comme les termes de la série sont tous continus,  $f$  est continue.

b) Par  $\pi$ -périodicité, il suffit de se placer sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

$$|\cos(-y + \pi) - \cos y| = 2 |\cos y| = 2 \cos y$$

$$|\cos(-y + \frac{\pi}{2}) - \cos y| = |\sin y - \cos y|$$

$$2 \cos y \geq \sin y - \cos y \geq 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} \tan y \leq 3 \\ \frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \frac{\pi}{4} \leq y \leq \text{Arctan } 3,$$

on a alors  $g(y) = 2 \cos y$ .

$$2 \cos y \geq \cos y - \sin y \geq 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} \tan y \geq -1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad \text{soit} \quad -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4},$$

on a encore  $g(y) = 2 \cos y$ .

Finalement,  $g(y) = 2 \cos y$  pour  $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \text{Arctan } 3$  et sinon

$$g(y) = |\cos y - \sin y| = \sqrt{2} |\cos(y + \frac{\pi}{4})|$$

| y    | $-\pi/2$ | $-\pi/4$            | 0            | $\text{ArcTan } 3$     | $\pi/2$ |
|------|----------|---------------------|--------------|------------------------|---------|
| g(y) | 1        | $\nearrow \sqrt{2}$ | $\nearrow 2$ | $\searrow 2/\sqrt{10}$ | 1       |

$$\text{car } \cos(\text{Arctan } 3) = \frac{1}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Clairement } c = \text{Min } g(y) = \frac{2}{\sqrt{10}}, \text{ et } 12 - 2\left(\frac{\pi}{c} + 1\right) = 12 - \pi\sqrt{10} - 2 > 0,06 > 0.$$

c) Puisque  $b$  est divisible par 4, les termes de rang  $> p$  s'éliminent aussi bien dans  $\alpha_p(x)$  que dans  $\beta_p(x)$ .

$$\alpha_p(x) = b^p \sum_{n=0}^p 2^{-n} [\cos(\pi b^n x + \pi b^{n-p}) - \cos \pi b^n x]$$

$$\beta_p(x) = 2b^p \sum_{n=0}^p 2^{-n} \left[ \cos \left( \pi b^n x + \frac{\pi b^{n-p}}{2} \right) - \cos \pi b^n x \right].$$

Si nous mettons à part les termes jusqu'au rang  $p-1$ ,

$$\left| b^p \sum_{n=0}^{p-1} 2^{-n} [\cos(\pi b^n x + \pi b^{n-p}) - \cos \pi b^n x] \right| \leq b^p \sum_{n=0}^{p-1} 2^{-n} \pi b^{n-p}$$

$$= \pi \sum_{n=0}^{p-1} \left(\frac{b}{2}\right)^n \leq \frac{2\pi}{b-2} \left(\frac{b}{2}\right)^p \quad \text{et de même, en utilisant } |\cos x - \cos y| \leq |x - y|:$$

$$\left| 2b^p \sum_{n=0}^{p-1} 2^{-n} \left[ \cos \left( \pi b^n x + \frac{\pi b^{n-p}}{2} \right) - \cos \pi b^n x \right] \right| \leq \frac{2\pi}{b-2} \left(\frac{b}{2}\right)^p.$$

Or on a  $|\alpha_p(x)| \geq b^p 2^{-p} |\cos(\pi b^p x + \pi) - \cos \pi b^p x| - \frac{2\pi}{b-2} \left(\frac{b}{2}\right)^p$  et,

$$|\beta_p(x)| \geq 2b^p 2^{-p} \left| \cos \left( \pi b^p x + \frac{\pi}{2} \right) - \cos \pi b^p x \right| - \frac{2\pi}{b-2} \left(\frac{b}{2}\right)^p.$$

$$\text{Donc, } \max(|\alpha_p(x)|, |\beta_p(x)|) \geq \left(\frac{b}{2}\right)^p \left( g(-\pi b^p x) - \frac{2\pi}{b-2} \right)$$

$$\geq 2 \left(\frac{b}{2}\right)^p \left( \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{\pi}{b-2} \right)$$

Comme  $b-2 \geq 10 > \pi\sqrt{10}$  puisque  $\pi < \sqrt{10}$ ,  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \max(|\alpha_p(x)|, |\beta_p(x)|) = +\infty$ .

Or si  $f$  était dérivable en  $x$ ,  $\alpha_p(x)$  et  $\beta_p(x)$  convergeraient vers la dérivée au point  $x$ , d'où la conclusion.

## B-6 Procédé de sommation de Riemann:

a) L'application  $\varphi$  étant continue, on a  $\varphi(0) = 1$ . Si  $\psi(x) = \frac{\sin x}{x}$ ,  $\psi$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et en posant  $\psi(0) = 1$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \psi'(x) = 0$  donc  $\psi'(0)$  existe et vaut 0. En effet:

$$\psi'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{x \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2} = o(1).$$

L'application  $\psi$ , donc aussi l'application  $\varphi$ , est alors  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

$\varphi'(x) = 2\psi(x)\psi'(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0$ . L'intégrale est propre en 0.

$$|\varphi'(x)| \leq 2 \frac{x+1}{x^3} \text{ montre la convergence en } +\infty.$$

En développant en série entière, on voit même que  $\psi$ , donc aussi  $\varphi$ , est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Pour  $t = 0$ , il s'agit de la convergence de  $\sum \alpha_n$ .

Pour  $t \neq 0$ ,  $u_n(t) = o\left(\frac{1}{n^2 t^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  à  $t$  fixé puisque  $\lim (\alpha_n) = 0$ , d'où la

**convergence absolue.**

$$\begin{aligned} \text{c) } \sum_{k=n}^N \alpha_k \varphi(kt) &= \sum_{k=n}^N (r_k - r_{k+1}) \varphi(kt) \\ &= r_n \varphi(nt) + \sum_{k=n+1}^N r_k (\varphi(kt) - \varphi((k-1)t)) - r_{N+1} \varphi(Nt). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \varphi(kt) = r_n \varphi(nt) - \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k \int_{(k-1)t}^{kt} \varphi'(u) du$$

$$\text{et } \left| \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \varphi(kt) \right| \leq \varepsilon_n \left( |\varphi(nt)| + \int_n^{+\infty} |\varphi'(u)| du \right) \leq \varepsilon_n \left( 1 + \int_0^{+\infty} |\varphi'(u)| du \right)$$

**La convergence est donc uniforme et  $U$  est continue.**

## B-7 Zéros des fonctions $C^\infty$ :

a) La fonction  $f = f_{a,b}$  est évidemment de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$  et toutes ses dérivées sont nulles hors de  $]a, b[$ .

D'après **une application de l'égalité des accroissements finis**, il suffit donc de démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f^{(n)}(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f^{(n)}(x) = 0$ .

Or, pour  $x$  dans  $]a, b[$ , nous avons  $f^{(n)}(x) = R(x) f(x)$ , où  $R$  est une fonction rationnelle, et il existe un entier  $k$  tel que, pour un certain  $K > 0$ ,

$$f^{(n)}(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{K}{(x-a)^k} \exp\left(-\frac{1}{(b-a)(x-a)}\right) \text{ qui tend vers } 0 \text{ (comparaison de}$$

fonctions puissances et exponentielles).

Le même résultat vaut au point  $b$  à gauche.

b) Si  $\Omega$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ , **il contient une infinité de rationnels.**

L'ensemble des rationnels étant dénombrable, ceux-ci peuvent être rangés en une suite  $(r_n)$ . L'ensemble  $\Omega$  étant ouvert, chaque  $r_n$  est contenu dans un intervalle ouvert  $]a_n, b_n[$  inclus dans  $\Omega$ .

$$\text{On a donc } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ]a_n, b_n[ \subset \Omega.$$

Si on suppose de plus que les intervalles  $]a_n, b_n[$  sont choisis maximaux ( $a_n = \inf \{x \in \mathbb{R} ; [x, r_n] \subset \Omega$ ,  $b_n = \sup \{y \in \mathbb{R} ; [r_n, y] \subset \Omega$  tout  $x$  de  $\Omega$  est contenu dans un intervalle contenu dans  $\Omega$ ).

Cet intervalle contient au moins un rationnel  $r_k$  et  $x \in ]a_k, b_k[$ .

**Conclusion:**  $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ]a_n, b_n[$

c) Pour appliquer le théorème sur les suites de fonctions de classe  $C^\infty$ , il suffit de démontrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum \frac{1}{\alpha_n} f_n^{(k)}(x)$  est **normalement convergente par rapport à  $x$** .

Or pour  $k$  fixé et  $n \geq k$ ,  $\| \frac{1}{\alpha_n} f_n^{(k)} \|_\infty < 2^{-n}$  donc la série  $\sum \frac{1}{\alpha_n} f_n^{(k)}(x)$  est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi  $f$  est de classe  $C^\infty$ . De plus, comme  $f_n$  est positive et s'annule sur  $] -\infty, a_n] \cup [b_n, +\infty[$ , **l'ensemble des zéros de  $f$  est  $\mathbb{R} \setminus \Omega$  c'est à dire  $F$** .

## C - Contexte topologique

### C-1 Suite de rang fini dans $C(K, \mathbb{R})$ :

Pour  $x \in K$  fixé, on peut définir la forme linéaire  $\delta_x$  de  $F$  dans  $\mathbb{R}$  par  $\delta_x(g) = g(x)$ , pour tout  $g$  de  $F$ .

a) Montrons que le dual algébrique  $F^* = \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$  est engendré par la famille  $(\delta_x)_{x \in K}$ . Pour cela posons  $G = \text{vect} \{ \delta_x ; x \in K \}$ .

**L'orthogonal de  $G$  dans  $F$  noté  $G^\circ$**  est l'ensemble des  $f \in F$  tels que pour tout  $x$  de  $G$ ,  $\delta_x(f) = f(x) = 0$ .

On a donc  $G^\circ = \{0\}$ , donc  $G = F^*$  (puisque  $\dim G + \dim G^\circ = \dim F = \dim F^*$ ).

b) On choisit alors  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  dans  $K^p$  tel que  $(\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots, \delta_{x_p})$  soit une base de  $F^*$ , et on note  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$  la base de  $F$  **duale** de  $(\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots, \delta_{x_p})$ .

Par définition même, on a :

$$\forall i, j \in [1, p], \delta_{x_j}(\varphi_i) = \varphi_i(x_j) = \delta_{ij}.$$

c) Pour  $g \in F$ , on peut alors écrire, puisque  $(\delta_{x_j})_{1 \leq j \leq p}$  est duale de  $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq p}$

$$g = \sum_{j=1}^p \delta_{x_j}(g) \varphi_j = \sum_{i=1}^p g(x_i) \varphi_i.$$

Dans  $F$  nous pouvons considérer la norme  $N$  définie par  $N(g) = \max_{1 \leq i \leq p} |g(x_i)|$ .

Alors, pour la suite  $(f_n)$  étudiée,  $f_n = \sum_{i=1}^p f_n(x_i) \varphi_i$ .

Pour tout  $x$ ,  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ , donc, en particulier dans  $\mathbb{R}^p$

$$(f_n(x_1), f_n(x_2), \dots, f_n(x_p)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)),$$

donc  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \sum_{i=1}^p f(x_i) \varphi_i$  est dans  $F$ .

Alors,  $N(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  et comme  $\|f_n - f\| \leq \sum_{i=1}^p |(f_n - f)(x_i)| \|\varphi_i\| \leq C N(f_n - f)$  avec

$$C = \sum_{i=1}^n \|\varphi_i\|, \quad \|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ et la convergence est uniforme.}$$

**Note:** en fait dans  $F$  de dimension  $p$ , les deux normes sont équivalentes.

## C-2 Propriété de Dini généralisée:

a) Supposons que la convergence n'est pas uniforme. On peut écrire:

$$(1) \exists \varepsilon > 0; \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X, \exists m > n; |f_m(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon.$$

De la suite  $(x_n)$  de  $K^{\mathbb{N}}$ , on peut extraire une suite convergente  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de limite  $y$  dans le compact  $K$ .

Comme on a posé  $y_n = x_{\varphi(n)}$  où  $\varphi$  est une injection croissante, dans la propriété (1) le  $m$  relatif à  $(y_n)$  vérifie  $m > \varphi(n) \geq n$ . Ainsi:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m > n; |f_m(y_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

D'après la propriété ii) de l'énoncé, on a alors:

$$\varepsilon \leq |f_m(y_n) - f(y_n)| \leq K |f_n(y_n) - f(y_n)|, \text{ soit:}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(y_n) - f(y_n)| \geq \frac{\varepsilon}{K}$$

b) Ecrivons alors que  $f$  est continue en  $y$ .

$$\forall \alpha > 0, \exists v \in \mathcal{V}(y); \forall z \in K, (z \in v \Rightarrow |f(y) - f(z)| < \alpha).$$

En raison de la convergence simple de  $f_n(y)$  vers  $f(y)$ ,

$$\exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |f_n(y) - f(y)| < \alpha),$$

et en raison de la continuité de  $f_N$ ,

$$\exists v' \in \mathcal{V}(y); \forall z \in K, (z \in v' \Rightarrow |f_N(y) - f_N(z)| < \alpha).$$

Prenons alors  $w = v \cap v'$ ,  $z$  dans  $w$  et  $n \geq N$ , pour avoir:

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f(z)| &\leq K |f_N(z) - f(z)| \\ &\leq K (|f_N(z) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| + |f(y) - f(z)|) \leq 3K \alpha. \end{aligned}$$

Choisissons alors  $\alpha < \frac{\varepsilon}{3K^2}$ .

Comme  $\lim (y_n) = y$ , il existe  $m \geq N$ , tel que  $y_m \in w$ , et alors, pour cet entier  $m$ :

$$\frac{\varepsilon}{K} \leq |f_m(y_m) - f(y_m)| < 3K\alpha, \text{ ce qui contredit } \alpha < \frac{\varepsilon}{3K^2}.$$

La suite  $(f_n)$  converge donc uniformément vers  $f$ .

c) **Application:** si pour tout  $x, f_n(x)$  converge vers  $f(x)$  en croissant, on a pour tout  $i, j$  entiers et pour tout  $x, f_i(x) \leq f_{i+j}(x) \leq f(x)$ , donc  $|f_{i+j}(x) - f(x)| \leq |f_i(x) - f(x)|$ , ce qui est la propriété ii) pour  $K = 1$ .

### C-3 Suites équicontinues:

a) Montrons d'abord que  $f$  est continue et même que  $\{f_n\} \cup \{f\}$  est équicontinu.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0; \forall (x, y) \in K^2, \forall n \in \mathbb{N}, (d(x, y) < \alpha \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(y)\| \leq \varepsilon).$$

En passant alors à la limite simple dans l'inégalité, il vient:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon \text{ dès que } d(x, y) < \alpha.$$

Considérons maintenant le recouvrement  $K = \bigcup_{x \in K} \mathcal{B}(x, \alpha)$ .

**On peut extraire un recouvrement fini** (théorème de Borel Lebesgue):

$$K = \bigcup_{1 \leq i \leq p} \mathcal{B}(x_i, \alpha)$$

On peut alors trouver  $N \in \mathbb{N}$  tel que:

$$n \geq N \Rightarrow \|f_n(x_i) - f(x_i)\| \leq \varepsilon \text{ pour } i = 1, 2, \dots, p.$$

Mais alors pour tout  $x \in K$ , il existe  $i \in [1, p]$  tel que  $x \in \mathcal{B}(x_i, \alpha)$  et donc:

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n(x) - f_n(x_i)\| + \|f_n(x_i) - f(x_i)\| + \|f(x_i) - f(x)\| \leq 3\varepsilon.$$

**La suite  $(f_n)$  converge donc uniformément vers  $f$ .**

b-i) Pour montrer que  $f$  est prolongeable par continuité à  $K = \bar{A}$ , il suffit de démontrer que **pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $A$  convergeant dans  $K$ , alors  $(f(x_n))$  converge.**

Si  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ , en raison de l'équicontinuité,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0; \forall (y, z) \in K^2, \forall m \in \mathbb{N}, (d(y, z) < \alpha \Rightarrow |f_m(y) - f_m(z)| \leq \varepsilon) \text{ et}$$

$$\exists N \in \mathbb{N}; \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, (n \geq N \Rightarrow d(x_{n+p}, x_n) < \alpha),$$

donc pour  $n \geq N, |f_m(x_{n+p}) - f_m(x_n)| \leq \varepsilon$  pour tout  $m$ , et par passage à la limite simple quand  $m \rightarrow \infty, |f(x_{n+p}) - f(x_n)| \leq \varepsilon$ .

**La suite  $f(x_n)$  est donc de Cauchy dans  $\mathbb{C}$  donc est convergente.**

ii) Montrons que  $f$  est équicontinue aux  $f_n$ .

Prenons  $x$  et  $y$  dans  $K$  tels que  $d(x, y) < \alpha$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $x_n$  et  $y_n$  dans  $A$  tels que  $\lim (x_n) = x, \lim (y_n) = y$  et  $d(x_n, y_n) < \alpha$ .

On a donc  $|f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon$  et par passage à la limite  $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ , qui est l'inégalité que l'on voulait.

iii) On peut alors reprendre la démonstration du a), *ou partir du recouvrement*  $K = \bigcup_{x \in A} B(x, \alpha)$ , et on en déduit la convergence uniforme.

**c) Condition nécessaire:**

On suppose que  $F$  est compact. Montrons qu'il est équicontinu.

Pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , du recouvrement  $F \subset \bigcup_{f \in F} B(f, \varepsilon/3)$ , *on peut extraire un recouvrement fini*  $F \subset \bigcup_{1 \leq i \leq p} B(f_i, \varepsilon/3)$ .

Chaque  $f_i$  continue sur un compact est *uniformément continue* et comme il y en a un nombre fini, il existe  $\alpha$  tel que:

$$\forall (x, y) \in K^2, \forall i \in [1, p], (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| \leq \varepsilon/3).$$

Si  $f \in F$ , il existe  $i \in [1, p]$  tel que  $\|f - f_i\| < \varepsilon/3$  et donc pour  $|x - y| < \alpha$ ,

$$|f(x) - f(y)| < |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| < \varepsilon.$$

On a démontré que  $F$  est équicontinue.

**Condition suffisante:**

Considérons la suite  $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$  des éléments de  $A = [a, b] \cap \mathbb{Q}$  *rangés dans un ordre quelconque*.

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $F$ . Comme  $F$  est borné, chaque suite  $(f_n(a_p))_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, donc admet une sous-suite convergente. *Par le procédé diagonal*, on peut alors extraire de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite  $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge simplement sur  $A$  vers une application  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  (*cela parce que  $A$  est dénombrable*).

Il ne reste plus qu'à appliquer la question b) pour conclure: la suite  $(f_{\varphi(n)})$  converge uniformément vers  $f$  élément de  $E$ .

Cela signifie encore que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{\varphi(n)} - f\| = 0$ . *Comme  $F$  est fermé la limite  $f$  est dans  $F$ .*

Ainsi, de toute suite d'éléments de  $F$ , on peut extraire une sous-suite convergeant dans  $F$  et *cela prouve bien que  $F$  est compact*.

**Remarque:** ce résultat serait vrai pour un espace métrique compact  $K$  quelconque, car tout compact contient une partie dénombrable dense.

d) Par définition de la norme  $\|f\|$ , *la suite  $(f_n)$  est équicontinue* puisque pour tout  $x, y$  dans  $E$ ,  $\|f_n(x) - f_n(y)\| = \|f_n(x - y)\| \leq M \|x - y\|$ .

On en déduit d'après b), puisque la suite  $(f_n)$  converge simplement sur une partie dense, qu'elle converge uniformément sur tout compact, en particulier sur la boule fermée unité  $B_f(0, 1)$ , donc que  $\|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

### C-4 Suites de fonctions convexes:

a) Si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $I$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f_n((1-t)x + ty) \leq (1-t)f_n(x) + tf_n(y).$$

Par passage à la limite simple (puisque seuls les trois points  $x$ ,  $y$  et  $(1-t)x + ty$  interviennent), on obtient:

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

qui prouve la convexité de la limite simple  $f$ .

b) Si nous choisissons  $c$  et  $d$  dans  $I$  tels que  $c < a < b < d$ , d'après la propriété de croissance de la pente d'une fonction convexe, nous avons pour tout  $(x, y)$  de  $(a, b)^2$ ,

$$\frac{f_n(c) - f_n(a)}{c - a} \leq \frac{f_n(c) - f_n(x)}{c - x} \leq \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \leq \frac{f_n(y) - f_n(b)}{y - b} \leq \frac{f_n(d) - f_n(b)}{d - b}.$$

Les suites  $\left(\frac{f_n(c) - f_n(a)}{c - a}\right)$  et  $\left(\frac{f_n(d) - f_n(b)}{d - b}\right)$  sont convergentes donc sont majorées. Il

existe donc  $K$  tel que pour tout  $n$  entier,  $\left|\frac{f_n(c) - f_n(a)}{c - a}\right| \leq K$  et  $\left|\frac{f_n(d) - f_n(b)}{d - b}\right| \leq K$ ,

ce qui implique,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\left|\frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}\right| \leq K$ .

Les fonctions  $(f_n)$  (ainsi d'ailleurs que  $f$ ) sont toutes  $K$ -Lipschitziennes.

La suite  $(f_n)$  est équipschitzienne, donc équicontinue.

D'après le *théorème d'Arzela* (exercice C-3a)), *elle est donc uniformément convergente sur  $[a, b]$ .*

c-1) Si  $\varphi$  admettait en  $a$  une dérivée à droite et en  $b$  une dérivée à gauche, on pourrait construire  $\psi$  en *prolongeant  $\varphi$  par les tangentes en  $a$  et  $b$* . Dans le cas général, on garde la même idée mais en prenant des cordes entre des points voisins.

Si  $\varepsilon > 0$  est fixé, il existe  $\alpha > 0$  tel que pour  $x$  dans  $[a, a+\alpha]$ ,  $|\varphi(x) - \varphi(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , et pour  $x$  dans  $[b-\alpha, b]$ ,  $|\varphi(x) - \varphi(b)| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Considérons alors la fonction  $\psi$  définie par:

$$\begin{cases} \text{pour } x \leq a + \alpha & \psi(x) = \varphi(a) + \frac{\varphi(a + \alpha) - \varphi(a)}{\alpha} (x - a) \\ \text{pour } a + \alpha < x < b - \alpha, & \psi(x) = \varphi(x) \\ \text{pour } x \geq b - \alpha, & \psi(x) = \varphi(b) + \frac{\varphi(b) - \varphi(b - \alpha)}{\alpha} (x - b) \end{cases}$$

On vérifiera que cette fonction  $\psi$  est convexe (dérivée à droite croissante).

Pour  $x \in [a, a+\alpha]$ ,  $\psi$  étant affine, *la valeur  $\psi(x)$  est entre  $\psi(a) = \varphi(a)$  et  $\psi(a + \alpha) = \varphi(a + \alpha)$ .*

On a donc  $|\varphi(x) - \psi(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(a)| + |\varphi(a) - \psi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\varphi(a) - \varphi(a + \alpha)| \leq \varepsilon$ .

De même sur  $[b - \alpha, b]$ , alors que sur  $[a + \alpha, b - \alpha]$ ,  $\varphi(x) = \psi(x)$ . En fin de compte, on a bien:

$$\boxed{\sup_{x \in I} |\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon}$$

c-2) On peut trouver  $g_n$  convexe de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $\sup |g_n(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$  définie sur  $[a + \alpha, b - \alpha]$  par  $g_n(x) = f_n(x)$ , et sur les autres intervalles comme  $\psi$  au c-1) mais à partir de  $f_n$ .

Par passage à la limite, la suite  $g_n$  converge simplement sur  $R$  vers la fonction  $g$  définie par:

$$\begin{cases} \text{pour } x \leq a + \alpha & g(x) = f(a) + \frac{f(a + \alpha) - f(a)}{\alpha} (x - a) \\ \text{pour } a + \alpha < x < b - \alpha, & g(x) = f(x) \\ \text{pour } x \geq b - \alpha, & g(x) = f(b) + \frac{f(b) - f(b - \alpha)}{\alpha} (x - b) \end{cases}$$

et on a encore  $\sup |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ .

D'après la question b), la suite  $g_n$  converge uniformément vers  $g$  sur  $[a, b]$ . Donc il existe  $N \in \mathbb{N}$ , tel que pour  $n \geq N$ , on ait  $\sup_{x \in [a, b]} |g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ .

On a alors, pour tout  $x$  de  $[a, b]$ :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - f_n(x)| \leq 3\varepsilon.$$

**Conclusion:** la suite  $f_n$  converge uniformément vers  $f$ .

d) Si  $I$  est un intervalle ouvert, ou un intervalle compact, le résultat est vrai. Si  $I$  est un intervalle semi-ouvert, par exemple de type  $[a, +\infty[$ , il peut s'écrire comme **réunion d'un intervalle compact et d'un intervalle ouvert**, ce qui permet de conclure.

**Remarque:** une fonction convexe peut être discontinue à une extrémité de son intervalle de définition. Dans les énoncés précédents, la continuité des  $(f_n)$  et de  $f$  est indispensable (exemple:  $f_n(x) = x^n$  sur  $[0, 1]$ ).

## C-5 Convergence diagonale:

a) Si  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, (n > N \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/2).$$

Les  $f_n$  étant continues et la convergence uniforme,  $f$  est continue.

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0; \forall y \in X, (d(x, y) < \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon/2).$$

La suite  $(x_n)$  convergeant vers  $x$  dans  $X$ , pour  $\alpha$  défini ci-dessus,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \alpha).$$

Donc avec  $m = \max(N, n_0)$ ,

$$n > m \Rightarrow |f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

$$\text{On a donc bien } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x).$$

Donnons un **contre exemple** en cas de convergence simple mais non uniforme:

Pour  $X = [0, 1]$ ,  $f_n(x) = x^n$  et les suites suivantes  $(x_n)$  de limite 1,  $f_n(x_n)$  a une limite différente:

$$\begin{aligned} x_n &= 1, & f_n(x_n) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \\ x_n &= 1 - \frac{1}{n}, & f_n(x_n) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \\ x_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}, & f_n(x_n) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

b)i) Si on considère *la suite constante égale à  $x$* , elle converge vers  $x$ , donc  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. La suite  $(f_n)$  est donc **simplement convergente**. Appelons  $f$  sa limite.

Si on considère une suite  $(x_n)$  convergeant vers  $x$ , on peut définir une suite  $(y_n)$  en posant  $y_{2n} = x_{2n}$  et  $y_{2n+1} = x$ , et une suite  $(z_n)$  en posant  $z_{2n} = x$  et  $z_{2n+1} = x_{2n+1}$ .

*Elles convergent toutes deux vers  $x$*  et  $f_n(y_n)$  ainsi que  $f_n(z_n)$  sont convergentes.

$$\text{Donc } f_{2n}(x_{2n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \text{ et } f_{2n+1}(x_{2n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x).$$

$$\text{Cela prouve que } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x).$$

ii) Remarquons que si  $\varphi$  est une injection croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  et  $(x_n)$  une suite de  $X^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $x$ , alors la suite  $(f_{\varphi(n)}(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge encore vers  $f(x)$ . Il suffit pour cela de considérer la suite définie par:

$$\text{si } n \notin \varphi(\mathbb{N}), y_n = x$$

$$\text{si } n = \varphi(m), y_n = x_m \text{ de sorte que } f_n(y_n) = f_{\varphi(m)}(x_m), \text{ ce qui montre que } (f_{\varphi(m)}(x_m)) \text{ est une sous-suite de } (f_n(y_n)).$$

iii) Montrons maintenant que  **$f$  est continue**.

Si l'en est pas ainsi il existe  $x \in X$ ,  $\varepsilon > 0$  et une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $x$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$ .

Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} (f_m(x_n)) = f(x_n)$  et il existe  $\varphi(n) \in \mathbb{N}$  tel que

$$\varphi(n) > \varphi(n-1) \text{ et } |f_{\varphi(n)}(x_n) - f(x_n)| < \varepsilon/2, \text{ de sorte que } |f_{\varphi(n)}(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon/2.$$

Cela contredit la remarque du ii). Ainsi  $f$  est continue.

iv) Supposons que  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $f$ :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \geq n, \exists x \in X; |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

On peut ainsi définir par récurrence une suite  $(x_n)$  et une injection croissante  $\varphi$  de telle sorte que  $|f_{\varphi(n)}(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$ .

De la suite  $(x_n)$  dans le compact  $X$ , on peut extraire une sous-suite  $(y_n)$  convergeant vers un  $y \in X$ , et il existe une injection croissante  $\psi$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que

$$|f_{\psi(n)}(y_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Mais d'après ii) et iii),  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\psi(n)}(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(y)$  et *on aboutit à une contradiction.*

### C-6 Extension d'une fonction continue sur un fermé:

a) Pour un fermé  $F$  de  $E$ , on sait que  $(d(x, F) = 0) \Leftrightarrow x \in F$ .

L'application  $f_{A,B}$  est donc définie sur  $E$  puisque son dénominateur ne s'annule pas:  $d(x, A) + d(x, B) = 0 \Rightarrow x \in A \cap B$  impossible.

Elle est continue comme *quotient d'applications continues*, et pour tout  $x$  de  $F$ ,  $0 \leq f_{A,B}(x) \leq 1$  puisque  $d(x, A)$  et  $d(x, B)$  sont positifs.

De plus:  $f_{A,B}(x) = 0 \Leftrightarrow d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$

$$f_{A,B}(x) = 1 \Leftrightarrow d(x, B) = 0 \Leftrightarrow x \in B.$$

b-1) Les ensembles  $B_0 = \{x \in F; f(x) \geq \frac{2}{3}\}$  et  $A_0 = \{x \in F; f(x) \leq \frac{1}{3}\}$  sont des fermés de  $F$  pour la topologie induite, donc sont des fermés de  $E$ , et sont bien sûr disjoints.

On pose alors  $f_1 = \frac{1}{3} f_{A_0, B_0}$  (notation du a)) qui vérifie les conditions de l'énoncé.

De plus, si  $x$  est un élément de  $F$ ,  $g_1(x)$  est  $\geq 0$  car  $f_1(x) \leq f(x)$  dans tous les cas et,

$$\text{si } f(x) \geq \frac{2}{3}, \text{ on a } f_1(x) = \frac{1}{3} \text{ donc } g_1(x) \leq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\text{si } f(x) \leq \frac{2}{3}, \text{ on a } f_1(x) \geq 0 \text{ donc } g_1(x) \leq \frac{2}{3}.$$

b-2) *On itère le procédé mis au point en b-1).* Si on suppose  $(f_n)$  et  $(g_n)$  définies jusqu'au rang  $N \geq 1$ , on définit  $A_N = \{x \in F; g_N(x) \leq \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^N\}$  et

$$B_N = \{x \in F; g_N(x) \geq \frac{2}{3} (\frac{2}{3})^N\},$$

qui sont des fermés disjoints de  $F$  donc de  $E$ , et on pose  $f_{N+1} = \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^N f_{A_N, B_N}$  (notation de la question a)).

Cette fonction est continue sur  $E$ , à valeurs dans  $\left[0, \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^N\right]$ , et  $f_{N+1}(x)$  vaut  $\frac{1}{3} (\frac{2}{3})^N$  pour  $x \in F$  et  $g_N(x) \geq \frac{2}{3} (\frac{2}{3})^N$  et vaut 0 pour  $x \in F$  et  $g_N(x) \leq \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^N$ .

Posant alors  $g_{N+1}(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{N+1} f_k(x)$  pour  $x \in F$ , il reste à vérifier que  $g_{N+1}$  est à valeurs dans  $\left[0, \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1}\right]$ .

Comme  $g_{N+1} = g_N - f_{N+1}$ ,

si  $g_N(x) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1}$ , on a  $g_{N+1}(x) \in \left[0, \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1}\right]$  puisque  $0 \leq f_{N+1}(x) \leq g_N(x)$ , et

si  $g_N(x) \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^N$ ,  $f_{N+1}(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^N$  donc  $g_{N+1}(x) \in \left[0, \left(\frac{2}{3}\right)^{N+1}\right]$ , puisque  $g_N(x) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^N$ .

b-3) Puisque  $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ , la série définissant  $\hat{f}$  converge normalement

sur  $E$  et y définit une fonction continue à valeurs dans  $[0, 1]$  (car  $\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1$ ).

De plus pour  $x \in F$ ,  $\left|f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ , et par passage à la limite,  $\hat{f}(x) = f(x)$ .

c) Si  $g$  est une application de  $F$  dans  $\mathbb{R}$ , on considère l'application  $f$  de  $F$  dans  $]0, 1[$  définie par  $\forall x \in F$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(g(x))$ .

D'après b) il existe  $\hat{f} : E \rightarrow [0, 1]$  continue et prolongeant  $f$ .

Regardons à quelle condition  $\hat{f}(x) \in \{0, 1\}$ :

$$\hat{f}(x) = 0 \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = 0) \Rightarrow f_1(x) = 0 \Rightarrow (x \in F \text{ et } f(x) \leq \frac{1}{3})$$

$$\hat{f}(x) = 1 \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}) \Rightarrow f_1(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow (x \in F \text{ et } f(x) \geq \frac{2}{3}).$$

Dans les deux cas, on a nécessairement  $x$  dans  $F$ , et alors  $f(x) = \hat{f}(x)$ .

Comme  $f$  est ici à valeurs dans  $]0, 1[$ , il en est de même de  $\hat{f}$  et on peut définir  $\hat{g}(x) = \tan\left(\pi \left(\hat{f}(x) - \frac{1}{2}\right)\right)$  application continue de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  et prolongeant  $g$ .

## C-7 Une caractérisation des espaces compacts:

a) Si  $E$  est non compact, on peut trouver dans  $E^{\mathbb{N}}$  une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sans valeur d'adhérence. On pose  $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$  et on se propose de montrer que  $A$  est fermé.

Soit  $x \notin A$ ,  $x$  n'est pas valeur d'adhérence de  $(a_n)$  donc:

$$\exists \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow d(u_n, x) \geq \varepsilon.$$

Si l'on pose  $\alpha = \min(d(u_0, x), d(u_1, x), \dots, d(u_N, x), \varepsilon)$ , on obtient  $\mathcal{B}(x, \alpha) \cap A = \emptyset$ .

Ainsi,  $E \setminus A$  est ouvert donc  $A$  est fermé.

De plus, *les points de A sont isolés*, car tout point d'accumulation de A serait valeur d'adhérence de la suite, donc *toute application de A dans  $\mathbb{R}$  est continue*.

On peut prendre par exemple  $f(a_n) = n$  pour avoir une application non bornée.

b) Le lemme d'extension de Tietze permet de construire une application  $\hat{f}$  continue de E dans  $\mathbb{R}$  prolongeant f.

*Cette application n'est pas bornée* puisque f ne l'est pas.

La condition suffisante en découle immédiatement par contraposition.

## D - Approximation des fonctions continues

### D-1 Approximations de $|x|$ :

a) Si la suite  $(P_n(x))$  a une limite, elle vérifie:

$$f(x) = f(x) + \frac{1}{2} (x - f(x)^2) \text{ soit } f(x)^2 = x.$$

Etudions le signe de  $\sqrt{x} - P_n(x)$ .

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = [\sqrt{x} - P_n(x)] \left(1 - \frac{1}{2} (\sqrt{x} + P_n(x))\right).$$

Si nous supposons  $\sqrt{x} - P_n(x) \geq 0$ ,  $\frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2} \leq \sqrt{x} \leq 1$  donc  $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) > 0$ .

On en déduit aussi, par récurrence,

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{x}\right)^n$$

Il en découle que  $P_n(x)$  converge simplement vers  $\sqrt{x}$  sur  $[0, 1]$ .

De plus, si  $\varphi(t) = t \left(1 - \frac{t}{2}\right)^n$ ,  $\varphi'(t) = \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{n-1} \left[1 - \frac{t}{2} - \frac{n}{2}t\right]$ .

$\varphi$  est donc maximum pour  $t = \frac{2}{n+1}$  et le maximum vaut donc:

$$\varphi\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \sim \frac{2}{e n}.$$

La suite  $\sqrt{x} - P_n(x)$  converge donc uniformément vers 0 sur  $[0, 1]$ , et *la suite  $P_n(x^2)$  converge uniformément vers  $|x|$  sur  $[-1, 1]$ .*

b) La série de Fourier de g est  $\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cos(2n+1)x}{\pi(2n+1)^2}$ .

La fonction g étant continue et  $C^1$  par morceaux, sa série de Fourier converge normalement vers g.

Pour  $\varepsilon$  positif, il existe donc une somme partielle  $g_n$  telle que  $\|g_n - g\| < \varepsilon/2$ .  
(on a défini la norme par  $\|\varphi\| = \sup_{x \in [-1,1]} |\varphi(x)|$ ).

Comme  $g_n$  est développable en série entière de rayon de convergence infini, il existe un polynôme de Taylor  $G_\varepsilon$  de  $g_n$  tel que  $\|g_n - G_\varepsilon\| < \varepsilon/2$  soit  $\|G_\varepsilon - f\| < \varepsilon$ .

La suite de polynômes  $G_{1/n}$  répond alors à la question.

$$c) \text{ La série de Taylor de } g \text{ est } \sum (-1)^n \frac{1.3..2n-3}{2.4..2n-2} \frac{x^n}{2n}.$$

D'après la formule de Wallis (ou à l'aide de la formule de Stirling), on en déduit que:

$$\frac{1.3..2n-3}{2.4..2n-2} \frac{1}{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

La série de Taylor est donc normalement convergente sur  $[-1, 1]$  vers  $g$ .

Mais  $f(x) = |x| = \sqrt{x^2} = g(x^2 - 1)$ .

Si  $P_n$  est la suite des polynômes de Taylor de  $g$ , la suite  $P_n(x^2 - 1)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[-1, 1]$ .

## D-2 Approximation par des fonctions polynômes:

a) L'application  $f$ , continue sur le compact  $[0, 1]$  est **uniformément continue**, ce qui implique:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0; \forall (x, y) \in [0, 1]^2, (|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2).$$

Prenons  $N \geq 1/\alpha$  et considérons une subdivision  $(x_0, x_1, \dots, x_N)$  de  $[0, 1]$  en sous intervalles de même longueur en posant  $x_n = \frac{n}{N}$ .

On peut considérer la fonction  $g$  continue affine par morceaux **dont les noeuds sont les points  $(x_i, f(x_i))$** .

Ainsi pour  $i \in [1, N]$  et  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ,

$$g(x) = f(x_i) + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (f(x_i) - f(x_{i-1})),$$

ce qui implique en particulier que:

$$|g(x) - f(x_i)| \leq |f(x_i) - f(x_{i-1})| \quad \text{puis que}$$

$$|g(x) - f(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_{i-1}) - f(x_i)| \leq \varepsilon.$$

b) L'application  $\varphi_a$  est continue et affine par morceaux. Il en est de même de toute combinaison linéaire  $\sum_{i \in I} \lambda_i \varphi_{a_i}$ .

**Réciproquement**, si  $g$  est une application continue affine par morceaux non dérivable aux points  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  avec  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < 1$ , posons  $a_0 = 0, a_n = 1$

et montrons qu'il existe  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$  tels que  $g = \sum_{i=0}^n \lambda_i \varphi_{a_i}$ .

Les deux applications étant continues affines par morceaux de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{C}$ , elles coïncident ssi elles ont les mêmes nœuds, ou encore, puisqu'elles sont associées à la même subdivision, si elles ont *la même valeur initiale et la même dérivée sur les intervalles de la subdivision*.

On obtient donc le système:

$$\begin{cases} \lambda_0 - \lambda_1 \dots\dots\dots - \lambda_n = \frac{g(a_1) - g(a_0)}{a_1 - a_0} \\ \lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_2 \dots\dots - \lambda_n = \frac{g(a_2) - g(a_1)}{a_2 - a_1} \\ \lambda_0 + \lambda_1 \dots + \lambda_{n-1} - \lambda_n = \frac{g(a_n) - g(a_{n-1})}{a_n - a_{n-1}} \\ a_1 \lambda_1 + \dots\dots\dots + a_n \lambda_n = g(0) \end{cases}$$

Calculons son déterminant:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & . & . & . & -1 \\ 1 & 1 & -1 & . & . & -1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & 1 & -1 \\ 0 & a_1 & . & . & a_{n-1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 2 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 2 & . & . & 2 & 0 \\ 0 & a_1 & . & . & a_{n-1} & 1 \end{vmatrix} = 2^{n-1}$$

(On a additionné la première colonne à toutes les autres).

Le système est **un système de Cramer** donc admet une solution (unique d'ailleurs), ce qui prouve le résultat cherché.

c) On a vu dans l'exercice D-1, qu'il existait une suite de polynômes  $(P_n)$  convergeant uniformément sur  $[-1, 1]$  vers la fonction  $x \mapsto |x|$ . **Donc pour  $a \in [0, 1]$ ,  $(P_n(x - a))$  converge uniformément vers  $|x - a|$  sur  $[0, 1]$ .**

Soit  $f \in E$ . Il existe  $g$  continue affine par morceaux telle que  $\|f - g\| \leq \varepsilon/2$ . D'après b) il existe  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$  et  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_m = 1$  tels que  $g = \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_{a_i}$ .

La suite  $Q_n(x) = \sum_{i=0}^m \lambda_i P_n(x - a_i)$  converge uniformément vers  $g$ , donc il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\|g - Q_N\| \leq \varepsilon/2$ . On a bien alors  $\|f - Q_N\| < \varepsilon$ .

d) Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une application continue de  $K$  dans  $\mathbb{C}$ . Il existe un segment  $[a, b]$  tel que  $K \subset [a, b]$ .

Par application de l'exercice C-6 (*lemme de Tietze*) il existe une application  $\hat{f}$  de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{C}$  continue et prolongeant  $f$  (on applique le C-6-c) à la partie réelle et à la partie imaginaire de  $f$ ). Définissons alors une application  $g$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{C}$  par:

$$t \in [0, 1], g(t) = \hat{f}((1 - t)a + tb).$$

D'après la question c) appliquée aux valeurs successives  $\varepsilon = 1, \varepsilon = \frac{1}{2}, \dots, \varepsilon = \frac{1}{n+1}, \dots$ , il existe une suite de polynômes  $\phi_n$  telle que  $\sup_{t \in [0,1]} |\phi_n(t) - g(t)| \leq \frac{1}{n+1}$ .

**Posons alors**  $H_n(x) = \phi_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ , pour  $x \in [a, b]$ , de telle sorte que:

$$\phi_n(t) = H_n(1-t)a + tb \text{ pour } t \in [0, 1], \quad \text{pour avoir:}$$

$$\sup_{x \in [a,b]} |H_n(x) - \hat{f}(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

**La suite de polynômes  $(H_n)$  converge uniformément sur  $K$  vers  $f$ .**

### D-3 Approximation par convolution:

a) Puisque  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t) dt = \int_{-1}^1 \varphi_n(t) dt = 1$ , on peut écrire:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-1}^1 (f(x-t) - f(x)) \varphi_n(t) dt \right|.$$

**Raisonnons d'abord à  $x$  fixé.**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in ]0, 1[; \forall t \in \mathbb{R} (|t| \leq \delta \Rightarrow |f(x-t) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}).$$

$$\text{On en déduit } \left| \int_{-\delta}^{\delta} (f(x-t) - f(x)) \varphi_n(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Maintenant que  $\delta$  est fixé (en fonction de  $\varepsilon$ ),

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_{-1}^{-\delta} |f(x-t) - f(x)| \varphi_n(t) dt + \int_{\delta}^1 |f(x-t) - f(x)| \varphi_n(t) dt \\ &\leq \sup_{|t| \geq \delta} \varphi_n(t) \cdot 4 \sup_{t \in [-1,1]} |f(x-t)| = 4 M_x \sup_{|t| \geq \delta} \varphi_n(t). \end{aligned}$$

D'après la condition iii) pour  $n \geq N$ ,  $A(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et donc  $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ .

Si maintenant **on fait varier  $x$  mais en le limitant à un compact  $K$** , posons  $a = \inf(K) - 1$  et  $b = \sup(K) + 1$ . La fonction  $f$  est **uniformément continue** sur  $[a, b]$ , donc  $\delta$  est **indépendant de  $x$** , et bornée sur  $[a, b]$  donc  $M_x$  est **indépendant de  $x$** .

L'indice  $N$  **ne dépend donc que de  $\varepsilon$**  (et pas de  $x$ ) et la convergence est uniforme sur  $K$ .

$$\text{b) Prenons } x \in ]a, b[. \text{ Alors } f_n(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t) \varphi_n(x-t) dt = \int_{a-1}^{b+1} f(t) \varphi_n(x-t) dt.$$

Comme  $\frac{\partial^k}{\partial x^k} \varphi_n(x-t) = \varphi_n^{(k)}(x-t)$ , l'application  $(x, t) \mapsto (f(t) \varphi_n^{(k)}(x-t))$  est continue sur  $]a, b[ \times [a-1, b+1]$ , et le théorème de dérivation des intégrales à paramètre montre que  $f_n$  est de classe  $C^k$  avec

$$f_n^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi_n^{(k)}(x-t) dt$$

c) L'application  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

Pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $g^{(k)}(x) = R(x) e^{1/x^2-1} = R(x) e^{1/(x-1)(x+1)}$  où  $R$  est une fonction rationnelle avec les pôles  $-1$  et  $1$ . On en déduit par comparaison de fonctions puissance et exponentielle que:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g^{(k)}(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g^{(k)}(x) = 0.$$

Ainsi, par un corollaire du théorème des accroissements finis ("dérivée des fonctions prolongées")  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

Pour  $n \geq 1$ ,  $\varphi_n$  est nulle hors de  $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$  ce qui prouve à la fois i) et ii). De plus:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) dx = \frac{n}{a} \int_{-1/n}^{1/n} g(nx) dx = \frac{1}{a} \int_{-1}^1 g(u) du = 1.$$

Ainsi, en choisissant cette suite  $(\varphi_n)$ , d'après a),  $f$  est limite de la suite  $(f_n)$  d'application de classe  $C^\infty$ , la convergence étant uniforme sur tout compact de  $\mathbb{R}$ .

#### D-4 Le théorème de Weierstrass par la méthode de Landau:

a) La suite  $(\varphi_n)$  satisfait aux conditions posées dans l'exercice D-3 car comme  $a_n = 2 \int_0^1 (1-x^2)^n dx \geq 2 \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{2}{n+1}$ , la condition iii) est vérifiée puisque  $\sup_{|x| \geq \delta} \varphi_n(x) \leq \frac{(n+1)}{2} (1-\delta^2)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , les deux autres étant immédiates.

Comme la fonction  $f$  est nulle hors du compact  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ .

b) Mais on peut écrire aussi:

$$f_n(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t) \varphi_n(x-t) dt \quad \text{et pour } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

comme  $x-t$  est dans  $[-1, 1]$  pour  $t$  dans  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} f(t) \frac{(1-(x-t)^2)^n}{a_n} dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{f(t)}{a_n} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k (x-t)^{2k} dt \\ &= \frac{1}{a_n} \sum_{i=0}^{2k} C_n^k C_{2k}^i (-1)^{k-i} \left( \int_{-1/2}^{1/2} f(t) t^{2k-i} dt \right) x^i \end{aligned}$$

est une fonction polynôme de  $x$ .

Donc sur l'intervalle  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  la suite  $(f_n)$  est une suite de polynômes convergeant uniformément vers  $f$ .

Considérons maintenant une application  $g$  continue sur un segment  $[a, b]$ . Définissons alors  $f$  par:

$$\text{pour } x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right], \quad f(x) = g\left(\frac{a+b}{2} + 2x(b-a)\right)$$

$$\text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad f(x) = 0$$

$$\text{pour } x \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right], \quad f(x) = (4x+2)g(a)$$

$$\text{pour } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \quad f(x) = (2-4x)g(b)$$

de sorte que  $f$  est continue et que pour  $t \in [a, b]$   $g(t) = f\left(\frac{2t-a-b}{4(b-a)}\right)$ .

En appliquant le a), la suite de polynômes  $(g_n)$  définie par  $g_n(t) = f_n\left(\frac{2t-a-b}{4(b-a)}\right)$  converge uniformément vers la fonction  $g$  sur le segment  $[a, b]$ .

c) On peut définir la suite  $(P_n)$  en appliquant le b) de la manière suivante:

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un polynôme  $P_n$  tel que  $\sup_{x \in [-n, n]} |P_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ .

Pour  $x$  fixé et  $N = E(|x|) + 1$ , pour  $n \geq N$ , on a  $|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n+1}$  **ce qui montre la convergence simple de  $P_n$  vers  $f$ .**

Si  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}$ , il existe  $N$  entier tel que  $K \subset [-N, N]$  et pour  $n \geq N$ ,  $\sup_{x \in K} |P_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ , **ce qui prouve la convergence uniforme sur  $K$ .**

Si une suite de polynômes  $(P_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , la suite  $(P_{n+1} - P_n)$  converge uniformément vers 0 (critère de Cauchy), donc à partir d'un certain rang  $(P_{n+1} - P_n)$  est borné sur  $\mathbb{R}$  donc **est un polynôme de degré 0.**

Il existe donc une suite  $(\alpha_n)$  convergente telle que pour  $n \geq N$ ,  $P_n = P_N + \alpha_n$  et si on pose  $\lim (\alpha_n) = \alpha$ ,  $f = P_N + \alpha$ .

**Ainsi  $f$  est une fonction polynôme.**

## D-5 Approximation de Laguerre:

a) La fonction  $|f_N|$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et vérifie  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f_N(x)| = 0 = |f_N(0)|$ , donc **a un maximum strictement positif atteint en un  $x_N > 0$ .**

$$f_N'(x) = -2e^{-2x} + 2e^{-x} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-x)^k}{k!} + e^{-x} \frac{(-x)^N}{N!} = -2f_N(x) - e^{-x} \frac{(-x)^N}{N!}, \text{ donc}$$

comme  $f_N'(x_N) = 0$ ,

$$f_N(x_N) = -\frac{e^{-x_N}}{2} \frac{(-x_N)^N}{N!} = \frac{(-1)^{N+1}}{2} e^{-x_N} \frac{(x_N)^N}{N!}.$$

La fonction  $x \mapsto e^{-x} x^N$  a un maximum atteint pour  $x = N$ , donc:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, e^{-x} x^N \leq e^{-N} N^N.$$

D'après la formule de Stirling, la suite  $\frac{e^{-N} N^N \sqrt{N}}{N!}$  tend vers  $\sqrt{2\pi}$  donc est bornée

par un réel  $K > 0$ . On a alors  $\forall N \in \mathbb{N}^*, |f_N(x_N)| \leq \frac{e^{-N} N^N}{2N!} \leq \frac{K}{\sqrt{N}}$ .

b-1) Pour la propriété  $(\mathcal{P}_1)$ , on prend  $P = 1$  et pour  $(\mathcal{P}_2)$  un entier  $N$  tel que  $\frac{K}{\sqrt{N}} \leq \varepsilon$

$$\text{puis } P(x) = \sum_{k=0}^N \frac{(-\alpha x)^k}{k!}.$$

$$\text{On a bien } \sup_{x \in [0, +\infty[} |e^{-2\alpha x} - e^{-\alpha x} P(x)| \leq \frac{K}{\sqrt{N}} \leq \varepsilon \text{ d'après a).}$$

b-2) On prend  $\alpha = \frac{n+1}{2}$  et on applique  $(\mathcal{P}_2)$  pour la valeur  $\frac{\varepsilon}{2}$ .

Il existe un polynôme  $Q$  tel que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, |e^{-(n+1)x} - e^{-(n+1)x/2} Q(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

La fonction  $x \mapsto |e^{-x/2} Q(x)|$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$  par un  $A > 0$  et d'après  $(\mathcal{P}_n)$ , il existe un polynôme  $R$  tel que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, |e^{-nx/2} - R(x) e^{-x/2}| \leq \frac{\varepsilon}{2A}, \text{ d'où:}$$

$$|e^{-nx/2} e^{-x/2} Q(x) - R(x) e^{-x/2} e^{-x/2} Q(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2A} |e^{-x/2} Q(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et finalement:}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, |e^{-(n+1)x} - e^{-x} Q(x) R(x)| \leq \varepsilon}$$

b-3) Pour en déduire  $(\mathcal{P}_{n+1})$ , il reste à changer  $x$  en  $\alpha x$ . La propriété  $(\mathcal{P}_n)$  est donc démontrée par récurrence sur  $n$ .

c) Soit  $\phi$  l'application de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par:

$$\phi(0) = 0 \text{ et pour } t \in ]0, 1], \phi(t) = f\left(-\frac{1}{\alpha} \ln t\right).$$

Comme  $\phi$  est continue sur  $[0, 1]$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un polynôme  $P$  tel que

$$\sup_{t \in [0, 1]} |\phi(t) - P(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme  $\phi(0) = 0$ , on a en particulier  $|P(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  d'où

$$\sup_{t \in [0, 1]} |\phi(t) - (P(t) - P(0))| \leq \varepsilon.$$

Le polynôme  $Q_1 = P - P(0)$  s'annule en 0 donc est de valuation  $\geq 1$ . Ainsi:

$$Q_1(X) = P(X) - P(0) = X Q(X).$$

Ecrivons  $Q_1(X) = \sum_{n=1}^k a_n X^n$ . Pour tout  $n \in [1, k]$ , définissons  $\alpha_n = \frac{\varepsilon}{k}$  si  $a_n = 0$  et  $\alpha_n = \frac{\varepsilon}{k |a_n|}$  si  $a_n \neq 0$ .

Il existe un polynôme  $R_n$  tel que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, |e^{-n\alpha x} - e^{-\alpha x} R_n(x)| \leq \alpha_n, \text{ d'où } \left| Q_1(e^{-\alpha x}) - e^{-\alpha x} \sum_{n=1}^k a_n R_n(x) \right| \leq \varepsilon.$$

En posant  $P = \sum_{n=1}^k a_n R_n$ , on a pour tout  $x \geq 0$ :

$$|f(x) - e^{-\alpha x} P(x)| = |\phi(e^{-\alpha x}) - Q_1(e^{-\alpha x}) - e^{-\alpha x} P(x) + Q_1(e^{-\alpha x})| \leq 2\varepsilon.$$

En prenant une suite de polynômes  $(P_n)$  associés aux valeurs successives  $\varepsilon = 1, \varepsilon = \frac{1}{2}, \dots, \varepsilon = \frac{1}{n+1}, \dots$ , on obtient bien une suite de polynômes  $(P_n)$  telle que  $e^{-\alpha x} P_n(x)$  converge uniformément vers  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Remarque:** en raison du théorème de la double limite, la condition  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  était nécessaire pour que  $e^{-\alpha x} P_n(x)$  converge uniformément vers  $f(x)$ , puisque pour tout  $n$  entier,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\alpha x} P_n(x) = 0$ .

## D-6 Approximation par une série entière universelle:

a) Comme  $f(0) = 0$  et que  $f$  est continue, il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que  $\sup_{x \in [0, \alpha]} |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{8}$  ce qui permet de définir une application continue  $\varphi$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  par:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{f(\alpha)}{\alpha^m} & \text{pour } x \in [0, \alpha] \\ \varphi(x) = \frac{f(x)}{x^m} & \text{pour } x \in ]\alpha, 1[. \end{cases}$$

Il existe alors un polynôme  $Q$  de  $\mathbb{R}[X]$  tel que  $\sup_{x \in [0, 1]} |Q(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$

Pour  $x \in [\alpha, 1]$ , on a donc  $|f(x) - Q(x) x^m| \leq \frac{\varepsilon}{4} x^m \leq \frac{\varepsilon}{4}$  et pour  $x \in [0, \alpha]$ ,

$$\begin{aligned} |f(x) - x^m Q(x)| &\leq \left| f(x) - \frac{x^m}{\alpha^m} f(\alpha) \right| + x^m \left| \frac{f(\alpha)}{\alpha^m} - Q(x) \right| \\ &\leq |f(x)| + |f(\alpha)| + \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Finalement } \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - Q(x) x^m| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ecrivons  $Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ . Comme  $\mathbb{Q}^*$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , pour tout  $k \in [0, n]$ , il

existe  $\alpha_k \in \mathbb{Q}^*$  tel que  $|\alpha_k - a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$  de telle sorte que si l'on pose:

$P(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k$ , pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $P$  est non nul et:

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + x^n |P(x) - Q(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=0}^n |a_k - \alpha_k| \leq \varepsilon.$$

b) Remarquons qu'un **produit fini d'ensemble dénombrable** est dénombrable, ainsi qu'une **réunion dénombrable**.

Or,  $\mathbb{Q}_n[X]$  est en bijection avec  $\mathbb{Q}^{n+1}$  et  $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$ , ce qui montre que  $\mathbb{Q}[X]$  est dénombrable et a fortiori l'ensemble  $\mathcal{P}_0$ .

b-1) Supposons  $Q_1 = P_1$ , puis  $Q_2, \dots, Q_{n-1}$  définis et satisfaisant aux conditions ii) et iii) aux rangs  $k = 2, 3, \dots, n-1$ .

Posons  $m = \deg(Q_{n-1}) + 1$ . D'après a) il existe un polynôme  $P$  non nul tel que:

$$\sup_{x \in [0, 1]} \left| \left( P_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} Q_k(x) \right) - x^m P(x) \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Il ne reste plus qu'à poser  $Q_n = x^m P$  pour conclure par récurrence.

b-2) On peut poser pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $Q_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} X^n$ , puis  $a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_n^{(k)}$  sachant d'ailleurs qu'en raison de la condition ii) **pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'un au plus des  $a_n^{(k)}$  est non nul**.

Toujours en raison de la condition ii) on a pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $Q_k(X) = \sum_{n=\text{val } Q_k}^{\deg Q_k} a_n X^n$ ,

donc si on pose  $\varphi(k) = \deg Q_k$ ,  $Q_k(x) = \sum_{n=\varphi(k-1)+1}^{\varphi(k)} a_n X^n$ , de telle sorte que

$$\sum_{k=1}^n Q_k(x) = \sum_{k=1}^{\varphi(n)} a_k X^k \text{ et donc par définition des } Q_k,$$

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \left| P_n(x) - \sum_{k=1}^{\varphi(n)} a_k x^k \right| \leq \frac{1}{n}}$$

c) On se propose de démontrer par récurrence qu'il existe une suite  $(k_n)$  d'entiers **strictement croissante** telle que:

$$\forall x \in [0, 1], |f(x) - P_{k_n}(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

i) On applique le a) avec  $m = 1$ : il existe  $P_{k_1}$  tel que  $\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - P_{k_1}(x)| \leq 1$

ii) **Supposons donnés les entiers  $k_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$  tels que  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n$  et pour tout  $m \in [1, n]$ ,  $\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - P_{k_i}(x)| \leq \frac{1}{i}$ .**

Posons alors  $m = 1 + \max_{1 \leq j \leq k_n} (\text{val } P_j)$ . D'après a) il existe  $Q \in \mathbb{Q}[X]$  tel que:

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - x^m Q(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Le polynôme  $X^m Q$  est dans  $\mathcal{P}_0$  mais comme  $\text{val}(X^m Q) \geq m$ , n'est pas élément de  $\{P_1, P_2, \dots, P_{k_n}\}$ . **C'est donc un polynôme  $P_{k_{n+1}}$  avec  $k_{n+1} > k_n$ .**

La suite  $(k_n)$  est donc construite par récurrence.

Il ne reste plus qu'à poser  $\psi(n) = \varphi(k_n)$ .

$$\begin{aligned} \text{En effet } \left| f(x) - \sum_{k=1}^{\psi(n)} a_k x^k \right| &\leq |f(x) - P_{k_n}(x)| + \left| P_{k_n}(x) - \sum_{i=1}^{k_n} Q_i(x) \right| \\ &\leq \frac{2}{n+1} \quad \text{pour tout } x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

La série  $\sum u_n$  converge donc uniformément vers  $f$ .

Si pour un  $x \in ]0, 1[$ , la série  $\sum a_n x^n$  était absolument convergente, **sa somme serait indépendante des groupements de termes**. Or il existe toujours un groupement de termes pour lequel la somme est 0 ( $f = 0$ ) et un autre pour lequel la somme est  $x$  ( $f(x) = x$ ). **Le rayon de convergence est donc nul.**

## D-7 Méthode de Korovkine et polynômes de Bernstein:

a) L'application  $f$  est **uniformément continue** sur  $[0, 1]$  donc:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall (x, y) \in [0, 1]^2, (|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

L'inégalité proposée est donc vérifiée pour tous les couples  $(x, y)$  tels que  $|x - y| \leq \delta$ .

Mais si au contraire,  $x$  et  $y$  sont tels que  $|x - y| > \delta$ , on a  $\frac{2 \|f\|}{\delta^2} (x - y)^2 \geq 2 \|f\|$ , ce qui

prouve encore l'inégalité dans ce cas, puisqu'on a toujours  $|f(x) - f(y)| \leq 2 \|f\|$ .

b) L'inégalité du a) peut se traduire par:

$$|f(x) - f(y) e_0(x)| \leq \varepsilon e_0(x) + \frac{2 \|f\|}{\delta^2} (e_2(x) - 2y e_1(x) + y^2 e_0(x)).$$

Les  $T_n$  étant positives, elles conservent l'inégalité ci-dessus, ce qui prouve l'inégalité demandée puisque:

$$|\varphi| \leq \psi \Leftrightarrow -\psi \leq \varphi \leq \psi \Leftrightarrow \varphi + \psi \geq 0 \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \geq 0.$$

Si on applique cette nouvelle inégalité pour  $y = x$ , on obtient:

$$\begin{aligned} |T_n(f)(y) - f(y) T_n(e_0)(y)| \\ \leq \varepsilon T_n(e_0)(y) + \frac{2 \|f\|}{\delta^2} [T_n(e_2)(y) - 2y T_n(e_1)(y) + y^2 T_n(e_0)(y)]. \end{aligned}$$

On peut écrire ensuite, avec l'inégalité triangulaire, et parce que

$$e_2(y) - 2y e_1(y) + y^2 (e_0)(y) = (y - y)^2 = 0, \text{ les inégalités:}$$

$$\begin{aligned} |T_n(e_2)(y) - 2y T_n(e_1)(y) + y^2 T_n(e_0)(y)| \\ \leq |(T_n(e_2) - e_2)(y) - 2y(T_n(e_1) - e_1)(y) + y^2(T_n(e_0) - e_0)(y)| \\ \leq \|T_n(e_2) - e_2\| + 2y \|T_n(e_1) - e_1\| + y^2 \|T_n(e_0) - e_0\| \\ \leq \|T_n(e_2) - e_2\| + 2 \|T_n(e_1) - e_1\| + \|T_n(e_0) - e_0\|. \end{aligned}$$

Choisissons  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour  $n \geq N$ ,

$$\begin{cases} \|T_n(e_2) - e_2\| \leq \varepsilon \\ \|T_n(e_1) - e_1\| \leq \varepsilon \\ \|T_n(e_0) - e_0\| \leq \varepsilon \end{cases} \quad \text{pour avoir, pour tout } y \text{ de } [0, 1],$$

$$|T_n(e_2)(y) - 2y T_n(e_1)(y) + y^2 T_n(e_0)(y)| \leq 4\varepsilon, \text{ donc}$$

$$|T_n(f)(y) - f(y) T_n(e_0)(y)| \leq \varepsilon \|T_n(e_0)\| + \frac{2\|f\|}{\delta^2} \cdot 4\varepsilon \leq \varepsilon \left(1 + \varepsilon + \frac{8\|f\|}{\delta^2}\right).$$

Il reste alors à écrire:

$$\begin{aligned} |T_n(f)(y) - f(y)| &\leq |T_n(f)(y) - f(y) T_n(e_0)(y)| + |f(y)| |T_n(e_0)(y) - e_0(y)| \\ &\leq \varepsilon \left(1 + \varepsilon + \frac{8\|f\|}{\delta^2} + \|f\|\right). \end{aligned}$$

Le réel  $\varepsilon' > 0$  étant donné, on choisit  $\varepsilon$  dans  $]0, 1[$  tel que  $\varepsilon \leq \frac{\varepsilon'}{2 + \|f\| + 8\|f\|/\delta^2}$  pour obtenir alors *lorsque*  $n \geq N$ ,  $\|T_n(f) - f\| \leq \varepsilon'$ .

c) *Les  $T_n$  sont linéaires positifs par définition* puisque  $C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$  est positif

sur  $[0, 1]$ . Au rang 0,  $T_n(e_0)(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = e_0(x)$ .

Pour calculer les deux termes suivants, nous remarquons que:

$$\frac{k}{n} C_n^k = C_{n-1}^{k-1} \text{ et } \frac{k(k-1)}{n(n-1)} C_n^k = C_{n-2}^{k-2}.$$

$$\text{On a alors } T_n(e_1)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k} = x = e_1(x)$$

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{n}{n-1} T_n(e_2) - \frac{1}{n-1} T_n(e_1) \right)(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \\
 &= x^2 \sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} \\
 &= x^2 \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-2-k} = x^2 = e_2(x),
 \end{aligned}$$

et finalement  $T_n(e_2) = \frac{n-1}{n} e_2 + \frac{1}{n} e_1$ , donc

$$\|T_n(e_2) - e_2\| = \left\| \frac{e_1}{n} - \frac{e_2}{n} \right\| \leq \frac{1}{n} \|e_1 - e_2\| \leq \frac{2}{n}.$$

Donc pour tout  $f$  élément de  $E$ ,  $T_n(f)$  est une suite de polynômes convergeant uniformément vers  $f$ .



# II

## SÉRIES ENTIÈRES

### A - Domaine de convergence

Pour une série entière  $\sum a_n z^n$  de variable réelle ou complexe, le premier résultat est le **lemme d'Abel**.

"Si pour un  $z_0 \neq 0$ , la suite  $(a_n z_0^n)$  est bornée, la série  $\sum a_n z^n$  est absolument convergente pour tout  $z$  tel que  $|z| < |z_0|$ ".

On peut alors définir le **rayon de convergence**  $R$  de la série entière par  $R = \{ |z|; (a_n z^n) \text{ est bornée} \}$  élément de  $\mathbb{R}^+$  de telle sorte que:

i) pour  $|z| < R$ ,  $\sum a_n z^n$  est absolument convergente

ii) pour  $|z| > R$ ,  $\sum a_n z^n$  est grossièrement divergente.

Si  $D_R$  désigne le disque ouvert de centre 0 et de rayon  $R$  appelé **disque de convergence**, le domaine de convergence de la série entière sera intermédiaire entre  $D_R$  et  $\overline{D}_R$

#### A-1 Détermination du rayon de convergence.

Pour la série entière  $\sum a_n z^n$ , déterminer le rayon de convergence  $R$  et étudier la convergence pour  $|z| = R$  (si  $R$  est fini  $> 0$ ) dans les cas suivants:

a)  $a_n = 2 \ln 1 + 2^2 \ln 2 + \dots + 2^n \ln n$

b)  $a_n = (2 - \sqrt{2}) (2 - \sqrt[3]{2}) \dots (2 - \sqrt[n]{2})$

c)  $a_n = \int_n^{2n} \frac{e^t}{t} dt$

d)  $a_0 = 1, a_1 = 1$  et pour  $n \geq 1, a_{n+1} = \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{(n+1)^2}$ .

## A-2 Rayons de convergence de séries entières associées.

On considère une série entière  $\sum a_n x^n$  de rayon de convergence  $R(a)$ . On suppose que les  $(a_n)$  sont réels positifs.

On considère une série entière  $\sum b_n x^n$  de rayon de convergence  $R(b)$  telle que  $b$  est donné en fonction de  $a$ .

Dans les différents cas proposés, il s'agit de déterminer (partiellement ou complètement)  $R(b)$  en fonction de  $R(a)$ .

$$\text{a) } b_n = \frac{a_n}{1 + a_n} \text{ puis } c_n = \sqrt{\frac{a_n}{1 + a_n}},$$

$$\text{b) } b_n = a_n F(n) \text{ où } F \text{ est une fraction rationnelle de } n \text{ sans pôle dans } \mathbb{N},$$

$$\text{c) } b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

$$\text{d) } b_n = \int_0^{a_n} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^2 dt.$$

## A-3 Étude de la série $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ .

On considère la série entière complexe  $\sum a_n z^n$  et on suppose que son rayon de convergence est non nul.

a) Montrer que la série entière  $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$  a un rayon de convergence infini.

On pose alors  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ .

$$\text{b) Montrer que pour } |z| < R, \int_0^{+\infty} f(tz) e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

c) On suppose que la suite  $(a_n)$  a une limite  $\lambda$  non nulle dans  $\mathbb{C}$ .

Montrer que pour  $x$  réel,  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda e^x$ .

## A-4 Étude de la série $\sum (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n) z^n$ .

On considère une série entière  $\sum a_n z^n$  et on suppose que son rayon de convergence  $r$  est non nul.

On pose  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  pour  $|z| < r$ .

On considère d'autre part  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$  et la série entière  $\sum A_n z^n$  dont on désigne le rayon de convergence par  $R$ .

a) Montrer que  $R$  est non nul.

On pose alors pour  $|z| < R$ ,  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ .

b) On pose  $R_1 = \inf(r, 1)$ .

Montrer que  $R \geq R_1$  et que pour  $|z| < R_1$ , les sommes sont liées par la relation:

$$(1) f(z) = (1 - z) F(z).$$

c) En calculant pour  $|z| < R$ ,  $(1 - z) \sum_{n=0}^p A_n z^n$ , montrer que  $r \geq R$  et que la relation (1) est vraie pour tout  $|z| < R$ .

d) Montrer que si  $r \leq 1$ , alors  $R = r$ . Dans le cas  $r > 1$ , discuter selon que  $f$  s'annule ou non au point 1.

## A-5 Calcul de sommes de séries entières.

Reconnaître et déterminer les sommes de séries entières:

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$

b)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)(n+2) \dots (2n+1)} x^n$

(utiliser les intégrales de Wallis  $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ )

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + 2 + \dots + n}$

e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) x^n$ .

## A-6 Logarithme complexe.

Pour  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $z = r e^{i\theta}$ , d'argument  $\theta$  choisi dans  $]-\pi, \pi]$ , on pose:

$$L(z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i\theta = \ln r + i\theta.$$

a) Calculer  $L(e^z)$  et  $e^{L(z)}$ . Que dire de  $L(z z')$  pour  $z$  et  $z'$  dans  $\mathbb{C}^*$ ?

b) Pour  $z$  dans  $\mathbb{C}^*$  s'écrivant  $z = r e^{i\theta}$  avec  $-\pi < \theta < \pi$ , on pose si  $r = |z| < 1$ ,  $f(z) = L(1 + z)$ .

Calculer en fonction de  $r$  et  $\theta$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} f(x + iy)$  et son développement en série entière de la variable  $z$ .

c) En déduire le développement en série entière de  $f$ .

**Application:** à l'aide de l'exercice B-1 calculer la somme des séries  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \theta}{n}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \theta}{n}$  pour les valeurs convenables de  $\theta$ .

## B - Étude au bord du disque de convergence

Si  $R$  est le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$ , on sait qu'elle est absolument convergente pour  $|z| < R$  et grossièrement divergente pour  $|z| > R$ .

Il reste à étudier ce qui se passe lorsque  $|z| = R$ .

Des exemples simples ( $\sum n z^n$ ,  $\sum \frac{1}{n} z^n$ ,  $\sum \frac{1}{n^2} z^n$ ) montrent qu'une grande variété de situations peut se présenter, dont certaines font l'objet des exercices de cette partie.

Un autre problème est celui des propriétés de la somme de la série entière au voisinage d'un point frontière quand elle est définie en ce point. Y a-t-il continuité? dérivabilité?

Un théorème classique dû à **Abel** fait l'objet de l'exercice 1, mais nous donnons dans cet exercice d'autres conditions suffisantes plus simples qu'il faut mettre en œuvre dès que possible.

### B-1 Convergence radiale.

On considère une série entière de variable réelle  $\sum a_n x^n$  de rayon de convergence 1 et on définit  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  en tout  $x$  où la série converge.

a) On suppose que la série  $\sum a_n$  est absolument convergente.

Montrer que la série  $\sum a_n x^n$  est normalement convergente sur  $[-1, 1]$  et que  $f$  est définie et continue sur  $[-1, 1]$ .

b) On suppose que la suite  $(a_n)$  est positive et tend vers 0 en décroissant.

Montrer que la série  $\sum a_n x^n$  est uniformément convergente sur  $[-1, 0]$  et que  $f$  est définie et continue sur  $[-1, 1[$ .

c) Montrer que si la série  $\sum a_n$  est convergente, pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ ,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq 2\varepsilon_n, \text{ si on pose } \varepsilon_n = \sup_{p \geq n} \left( \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \right| \right).$$

En déduire que la série  $\sum a_n x^n$  est uniformément convergente sur  $[0, 1]$  et que  $f$  est définie et continue sur  $] -1, 1]$ .

## B-2 Théorèmes Tauberiens.

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence 1, et de somme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

On sait d'après l'exercice précédent que si  $\sum a_n$  est convergente alors existe

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des réciproques de cette propriété.

a) Montrer par un exemple que peut exister  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$  alors que  $\sum a_n$  est

divergente. Il faudra donc, si on veut un résultat réciproque de la convergence radiale, rajouter des conditions supplémentaires.

b) On suppose donc que  $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}]{} l$ , et que de plus  $n a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . On se propose

de montrer qu'alors la série  $\sum a_n$  est convergente avec  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$ .

Pour cela, montrer pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in [0, 1[$  la majoration:

$$\left| \sum_{n=0}^m a_n - f(x) \right| \leq (1-x) \sum_{n=1}^m n |a_n| + \frac{\varepsilon_m}{m} \sum_{n=m+1}^{\infty} x^n,$$

avec  $\varepsilon_m = \sup_{n \geq m} (n |a_n|)$ , et conclure en considérant comme valeur de  $x$  un  $x_m$  approprié tel que  $\lim (x_m) = 1$ .

c) On suppose toujours  $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}]{} l$ , mais la deuxième condition est remplacée

maintenant par  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k a_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Il s'agit encore de montrer la convergence de

$\sum a_n$  et l'égalité  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$ .

Pour cela, on pose  $b_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k a_k$ ,  $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ ,  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$  et

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n.$$

c-1) Montrer que  $g$  est définie sur  $] -1, 1[$  et vérifie les égalités:

$$\begin{aligned} g(x) &= (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n - (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n. \end{aligned}$$

c-2) Si  $(d_n)$  est une suite complexe convergeant vers 0, montrer que lorsque  $x \rightarrow 1$  ( $x < 1$ ),  $\sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n = o\left(\frac{1}{1-x}\right)$  (voir la technique de l'exercice B-5).

c-3) En appliquant b) à la série  $\sum b_n x^n$  montrer successivement que  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = l - a_0$  puis que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$ .

### B-3 Convergence au sens d'Abel.

Soit  $\sum u_n$  une série à termes complexes.

On dit que  $\sum u_n$  est sommable au sens de *Cesaro* si la suite  $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k$

avec  $S_k = \sum_{p=0}^k u_p$  a une limite finie  $\sigma$ .

On dit que  $\sum u_n$  est sommable au sens d'Abel si la série entière  $\sum u_n x^n$  a un rayon de convergence  $R \geq 1$  et si  $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \right)$  existe.

Montrer que toute série sommable au sens de *Cesaro* est sommable au sens d'Abel, la limite étant la même (*Frobénius*).

### B-4 Semi-convergence sur le cercle de convergence.

On considère les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$ .

$$a_n = \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{(E(\sqrt{n}))^2}.$$

- a) Montrer que les deux séries entières ont pour rayon de convergence 1.  
 b) Montrer qu'elles sont semi-convergentes sur le cercle de rayon 1.

### B-5 Etude asymptotique à la frontière du disque.

a) On considère deux séries entières de rayon de convergence 1 qui définissent les fonctions  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  et  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ .

On suppose que  $(b_n)$  est réelle positive, que  $a_n \sim b_n$  et que  $\sum b_n$  est divergente.

Montrer que  $g(x) \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} +\infty$  et que  $f(x) \underset{x < 1}{\sim} g(x)$ .

*Exemple:* donner un équivalent au voisinage de 1 de  $\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n$  où  $k \in \mathbb{N}^*$  est fixé.

b) Donner un résultat du même ordre pour deux séries entières de rayon de convergence infini (préciser les hypothèses) et en déduire un équivalent au voisinage de  $+\infty$  de  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \frac{x^n}{n!}$ , puis de  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}$ .

## C - Développement en série entière

Une application  $f$  de variable réelle ou complexe définie sur un voisinage  $\Omega$  de 0 est **développable en série entière** s'il existe une série  $\sum a_n z^n$  dont la somme vaut  $f(z)$  sur un voisinage de 0 inclus dans  $\Omega$ . On sait que dans ces conditions il y a unicité de ce développement en série entière.

Dans les exercices de cette partie C) nous chercherons soit à déterminer explicitement le développement en série entière de fonctions données, soit à trouver des conditions sur  $f$  permettant d'assurer l'existence d'un développement en série entière.

Dans le cas où la variable est réelle, si  $f$  est développable en série entière, elle est de classe  $C^\infty$  sur un voisinage de 0 et la série entière dont elle est somme est sa série de Taylor en 0 (appelée aussi série de Taylor-Mac Laurin)  $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ .

Mais réciproquement, cette condition de classe  $C^\infty$  n'est pas suffisante.

D'abord, comme le montre l'exercice C-7, la série de **Taylor** peut avoir un rayon de convergence nul. Mais même si la série de **Taylor** converge dans un voisinage de 0, sa somme peut être différente de  $f$  comme le montre l'exemple ultra classique de la fonction  $f: x \mapsto e^{-1/x^2}$  dont la série de Taylor-Mac Laurin est nulle, alors que  $f$  ne s'annule qu'en 0.

### C-1 Développement des fonctions rationnelles.

a) Pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{C}^*$ , en dérivant  $k-1$  fois la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x-a}$ , donner le développement en série entière de la fonction de variable réelle définie pour  $x \neq a$  par  $f(x) = \frac{1}{(x-a)^k}$ .

Quel est le rayon de convergence?

b) Justifier le développement en série entière de la fonction de variable complexe  $f(z) = \frac{1}{(z-a)^k}$ .

**Remarque:** bien entendu, pour le lecteur connaissant la notion de dérivée par rapport à la variable complexe  $z$  les questions a) et b) n'en font qu'une.

c) Montrer que toute fonction rationnelle de variable complexe n'admettant pas le pôle 0 admet un développement en série entière au voisinage de 0 et donner son rayon de convergence.

Indiquer des méthodes pour déterminer ce développement.

**Exemples:** développer en série entière les fonctions  $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+z+1)}$ ,  $g(z) = \frac{1}{1-z+z^2-z^3}$ , et  $h(z) = \frac{1}{1+z+z^2+z^3}$ .

d) La suite  $(a_n)$  étant donnée, comment reconnaître que  $\sum a_n z^n$  est la série entière d'une fonction rationnelle? (on se contentera d'une condition nécessaire dans le cas d'une fraction rationnelle de partie entière nulle).

### C-2 Exemples de développements en série entière.

a) Pour les fonctions ci-dessous, donner le développement en série entière en précisant le rayon de convergence.

a-1) Avec  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = (x + \sqrt{1+x^2})^\alpha$ .

a-2)  $f(x) = \operatorname{Arg} \operatorname{th} \left( \frac{1}{2} + x \right)$

a-3)  $f(x) = (\operatorname{Arc} \sin x)^2$

$$\text{a-4) } f(x) = \int_0^1 t^{x^2} dt.$$

Calculer une valeur approchée de  $f(1)$  avec une précision de  $10^{-10}$ .

b) Pour  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , développer  $f(x) = \sin \alpha x$  comme série entière de  $\sin x$ . Cas particulier?

c) Pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , on pose:

$$f_\theta(x) = \operatorname{Arctan} \frac{x \sin \theta}{1 + x \cos \theta}$$

$$g_\theta(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + 2x \cos \theta + x^2).$$

c-1) Donner les développements en série entière de  $f_\theta$  et  $g_\theta$ .

c-2) Pour  $z = r e^{i\theta}$  avec  $0 \leq r < 1$ , on pose  $F(z) = g_\theta(r) + i f_\theta(r)$ .

Calculer  $\exp(F(z))$  et en déduire l'expression de  $F(z)$ .

### C-3 Développement en série entière d'un quotient.

a) On considère une série entière  $\sum a_n z^n$  de rayon de convergence  $R > 0$  et telle que  $a_0 = 1$ .

a-1) Montrer qu'il existe une unique suite  $(b_n)$  vérifiant l'égalité (formelle):

$$(\sum a_n z^n) (\sum b_n z^n) = 1.$$

a-2) Montrer qu'il existe  $A > 0$  tel que pour tout  $n$  entier,  $|a_n| \leq A^n$ , et en déduire qu'il existe  $B > 0$  tel que pour tout  $n$  entier,  $|b_n| \leq B^n$ . Que dire alors du rayon de convergence de  $\sum b_n z^n$ ?

b) Montrer que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions développables en série entière de  $z$  et telles que  $g(0) \neq 0$ , la fonction  $z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$  est développable en série entière de la variable  $z$ .

c) Application à la fonction  $f: x \mapsto \tan x$ .

Montrer que la série de Taylor de  $f$  est convergente pour tout  $x$  dans  $[0, \frac{\pi}{2} [$ .

Montrer que  $f$  est développable en série entière de  $x$ , déterminer le rayon de convergence, et donner une formule de récurrence liant les coefficients.

### C-4 Développement d'une série de fonction.

Pour développer en série entière une fonction  $f$  définie comme somme d'une série de fonction  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ , plusieurs méthodes sont possibles.

- i) Chercher une équation différentielle ou fonctionnelle vérifiée par  $f$  et en chercher les solutions développables en série entière.
- ii) Développer chacune des  $u_n$  en série entière et intervertir les sommations.
- iii) Montrer directement que le reste de *Taylor* tend vers 0.

Les différentes techniques pourront être utilisées dans les exemples qui suivent.

- a) Soit  $a$  un réel de  $] -1, 1[$ .

Développer en série entière  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(a^n x)$ .

- b) On pose  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2n + 1}$ . Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  et son développement en série entière de  $x$ .

- c) Soit  $\lambda \in ]0, 1[$ . On pose  $f(x) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 + \lambda^n x)$ .

Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et développable en série entière. On donnera le développement et son rayon de convergence.

- d) Donner le développement en série entière de  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \ln(x + n)$ .

## C-5 Critère d'analyticité réelle.

Soit  $R$  un réel strictement positif, et  $f$  une fonction de variable réelle définie et de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle  $] -R, R[$ .

Montrer que si  $f$  est sur  $] -R, R[$  égale à la somme de sa série de *Taylor*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

elle vérifie la propriété:

$$(\mathcal{P}): \forall \alpha \in ]0, R[, \exists K > 0, \exists \delta > 0; \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in ]-\alpha, \alpha[, |f^{(p)}(x)| \leq K p! \delta^p.$$

Etudier une réciproque.

## C-6 Fonctions absolument croissantes.

On dit qu'une application  $f$  d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est *absolument croissante* si elle est de classe  $C^\infty$  sur  $I$  et si  $f$  ainsi que toutes ses dérivées sont positives:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(k)}(x) \geq 0.$$

On considère  $\alpha > 0$  et  $f$  une application de classe  $C^\infty$  de  $] -\alpha, \alpha[$  dans  $\mathbb{R}$  et absolument croissante sur  $[0, \alpha[$ .

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$  et  $R_n(x) = f(x) - f(0) - \sum_{k=1}^n a_k x^k$  reste de *Taylor-Mac Laurin*.

a) Montrer que la série entière  $\sum a_n x^n$  est convergente sur  $[0, \alpha[$  et que:

$$\forall x \in [0, \alpha[, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \leq f(x).$$

b) Montrer que  $n \mapsto R_n(x)$  est décroissante pour tout  $x$  dans  $[0, \alpha[$ , et que pour tout  $n$  de  $\mathbb{R}^*$ ,  $x \mapsto x^{-n} R_n(x)$  est croissante sur  $[0, \alpha[$ . En déduire que:

$$\forall x \in [0, \alpha[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

c) **Application:** montrer que la fonction  $x \mapsto \tan x$  est développable en série entière de  $x$  et déterminer le rayon de convergence de sa série de *Mac Laurin*.

## C-7 Série de *Taylor* ayant un rayon de convergence nul.

On considère la fonction  $f$  définie par:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{n(ix-1)}, x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que  $f$  est définie et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  mais que sa série de *Taylor* a un rayon de convergence nul (on pourra utiliser la formule de *Stirling*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}} \right) = \sqrt{2\pi}.$$

## D - Fonctions analytiques

Dans cette partie, nous cherchons à dégager les propriétés des fonctions somme d'une série entière.

La propriété essentielle, mise en évidence dans le premier exercice, est la *développabilité en série entière au voisinage de tout point*, c'est à dire le caractère *analytique* de la somme d'une série entière, et c'est cette propriété fondamentale qui nous guidera tout le long.

### D-1 Développement en série entière.

On considère une application  $f$  de  $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$  dans  $\mathbb{C}$  somme d'une série entière sur  $D$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Soit  $z_0$  un point de  $D$ . Montrer que l'application  $u \mapsto f(z_0 + u)$  est développable en série entière de la variable  $u$  et que le rayon de convergence est au moins  $R - |z_0|$ .

### D-2 Principe des zéros isolés.

On considère une série entière  $\sum a_n z^n$  de rayon de convergence  $R > 0$  et on pose pour  $|z| < R$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

On suppose de plus que la suite  $(a_n)$  n'est pas la suite nulle.

a) Montrer qu'il existe  $\alpha \in ]0, R[$  tel que pour tout  $z$  tel que  $0 < |z| < \alpha$ , on ait  $f(z) \neq 0$  (on pourra utiliser un développement limité de  $f(z)$  en 0).

b) Soit  $z_0$  tel que  $0 < |z_0| < R$  et  $f(z_0) = 0$ . En utilisant le résultat du D-1, montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $f(z) \neq 0$  pour  $0 < |z - z_0| < \alpha$ .

Ainsi les zéros de  $f$  sont isolés.

### D-3 Principe du maximum.

On considère une série entière  $\sum a_n z^n$  de rayon de convergence  $R > 0$  et on note:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

a) Soit  $0 < r < R$ .

Calculer en fonction des  $a_n$  et de  $r$ ,  $I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{it})|^2 dt$ .

Ne voyez-vous pas un rapport avec les séries de Fourier?

En déduire que si  $f$  n'est pas constante,  $|f(0)| < \sup_{|z| \leq r} |f(z)|$ .

b) En utilisant l'exercice D-1, montrer que si  $f$  n'est pas constante,  $|f|$  n'admet pas de maximum local.

c) On suppose dans cette question que  $R$  est infini et qu'il existe  $K > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que:

$$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq K(1 + |z|)^\alpha.$$

Montrer que  $f$  n'est pas constante et est un polynôme de degré inférieur à  $\alpha$ .

d) On suppose que  $f$  n'est pas constante et que  $|f|$  admet en  $z_0$  (tel que  $|z_0| < R$ ) un minimum local.

Montrer que  $f(z_0) = 0$  (on pourra utiliser grâce à l'exercice D-1 un développement limité de  $f$  en  $z_0$ ).

**Application:** théorème de D'Alembert-Gauss.

Montrer que tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine.

#### D-4 Approximation polynômiale.

On considère un réel  $R > 0$ ,  $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$  et  $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq R\}$  son adhérence.

Soit  $f$  une application continue de  $\Delta$  dans  $\mathbb{C}$  somme d'une série entière sur  $D$ :

$$\forall z \in D, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

On se propose de démontrer qu'il existe une suite de fonctions polynômes convergeant uniformément vers  $f$  sur  $\Delta$ .

a) Première méthode: par rétraction.

Pour  $\delta > 0$ , utiliser le polynôme  $\sum_{n=0}^N a_n z^n (1 - \delta)^n$ .

b) Deuxième méthode: moyenne de Cesaro.

Montrer que si  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ , la suite  $Q_n(z) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n P_k(z)$  convient.

#### D-5 Fonction entière de type exponentiel.

On considère une série entière  $\sum a_n z^n$  de rayon de convergence infini et de somme  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ .

On suppose qu'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que:

$$\forall a > \alpha, \exists A > 0; \forall z \in \mathbb{C}, (|z| > A \Rightarrow |f(z)| < e^{a|z|}).$$

a) On pose  $m(r) = \sup_{|z|=r} (|f(z)|)$  pour tout  $r$  positif.

Montrer en utilisant l'exercice D-1 que:

$$\forall n \in \mathbb{N}; |a_n| r^n \leq m(r).$$

b) Pour  $b > 0$  et  $n$  entier  $> 0$ , trouver le minimum de la fonction  $x \mapsto \frac{e^{bx}}{x^n}$  quand  $x$  décrit  $]0, +\infty[$ .

c) Soit  $a > \alpha$ . Montrer qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$ , tel que pour  $n \geq N$  on ait  $|a_n| \leq \frac{a^n}{n!}$  (on pourra utiliser la formule de *Stirling*).

## D-6 Formule de *Cauchy* et suites de fonctions.

Soit  $R$  un élément de  $]0, +\infty]$  et  $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$ .

On désigne par  $\mathcal{H}(D)$  l'ensemble des applications de  $D$  dans  $\mathbb{C}$  qui sont sur  $D$  somme d'une série entière.

Le but de l'exercice est de montrer que si une suite  $(f_n)$  d'éléments de  $\mathcal{H}(D)$  converge vers une application  $f$  de  $D$  dans  $\mathbb{C}$  uniformément sur toute partie compacte de  $D$ , alors  $f$  est élément de  $\mathcal{H}(D)$ .

a) Formules de *Cauchy*.

Soit  $f \in \mathcal{H}(D)$  avec  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  pour  $|z| < R$ .

Montrer que pour tout  $r < R$ ,  $a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r e^{it}) e^{-int} dt$ .

b) On considère donc une suite  $(f_n)$  d'éléments de  $\mathcal{H}(D)$ , définis par leur développement  $f_n(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_n(p) z^p$ , et on suppose que la suite  $f_n$  converge vers une application  $f$  de  $D$  dans  $\mathbb{C}$  uniformément sur toute partie compacte de  $D$ .

b-1) Montrer que pour tout  $p$ , la suite  $(a_n(p))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un complexe noté  $a(p)$ .

b-2) Montrer que la série  $\sum a(p) z^p$  a un rayon de convergence au moins égal à  $R$  et a pour somme  $f$ .

c) On considère  $(r_n)$  une suite de réels positifs strictement croissante de limite  $R$  et pour  $f \in \mathcal{H}(D)$  on pose  $\alpha_n(f) = \sup_{|z| \leq r_n} |f(z)|$ , puis  $\beta_n(f) = \frac{\alpha_n(f)}{1 + \alpha_n(f)}$ .

Montrer que  $d(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \beta_n(f - g)$  définit une distance dans  $\mathcal{H}(D)$ , la convergence pour  $d$  étant la convergence sur tout compact.

## E - Applications des séries entières

Beaucoup d'applications tournent autour de la recherche sous forme de la somme d'une série entière de la solution d'une équation différentielle ou d'une équation fonctionnelle. La démarche de base consiste à **chercher formellement la solution a priori** sous cette forme, mais le point essentiel qui conditionnera la réciproque est la démonstration que le **rayon de convergence est strictement positif**.

S'il en est ainsi, la relation trouvée dans le cadre de la condition nécessaire montre la condition suffisante et permet de conclure.

### E-1 Equations différentielles du premier ordre.

a) On considère l'application  $\varphi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par:

$$\text{pour } x \geq 0, \varphi(x) = \text{Ch}(x^{3/2})$$

$$\text{pour } x < 0, \varphi(x) = \cos((-x)^{3/2}).$$

Chercher les solutions développables en série entière de l'équation différentielle:

$$2xy' + y = 3x\varphi(x).$$

b) On considère l'équation différentielle

$$xy' = x + y^2.$$

b-1) Montrer qu'elle admet une solution  $f$  développable en série entière sur un voisinage de 0.

La fonction  $f$  est-elle définie sur  $\mathbb{R}$  entier?

b-2) Y-a-t-il d'autres solutions définies sur un voisinage de 0? (on pourra chercher les autres solutions sous la forme  $y(x) = f(x) + \frac{1}{u(x)}$ ).

c) On considère l'équation différentielle:

$$(1) y' = x^3 + y^3.$$

c-1) Quelles relations doivent vérifier les  $(a_n)$  si on suppose que

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ est solution de (1)?}$$

c-2) Déterminer le développement en série entière de l'application  $g$  définie par

$$g(x) = 1 - \sqrt{1 - 2x}.$$

Si  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ , calculer  $b_n$  en fonction des  $(b_k)$  pour  $1 \leq k \leq n-1$ .

c-3) Montrer que pour tout  $n$ , on a  $0 \leq a_n \leq b_n$ .

En déduire que si  $f$  est l'unique solution de l'équation (1) telle que  $f(0) = 0$ , elle est développable en série entière de rayon de convergence au moins égal à  $\frac{1}{2}$ .

## E-2 Equations différentielles du second ordre.

a) On considère l'équation différentielle:

$$4xy'' + 2y' - y = 0.$$

a-1) Intégrer cette équation différentielle en posant  $x = t^2$  pour  $x > 0$  et  $x = -t^2$  pour  $x < 0$ .

a-2) Donner les solutions développables en série entière et trouver les solutions définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

b) Montrer que pour  $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ , l'équation différentielle:

$$x(1-x)y'' - \lambda(xy' + y) = 0$$

a une solution non nulle développable en série entière de rayon de convergence au moins égal à 1.

c) Soit  $p$  et  $q$  deux fonctions continues définies sur un intervalle contenant l'intervalle  $] -1, 1[$  et telles que pour  $|x| < 1$ ,

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n.$$

On suppose de plus qu'il existe  $M > 0$  tel que pour  $|x| < 1$ ,

$$|p(x)| \leq M \text{ et } |q(x)| \leq M.$$

On considère l'équation différentielle:

$$(E) \quad xy'' + xp(x)y' + q(x)y = 0.$$

c-1) On pose a priori  $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ .

Quelles relations doivent vérifier les  $(a_n)$  pour que  $y$  soit solution de l'équation (E)?

c-2) Montrer que pour tout  $n$  on a les majorations

$$|\alpha_n| \leq M \text{ et } |\beta_n| \leq M$$

(voir par exemple l'exercice D-6).

c-3) Si  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$  est la solution de l'équation étudiée au b) dans le cas  $\lambda = M$ , montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq |a_n| \leq b_n$ .

En déduire que (E) admet une solution non nulle, développable en série entière de rayon de convergence au moins égal à 1.

## E-3 Etude d'une équation fonctionnelle.

On considère  $\alpha$  et  $\lambda$  deux réels tels que  $|\lambda| < 1$  et on désigne par  $E$  l'ensemble des applications  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$  vérifiant l'équation:

$$f'(x) = e^{\alpha x} f(\lambda x).$$

a) Montrer que toute fonction élément de  $(E)$  est de classe  $C^\infty$  et calculer  $f^{(n)}(x)$  en fonction des valeurs de  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$  au point  $\lambda x$ .

b) Chercher les solutions de l'équation qui sont somme d'une série entière.

Montrer qu'elles forment une droite vectorielle.

Donner *explicitement* l'expression des coefficients dans le cas particulier  $\alpha = 0$ .

c) On revient à  $\alpha$  quelconque.

Montrer que tous les éléments de  $E$  sont développables en série entière. Ainsi  $E$  est de dimension 1.

d) En déduire pour  $0 < \lambda < 1$ , la dimension de l'espace vectoriel  $F$  des applications  $g$  dérivables de  $]0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant l'équation:

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, g'(x) = g(x^\lambda).$$

#### E-4 Fonction de Bessel $J_0$ .

a) On définit la fonction  $J_0$  par:

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t) dt.$$

Montrer que  $J_0$  est solution de l'équation différentielle

$$x y'' + y' + x y = 0.$$

b) Montrer que la fonction  $J_0$  est développable en série entière et donner son développement.

c) Montrer que  $J_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

#### E-5 Etude d'une équation de *Riccati*.

a) On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x z' - x z^2 + z - 1 = 0.$$

On suppose que  $(E)$  admet une solution développable en série entière sur un

voisinage de 0 s'écrivant  $z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ .

Montrer qu'il existe une unique suite  $(b_n)$  répondant à la question et démontrer que la série entière correspondante a un rayon de convergence  $R \geq 1$ .

En déduire que  $(E)$  a une solution unique développable en série entière.

b) Au voisinage de 0 on pose  $z = \frac{u'}{u}$ .

Montrer que  $u$  est solution de l'équation

$$(F) \quad x u'' + u' + u = 0.$$

Déterminer les solutions développables en série entière de  $(F)$  et les exprimer à l'aide de la fonction de Bessel  $J_0$  de l'exercice E-4.

Soit  $f$  celle de ces solution telle que  $f(0) = 1$ .

Montrer que  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]-\infty, 2]$  et qu'elle a un zéro unique sur l'intervalle  $[0, 2]$ .

## E-6 Partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Pour tout  $n$  entier naturel, on note  $D_n$  le nombre de partitions de l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On pose aussi  $D_0 = 1$ .

a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$D_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k D_k.$$

b) On pose  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{k!} x^k$ .

Montrer que la série entière a un rayon de convergence au moins égal à 1.

Déterminer une équation différentielle vérifiée par  $f$  et en déduire la valeur de  $f$ .

c) Donner une expression de  $D_n$ .

## E-7 Arbres binaires.

Etant donné un ensemble fini  $E$ , on appelle arbre binaire défini sur  $E$ , un couple de relations  $G$  et  $D$  (pour gauche et droite) de  $E$  vers  $E$  vérifiant les propriétés  $(\mathcal{P})$  ci-dessous.

**Terminologie:** si  $a G b$  on dit que  $b$  est suivant gauche de  $a$ ,  
 si  $a D b$  on dit que  $b$  est suivant droit de  $a$ ,  
 si  $a G b$  ou  $a D b$  on dit que  $a$  est antécédent de  $b$ .

**Propriétés  $\mathcal{P}$ :**

i) il existe un élément unique de  $E$  sans antécédent appelé racine de l'arbre binaire,

ii) tout élément distinct de la racine admet un antécédent unique,

iii) tout élément admet au plus un suivant gauche et au plus un suivant droit.

On peut représenter un arbre binaire sous forme de schéma orienté vers le bas, comme dans l'exemple présenté plus loin (page ci-contre).

On désigne par  $a_n$  le nombre d'arbres binaires (à un isomorphisme près) pour un ensemble à  $n$  éléments, avec la convention  $a_0 = 1$ .

a) Pour  $n \geq 0$ , calculer  $a_{n+1}$  en fonction de  $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ .

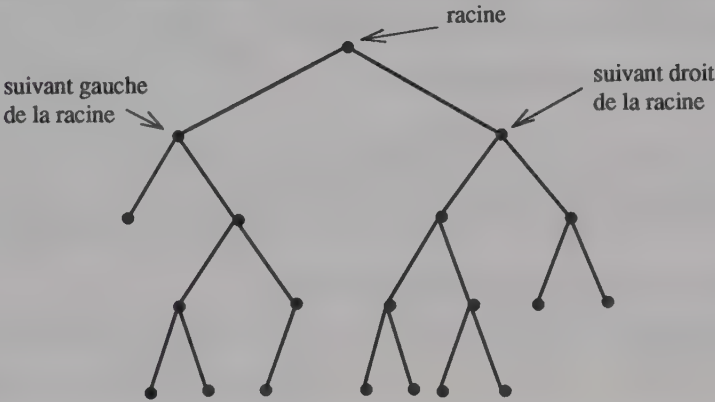
b) On pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  en supposant que la série entière a un rayon de convergence  $R > 0$ .

Montrer que pour  $|x| < R$ , la relation suivante est vérifiée par  $f(x)$ :

$$x(f(x))^2 - f(x) + 1 = 0.$$

c) Calculer l'expression explicite de  $f(x)$ , donner la valeur de  $R$  et en déduire la valeur de  $a_n$ .

**Exemple d'arbre binaire** pour  $n = 20$ , où chaque nœud représente un élément.



## Solutions

### A - Domaine de convergence

#### A-1 Détermination du rayon de convergence:

$$a) 2^n \leq 2^n \ln n \leq 2 \ln 1 + 2^2 \ln 2 + \dots + 2^n \ln n \leq n \ln n 2^n.$$

Le rayon de convergence de chacune des deux séries encadrantes  $\sum 2^n z^n$  et  $\sum n \ln 2^n z^n$  est  $\frac{1}{2}$  car, par exemple:

$$\sqrt[n]{n \ln n 2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2.$$

Le rayon de convergence de la série est donc  $\frac{1}{2}$ , et comme  $\frac{a_n}{2^n} \geq \ln n$ , il y a convergence pour  $|z| < \frac{1}{2}$  et divergence pour  $|z| \geq \frac{1}{2}$ .

$$b) \ln(a_n) = \prod_{k=1}^n \ln(2 - \sqrt[k]{2}).$$

$$\text{Comme } (2 - \sqrt[k]{2}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1, \ln(2 - \sqrt[k]{2}) \sim 1 - 2^{1/k}$$

$$2^{1/k} = e^{(\ln 2)/k} = 1 + \frac{\ln 2}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right) \text{ et } \ln(2 - \sqrt[k]{2}) \sim -\frac{\ln 2}{k}.$$

La série définissant  $\ln(a_n)$  est divergente et à termes négatifs.

$$\text{On a donc } \ln(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \text{ et de plus, } \ln(a_n) \sim -\ln 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim -\ln 2 \ln n.$$

$$\text{Finalement } \frac{\ln(a_n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ donc } a_n^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \text{ et le rayon de convergence est } 1.$$

Choisissons  $\ln 2 < \alpha < 1$ . A partir d'un certain rang  $N$ , on aura  $\ln(a_n) \geq -\alpha \ln n$  soit  $a_n \geq \frac{1}{n^\alpha}$ , et la série  $\sum a_n$  n'est pas convergente, donc  $\sum a_n z^n$  n'est pas absolument convergente pour  $|z| = 1$ .

Prenons  $z = e^{i\theta}$  avec  $0 < \theta < 2\pi$ . La règle d'Abel usuelle peut s'appliquer ici puisque les sommes partielles  $\left| \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right| = \left| \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| = \left| \frac{\sin(n+1)\theta/2}{\sin \theta/2} \right| \leq \frac{1}{|\sin \theta/2|}$  sont bornées et que  $a_n$  tend vers 0 en décroissant puisque  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 - 2^{1/n} < 1$ . Il y a donc semi-convergence pour  $|z| = 1$  à condition que  $z \neq 1$ .

c) Intégrons par partie  $\left(u = \frac{1}{t}, dv = e^t dt\right)$ :

$$a_n = \int_n^{2n} \frac{e^t}{t} dt = \left[\frac{e^t}{t}\right]_n^{2n} + \int_n^{2n} \frac{e^t}{t^2} dt = \frac{e^{2n}}{2n} - \frac{e^n}{n} + b_n$$

$$\frac{e^{2n}}{2n} - \frac{e^n}{n} = \frac{e^{2n}}{2n} (1 - 2e^{-n}) \sim \frac{e^{2n}}{2n}, \text{ et } b_n < \frac{1}{n^2} (e^{2n} - e^n) = o\left(\frac{e^{2n}}{2n}\right).$$

Finalement,  $a_n \sim \frac{e^{2n}}{2n}$ ,  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow e^2$  et le rayon de convergence est  $\frac{1}{e^2}$ .

**Etude pour  $|z| = \frac{1}{e^2}$ .**

Comme  $a_n e^{-2n} \sim \frac{1}{2n}$ , il n'y a pas convergence absolue.

Prenons  $z = e^{-2} e^{i\theta}$  avec  $\theta \in ]0, 2\pi[$  de sorte que  $a_n z^n = b_n e^{in\theta}$  avec  $b_n = a_n e^{-2n}$ .

La suite  $(b_n)$  converge vers 0 car  $b_n \sim \frac{1}{2n}$ .

$$b_n = \int_n^{2n} \frac{e^{t-2n}}{t} dt = \int_1^2 \frac{e^{n(u-2)}}{u} du \text{ en posant } t = nu.$$

Sous cette forme, comme pour  $u \in [1, 2]$ ,  $e^{(n+1)(u-2)} \leq e^{n(u-2)}$ , il apparaît que la suite  $(b_n)$  est décroissante. On peut encore appliquer la règle d'Abel usuelle et il y a convergence lorsque  $|z| = \frac{1}{e^2}$  si  $z \neq \frac{1}{e^2}$ .

d) On peut remarquer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < a_n \leq 1$  (récurrence immédiate). On a donc  $\frac{2}{(n+1)^2} \leq a_{n+1} \leq \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}$ .

Le rayon de convergence est donc égal à 1 qui est le rayon de convergence commun des séries  $\sum \frac{2z^n}{(n+1)^2}$  et  $\sum \frac{z^n}{n+1}$ . On peut affiner la majoration car:

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \leq 2 + \int_1^n \frac{dt}{t} = 2 + \ln n \text{ et finalement } a_{n+1} \leq \frac{2 + \ln n}{(n+1)^2}.$$

Comme la série de Bertrand  $\sum \frac{\ln n}{n^2}$  est convergente, la série  $\sum a_n$  est convergente et la série  $\sum a_n z^n$  est absolument convergente pour  $|z| \leq 1$ .

**Remarque:** si  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$  et  $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  on sait que  $R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , donc  $a_{n+1} = \frac{S - R_n}{(n+1)^2} \sim \frac{S}{(n+1)^2}$ , ce qui précise la convergence de  $\sum a_n$ .

## A-2 Rayon de convergence de séries entières associées:

a) Si  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , alors  $b_n$  aussi et  $b_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a_n$ . On a donc  $R(b) = R(a) \geq 1$ .

Si  $(a_n)$  ne tend pas vers 0,  $(b_n)$  non plus puisque:

$$b_n = \frac{a_n}{1+a_n} \Leftrightarrow a_n = \frac{b_n}{1-b_n}.$$

Dans ce cas on a donc  $R(a) \leq 1$  et  $R(b) \leq 1$ . Comme de plus, pour tout  $n$ ,  $0 \leq b_n \leq 1$ , on a exactement  $R(b) = 1$ . En fin de compte:

$$R(b) = \sup(R(a), 1)$$

Posons alors  $c_n = \sqrt{b_n}$ . Dire que  $c_n r^n$  est borné équivaut à  $b_n r^{2n}$  borné.

Comme  $R(c) = \inf \{r \in \mathbb{R}^{+*}; (c_n r^n) \text{ borné}\}$

et  $R(b) = \inf \{r \in \mathbb{R}^{+*}; (b_n r^n) \text{ borné}\}$ , on en déduit que:

$$R(c) = \sqrt{R(b)} = \sup(\sqrt{R(a)}, 1)$$

b) Quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $F(n) \sim K n^\alpha$  avec  $\alpha$  entier. Or on sait que  $\sum a_n x^n$  et  $\sum a_n n^\alpha x^n$  ont le même rayon de convergence puisque  $\lim \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$ . Donc:

$$R(b) = R(a)$$

c) *Supposons  $R(a) > 1$ .* Alors  $\sum a_n$  converge, donc si  $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $b_n \sim \frac{A}{n}$  et  $R(b) = 1$ .

*Supposons  $R(a) \leq 1$ .* Pour tout  $0 < r < R(a)$ , il existe  $K > 0$  tel que  $a_n r^n \leq K$  pour tout  $n$  entier, donc:

$$\begin{aligned} b_n &\leq \frac{K}{n} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^n} \right) = \frac{K}{n r} \frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1}{\frac{1}{r} - 1} \\ &\leq \frac{K}{n(1-r)} \cdot \left(\frac{1}{r}\right)^n. \end{aligned}$$

La suite  $(b_n r^n)$  étant bornée, on en déduit  $R(b) \geq r$  et puisque c'est vrai pour tout  $r < R(a)$ , on en déduit que  $R(b) \geq R(a)$ .

Mais par ailleurs l'inégalité  $b_n \geq \frac{a_n}{n}$  montre, puisque  $\sum \frac{a_n}{n} x^n$  et  $\sum a_n x^n$  ont même rayon de convergence, l'inégalité  $R(b) \leq R(a)$  d'où l'égalité.

**Conclusion:**

$$R(b) = \inf(R(a), 1)$$

d) De l'inégalité  $\left| \frac{\sin t}{t} \right| \leq 1$  valable pour tout  $t > 0$ , on déduit  $b_n \leq a_n$  donc  $R(b) \geq R(a)$ .

Si  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  on a, par concavité de la fonction sinus,  $\left| \frac{\sin t}{t} \right| \geq \frac{2}{\pi}$ . On en déduit:

$$\text{i) si } a_n \leq \frac{\pi}{2} \quad b_n \geq \int_0^{a_n} \left( \frac{2}{\pi} \right)^2 dt \geq \frac{4}{\pi^2} a_n$$

$$\text{ii) si } a_n > \frac{\pi}{2} \quad b_n \geq \int_0^{\pi/2} \left( \frac{2}{\pi} \right)^2 dt = \frac{2}{\pi}$$

**Donc, si tous les  $(a_n)$  sont dans  $[0, \frac{\pi}{2}]$  à partir d'un rang, on a  $R(b) \leq R(a)$  et en fin de compte  $R(b) = R(a)$ . Notons que dans ce cas,  $R(a) \geq 1$ .**

**S'il existe une infinité de  $(a_n)$  supérieurs à  $\frac{\pi}{2}$ , la suite des  $(a_n)$  ne tend pas vers 0 et**

**$R(a) \leq 1$ . Il existe une infinité de  $(b_n)$  tels que  $b_n \geq \frac{2}{\pi}$  et on a aussi  $R(b) \leq 1$ .**

Mais de plus, pour tout  $n$ ,  $b_n \leq \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt \leq \pi + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \pi + \frac{1}{\pi}$ , et la suite  $(b_n)$

étant bornée,  $R(b) \geq 1$ . Dans ce cas, on a donc  $R(b) = 1$ .

**Conclusion:**

$$R(b) = \sup(R(a), 1)$$

### A-3 Étude de la série $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ :

a) Pour  $r \in ](0, R[$ , la série  $\sum a_n r^n$  est convergente, donc **la suite  $(a_n r^n)$  est bornée par un réel  $M > 0$ .**

La série entière  $\sum \frac{M}{n! r^n} z^n$  a un rayon de convergence infini (test de d'Alembert)

et comme  $\left| \frac{a_n}{n!} z^n \right| \leq \left| \frac{M}{n! r^n} z^n \right|$ , la série entière  $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$  aussi.

b) i) Montrons d'abord **la convergence absolue** de l'intégrale.

Fixons  $z$  tel que  $0 < |z| < R$ , puis prenons  $r$  dans  $] |z|, R[$ . On peut écrire:

$$\begin{aligned} |f(tz)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n!} z^n t^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{n!} \left( \frac{t|z|}{r} \right)^n \\ &\leq M \exp\left(\frac{t|z|}{r}\right), \text{ donc } |f(tz) e^{-t}| \leq M e^{-\alpha t}, \text{ avec } \alpha = 1 - \frac{|z|}{r} > 0, \text{ et cette} \end{aligned}$$

**majoration prouve l'absolue convergence.**

ii) Supposons toujours  $z$  fixé tel que  $0 < |z| < R$ . Pour  $n$  et  $p$  dans  $\mathbb{N}$  posons

$$\varphi_p(n) = \int_0^p e^{-t} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} (tz)^k dt \quad \text{et} \quad \varphi(n) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} (tz)^k dt.$$

On peut majorer le reste de l'intégrale:

$$\begin{aligned} |\varphi(n) - \varphi_p(n)| &\leq \int_p^{+\infty} e^{-t} \sum_{k=0}^n \frac{|a_k|}{k!} |t z|^k dt \\ &\leq \int_p^{+\infty} e^{-t} \sum_{k=0}^n \frac{M}{k!} \left(\frac{t|z|}{r}\right)^k dt \\ &\leq \int_p^{+\infty} M e^{-\alpha t} dt = \frac{M}{\alpha} e^{-\alpha p} \end{aligned}$$

en prenant comme au i)  $0 < r < |z|$  et  $\alpha = 1 - \frac{|z|}{r}$ .

La suite de fonctions  $(\varphi_p)_{p \in \mathbb{N}}$  est donc **uniformément convergente vers  $\varphi$** .

De plus, pour tout  $p$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_p(n)$  existe et vaut  $\int_0^p e^{-t} f(tz) dt$ . On peut donc appliquer le *théorème de la double limite* et ainsi:

$$\int_0^{+\infty} f(tz) e^{-t} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_p(n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi_p(n) \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \varphi(n) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi_p(n) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} t^k z^k dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} z^k \int_0^{+\infty} e^{-t} t^k dt = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \text{ soit} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(tz) e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}$$

égalité qui s'étend à  $z = 0$ .

$$\text{c) Posons } g(x) = f(x) - \lambda e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_n - \lambda)}{n!} x^n.$$

$$\forall x > 0, \exists m \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n > m \Rightarrow |a_n - \lambda| < \varepsilon/2).$$

$$\text{Donc } |g(x) e^{-x}| \leq e^{-x} \sum_{n=0}^m \frac{|a_n - \lambda|}{n!} x^n + e^{-x} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{x^n}{n!}$$

$$\text{Or, } \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \text{et pour } m \text{ fixé,}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( e^{-x} \sum_{n=0}^m \frac{(a_n - \lambda)}{n!} x^n \right) = 0, \text{ donc il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que pour } x > A,$$

$$|g(x) e^x| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$$\text{Ainsi } g(x) e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda e^x.$$

### A-4 Étude de la série $\sum (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n) z^n$ :

a) Si  $0 < t < r$ ,  $\sum |a_n| t^n$  converge, donc la suite  $|a_n| t^n$  est bornée par  $M$  et  $|a_n| \leq M t^{-n}$ . Choisissons  $t \neq 1$ .

$$\text{Ainsi, } A_n \leq M \sum_{k=0}^n t^{-k} = M \frac{1 - t^{-n-1}}{1 - t^{-1}} \leq \frac{M}{1 - t^{-1}} \text{ pour } t > 1$$

$$\leq M t^{-n} \text{ pour } t < 1.$$

Si  $t > 1$ ,  $A_n$  est bornée et si  $t < 1$  c'est  $A_n t^n$ . Dans les deux cas on en déduit  $R > 0$ .

b) Pour  $|z| < R_1$  les deux séries  $\sum z^n$  et  $\sum a_n z^n$  sont absolument convergentes. On peut appliquer le théorème sur le produit de *Cauchy*:

$$\sum |A_n| |z|^n \text{ est convergente et } \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ soit } F(z) = \frac{1}{1-z} f(z)$$

d'où la relation (1).

On en déduit en particulier  $R \geq R_1$  (ce qui provient aussi du raisonnement du a)).

$$\begin{aligned} \text{c) } (1-z) \sum_{n=0}^p A_n z^n &= \sum_{n=0}^p A_n z^n - \sum_{n=1}^{p+1} A_{n-1} z^n \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^p (A_n - A_{n-1}) z^n - A_p z^{p+1} \\ &= \sum_{n=0}^p a_n z^n - A_p z^{p+1}. \end{aligned}$$

Pour  $|z| < R$ ,  $\sum A_n z^n$  converge, donc  $A_n z^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

La suite  $\sum_{n=0}^p a_n z^n$  a donc pour limite  $(1-z) \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ .

On en déduit bien la minoration  $r \geq R$  et:

$$\forall z, |z| < R \Rightarrow (1-z) F(z) = f(z).$$

d) Les études du b) et c) montrent que pour  $r \leq 1$ , on a  $R \geq R_1 = r$  et  $r \geq R$  donc  $r = R$ .

Dans le cas  $r > 1$ , on sait d'après b) que  $R \geq 1$  et d'après c) que  $r \geq R$ , mais il n'y a plus forcément égalité.

i) Si la fonction  $f$  ne s'annule pas pour  $z = 1$ , on est sûr que  $R = 1$  à cause de l'égalité:  $f(z) = (1-z) F(z)$

valable pour  $|z| < 1$  et qui ne peut se prolonger à 1.

ii) Si la fonction  $f$  s'annule pour  $z = 1$ , il existe une application  $g$  continue vérifiant pour  $|z| < r$ ,  $f(z) = (1-z) g(z)$ .

Elle est définie par  $g(z) = \frac{f(z)}{1-z}$  pour  $z \neq 1$  et  $g(1) = -f'(1) = -\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ .

Pour  $z \neq 1$ , on a donc, puisque  $f(1) = 0$ ,

$$g(z) = \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n z^n - a_n) = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 + z + \dots + z^{n-1})$$

et cette formule est encore vraie pour  $z = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors } - \sum_{n=1}^N a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k &= - \sum_{k=0}^{N-1} z^k \sum_{n=k+1}^N a_n = - \sum_{k=0}^{N-1} z^k (A_N - A_k) = \sum_{k=0}^N z^k (A_k - A_N) \\ &= \sum_{k=0}^N A_k z^k - A_N \sum_{k=0}^N z^k. \end{aligned}$$

Comme  $f(1) = 0$ ,  $A_N = \sum_{k=0}^N a_k = - \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ , et on peut majorer:

$$\begin{aligned} \left| A_N \sum_{k=0}^N z^k \right| &\leq |A_N| (N+1) |z|^N = \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \right| (N+1) |z|^N \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| k |z|^{k-1} \text{ pour } |z| \geq 1. \end{aligned}$$

La série dérivée  $\sum k a_k z^{k-1}$  a même rayon de convergence  $r$  que la série initiale donc

pour  $1 \leq |z| < r$ ,  $A_N \sum_{k=0}^N z^k \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$ .

Finalement  $\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^N A_k z^k \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( - \sum_{n=1}^N a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^k \right) = g(z)$ , et  $R \geq r$ .

Dans ce cas on a donc  $R = r$  et la relation (1) est vraie pour tout  $z$  tel que  $|z| < r$ .

## A-5 Calcul de sommes de séries entières:

a) En remarquant que  $1 + j + j^2 = 0$ , donc que pour tout  $n$  entier,  $1^n + j^n + j^{2n} = 3$  si  $n \equiv 0 \pmod{3}$  et  $1^n + j^n + j^{2n} = 0$  sinon, on obtient:

$$3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = e^x + e^{jx} + e^{j^2x}, \text{ donc:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3} \left( e^x + 2e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

**Remarque:** on peut y arriver aussi en posant  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$  de telle sorte que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}, \text{ ce qui montre la relation (1)}$$

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x.$$

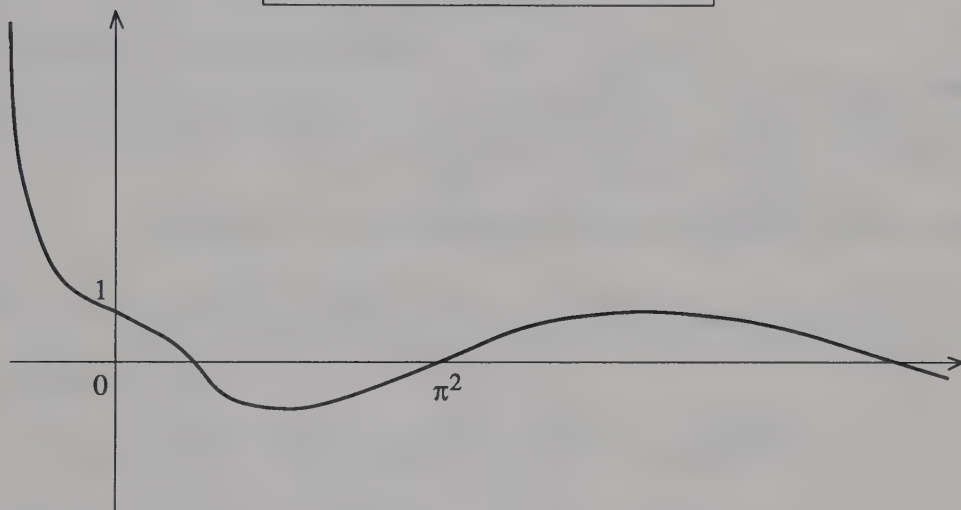
La fonction  $f$  est alors l'unique solution de l'équation différentielle (1) telle que  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 0$ , ce qui permet de trouver l'expression donnée ci-dessus puisque la solution générale est  $y = \frac{1}{3} e^x + \lambda e^{ix} + \mu e^{j^2 x}$ .

b) Pour  $x > 0$ , posons  $x = t^2$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos t = \cos \sqrt{x}$ .

Pour  $x < 0$ , posons  $x = -t^2$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \text{Ch } t = \text{Ch } \sqrt{-x}$ .

pour  $x \geq 0$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} = \cos \sqrt{x}$

pour  $x < 0$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} = \text{Ch } \sqrt{-x}$



c) Par application du *test de d'Alembert*,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}, \text{ donc } R = 4.$$

Posons alors pour  $x > 0$ ,  $x = 4t^2$  de sorte que:

$$f(x) = g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)!} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{2n},$$

$$\text{avec } \alpha_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} = \int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2n+1} du.$$

Pour  $0 < t < 1$ , on a donc:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2n+1} du.$$

Pour  $0 < t < 1$ , la série de fonctions  $\sum t^{2n} (\cos u)^{2n+1}$  de la variable  $u$  est *normalement convergente* donc peut être *intégrée terme à terme* sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

$$g(t) = \int_0^{\pi/2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} (\cos u)^{2n+1} \right) du = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u}{1 - t^2 \cos^2 u} du.$$

On peut calculer l'intégrale en posant  $\sin u = v$ :

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u \, du}{t^2 \sin^2 u + 1 - t^2} = \int_0^1 \frac{dv}{t^2 v^2 + (1 - t^2)} \\ &= \frac{1}{t \sqrt{1 - t^2}} \left[ \text{Arc tan } \frac{vt}{\sqrt{1 - t^2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{t \sqrt{1 - t^2}} \text{Arc tan } \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{\text{Arc sin } t}{t \sqrt{1 - t^2}}. \end{aligned}$$

Finalement pour tout  $x$  de  $]0, 4[$ ,

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x(4-x)}} \text{Arc sin } \frac{\sqrt{x}}{2}$$

Pour  $x < 0$ , posons  $x = -4t^2$ , de sorte que:

$$f(x) = h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)!} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n t^{2n}.$$

Avec les mêmes arguments que dans le cas précédent, on trouve maintenant:

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^{\pi/2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} (\cos u)^{2n+1} \right) du = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u}{1 + t^2 \cos^2 u} du \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos u \, du}{1 + t^2 - t^2 \sin^2 u} = \frac{1}{t^2} \int_0^1 \frac{dv}{\frac{1+t^2}{t^2} - v^2} \\ &= \frac{1}{2t^2} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \left[ \ln \frac{\sqrt{1+t^2} + tv}{\sqrt{1+t^2} - tv} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2t \sqrt{1+t^2}} \ln \left( \frac{\sqrt{1+t^2} + t}{\sqrt{1+t^2} - t} \right) = \frac{1}{t \sqrt{1+t^2}} \ln (t + \sqrt{1+t^2}) \\ &= \frac{1}{t \sqrt{1+t^2}} \text{Arg sh } t. \end{aligned}$$

Finalement pour tout  $x$  de  $] -4, 0[$ ,

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x(x-4)}} \text{Arg sh } \frac{\sqrt{-x}}{2}$$

d) On utilise la somme bien connue  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , puis l'identité

$$\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}, \text{ ce qui donne pour } |x| < 1,$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^n}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{2}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= -2 \ln(1-x) + \frac{2}{x} (\ln(1-x) + x), \text{ d'où:}$$

$$f(x) = 2 + \frac{2}{x} (1-x) \ln(1-x)$$

**Remarque:** par définition  $f(0)$  vaut 0 et il y a continuité en 0.

e) Comme  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$ ,

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

On a alors, par une technique analogue à celle de l'exercice A-4,

$$(1-x) \sum_{n=1}^N \left( \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) x^n = \sum_{n=1}^N \left( \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) x^n - \sum_{n=2}^{N+1} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) x^n$$

$$= x + \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n - \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^{N+1}.$$

Pour  $|x| < 1$ , comme  $\left| \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| \leq 1$  (série alternée) et que  $x^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ , la série

est convergente et:

$$(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x).$$

Finalement pour tout  $x$  de  $] -1, 1[$ ,  $f(x) = \frac{x}{1-x} \ln 2 - \frac{1}{1-x} \ln(1+x)$ , soit:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} (x \ln 2 - \ln(1+x))$$

## A-6 Logarithme complexe:

a) Si  $z = x + iy$ ,  $e^z = e^x e^{iy}$  de sorte que  $e^x = |e^z|$  et  $y = \text{Arg } z \pmod{2\pi}$ .

On a donc  $L(e^z) = x + iy + 2ik\pi$ ,  $k$  étant choisi *de telle sorte que*  $y + 2k\pi \in ]-\pi, \pi]$ .

En sens contraire,  $e^{L(z)} = e^{\ln r} e^{i\theta} = z$ .

En résumé, l'application  $z \mapsto e^z$ , à condition de la restreindre à  $D = \{x + iy; -\pi < y \leq \pi\}$ , est bijective sur  $\mathbb{C}^*$ , *l'application réciproque étant L*.

On a  $L(z z') = L(z) + L(z') + 2ik\pi$ ,  $k$  étant l'unique entier relatif tel que  $\text{Arg } z + \text{Arg } z' + 2k\pi \in ]-\pi, \pi]$ .

b) Pour  $|z| < 1$ ,  $1 + z$  a une partie réelle  $> 0$  et  $\text{Arg}(1 + z) = \text{Arc tan} \left( \frac{y}{1+x} \right)$ , donc

$$f(x + iy) = \frac{1}{2} \ln((1+x)^2 + y^2) + i \text{Arc tan} \frac{y}{1+x}.$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } \frac{\partial}{\partial y} f(x + iy) &= \frac{y}{(1+x)^2 + y^2} + \frac{i}{(1+x) \left( 1 + \frac{y^2}{(1+x)^2} \right)} \\ &= \frac{y}{(1+x)^2 + y^2} + i \frac{1+x}{(1+x)^2 + y^2} \\ &= \frac{y + i(1+x)}{y^2 + (1+x)^2} = \frac{1}{y - i(1+x)} \\ &= \frac{i}{1+z} = i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n. \end{aligned}$$

c) **Raisonnons à  $x$  fixé** en posant  $g(y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x + iy)$ .

La série de fonctions de terme général  $(-1)^n (x + iy)^n$  est **normalement convergente sur tout segment**  $[-a, a]$  tel que  $x^2 + a^2 < 1$ , i.e  $a < \sqrt{1 - x^2}$ . On peut alors intégrer terme à terme entre 0 et  $y$  si  $|y| < \sqrt{1 - x^2}$ , pour obtenir:

$$\begin{aligned} f(x + iy) - f(x) &= \int_0^y g(t) dt = i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^y (x + it)^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{(x + it)^{n+1}}{n+1} \right]_0^y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

Comme  $f(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ , on obtient:

$$\text{pour } |z| < 1, L(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

En particulier pour  $|r| < 1$ ,  $-L(1 - r e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{e^{in\theta}}{n}$ .

Pour  $0 < \theta < 2\pi$ , la série  $\sum \frac{1}{n} e^{in\theta}$  est convergente en vertu de la *règle d'Abel*. Le *théorème de convergence radiale* (voir exercice B-1) permet d'écrire:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{in\theta} = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} -L(1 - r e^{i\theta}) = -L(1 - e^{i\theta}), \text{ car l'application } L \text{ est continue pour}$$

$\text{Re}(z) > 0$  puisqu'alors:  $\text{Arg}(z) = \text{Arctan} \left( \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$  avec un dénominateur qui ne s'annule pas pour  $x > 0$ .

Ce calcul donne alors:

$$\begin{aligned} 1 - e^{i\theta} &= e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}) = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2} \\ &= 2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\theta-\pi)/2}, \text{ et } L(1 - e^{i\theta}) = \ln \left( 2 \sin \frac{\theta}{2} \right) + i \frac{\theta - \pi}{2}. \end{aligned}$$

On a donc pour  $0 < \theta < 2\pi$ :

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} &= -\ln \left( 2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} &= \frac{\pi - \theta}{2} \end{aligned}}$$

## B - Étude au bord du disque de convergence

### B-1 Convergence radiale:

a) Si  $\sum |a_n|$  converge, pour tout  $x$  de  $[-1, 1]$ ,  $|a_n x^n| \leq |a_n|$  et la série  $\sum a_n x^n$  est *normalement convergente* sur  $[-1, 1]$ , d'où le résultat.

b) Pour  $x \in [-1, 0]$ , posons  $x = -y$ , de sorte que la suite  $a_n x^n = (-1)^n a_n y^n$  est alternée, et a *son terme général qui décroît en valeur absolue vers 0*. La règle spéciale des séries alternées s'applique ici et on peut majorer le reste de la série en valeur absolue par son premier terme. Ainsi:

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n a_k x^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq a_k |x|^k \leq a_k.$$

Il y a bien convergence uniforme sur  $[-1, 0]$  donc sur  $[-1, \alpha]$  pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , d'après les théorèmes généraux. Ainsi  $f$  est continue sur  $[-1, \alpha[$  pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$  donc sur  $[-1, 1[$ .

c) On applique une *transformation d'Abel* en posant  $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ . Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

et  $x \in [0, 1]$ :

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (R_{k-1} - R_k) x^k = R_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} R_k (x^{k+1} - x^k) - R_{n+p} x^{n+p}.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k \right| &\leq \varepsilon_n \left( x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |x^{k+1} - x^k| + x^{n+p} \right) \\ &\leq \varepsilon_n \left( x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p} (x^k - x^{k+1}) + x^{n+p} \right) = 2\varepsilon_n x^{n+1} \leq 2\varepsilon_n. \end{aligned}$$

La majoration étant valable quel que soit  $p$ :

$$\forall x \in [0, 1], \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq 2\varepsilon_n.$$

Il y a donc convergence uniforme sur  $[0, 1]$  donc sur  $[-\alpha, 1]$ , pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , en raison des théorèmes généraux, et  *$f$  est continue sur  $] -1, 1[$* .

## B-2 Théorèmes Tauberiens:

a) Si nous considérons la série entière  $\sum (-1)^n x^n$  dont la somme est  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ . La série est divergente pour  $x = 1$  alors que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{2}$ .

b) On peut écrire:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^m a_n - f(x) \right| &= \left| \sum_{n=0}^m a_n (1 - x^n) - \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n x^n \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^m a_n (1-x)(1+x+\dots+x^{n-1}) - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n} n a_n x^n \right| \\ &\leq (1-x) \sum_{n=0}^m n |a_n| + \frac{1}{m} \sum_{n=m+1}^{\infty} |n a_n| x^n \\ &\leq (1-x) \sum_{n=0}^m n |a_n| + \frac{\varepsilon_m}{m} \sum_{n=m+1}^{\infty} x^n \\ &\leq m(1-x) \frac{\sum_{n=1}^m n |a_n|}{m} + \frac{\varepsilon_m}{m(1-x)}. \end{aligned}$$

Si nous prenons  $m(1-x) = 1$  soit  $x = 1 - \frac{1}{m}$ ,

$$\left| \sum_{n=0}^m a_n - f\left(1 - \frac{1}{m}\right) \right| \leq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m n |a_n| + \varepsilon_m.$$

Le premier terme à droite tend vers 0 grâce au *théorème de Cesaro* et ainsi:

$$\boxed{\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} f\left(1 - \frac{1}{m}\right) = l}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c-1) } \sum_{n=1}^N b_n x^n &= \sum_{n=2}^N (B_n - B_{n-1}) x^n + B_1 x \\
 &= \sum_{n=1}^{N-1} B_n (x^n - x^{n+1}) + B_N x^N \\
 &= (1-x) \sum_{n=1}^{N-1} B_n x^n + B_N x^N \quad \text{mais } |B_N| = \sum_{n=1}^N b_n = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} (n b_n).
 \end{aligned}$$

La suite  $(n b_n)$  a pour limite 0 par hypothèse donc est bornée. Si  $|n b_n| \leq K$ ,

$$|B_N| \leq K N \quad \text{et} \quad B_N x^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

On a donc bien  $g(x) = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n$  (voir l'exercice A-4).

$$\begin{aligned}
 \text{Mais } B_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \sum_{m=1}^k m a_m = \sum_{m=1}^n m a_m \left( \sum_{k=m}^n \frac{1}{k(k+1)} \right) \\
 &= \sum_{m=1}^n m a_m \left( \sum_{k=m}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right) = \sum_{m=1}^n m a_m \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= \sum_{m=1}^n a_m - n b_n = A_n - n b_n \quad \text{d'où la deuxième expression.}
 \end{aligned}$$

c-2) On utilise la technique de Cesaro.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |d_n| \leq \varepsilon.$$

Pour  $x \in [0, 1[$ ,

$$\begin{aligned}
 (1-x) \left| \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \right| &\leq (1-x) \sum_{n=0}^N |d_n| x^n + \varepsilon (1-x) \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \\
 &\leq (1-x) \sum_{n=0}^N |d_n| + \varepsilon x^{N+1} \\
 &\leq (1-x) \sum_{n=0}^N |d_n| + \varepsilon \leq 2\varepsilon \quad \text{pour } 1-x < \frac{\varepsilon}{\sum_{n=0}^N |d_n|}.
 \end{aligned}$$

On en déduit bien que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = 0$ .

Le résultat peut s'appliquer pour  $d_n = n b_n$  car par hypothèse  $n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , et:

$$\boxed{\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = l - a_0}$$

c-3) On peut appliquer le b) à  $\sum b_n x^n$  et cela montre que  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = l - a_0$ .

Comme  $B_n = A_n - n b_n$ ,  $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l - a_0$  ce qui s'écrit encore:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$$

### B-3 Convergence au sens d'Abel:

Soit  $\sum u_n$  une suite complexe.

On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ , puis  $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k$ .

On pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$ , et  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \sigma_n x^n$ .

a) Supposons donc que  $\lim_n \sigma_n = \sigma$ .

On a bien  $\limsup \sqrt[n]{(n+1) |\sigma_n|} \leq 1$  (si  $\sigma \neq 0$ ,  $\sqrt[n]{|\sigma_n|} \rightarrow 1$  et si  $\sigma = 0$  pour  $n$  assez grand,  $\sqrt[n]{|\sigma_n|} \leq 1$ ), donc  $g$  est définie sur  $] -1, 1[$ .

Posons, pour simplifier les expressions  $\sigma_{-1} = S_{-1} = 0$ .

Par *produit de Cauchy*,  $(1-x) g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1) \sigma_n - n \sigma_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$

$$(1-x)^2 g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (S_n - S_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = f(x).$$

$\sum u_n x^n$  converge absolument pour  $|x| < 1$  (*produit de Cauchy*).

b) Montrons maintenant que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$  existe et vaut  $\sigma$ .

Si  $\sigma_n$  était constante ( $\sigma_n = \sigma$ ), on aurait:

$$(1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \sigma x^n = (1-x)^2 \sigma \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = (1-x)^2 \sigma \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \sigma.$$

On a donc  $f(x) - \sigma = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) (\sigma_n - \sigma) x^n$ .

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; n > N \Rightarrow |\sigma_n - \sigma| < \frac{\varepsilon}{2}$ , et pour  $x \in ]0, 1[$ :

$$\begin{aligned} |f(x) - \sigma| &\leq (1-x)^2 \sum_{n=0}^N |\sigma_n - \sigma| (n+1) x^n + \frac{\varepsilon}{2} (1-x)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (n+1) x^n \\ &\leq (1-x)^2 \sum_{n=0}^N (n+1) |\sigma_n - \sigma| x^n + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Or le polynôme  $(1-x)^2 \sum_{n=0}^N (n+1) |\sigma_n - \sigma| x^n$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 1, autant dire qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $1 - \alpha < x < 1 \Rightarrow |f(x) - \sigma| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ .

#### B-4 semi-convergence sur le cercle de convergence:

a)  $\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  et  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  d'où le rayon de convergence.

$$\begin{aligned} \text{b) Considérons } v_n(z) &= \sum_{k=n^2}^{n^2+2n} b_k z^k = \frac{(-1)^n}{n^2} \sum_{k=n^2}^{n^2+2n} z^k \\ &= \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n^2} \frac{1-z^{2n+1}}{1-z} \text{ pour } z \neq 1 \text{ et } v_n(1) = (-1)^n \frac{(2n+1)}{n^2} \end{aligned}$$

La série  $\sum v_n(1)$  est convergente en raison de la *règle spéciale des séries alternées* et pour  $z \neq 1$ ,  $\sum v_n(z)$  est absolument convergente lorsque  $|z| = 1$ . Finalement  $\sum v_{\frac{n}{2}}(z)$  converge pour tout  $z$  tel que  $|z| = 1$ .

On peut encadrer un entier  $n$  entre deux carrés successifs:

$$(E(\sqrt{n}))^2 \leq n \leq (E(\sqrt{n}) + 1)^2 - 1.$$

$$\begin{aligned} \text{De plus } \left| \sum_{k=0}^n b_k z^k - \sum_{k=0}^{(E(\sqrt{n}))^2-1} b_k z^k \right| &\leq \sum_{k=(E(\sqrt{n}))^2}^{(E(\sqrt{n})+1)^2-1} \frac{1}{(E(\sqrt{n}))^2} \\ &\leq \frac{2 E(\sqrt{n}) + 1}{(E(\sqrt{n}))^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

La série  $\sum b_n z^n$  est donc *convergente pour tout  $z$  de module 1*.

$$\text{De plus, } |(a_n - b_n) z^n| \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{E(\sqrt{n})^2}$$

$$\begin{aligned} \text{De plus, } |(a_n - b_n) z^n| &= \frac{1}{E(\sqrt{n})^2} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{E(\sqrt{n})^2} - \frac{1}{(E(\sqrt{n}) + 1)^2} \\ &\leq \frac{2 E(\sqrt{n}) + 1}{E(\sqrt{n})^2 (E(\sqrt{n}) + 1)^2} \sim \frac{2}{n^{3/2}}. \end{aligned}$$

La série  $\sum (a_n - b_n) z^n$  étant donc absolument convergente pour tout  $z$  de module 1, comme la série  $\sum b_n z^n$  est convergente, *il en est de même de  $\sum a_n z^n$* .

Ainsi, pour  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$ , *il y a semi-convergence en tout point du cercle de rayon 1*.

### B-5 Etude asymptotique à la frontière du disque:

a) La série  $\sum b_n$  est à *termes positifs et divergente*.

Soit  $A > 0$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\sum_{n=0}^N b_n \geq A + 1$ .

Alors, pour  $x \in ]0, 1[$ ,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \geq \sum_{n=0}^N b_n x^n \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^N b_n.$$

Donc il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que pour  $x \in ]\alpha, 1[$ :

$$g(x) \geq \sum_{n=0}^N b_n x^n \geq \sum_{n=0}^N b_n - 1 \geq A, \text{ et on a bien } g(x) \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} +\infty.$$

L'équivalence de  $(a_n)$  et  $(b_n)$  se traduit par:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |a_n - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} b_n$$

puisque la suite  $b_n$  est réelle positive.

On peut alors écrire les majorations (pour  $0 < x < 1$ ):

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \right| &\leq \frac{\left| \sum_{n=0}^N (a_n - b_n) x^n \right|}{g(x)} + \frac{\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n - b_n| x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} \\ &\leq \frac{\sum_{n=0}^N |a_n - b_n| x^n}{g(x)} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} \\ &\leq \frac{\sum_{n=0}^N |a_n - b_n|}{g(x)} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Comme  $g(x) \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} +\infty$ , il existe  $\delta > 0$  tel que:

$$1 - \delta < x < 1 \Rightarrow g(x) > \frac{2}{\varepsilon} \sum_{n=0}^N |a_n - b_n|, \text{ et alors,}$$

$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon g(x)$$

et cela prouve l'équivalence:

$$f(x) \underset[x < 1]{x \rightarrow 1} g(x)$$

**Exemple:** pour  $n > k$ , on peut écrire  $n^k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n(n-1) \dots (n-k+1)$ .

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) x^n \\
 &= x^k \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) x^{n-k} \\
 &= x^k \frac{d^k}{dx^k} \left( \frac{1}{1-x} \right) = x^k \cdot \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \quad \text{donc:}
 \end{aligned}$$

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\underset{x < 1}{\sim}} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

b) **Précisons les hypothèses:**  $\sum a_n x^n$  et  $\sum b_n x^n$  sont deux séries entières de sommes respectives  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  et  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  vérifiant:

- i) la suite  $(b_n)$  est positive et non presque nulle
- ii) le rayon de convergence de  $\sum b_n x^n$  est  $+\infty$
- iii)  $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} b_n$ .

Montrons qu'alors  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ .

La démonstration est tout à fait semblable à celle vue au a). Pour  $N \in \mathbb{N}$  donné il existe  $m > N$  tel que  $b^m > 0$  et on peut écrire:

$$\frac{\sum_{n=0}^N |a_n - b_n| x^n}{g(x)} \leq \frac{\sum_{n=0}^N |a_n - b_n| x^n}{b_m x^m} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{ce qui permet pour } x \text{ assez grand de}$$

majorer le premier terme par  $\frac{\varepsilon}{2}$  et de conclure.

De l'équivalence  $\frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e}{n!}$  on déduit:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \frac{x^n}{n!} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  soit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \frac{x^n}{n!} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{x+1}$$

De la même manière,  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln(1-1/n)} = e^{-n-1/2+o(1)}$ , donc

$$\frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{-n}}{\sqrt{e} n!}, \quad \text{ce qui donne } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{e}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n} x^n}{n!},$$

soit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{e}} e^{x/e}$$

## C - Développement en série entière

### C-1 Développement des fonctions rationnelles:

a) Si nous posons  $g(x) = \frac{1}{x-a}$ , alors

$$g^{(k-1)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(x-a)^k} \quad \text{soit} \quad f(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} g^{(k-1)}(x).$$

$$\text{Or } g(x) = \frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{x}{a}} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n \text{ pour } |x| < |a| \text{ (série géométrique).}$$

Pour  $|x| < |a|$  on peut dériver terme à terme autant de fois qu'on veut pour obtenir:

$$\begin{aligned} g^{(k-1)}(x) &= -\frac{1}{a} \sum_{n=k-1}^{\infty} \frac{n(n-1) \dots (n-k+2)}{a^n} x^{n-k+1} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+k-1)}{a^{n+k}} x^n. \end{aligned}$$

Finalement pour  $|x| < |a|$ ,

$$f(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(k-1)! n!} \frac{x^n}{a^{n+k}} \quad \text{soit}$$

$$f(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k-1} \frac{x^n}{a^{n+k}}$$

b) La série entière  $\sum b_n z^n$  avec  $b_n = (-1)^k \frac{C_{n+k-1}^{k-1}}{a^{n+k}}$  a un rayon de convergence  $|a|$ .

De plus, pour  $x$  réel avec  $|x| < |a|$ , il y a convergence absolue et l'égalité:

$$1 = (x-a)^k \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \left( \sum_{p=0}^{\infty} C_k^p (-a)^{k-p} x^p \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \quad (\text{on a pris la}$$

convention habituelle et logique  $C_k^p = 0$  pour  $p > k$ ).

La convergence absolue implique l'égalité des coefficients en prenant le produit de Cauchy, c'est à dire  $1 = (-a)^k b_0$ , et pour  $m \geq 1$ ,  $\sum_{p+n=m} C_k^p (-a)^{k-p} b_n = 0$ .

On en déduit l'égalité formelle (produit de Cauchy) des séries entières

$$1 = \left( \sum C_k^p (-a)^{k-p} z^p \right) \left( \sum b_n z^n \right); \text{ donc l'égalité des sommes pour tout } z$$

complexe tel que  $|z| < |a|$  qui assure la convergence absolue.

$$\text{Ainsi, } 1 = \left( \sum_{p=0}^{\infty} C_k^p (-a)^{k-p} z^p \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = (z-a)^k \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad \text{d'où:}$$

$$\boxed{\frac{1}{(z-a)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n}$$

**Remarque:** La technique utilisée a pour but de contourner la dérivabilité par rapport à la variable complexe  $z$ , hors programme des classes de taupé.

c) Si  $f$  est une fonction rationnelle sans pôle 0, on peut la décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  et **développer chacun des éléments simples** selon la méthode vue ci-dessus. Ainsi  $f$  sera somme d'une série entière de  $z$  pour tout  $z$  tel que  $|z| < R$  si  **$R$  est le minimum des modules des pôles de  $f$ .**

Mais réciproquement,  $f$  étant discontinue en un de ces pôles, aucun des pôles ne peut être à l'intérieur du disque de convergence. C'est dire que le rayon de convergence est au plus  $R$ . **C'est donc  $R$ .**

Une première méthode pour obtenir le développement est la **décomposition en éléments simples**.

On peut aussi **chercher une relation de récurrence vérifiée par les coefficients**.

Si  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  et  $Q(z) = q_0 + q_1 z + \dots + q_k z^k$ ,  $P(z) = p_0 + p_1 z + \dots + p_m z^m$  et si

on écrit  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , on aura pour  $n$   $q_0 a_n + q_1 a_{n-1} + \dots + q_k a_{n-k} = p_n$

(en prenant  $p_i = 0$  pour  $i > m$ ).

Le polynôme caractéristique de cette relation de récurrence est  $X^k Q\left(\frac{1}{X}\right)$  et on ne peut espérer en tirer explicitement les  $a_n$  que **si on sait factoriser  $Q$**  (ce qui était déjà une condition sine qua non pour décomposer  $f$  en éléments simples).

**Exemple 1:**

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)^2 (z^2 + z + 1)} = \frac{1}{(z-1)^2 (z-j)(z-j^2)} \\ &= \frac{a}{z-1} + \frac{b}{(z-1)^2} + \frac{c}{z-j} + \frac{d}{z-j^2}. \end{aligned}$$

On calcule les coefficients par la technique habituelle:

$$b = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 f(z) = \frac{1}{3},$$

$$c = \lim_{z \rightarrow j} (z-j) f(z) = \frac{1}{(j-1)^2 (j-j^2)} = \frac{-1}{j(j-1)^3} = \frac{1-j}{9},$$

$$d = \bar{c} = \frac{1-j^2}{9}.$$

$$\text{Enfin } 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} t f(t) = a + c + d, \text{ donc } a = \frac{-2-j-j^2}{9} = \frac{-1}{3}.$$

$$f(z) = \frac{1}{3} \frac{1}{1+z} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1-j}{9} j^2 \frac{1}{1-\frac{z}{j}} - \frac{1-j^2}{9} j \frac{1}{1-\frac{z}{j^2}}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n + \frac{1-j^2}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{j^n} + \frac{1-j}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{j^{2n}}.$$

Pour  $n \equiv 0 \pmod{3}$   $\frac{1-j^2}{j^n} + \frac{1-j}{j^{2n}} = 2 - j - j^2 = 3$

pour  $n \equiv 1 \pmod{3}$   $\frac{1-j^2}{j^n} + \frac{1-j}{j^{2n}} = j^2 - j + j - j^2 = 0$

pour  $n \equiv 2 \pmod{3}$   $\frac{1-j^2}{j^n} + \frac{1-j}{j^{2n}} = j - 1 + j^2 - 1 = -3$

Finalement  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  avec:

$$\text{pour } n \equiv 0 \pmod{3} \quad a_n = \frac{n+3}{3}$$

$$\text{pour } n \equiv 1 \pmod{3} \quad a_n = \frac{n+2}{3}$$

$$\text{pour } n \equiv 2 \pmod{3} \quad a_n = \frac{n+1}{3}$$

### Exemple 2:

Là, nous allons procéder par coefficients indéterminés.

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \text{ avec: } (1 - z + z^2 - z^3) \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = 1.$$

$$u_0 = 1, \quad u_0 = 1$$

$$u_1 - u_0 = 0, \quad \text{ce qui donne} \quad u_1 = 1$$

$$u_2 - u_1 + u_0 = 0, \quad u_2 = 0$$

et pour  $n \geq 3$ ,  $u_n - u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-3} = 0.$

L'équation caractéristique s'écrit:

$$0 = t^3 - t^2 + t - 1 = (t-1)(t+i)(t-i)$$

On a donc  $u_n = \alpha + \beta i^n + \gamma (-i)^n$  avec:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + \beta i - \gamma i = 1 \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

On en tire  $\alpha = \frac{1}{2}$  puis  $\begin{cases} \beta + \gamma = \frac{1}{2} \\ \beta - \gamma = -\left(\frac{i}{2}\right) \end{cases}$

On a donc  $\beta = \frac{1-i}{4}$ ,  $\gamma = -\frac{1+i}{4}$  et finalement

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{i^n}{4} (1 + (-1)^n - i(1 + (-1)^{n+1})), \text{ ce qui donne } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n} + z^{4n+1}.$$

$$\text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \quad u_n = 1$$

$$\text{si } n \equiv 1 \pmod{4} \quad u_n = 1$$

$$\text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \quad u_n = 0$$

$$\text{si } n \equiv 3 \pmod{4} \quad u_n = 0$$

### Exemple 3:

Pour  $h(z)$ , on peut employer une des deux techniques précédentes, mais il est plus simple de remarquer que pour  $|z| < 1$ :

$$h(z) = \frac{1}{1+z+z^2+z^3} = \frac{1-z}{1-z^4} = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n} - z^{4n+1}.$$

**Remarque:** la même méthode pourrait être appliquée pour  $g$  en remarquant que  $g(z) = \frac{1+z}{1-z^4}$  (ce qui saute peut-être moins aux yeux!).

d) Si  $\sum a_n z^n$  est le développement en série entière d'une fonction rationnelle de numérateur de degré  $m$  et de dénominateur de degré  $k$  avec  $m < k$  puisque la partie entière est nulle, on aura pour tout  $n \geq 0$ :

$$q_0 a_{n+k} + q_1 a_{n+k-1} + \dots + q_k a_n = 0$$

*Les coefficients du développement satisfont à une équation de récurrence linéaire.*

L'existence des  $(q_0, q_1, \dots, q_k)$  non tous nuls implique que pour tout  $n$  le déterminant  $D_{n,k}$  est nul où

$$D_{n,k} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \dots & a_{n+k} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n+k} & a_{n+k+1} & \dots & a_{n+2k} \end{vmatrix}$$

**Remarque:** on démontre qu'en fait la condition ci-dessus est suffisante (nullité des déterminants de *Hankel*).

## C-2 Exemples de développements en série entière:

$$a-1) f'(x) = \alpha \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) (x + \sqrt{1+x^2})^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\sqrt{1+x^2}} f(x)$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -\frac{\alpha x}{(1+x^2)^{3/2}} f(x) + \frac{\alpha}{\sqrt{1+x^2}} f'(x) \\
 &= -\frac{x}{1+x^2} f'(x) + \frac{\alpha^2}{1+x^2} f(x).
 \end{aligned}$$

Donc  $f$  vérifie l'équation différentielle  $(1+x^2) y'' + x y' - \alpha^2 y = 0$  avec les conditions initiales  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = \alpha$ .

Si on pose a priori  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  en supposant le rayon de convergence  $R > 0$ , pour

$|x| < R$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^2 a_n x^n = 0$$

$$\text{pour } n \geq 0, \quad (n+2)(n+1) a_{n+2} + (n^2 - \alpha^2) a_n = 0$$

On a donc  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = \alpha$ , puis pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
 a_{2n} &= (-1)^n \frac{(-\alpha^2)(4-\alpha^2) \dots (4n^2 - \alpha^2)}{2n!} \\
 a_{2n-1} &= (-1)^{n-1} \frac{\alpha(1-\alpha^2) \dots ((2n-1)^2 - \alpha^2)}{(2n-1)!}
 \end{aligned}$$

**Le rayon de convergence est 1**, ce qui justifie a posteriori le développement en série entière pour  $|x| < 1$ .

**Remarque:** si  $\alpha$  est entier, la série des termes impairs ou la série des termes pairs est un polynôme mais l'autre garde bien un rayon de convergence 1.

$$\begin{aligned}
 \text{a-2) } f(x) &= \text{Arg th} \left( \frac{1}{2} + x \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\frac{3}{2} + x}{\frac{1}{2} - x} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left( 3 \frac{1 + \frac{2x}{3}}{1 - 2x} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{2x}{3} \right) - \frac{1}{2} \ln (1 - 2x) \\
 &= \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left( \frac{2}{3} \right)^n x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 2^n x^n, \text{ soit:}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Arg th} \left( \frac{1}{2} + x \right) = \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left( 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} \right) x^n}$$

le rayon de convergence étant celui du développement de  $\ln(1-2x)$  c'est à dire  $\frac{1}{2}$ .

a-3) A priori on ne peut envisager sans frayeur de chercher le développement par carré de Cauchy de celui de Arc sin  $x$ .

*Essayons plutôt de dériver deux fois:*

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \text{Arc sin } x$$

$$f''(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^{3/2}} \text{Arc sin } x + \frac{2}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} f'(x) + \frac{2}{1-x^2}.$$

La fonction  $f'$  est donc solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2) y' - x y = 2 \quad \text{avec } f'(0) = 0.$$

$$\text{Si } y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

$$a_1 = 2, \quad 2a_2 = 0 \quad \text{et pour } n \geq 2:$$

$$(n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1} - a_{n-1} = 0, \quad \text{soit:}$$

$$(n+1)a_{n+1} = n a_{n-1}.$$

**Les termes de rang pair sont nuls** (normal:  $y$  est paire), et pour  $n \geq 0$ ,

$$a_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \cdot 2$$

Le rayon de convergence est 1 car  $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = \frac{2n}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ , et pour  $|x| < 1$ ,

$$y(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} x^{2n+1}.$$

La fonction  $f$  est la primitive de  $y$  s'annulant en 0 et:

$$\text{pour } |x| < 1, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \frac{x^{2n+2}}{n+1}$$

$$\text{a-4) Pour tout } x \text{ réel et } t \text{ dans } [0, 1], \varphi(t, x) = t^{xt} = e^{xt \ln t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (t \ln t)^n}{n!}$$

et **cette formule se prolonge par continuité pour  $t = 0$  avec  $\varphi(0, x) = 1$ .**

La fonction  $t \mapsto |t \ln t|$  atteint son maximum qui vaut  $\frac{1}{e}$ . Ainsi:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, 1] \quad \left| \frac{x^n (t \ln t)^n}{n!} \right| \leq \frac{\left| \frac{x}{e} \right|^n}{n!}.$$

Pour  $x$  fixé on a donc une série de fonctions de  $t$  **normalement convergente** sur  $[0, 1]$  et **on peut l'intégrer terme à terme**:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^1 t^n (\ln t)^n dt.$$

Si  $I(n, p) = \int_0^1 t^n (\ln t)^p dt$ , par intégration par parties,

$$I(n, p) = \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} (\ln t)^p \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \frac{p}{t} (\ln t)^{p-1} dt.$$

On trouve la relation de récurrence  $I(n, p) = -\frac{p}{n+1} I(n, p-1)$ , qui donne, par itération:

$$I(n, p) = (-1)^p \frac{p!}{(n+1)^p} I(n, 0) = (-1)^p \frac{p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

Dans le cas particulier qui nous occupe  $I(n, n) = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$  et:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Le cas particulier pour le calcul numérique est  $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$ . La série vérifie

les conditions de la règle spéciale des séries alternées et on peut majorer le reste:

$$\left| f(1) - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{(N+2)^{N+2}}.$$

La précision cherchée sera obtenue pour  $N = 8$ , ce qui donne l'approximation

$$f(1) \cong 0,7834305108$$

b) Si  $t = \sin x$  et  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $x = \text{Arc sin } t$  et

$$f(x) = g(t) = \sin(\alpha \text{Arc sin } t), t \in [-1, 1].$$

$$g'(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{1-t^2}} \cos(\alpha \text{Arc sin } t)$$

$$\begin{aligned} g''(t) &= \frac{\alpha t}{(1-t^2)^{3/2}} \cos(\alpha \text{Arc sin } t) - \frac{\alpha^2}{1-t^2} \sin(\alpha \text{Arc sin } t) \\ &= \frac{t}{1-t^2} g'(t) - \frac{\alpha^2}{1-t^2} g(t). \end{aligned}$$

La fonction  $g$  est donc sur  $[-1, 1]$  la solution de l'équation différentielle:

$$(1-t^2)y'' - ty' + \alpha^2 y = 0$$

vérifiant les conditions initiales  $y(0) = 0, y'(0) = \alpha$ .

Posons a priori  $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ , on obtient la relation:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - n a_n + \alpha^2 a_n &= 0, \text{ soit:} \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} &= (n^2 - \alpha^2)a_n \end{aligned}$$

Comme  $a_0 = 0$ , les termes pairs sont nuls, et pour les termes impairs:

$$a_{2n+1} = \frac{((2n-1)^2 - \alpha^2)((2n-3)^2 - \alpha^2) \dots (1 - \alpha^2) \alpha}{(2n+1)!}$$

Si  $\alpha$  est un entier impair,  $\alpha = 2k + 1$ , les  $a_{2n+1}$  sont nuls pour  $n > k$  et  $g$  est un **polynôme de degré  $2k + 1$**  (on retrouve ici un résultat connu  $\sin(2k + 1)x = P_k(\sin x)$ ).

Sinon le rayon de convergence est 1 et:

$$\sin \alpha x = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} (\sin x)^{2n+1}$$

c-1) La dérivée  $\frac{d}{dx} f_{\theta}(x) = \frac{\sin \theta}{1 + 2x \cos \theta + x^2}$  est une fonction rationnelle de pôles  $-e^{i\theta}$  et  $-e^{-i\theta}$  donc **est développable en série entière de rayon de convergence 1** (C-2).

$$\begin{aligned} \text{Pour } \theta \notin \pi \mathbb{Z}, \quad \frac{d}{dx} f_{\theta}(x) &= \frac{\sin \theta}{(x + e^{i\theta})(x + e^{-i\theta})} = \frac{1}{2i} \left( \frac{-1}{x + e^{i\theta}} + \frac{1}{x + e^{-i\theta}} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{e^{i\theta}}{1 + x e^{i\theta}} - \frac{e^{-i\theta}}{1 + x e^{-i\theta}} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left( e^{i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{in\theta} x^n - e^{-i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-in\theta} x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sin(n+1)\theta x^n. \end{aligned}$$

On en déduit **avec un rayon de convergence 1**:

$$f_{\theta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n \theta}{n} x^n$$

la formule étant encore valable pour  $\theta \in \pi \mathbb{Z}$ .

On procède de la même manière pour  $g_{\theta}(x)$  si  $\theta \notin \pi \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} g_{\theta}(x) &= \frac{x + \cos \theta}{1 + 2x \cos \theta + x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x + e^{i\theta}} + \frac{1}{x + e^{-i\theta}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{-i\theta}}{1 + x e^{-i\theta}} + \frac{e^{i\theta}}{1 + x e^{i\theta}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( e^{-i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-in\theta} x^n + e^{i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{in\theta} x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos(n+1)\theta x^n. \end{aligned}$$

On en déduit **avec un rayon de convergence 1**:

$$g_{\theta}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos n \theta}{n} x^n$$

la formule étant encore valable pour  $\theta \in \pi \mathbb{Z}$ .

c-2) Pour  $0 < r < 1$  et  $z = r e^{i\theta}$ ,

$$g_{\theta}(r) = \frac{1}{2} \ln(1 + 2r \cos \theta + r^2) = \ln |1 + z|$$

$$\text{Arc tan } \frac{r \sin \theta}{1 + r \cos \theta} = \text{Arg}(1 + z) \text{ pris dans } ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [.$$

Donc  $F(z) = \ln |1 + z| + i \text{Arg}(1 + z) = L(1 + z)$ .

*C'est le logarithme complexe* étudié dans l'exercice A-6 et on retrouve que

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}, \text{ ainsi que } e^{F(z)} = e^{\ln|1+z|+i\text{Arg}(1+z)} = 1 + z.$$

### C-3 Développement en série entière d'un quotient:

a-1) Si la suite  $(b_n)$  existe, elle vérifie les relations:

$$b_0 = 1$$

$$b_1 + a_1 b_0 = 0$$

...

...

$$b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = 0$$

...

qui permettent de définir *une unique suite*  $(b_n)$  vérifiant l'égalité formelle  $(\sum a_n z^n)(\sum b_n z^n) = 1$ .

a-2) Si  $0 < r < R$ , la suite  $\sum |a_n| r^n$  est convergente, donc la suite  $|a_n| r^n$  est bornée. Il existe  $K > 0$  tel que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| r^n \leq K.$$

$$\text{Mais alors, } \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{\sqrt[n]{K}}{r} \text{ et } \frac{\sqrt[n]{K}}{r} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r}.$$

La suite  $\sqrt[n]{|a_n|}$  est donc bornée et *il existe*  $A > 0$  *tel que*  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq A$ , *soit pour tout*  $n$ ,  $|a_n| \leq A^n$ .

Pour la suite  $(b_n)$ , quel que soit le choix de  $B > 0$ , la relation  $|b_n| \leq B^n$  est vraie pour  $n = 0$  puisque  $b_0 = 1$ .

Supposons alors qu'il existe  $B > 0$  tel que:

$$\forall k \in [0, n], |b_k| \leq B^k.$$

On a alors:

$$|b_{n+1}| \leq |a_1| |b_n| + |a_2| |b_{n-1}| + \dots + |a_{n+1}| |b_0|$$

$$\leq A B^n + A^2 B^{n-1} + \dots + A^{n+1} B^0$$

$$\leq \frac{B^{n+2} - A^{n+2}}{B - A} - B^{n+1} \leq B^{n+1} \left( \frac{B}{B - A} - 1 \right) = B^{n+1} \frac{A}{B - A} \text{ à condition de}$$

choisir  $B > A$  et finalement *on aura encore*  $|b_{n+1}| \leq B^{n+1}$  *en choisissant*  $B = 2A$ .

Par récurrence on en déduit la propriété demandée. Mais alors la suite  $b_n \left(\frac{1}{B}\right)^n$  est bornée et le rayon de convergence de  $\sum b_n z^n$  est au moins égal à  $\frac{1}{B}$  et **en tous cas strictement positif**.

b) Si  $f$  et  $g$  sont développables en série entière de rayon de convergence  $\geq r$  et si  $g(0) = a_0 \neq 0$ , on peut écrire encore  $\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\frac{1}{a_0} f(z)}{\frac{1}{a_0} g(z)}$ .

Posons  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  pour  $|z| < r$ .

D'après a) il existe une unique série entière  $\sum b_n z^n$  de rayon de convergence  $r'$  strictement positif et  $\alpha > 0$  tels que pour  $|z| < \alpha$ :

$$\frac{1}{a_0} g(z) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = 1.$$

En effet si  $\alpha$  est inférieur à  $r$  et  $r'$ , pour  $|z| < \alpha$ , **la convergence des deux séries implique la convergence du produit de Cauchy et l'égalité des sommes**.

Si  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ , pour  $|z| < r$ , on peut écrire, pour  $|z| < \alpha$ :

$$f(z) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{a_0} z^n g(z) = f(z),$$

et si on définit  $d_n$  par le produit de Cauchy  $\sum c_n z^n \sum \frac{b_n}{a_0} z^n = \sum d_n z^n$ , on a l'égalité formelle  $\sum d_n z^n \sum a_n z^n = \sum c_n z^n$ , qui donne pour  $|z| < \alpha$  l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \text{ soit:}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n = \frac{f(z)}{g(z)}}$$

c) Si  $f(x) = \tan x$ , la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $f$  est de la forme  $f^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$  où  $P_n$  est un polynôme à coefficients entiers positifs (récurrence immédiate), donc est positive pour  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

Si nous écrivons une formule de Taylor avec reste intégrale, pour  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

le reste est positif donc  $0 \leq \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \leq f(x)$ , et la série de Taylor est convergente.

Elle est donc **absolument convergente** dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

Si nous appliquons la question b) à  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  il existe  $\alpha > 0$  et une série entière

$$\sum a_n x^n \text{ tels que pour } |x| < \alpha, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Bien entendu, c'est la série de Taylor donc  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ .

On a donc l'égalité formelle (*produit de Cauchy*):

$$\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \sum a_n x^n,$$

et cette égalité formelle donne une égalité des sommes **pour tout  $x$  tels que les séries sont absolument convergentes**, c'est à dire pour tout  $x$  dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Finalement le rayon de convergence est  $\frac{\pi}{2}$ .

La fonction étant impaire, on a donc:

$$\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ , \tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1} x^{2n+1}$$

Pour trouver une formule donnant les  $\alpha_i$  par récurrence, on peut utiliser la relation  $f'(x) = 1 + f^2(x)$  vérifiée par  $f$  et **en identifiant les coefficients de degré  $2n$**  on obtient  $\alpha_1 = 1$  et pour  $n \geq 1$ :

$$\alpha_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{2k+1} \alpha_{2(n-k)-1}$$

#### C-4 Développement d'une série de fonction:

a) Comme  $|\sin a^n x| \leq |a|^n |x|$  la série est **normalement convergente sur tout segment** et  $f$  est en particulier continue sur  $\mathbb{R}$ . De plus,

$$f(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(a^{n+1} x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(a^n x) = f(x) - \sin x.$$

Cherchons a priori le développement en série entière de  $f$  sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n.$$

Si le rayon de convergence est  $R > 0$ , pour  $|x| < R$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ ce qui donne:}$$

*pour  $n$  pair,  $n = 2p$*

$$\alpha_{2p} (1 - a^{2p}) = 0 \text{ donc } \alpha_{2p} = 0$$

*pour  $n$  impair,  $n = 2p + 1$*

$$\alpha_{2p+1} (1 - a^{2p+1}) = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \text{ donc } \alpha_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{(1 - a^{2p+1}) (2p+1)!}.$$

Réciproquement la fonction  $g$  définie par

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1 - a^{2n+1}) (2n+1)!} \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ (rayon de convergence infini)}$$

et vérifie la relation  $g(ax) = g(x) - \sin x$ , qui donne par une récurrence immédiate:

$$g(x) = \sum_{n=0}^N \sin(a^n x) + g(a^{N+1} x).$$

Comme  $g(0) = 0$  et comme  $g$  est continue,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a^{n+1} x) = 0$  et  $g = f$ . Finalement

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1 - a^{2n+1}) (2n+1)!}$$

Dans cet exercice, on peut aussi étudier le *développement de Taylor*. Les séries dérivées  $k^{\text{ièmes}}$  étant *normalement convergentes*, on peut dériver terme à terme et

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a^n)^k \sin(a^n x + k \frac{\pi}{2}) \text{ donc}$$

$$|f^{(k)}(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a|^{kn} = \frac{1}{1 - |a|^k} \leq \frac{1}{1 - |a|}.$$

Les dérivées étant *uniformément bornées sur*  $\mathbb{R}$ , la fonction est développable en série entière de rayon de convergence infini.

Les coefficients du développement en série entière sont:

$$a_k = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} a^{kn} \sin(k \frac{\pi}{2}) \text{ avec pour tout } p:$$

$$\begin{cases} a_{2p} = 0 \\ a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \frac{1}{1 - a^{2p+1}} \end{cases}$$

On retrouve bien sûr le même résultat.

On peut enfin, si l'on préfère, développer chaque  $\sin(a^n x)$  en série entière et permuter les deux  $\sum$ .

b) Si  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2n + 1}$ , la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)$  car chacune des deux séries  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{x + 2n + 1}$  et  $\sum_{n < 0} \frac{(-1)^n}{x + 2n + 1}$  satisfait aux conditions de la *règle spéciale des séries alternées*, à partir d'un certain rang.

Comme  $f$  est 2-périodique, on peut donc se contenter de l'intervalle  $] -1, 1[$ .

Considérons les termes d'indices positifs, et groupons les par tranche de deux:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2n+1} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{2N-1} \frac{(-1)^n}{x+2n+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{x+4n+1} - \frac{1}{x+4n+3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{(4n+1)^{k+1}} - \frac{1}{(4n+3)^{k+1}} \right) x^k \end{aligned}$$

La somme double  $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{(4n+1)^{k+1}} - \frac{1}{(4n+3)^{k+1}} \right| |x|^k$  vaut

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{(4n+1)^{k+1}} - \frac{1}{(4n+3)^{k+1}} \right) |x|^k = \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4n+1-|x|} - \frac{1}{4n+3-|x|} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(4n+1-|x|)(4n+3-|x|)} \end{aligned}$$

et est donc convergente pour  $|x| < 1$  (terme général en  $\frac{K}{n^2}$ ).

On peut donc intervertir les sommations (cf exercice I.A-6) et:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2n+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^{k+1}} - \frac{1}{(4n+3)^{k+1}} \right) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{k+1}} \right) x^k. \end{aligned}$$

On trouve de la même manière pour  $|x| < 1$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^n}{x+2n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{k+1}} \right) x^k, \text{ et finalement}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k x^k \quad \text{avec}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{k+1}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N-1}^N \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{k+1}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N (-1)^n \left( \frac{1}{(2n+1)^{k+1}} - \frac{1}{(-2n-1)^{k+1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 - (-1)^{k+1}}{(2n+1)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Ainsi  $a_{2p+1} = 0$  et  $a_{2p} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2p+1}}$ . Finalement:

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \left( 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2p+1}} \right) x^{2p}$$

c) Posons  $f_N(x) = \prod_{n=0}^N (1 + \lambda^n x)$ .

S'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $x = -\lambda^{-m}$ , pour  $n \geq m$ ,  $f_n(x)$  est nul et la suite converge vers 0.

Sinon pour  $n$  assez grand  $1 + \lambda^n x$  est strictement positif et la suite  $f_N(x)$  garde un signe constant.

De plus,  $\ln |f_N(x)| = \sum_{n=0}^N \ln |1 + \lambda^n x|$ .

La série est absolument convergente car  $|\ln |1 + \lambda^n x|| \sim \lambda^n |x|$  donc la suite  $f_N(x)$  converge vers  $f(x)$ .

Remarquons de plus que  $f(x) = (1+x)f(\lambda x)$  (1).

Cherchons alors une solution de (1) sous forme de la somme d'une série entière.

Posons  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Si  $g$  est solution de (1),

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n x^{n+1},$$

soit pour  $n \geq 1$   $a_n (1 - \lambda^n) = \lambda^n a_{n-1}$ , donc

$$a_n = \frac{\lambda^{n(n+1)/2}}{(1 - \lambda^n)(1 - \lambda^{n-1}) \dots (1 - \lambda)} a_0.$$

Comme  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\lambda^n}{1 - \lambda^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , le rayon de convergence est infini, et si de plus

$$g(0) = 1, \quad g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n(n+1)/2}}{(1 - \lambda^n)(1 - \lambda^{n-1}) \dots (1 - \lambda)} x^n.$$

Mais comme  $g(x) = (1+x)g(\lambda x)$ , par une récurrence immédiate:

$$g(x) = (1+x)(1+\lambda x) \dots (1+\lambda^n x) g(\lambda^{n+1} x) = f_n(x) g(\lambda^{n+1} x).$$

L'application  $g$  est continue en 0 donc  $g(\lambda^{n+1} x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(0) = 1$  et

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

On peut donc écrire le développement en série entière:

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + \lambda^n x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n(n+1)/2}}{(1 - \lambda^n)(1 - \lambda^{n-1}) \dots (1 - \lambda)} x^n$$

d) On peut utiliser une somme double, mais il va être plus rapide de calculer la série de Taylor et de majorer le reste.

L'application  $f$  est définie sur  $]-1, +\infty[$  car si  $a_n(x) = \frac{1}{n!} \ln(x+n)$ , les  $(a_n)$  sont tous définis sur  $]-1, +\infty[$  et de plus  $\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{\ln(x+n+1)}{\ln(x+n)} \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

La série dérivée  $p^{\text{ième}}$  a pour terme général  $a_n^{(p)}(x) = \frac{(-1)^{p-1}}{n!} \frac{(p-1)!}{(x+n)^p}$ .

Pour tout  $\alpha$ , avec  $0 < \alpha < 1$  et  $x \in [-\alpha, +\infty[$ ,

$$|a_n^{(p)}(x)| \leq \frac{(p-1)!}{n! (n-\alpha)^p} = b_n.$$

Comme  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n-\alpha)^p}{(n+1)(n+1-\alpha)^p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , il y a convergence normale de toutes les séries dérivées sur  $[-\alpha, +\infty[$ .

Ainsi on peut dériver indéfiniment terme à terme et pour  $x \in ]-1, +\infty[$ ,

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1} (p-1)!}{n! (x+n)^p}.$$

On peut alors majorer pour  $-1 < \alpha$  et  $x \geq \alpha$ ,

$$\begin{aligned} |f^{(p)}(x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p-1)!}{n! (n+\alpha)^p} \\ &\leq (p-1)! \left( \frac{1}{1+\alpha} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \right) \leq (p-1)! \left( \frac{1}{1+\alpha} + e - 2 \right) \end{aligned}$$

Le reste de Taylor-Mac Laurin est donc majoré:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \right| &\leq \left( \frac{1}{1+\alpha} + e - 2 \right) \int_0^x (x-t)^p dt \\ &\leq \left( e - 2 + \frac{1}{1+\alpha} \right) \frac{|x|^{p+1}}{p+1}, \end{aligned}$$

$$\text{donc } \int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0 \text{ si } |x| < 1.$$

L'application  $f$  est donc *développable en série entière de rayon de convergence 1*.

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p, \text{ avec } a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n!} \text{ et pour } p \geq 1, a_p = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{n! n^p}.$$

### C-5 Critère d'analyticité réelle:

Prenons  $0 < \alpha < R$ , puis  $\beta = \frac{R+\alpha}{2}$  de telle sorte que  $\alpha < \beta < R$ .

La série de Taylor  $\sum a_n x^n$  est *absolument convergente* pour  $x = \beta$  donc la suite  $|a_n \beta^n|$  est bornée par un  $M > 0$ . On a donc pour  $|x| \leq \alpha$ ,

$$|f(x)| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{|x|}{\beta} \right)^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^n = \frac{M\beta}{\beta - \alpha}.$$

De plus, pour  $p \geq 1$ ,

$$|f^{(p)}(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)(n+p-1) \dots (n+1) |a_{n+p}| |x|^n$$

$$\leq M \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)(n+p-1) \dots (n+1) \frac{\alpha^n}{\beta^{n+p}}.$$

$$\text{Mais } \sum_{n=0}^{\infty} (n+p)(n+p-1) \dots (n+1) \frac{X^n}{\beta^{n+p}} = \frac{d^p}{dx^p} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{X}{\beta} \right)^n \right)$$

$$= \frac{d^p}{dx^p} \left( \frac{\beta}{\beta-x} \right) = \frac{p! \beta}{(\beta-x)^{p+1}}.$$

$$\text{Finalement } |f^{(p)}(x)| \leq \frac{p! M \beta}{(\beta-x)^{p+1}}.$$

Le résultat est donc acquis à condition de prendre  $K = \frac{M \beta}{\beta-\alpha}$  et  $\delta = \frac{1}{\beta-\alpha}$ .

**Réciproquement**, si la propriété ( $\mathcal{P}$ ) est vérifiée, on montre que  $f$  est développable en série entière sur un voisinage de 0. En effet, le reste de Taylor-Mac Laurin peut être majoré pour  $x \in [-\alpha, \alpha]$ :

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq K (n+1)! \delta^{n+1} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\leq K (|x| \delta)^{n+1}, \text{ donc il tend vers 0 pour } |x| < \frac{1}{\delta}.$$

## C-6 Fonctions absolument croissantes:

a) On sait que le reste de Taylor-Mac Laurin est:

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Dans le cas présent on a donc  $R_n(x) \geq 0$  pour  $0 \leq x < \alpha$ , donc  $0 \leq \sum_{k=0}^n a_k x^k \leq f(x)$ .

La série étant à termes positifs est convergente et par passage à la limite:

$$\boxed{\forall x \in [0, \alpha[, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \leq f(x)}$$

b) Comme  $R_{n-1}(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x)$ , la suite  $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

$$\text{Par ailleurs } x^{-n} R_n(x) = \int_0^x \left( \frac{x-t}{x} \right)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} dt.$$

Prenons  $0 < x < y < \alpha$

$$\begin{aligned} y^{-n} R_n(y) - x^{-n} R_n(x) &= \int_0^y \left(1 - \frac{t}{y}\right)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} dt - \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^n \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \\ &\geq \int_0^x \left( \left(1 - \frac{t}{y}\right)^n - \left(1 - \frac{t}{x}\right)^n \right) \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \geq 0 \end{aligned}$$

puisque l'application  $u \mapsto \left(1 - \frac{t}{u}\right)^n$  est croissante sur  $[0, t]$ .

On peut alors, si  $x$  est fixé dans  $[0, \alpha[$ , choisir  $y = \frac{x + \alpha}{2}$  de telle sorte que  $x < y < \alpha$ .

On peut alors écrire:

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n R_n(y) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n R_0(y) = \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y), \text{ et cela prouve bien que}$$

$$R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ donc que pour tout } x \in [0, \alpha[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

c) La fonction  $x \mapsto \tan x$  est absolument croissante sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  puisque sa dérivée  $n$ -ième s'écrit  $f^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$ , où  $P_n$  est un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{N}$ .

D'après ce qui précède, sa série de Taylor converge vers  $f$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$ .

Pour  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ ,

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| = \int_0^{-x} \frac{(-x-t)^n}{n!} |f^{(n+1)}(-t)| dt \\ &= \int_0^{-x} \frac{(-x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = R_n(-x), \end{aligned}$$

puisque  $f^{(n+1)}$  est soit paire, soit impaire.

On a encore  $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  et  $f$  est somme de sa série de Taylor sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

On a donc, si  $\sum a_n x^n$  est cette série et si son rayon de convergence est  $R$ ,

$$\left( \sum a_n x^n \right) \left( \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

donc pour tout  $x \in ]-R, R[$ ,

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Comme  $\cos \frac{\pi}{2} = 0 \neq \sin \frac{\pi}{2}$ , l'égalité ne peut avoir lieu pour  $x = \frac{\pi}{2}$  et cela prouve que  $\frac{\pi}{2} \geq R$ .

$$\text{Finalement } R = \frac{\pi}{2}.$$

**Remarque:** on peut obtenir l'existence d'un développement en série entière pour la fonction tangente par d'autres méthodes (voir exercice C-3).

### C-7 Série de Taylor ayant un rayon de convergence nul:

La série de fonctions est **uniformément convergente sur**  $\mathbb{R}$ , car  $|e^{n(ix-1)}| \leq e^{-n}$ .

La série dérivée  $p^{\text{ième}}$  peut être aussi majorée uniformément

$$\left| \frac{d^p}{dx^p} (e^{n(ix-1)}) \right| = |(in)^p e^{in^2x} e^{-n}| = n^{2p} e^{-n}.$$

Toutes les séries dérivées sont normalement convergentes sur  $\mathbb{R}$  et ***f est dérivable terme à terme indéfiniment*** avec

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} i^p n^{2p} e^{inx-n}.$$

La série de Taylor de  $f$  est donc  $\sum a_p x^p$  avec

$$a_p = \frac{1}{p!} f^{(p)}(0) = \frac{i^p}{p!} \sum_{n=0}^{\infty} n^{2p} e^{-n} \quad \text{donc}$$

$$|a_p| = \frac{1}{p!} \sum_{n=0}^{\infty} n^{2p} e^{-n} \geq \frac{1}{p!} p^{2p} e^{-p}.$$

Mais d'après la formule de *Stirling*,

$$\frac{p^{2p}}{p!} e^{-p} \sim \frac{p^p}{\sqrt{2\pi p}} = \frac{p^{p-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{et pour tout } r > 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} |a_p r^p| = +\infty.$$

***Le rayon de convergence est nul***

## D - Fonctions analytiques

### D-1 Développement en série entière:

Si  $u$  est tel que  $|z_0 + u| < R$ , on peut écrire:

$$\begin{aligned} f(z_0 + u) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^n C_n^k z_0^{n-k} u^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n C_n^k z_0^{n-k} u^k, \end{aligned}$$

avec la convention naturelle  $C_n^k = 0$  pour  $k > n$ .

La série double  $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n C_n^k z_0^{n-k} u^k$  est **absolument convergente** pour

$$|u| < k - |z_0| \text{ car } \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_n| C_n^k |z_0|^{n-k} |u|^k = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^n C_n^k |z_0|^{n-k} |u|^{n-k} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z_0| + |u|)^n,$$

et la série entière est absolument convergente puisque  $|z_0| + |u| < R$ .

On peut donc intervertir les sommations et écrire ainsi:

$$f(z_0 + u) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^k z_0^{n-k} u^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=k}^{\infty} a_n C_n^k z_0^{n-k} \right) u^k,$$

qui constitue le développement en série entière de  $u \mapsto f(z_0 + u)$ .

**Remarque:** les lecteurs connaissant la dérivation des fonctions de variable complexe reconnaîtront dans la parenthèse  $\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$  et donc dans la série entière, la série de Taylor au point  $z_0$ .

## D-2 Principe des zéros isolés:

a) Désignons par  $m$  le plus petit indice pour lequel  $a_m \neq 0$ . Ainsi:

$$f(z) = a_m z^m + z^{m+1} \left( \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n z^{n-m-1} \right) = a_m z^m + z^{m+1} g(z).$$

La série entière de somme  $g$  converge pour  $|z| < R$ , **donc la fonction  $g$  est continue en 0 et  $z g(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$ .**

Il existe donc  $\alpha \in ]0, R[$  tel que pour  $|z| < \alpha$ , on ait  $|z g(z)| < |a_m|$ , donc  $a_m + z g(z) \neq 0$ .

Pour  $0 < |z| < \alpha$ , le facteur  $z^m$  est lui-aussi non nul, donc:

$f(z)$  ne s'annule pas pour  $0 < |z| < \alpha$ .

Par contraposée, si  $f$  s'annule sur tout voisinage de 0 en un autre point que 0, **elle est identiquement nulle sur  $\mathcal{B}(0, R)$** , car tous les coefficients  $c_n$  sont nuls.

b) En utilisant le développement au point  $z_0$  vu au D-1, on en déduit que si  $f$  s'annule sur tout voisinage de  $z_0$  en un autre point que  $z_0$ , elle est identiquement nulle sur  $\mathcal{B}(z_0, R - |z_0|)$ . Mais dans ce cas:

i) si  $0 \in \mathcal{B}_f(z_0, R - |z_0|)$ , i.e.  $|z_0| \leq \frac{R}{2}$ ,  $f$  s'annule une infinité de fois sur tout voisinage de 0 donc est identiquement nulle sur  $\mathcal{B}(0, R)$ ,

ii) si  $|z_0| > \frac{R}{2}$ , on considère le point  $z_1 = \left(2 - \frac{R}{|z_0|}\right) z_0$  qui est tel que

$$|z_1| = 2|z_0| - R \text{ et } |z_1 - z_0| = R - |z_0|.$$

Comme  $z_1 \in \mathcal{B}_f(z_0, R - |z_0|)$ ,  $f$  s'annule une infinité de fois sur tout voisinage de  $z_1$  donc est identiquement nulle sur  $\mathcal{B}(z_1, R - |z_1|) = \mathcal{B}(z_1, 2(R - |z_0|))$ .

On poursuit alors la démarche:

si  $|z_1| \leq \frac{R}{2}$  i.e.  $|z_0| \leq \frac{3}{4}R$ , on est dans le cas i) en échangeant les rôles de  $z_0$  et  $z_1$ .

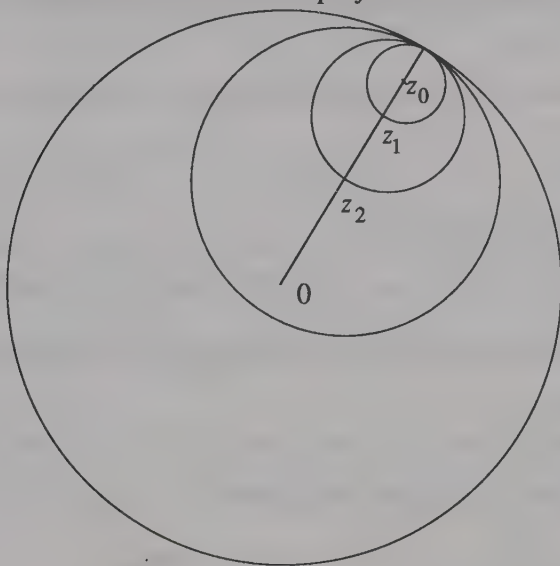
Sinon, on est dans le cas ii) et on définit  $z_2 = \left(2 - \frac{R}{|z_1|}\right) z_1$  avec

$$|z_2| = 2|z_1| - R = 4|z_0| - 3R.$$

Plus généralement, si nous supposons défini  $z_p$ , posons  $z_{p+1} = \left(2 - \frac{R}{|z_p|}\right) z_p$  de telle sorte que  $|z_{p+1}| = 2|z_p| - R = 2^p|z_0| - (2^p - 1)R$ .

La condition pour que 0 soit dans  $\mathcal{B}_f(z_{p+1}, R - |z_{p+1}|)$  (donc pour que  $f$  soit nulle sur  $\mathcal{B}(0, R)$ ) sera  $|z_{p+1}| \leq \frac{R}{2}$ , soit:  $|z_0| \leq (1 - 2^{-p-1})R$ .

Comme  $|z_0| < R$  et que  $\lim_{p \rightarrow \infty} (1 - 2^{-p-1}) = 1$ , cette condition sera vérifiée pour un certain rang  $p$  et on pourra conclure dans tous les cas que  $f$  est nulle dans  $\mathcal{B}(0, R)$ .



### D-3 Principe du Maximum:

a) On peut écrire:  $|f(re^{it})|^2 = f(re^{it})\overline{f(re^{it})} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} r^n e^{-int}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \overline{a_k} a_{n-k} e^{i(n-2k)t} \right) r^n,$$

puisque il y a convergence absolue.

Il y a en fait **convergence normale** par rapport à la variable  $t$  sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$

puisque la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n |a_k| |a_{n-k}| \right) r^n$  est convergente.

*On peut donc intégrer terme à terme* et les seuls termes non nuls dans cette intégration sont ceux pour lesquels  $n - 2k = 0$  et finalement:

$$I(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- a_n r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

En fait, cette égalité n'est que *la relation de Parseval* appliquée à la fonction  $t \mapsto f(r e^{it})$  continue et  $2\pi$ -périodique.

Si  $f$  n'est pas constante, il existe  $n > 0$  tel que  $a_n$  est non nul et alors:

$$|f(0)|^2 = |a_0|^2 < \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq \sup_{|z|=r} |f(z)|^2 \leq \sup_{|z| \leq r} |f(z)|^2.$$

b) Une conséquence du a) est que **0 ne peut être un maximum local** (si  $f$  n'est pas constante).

Le résultat de l'exercice D-1 permet alors de faire le même raisonnement en un point quelconque de  $\mathcal{B}(0, R)$ .

c) Dans le cas présent, pour tout  $r > 0$ ,

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{it})|^2 dt \leq K^2 (1+r)^{2\alpha}, \text{ donc } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq K^2 (1+r)^{2\alpha}.$$

Pour tout  $n > \alpha$ , on a donc  $|a_n|^2 \leq K^2 (1+r)^{2(\alpha-n)} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$ , c'est à dire  $a_n = 0$ , et  **$f$  est un polynôme de degré  $\leq \alpha$** .

d) Grâce à l'exercice D-1, on peut écrire pour  $|u| < R - |z_0|$

$$f(z_0 + u) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n u^n.$$

Comme  $f$  n'est pas constante il existe un indice  $m > 0$  tel que  $b_m \neq 0$ .

Supposons que  **$m > 0$  est le plus petit indice tel que  $b_m \neq 0$** . On peut écrire alors un développement limité de  $f(z_0 + u)$  sous la forme:

$$f(z_0 + u) = b_0 + b_m u^m + u^m \varepsilon(u) \text{ où } \varepsilon(u) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+m} u^n \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0.$$

*Supposons alors que  $|f|$  ait un minimum localement en  $z_0$  et que  $f(z_0) = b_0 \neq 0$ .*

$$\frac{1}{b_0} f(z_0 + u) = 1 + \frac{b_m}{b_0} u^m (1 + \varepsilon'(u)).$$

Choisissons alors  $u$  de la forme  $u = \lambda r e^{i\theta}$  avec  $0 < \lambda < 1$  et  $r^m e^{im\theta} = -\frac{b_0}{b_m}$  ( $r e^{i\theta}$  est une racine  $m^{\text{ième}}$  de  $-\frac{b_0}{b_m}$ ), pour avoir:

$$\frac{1}{b_0} f(z_0 + u) = 1 - \lambda^m (1 + \varepsilon''(\lambda)) \text{ avec } \lim_{\lambda \rightarrow 0} \varepsilon''(\lambda) = 0.$$

Il vient alors:

$$\left| \frac{1}{b_0} f(z_0 + u) \right| \leq |1 - \lambda^m + \lambda^m \varepsilon''(\lambda)| = 1 - \lambda^m (1 - |\varepsilon''(\lambda)|) \\ \leq 1 - \frac{\lambda^m}{2} \text{ pour } \lambda \text{ assez petit, donc}$$

$$|f(z_0 + u)| < |b_0| = |f(z_0)|.$$

**Sur tout voisinage de  $z_0$**  il existe donc  $z$  tel que  $|f(z)| < |f(z_0)|$  et  $z_0$  n'est pas un minimum local.

**Application:**

Si  $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  est un polynôme non constant (avec  $a_n \neq 0$ ),

$$|f(z)| \geq |a_n| |z|^n - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \geq |z|^n \left( |a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^{k-n} \right) \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Il existe donc  $R > 0$  tel que  $|z| > R \Rightarrow |f(z)| > |f(0)|$ .

On a donc  $\inf_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| = \inf_{|z| \leq R} |f(z)|$ , puisque  $\inf_{|z| > R} |f(z)| \geq |f(0)| \geq \inf_{|z| \leq R} |f(z)|$ .

**L'application  $|f|$  étant continue sur le compact  $\mathcal{B}_f(0, R)$  a un minimum** et il existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $|f(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$ .

D'après ce qui précède, on a nécessairement  $f(z_0) = 0$ , ce qui constitue le *théorème de d'Alembert-Gauss*.

**Remarque:** on peut démontrer d) directement pour un polynôme en utilisant la formule de Taylor (exacte) en  $z_0$ .

## D-4 Approximation polynômiale.

a) **Première méthode:**

L'application  $f$  est continue sur le compact  $\Delta$  donc uniformément continue.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0; \forall z, z' \in \Delta, |z - z'| \leq \alpha \Rightarrow |f(z) - f(z')| \leq \varepsilon.$$

Si nous prenons  $0 < \delta < 1$  et  $z' = (1 - \delta)z$ , si  $|z| \leq R$ , nous sommes sûrs d'avoir

$$|z - z'| = |z| \delta \leq \alpha \text{ pour } \delta = \frac{\alpha}{R}, \text{ donc d'avoir } |f(z) - f((1 - \delta)z)| \leq \varepsilon.$$

La série entière  $\sum a_n z^n$  est normalement convergente sur tout compact inclus dans  $D$  donc en particulier sur  $\mathcal{B}_f(0, (1 - \delta)R)$ .

Il existe donc  $m > 0$  tel que:

$$\sup_{|z'| \leq (1-\delta)R} \left| f(z') - \sum_{n=0}^m a_n z'^n \right| = \sup_{|z| \leq R} \left| f((1-\delta)z) - \sum_{n=0}^m a_n ((1-\delta)z)^n \right| \leq \varepsilon \quad \text{et}$$

donc pour tout  $z \in \Delta$ :

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^m a_n (1-\delta)^n z^n \right| \leq 2\varepsilon.$$

**Remarque:** l'indice ne dépend que de  $\delta$  (donc que de  $\varepsilon$ ).

Si  $P_\varepsilon(z) = \sum_{n=0}^m a_n (1-\delta)^n z^n$  la suite  $P_{1/n}(z)$  est bien *une suite de polynômes convergeant uniformément vers  $f$* .

#### b) Deuxième méthode:

Cette méthode s'inspire du *théorème de Fejer pour les séries de Fourier* (voir exercice III.C-3).

Pour tout  $r < R$  il y a convergence uniforme sur le cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$ , donc:

$$(1) \quad a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r e^{it}) e^{-int} dt.$$

Les  $a_n r^n$  sont d'ailleurs les *coefficients de Fourier* de la fonction périodique  $t \mapsto f(r e^{it})$ . Notons que pour  $n < 0$ ,  $a_n = 0$ .

L'application  $f$  étant continue sur  $\Delta$  la relation (1) est encore vraie pour  $r = R$ .

Si  $z = r e^{it}$  (par continuité de l'intégrale dépendant du paramètre  $r$ ),

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k z^k &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikt} \int_0^{2\pi} f(r e^{iu}) e^{-iku} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r e^{iu}) \sum_{k=-n}^n e^{ik(t-u)} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r e^{iu}) \frac{\sin((n+1/2)(t-u))}{\sin((t-u)/2)} du. \end{aligned}$$

Nous avons alors, toujours pour  $z = r e^{it}$ :

$$\begin{aligned} Q_n(z) &= \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{2\pi} \frac{f(r e^{iu})}{\sin((t-u)/2)} \sum_{k=0}^n \sin(k+1/2)(t-u) du \\ &= \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{2\pi} f(r e^{iu}) \left( \frac{\sin((n+1)(t-u)/2)}{\sin((t-u)/2)} \right)^2 du \\ &= \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(r e^{i(t-u)}) \left( \frac{\sin((n+1)u/2)}{\sin(u/2)} \right)^2 du. \end{aligned}$$

En posant  $\varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \left( \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2$ , il vient puisque  $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(u) du = 1$ :

$$f(re^{it}) - Q_n(re^{it}) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(re^{it}) - f(re^{i(t-u)})) \varphi_n(u) du. \quad (\text{voir exercice III.C-3}).$$

L'application  $f$  étant uniformément continue sur  $\Delta$ , à tout  $\varepsilon > 0$ , on peut associer  $\alpha > 0$  tel que:

$$\forall r \in [0, R], \forall t \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}, (|u| \leq \alpha \Rightarrow |f(re^{it}) - f(re^{i(t-u)})| \leq \frac{\varepsilon}{2}).$$

Pour ce qui concerne  $\varphi_n$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(u) du = 1$  avec  $\varphi_n \geq 0$ , donc  $\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_n(u) du \leq 1$ , et de plus, pour  $|u| \geq \alpha$ ,

$$\varphi_n(u) \leq \frac{1}{\sin^2(u/2)} \frac{1}{2\pi(n+1)} \leq \frac{1}{\sin^2(\alpha/2)} \frac{1}{2\pi(n+1)}.$$

On peut alors majorer:

$$|f(re^{it}) - Q_n(re^{it})| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_n(u) du + \frac{2\|f\|_{\infty}}{\sin^2(\alpha/2)} \cdot \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon, \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

**Conclusion:** la suite  $Q_n$  est une suite de polynômes convergeant vers  $f$  uniformément sur  $\Delta$ .

## D-5 Fonction entière de type exponentiel:

a) Dans l'exercice D-3, on a démontré l'égalité:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt.$$

Mais on a à la fois  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \geq (|a_n| r^n)^2$

$$\text{et } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt \leq m(r)^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = m(r)^2,$$

donc  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| r^n \leq m(r)$ .

b) Si  $f(x) = x^{-n} e^{bx}$ ,  $f'(x) = (-n + bx) x^{-n-1} e^{bx}$  et  $f$  est minimum pour  $x = \frac{n}{b}$

puisque  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . Ce minimum est donc:

$$f\left(\frac{n}{b}\right) = \left(\frac{b}{n}\right)^n e^n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{b^n}{n!} \sqrt{2\pi n} \quad \text{en vertu de la formule de Stirling.}$$

c) Prenons  $b = \frac{a+\alpha}{2}$  de sorte que  $\alpha < b < a$ . On peut écrire  $|a_n| r^n \leq m(r) \leq e^{br}$

pour  $r$  assez grand, donc  $|a_n| \leq r^{-n} e^{br} \leq \left(\frac{b}{n}\right)^n e^n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{b^n}{n!} \sqrt{2\pi n}.$

Finalement  $\frac{n! |a_n|}{a^n} \leq \frac{n! e^n}{n^n} \left(\frac{b}{a}\right)^n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{b}{a}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  puisque  $b < a$ .

A partir d'un certain rang  $N$  on a donc  $\frac{n! |a_n|}{a^n} \leq 1$  donc  $|a_n| \leq \frac{a^n}{n!}$ .

## D-6 Formules de Cauchy et suites de fonctions:

a) La série  $\sum a_k r^k e^{ikt}$  est normalement convergente par rapport à  $t$  car  $|a_k r^k e^{ikt}| = |a_k| r^k$  est le terme général d'une série numérique convergente.

Il en est de même bien sûr de la série  $\sum a_k r^k e^{i(k-n)t}$  dont la somme est  $f(r e^{it}) e^{-int}$ .

On peut donc intégrer terme à terme et comme  $\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt$  est nul pour  $k \neq n$  et vaut

$2\pi$  pour  $k = n$ , on obtient bien:

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r e^{it}) e^{-int} dt.$$

b-1) Pour  $r \in ]0, R[$ , la suite  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur le cercle  $|z| = r$ , et en intégrant:

$$a_n(p) = \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} f_n(r e^{it}) e^{-ipt} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} f(r e^{it}) e^{-ipt} dt.$$

On peut poser:

$$a(p) = \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} f(r e^{it}) e^{-ipt} dt$$

b-2) Prenons  $r \in ]0, R[$  et définissons  $K = \sup_{|z| \leq r} |f(z)|$ .

Cette borne supérieure existe dans  $\mathbb{R}$  car  $f$  est continue comme limite uniforme pour  $|z| \leq r$ , d'une suite d'applications continues.

On obtient alors  $|a(p)| r^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K dt = K$ .

D'après le lemme d'Abel, la série  $\sum a(p) z^p$  est absolument convergente pour  $|z| < r$ . Son rayon de convergence est donc au moins égal à  $r$ , et comme cela est vrai pour tout  $r < R$ , il est au moins égal à  $R$ .

Prenons  $|z| = r$  et  $r < R_1 < R$ . La suite  $(f_n)$  est uniformément bornée sur  $\mathcal{B}_f(0, R_1)$ . Ainsi, il existe  $K_1$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|f_n(z)| \leq K_1$  et aussi  $|f(z)| \leq K_1$ .

On a donc pour tout  $p$  et pour tout  $n$ ,  $|a_n(p)| R_1^p \leq K_1$  soit,

$$|a_n(p) z^p| = |a_n(p)| r^p \leq K_1 \left(\frac{r}{R_1}\right)^p.$$

La série  $\sum_{p=0}^{\infty} a_n(p) z^p$  est donc **normalement convergente** par rapport à  $n$ , et on peut appliquer le *théorème de la double limite* pour obtenir:

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_n(p) z^p = \sum_{p=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n(p) z^p) = \sum_{p=0}^{\infty} a(p) z^p.$$

c) Le lecteur vérifiera sans difficulté les axiomes des distances, l'inégalité triangulaire provenant de l'inégalité:

$$\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \quad \text{vraie pour } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0,$$

et de la croissance de l'application  $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ .

Supposons donnée *une suite*  $(f_p)$  et  $f \in \mathcal{H}(D)$  telles que  $d(f_p, f) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ . Soit  $r < R$  fixé. Il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $r \leq r_n$  et donc  $\sup_{|z| \leq r} |f_p(z) - f(z)| \leq \alpha_n(f_p - f)$ .

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $p_0 \in \mathbb{N}$ , tel que  $p \geq p_0$  implique l'inégalité  $d(f_p, f) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ . On en déduit en particulier:

$$\frac{1}{2^n} \beta_n(f_p - f) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad \text{soit} \quad \frac{\alpha_n(f_p - f)}{1 + \alpha_n(f_p - f)} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ et finalement,}$$

$$\alpha_n(f_p - f) \leq \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon} < \varepsilon \quad \text{si on suppose de plus } \varepsilon < 1.$$

Ainsi:  $\forall \varepsilon > 0, \exists p_0 \in \mathbb{N}; \forall p \in \mathbb{N}, (p \geq p_0 \Rightarrow \sup_{|z| \leq r} |f_p(z) - f(z)| \leq \varepsilon)$ .

**Il y a donc convergence uniforme sur tout compact de  $D$ .**

Réciproquement, si  $(f_p)$  converge vers  $f$  **uniformément sur tout compact de  $D$** , à tout  $\varepsilon > 0$ , on peut associer  $m \in \mathbb{N}$ , tel que  $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , et comme pour tout  $n$ ,

$$\beta_n(f - f_p) < 1, \quad \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \beta_n(f - f_p) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

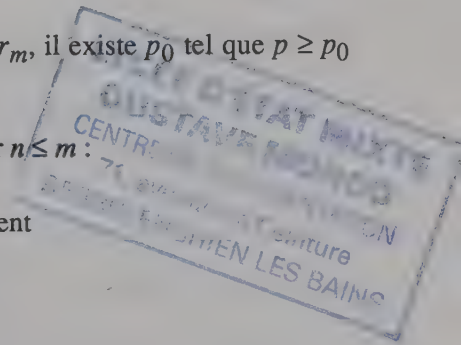
Comme  $(f_p)$  converge uniformément vers  $f$  pour  $|z| \leq r_m$ , il existe  $p_0$  tel que  $p \geq p_0$  implique l'inégalité:

$$\alpha_m(f - f_p) = \sup_{|z| \leq r_m} |f(z) - f_p(z)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{et alors pour } n \leq m:$$

$$\beta_n(f - f_p) \leq \frac{\alpha_m(f - f_p)}{1 + \alpha_m(f - f_p)} \leq \frac{\varepsilon}{4 + \varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad \text{Finalement}$$

$$\sum_{n=0}^m \frac{1}{2^n} \beta_n(f - f_p) \leq \frac{\varepsilon}{4} \sum_{n=0}^m \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et}$$

$$d(f, f_p) = \sum_{n=0}^m \frac{1}{2^n} \beta_n(f - f_p) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \beta_n(f - f_p) < \varepsilon$$



## E - Applications des séries entières

### E-1 Equations différentielles du premier ordre:

a) En utilisant les développements en série entière des fonctions  $x \mapsto \cos x$  et  $x \mapsto \operatorname{ch} x$ , on obtient:

$$\text{pour } x \geq 0, \varphi(x) = \operatorname{ch}(x^{3/2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(2n)!}$$

$$\text{pour } x < 0, \varphi(x) = \cos((-x)^{3/2}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-x)^{3n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(2n)!}.$$

Finalement  $\varphi$  est développable en série entière *de rayon de convergence infini*

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(2n)!}.$$

Cherchons alors une solution de  $2xy' + y = 3x\varphi(x)$  sous la forme  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,

il vient: 
$$2xf'(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3x^{3n+1}}{(2n)!}.$$

Si  $n$  n'est pas de la forme  $3p+1$ , le coefficient  $a_n$  est nul.

Si  $n = 3p+1$ ,  $(6p+1) a_{3p+1} = \frac{3}{(2p)!}$  donc  $a_{3p+1} = \frac{1}{(2p+1)!}$ ,

et  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(2n+1)!}$ , avec un rayon de convergence infini.

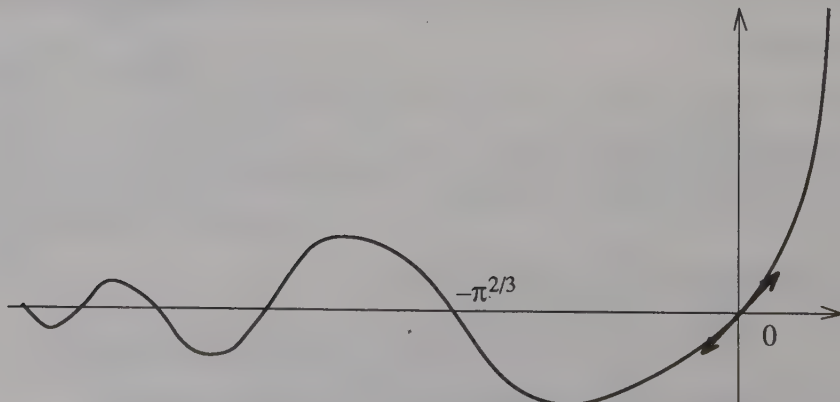
Pour  $x \geq 0$ , posons  $x = t^{2/3}$ .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+2/3}}{(2n+1)!} = \frac{1}{t^{1/3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh}(x^{3/2}).$$

Pour  $x < 0$ , posons  $x = -t^{2/3}$ .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2/3}}{(2n+1)!} = -\frac{1}{t^{1/3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\frac{1}{\sqrt{-x}} \sin((-x)^{3/2}).$$

Le graphe de  $f$  a l'allure suivante:



Sur  $\mathbb{R}^-$  les oscillations sont de plus en plus faibles et de plus en plus courtes.

**Remarque:** La solution générale de l'équation différentielle est  $y(x) = f(x) + \frac{\lambda}{(|x|)}$  sur chacun des intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ . Il n'y a donc *pas d'autres solutions que  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier.*

b-1) Cherchons a priori une solution de la forme  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , de rayon de convergence  $R$  supposé strictement positif. Pour  $|x| < R$ ,  $f(x)^2$  est égal à la somme de la série carré de Cauchy puisqu'il y a convergence absolue et:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = x + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) x^{n+1}$$

Au degré 0 on obtient  $a_0^2 = 0$  donc  $a_0 = 0$ .

Au degré 1, on obtient  $a_1 = 1 + 2a_0$   $a_1 = 1$ .

$$\text{Pour } n \geq 2, a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k},$$

ce qui permet de définir une unique suite  $(a_n)$  par les conditions:

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1 \\ \forall n \geq 2, a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \end{cases}$$

Il reste à démontrer que *le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$ , ainsi définie, est strictement positif.*

Cela résulte immédiatement de la propriété:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq 1.$$

Elle est vraie aux rangs 0 et 1, puis si on la suppose vraie jusqu'au rang  $n-1$ ,

$$0 \leq a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k a_{n-k} \leq \frac{n-1}{n} < 1.$$

*Le rayon de convergence de  $\sum a_n x^n$  est donc au moins égal à 1.*

Si la fonction  $f$  est la solution maximale de l'équation différentielle développable en série entière sur un voisinage de 0, on sait que  *$f$  est définie sur un intervalle ouvert du type  $] \alpha, \beta[$  avec  $\alpha < 0 < \beta$ .*

Montrons que  $\beta$  ne peut pas être  $+\infty$ .

Sur  $]0, \beta[$ ,  $f$  est strictement croissante car  $f'(x) = 1 + \frac{f(x)^2}{x}$  et comme  $f'(x) \geq 1$ , on a  $f(x) \geq x$ .

Si  $\beta$  est fini,  $f$  a une limite quand  $x \rightarrow \beta$  ( $x < \beta$ ), car la fonction est croissante. *Cette limite ne peut être finie puisque la solution est maximale:* c'est donc  $+\infty$ .

Si  $\beta$  est  $+\infty$ , comme  $f(x) \geq x$ , la limite est encore  $+\infty$ .

Dans tous les cas:

$$f(x) \xrightarrow[x < \beta]{x \rightarrow \beta} +\infty$$

Si  $g$  est l'application réciproque de  $f$  sur  $[0, \beta[$ , on a donc  $\beta = \lim_{y \rightarrow +\infty} g(y)$  et comme

$$g'(y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{g(y)}}, \text{ on a } \beta = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + \frac{t^2}{g(t)}}.$$

$$\text{Mais } g(y) = \int_0^y \frac{dt}{1 + \frac{t^2}{g(t)}} \leq \int_0^y \frac{dt}{1+t} = \ln(1+y) \text{ car } f(x) \geq x \Leftrightarrow y \geq g(y), \text{ et on}$$

$$\text{obtient l'inégalité } \beta \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + \frac{t^2}{\ln(1+t)}}.$$

$$\text{L'intégrale obtenue est convergente car } \frac{1}{1 + \frac{t^2}{\ln(1+t)}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^2},$$

$$\text{et l'intégrale de Bertrand } \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt \text{ converge.}$$

**Finalement  $\beta$  est donc fini et  $f$  n'est pas définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier.**

b-2) Cherchons la solution générale de l'équation sous la forme  $y(x) = f(x) + z(x)$ .

$$x f'(x) + x z'(x) = x + f^2(x) + 2f(x)z(x) + z^2(x) \text{ soit}$$

$$x z'(x) = 2f(x)z(x) + z^2(x).$$

Posons maintenant sur tout intervalle où  $z$  ne s'annule pas  $u(x) = \frac{1}{z(x)}$ . On obtient:

$$-x u'(x) = 2f(x)u(x) + 1.$$

Posons  $\frac{f(x)}{x} = \varphi(x)$ : c'est une fonction de classe  $C^\infty$ .

**L'équation homogène a pour solution  $\lambda u_0$  avec  $u_0(x) = \exp(-2 \int_0^x \varphi(t) dt)$ .**

Posons  $u(x) = v(x) u_0(x)$  pour faire varier la constante:

$$-v'(x) u_0(x) = \frac{1}{x} \text{ soit, } v(x) = \left( - \int_1^x \frac{dt}{t u_0(t)} + \lambda \right), \text{ et finalement:}$$

$$u(x) = \left( - \int_1^x \frac{dt}{t u_0(t)} + \lambda \right) u_0(x) \text{ et } y(x) = x \varphi(x) + \frac{1}{u_0(x) \left( \lambda - \int_1^x \frac{dt}{t u_0(t)} \right)}.$$

La fonction  $u_0$  ne s'annule pas et  $u_0(0) = 1$ . L'intégrale  $\int_1^x \frac{dt}{t u_0(t)}$  tend vers  $-\infty$  quand

$x \rightarrow 0$ , donc  $\lambda - \int_1^x \frac{dt}{t u_0(t)}$  ne s'annule pas sur un voisinage de 0.

On en déduit que  $\frac{1}{u_0(x) \left( \lambda - \int_1^x \frac{dt}{t u_0(t)} \right)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .

Toute solution  $y(x)$  est donc prolongeable par continuité en 0 en posant  $y(0) = 0$ .

Néanmoins pour  $x > 0$ ,  $\int_x^1 \frac{dt}{t u_0(t)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln x$ , donc

$$y(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{\ln x} \quad \text{et} \quad \frac{y(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty.$$

La fonction est prolongeable en 0, mais ce prolongement n'est pas dérivable en 0.

**Finalement, il n'y a pas d'autre solution définie sur un voisinage de 0.**

c-1) Si  $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  est solution de (1) avec un rayon de convergence  $R > 0$ , on aura pour  $|x| < R$ ,

$$y^2(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \right) x^n \quad \text{puis} \quad y^3(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \left( \sum_{p=1}^{n-1} a_{n-p} \left( \sum_{k=1}^{p-1} a_k a_{p-k} \right) \right) x^n.$$

Il vient alors:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = x^3 + \sum_{n=3}^{\infty} \left( \sum_{p=1}^{n-1} a_{n-p} \sum_{k=1}^{p-1} a_k a_{p-k} \right) x^n.$$

On peut en déduire:

$$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = \frac{1}{4}, \text{ puis pour } n > 3,$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{p=1}^{n-1} a_{n-p} \sum_{k=1}^{p-1} a_k a_{p-k},$$

**ce qui définit la suite  $(a_n)$  de manière unique.**

c-2) Partons du développement:

$$\sqrt{1-u} = 1 - \frac{1}{2} u - \frac{1}{2 \cdot 4} u^2 - \dots - \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots (2n-2) 2n} u^n + \dots \quad \text{valable pour } |u| < 1.$$

On obtient:

$$g(x) = 1 - \sqrt{1-2x} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \quad \text{pour } |x| < \frac{1}{2}, \text{ avec:}$$

$$b_1 = 1 \quad \text{et pour } n \geq 2, \quad b_n = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3) 2^n}{2 \cdot 4 \dots (2n-2) 2n}.$$

Mais par ailleurs la fonction  $g$  vérifie la relation:

$$g^2(x) - 2g(x) + 2x = 0,$$

$$\text{et donc} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} \right) x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n + 2x = 0,$$

$$\text{ce qui donne } b_1 = 1 \quad \text{et pour } n \geq 2, \quad b_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}.$$

c-3) Comme les  $(a_i)$ , les  $(b_i)$  sont positifs et pour  $1 \leq i \leq 4$ ,  $0 \leq a_i \leq b_i$ , puisque  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ , et  $a_4 = \frac{1}{4}$  et  $b_4 = \frac{5}{8}$ .

Supposons donc que  $0 \leq a_i \leq b_i$  pour  $i \in [1, n]$ .

$$\text{Alors } 0 \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{p=1}^{n-1} b_{n-p} \sum_{k=1}^{p-1} b_k b_{p-k} = \frac{2}{n+1} \sum_{p=1}^{n-1} b_{n-p} b_p = \frac{4}{n+1} b_n$$

$$\text{Pour } n \geq 4, \text{ on a à la fois } \frac{4}{n+1} < 1 \text{ et } b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} b_k b_{n+1-k} + \frac{1}{2} b_n \geq b_n$$

et on a bien alors  $0 \leq a_{n+1} \leq b_{n+1}$ , ce qui termine la démonstration.

On en déduit que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  a **un rayon de convergence au moins égal à  $\frac{1}{2}$** .

La somme de cette série **est donc solution de l'équation (1)** sur l'intervalle  $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  et vaut 0 en 0 **donc est une restriction de la solution  $f$** .

## E-2 Equations différentielles du second ordre:

a-1) On pose  $z(t) = y(t^2)$  de sorte que

$$z'(t) = 2t y'(t^2)$$

$$z''(t) = 4t^2 y''(t^2) + 2y'(t^2)$$

ce qui nous donne l'équation  $z'' - z = 0$ .

La solution générale est  $z(t) = A \operatorname{ch} t + B \operatorname{sh} t$ , soit sur  $]0, +\infty[$ ,

$$y(x) = A \operatorname{ch} \sqrt{x} + B \operatorname{sh} \sqrt{x}$$

Pour  $x < 0$ , on pose  $z(t) = y(-t^2)$  de sorte que:

$$z'(t) = -2t y'(-t^2)$$

$$z''(t) = 4t^2 y''(-t^2) - 2y'(-t^2)$$

ce qui nous donne l'équation  $z'' + z = 0$

La solution générale est  $z(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$ , soit sur  $]-\infty, 0[$ ,

$$y(x) = \alpha \cos \sqrt{-x} + \beta \sin \sqrt{-x}.$$

a-2) Cherchons les solutions **développables en série entière** sous la forme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ soit si le rayon de convergence est } > 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4(n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

On en déduit en prenant  $a_0$  quelconque fixé dans  $\mathbb{R}$ , pour  $n \geq 0$ :

$$(2n+1)(2n+2) a_{n+1} = a_n, \text{ donc pour tout } n \geq 1,$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+2)(2n+1)} = \dots = \frac{a_0}{(2n+2)!}.$$

Les solutions développables en série entière (avec un rayon de convergence infini) sont

les  $a_0 \varphi$ , où :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$

Pour  $x > 0$ , on a  $\varphi(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{x})$  et pour  $x \leq 0$ ,  $\varphi(x) = \cos \sqrt{-x}$ .

Soit  $f$  une solution définie sur  $\mathbb{R}$  avec :

$$f(x) = a \operatorname{ch} \sqrt{x} + b \operatorname{sh} \sqrt{x} \quad \text{pour } x > 0$$

$$f(x) = \alpha \cos \sqrt{-x} + \beta \sin \sqrt{-x} \quad \text{pour } x < 0.$$

La continuité en 0 impose  $\alpha = a$  et alors  $f(0) = a$ .

Pour  $x > 0$ ,  $\frac{f(x) - f(0)}{x} = a \frac{\operatorname{ch} \sqrt{x} - 1}{x} + b \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x}}{x} = \frac{b}{\sqrt{x}} + \frac{a}{2} + o(1)$

La dérivée à droite en 0 n'existe que si  $b = 0$  et de même si  $\beta = 0$  pour la dérivée à gauche.

Finalement,  $f(x) = a \operatorname{ch} \sqrt{x}$  pour  $x \geq 0$  et  $f(x) = a \cos \sqrt{-x}$  pour  $x < 0$ ; **les seules solutions définies sur  $\mathbb{R}$  sont celles développables en série entière.**

**Remarque:** Le graphe de la fonction  $f$  est le symétrique par rapport à Oy de celui qui a été tracé au A-5b.

b) Cherchons une solution sous la forme  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ .

En supposant qu'il existe une telle série entière ayant un rayon de convergence  $> 0$ , elle doit vérifier :

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)n b_{n+1} - n(n-1)b_n) x^n - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} (n b_n + b_n) x^n = 0, \text{ ce qui donne:}$$

$$b_0 = 0, \text{ puis, pour } n \geq 1,$$

$$n(n+1)b_{n+1} = (n(n-1) + \lambda(n+1))b_n.$$

$b_1$  est donc quelconque et pour  $n \geq 1$ ,

$$b_n = \frac{2\lambda(2 \times 1 + 3\lambda) \dots ((n-1)(n-2) + n\lambda)}{((n-1)!)^2 n} b_1.$$

**Le rayon de convergence est égal à 1** puisque  $\frac{b_{n+1}}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

c-1) Si  $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  est solution de l'équation, la série entière ayant un rayon de

convergence  $R > 0$ , on aura pour  $|x| < R$  et  $|x| < 1$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n \alpha_{n-k} k a_k \right) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n \beta_{n-k} a_k \right) x^n = 0.$$

On aura donc  $a_1$  quelconque et pour  $n \geq 1$ , l'égalité (1):

$$a_{n+1} = -\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n (k \alpha_{n-k} + \beta_{n-k}) a_k$$

c-2) En considérant les coefficients de *Fourier* des fonctions  $t \mapsto p(R e^{it})$  et  $t \mapsto q(R e^{it})$ , nous obtenons comme dans l'exercice D-6 pour tout  $R < 1$ :

$$|\alpha_n R^n| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(R e^{it}) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M dt = M$$

$$|\beta_n R^n| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(R e^{it}) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M dt = M.$$

Comme cela est vrai pour tout  $R < 1$ , on en déduit les inégalités:

$$|\alpha_n| \leq M \text{ et } |\beta_n| \leq M.$$

c-3) Par majoration dans l'égalité (1), on obtient:

$$|a_{n+1}| \leq \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n M(k+1) |a_k|.$$

L'équation différentielle du b) peut s'écrire encore, si  $\lambda = M$ ,

$$x y'' = M \frac{x y' + y}{1-x}.$$

On en déduit que la suite  $(b_n)$  telle que  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  est solution de cette équation vérifie,

$$\text{puisque } x y' + y = (x y)' = \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_n x^n:$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} n(n+1) x^n = M \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ soit,}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) b_{n+1} x^n = M \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n (k+1) b_k \right) x^n.$$

On obtient donc finalement pour  $n \geq 1$ :

$$b_{n+1} = \frac{M}{n(n+1)} \sum_{k=0}^n (k+1) b_k$$

Reprenons notre suite  $(a_n)$  et posons  $b_1 = |a_1|$ .

D'après les questions c-1) et c-2) on aura pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &\leq \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n (k |\alpha_{n-k}| + |\beta_{n-k}|) |a_k| \\ &\leq \frac{M}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n (k+1) |a_k|. \end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate, on a donc:  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq |a_n| \leq b_n$ ,

et le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$  est au moins égal à 1.

**Conclusion:** l'équation (E) admet *une droite de solutions développables en série entière de rayon de convergence au moins égal à 1*.

### E-3 Etude d'une équation fonctionnelle:

a) En appliquant la formule de *Leibniz*, on obtient:

$$f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k \alpha^k e^{\alpha x} \lambda^{n-k} f^{(n-k)}(\lambda x).$$

b) Si on pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  en supposant le rayon de convergence  $R > 0$ , on obtient:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a_n x^n, \quad \text{d'où pour } n \geq 0,$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} \lambda^{n-k} a_{n-k}.$$

**Le coefficient  $a_0$  est quelconque** et ensuite  $a_0$  étant fixé, la suite  $(a_n)$  est définie de manière unique. Plus précisément si on définit la suite  $(\alpha_n)$  par  $\alpha_0 = 1$  et pour  $n \geq 0$ ,

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} \lambda^{n-k} \alpha_{n-k}, \quad \text{on aura } a_n = a_0 \alpha_n.$$

Dans le cas particulier  $\alpha = 0$ , on a  $\alpha_{n+1} = \frac{1}{n+1} \lambda^n \alpha_n = \frac{\lambda^{1+2+\dots+n}}{(n+1)n \dots 1}$ , soit:

$$\alpha_n = \frac{\lambda^{n(n-1)/2}}{n!}$$

c) Plaçons-nous sur l'intervalle  $[-A, A]$ , et posons  $M = \sup_{x \in [-A, A]} |f(x)|$ . Alors, puisque pour  $x \in [-A, A]$ ,  $\lambda x \in [-A, A]$ ,  $|f'(x)| = |e^{\alpha x} f(\lambda x)| \leq M e^{|\alpha|A}$ .

Supposons qu'il existe  $H \geq e^{|\alpha|A}$  tel que pour  $x \in [-A, A]$  on ait  $|f^{(k)}(x)| \leq M H^k$  pour  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

$$\text{Alors } |f^{(n+1)}(x)| \leq M \sum_{k=0}^n C_n^k |\alpha|^k |\lambda|^{n-k} H^{n-k} e^{|\alpha|A} \leq M e^{|\alpha|A} (|\alpha| + |\lambda| H)^n.$$

Et pour que la propriété  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M H^{n+1}$  soit encore assurément vraie, il suffit d'avoir:

$$|\alpha| + |\lambda| H \leq H \quad \text{soit } H \geq \frac{|\alpha|}{1 - |\lambda|}.$$

Ainsi, en posant  $H = \text{Max} \left( e^{|\alpha|A}, \frac{|\alpha|}{1 - |\lambda|} \right)$  on aura bien pour tout  $n$  et tout  $x$  dans

$[-A, A]$ ,  $|f^{(n)}(x)| \leq M H^n$ . Mais alors pour le reste de *Taylor-Mac Laurin*:

$$|R_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq M \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} H^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Ainsi  $f$  est développable en série entière de rayon de convergence infini.**

d) Si  $g'(x) = g(x^\lambda)$ , en posant  $x = e^t$  soit  $t = \ln x$  et  $f(t) = g(e^t)$ , on obtient:

$$f'(t) = e^t g'(e^t) = e^t g'(e^{\lambda t}) = e^t f(\lambda t).$$

Donc  $f$  est élément de  $E$  dans le cas particulier où  $\alpha = 1$ , l'application  $f \mapsto g$  étant un isomorphisme d'espace vectoriel,  **$F$  est de dimension 1.**

#### E-4 Fonction de Bessel $J_0$ :

a) *Par dérivation sous l'intégrale*, possible puisque  $(x, t) \mapsto \frac{\partial}{\partial x} \cos(x \sin t)$  est continue sur  $\mathbb{R} \times [0, \frac{\pi}{2}]$ , on obtient:

$$f'(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \sin(x \sin t) dt$$

$$f''(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos(x \sin t) dt.$$

$$\text{On a alors } x(f'(x) + f''(x)) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \cos^2 t \cos(x \sin t) dt.$$

*En intégrant par parties:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \sin(x \sin t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} [\cos t \sin(x \sin t)]_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \cos^2 t \cos(x \sin t) dt \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \cos^2 t \cos(x \sin t) dt \\ &= x(f'(x) + f''(x)). \end{aligned}$$

b) On peut développer:

$$\cos(x \sin t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n} \sin^{2n} t}{(2n)!}.$$

Pour  $x$  fixé, la série de fonctions de  $t$  est **normalement convergente et on peut intégrer terme à terme** car:

$$\left| (-1)^n \frac{x^{2n} \sin^{2n} t}{(2n)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}. \text{ On obtient:}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n} \sin^{2n} t}{(2n)!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n} x^{2n}, \text{ avec } a_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t dt. \end{aligned}$$

On sait calculer directement les  $a_{2n}$  à l'aide des intégrales de Wallis, mais **on va plutôt les calculer à l'aide de l'équation différentielle.**

En cherchant une solution de la forme  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ , on obtient:

$$b_1 = 0 \text{ et pour } n \geq 1, (n+1)^2 b_{n+1} + b_{n-1} = 0.$$

Tous les  $b_k$  d'indice impair sont nuls, on prend  $b_0$  arbitraire et pour

$$b_{2n} = -\frac{b_{2n-2}}{(2n)^2} = \frac{(-1)^n b_0}{4^n (n!)^2}$$

La solution  $f$  correspond à  $b_0 = 1$  donc:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n (n!)^2}$$

c) Faisons le changement de variable  $u = \sin t$ .

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xu)}{\sqrt{1-u^2}} du.$$

L'intégrale impropre *est absolument convergente en 1*.

Nous sommes dans le cadre de l'application du *lemme de Riemann Lebesgue* (voir III C-1) pour une intégrale impropre convergente. Il va suffire d'isoler le point de discontinuité. Prenons  $\alpha$  dans  $]0, 1[$ . Alors:

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\cos(xu)}{\sqrt{1-u^2}} du \right| \leq \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2}{\pi} \text{Arc cos } \alpha.$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé, on peut choisir  $\alpha$  tel que  $\frac{2}{\pi} \text{Arc cos } \alpha \leq \frac{\varepsilon}{2}$  (par exemple

$\alpha = \cos \frac{\pi \varepsilon}{4}$  si  $\varepsilon < 2$ ), et alors d'après le *lemme de Riemann Lebesgue*:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\cos(xu)}{\sqrt{1-u^2}} du = 0.$$

C'est à dire qu'il existe  $A > 0$  tel que:

$$x \geq A \Rightarrow \left( \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\cos(xu)}{\sqrt{1-u^2}} du \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right) \Rightarrow \left( \left| \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xu)}{\sqrt{1-u^2}} du \right| \leq \varepsilon \right).$$

## E-5 Etude d'une équation de *Riccati*:

a) Si  $z$  est solution de (E) avec  $z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ , on aura:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} b_k b_{n-1-k} \right) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-1} = 0.$$

Cela donne d'abord au rang 0,  $b_0 = 1$ , puis pour  $n \geq 1$ ,  $b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k b_{n-1-k}$ ,

*ce qui définit bien une unique suite  $(b_n)$ .*

Montrons que pour tout  $n$  on a  $0 < b_n \leq 1$ .

La propriété est vraie pour  $b_0$ . Si nous la supposons vraie pour  $k$  de 0 à  $n-1$ , alors:

$$0 < b_n \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n b_k = \frac{n+1}{n+1} = 1.$$

**Le rayon de convergence est au moins égal à 1.**

Ainsi pour  $|x| < 1$ ,  $z_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  définit une fonction  $z_0$  solution de (E) et *c'est la seule* développable en série entière.

b) Poser  $z = -\frac{u'}{u}$  équivaut à définir  $u$  par  $u(x) = K \exp\left(-\int_0^x z(t) dt\right)$  avec  $K \neq 0$ .

On obtient  $z' = -\frac{u''}{u} + \left(\frac{u'}{u}\right)^2$  ce qui injecté dans (E) donne:

$$x\left(-\frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u^2}\right) - x\frac{u'^2}{u^2} - \frac{u'}{u} - 1 = 0, \text{ soit:}$$

$$(F) \quad x u'' + u' + u = 0.$$

On pose  $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  a priori de rayon de convergence  $> 0$ , ce qui donne:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

On obtient au rang 0,  $a_1 + a_0 = 0$ , puis pour  $n \geq 1$ ,  $(n+1)^2 a_{n+1} + a_n = 0$ , soit:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} a_0$$

La série entière est de rayon de convergence infini.

L'équation  $F$  admet donc *une droite vectorielle de solutions développables en série entière* engendrée par la fonction  $f$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n = J_0(2\sqrt{x}).$$

**Réciproquement**, si  $u$  est une solution de (F),  $\frac{u'}{u}$  est solution de (E). C'est le cas en particulier de  $z(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ .

D'après l'exercice C-3 (développement d'un quotient)  $\frac{f'}{f}$  est développable en série entière sur un voisinage de 0 (puisque  $f(0) = 1 \neq 0$ ) et  $\frac{f'}{f} = z_0$ .

Mais l'égalité  $f(x)z(x) = f'(x)$  qui se traduit par une relation formelle entre les coefficients, est vraie tant que les séries entières sont absolument convergentes, donc pour  $|x| < 1$  au moins.

$$c) f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{n-1}}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n! (n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

En valeur absolue, le rapport de deux termes consécutifs est:

$$\left| \frac{u_n(x)}{u_{n-1}(x)} \right| = \frac{|x|}{n(n+1)} \leq \frac{|x|}{2}.$$

Pour  $0 < x \leq 2$ , la série est alternée et satisfait à la règle spéciale des séries alternées. On en déduit que sa somme est comprise entre deux sommes partielles consécutives, par exemple:

$$-1 = u_0(x) < f'(x) < u_0(x) + u_1(x) = -1 + \frac{x}{2}.$$

En particulier  $f'(x)$  est négatif sur  $]0, 2]$ , donc  $f$  est strictement décroissante.

Pour  $x < 0$ , tous les  $u_n(x)$  sont aussi  $< 0$  et  $f'(x) < 0$ .

Comme  $f$  est strictement décroissante sur  $[0, 2]$ , elle s'annule au plus une fois. Il suffit donc pour conclure de montrer que  $f(2) < 0$ .

$$\text{Or, } f(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} 2^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} 2^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Comme  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{(n+1)^2} < 1$  pour  $n \geq 1$ , la série satisfait à la règle spéciale des séries alternées et:

$$-2 = -a_1 < \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n < -a_1 + a_2 = -2 + 1 = -1.$$

On a donc en particulier  $f(2) < 0$ , ce qui termine la démonstration.

## E-6 Partitions de $[1, n]$ :

a) Dans une partition de  $[1, n+1]$ ,  $n+1$  appartient à l'un des sous-ensembles  $F$ . Raisonnons selon le cardinal de  $F$ .

Si  $F$  est de cardinal  $n+1-k$ , il y a  $C_n^{n-k}$  façons de choisir  $F$  (puisque l'élément  $n+1$  lui est imposé). Il reste ensuite une partition portant sur les  $k$  autres éléments qu'on peut réaliser de  $D_k$  manières différentes. On en déduit la formule:

$$D_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^{n-k} D_k = \sum_{k=0}^n C_n^k D_k$$

b) On peut montrer que pour tout  $n$ ,  $D_n \leq n!$ . C'est vrai pour  $n = 0$  et si on suppose cette inégalité vraie pour  $k \in [0, n]$ ,

$$D_{n+1} \leq \sum_{k=0}^n C_n^k k! = \sum_{k=0}^n n(n-1) \dots (n-k+1) \leq (n+1)(n!) = (n+1)!$$

On en déduit que pour tout  $n$ ,  $\left| \frac{D_n}{n!} x^n \right| \leq |x|^n$  et **le rayon de convergence de la série est au moins égal à 1.**

$$\frac{D_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{D_k}{k!}.$$

Ainsi pour  $|x| < 1$ ,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{D_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{n!} x^n \right)$$

L'équation différentielle vérifiée par  $f$  est donc:

$$f'(x) = e^x f(x)$$

On a donc puisque  $f(0) = 1$ ,

$$f(x) = \exp(e^x - 1)$$

c) On peut déterminer le développement en série entière de  $f$  en écrivant:

$$f(x) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^x)^n}{n!} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(nx)^p}{p!}.$$

Or pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(n|x|)^p}{p!} = e^{e^{|x|}}$  est convergent. **On peut donc permuter les deux  $\sum$**  (voir exercice I A-6) et on obtient alors:

$$f(x) = \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{n!} \right) x^p.$$

Finalement on trouve, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :

$$D_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

## E-7 Arbres binaires:

a) Pour construire un arbre binaire à  $(n+1)$  éléments, on choisit la racine puis un **sous-arbre binaire gauche** à  $k$  éléments et un **sous-arbre binaire droit** à  $n-k$  éléments.

Puisqu'on a posé  $a_0 = 1$ , on intègre dans cette étude le cas où l'un des deux sous-arbres est vide et on obtient:

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k a_{n-k}.$$

b) Pour  $|x| < R$ , on a:

$$\frac{1}{x} (f(x) - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} x^n.$$

On obtient donc à droite le carré de *Cauchy* de  $f(x)$  et  $\frac{1}{x} (f(x) - 1) = f(x)^2$ , soit:

$$x (f(x))^2 - f(x) + 1 = 0.$$

c) En résolvant cette équation du second degré, on obtient:

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \text{ et puisque } f(0) = 1, f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

On reprend le développement en série entière de  $\sqrt{1-u}$  (voir ex E-1c par exemple):

$$\sqrt{1-u} = 1 - \frac{1}{2} u - \frac{1}{2.4} u^2 - \frac{1.3 \dots (2n-3)}{2.4 \dots (2n-2) 2n} x^n - \dots \text{ de rayon de convergence } 1.$$

On obtient donc **avec un rayon de convergence  $\frac{1}{4}$** ,

$$f(x) = 1 + 2 \left( \frac{1}{2.4} 4x + \dots + \frac{1.3 \dots (2n-3)}{2.4 \dots (2n-2)} \frac{(4x)^{n-1}}{2n} + \dots \right)$$

$$\text{Par identification, on obtient alors } a_n = \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \frac{4^n}{n+1} = \frac{(2n)! 4^n}{(2^n (n!))^2 (n+1)},$$

soit:

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n+1) n!}$$



# III

## SÉRIES DE FOURIER

### A - Exemples de développement

Dans les exercices présentés ici, il s'agira d'abord de déterminer la **série de Fourier d'une fonction  $2\pi$ -périodique et continue par morceaux**. Rappelons que cette série trigonométrique peut s'écrire sous forme trigonométrique:

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx),$$

et sous forme exponentielle:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx},$$

où les coefficients sont donnés par les formules:

$$n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt,$$

$$n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt,$$

$$n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, dt.$$

On en déduira ensuite diverses **formules sommatoires**, soit en étudiant la convergence simple ou uniforme, soit en appliquant la formule de Parseval (voir les préambules des parties B) et C)).

#### A-1 Dent de scie.

Donner la série de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique  $f$  définie par:

$$\begin{cases} \text{pour } x \in ]-\pi, \pi[, f(x) = \frac{x}{2}, \\ f(\pi) = 0. \end{cases}$$

En déduire le développement de la fonction  $g$   $2\pi$ -périodique définie par:

$$\begin{cases} \text{pour } x \in ]0, 2\pi[, g(x) = \frac{\pi - x}{2}, \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

et étudier la convergence.

En déduire les sommes des séries  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

## A-2 Dent de scie continue.

Donner la série de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique définie par:

$$\text{pour } x \in [-\pi, \pi], f(x) = |x|.$$

En déduire les sommes des séries  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ .

## A-3 Parabole par morceaux.

Donner la série de Fourier de la fonction impaire  $2\pi$ -périodique définie pour tout  $x$  de  $[0, \pi]$ , par  $f(x) = x(\pi - x)$ .

En déduire les sommes des séries  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ .

## A-4 Développement Eulériens.

a) Pour  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ , donner le développement en série de Fourier de la fonction  $f$   $2\pi$ -périodique définie pour  $x$  dans  $[-\pi, \pi]$ , par  $f(x) = \cos \alpha x$ .

b) En déduire les formules d'Euler:

$$\text{b-1)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \tan(\alpha\pi)}.$$

$$\text{b-2)} \quad \forall u \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \cotan u = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2}.$$

$$\text{b-3)} \quad \forall u \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \frac{1}{\sin^2 u} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(u + p\pi)^2}.$$

b-4)  $\forall x \in ]-\pi, \pi[, \sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right).$

c) Montrer que:

c-1)  $\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}.$

Trouver un développement analogue pour  $\frac{\alpha\pi}{\operatorname{sh}(\alpha\pi)}.$

c-2)  $\forall \alpha \in ]0, 1[, \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$

d) A partir de la relation obtenue en b-2, montrer que pour  $u \in ]-\pi, \pi[,$

$$\frac{1}{2u} \left( \frac{1}{u} - \cotan u \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} \right) \frac{u^{2k}}{\pi^{2k+2}}.$$

En déduire que quel que soit  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $a_k \in \mathbb{Q}$  tel que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} = \pi^{2k+2} a_k$$

Donner  $a_0, a_1, a_2$ , (on aura à permuter deux  $\sum$  infinis).

## A-5 Exemples de série de Fourier d'une série de fonctions.

a) On considère la fonction  $f$  définie pour tout  $x$  réel par:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-|x+2k\pi|} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-|x+2k\pi|} + \sum_{k=-1}^{\infty} e^{-|x+2k\pi|}.$$

Montrer que  $f$  est continue,  $C^1$  par morceaux,  $2\pi$ -périodique, et paire. Donner sa série de Fourier, et étudier la convergence.

Calculer  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \frac{1}{4}}.$

b) Soit  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - 2n\pi)^2 + a^2}$  ( $a$  réel fixé,  $a > 0$ ).

Montrer que  $f$  est  $2\pi$ -périodique et somme de sa série de Fourier, qu'on déterminera.

En déduire l'expression à l'aide des fonctions usuelles de  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2 + a^2}.$

On utilisera l'expression  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + \alpha^2} dx = \frac{\pi e^{-\alpha}}{2\alpha}$  pour  $\alpha > 0$ .

### A-6 Fonctions de Bessel d'indice entier.

Pour tout  $x$  réel fixé, on considère la fonction  $2\pi$ -périodique  $f_x : t \mapsto e^{ix \sin t}$ .  
On définit ses coefficients de Fourier exponentiels  $c_n(f_x) = J_n(x)$ .

a) Etudier la convergence de  $\sum J_n(x) e^{int}$ . Montrer que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  
 $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ .

b) Montrer pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , les propriétés:

$$\text{i) } J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin t) dt.$$

$$\text{ii) } J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}}{p! (n+p)!}.$$

$$\text{iii) } J_n \text{ est solution de l'équation différentielle } x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0.$$

c) Donner les séries de Fourier des applications:

$$t \mapsto \cos(x \sin t) \text{ et } t \mapsto \sin(x \sin t).$$

En déduire de nouvelles expressions de  $J_{2n}(x)$  et  $J_{2n+1}(x)$  pour  $n$  entier naturel.

d) Montrer la relation:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, J_n(a+b) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} J_p(a) J_{n-p}(b).$$

e) Montrer les majorations suivantes:

$$\forall x \in \mathbb{R}, |J_0(x)| \leq 1,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, |J_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

## B - Séries trigonométriques

Une série trigonométrique est une série de fonctions s'écrivant sous forme trigonométrique  $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  ou sous forme exponentielle  $(\sum c_n e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Deux cas particuliers intéressants se présentent souvent pour la convergence.

i) Si  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|$  est convergente (ou ce qui revient au même si  $\sum |a_n|$  et  $\sum |b_n|$  sont convergentes) la série de fonctions est normalement convergente. Dans ce cas, si on pose  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ , la convergence normale permet d'intégrer terme à terme et:

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t} dt = c_k.$$

*La série trigonométrique est donc la série de Fourier de sa somme.*

ii) Si  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont positives décroissantes et tendent vers 0, une transformation d'Abel appliquée à la série  $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  montre qu'elle est simplement convergente sur  $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$  et uniformément convergente sur tout intervalle du type  $[\alpha, 2\pi - \alpha]$  avec  $0 < \alpha < \pi$ .

## B-1 Comparaison à la dent de scie.

On considère la fonction définie par  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n^2 + 1}}$ .

- Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
- En utilisant l'exercice A-1, étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$ .
- Quelle est la série de Fourier de  $f$ ?

## B-2 A propos du logarithme complexe.

a) Si  $a$  est un réel tel que  $|a| < 1$ , déterminer la série de Fourier des fonctions suivantes et étudier la convergence.

$$f(x) = \operatorname{Arctan} \frac{a \sin x}{1 - a \cos x}, \text{ et } f_1(x) = \operatorname{Arctan} \frac{a \sin x}{1 + a \cos x},$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln(1 - 2a \cos x + a^2), \text{ et } g_1(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + 2a \cos x + a^2).$$

**Indication:** considérer les fonctions de  $a$ , dériver par rapport à  $a$  et développer en série entière de  $a$  pour  $x$  fixé.

b) Pour  $z$  complexe tel que  $|z| < 1$ , on pose  $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ .

Montrer que  $e^{\varphi(z)} = 1 + z$ .

c) Pour  $x$  dans  $]0, 2\pi[$ , montrer que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos nx = -\ln \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right).$$

d) En déduire, pour  $x$  toujours dans  $]0, 2\pi[$ , que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{et pour } x \text{ réel quelconque que:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = - \int_0^x \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| dt.$$

### B-3 Dérivation terme à terme impossible.

On définit  $f$  par  $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin nx}{n^2 - 1}$ .

a) Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et continue sur  $\mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$ .

Il est évidemment impossible de dériver la série terme à terme. En utilisant l'exercice A-1, montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$ .

b) Trouver une équation différentielle vérifiée par  $f$ .

En déduire une expression de  $f$  à l'aide des fonctions usuelles.

Calculer de même  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1}$ .

c) Calculer  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + 1}$  puis  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 1)^2}$ .

### B-4 Développement en série trigonométrique.

Soit  $\alpha$  un réel  $> 0$  et  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{\operatorname{Ch} \alpha + \cos x}$ .

Développer  $f$  en série trigonométrique.

En déduire la valeur des intégrales  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{\operatorname{Ch} \alpha + \cos x} dx$ .

### B-5 Limite de la suite des coefficients de Fourier.

a) Soit  $(k_n)$  une suite d'entiers strictement positifs vérifiant:

$$\forall n \in \mathbb{N}, k_{n+1} \geq 4k_n.$$

Montrer qu'on peut définir une suite  $I_n$  de segments emboîtés de  $\mathbb{R}$  d'intérieurs non vides, tels que:

$$\text{i) } I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \dots$$

$$\text{ii) } \forall x \in I_n, |\sin(k_n x)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En déduire qu'il existe un réel  $t$  tel que la suite  $(\sin k_n t)$  ne tend pas vers 0.

b) Soit  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites de nombres complexes telles que pour tout  $x$  réel,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$ .

Démontrer que les deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  tendent vers 0.

c) Soit  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite de nombres complexes telle que pour tout  $x$  réel,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) = 0$ .

Montrer que les suites  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$  ont pour limite 0.

## B-6 Pseudo-dérivée seconde.

**Remarque:** cet exercice, qui n'a pas a priori de rapport direct avec les séries de Fourier, est utilisé dans les exercices B-7 et B-8.

Soit  $f$  une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ . On dit que  $f$  admet une pseudo-dérivée seconde en  $x_0$ , notée  $f^{[2]}(x_0)$ , si  $\frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}$  a pour limite  $f^{[2]}(x_0)$  quand  $h$  tend vers 0 ( $h \neq 0$ ).

a) Le but de cette question est de prouver que si  $f$  a en tout point une pseudo-dérivée seconde nulle, c'est une fonction affine.

a-1) Si  $f$  réelle a un minimum local en  $x_0$  et si  $f^{[2]}(x_0)$  existe, quel est son signe?

a-2) Soit  $f$  réelle et continue telle que pour tout  $x$ ,  $f^{[2]}(x)$  existe et vaut 0.

On considère  $\varepsilon > 0$  et les fonctions  $g_1$  et  $g_2$  définies par:

$$g_1(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - \varepsilon (x - a) (x - b)$$

$$g_2(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + \varepsilon (x - a) (x - b).$$

Etudier les signes de  $g_1$  et  $g_2$  sur  $[a, b]$ .

a-3) Conclusion.

b) Soit  $f$  une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  admettant en tout point une pseudo-dérivée seconde telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f^{[2]}(x)| \leq M, \text{ où } M \text{ est un réel strictement positif fixé.}$$

Montrer que pour tout  $x_0$  réel et  $h > 0$ , on a:

$$|f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)| \leq M \sqrt{2} h^2.$$

**Indication:** supposer d'abord  $f$  à valeurs réelles et introduire son polynôme d'interpolation aux points  $x_0 - h, x_0, x_0 + h$ .

## B-7 Unité du développement en série trigonométrique.

Soit  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite complexe et  $S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ .

On suppose que pour tout  $x$  la suite  $S_n(x)$  converge vers une limite, notée  $f(x)$ . On

pose de plus  $F_n(x) = \sum_{0 < |k| \leq n} -\frac{c_k}{k^2} e^{ikx}$ .

a) Montrer que la suite  $(F_n)$  converge uniformément vers une fonction  $F$  continue (utiliser l'exercice B-5).

Déterminer la série de Fourier de  $F$ .

b) En utilisant l'exercice I.B-6, montrer que  $F$  a une pseudo-dérivée seconde en tout point  $x_0$ , et la calculer (la définition de  $f^{[2]}(x_0)$  figure à l'exercice B-6).

c) On suppose de plus que la fonction  $f$  est nulle.

Montrer que  $F$  est constante (utiliser l'exercice B-6), et en déduire que pour tout  $n$ ,  $c_n$  est nul.

En déduire la propriété d'unicité de *Cantor-Riemann*:

«Si  $f$  est la somme sur  $\mathbb{R}$  d'une série trigonométrique convergente, cette série trigonométrique est unique.»

## B-8 Série trigonométrique et développement de Fourier.

Soit  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite complexe et  $S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ .

On suppose que pour tout  $x$  la suite  $S_n(x)$  converge vers une limite, notée  $f(x)$ .

On pose  $F_n(x) = \sum_{0 < |k| \leq n} -\frac{c_k}{k^2} e^{ikx}$  et on suppose que la fonction  $f$  est continue.

La suite  $F_n$ , ainsi qu'on l'a vu à l'exercice B-7 a une limite  $F$ , continue sur  $\mathbb{R}$ .

a) Démontrer, en utilisant l'exercice B-6, question b) que:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} - f(x) + c_0 \right| dx = 0.$$

b) En déduire que  $\sum c_n e^{inx}$  est la série de Fourier de  $f$ .

## C - Problèmes de convergence

Une application continue par morceaux est dite **régulière** si, en tout point  $x$ ,  $f(x)$  est la demi-somme de la limite à droite et de la limite à gauche:

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Considérons l'espace vectoriel  $D$  des applications  $2\pi$ -périodiques continues par morceaux et régulières à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

On peut définir une norme hermitienne en posant  $\|f\| = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ .

Par ailleurs, si nous considérons les applications  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  définies par  $e_n(t) = e^{int}$ , la famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une famille orthonormale pour le produit scalaire hermitien qui a été défini. Cette famille engendre  $T$  l'ensemble des polynômes trigonométriques.

Le coefficient de Fourier  $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$  peut s'interpréter comme le produit scalaire  $(e_n | f)$  et donc la somme de Fourier  $S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k$  comme la projection orthogonale de  $f$  sur le sous-espace vectoriel  $T_n$  des polynômes trigonométriques de degré inférieur à  $n$  ( $T_n = \text{vect}(e_k)_{-n \leq k \leq n}$ ).

Le résultat essentiel lié à ce point de vue préhilbertien est le **théorème de Parseval** qui établit que :

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\| = 0, \text{ (convergence quadratique),}$$

$$\text{ii) } \|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2. \text{ (égalité de Parseval)}$$

Il traduit en fait la densité de  $T$  dans  $D$  pour la norme hermitienne de  $D$ .

Dans ce paragraphe, nous serons amenés souvent à considérer des séries indexées dans  $\mathbb{Z}$ . Une série  $(\sum u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sera dite convergente si les deux séries  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}$  sont convergentes et nous écrirons alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{-n}).$$

Ce point de vue préhilbertien est le cadre naturel de l'étude des séries de Fourier. Néanmoins, il est intéressant de se poser les questions de convergence liées à toute suite ou série de fonction. Les deux résultats figurant au programme de Mathématiques Spéciales sont les suivants :

1) Si  $f$  est  $2\pi$ -périodique de classe  $C^1$  par morceaux et régulière, la série de Fourier de  $f$  converge simplement vers  $f$ .

2) Si  $f$  est  $2\pi$ -périodique continue et de classe  $C^1$  par morceaux, la série de Fourier de  $f$  converge normalement vers  $f$ .

## C-1 Décroissance des coefficients de Fourier.

Soit  $f$  une application de classe  $C^p$   $2\pi$ -périodique.

Montrer que ses coefficients de Fourier  $a_n(f)$  et  $b_n(f)$  sont négligeables devant

$$\frac{1}{n^p} \text{ puis que, pour } p \geq 1, \|f - S_n(f)\|_{\infty} \text{ est négligeable devant } \frac{1}{n^{p-1}}.$$

### C-2 Coefficients de *Fourier* d'un produit.

a) Soit  $f$  et  $g$  deux éléments de  $D$  défini au préambule.

a-1) Montrer que la série  $(\sum \overline{c_n(f)} c_n(g))_{n \in \mathbb{Z}}$  converge et que:

$$(f | g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)} c_n(g).$$

a-2) Montrer que  $c_n(fg) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) c_{n-k}(g)$ .

b) On considère la fonction  $g$   $2\pi$ -périodique définie par:

$$\text{pour } t \in ]0, 2\pi[, \quad g(t) = \frac{\pi - t}{2} \text{ et } g(0) = 0.$$

Soit par ailleurs une fonction  $f$ , élément de  $D$ .

Montrer que la série  $\sum \frac{1}{n} b_n(f)$  est absolument convergente et que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} b_n(f) = 2 (g | f).$$

### C-3 Convergence des sommes de *Fejer*.

Si  $f$  est une fonction  $2\pi$ -périodique et continue sur  $\mathbb{R}$ , on désigne par  $c_n(f)$  les coefficients de *Fourier* exponentiels et par  $S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}$  la somme de *Fourier* de rang  $n$ .

On définit alors la somme de *Fejer* de rang  $n$  comme la moyenne des sommes de *Fourier*  $\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f)$ , soit pour tout  $x$ ,

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{p=-k}^k c_p(f) e^{ipx} = \sum_{p=-n}^n c_p(f) \left(1 - \frac{|p|}{n+1}\right) e^{ipx}.$$

a) Calculer  $\sigma_n(f)(x)$  sous la forme  $\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_n(t) dt$ , où  $F_n$ , appelé noyau de *Fejer*, est à calculer.

b) Montrer que  $\sigma_n(f)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) En déduire une nouvelle démonstration du *théorème d'approximation de Weierstrass* (voir exercice I.D-3).

d) Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . On suppose que  $f$  est  $\alpha$ -Hölderienne, ce qui signifie qu'il existe  $C > 0$  tel que:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha.$$

Démontrer que l'on peut déterminer  $A > 0$  tel que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{A}{n^\alpha}.$$

### C-4 Phénomène de *Gibbs* pour la dent de scie.

a) On considère la fonction  $2\pi$ -périodique impaire définie pour  $x$  dans  $]0, 2\pi[$  par  $g(x) = \frac{\pi - x}{2}$ , complétée par  $g(0) = g(2\pi) = 0$ .

Dans l'exercice A-1, nous avons obtenu le développement en série de Fourier de la fonction  $g$ ,  $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ , la convergence étant simple sur  $\mathbb{R}$  et uniforme sur tout segment  $[a, 2\pi - a]$  avec  $0 < a < \pi$ .

Posons  $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin kx}{k}$ , pour  $n \geq 2$ .

En écrivant  $P_n(x) = \frac{x}{2} + \int_0^x \left( \frac{1}{2} + P_n'(t) \right) dt$ , montrer qu'il existe  $M \geq 0$  tel que pour tout  $x$  de  $[0, \pi]$  et tout  $n$  entier,

$$|P_n(x)| \leq M.$$

b) Nous allons affiner ce résultat en montrant qu'il existe un réel  $G > \frac{\pi}{2}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \max_{x \in [0, \pi]} P_n(x) \right) = G$ .

$$\text{b-1) Montrer que } P_n' = \frac{\cos n \frac{x}{2} \sin (n-1) \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \cos n \frac{x}{2} \left( \sin n \frac{x}{2} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} - \cos n \frac{x}{2} \right)$$

b-2) Donner, en les ordonnant, les zéros de  $P_n'$  sur  $[0, \pi]$ .

En déduire que  $P_n$  est positif sur  $[0, \pi]$ .

b-3) Si  $x_k$  et  $x_{k+1}$  sont deux maximums locaux consécutifs de  $P_n$  avec  $x_k < x_{k+1}$ , montrer que  $P_n(x_{k+1}) < P_n(x_k)$ .

**Indication:** utiliser la majoration  $P_n'(x) \leq \frac{1}{2} \sin nx \cotan \frac{x}{2}$ .

b-4) Déterminer alors sous forme d'intégrale la valeur de  $G$  et montrer que  $G > \frac{\pi}{2}$ . Interpréter le résultat obtenu.

### C-5 Phénomène de *Gibbs* dans le cas général.

Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique,  $C^1$  par morceaux et régulière, mais non continue.

a) Montrer, en utilisant l'exercice C-4, qu'il existe une application  $F$  discontinue et affine par morceaux, telle que  $f - F$  soit continue et  $C^1$  par morceaux.

b) On note  $f_n$  la somme de Fourier de rang  $n$  de  $f$ , et on considère un point de discontinuité  $x_0$  de  $F$  (ou de  $f$ ).

Montrer que pour  $\alpha > 0$  suffisamment petit, il existe  $K > 0$  et  $N$  entier, tels que pour tout  $n > N$ ,

$$\text{Max} \{ |f_n(x) - f_n(y)| ; (x, y) \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]^2 \} > K > |f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|.$$

## C-6 Série de Fourier des fonctions Lipschitziennes.

Soit  $K$  un réel strictement positif et  $f$  une application  $2\pi$ -périodique et  $K$ -Lipschitzienne de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ .

On désigne par  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  la suite de ses coefficients de Fourier exponentiels.

Pour  $h$  réel strictement positif, on pose  $g_h(x) = f(x + h) - f(x - h)$ .

a) Démontrer l'égalité  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_h(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4 |\sin(nh)|^2 |c_n|^2$ , et déduire

la majoration  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\sin(nh)|^2 |c_n|^2 \leq K^2 h^2$ .

b) Soit  $p$  un entier strictement positif.

En choisissant  $h = \frac{\pi}{2^{p+1}}$ , montrer la majoration:  $\sum_{2^{p-1} \leq |n| < 2^p} |c_n|^2 \leq \frac{K^2 \pi^2}{2^{2p+1}}$ .

c) En déduire une majoration de  $\sum_{2^{p-1} \leq |n| < 2^p} |c_n|$  et en déduire la convergence

de la série  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|$ .

Ainsi, la série de Fourier d'une fonction Lipschitzienne est normalement convergente (Bernstein).

## C-7 Approximation des fonctions Höldériennes.

On considère un réel  $\alpha$  dans  $]0, 1[$  et  $f$  une application  $2\pi$ -périodique continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  telle qu'il existe un réel  $A > 0$ , et une suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes trigonométriques vérifiant:

i) pour tout  $n$ ,  $p_n$  est de degré inférieur à  $n$ , i.e.  $p_n(x) = \sum_{k=-n}^n a_{n,k} e^{ikx}$ ,

ii) pour tout  $n > 0$ ,  $\|p_n - f\|_\infty \leq \frac{A}{n^\alpha}$ .

a) En utilisant l'inégalité de Bernstein (vue à l'exercice D-5) montrer qu'il existe  $B > 0$  tel que pour tout  $h$  de  $[-1, 1]$  et  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,

$$|f(x + h) - f(x)| \leq B \left( \frac{1}{n^\alpha} + n|h| \right).$$

b) Pour  $\lambda \in ]0, 1]$ , on dit qu'une application  $f$  est  $\lambda$ -Höldérienne s'il existe un réel  $C > 0$  tel que pour tous  $x, y$  réels,  $|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\lambda$ .

Si on pose  $\beta = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$ , montrer que l'application  $f$  est  $\beta$ -Höldérienne (on choisira "optimalement"  $n$  en fonction de  $h$ ).

c) On va montrer en fait que  $f$  est  $\alpha$ -Höldérienne.

On pose  $q_j = p_{2j}$ , puis  $\varphi_j = q_j - q_{j-1}$ .

c-1) en utilisant les propriétés de  $f$ , montrer qu'il existe  $D > 0$  tel que pour tout  $j$  entier  $> 0$ ,  $\|\varphi_j\|_\infty \leq D 2^{-j\alpha}$ .

c-2) en utilisant l'inégalité de Bernstein, montrer qu'il existe  $E > 0$  tel que:

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in [-1, 1], |q_m(x+h) - q_m(x)| < E |h| 2^{m(1-\alpha)}.$$

c-3) En choisissant  $m$  en fonction de  $|h|$ , montrer qu'il existe  $F > 0$  telle que pour tout  $x$  réel et  $h$  dans  $[-1, 1]$ ,  $|f(x+h) - f(x)| \leq F |h|^\alpha$ .

Conclure.

## C-8 Série de Fourier divergente.

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on considère le polynôme trigonométrique

$$Q_k(x) = 2 \sin(2^{k^3+1} x) \sum_{p=1}^{2^{k^3}} \frac{\sin px}{p} \text{ et on définit } f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} Q_k(x).$$

a) Montrer que  $f$  est continue et calculer ses coefficients de Fourier. On pourra utiliser la majoration démontrée à l'exercice C-4:

$$\exists K > 0; \forall x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{k=1}^N \frac{\sin kx}{k} \right| \leq K.$$

b) On définit  $S_n(x)$  somme de Fourier de rang  $n$  de  $f$  et on considère les suites d'entiers  $\alpha_k = 3 \times 2^{k^3}$  et  $\beta_k = 2 \times 2^{k^3}$ .

Calculer  $S_{\alpha_k}(0) - S_{\beta_k}(0)$  et en déduire que la suite  $S_n(0)$  est divergente.

## D - Applications des séries de Fourier

C'est l'étude de phénomènes physiques de type vibratoire qui amena l'introduction de l'outil des séries trigonométriques (L. Euler pour les perturbations des mouvements des planètes, D. Bernoulli pour l'étude des cordes vibrantes). Mais c'est Fourier qui

pour l'équation de la chaleur dégagea clairement la notion du développement qui porte son nom.

Les exercices qui suivent montrent différents aspects de l'utilisation des séries de Fourier pour la résolution d'équations différentielles, ou l'obtention d'inégalités de type variationnel.

## D-1 Résolution d'équations différentielles ordinaires.

En utilisant une solution particulière sous forme de série trigonométrique, résoudre les équations différentielles (fonction inconnue sous la forme  $t \mapsto y(t)$ ).

a)  $y^{(4)} + 5y'' + 4y = \sin 2t$ .

b)  $y'' + y = \max(\sin t, 0)$ .

## D-2 Equation de la chaleur dans une tige.

La fonction  $u(x, t)$ , qui mesure la température à l'instant  $t$  au point d'abscisse  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) d'une tige rectiligne de longueur 1 isolée aux deux extrémités, obéit aux équations:

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ \forall t \in \mathbb{R}^+, u(0, t) = u(1, t) = 0. \end{cases}$$

Si on se donne par ailleurs une fonction  $f$  continue,  $C^1$  par morceaux de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  et telle que  $f(0) = f(1) = 0$ , on cherche à déterminer l'ensemble  $\Omega f$  des applications  $u$  de  $[0, 1] \times \mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  qui sont continues sur  $[0, 1] \times \mathbb{R}^+$ , de classe  $C^1$  sur  $[0, 1] \times \mathbb{R}^{++}$ , de classe  $C^2$  sur  $]0, 1[ \times \mathbb{R}^{++}$ , qui vérifient (E) ainsi que la répartition initiale:  $\forall x \in [0, 1], u(x, 0) = f(x)$ .

a) Si  $u$  est élément de  $\Omega f$ , on définit  $\varphi$  pour  $t \in \mathbb{R}^+$  par  $\varphi(t) = \int_0^1 u^2(x, t) dx$ .

Montrer que  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et décroissante sur  $\mathbb{R}^{++}$ .

En déduire qu'il existe au plus une application  $u$  dans  $\Omega f$ .

b) On prolonge  $f$  pour en faire une fonction impaire et 2-périodique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On cherche alors  $u$  continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ,  $C^2$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{++}$ , satisfaisant à:

$$\begin{cases} \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{++}, \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, u(x, 0) = f(x) \\ \forall t \in \mathbb{R}^+, u(0, t) = u(1, t) = 0. \end{cases}$$

Déterminer  $u$  sous la forme  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin n\pi x$ .

c) Montrer que  $\mathcal{Q}f$  a exactement un élément noté  $u$ .

Montrer qu'on peut écrire pour tout  $t > 0$ :

$$u(x, t) = \int_0^2 \frac{1}{2} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} \cos n\pi(x-u) \right) f(u) du.$$

### D-3 Inégalités de Poincaré et Wirtinger.

Les fonctions considérées sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On utilisera les coefficients de Fourier exponentiels.

a) Soit  $f$  une application  $T$ -périodique, continue et  $C^1$  par morceaux, vérifiant:

$$\int_0^T f(t) dt = 0.$$

Montrer l'inégalité:  $\int_0^T |f(t)|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(t)|^2 dt$ , et indiquer dans quelles

conditions il y a égalité.

b) Soit  $f$  une application continue et  $T$ -périodique telle que  $\int_0^T f(t) dt = 0$  et  $g$  une application de classe  $C^1$  et  $T$ -périodique.

$$\text{Montrer l'inégalité } \left| \int_0^T \overline{f(t)} g(t) dt \right| \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f(t)|^2 dt \int_0^T |g'(t)|^2 dt.$$

c) Soit  $f$  une application continue,  $C^1$  par morceaux définie sur  $[a, b]$  et vérifiant  $f(a) = f(b) = 0$ .

Montrer l'inégalité  $\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt$ , et indiquer à quelles

conditions il y a égalité.

**Indication:** prolonger l'application  $f$  pour la rendre  $T$ -périodique avec  $T = 2(b-a)$  et pouvoir lui appliquer le a).

### D-4 Inégalité des isopérimètres.

Soit une courbe simple fermée de classe  $C^1$  et régulière. On peut donc la définir par une paramétrisation normale  $s \mapsto M(s)$ .

Si  $L$  est la longueur totale de la courbe et  $S$  l'aire intérieure, on se propose de démontrer l'inégalité:  $L^2 \geq 4\pi S$ , l'égalité n'ayant lieu que *dans le cas du cercle*.

**Remarques:** - dire que la courbe est fermée signifie que la fonction  $s \mapsto M(s)$  est périodique de période  $L$ ,

- dire que la courbe est simple signifie que la fonction  $s \mapsto M(s)$  est injective sur l'intervalle  $[0, L[$ .

Pour se ramener à l'intervalle  $[0, 2\pi]$ , on pose  $f(t) = M\left(\frac{L}{2\pi}t\right)$  de sorte que:

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \text{ et } S = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) y'(t) dt.$$

On interprète  $f$  comme une fonction à valeurs complexes, et on pose:

$$f(t) = x(t) + iy(t).$$

a) Montrer que  $L^2 = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt$ , et en déduire l'égalité:

$$L^2 - 4\pi S = 2\pi \left( \int_{-\pi}^{\pi} (x'^2(t) - x^2(t)) dt + \int_{-\pi}^{\pi} (x(t) - y'(t))^2 dt \right)$$

b) En utilisant l'inégalité de Wirtinger (exercice D-3), montrer alors l'inégalité isopérimétrique et étudier le cas de l'égalité.

**Indication:** on pourra commencer par le cas où  $\int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt = 0$

## D-5 Inégalité de Bernstein.

a) Développer en série de Fourier la fonction  $f$ ,  $2\pi$ -périodique et impaire:

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ f(x) = \pi - x & \text{pour } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

En déduire pour  $a$  réel  $> 0$ , l'égalité suivante:

$$\forall x \in [-a, a], x = \frac{4}{\pi^2} ia \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} \exp\left(\frac{\pi i}{2a} x (2k-1)\right).$$

Que vaut la somme  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$  ?

b) Le réel  $a > 0$  étant toujours fixé, on désigne par  $C_a$ , l'espace vectoriel des applications continues de  $[-a, a]$  dans  $\mathbb{C}$ , normé par  $\|f\| = \sup_{x \in [-a, a]} |f(x)|$ .

On considère d'autre part une forme linéaire  $\mu$  de  $C_a$  dans  $\mathbb{C}$ , continue pour cette norme, et pour tout réel  $t$ , on pose  $\hat{\mu}(t) = \mu(e_t)$  où  $e_t$  est l'élément de  $C_a$  défini par  $e_t(x) = e^{ixt}$ .

b-1) Montrer qu'il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $x$  réel,  $|e^{ix} - 1 - ix| \leq Cx^2$ .

En déduire que  $\hat{\mu}$  est dérivable et que sa dérivée est donnée par  $\hat{\mu}'(t) = \mu(f_t)$ , où  $f_t$  est définie par  $f_t(x) = ix e_t(x)$ .

b-2) Démontrer que  $\hat{\mu}$  et  $\hat{\mu}'$  sont des fonctions bornées sur  $\mathbb{R}$  et que:

$$\hat{\mu}'(t) = -\frac{4}{\pi^2} a \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} \hat{\mu}\left(t + \frac{2k-1}{2a} \pi\right).$$

En déduire l'inégalité de *S. Bernstein*:  $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{\mu}'(t)| \leq a \sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{\mu}(t)|$ .

c) On considère deux  $n$ -uplets  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  de réels et  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$  de complexes, et on définit la fonction  $\varphi$  par la formule  $\varphi(t) = \sum_{j=1}^n \gamma_j e^{i\alpha_j t}$ .

Montrer que  $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi'(t)| \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} |\alpha_j|\right) \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)|$ .

Qu'en déduit-on pour un polynôme trigonométrique  $P(t) = \sum_{k=-N}^N \lambda_k e^{ikt}$  ?

D-6 Formule d'inversion de Fourier.

Soit un réel  $A > 0$  et  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ , de classe  $C^2$  et nulle hors de  $[-A, A]$ . On définit la transformée de Fourier de  $f$  par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixt} dx.$$

- a) Montrer que  $\hat{f}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et que  $t \mapsto t^2 |\hat{f}(t)|$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .
- b) Soit  $T > 2A$ , montrer la formule sommatoire:

$$\forall x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], f(x) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{2k\pi}{T}\right) e^{2k\pi i x/T}.$$

c) En déduire la *formule d'inversion de Fourier*:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{ixt} dt.$$

D-7 Fonctions de Hardy.

On considère deux suites (indéxées dans  $\mathbb{Z}$ ),  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  vérifiant:

- i)  $a_0 = 0$
- ii)  $\forall n \in \mathbb{Z}, a_{n-1} \leq a_n - b_n \leq a_n + b_n \leq a_{n+1}$
- iii)  $\forall n \in \mathbb{Z}^*, b_n \neq 0$
- iv)  $b_n \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} \infty$ .

On considère par ailleurs une suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de réels telle que  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\gamma_n|$  soit convergente et on pose:

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{ia_n t} \text{ (normalement convergente).}$$

a) Soit  $n$  un entier non nul et  $P(t) = \sum_{k=-m}^m \alpha_k e^{ikt}$  un polynôme trigonométrique de degré  $m \leq b_n - 1$  tel que  $\alpha_0 = 1$ .

$$\text{Montrer que } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(t) e^{-ia_n t} dt = \gamma_n.$$

$$\text{b) On pose } D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} \text{ et } F_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t).$$

On suppose que sur  $[-\pi, \pi]$ ,  $|f(t)| \leq c |t|^\alpha$  avec  $c \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $\alpha \in ]0, 1[$ .

En appliquant la question a) au polynôme trigonométrique  $P = F_{b_n-1}$ , montrer que  $\gamma_n \underset{|n| \rightarrow \infty}{=} O(b_n^{-\alpha})$ .

c) En s'inspirant de la partie b), montrer que s'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que  $f(t) - f(t_0) = o(|t - t_0|^\alpha)$  quand  $t \rightarrow t_0$ , alors  $\gamma_n \underset{|n| \rightarrow \infty}{=} o(b_n^{-\alpha})$ .

On pourra commencer par le cas  $t_0 = f(t_0) = 0$ .

d) A partir de maintenant, on choisit  $b$  entier  $\geq 2$ ,  $\alpha$  réel dans  $]0, 1[$  et on pose:

$$\text{i) } a_0 = 0, a_n = b^n \text{ pour } n > 0 \text{ et } a_n = -b^{-n} \text{ pour } n < 0,$$

$$\text{ii) } \gamma_0 = 0 \text{ et } \gamma_n = |a_n|^{-\alpha} \text{ pour } n \neq 0,$$

$$\text{iii) pour tout } n, b_n = \frac{1}{2} |a_n|.$$

Montrer que les conditions du début sont bien remplies, que  $f$  est continue et peut s'écrire  $f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b^{-\alpha n} \cos(b^n t)$ .

e) Existe-t'il  $t_0$  réel tel que  $f(t) - f(t_0) = o(|t - t_0|^\alpha)$  lorsque  $t \rightarrow t_0$ ?

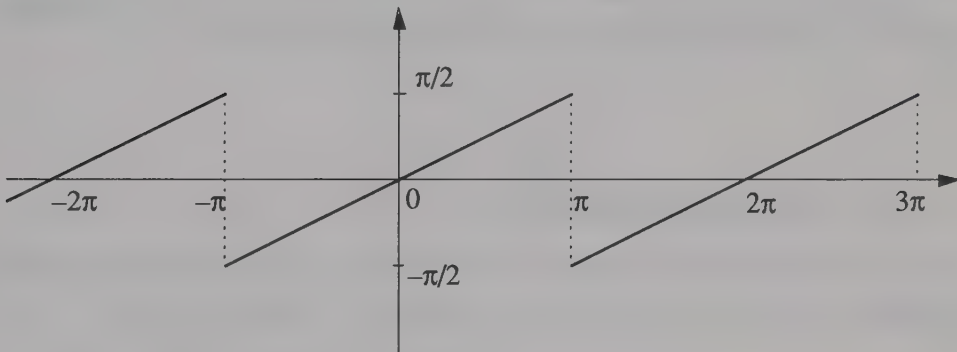
De la réponse à cette question, conclure que  $f$  n'est dérivable en aucun point.

# Solutions

## A - Exemples de développement

### A-1 Dent de scie:

La fonction  $f$  étant impaire, *tous les coefficients  $a_k$  sont nuls.*



$$\begin{aligned} \text{Pour } k \geq 1, b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{t}{2} \sin kt \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{t}{2k} \cos kt \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos kt}{2k} dt = \frac{(-1)^{k-1}}{k}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi nous avons } f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx.$$

Les hypothèses du *théorème de Dirichlet* sont satisfaites pour cette fonction.

$$\text{Nous avons en fait, } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx.$$

$$\text{En particulier pour } |x| < \pi, \quad \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx.$$

$$\text{La relation de Parseval donne } \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^2}{4} dt = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{t^3}{12} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{d'où:}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{d'où:}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

Le changement de variable  $x \mapsto \pi - x$  donne le développement de la fonction  $g$ :

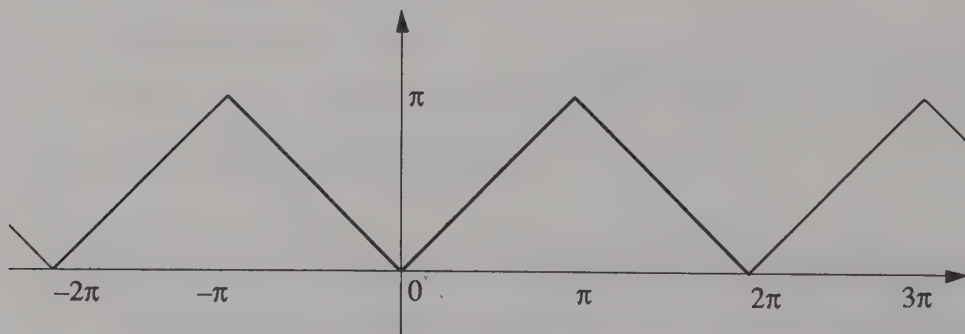
$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

En particulier, *pour tout  $x$  dans  $]0, 2\pi[$* ,  $\frac{\pi-x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ , alors que  $g(0) = 0$ .

**Remarque:** cette série converge uniformément sur tout intervalle du type  $[\alpha, 2\pi-\alpha]$ ,  $0 < \alpha < \pi$ , d'après la *règle d'Abel*. Il n'y a pas convergence uniforme sur  $[0, 2\pi]$  car la fonction somme est discontinue en 0. Nous reviendrons sur cette série.

## A-2 Dent de scié continue:

Ici il s'agit d'une fonction continue  $C^1$  par morceaux. Sa série de Fourier sera donc normalement convergente, et la fonction sera somme de sa série de Fourier.



La fonction est paire. *Tous les coefficients  $b_k$  sont nuls.*

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi.$$

$$\text{pour } k \geq 1, a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x}{k} \sin kx \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx$$

$$= -\frac{2}{\pi k} \left[ -\frac{\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2} [(-1)^k - 1].$$

Ainsi, pour tout entier  $k > 0$ ,  $a_{2k} = 0$ ,  $a_{2k-1} = \frac{-4}{\pi (2k-1)^2}$ .

Donc pour tout  $x$  réel:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi (2k+1)^2} \cos(2k+1)x$$

De la relation de Parseval,  $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{2\pi^2 (2k+1)^4}$

on déduit l'égalité  $\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{12}$ , et finalement:

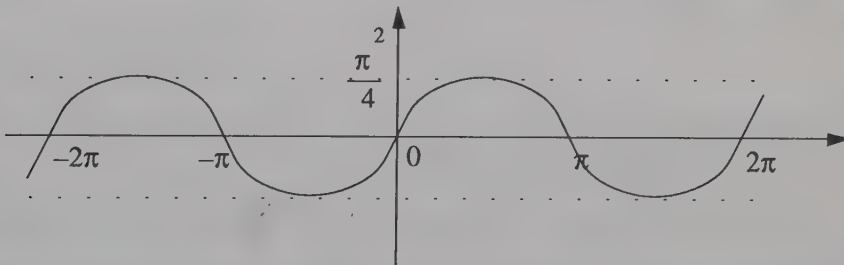
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Comme  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ ,  $\left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$ , d'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

### A-3 Parabole par morceaux:

Le lecteur vérifiera qu'il s'agit d'une fonction de classe  $C^1$ , et  $C^2$  par morceaux. Son graphe est constitué d'arcs de paraboles.



La série de Fourier convergera normalement et aura pour somme  $f$ .

**Les coefficients  $a_k$  sont tous nuls.**

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi-x) \sin kx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ -(\pi x - x^2) \frac{\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} (\pi - 2x) \cos kx dx \\ &= \frac{2}{\pi k} \left[ (\pi - 2x) \frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\pi} + \frac{4}{k^2 \pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx = \frac{4}{\pi k^3} ((-1)^{k+1} + 1) \end{aligned}$$

Ainsi pour tout  $k$ ,  $b_{2k} = 0$ ,  $b_{2k+1} = \frac{8}{\pi(2k+1)^3}$ , et grâce au *théorème de Dirichlet*:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}.$$

De la *relation de Parseval*,  $\frac{32}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 (\pi-x)^2 dx = \frac{\pi^4}{30}$ , on

déduit:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

$$\text{Mais on a alors } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^6} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6}$$

$$\text{d'où } \left(1 - \frac{1}{64}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}, \text{ et finalement:}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

**Remarque:** Le lecteur aura observé que plus la fonction est régulière, plus sa série de Fourier converge vite. Si  $f$  est  $C^k$ , par  $k$  intégrations par parties, on montre que ses coefficients de Fourier sont des  $o\left(\frac{1}{n^k}\right)$ . Si  $f$  est  $C^\infty$ , ses coefficients de Fourier sont négligeables devant toute puissance de  $\frac{1}{n}$  (voir exercice C-1).

#### A-4 Développement Eulériens:

a) Le lecteur tracera le graphe de  $f$  pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = \frac{3}{2}$ ,  $\alpha = \frac{5}{2}$  par exemple. Il observera pour tout  $\alpha$  non entier, que  $f$  est une fonction  $2\pi$ -périodique continue et  $C^1$  par morceaux. Sa série de Fourier convergera alors normalement et aura pour somme  $f$ . La fonction  $f$  étant paire, *les coefficients  $b_k$  sont nuls*.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\alpha x) dx = \frac{2 \sin(\alpha \pi)}{\alpha \pi}$$

$$n \geq 1, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\alpha x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(\alpha+n)x + \cos(\alpha-n)x] dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{\alpha+n} \sin(\alpha+n)\pi + \frac{1}{\alpha-n} \sin(\alpha-n)\pi \right]$$

$$a_n = \frac{(-1)^n \sin(\alpha \pi)}{\pi} \left[ \frac{1}{\alpha + n} + \frac{1}{\alpha - n} \right]$$

$$a_n = (-1)^n \frac{\sin(\alpha \pi)}{\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

Ainsi pour tout  $x$  dans  $[-\pi, \pi]$ ,

$$f(x) = \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha \pi)}{\alpha \pi} + \frac{2\alpha \sin(\alpha \pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^2 - \alpha^2}.$$

b-1) Donnons à  $x$  la valeur  $\pi$ .

$$\cos(\alpha \pi) = \frac{2\alpha \sin(\alpha \pi)}{\pi} \left[ \frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-1)^n}{n^2 - \alpha^2} \right],$$

d'où, pour tout  $\alpha$  non entier (i.e.  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ), la relation:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \tan(\alpha \pi)}}$$

b-2) Avec  $\alpha \pi = u$ , pour  $u \notin \pi \mathbb{Z}$ ,  $\frac{\pi^2}{2\alpha \pi \tan(\alpha \pi)} = \frac{\pi^2}{2(\pi \alpha)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}$ , soit:

$$\boxed{\cotan u = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2 \pi^2}}$$

b-3) Plaçons-nous sur le compact  $[-A, A]$ , posons  $m = E\left(\frac{A}{\pi}\right)$  mettons à part les

termes  $\frac{1}{u}$  et  $\sum_{n \leq m} \frac{2u}{u^2 - n^2 \pi^2}$ .

Alors la série de fonctions  $\sum_{n > m} \frac{2u}{u^2 - n^2 \pi^2}$  converge normalement sur  $[-A, +A]$ , ainsi que sa série dérivée.

En effet, pour  $|u| \leq A$  et  $n > m$ ,  $\left| \frac{2u}{u^2 - n^2 \pi^2} \right| \leq \frac{2A}{n^2 \pi^2 - A^2}$  et  $\sum_{n > m} \frac{2A}{n^2 \pi^2 - A^2}$  converge.

$$\frac{d}{du} \left( \frac{2u}{u^2 - n^2 \pi^2} \right) = \frac{-2u^2 - 2n^2 \pi^2}{(u^2 - n^2 \pi^2)^2}.$$

$$\left| \frac{d}{du} \left( \frac{2u}{u^2 - n^2 \pi^2} \right) \right| \leq \frac{2(A^2 + n^2 \pi^2)}{(n^2 \pi^2 - A^2)^2}, \text{ même conclusion.}$$

Alors  $\sum_{n > m} \frac{2u}{u^2 - n^2 \pi^2}$  est sur  $[-A, A]$ , de classe  $C^1$  et dérivable terme à terme.

Il en sera de même de  $\frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2 \pi^2}$ , sauf aux points de  $[-A, A]$  du type  $\pm \pi n$ , où  $n$  est un entier naturel.

Ainsi, sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $-\frac{1}{\sin^2 u} = -\frac{1}{u^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^2 + n^2 \pi^2}{(u^2 - n^2 \pi^2)^2}$ .

*Décomposons en éléments simples* la fraction rationnelle  $\frac{u^2 + n^2 \pi^2}{(u^2 - n^2 \pi^2)^2}$ .

$$\frac{u^2 + n^2 \pi^2}{(u - n\pi)^2 (u + n\pi)^2} = \frac{\alpha}{(u + n\pi)^2} + \frac{\beta}{u + n\pi} + \frac{\gamma}{(u - n\pi)^2} + \frac{\delta}{u - n\pi}.$$

Des considérations de parité font que  $\alpha = \gamma$ ,  $\beta = \delta$ .

On trouve  $\alpha = \frac{1}{2}$  et (en faisant  $u = 0$ )  $\delta = 0$ .

Ainsi  $\frac{1}{\sin^2 u} = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(u + n\pi)^2} + \frac{1}{(u - n\pi)^2} \right)$

La convergence, pour  $u \in \mathbb{R} \setminus \pi \mathbb{Z}$ , de chacune des deux séries  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(u + n\pi)^2}$  et

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(u - n\pi)^2}$  autorise à écrire:

$$\boxed{\frac{1}{\sin^2 u} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(u + p\pi)^2}}$$

b-4) Pour tout  $u$  dans  $]-\pi, \pi[ \setminus \{0\}$ , nous avons  $\cotan u - \frac{1}{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2 \pi^2}$ .

On peut même prolonger par continuité par la valeur 0 en 0, et il y a convergence normale sur tout intervalle  $[0, x]$  où  $|x| < \pi$ . On peut alors intégrer terme à terme:

$$\int_0^x \left( \cotan u - \frac{1}{u} \right) du = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2u}{u^2 - n^2 \pi^2} du, \text{ soit:}$$

$$\ln \left( \frac{\sin x}{x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left| \frac{x^2 - n^2 \pi^2}{n^2 \pi^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right).$$

De la continuité de l'exponentielle, on déduit l'égalité:

$$\forall x \in ]-\pi, \pi[, \quad \frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right), \text{ qui s'écrit encore:}$$

$$\boxed{\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right)}$$

Cette formule est en fait valable dans des conditions bien plus générales (l'exercice I.A-4 l'a établie pour tout  $x \in \mathbb{C}$ ).

c-1) Dans le développement en série de Fourier de la fonction  $f$ , donnons maintenant à  $x$  la valeur 0.

$$1 = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + 2\alpha \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}, \text{ d'où, } \forall x \notin \mathbb{Z},$$

$$\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}.$$

En changeant  $\alpha$  en  $i\alpha$ , on obtient alors:  $\frac{\alpha\pi}{\operatorname{sh}(\alpha\pi)} = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \alpha^2}.$

c-2) Pour  $\alpha$  dans  $]0, 1[$ , l'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt$  converge.

Décomposons  $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt$ , et dans la seconde intégrale, faisons un changement de variable, en posant  $t = 1/u$ .

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt = - \int_1^0 \left(\frac{1}{u}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{1+\frac{1}{u}} \frac{du}{u^2} = \int_0^1 \frac{u^{-\alpha}}{1+u} du = \int_0^1 \frac{u^{(1-\alpha)-1}}{1+u} du.$$

Pour  $\beta$  dans  $]0, 1[$ , nous pouvons calculer  $\int_0^1 \frac{t^{\beta-1}}{1+t} dt$ .

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1}}{1+t} \text{ et donc pour tout } t \text{ dans } ]0, 1[,$$

$$\frac{t^{\beta-1}}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k+\beta-1} + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+\beta}}{1+t}.$$

Si nous revenons à l'intégrale,

$$\int_0^1 \frac{t^{\beta-1}}{1+t} dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{k+\beta-1} dt + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+\beta}}{1+t} dt.$$

$$\text{Or nous avons } \int_0^1 t^{k+\beta-1} dt = \frac{1}{k+\beta} \text{ et } \int_0^1 \frac{t^{n+\beta}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{n+\beta} dt = \frac{1}{n+\beta+1}.$$

$$\text{Finalement, } (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+\beta}}{1+t} dt \text{ tend vers } 0, \text{ et } \int_0^1 \frac{t^{\beta-1}}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+\beta}.$$

La série est bien convergente en vertu de la règle spéciale des séries alternées.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n-\alpha} \right), \text{ et finalement:} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}}$$

d) Pour  $|u| < \pi$  et  $n \geq 1$ ,  $\frac{2u}{n^2 \pi^2 - u^2} = \frac{2u}{n^2 \pi^2} \frac{1}{1 - \frac{u^2}{n^2 \pi^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2u^{2k+1}}{(n^2 \pi^2)^{k+1}}$ .

La série double à termes positifs  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{2k+1}}{(n^2 \pi^2)^{k+1}} \right)$  est convergente et *on peut permuter les deux*  $\sum$  (cf Exercice I A-6).

Alors  $\cotan u - \frac{1}{u} = -2u \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} \right) \frac{u^{2k}}{\pi^{2k+2}}$ , soit encore:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} \right) \frac{u^{2k}}{\pi^{2k+2}} = \frac{1}{2u} \left( \frac{1}{u} - \cotan u \right).$$

La fonction écrite au second membre, est de classe  $C^\infty$  et *admet un développement*

*limité à tout ordre* :  $\frac{1}{2u} \left( \frac{1}{u} - \cotan u \right) = \sum_{k=0}^n a_k u^{2k} + o(u^{2n+1}).$

On obtient facilement  $a_0 = \frac{1}{6}$ ,  $a_1 = \frac{1}{90}$ ,  $a_2 = \frac{1}{945}$ . Plus généralement, tous les  $a_k$ , qui proviennent de la division selon les puissances croissantes de deux polynômes à coefficients rationnels, sont rationnels.

Par identification, on obtient  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} = \pi^{2k+2} a_k$  et on retrouve en particulier:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

## A-5 Exemples de séries de Fourier d'une série de fonctions:

a) Montrons que cette série de fonctions *converge normalement* sur tout intervalle compact  $[-A, A]$ . Pour cela posons d'abord  $m = E\left(\frac{A}{2\pi}\right)$ .

Pour  $|x| \leq A$  et  $k > m$ , nous avons  $|x + 2k\pi| = x + 2k\pi \geq -A + 2k\pi > 0$ . Alors,  $e^{-|x+2k\pi|} \leq e^{A-2k\pi}$ . Comme la série  $\sum_{k>0} e^{-2k\pi}$  converge, la série  $\sum_{k>m} e^{-|x+2k\pi|}$  converge normalement sur  $[-A, A]$ .

Maintenant, pour  $|x| \leq A$  et  $k < -m$ , nous avons:

$$|x + 2k\pi| = -x - 2k\pi > -A - 2k\pi > 0.$$

$$\text{Alors, } e^{-|x+2k\pi|} \leq e^A e^{2k\pi}.$$

La convergence de  $\sum_{k < 0} e^{2k\pi}$  implique la convergence normale, sur  $[-A, A]$ , de la série  $\sum_{k < -m} e^{-|x+2k\pi|}$  et ainsi,  $\sum_{k < -m} e^{-|x+2k\pi|} + \sum_{k \geq m} e^{-|x+2k\pi|}$  est continue. Si nous rajoutons les fonctions  $e^{-|x+2m\pi|}$  pour  $-m \leq k \leq m$ , **on obtient une fonction continue.**

Pour la dérivabilité, nous observons que chaque fonction  $x \mapsto e^{-|x+2k\pi|}$  est  $C^\infty$  sauf au point  $x = -2k\pi$ .

**Plaçons nous encore sur l'intervalle  $[-A, A]$** , et considérons les deux séries  $\sum_{k > m} e^{-|x+2k\pi|}$  et  $\sum_{k < -m} e^{-|x+2k\pi|}$ .

Elles s'écrivent respectivement  $\sum_{k > m} e^{-x-2k\pi}$  et  $\sum_{k < -m} e^{x+2k\pi}$  et convergent normalement sur  $[-A, A]$ .

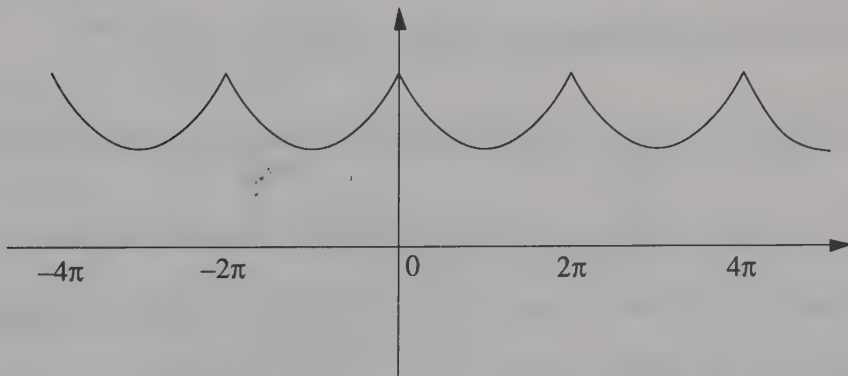
Les séries des dérivées  $n$ -ièmes sont respectivement  $(-1)^n \sum_{k > m} e^{-x-2k\pi}$  et  $\sum_{k < -m} e^{x+2k\pi}$  et convergent normalement elles aussi sur  $[-A, A]$ .

Ainsi,  $\sum_{k < -m} e^{-|x+2k\pi|} + \sum_{k \geq m} e^{-|x+2k\pi|}$  est, sur  $[-A, A]$  une fonction  $C^\infty$ , **dérivable terme à terme, une infinité de fois.**

Rajoutons-y les fonctions  $e^{-|x+2k\pi|}$  pour  $k$  dans  $[-m, m]$  qui sont aussi  $C^\infty$  sauf au point  $-2k\pi$  (où il y a une dérivée à droite et une dérivée à gauche). Ainsi, sur  $[-A, A]$ , **la fonction  $f$  est continue et  $C^1$  par morceaux** (et même de classe  $C^\infty$  sur tout intervalle du type  $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ ).

Ceci étant vrai pour tout  $A > 0$ , **l'application  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $C^1$  par morceaux.** On voit facilement que le changement d'indice  $k$  en  $k+1$  traduit le fait que  $f$  est  $2\pi$ -périodique. Le changement d'indice  $k \mapsto -k$  traduit le fait qu'elle est paire.

On peut facilement imaginer son graphe.



**Calculons ses coefficients de Fourier.** La série de Fourier de  $f$  va converger normalement vers  $f$ . Les coefficients  $b_k$  sont nuls.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-|k+2k\pi|} \cos nt \, dt \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Comme il y a convergence normale sur  $[0, 2\pi]$ , on peut intégrer terme à terme:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-|k+2k\pi|} \cos nt \, dt.$$

Dans chacune des intégrales faisons le changement de variable  $t + 2k\pi \mapsto t$ :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} e^{-|t|} \cos nt \, dt.$$

Comme l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \cos nt \, dt$  est absolument convergente, nous avons alors

(comparaison séries-intégrales impropres),

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos nt \, dt.$$

Alors  $a_0 = \frac{2}{\pi}$ , et pour  $n \geq 1$ :

$$a_n = \operatorname{Re} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{(-1+in)t} \, dt \right) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{-1+in} e^{(-1+in)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{\pi(n^2+1)}.$$

Ainsi, pour tout  $x$  réel,  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-|x+2k\pi|} = \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos nx}{\pi(n^2+1)}.$

Si nous donnons à  $x$  la valeur 0, nous obtenons la relation:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-|2k\pi|} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2k\pi} - 1 = \frac{2}{1-e^{-2\pi}} - 1 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{\pi}, \text{ d'où :}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{1-e^{-2\pi}} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2 \operatorname{th} \pi}}$$

**Remarque:** on peut vérifier que pour  $x \in [0, 2\pi]$ ,  $\frac{\operatorname{ch}(x-\pi)}{\operatorname{sh} \pi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-|x+2k\pi|}.$

b) La série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x-2n\pi)^2 + a^2}$  est normalement convergente sur tout intervalle du type  $]-\infty, A]$ , alors que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+2n\pi)^2 + a^2}$  est normalement convergente sur tout intervalle du type  $[-A, +\infty[$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-2n\pi)^2 + a^2}$  est donc normalement convergente sur tout intervalle  $[-A, A]$ .

**La fonction  $f$  est donc définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .**

La série dérivée  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} -\frac{2(x-2n\pi)}{((x-2n\pi)^2 + a^2)^2}$  est elle-aussi normalement convergente sur  $[-A, A]$  pour tout  $A > 0$ . On en déduit que  **$f$  est de classe  $C^1$ .**

Par ailleurs, si  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x-2n\pi)^2 + a^2}$  et  $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2 + a^2}$ , de telle

sorte que  $f(x) = g(x) + h(x)$ , on a

$$g(x+2\pi) = g(x) + \frac{1}{(x+2\pi)^2 + a^2} \text{ et}$$

$$h(x+2\pi) = h(x) - \frac{1}{(x+2\pi)^2 + a^2} \text{ de sorte que } f(x+2\pi) = f(x).$$

La fonction  $f$ ,  $2\pi$ -périodique et de classe  $C^1$  est somme de sa série de Fourier.

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-inx}}{(x-2k\pi)^2 + a^2} dx \right).$$

La convergence normale sur  $[0, 2\pi]$  permet d'intégrer terme à terme. Dans chaque intégrale, on fait le changement de variable  $t = x - 2k\pi$ , de sorte que:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-2k\pi}^{(-2k\pi+2)\pi} \frac{e^{-int}}{t^2 + a^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-int}}{t^2 + a^2} dt.$$

Pour calculer  $c_n(f)$ , dans le cas  $n \neq 0$ , posons  $nt = u$ , de sorte que:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iu}}{\frac{u^2}{n^2} + a^2} \varepsilon \cdot \frac{du}{n} = \frac{|n|}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iu}}{u^2 + n^2 a^2} du \quad (\varepsilon \text{ est le signe de } n).$$

La partie imaginaire est nulle comme intégrale d'une fonction impaire. Il reste par parité:

$$c_n(f) = \frac{|n|}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2 + n^2 a^2} = \frac{e^{-|n|a}}{2a} \text{ pour } n \neq 0, \text{ et}$$

$$c_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{\pi a} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2a}.$$

On peut alors écrire:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{(-a+ix)n} + e^{(-a-ix)n}) \\ &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} \left( \frac{e^{-a+ix}}{1 - e^{-a+ix}} + \frac{e^{-a-ix}}{1 - e^{-a-ix}} \right) \\ &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} \frac{2e^{-a} (\cos x - e^{-a})}{1 - 2e^{-a} \cos x + e^{-2a}} \\ &= \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} \frac{\cos x - e^{-a}}{\operatorname{ch} a - \cos x} \\ &= \frac{\operatorname{sh} a}{2a (\operatorname{ch} a - \cos x)}. \end{aligned}$$

Notons que dans le cas particulier  $x = 0$ , on trouve

$$f(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2 + a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a - 1} = \frac{1}{2a} \coth \left( \frac{a}{2} \right)$$

qui résulte directement des développements Eulériens vus en A-4.

Par changement de variable,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2 + a^2} &= 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi x - 2n\pi)^2 + 4\pi^2 a^2} \\ &= 4\pi^2 f(2\pi x) \text{ en remplaçant } a \text{ par } 2\pi a \\ &= \frac{\pi \operatorname{sh}(2\pi a)}{a (\operatorname{ch} 2\pi a - \cos 2\pi x)}. \end{aligned}$$

**Bilan de l'étude:**

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - 2n\pi)^2 + a^2} &= \frac{\operatorname{sh} a}{2a (\operatorname{ch} a - \cos x)} \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - n)^2 + a^2} &= \frac{\pi \operatorname{sh}(2\pi a)}{a (\operatorname{ch} 2\pi a - \cos 2\pi x)} \end{aligned}$$

### A-6 Fonctions de Bessel d'indice entier:

a) La fonction  $f_n : t \mapsto e^{ix \sin t}$  étant de classe  $C^\infty$ , sa série de Fourier **converge normalement vers**  $f_x$ . D'après le résultat de l'exercice C-1, ses coefficients sont négligeables devant toute puissance de  $\frac{1}{n}$ . On a donc:

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{ix \sin t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x) e^{int}.$$

Pour  $n$  entier,  $J_{-n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin t} e^{-int} dt$ , soit en posant  $t = \pi - u$ ,

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^0 e^{ix \sin u} e^{in(\pi-u)} du \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin u} e^{-inu} du = (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

b i) On partage en 0, l'intégrale donnant  $J_n(x)$  et on ramène les deux à l'intervalle  $[0, \pi]$  par symétrie:

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^0 e^{ix \sin t} e^{-int} dt + \int_0^{\pi} e^{ix \sin t} e^{-int} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (e^{-ix \sin t} e^{int} + e^{ix \sin t} e^{-int}) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - x \sin t) dt. \end{aligned}$$

ii) La série de fonctions de  $t$ ,  $e^{ix \sin t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k x^k \sin^k t}{k!}$  est normalement convergente. On peut donc intégrer terme à terme:

$$\begin{aligned}
 J_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin t} e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k (\sin t)^k e^{-int}}{k!} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k x^k}{k!} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^k e^{-int} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k k!} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l=0}^k (-1)^l C_k^l e^{i(k-2l-n)t} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k k!} \sum_{l=0}^k (-1)^l C_k^l \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-2l-n)t} dt.
 \end{aligned}$$

Comme  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipt} dt$  vaut 1 si  $p \neq 0$  et 1 si  $p = 0$ , si  $k < n$  où  $k - n$  est impair,

l'intégrale est nulle. Seuls subsistent les termes pour lesquels il existe  $l \in \mathbb{N}$  tel que  $k = n + 2l$ . Pour  $k$  fixé, **un tel  $l$  est alors unique et dans  $[[0, k]]$** , et, pour tout  $x$  réel,

$$J_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l x^{n+2l}}{2^{n+2l} (n+2l)!} \frac{(n+2l)!}{l! (n+l)!} = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{x}{2}\right)^{2l}}{l! (n+l)!},$$

iii) Cherchons les solutions de l'équation différentielle  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ ,

sous la forme  $y = x^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  avec  $a_0 \neq 0$ .

En injectant  $y$  dans l'équation, on trouve  $a_0$  indéterminé,  $a_1 = 0$ , puis pour  $k \geq 2$ ,  $(2n+k)k a_k = -a_{k-2}$ .

**Les coefficients d'indice impair sont donc nuls** et pour  $k \geq 1$ ,  $a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{4k(n+k)}$ .

Comme  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{2k}}{a_{2k-2}} = 0$ , on obtient une série entière de rayon de convergence infini:

$$y = a_0 x^n \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{4^k k! (n+1)(n+2) \dots (n+k)} \right).$$

**On voit que  $J_n$  correspond à  $a_0 = \frac{1}{2^n n!}$ .**

c) Dans le développement en série de Fourier de la fonction  $f_x$ , on peut séparer partie réelle et partie imaginaire pour obtenir:

$$\text{i) } \cos(x \sin t) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos 2nt,$$

$$\text{d'où } J_{2n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t) \cos 2nt dt.$$

$$\text{ii) } \sin(x \sin t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x) \sin(2n+1)t,$$

$$\text{d'où } J_{2n+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x \sin t) \sin(2n+1)t dt.$$

d) Pour  $a$  et  $b$  réels,  $e^{i(a+b)\sin t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(a+b) e^{int} = e^{ia \sin t} e^{ib \sin t}$ .

Or  $e^{ia \sin t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(a) e^{int}$ ,  $e^{ib \sin t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(b) e^{int}$ , de telle sorte qu'en appliquant l'exercice C-2,  $J_n(a+b) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} J_p(a) J_{n-p}(b)$ , la série  $\sum_{p \in \mathbb{Z}} J_p(a) J_{n-p}(b)$  étant absolument convergente d'après le a).

e) La relation de Parseval donne ici:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |e^{ix \sin t}|^2 dt = 1 = J_0(x)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)^2.$$

On en déduit immédiatement les deux majorations:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, |J_0(x)| &\leq 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, |J_n(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

## B - Séries trigonométriques

### B-1 Comparaison à la dent de scie:

a) Effectuons une transformation d'Abel.

En posant  $B_n(x) = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$ , on sait que pour  $x \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$ ,

$$B_n(x) = \operatorname{Im} \left( \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right) = \sin \frac{n+1}{2} x \frac{\sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}, \text{ donc } |B_n(x)| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

$$\text{et } \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin kx}{\sqrt{k^2 + 1}} =$$

$$- \frac{B_n(x)}{\sqrt{(n+1)^2 + 1}} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} B_k(x) \left( \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2 + 1}} \right) + \frac{B_{n+p}(x)}{\sqrt{(n+p)^2 + 1}}.$$

On en déduit:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin kx}{\sqrt{k^2 + 1}} \right| \leq \frac{2}{\sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{(n+1)^2 + 1}} \leq \frac{2}{n \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Il y a donc convergence uniforme sur tout intervalle  $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ . Comme par ailleurs la série est nulle pour  $x = 0$  et  $2\pi$ -périodique, il y a convergence simple sur  $\mathbb{R}$ .

b) D'après le a), on peut affirmer dès à présent que  $f$  est continue sur  $]0, 2\pi[$ .  
 Pour aller plus loin, introduisons la fonction  $2\pi$ -périodique  $\varphi$  définie par:

$$\varphi(0) = 0 \text{ et pour } x \in ]0, 2\pi[, \varphi(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

On a vu au A-1, que  $\varphi$  est égale à la somme de sa série de Fourier et donc que pour tout  $x$  réel,  $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ . On peut alors écrire:

$$g(x) = \varphi(x) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$\text{avec } b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{1}{n\sqrt{n^2 + 1}(n + \sqrt{n^2 + 1})} \sim \frac{1}{2n^3}.$$

Cette série est **normalement convergente** ainsi que la série dérivée  $\sum n b_n \cos nx$ .

Sa somme  $g$  est donc dérivable de dérivée  $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos nx$ .

Comme  $\varphi$  est de classe  $C^1$  (puisque affine) sur l'intervalle  $]0, 2\pi[$ , on en déduit que  **$f$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, 2\pi[$**  et que

$$f'(x) = -\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}\right) \cos nx$$

c) La fonction  $g$  étant somme d'une série trigonométrique normalement convergente, **cette série trigonométrique est sa série de Fourier**. Pour la fonction  $f$ , les coefficients de Fourier sont donc  $a_n(f) = 0$  ( $f$  est impaire) et

$$b_n(f) = b_n(\varphi) - b_n(g) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

**La série de Fourier de  $f$  est donc**  $\sum \frac{\sin nx}{\sqrt{n^2 + 1}}$ .

## B-2 A propos du logarithme complexe:

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^\infty$  et  $2\pi$ -périodiques, donc **égales à la somme de leur série de Fourier**. Comme le préconise l'indication, posons  $\varphi(a) = \text{Arctan} \frac{a \sin x}{1 - a \cos x}$ , et  $\psi(a) = \ln(1 - 2a \cos x + a^2)$  en considérant  $x$  fixé.

$$\begin{aligned} \varphi'(a) &= \frac{\sin x}{1 - 2a \cos x + a^2} = \frac{\sin x}{(a - e^{ix})(a - e^{-ix})} \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{a - e^{ix}} - \frac{1}{a - e^{-ix}} \right) \end{aligned}$$

et cette formule est valable pour tout  $x$  réel.

On en déduit:

$$\begin{aligned}\varphi'(a) &= \frac{1}{2i} \left( -e^{-ix} \frac{1}{1 - a e^{-ix}} + e^{ix} \frac{1}{1 - a e^{ix}} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left( - \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-i(n+1)x} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{i(n+1)x} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(n+1)x.\end{aligned}$$

Mais comme  $\varphi(a) = 0$ , nous avons pour  $|a| < 1$ ,

$$\varphi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1} \sin(n+1)x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \sin nx.$$

Ainsi pour tout  $x$  réel, et tout  $a$  dans  $] -1, 1[$ ,

$$\boxed{\operatorname{Arctan} \frac{a \sin x}{1 - a \cos x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \sin nx}$$

La fonction  $f$  est donc *somme d'une série trigonométrique qui converge normalement* pour  $|a| < 1$ . Cette série trigonométrique est donc *la série de Fourier de  $f$* , car du fait de la convergence normale par rapport à  $x$ , on peut intégrer terme à terme selon le schéma:

$$\begin{aligned}b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Arctan} \left( \frac{a \sin x}{1 - a \cos x} \right) \sin kx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \sin nx \right) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \int_0^{2\pi} \sin nx \sin kx \, dx = \frac{a^k}{k}.\end{aligned}$$

De même, pour  $x$  réel fixé et  $|a| < 1$ ,

$$\begin{aligned}\psi'(a) &= \frac{a - \cos x}{1 - 2a \cos x + a^2} = \frac{a - \cos x}{(a - e^{ix})(a - e^{-ix})} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a - e^{ix}} + \frac{1}{a - e^{-ix}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( -e^{-ix} \frac{1}{1 - a e^{-ix}} - e^{ix} \frac{1}{1 - a e^{ix}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-i(n+1)x} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{i(n+1)x} \right) = - \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(n+1)x.\end{aligned}$$

Comme  $\psi(0) = 0$ , nous avons en intégrant terme à terme,

$$\psi(a) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1} \cos(n+1)x = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos nx.$$

Comme pour la fonction  $f$ , *la convergence normale de la série trigonométrique par rapport à  $x$*  quand  $a$  est fixé dans  $] -1, 1[$  permet d'écrire le développement de  $g$  en série de Fourier, pour tout  $x$  réel:

$$\boxed{\frac{1}{2} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos nx}$$

En échangeant  $a$  en  $-a$ , on obtient, toujours pour  $|a| < 1$ ,

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n} \sin nx \quad \text{et} \quad g_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n} \cos nx.$$

b) La série entière  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$  a pour rayon de convergence 1. Ainsi, on peut poser pour  $|z| < 1$ ,  $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ , soit pour  $r \in [0, 1[$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi(r e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{r^n e^{in\theta}}{n}.$$

Finalement, **en séparant parties réelle et imaginaire** et en utilisant la question a):

$$\begin{aligned} \varphi(r e^{i\theta}) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{r^n \cos n\theta}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{r^n \sin n\theta}{n} \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + 2r \cos \theta + r^2) + i \operatorname{Arctan} \frac{r \sin \theta}{1 + r \cos \theta}. \end{aligned}$$

Comme le nombre complexe  $1 + z$  appartient au disque ouvert de centre 1 et de rayon 1, il existe un unique  $\alpha$  dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et  $\rho$  dans  $\mathbb{R}^{++}$  tels que  $1 + z = \rho e^{i\alpha}$ .

$$\tan \alpha = \frac{r \sin \theta}{1 + r \cos \theta} \quad \text{et comme } \alpha \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ , \quad \alpha = \operatorname{Arctan} \frac{r \sin \theta}{1 + r \cos \theta}.$$

$$\text{Par ailleurs, } \rho = |1 + z| = \sqrt{(1 + r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{1 + 2r \cos \theta + r^2}.$$

Nous obtenons alors  $\varphi(z) = \ln |1 + z| + i\alpha$  et  $e^{\varphi(z)} = |1 + z| e^{i\alpha} = \rho e^{i\alpha} = 1 + z$ .

c) Nous utilisons ici le *théorème de convergence radiale d'Abel* (exercice II.B-1).

«Si  $\sum a_n$  est une série convergente, alors pour tout  $r$  de  $[0, 1[$ ,  $\sum a_n r^n$  converge et

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n »$$

Dans le cas présent, pour  $x$  dans  $]0, 2\pi[$ ,  $\sum \frac{\sin nx}{n}$  converge d'après la règle d'Abel

$$\text{et pour } r \in [0, 1[, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} r^n = \operatorname{Arctan} \frac{r \sin x}{1 - r \cos x}.$$

$$\text{Donc } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \operatorname{Arctan} \frac{r \sin x}{1 - r \cos x} = \operatorname{Arctan} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

$$= \operatorname{Arctan} \left( \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right) = \operatorname{Arctan} \left( \tan \frac{\pi - x}{2} \right) = \frac{\pi - x}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Comme  $\frac{\pi - x}{2}$  est dans l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , l'entier  $k$  est nul et:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}}$$

De la même manière, et pour  $x$  toujours dans  $]0, 2\pi[$ ,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} &= \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} r^n \right) = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \left( -\frac{1}{2} \ln(1 - 2r \cos x + r^2) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \ln(2(1 - \cos x)) = -\frac{1}{2} \ln\left(4 \sin^2 \frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

Finalement, pour  $x$  dans  $]0, 2\pi[$ :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right)}$$

d) Nous utilisons la transformation d'Abel en version uniforme.

Partant de  $\left| \sum_{n=0}^N e^{inx} \right| = \left| \frac{1 - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} \right| = \left| \frac{2i \sin \frac{N+1}{2} x}{2i \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ , valable pour  $\alpha$

dans  $]0, \pi[$  fixé, pour tout  $x$  dans  $A_\alpha = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\alpha + 2k\pi, 2\pi - \alpha + 2k\pi]$ , comme  $\left(\frac{1}{n}\right)$  tend

vers 0 en décroissant, **uniformément par rapport à  $x$**  (puisque'il n'en dépend pas), les séries  $\sum \frac{\cos nx}{n}$  et  $\sum \frac{\sin nx}{n}$  convergent uniformément sur  $A_\alpha$ .

Le *théorème de dérivation* des séries de fonctions permet de dériver terme à terme

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \text{ pour obtenir } u'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Finalement, pour  $x \in ]0, 2\pi[$ ,  $u'(x) = -\frac{\pi - x}{2}$  et puisque  $u(0) = \frac{\pi^2}{6}$ , et que  $u$  est continue en 0, pour tout  $x$  dans  $[0, 2\pi]$ ,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi}{2} x + \frac{\pi^2}{6}}$$

Le même raisonnement s'applique à la fonction  $v$  définie par  $v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ .

La **convergence normale de la série** rend  $v$  continue sur  $\mathbb{R}$ , et puisque  $v(0) = 0$  et que

$$\text{sur } ]0, 2\pi[, \quad v'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right), \quad v(x) = \int_0^x -\ln\left(2 \sin \frac{t}{2}\right) dt \quad \text{sur } [0, 2\pi[.$$

Mais  $\int_0^{2\pi} -\ln\left(2 \sin \frac{t}{2}\right) dt = v(2\pi) = 0$ , car l'intégrale doublement impropre est

convergente et  $v$  continue. On en déduit:

$$\begin{aligned}\int_0^{x+2\pi} -\ln\left|2 \sin \frac{t}{2}\right| dt - \int_0^x -\ln\left|2 \sin \frac{t}{2}\right| dt &= \int_x^{x+2\pi} -\ln\left|2 \sin \frac{t}{2}\right| dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\ln\left|2 \sin \frac{t}{2}\right| dt = 0.\end{aligned}$$

Finalement, les deux applications étant  $2\pi$ -périodiques et égales sur  $[0, 2\pi]$ , on en déduit *l'égalité pour tout  $x$  réel*,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{nx}{2} = \int_0^x -\ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| dt$$

### B-3 Dérivation terme à terme impossible:

a) Pour  $x \in \pi \mathbb{Z}$ ,  $f(x)$  est nulle. Pour  $x$  dans  $\mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi \mathbb{Z})$ , la *règle d'Abel* permet de conclure à la convergence, et même à la **convergence uniforme sur tout compact inclus dans  $]-\pi, \pi[$** .

L'application  $f$  est donc continue sur  $]-\pi, \pi[$ , et par conséquent sur  $\mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi \mathbb{Z})$ .

En dérivant terme à terme, on obtient une série divergente. Néanmoins, si on pose

$$g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n}, \text{ on obtient } f(x) - g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n(n^2-1)}, \text{ dont la}$$

*dérivée terme à terme est normalement convergente.*

$$\text{Ainsi, } f - g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \text{ de dérivée } (f - g)'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1}.$$

Mais, grâce à l'exercice A-1, on sait que  $g$  est la fonction  $2\pi$ -périodique telle que  $g(\pi) = 0$  et  $g(x) = \sin x - \frac{x}{2}$  pour  $x \in ]-\pi, \pi[$ .

b) **La convergence uniforme** sur  $]-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon[$  pour  $\varepsilon \in ]0, \pi[$  de la série dérivée seconde permet d'écrire:

$$(f - g)''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{-n \sin nx}{n^2 - 1} = -f(x).$$

D'où l'équation différentielle vérifiée par  $f$  sur  $]-\pi, \pi[$ :

$$f''(x) + f(x) = -\sin x$$

La solution générale de l'équation différentielle est:

$$y = \frac{x}{2} \cos x + \lambda \cos x + \mu \sin x.$$

La valeur en 0 permet d'obtenir  $\lambda = 0$ .

$$\text{Pour } x = 0, f'(0) = \mu + \frac{1}{2} = g'(0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}.$$

En écrivant  $\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$ , et en utilisant  $g'(0) = \frac{1}{2}$ , on calcule  $\mu$ .

$$\begin{aligned}
 \mu &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{(-1)^n}{n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^N}{N-1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots - \frac{(-1)^N}{N+1} \right) \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{(-1)^{N+1}}{N+1} + \frac{(-1)^N}{N} \right) = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Finalement, pour  $x$  dans  $]-\pi, \pi[$ :

$$f(x) = \frac{x}{2} \cos x + \frac{1}{4} \sin x$$

De plus,  $(f-g)' = \left( \frac{x}{2} \cos x + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \sin x \right)'$ , donc, toujours pour  $x$  dans  $]-\pi, \pi[$ :

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \sin x - \frac{1}{4} \cos x$$

La convergence étant normale sur  $\mathbb{R}$ .

c) Pour les calculs demandés au c), on part de  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{n^2 + 1}$  et

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

On sait que  $g(0) = 0$  et  $g(x) = \frac{\pi - x}{2}$  pour  $x \in ]0, 2\pi[$ .

$$\text{Toujours pour } x \in ]0, 2\pi[, (f-g)'(x) = \left( - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n^2 + 1)} \right)' = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + 1}.$$

Finalement, pour  $x \in ]0, 2\pi[$ ,

$$f''(x) - g''(x) = f(x) \text{ soit } f''(x) = f(x), \text{ d'où}$$

$$f(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$$

$$f(\pi) = 0 = \lambda e^{\pi} + \mu e^{-\pi}$$

$$f'(\pi) = \lambda e^{\pi} - \mu e^{-\pi} = -\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}.$$

D'après l'exercice A-4,  $\frac{1}{\text{sh } z} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2 + z^2}$ , donc pour  $z = \pi$ ,

$$\frac{1}{\text{sh } \pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}, \text{ et } \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = -\frac{\pi}{2 \text{sh } \pi}$$

$$\begin{cases} \lambda e^{\pi} + \mu e^{-\pi} = 0 \\ \lambda e^{\pi} - \mu e^{-\pi} = \frac{-\pi}{2 \text{sh } \pi} \end{cases} \text{ donne } \begin{aligned} \lambda &= -\frac{\pi e^{-\pi}}{4 \text{sh } \pi} \\ \mu &= \frac{\pi e^{\pi}}{4 \text{sh } \pi} \end{aligned}$$

On trouve finalement,  $f(x) = \frac{\pi}{4 \operatorname{sh} \pi} (-e^{x-\pi} + e^{-x+\pi})$ , soit

$$f(x) = \frac{\pi}{2 \operatorname{Sh} \pi} \operatorname{sh}(\pi - x)$$

On en déduit, pour  $x \in ]0, 2\pi[$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2 \operatorname{sh} \pi} \operatorname{ch}(\pi - x)$$

La formule de Parseval permet alors de calculer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 1)^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2 \operatorname{sh} \pi} \operatorname{ch}(\pi - x) \right)^2 dx.$$

$$\text{Or } \int_0^{2\pi} \operatorname{ch}^2(x - \pi) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch}^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x \right) dx = \pi + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\pi.$$

L'intégrale complète vaut alors :

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2 \operatorname{sh} \pi} \cdot 2 \operatorname{sh} \pi + \frac{\pi^2}{4 \operatorname{sh}^2 \pi} (\pi + \operatorname{sh} \pi \operatorname{ch} \pi) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^3}{4 \operatorname{sh}^2 \pi} + \frac{\pi^2}{4} \coth \pi, \text{ et:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{4} \coth \pi + \frac{\pi^2}{4 \operatorname{sh}^2 \pi} - \frac{1}{2}$$

**Remarque:** on pourrait aussi trouver cette formule à partir des développements Eulériens (exercice A-4).

## B-4 Développement en série trigonométrique:

On écrit  $f(x) = \frac{2e^{-\alpha}}{2 \operatorname{ch} \alpha + e^{ix} + e^{-ix}} = \frac{2e^{ix}}{e^{2ix} + (e^{\alpha} + e^{-\alpha}) e^{ix} + 1}$  et on décompose en éléments simples.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \left( -\frac{1}{e^{\alpha} e^{ix} + 1} + \frac{1}{e^{-\alpha} e^{ix} + 1} \right) \\ &= \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \left( \frac{1}{1 + e^{-\alpha} e^{ix}} - \frac{e^{-\alpha - ix}}{1 + e^{-\alpha} e^{-ix}} \right). \end{aligned}$$

Comme  $|e^{-\alpha} e^{ix}| = |e^{-\alpha} e^{-ix}| = e^{-\alpha} \leq 1$ , on peut développer en série entière et on obtient:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (e^{-n\alpha} e^{inx} - e^{-(n+1)\alpha} e^{-i(n+1)x}) \right) \\
 &= \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\alpha} \cos nx \right)
 \end{aligned}$$

La série trigonométrique ainsi trouvée étant normalement convergente, c'est la série de Fourier de  $f$ . On a donc pour  $n \geq 1$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{\operatorname{ch} \alpha + \cos x} dx = (-1)^n \frac{2\pi e^{-n\alpha}}{\operatorname{sh} \alpha}$$

### B-5 Limite de la suite des coefficients de Fourier:

a) On peut prendre  $I_1 = \left[ \frac{\pi}{4k_1}, \frac{3\pi}{4k_1} \right]$  de sorte que  $\sin(k_1 x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$  pour  $x$  dans  $I_1$ .

Supposons construits  $I_1, I_2, \dots, I_n$  vérifiant les conditions i) et ii) et tel que *la longueur de  $I_m$  pour  $1 \leq m \leq n$  est égale à  $\frac{2\pi}{4k_m}$* , comme c'est le cas pour  $I_1$ .

Alors l'intervalle  $k_{n+1} I_n$  est de longueur  $\frac{k_{n+1}}{4k_n} 2\pi$ , donc *supérieure à  $2\pi$* . Il contient donc un intervalle de la forme  $\left[ \frac{\pi}{4} + p\pi, \frac{3\pi}{4} + p\pi \right]$ .

Si nous posons alors  $I_{n+1} = \left[ \frac{1}{k_{n+1}} \left( \frac{\pi}{4} + p\pi \right), \frac{1}{k_{n+1}} \left( \frac{3\pi}{4} + p\pi \right) \right]$ , nous avons à la fois  $I_{n+1} \subset I_n$  et pour tout  $x$  de  $I_{n+1}$ ,  $|\sin(k_{n+1} x)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

La suite  $I_n$  étant une suite de segments emboîtés dont le diamètre tend vers 0, l'intersection est un singleton  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = \{t\}$ .

Mais alors pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on a  $|\sin(k_n t)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , de sorte que *la suite  $(\sin(k_n t))$  ne tend pas vers 0*.

b) En faisant d'abord  $x = 0$ , on obtient  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n \sin nx) = 0$ .

Raisonnons ensuite par l'absurde.

*Si la suite  $b_n$  ne tend pas vers 0*, il existe une suite extraite  $b_{\varphi(n)}$  et un réel  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $n$ ,  $|b_{\varphi(n)}| \geq \alpha$ .

De la suite  $(\varphi(n))$  tendant en croissant strictement vers  $+\infty$ , on peut extraire une suite  $(k_n)$  telle que pour tout  $n > 0$ ,  $k_{n+1} \geq 4k_n$ .

D'après a), il existe alors un réel  $t$  tel que  $|\sin(k_n t)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , soit finalement  $|b_{k_n} \sin(k_n t)| \geq \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}$ , et la suite  $(b_n \sin nt)$  ne tend pas vers 0.

c) En posant classiquement  $c_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$  et  $c_{-n} = \frac{a_n - ib_n}{2}$ , on obtient:

$$c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Donc, si  $c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,  $a_n \cos nx + b_n \sin nx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , et d'après b),  $(a_n)$  et  $(b_n)$  ont pour limite 0. *Il en est de même de  $(c_n)$  et de  $(c_{-n})$ .*

## B-6 Pseudo-dérivée seconde:

a-1) Pour  $h > 0$  assez petit, si  $f(x_0)$  est minimum local, on a  $f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$  et  $f(x_0 - h) - f(x_0) \geq 0$ , donc  $\frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} \geq 0$  et aussi  $f^{[2]}(x_0)$ .

a-2) La fonction  $g_1$  a pour pseudo-dérivée seconde  $g_1^{[2]}(x) = f^{[2]}(x_0) - 2\varepsilon = -2\varepsilon < 0$ .

D'après a)1-,  $g_1$  n'a pas de minimum local sur  $]a, b[$ . La fonction  $g_1$  étant continue, son minimum sur  $[a, b]$  est donc obtenu en  $a$  (et en  $b$  où elle prend la même valeur).

$$\forall x \in [a, b], g_1(x) \geq g_1(a) = 0.$$

On obtient de la même manière  $g_2(x) \leq 0$ , et on en déduit:

$$\forall x \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \varepsilon(x - a)(x - b) \leq f(x) - \alpha x - \beta \leq -\varepsilon(x - a)(x - b)$$

où l'on a posé  $\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  et  $\beta = f(a) - a \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

a-3) Finalement, pour tout  $x$  de  $[a, b]$ ,  $f(x) = \alpha x + \beta$ .

**La fonction  $f$  qui est affine sur tout segment est affine sur  $\mathbb{R}$**  (car elle est de classe  $C^2$  avec une dérivée seconde nulle).

Si  $f$  est à valeurs complexes, on applique ce qui précède à sa partie réelle et à sa partie imaginaire.

b) Supposons d'abord la fonction  $f$  à valeurs réelles et désignons par  $P$  son polynôme d'interpolation aux points  $x_0 - h, x_0, x_0 + h$ . Un calcul simple montre que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, P''(x) = P^{[2]}(x) = \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

Montrons que  $f - P$  admet un maximum dans  $]x_0 - h, x_0 + h[$ .

Cette fonction s'annule au moins trois fois dans  $[x_0 - h, x_0 + h]$  aux points  $x_0 - h, x_0$  et  $x_0 + h$ . Comme elle est continue, elle a un maximum sur le compact  $[x_0 - h, x_0 + h]$ .

**Si ce maximum est strictement positif**, il est atteint en un point de  $]x_0 - h, x_0 + h[$ .

**S'il est nul**, il est atteint en  $x_0$  qui est encore un point de  $]x_0 - h, x_0 + h[$ .

Le même argument appliqué à  $P - f$  montre que  $f - P$  a un *minimum* dans  $]x_0 - h, x_0 + h[$ .

Il existe  $x_1$  tel que  $(P^{[2]} - f^{[2]})(x_1) \geq 0$

et  $x_2$  tel que  $(P^{[2]} - f^{[2]})(x_2) \leq 0$ , et comme  $P^{[2]}$  est constante,

$$-M \leq P^{[2]}(x_1) = P^{[2]}(x_2) \leq M \quad \text{soit:}$$

$$|f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)| \leq M h^2$$

Si nous prenons maintenant  $f$  à valeurs complexes, *nous pouvons appliquer ce qui précède à sa partie réelle  $f_1$  et à sa partie imaginaire  $f_2$*  puis utiliser l'égalité:

$$|f(x)| = \sqrt{|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2}$$

pour conclure, à l'inégalité:

$$|f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)| \leq M \sqrt{2} h^2$$

### B-7 Unicité du développement en série trigonométrique:

a) Comme la suite  $(S_n(x))$  converge,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) = 0$  et d'après l'exercice B-5,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_{-n}) = 0$ .

$$\text{On a donc } \left| \frac{c_k}{k^2} e^{ikx} + \frac{c_{-k}}{k^2} e^{-ikx} \right| \leq \frac{M}{k^2}, \text{ en posant } M = 2 \sup_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|.$$

Il y a donc *convergence normale*, donc uniforme et  $F$  est continue.

En raison de la convergence normale, on peut sans problème *intégrer terme à terme* la fonction  $x \mapsto F(x) e^{-inx}$ , d'où les coefficients de Fourier  $c_n(F) = \frac{-c_n}{n^2}$ .

$$\text{b) On a } e^{in(x_0+h)} + e^{in(x_0-h)} - 2e^{inx_0} = 2e^{inx_0} (\cos nh - 1) = -4e^{inx_0} \left( \sin \frac{nh}{2} \right)^2, \text{ donc}$$

en utilisant la fonction  $\varphi : x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x^2}$  et le résultat de l'exercice I B-6, on obtient:

$$\Delta(h) = \frac{1}{h^2} (F(x_0 + h) + F(x_0 - h) - 2F(x_0)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n e^{inx_0} \varphi\left(\frac{nh}{2}\right).$$

$$\text{On en déduit } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \Delta(h) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n e^{inx_0} = f(x_0) - c_0.$$

**Conclusion:**  $F$  a une pseudo-dérivée seconde en tout  $x_0$  et

$$F^{[2]}(x_0) = f(x_0) - c_0$$

c) Si  $f = 0$ ,  $F(x) + c_0 \frac{x^2}{2}$  a une pseudo-dérivée seconde nulle donc est affine d'après l'exercice B-6 (question a)) et  $F(x) = -c_0 \frac{x^2}{2} + \alpha x + \beta$ .

Mais comme  $F$  est continue et périodique, elle est bornée et  $c_0 = \alpha = 0$ .  
L'application  $F$  étant constante, sa série de Fourier est constante donc  $c_n(F) = 0$  pour  $n \neq 0$ , soit pour tout  $n \neq 0$ ,  $c_n = 0$ , et c'est vrai pour tout  $n$  puisqu'on a déjà vu que  $c_0$  est nul.

Si maintenant  $f$  est la somme de deux séries trigonométriques convergentes, leur différence est nulle et, d'après ce qui précède, leurs coefficients sont les mêmes.

### B-8 Série trigonométrique et développement de Fourier:

a) On a  $F^{[2]}(x) = f(x) - c_0$ . Or,  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ , donc:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Si  $x_0$  est un réel et  $x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ , on a:

$$|F^{[2]}(x) - f(x_0) + c_0| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

D'après l'exercice B-6 question b) appliqué à la fonction  $x \mapsto F(x) - (f(x_0) - c_0) \frac{x^2}{2}$ , sur  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  on obtient:

$$\left| \frac{F(x_0 + h) + F(x_0 - h) - 2F(x_0)}{h^2} - (f(x_0) + c_0) \right| \leq \sqrt{2}\varepsilon, \text{ pour } 0 < h < \alpha.$$

Cette relation est vraie pour tout  $x_0$  réel. Pour  $k \in ]0, \alpha[$  fixé, on en déduit:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{F(x + h) + F(x - h) - 2F(x)}{h^2} - f(x) + c_0 \right| dx \leq 2\pi \sqrt{2}\varepsilon$$

ce qui donne le résultat demandé.

b) Rappelons que  $A(x, h) = \frac{F(x + h) + F(x - h) - 2F(x)}{h^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c_n e^{inx} \varphi\left(\frac{nh}{2}\right)$  où

$\varphi$  est la fonction définie à l'exercice I B-6 par  $\varphi(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$ , pour  $x \neq 0$  et  $\varphi(0) = 1$ .

La série étant normalement convergente, on peut intégrer  $A(x, h) e^{-inx}$  terme à terme,

$$\text{donc } c_n = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(x, h) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \text{ pour } n \neq 0,$$

$$\text{et pour } n = 0 \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - c_0) dx = 0 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

## C - Problèmes de convergence

### C-1 Décroissance des coefficients de Fourier:

Considérons  $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt$  et *intégrons par parties*.

La partie intégrée est nulle à chaque fois puisqu'on prend entre 0 et  $2\pi$  une fonction  $2\pi$ -périodique. On a donc:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi n^p} \int_0^{2\pi} f^{(p)}(t) \cos\left(nt - p \frac{\pi}{2}\right) dt,$$

et d'après le *lemme de Riemann-Lebesgue*,  $\pi n^p a_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Il en est de même pour les coefficients  $b_n(f)$ .

On sait que dans ce cas, pour  $p \geq 1$ ,  $S_n(f)$  converge uniformément vers  $f$ .

$$\begin{aligned} \text{On a alors pour tout } x, |f(x) - S_n(f)(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f)| + |b_k(f)|. \end{aligned}$$

Supposons  $p > 1$ . Pour tout  $\varepsilon$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour  $k \geq N$ ,  $|a_k(f)| + |b_k(f)| \leq \frac{\varepsilon}{k^p}$ ,

de sorte que pour  $n \geq N$ ,  $|f(x) - S_n(f)(x)| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \leq \varepsilon \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^p} = \frac{\varepsilon}{(p-1)n^{p-1}}$ .

On a bien,  $\|f(x) - S_n(f)(x)\|_{\infty} = o\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)$  pour  $p > 1$ .

Pour  $p = 1$ , le résultat est encore vrai et résulte du théorème de convergence normale.

### C-2 Coefficients de Fourier d'un produit:

a-1)  $|c_n(\overline{f}) \cdot c_n(g)| \leq \frac{1}{2} (|c_n(f)|^2 + |c_n(g)|^2)$  montre la *convergence absolue* de la

série. De plus,  $(S_n(f) | S_n(g)) = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k(f)} \cdot c_k(g)$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(f) | S_n(g)) = (f | g)$

puisque

$$\begin{aligned} |(S_n(f) | S_n(g)) - (f | g)| &= |(S_n(f) - f | S_n(g)) + (f | S_n(g) - g)| \\ &\leq |(S_n(f) - f | S_n(g))| + |(f | S_n(g) - g)| \\ &\leq \|S_n(f) - f\| \cdot \|S_n(g)\| + \|f\| \cdot \|S_n(g) - g\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz).

a-2) On peut écrire:

$$c_n(fg) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) e^{-int} dt = (\overline{f} e_n | g).$$

Pour appliquer a-1), cherchons les coefficients de Fourier de la fonction  $\bar{f}e_n$ :

$c_m(\bar{f}e_n) = (e_m | \bar{f}e_n) = (e_{m-n} | \bar{f})$ : c'est le conjugué de  $(e_{n-m} | f)$  donc de  $c_{n-m}(\bar{f})$ , et:

$$c_n(fg) = (\bar{f}e_n | g) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m(\bar{f}e_n) c_m(g) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{n-m}(f) c_m(g)$$

ou, ce qui revient au même en posant  $m = n - k$ ,

$$c_n(fg) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_k(f) c_{n-k}(g)$$

b) La série de Fourier de  $g$  est  $\sum \frac{\sin kt}{k}$  (voir exercice A-1).

Cela nous donne l'occasion d'écrire *l'égalité de Parseval sous forme trigonométrique*:

si la série de Fourier de  $f$  est  $\frac{a_0}{2} + \sum (a_k \cos k + b_k \sin kt)$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2}.$$

En particulier  $\sum |b_k|^2$  converge. Or on peut écrire:

$$\left| \frac{1}{k} b_k(f) \right| \leq \frac{1}{2} \left( |b_k(f)|^2 + \frac{1}{k^2} \right), \text{ ce qui montre la convergence absolue de } \sum \frac{1}{k} b_k(f).$$

L'expression du a-1), devient avec les coefficients trigonométriques:

$$(g | f) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} b_k(f)$$

### C-3 Convergence des sommes de Fejer:

a) On rappelle que  $S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cdot \frac{\sin(N+1/2)t}{\sin(t/2)} dt$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sin(k+1/2)t &\stackrel{(*)}{=} \operatorname{Im} \left( \left( \sum_{k=0}^n e^{ikt} \right) e^{it/2} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left( \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} e^{it/2} \right) = \operatorname{Im} \left( \frac{e^{i(n+1)t/2} \sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right) \\ &= \frac{(\sin(n+1)t/2)^2}{\sin t/2}. \end{aligned}$$

On a donc:

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \left( \frac{\sin(n+1)t/2}{\sin(t/2)} \right)^2 dt$$

b) Le noyau de Fejer  $F_n$  étant positif, on se trouve dans un cadre déjà rencontré (voir exercice I D-3).

On peut remarquer d'abord en appliquant le calcul précédent à  $f = 1$  que  $S_N(f) = 1$  puis  $\sigma_n(f) = 1$  pour tout  $n$  et  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1$ .

On a alors pour tout  $x$  et pour tout  $n$ ,

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) \left( \frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt.$$

Soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Puisque  $f$  est continue et  $2\pi$ -périodique, elle est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ . Il existe donc  $\alpha > 0$  tel que  $|x - y| \leq \alpha$  implique  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

On peut donc découper l'intégrale en deux.

$$\left| \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} (f(x-t) - f(x)) \left( \frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt \right| \leq \frac{\varepsilon/2}{2(n+1)\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left( \frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| \frac{1}{2(n+1)\pi} \left( \int_{-\pi}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi} \right) (f(x-t) - f(x)) \left( \frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt \right|$$

$$\leq \frac{2(\pi - \alpha)}{2(n+1)\pi} 2\|f\|_{\infty} \frac{1}{(\sin \alpha/2)^2} \leq \frac{2\|f\|_{\infty}}{(n+1)(\sin(\alpha/2))^2}.$$

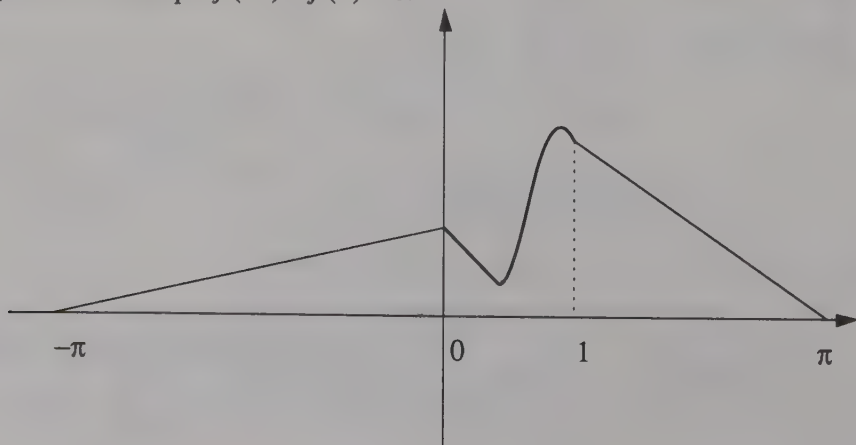
Donc il existe  $N$  tel que  $n \geq N$  implique:

$$\left| \frac{1}{2(n+1)\pi} \left( \int_{-\pi}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi} \right) (f(x-t) - f(x)) \left( \frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ soit}$$

**pour tout  $x$  réel,  $|\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ .**

c) Soit  $f$  une application continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

On peut prolonger  $f$  par une application affine à gauche et à droite jusqu'à l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  de telle sorte que  $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ .



Mais  $f$  peut être prolongée à  $\mathbb{R}$  par  $2\pi$ -périodicité et relève alors du résultat précédent: *la suite des polynômes trigonométriques  $\sigma_n(f)$  converge uniformément vers  $f$ .*

En d'autres termes, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe des réels  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  et  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$

tels que 
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \cos kx - \sum_{k=1}^n b_k \sin kx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'application  $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \cos kx - \sum_{k=1}^n b_k \sin kx$  étant *développable en série entière*

avec un rayon de convergence infini, il existe un polynôme  $P$  tel que:

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| \sum_{k=0}^n a_k \cos kx + \sum_{k=1}^n b_k \sin kx - P(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ de telle sorte que:}$$

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon.$$

d) En repartant du a) et en majorant  $|f(x-t) - f(x)|$  par  $C|t|^\alpha$ , il vient:

$$|\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{C}{2(n+1)\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t|^\alpha \left( \frac{\sin(n+1)t/2}{\sin(t/2)} \right)^2 dt.$$

En utilisant la minoration  $\sin^2 t/2 \geq \frac{t^2}{\pi^2}$  valable pour  $t$  dans  $[-\pi, \pi]$ , on obtient:

$$|\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{C\pi}{2(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} |t|^{\alpha-2} \sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right) dt.$$

On pose ensuite  $\frac{n+1}{2}t = u$ , pour obtenir

$$\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{C\pi}{2(n+1)^\alpha} \int_{-(n+1)\pi/2}^{(n+1)\pi/2} \frac{\sin^2 u}{(2u)^{2-\alpha}} 2du.$$

On en déduit bien  $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{A}{n^\alpha}$ , à condition de poser

$$A = C\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{(2u)^{2-\alpha}} du$$

L'intégrale converge en  $+\infty$  et en  $-\infty$  car  $\frac{\sin^2 u}{(2u)^{2-\alpha}} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} (2u)^\alpha$  et  $\frac{\sin^2 u}{(2u)^{2-\alpha}} \leq \frac{1}{(2u)^{2-\alpha}}.$

#### C-4 Phénomène de Gibbs pour la dent de scie:

a) Le calcul classique du *noyau de Dirichlet* donne:

$$\frac{1}{2} + P_n'(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \dots + \cos(n-1)t = \frac{\sin \frac{2n-1}{2}t}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

Alors, en prolongeant par continuité en 0, pour  $x$  dans  $[0, \pi]$ ,

$$\begin{aligned} \left| -\frac{x}{2} + \int_0^x \left( \frac{1}{2} + P'_n(t) \right) dt \right| &= \left| -\frac{x}{2} + \int_0^x \frac{\sin \frac{2n-1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right| \\ &\leq \frac{\pi}{2} + \left| \int_0^x \left( \frac{1}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{t} \right) \sin \frac{2n-1}{2} t dt \right| + \left| \int_0^x \frac{\sin \frac{2n-1}{2} t}{t} dt \right|. \end{aligned}$$

La fonction  $\varphi : t \mapsto \frac{1}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{t}$ , prolongée par  $\varphi(0) = 0$ , est continue sur  $[0, \pi]$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{t} &= \frac{1}{2 \left( \frac{t}{2} - \frac{1}{6} \frac{t^3}{8} + o(t^3) \right)} - \frac{1}{t} \\ &= \frac{1}{t} \left( \left( 1 - \frac{t^2}{24} + o(t^2) \right)^{-1} - 1 \right) = \frac{t}{24} + o(t). \end{aligned}$$

On a donc  $\left| \int_0^x \left( \frac{1}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{t} \right) \sin \frac{2n-1}{2} t dt \right| \leq \int_0^\pi |\varphi(t)| dt.$

D'autre part,  $\int_0^x \frac{\sin \frac{2n-1}{2} t}{t} dt = \int_0^{(n-1/2)x} \frac{\sin u}{u} du.$

Comme l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$  est convergente, il existe un réel  $H$  tel que pour tout

$$y \geq 0, \quad \left| \int_0^y \frac{\sin u}{u} du \right| \leq H.$$

Alors pour tout  $x$  dans  $[0, \pi]$ ,  $|P_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} + \int_0^\pi |\varphi(t)| dt + H.$

b-1) En reprenant la formule du a), on obtient les deux expressions données.

b-2) Posons  $m = E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ . Les zéros de  $P_n'$  qui ne s'annule pas en 0, **sont ceux de**  
 **$\cos n \frac{x}{2}$  ou de  $\sin(n-1) \frac{x}{2}$**  sur l'intervalle  $]0, \pi]$ .

$$\cos n \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow n \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} + k\pi = (2k-1) \frac{\pi}{2} \text{ pour } (2k-1) \frac{\pi}{2} \leq n \frac{\pi}{2} \text{ soit:}$$

$$x_k = (2k-1) \frac{\pi}{n} \text{ pour } k = 1, 2, \dots, m.$$

$$\sin(n-1) \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow (n-1) \frac{x}{2} = k\pi \text{ pour } k\pi \leq (n-1) \frac{\pi}{2} \text{ soit:}$$

$$y_k = 2k \frac{\pi}{n-1} \text{ pour } k = 1, 2, \dots, m-1.$$

Après vérification de  $x_k < y_k < x_{k+1}$  qui provient de la double inégalité

$$(2k-1)(n-1) < 2kn < (2k+1)(n-1)$$

soit  $-n-2k+1 < 0 < n-2k-1$  pour  $k = 1, 2, \dots, m-2$ , et de

$$x_{m-1} < y_{m-1} \leq x_m,$$

on obtient la famille ordonnée des zéros de  $P_n'$ :

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < y_{m-1} \leq x_m \leq \pi.$$

Les deux dernières inégalités sont soit toutes deux strictes, soit toutes deux une égalité, plus précisément:

$$\text{pour } n \text{ pair } (n = 2m), \quad y_{m-1} = \frac{(2m-2)\pi}{2m-1} < x_m = \frac{(2m-1)\pi}{2m} < \pi,$$

$$\text{pour } n \text{ impair } (n = 2m-1), \quad y_{m-1} = \frac{(2m-2)\pi}{2m-2} = x_m = \frac{(2m-1)\pi}{2m-1} = \pi.$$

Comme  $P_n'(0) = n-1$  et que toutes les racines de  $P_n'$  sont simples,  $P_n'$  est positif sur  $[0, x_1[$  puis sur les  $]y_{k-1}, x_k[$  et négatif sur les  $]x_k, y_k[$ .

**Les points  $x_k$  correspondent donc à des maximums locaux et les  $y_k$  à des minimums.**

Pour montrer que  $P_n$  est positif sur  $[0, \pi]$  il suffit donc de montrer que pour tout  $k$  dans  $[1, m-1]$ ,  $P_n(y_k)$  est positif.

Cela provient immédiatement du fait que  $P_2(x) = \sin x$  et que pour  $n \geq 3$ ,  $P_n(y_k) = P_{n-1}(y_k)$  (de même d'ailleurs que  $P_n(x_k) = P_{n+1}(x_k)$ ).

En effet,  $P_n(x) - P_{n-1}(x) = \frac{1}{n-1} \sin(n-1)x$ , donc  $P_n(y_k) = P_{n-1}(y_k)$  et si on suppose  $P_{n-1} \geq 0$ , les  $P_n(y_k)$  sont  $\geq 0$ .

b-3) De la deuxième égalité écrite en b-1), on déduit immédiatement

$$P_n'(x) \leq \frac{1}{2} \sin nx \cotan \frac{x}{2}, \text{ d'où}$$

$$P_n(x_{k+1}) - P_n(x_k) < \frac{1}{2} \int_{(2k-1)\pi/n}^{(2k+1)\pi/n} \sin nx \cotan \frac{x}{2} dx = A.$$

$$\begin{aligned} \text{Or } A &= \frac{1}{2} \int_{(2k-1)\pi/n}^{2k\pi/n} \sin nx \cotan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int_{2k\pi/n}^{(2k+1)\pi/n} \sin nx \cotan \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{(2k-1)\pi/n}^{2k\pi/n} \sin nx \left[ \cotan \frac{x}{2} - \cotan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2n} \right) \right] dx, \end{aligned}$$

en changeant de variable dans la deuxième intégrale ( $x \mapsto \frac{\pi}{n} + x$ ).

Sur l'intervalle  $](2k-1)\frac{\pi}{n}, 2k\frac{\pi}{n}[$ ,  $\sin nx$  est strictement négatif et

$$\cotan \frac{x}{2} > \cotan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2n} \right)$$

puisque les deux points sont dans  $]0, \pi[$  où la fonction cotangente est décroissante.

On a bien alors  $P_n(x_{k+1}) < P_n(x_k)$  pour  $k = 1, 2, \dots, m-1$ .

b-4) Ainsi,  $P_n(x_1) = P_n\left(\frac{\pi}{n}\right)$  est le maximum de  $P_n$  sur  $[0, \pi]$ . C'est donc:

$$P_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \left(\frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\frac{k\pi}{n}},$$

et on reconnaît une somme de Riemann de la fonction  $\varphi$  continue définie sur  $[0, \pi]$  par  $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$  pour  $x \neq 0$  et  $\varphi(0) = 1$ . On a donc:

$$\lim P_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = G.$$

On vérifie que  $G > \frac{\pi}{2}$ , en considérant la série:

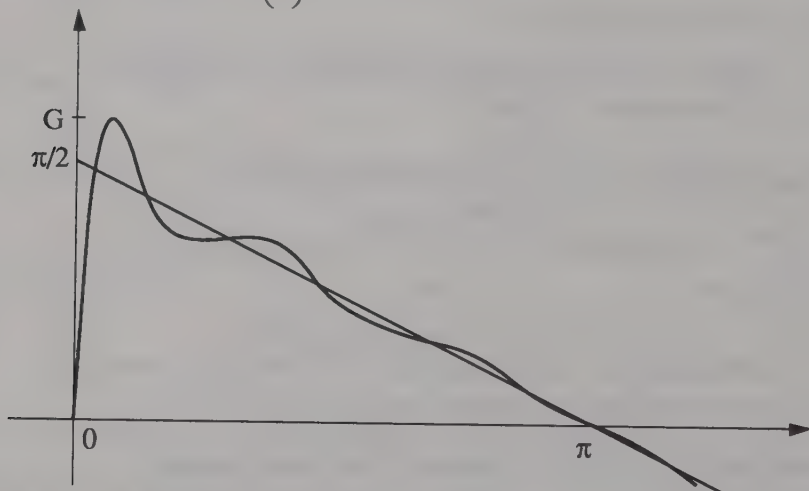
$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x + n\pi} dx$$

La suite  $(|u_n|)$  tend vers 0 en décroissant donc la série satisfait à la *règle spéciale des séries alternées* et sa somme,  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ , est encadrée strictement par deux sommes partielles consécutives, en particulier  $G = u_0 > \frac{\pi}{2}$ .

On trouve en fait  $G \approx 1,789 \frac{\pi}{2}$ .

La suite  $P_n\left(\frac{\pi}{n}\right)$  tend en croissant vers  $G$  car  $P_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = P_{n+1}\left(\frac{\pi}{n}\right) < P_{n+1}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ .

Alors pour tout  $x$  de  $[0, \pi]$ ,  $0 \leq P_n(x) \leq P_n\left(\frac{\pi}{n}\right) < G$ , et par périodicité et imparité, pour tout  $x$  réel,  $|P_n(x)| \leq P_n\left(\frac{\pi}{n}\right) < G$ .



La suite  $P_n$  tend simplement vers  $g$ . Il y a même *convergence uniforme sur tout intervalle du type  $[a, 2\pi-a]$* , pour  $a \in ]0, \pi[$ . Néanmoins, il se produit toujours au voisinage de 0, *une oscillation résiduelle* de plus en plus rapide, sur un intervalle de plus en plus petit, le maximum de cette oscillation ne tendant pas vers  $\frac{\pi}{2}$  (qui est le "saut" de  $g$ ) mais vers  $G > \frac{\pi}{2}$ . C'est le *phénomène de Gibbs*.

### C-5 Phénomène de Gibbs dans le cas général:

a) Dans l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ , la fonction  $f$  possède des discontinuités aux points  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$  avec, *puisque'elle est régulière*, pour tout  $i$ ,

$$f(\alpha_i) = \frac{1}{2} (f(\alpha_i + 0) + f(\alpha_i - 0)).$$

Posons pour  $i \in [1, m]$ ,  $\lambda_i = f(\alpha_i + 0) - f(\alpha_i - 0)$  et, en désignant par  $g$  la fonction étudiée à l'exercice C-3, définissons  $F$  pour tout  $x$  par  $F(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\pi} g(x - \alpha_i)$ , puis  $h = f - F$ .

L'application  $F$  est bien affine par morceaux,  $h$  continue et  $C^1$  par morceaux. La série de Fourier de  $h$  converge donc normalement vers  $h$ . Si nous désignons respectivement par  $f_n, F_n, h_n$  et  $g_n$  les sommes de Fourier des fonctions  $f, F, h$  et  $g$ , nous savons que:

- i)  $f_n, F_n$  et  $g_n$  convergent simplement vers  $f, F$  et  $g$  respectivement,
- ii)  $h_n$  converge uniformément vers  $h$ ,
- iii)  $g_n$  converge uniformément vers  $g$  sur tout intervalle  $[\alpha, 2\pi - \alpha]$  avec  $0 < \alpha < \pi$ .

b) Pour fixer les idées, prenons  $x_0 = \alpha_1$ , mais le même raisonnement s'appliquerait en un autre point de discontinuité.

On peut écrire,  $f(x) = h(x) + \frac{\lambda_1}{\pi} g(x - x_0) + \sum_{i=2}^m g(x - \alpha_i)$ . Choisissons déjà  $\beta > 0$ , tel que pour  $i = 2, \dots, m$ ,  $|\alpha_i - x_0| > 2\beta$ .

Si nous posons  $H(x) = \sum_{i=2}^m g(x - \alpha_i)$  et  $H_m(x)$  la somme de Fourier associée, on sait qu'alors,  $H_m$  converge uniformément vers  $H$  sur l'intervalle  $[x_0 - \beta, x_0 + \beta]$ .

Donnons nous alors un  $\varepsilon > 0$  qui sera fixé plus tard.

L'application  $h + H$  étant continue sur  $[x_0 - \beta, x_0 + \beta]$ ,  $y$  est uniformément continue, donc il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tous  $x$  et  $y$  dans  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ ,

$$|(h + H)(x) - (h + H)(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mais comme  $h_n + H_n$  converge uniformément vers  $h + H$  sur l'intervalle  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ , il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tous  $n \geq N_0$  et  $x$  dans  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ ,

$$|(h_n + H_n)(x) - (h + H)(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On en déduit que:

$$\forall (x, y) \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]^2, \forall n \geq N_0, |(h_n + H_n)(x) - (h + H)(y)| < \varepsilon.$$

Mais d'après l'exercice C-4,

$$\text{Max} \{ |g_n(x) - g_n(y)|; (x, y) \in [-\pi, \pi] \} = 2g_n\left(\frac{\pi}{n}\right) \rightarrow 2G, \text{ avec } 2G > \pi. \text{ On a donc ici,}$$

$$\text{si } \text{Max} \left\{ \left| \frac{\lambda_1}{\pi} g_n(x - x_0) - \frac{\lambda_1}{\pi} g_n(y - x_0) \right|; (x, y) \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]^2 \right\} = K_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \frac{2\lambda_1 G}{\pi} > \lambda_1.$$

Choisissons alors  $\varepsilon = \frac{1}{3} \left( \frac{2\lambda_1 G}{\pi} - \lambda_1 \right)$ , puis  $N \geq N_0$  tel que pour  $n \geq N$ , on ait

$$K_n > \lambda_1 + 2\varepsilon.$$

Comme la variation de  $h + H$  sur  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  est  $\leq \varepsilon$ , on en déduit, pour  $n \geq N$ :

$$\text{Max } \{|f_n(x) - f_n(y)|; (x, y) \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]^2\} > \lambda_1 + \varepsilon > \lambda_1,$$

et la valeur  $K = \lambda_1 + \varepsilon$  convient.

### C-6 Série de Fourier des fonctions Lipschitziennes:

a) La fonction  $g_h$  est  $2\pi$ -périodique et continue et si  $n$  est un entier,

$$\begin{aligned} c_n(g_h) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x+h) e^{-inx} - f(x-h) e^{-inx}) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x) e^{-in(x-h)} - f(x) e^{-in(x+h)}) dx = 2i (\sin nh) c_n(f). \end{aligned}$$

En désignant, pour simplifier, par  $c_n$  le coefficient de Fourier  $c_n(f)$  et en appliquant

l'égalité de Parseval à  $g_h$ , on obtient 
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_h(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4 |\sin(nh)|^2 |c_n|^2.$$

Comme  $|g_h(x)| \leq 2Kh$ , on peut majorer l'intégrale et

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\sin(nh)|^2 |c_n|^2 \leq \frac{4K^2 h^2}{4} = K^2 h^2.$$

b) Pour  $h = \frac{\pi}{2^{p+1}}$ , l'inégalité devient 
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \sin\left(\frac{n\pi}{2^{p+1}}\right) \right|^2 |c_n|^2 \leq \frac{K^2 \pi^2}{4^{p+1}},$$

et on en déduit la majoration du paquet 
$$\sum_{2^{p-1} \leq |n| < 2^p} \left| \sin\left(\frac{n\pi}{2^{p+1}}\right) \right|^2 |c_n|^2 \leq \frac{K^2 \pi^2}{4^{p+1}}.$$

Mais pour  $2^{p-1} \leq |n| \leq 2^p$ , on a  $\frac{\pi}{4} \leq \frac{|n|\pi}{2^{p+1}} \leq \frac{\pi}{2}$  donc  $\left| \sin\left(\frac{n\pi}{2^{p+1}}\right) \right|^2 \geq \frac{1}{2}$ , et

$$\boxed{\sum_{2^{p-1} \leq |n| < 2^p} |c_n|^2 \leq \frac{K^2 \pi^2}{2^{2p+1}}}$$

c) Considérons la série à termes positifs  $|c_0| + \sum |c_n| + |c_{-n}|$ .

On peut la **sommer par paquets** en posant  $v_p = \sum_{2^{p-1} \leq |n| < 2^p} |c_n|$ , et par l'inégalité de

Cauchy-Schwarz, on obtient:

$$v_p \leq \left( \sum_{2^{p-1} \leq |n| < 2^p} 1 \right)^{1/2} \left( \sum_{2^{p-1} \leq |n| < 2^p} |c_n|^2 \right)^{1/2} \leq (2^{p-1})^{1/2} \frac{K\pi}{2^{p+1/2}} = \frac{K\pi}{(\sqrt{2})^{p+2}}.$$

La série  $\sum v_p$  est donc convergente et il en est de même alors de  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|$  ce qui prouve la **convergence normale de la série de Fourier de  $f$**  puisque  $|c_n e^{inx}| \leq |c_n|$  pour tout  $x$  réel.

### C-7 Approximation des fonctions Höldériennes:

a) On part de l'inégalité triangulaire:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |f(x+h) - p_n(x+h)| + |p_n(x+h) - p_n(x)| + |p_n(x) - f(x)|.$$

On majore  $|f(x+h) - p_n(x+h)|$  et  $|p_n(x) - f(x)|$  par  $\frac{A}{n^\alpha}$ .

Quant à  $|p_n(x+h) - p_n(x)|$ , il est majoré par  $\|p_n\|_\infty \cdot |h|$  d'après l'inégalité des accroissements finis, lui-même majoré, en raison de l'inégalité de Bernstein (voir l'exercice III D-5) par  $n \|p_n\|_\infty |h|$ .

La suite  $(p_n)$  étant uniformément convergente vers  $f$ , est **uniformément majorée** sur  $\mathbb{R}$ . Il existe  $T > 0$  tel que pour tout  $n$ ,  $\|p_n\|_\infty \leq T$ . Ainsi:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \frac{2A}{n^\alpha} + n |h| T \leq B \left( \frac{1}{n^\alpha} + n |h| \right), \text{ où l'on a posé } B = \max(2A, T).$$

b) L'application  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha} + x |h|$  est minimale pour  $x = \left( \frac{\alpha}{|h|} \right)^{1/(\alpha+1)}$ . Donc si  $h$  est tel que  $0 < |h| \leq 1$ , on peut trouver un entier  $n$  vérifiant:

$$\left( \frac{1}{|h|} \right)^{1/(\alpha+1)} \leq n < 2 \left( \frac{1}{|h|} \right)^{1/(\alpha+1)},$$

et, pour cette valeur de  $n$ , on a  $n |h| \leq 2 |h|^\beta$  et  $\frac{1}{n^\alpha} \leq |h|^\beta$  de sorte que:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq 3B |h|^\beta.$$

De plus, si  $|x - y| \geq 1$ , on peut majorer.

$$|f(x+h) - f(x)| \leq 2 \|f\|_\infty \leq 2 \|f\|_\infty |x - y|^\beta$$

et finalement, en prenant  $C = \max(3B, 2 \|f\|_\infty)$  on a bien:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\beta$$

c-1) On peut écrire  $\|\varphi_j\|_\infty \leq \|q_j - f\|_\infty + \|q_{j-1} - f\|_\infty$

$$\leq A 2^{-j\alpha} + A 2^{-(j-1)\alpha}$$

$$\leq A (1 + 2^\alpha) 2^{-j\alpha}$$

ce qui est l'inégalité cherchée avec  $D = A (1 + 2^\alpha)$ .

c-2) L'inégalité des accroissements finis puis l'inégalité de Bernstein nous donne d'abord

$$|\varphi_j(x+h) - \varphi_j(x)| \leq |h| \|\varphi_j\|_\infty \leq 2^j |h| \|\varphi_j\|_\infty \leq D 2^{j(1-\alpha)} |h|.$$

Mais on peut écrire:

$$q_m(x) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) + p_1(x) \text{ donc}$$

$$|q_m(x+h) - q_m(x)| \leq \sum_{j=1}^m |\varphi_j(x+h) - \varphi_j(x)| + |p_1(x+h) - p_1(x)|.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Finalement, } |q_m(x+h) - q_m(x)| &\leq D |h| \sum_{j=1}^m 2^{j(1-\alpha)} + |h| \|p'_1\|_\infty \\
 &\leq |h| \left( D \left( \frac{2^{m(1-\alpha)} - 2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} - 1} \right) + \|p'_1\|_\infty \right) \\
 &\leq E |h| 2^{m(1-\alpha)}
 \end{aligned}$$

en prenant pour  $E$  un majorant de la suite  $u_m = \left| \frac{D}{2^{1-\alpha} - 1} + \left( \|p'_1\|_\infty - \frac{D 2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} - 1} \right) 2^{-m(1-\alpha)} \right|$

*qui est bornée puisque convergente vers  $\frac{D}{2^{1-\alpha} - 1}$ .*

On obtient alors en écrivant l'inégalité ii) pour  $n = 2^m$ :

$$\begin{aligned}
 |f(x+h) - f(x)| &\leq |f(x+h) - p_n(x+h)| + |f(x) - p_n(x)| + |p_n(x+h) - p_n(x)| \\
 &\leq \frac{2A}{2^{\alpha m}} + E |h| 2^{m(1-\alpha)}.
 \end{aligned}$$

c-3) Pour  $h$  tel que  $0 < |h| \leq 1$ , on choisit  $m = E(-\log_2 |h|) + 1$ , c'est à dire tel que:

$$\frac{1}{|h|} \leq 2^m \leq \frac{2}{|h|},$$

pour obtenir  $|f(x+h) - f(x)| \leq E 2^{1-\alpha} |h|^\alpha + 2A |h|^\alpha = F |h|^\alpha$ , avec  $F = E 2^{1-\alpha} + 2A$ .

**On conclut alors comme à la fin du b) que  $f$  est  $\alpha$ -Höldérienne.**

### C-8 Série de Fourier divergente:

a) Compte tenu de la majoration rappelée,  $|Q_k(x)| \leq 2K$  et la série  $\sum_k \frac{1}{2} Q_k(x)$  est normalement convergente. La fonction  $f$  est continue et *ses coefficients de Fourier obtenus en intégrant terme à terme.*

Les formules de linéarisation donnent comme expression:

$$\begin{aligned}
 Q_k(x) &= \frac{\cos 2^{k^3} x}{2^{k^3}} + \frac{\cos (2^{k^3} + 1) x}{2^{k^3} - 1} + \dots + \frac{\cos (2^{k^3+1} - 1) x}{1} \\
 &\quad - \frac{\cos (2^{k^3+1} + 1) x}{1} - \dots - \frac{\cos (3 \cdot 2^{k^3}) x}{2^{k^3}}.
 \end{aligned}$$

Comme les indices des cosinus dans les différents  $Q_k$  ne se recouvrent pas, *les coefficients des cos  $px$  figurant dans les  $Q_k$  sont les coefficients de Fourier  $a_p(f)$ .*

$$b) S_{\alpha_k}(x) - S_{\beta_k}(x) = -\frac{1}{k^2} \left( \sum_{p=1}^{2^{k^3}} \frac{\cos (2^{k^3+1} + p) x}{p} \right),$$

$$\text{donc } S_{\alpha_k}(0) - S_{\beta_k}(0) = \frac{1}{k^2} \sum_{p=1}^{2^{k^3}} \frac{1}{p} > \frac{1}{k^2} \ln(2^{k^3}) = k \ln 2.$$

**La suite  $S_n(0)$  est donc divergente.**

## D - Applications des séries de Fourier

### D-1 Résolution d'équations différentielles ordinaires:

a) Résolvons déjà l'équation homogène.

L'équation caractéristique est  $r^4 + 5r^2 + 4 = 0$  dont les racines sont  $\overset{i}{1}, \overset{-i}{-1}, \overset{2i}{2}, \overset{-2i}{-2}$ .

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$A \cos t + B \sin t + C \cos 2t + D \sin 2t.$$

Cherchons alors une solution de classe  $C^4$  pour l'équation complète sous forme de somme de série trigonométrique.

Commençons *par développer sous cette forme le deuxième membre*, en partant de l'expression comme série de Fourier de  $t \mapsto |\sin 2t|$  (continue,  $C^1$  par morceaux,

$2\pi$ -périodique et paire). On a donc  $|\sin 2t| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$  avec:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\sin 2u| \cos nu \, du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin 2u \cos nu + \sin 2u \cos n(\pi - u)) \, du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin 2u \cos nu \, du. \end{aligned}$$

Si  $n$  est impair,  $a_n = 0$ , puis pour  $n = 2p$ ,

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin 2(p+1)u - \sin 2(p-1)u) \, du. \text{ On a donc } a_2 = 0 \text{ et pour } p \geq 2, \\ a_{2p} &= \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\cos 2(p+1)u}{2(p+1)} + \frac{\cos 2(p-1)u}{2(p-1)} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{\cos (p+1)\pi - 1}{p+1} + \frac{\cos (p-1)\pi - 1}{p-1} \right). \end{aligned}$$

Si  $p$  est impair,  $a_{2p} = 0$ , il ne reste que les indices divisibles par 4, soit:

$$a_{4k} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right) = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4k^2 - 1}.$$

On a donc finalement:

$$|\sin 2t| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4nt}{4n^2 - 1}$$

Compte tenu du fait qu'interviennent seulement les dérivées paires, cherchons une

solution particulière sous la forme  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos 4nt$ .

Supposons *qu'on puisse dériver quatre fois terme à terme*:

$$f^{(4)}(t) + 5f''(t) + 4f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 4\alpha_n (64n^4 - 20n^2 + 1) \cos 4nt.$$

Par identification, puisque  $64n^4 - 20n^2 + 1$  ne s'annule pas,

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}, \text{ et pour } n \geq 1, \alpha_n = -\frac{1}{\pi(4n^2 - 1)(64n^4 - 20n^2 + 1)}.$$

On constate alors *a posteriori* que la série  $\sum 64n^4 \alpha_n \cos 4nt$  est normalement convergente *d'où la possibilité effectivement de dériver  $f(t)$  quatre fois terme à terme.*

La solution générale de l'équation est donc:

$$y(t) = A \cos t + B \sin t + C \cos 2t + D \sin 2t + \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4nt}{(4n^2 - 1)(64n^4 - 20n^2 + 1)}$$

b) Comme dans la question précédente, cherchons le développement en série de Fourier du deuxième membre, qui est une fonction  $2\pi$ -périodique, continue et de classe  $C^1$  par morceaux donc égale à la somme de sa série de Fourier.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cos kt \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (\sin(1+k)t + \sin(1-k)t) \, dt. \end{aligned}$$

$$\text{Pour } k=1, a_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin 2t \, dt = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } k \neq 1, a_k &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{k+1} \cos(k+1)t + \frac{1}{k-1} \cos(k-1)t \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} - \frac{1 - (-1)^{k-1}}{k-1} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Pour } k \text{ impair, } a_k = 0, \text{ et pour } k \text{ pair, } k = 2p, a_{2p} = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{4p^2 - 1}.$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t \sin kt \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (\cos(k-1)t - \cos(k+1)t) \, dt. \end{aligned}$$

$$\text{Pour } k=1, b_1 = \frac{1}{2}, \text{ et pour } k > 1, b_k = 0.$$

Finalement:

$$\text{Max}(\sin t, 0) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin t}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kt}{4k^2 - 1}$$

Pour des raisons de parité, cherchons d'abord une solution particulière de l'équation

$$f''(t) + f(t) = \text{Max}(\sin t, 0) - \frac{\sin t}{2} \text{ sous la forme } f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos 2nt.$$

En admettant qu'elle est deux fois dérivable, on est conduit à:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}, \text{ et pour } n \geq 1, (1 - 4n^2) \alpha_n = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

On en déduit la solution potentielle  $f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{(4n^2 - 1)^2}$ .

Comme *la série deux fois dérivée est normalement convergente*, la fonction obtenue est bien de classe  $C^2$  et dérivable terme à terme.

Il reste à trouver une solution particulière de l'équation  $y'' + y = \frac{1}{2} \sin t$ .

Comme  $\sin t$  et  $\cos t$  sont déjà solutions de l'équation homogène associée, on la cherche sous la forme  $y = t(a \cos t + b \sin t)$ .

$$y'' + y = 2b \cos t - 2a \sin t \quad \text{d'où} \quad a = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad b = 0.$$

Finalement, la solution générale s'écrit

$$y = A \cos t + B \sin t + \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{(4n^2 - 1)^2} - \frac{t \cos t}{4}$$

La solution obtenue ne reste pas bornée. Il se produit *un phénomène de résonance* due à la présence du terme  $\frac{\sin t}{2}$  au second membre de l'équation.

## D-2 Equation de la chaleur dans une tige:

a) Comme  $(x, t) \mapsto u^2(x, t)$  est continue,  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

Comme  $(x, t) \mapsto \frac{\partial}{\partial t} u^2(x, t)$  est continue sur  $[0, 1] \times \mathbb{R}^{+*}$   $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= 2 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (u^2(x, t)) \, dx \\ &= 2 \int_0^1 u(x, t) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \, dx = 2 \int_0^1 u(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \, dx. \end{aligned}$$

En intégrant par parties ( $\frac{\partial u}{\partial x}$  est continue pour  $t > 0$ ) pour  $t > 0$ , on obtient:

$$\varphi'(t) = 2 \left[ u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]_{x=0}^{x=1} - 2 \int_0^1 \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 \, dx = -2 \int_0^1 \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2 \, dx \leq 0.$$

La fonction  $\varphi$  est donc décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ .

Si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux applications dans  $\Omega_f$ , alors  $u_1 - u_2$  est dans  $\Omega_0$ .

La fonction  $\psi$  définie comme  $\varphi$  par  $\psi(t) = \int_0^1 (u_1(x, t) - u_2(x, t))^2 \, dx$  est positive décroissante nulle en 0 donc est identiquement nulle. *Par continuité on a alors  $u_1 = u_2$ .*

b) La fonction  $f$  continue,  $C^1$  par morceaux, impaire et  $2\pi$ -périodique est somme de sa série de Fourier qui est une série de sinus.

Posons  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \pi n x$ . et cherchons alors  $u$  de la même forme (mais avec des

coefficients fonctions de  $t$ )  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \pi n x$ .

*Supposons que nous puissions dériver terme à terme sans problème.*

Nous obtenons alors  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t) \sin \pi n x = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \pi^2 b_n(t) \sin \pi n x$ , soit pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $b_n'(t) = -n^2 \pi^2 b_n(t)$ , ce qui donne  $b_n(t) = \lambda_n e^{-n^2 \pi^2 t}$ , où  $\lambda_n \in \mathbb{R}$ .

Donc, sous réserve de convergence, on trouve  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin \pi n x$ , et pour avoir  $u(x, 0) = f(x)$  il suffit de prendre  $\lambda_n = \beta_n$ , ce qui donne alors:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin \pi n x$$

Réciproquement, on vérifie la convergence et la possibilité de dériver:

i)  $|b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin \pi n x| \leq |b_n|$ , donc la série est **normalement convergente**. Sa somme est définie et continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ .

$$\begin{aligned} \text{ii) } \left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} (b_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin \pi n x) \right| &= \left| b_n (\pi n)^k (-n^2 \pi^2)^l e^{-n^2 \pi^2 t} \sin \left( \pi n t + k \frac{\pi}{2} \right) \right| \\ &\leq |b_n| (\pi n)^{2l+k} e^{-n^2 \pi^2 a} = 0 \quad (|b_n|) \quad \text{pour } t \geq a > 0. \end{aligned}$$

*Toutes les séries dérivées par rapport à  $x$  ou  $t$  sont normalement convergentes sur  $\mathbb{R} \times [a, +\infty[$ , donc  $u$  est de classe  $C^\infty$  et peut être dérivée terme à terme.*

Elle vérifie donc l'équation (E) **comme chacun des termes de la somme**.

c) La restriction à  $[0, 1] \times \mathbb{R}^+$  de la fonction  $u$  trouvée au b) est bien dans  $\Omega_f$ . D'après l'unicité vue au a) on en déduit l'existence et l'unicité.

Souvenons nous que  $b_n = \int_0^2 f(x) \sin \pi n x \, dx$ , et que  $0 = a_n = \int_0^2 f(x) \cos \pi n x \, dx$ .

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } u(x, t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} [a_n \cos n \pi x + b_n \sin n \pi x] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^2 f(u) \, du + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} \int_0^2 \cos n \pi (x-u) f(u) \, du \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left( 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} \cos n \pi (x-u) \right) f(u) \, du, \end{aligned}$$

en raison de la convergence normale par rapport à  $u$ , pour  $t > 0$ .

On a donc pour  $t > 0$ :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^2 \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} \cos n \pi (x-u) \right) f(u) du$$

### D-3 Inégalités de Poincaré et Wirtinger:

a) Les coefficients de Fourier de  $f$  et  $f'$  sont définis par:

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i(2\pi/T)nt} dt, \quad c_0(f) = 0$$

$$c_n(f') = \frac{1}{T} \int_0^T f'(t) e^{-i(2\pi/T)nt} dt = \frac{2i\pi}{T} n c_n(f), \text{ par intégration par parties.}$$

Nous utilisons alors l'égalité de Parseval, qui donne, pour  $f$  et  $f'$ :

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2, \text{ et } \frac{1}{T} \int_0^T |f'(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4\pi^2}{T^2} n^2 |c_n(f)|^2.$$

Comme  $c_0(f) = 0$ , on a  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n(f)|^2$ , ce qui s'écrit aussi:

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(t)|^2 dt$$

Il y a égalité ssi pour tout  $|n| > 1$ ,  $c_n(f) = 0$ . Comme  $f$ , continue et  $C^1$  par morceaux, est somme de sa série de Fourier, cela implique:

$$f(t) = c_{-1} e^{-(2i\pi/T)t} + c_1 e^{(2i\pi/T)t} = A \sin \frac{2\pi}{T} t + \beta \cos \frac{2\pi}{T} t$$

b) Si nous posons  $c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt$  puis  $g_1(t) = g(t) - c_0$ , nous obtenons:

$$\int_0^T \overline{f(t)} g(t) dt = \int_0^T \overline{f(t)} (g(t) - c_0) dt = \int_0^T \overline{f(t)} g_1(t) dt.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \int_0^T \overline{f(t)} g_1(t) dt \right|^2 \leq \int_0^T |f(t)|^2 dt \int_0^T |g_1(t)|^2 dt,$$

puis l'inégalité de Poincaré à  $g_1$ , il vient,

$$\left| \int_0^T \overline{f(t)} g(t) dt \right|^2 \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f(t)|^2 dt \int_0^T |g'(t)|^2 dt$$

c) Si nous posons  $T = 2(b - a)$ , on peut considérer la fonction  $f$  comme la restriction à  $[a, b]$  d'une application  $T$ -périodique impaire par rapport à  $a$ . Cette application que nous noterons encore  $f$  est définie sur  $[2a - b, a]$  par  $f(t) = -f(2a - t)$ , puis prolongée à  $\mathbb{R}$  par  $T$ -périodicité.

Elle reste continue (puisque  $f(a) = f(b) = 0$ ) et  $C^1$  par morceaux.

Comme  $\int_{2a-b}^a f(t) dt = \int_0^T f(t) dt = 0$ , on peut appliquer à  $f$  l'inégalité de Poincaré

vue au a), pour obtenir:  $\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt$ .

S'il y a égalité, d'après a),  $f(t) = A \frac{\pi}{b-a} (t - \varphi)$ , et comme  $f(a) = f(b) = 0$ ,

$$f(t) = A \sin \left( \pi \frac{t-a}{b-a} \right)$$

#### D-4 Inégalité des isopérimètres:

a) On peut écrire que  $|f'(t)|^2 = \left| \frac{ds}{dt} \right|^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}$ , puisque  $\| \frac{dM}{ds} \| = 1$ .

Comme cette valeur est constante, on a immédiatement  $\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt = 2\pi \left( \frac{L^2}{4\pi^2} \right)$

donc:  $L^2 = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt$ .

Nous pouvons alors écrire, compte tenu de l'expression de  $S$ :

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi S &= 2\pi \left( \int_{-\pi}^{\pi} (x'(t)^2 + y'(t)^2 - 2x(t)y'(t)) dt \right) \\ &= 2\pi \left( \int_{-\pi}^{\pi} (x'(t)^2 - x^2(t)) dt + \int_{-\pi}^{\pi} (x(t) - y'(t))^2 dt \right) \end{aligned}$$

b) Supposons d'abord que  $\int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt = 0$ . L'inégalité de Wirtinger donne:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x'(t)^2 - x^2(t)) dt \geq 0, \text{ d'où } L^2 - 4\pi S \geq 0.$$

Il y a égalité s'il y a égalité dans l'inégalité de Wirtinger, et si  $y' = x$ , donc si:

$x(t) = A \cos(t - t_0)$ , puis  $y'(t) = A \cos(t - t_0)$ , d'où  $y(t) = A \sin(t - t_0) + y_0$

*et la courbe est un cercle centré sur l'axe des y.*

Dans le cas général, si nous posons  $x_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt$ , comme  $y(\pi) = y(-\pi)$ , nous

avons  $S = \int_{-\pi}^{\pi} (x(t) - x_0) y'(t) dt$ .

Nous pouvons alors écrire, en introduisant la translation sur  $x$ :

$$L^2 - 4\pi S = 2\pi \left( \int_{-\pi}^{\pi} (x'(t) - (x(t) - x_0)^2) dt + \int_{-\pi}^{\pi} (x(t) - x_0 - y'(t))^2 dt \right),$$

et nous sommes ramené au cas particulier précédent.

### D-5 Inégalité de Bernstein:

a) La fonction  $f$  continue et  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , est *somme de sa série de Fourier*. Calculons ses coefficients de Fourier.

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{-\pi/2} (-\pi-t) e^{-int} dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t e^{-int} dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi-t) e^{-int} dt \right) \end{aligned}$$

mais *par changement de variable*,  $\int_{-\pi}^{-\pi/2} (-\pi-t) e^{-int} dt = \int_0^{\pi/2} -u e^{-in\pi} e^{-inu} du$  et

$$\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi-t) e^{-int} dt = \int_{-\pi/2}^0 -v e^{in\pi} e^{-inv} dv, \quad \text{en posant } u = \pi + t \text{ et } v = t - \pi.$$

Comme  $e^{in\pi} = e^{-in\pi}$ , les termes se regroupent et:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} (1 - e^{in\pi}) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} (1 - e^{in\pi}) \left[ \left( \frac{it}{n} + \frac{1}{n^2} \right) e^{-int} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}.$$

Si  $n$  est pair,  $c_n(f) = 0$  et si  $n$  est impair,  $n = 2k - 1$ ,  $e^{-i(2k-1)\pi/2} = -e^{i(2k-1)\pi/2} = (-1)^k i$ , donc:

$$c_{2k-1}(f) = \frac{(-1)^k 2i}{\pi (2k-1)^2}$$

Pour  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , nous obtenons  $x = \frac{2i}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} e^{i(2k-1)x}$ .

Si nous prenons maintenant  $x$  dans  $[-a, a]$ ,  $\frac{\pi}{2a}x$  est dans  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , donc:

$$x = \frac{4}{\pi^2} ia \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} \exp\left(\frac{i\pi}{2a} (2k-1)x\right)$$

En particulier, pour  $x = a$ , on récupère:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

b-1) La dérivée seconde de  $x \mapsto e^{ix}$  est  $-e^{ix}$  et est majorée par 1 sur  $\mathbb{R}$  (en module). L'inégalité de Taylor-Lagrange d'ordre 2 donne alors  $|e^{ix} - 1 - ix| \leq \frac{x^2}{2}$ , et la valeur  $C = \frac{1}{2}$  convient.

Pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}^*$ , par linéarité on peut écrire:

$$\begin{aligned}\Delta(t, h) &= \hat{\mu}(t+h) - \hat{\mu}(t) - h\mu(f_t) = \mu(e_{t+h}) - \mu(e_t) - h\mu(f_t) \\ &= \mu(e_t(e_h - 1) - hf_t).\end{aligned}$$

Mais  $|e_t(x)(e_h(x) - 1) - hf_t(x)| = |e^{itx}(e^{ihx} - 1 - ihx)| \leq \frac{h^2 a^2}{2}$ , si  $x$  est dans  $[-a, a]$ ,

et finalement  $|\Delta(t, h)| \leq \frac{a^2}{2} \|\mu\| h^2$ , donc  $\Delta(t, h) = o(h)$ , ce qui montre bien

l'expression attendue de la dérivée:  $\hat{\mu}'(t) = \mu(f_t)$ .

b-2) Comme pour tous  $t$  et  $x$  réels  $|e_t(x)| \leq 1$ , pour  $x \in [-a, a]$  et  $t$  réel,  $|\hat{\mu}(t)| \leq \|\mu\|$ .

Dans les mêmes conditions, on a  $|f_t(x)| \leq a$ , ce qui conduit à:  $|\hat{\mu}'(t)| \leq a \|\mu\|$ .

Pour  $x$  dans  $[-a, a]$  et  $t$  réel, on a d'après a),

$$\begin{aligned}f_t(x) &= -\frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} \exp\left(i \frac{\pi}{2a} (2k-1)x\right) e_t(x) \\ &= -\frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} \exp\left(i \left(\frac{\pi}{2a} (2k-1) + t\right)x\right).\end{aligned}$$

La série est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$  car  $|e^{ix}| = 1$  et on peut donc, par continuité de  $\mu$  écrire pour tout  $t$  réel:

$$\hat{\mu}'(t) = \hat{\mu}(f_t) = -\frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} \hat{\mu}\left(t + \frac{\pi}{2a} (2k-1)\right)$$

On a donc pour  $t$  réel,

$$|\hat{\mu}'(t)| \leq \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \sup_{s \in \mathbb{R}} |\hat{\mu}(s)|$$

d'où l'on tire, puisque  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$ , l'inégalité de Bernstein:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{\mu}'(t)| \leq a \sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{\mu}(t)|$$

c) On pose  $a = \max_{1 \leq j \leq n} |\alpha_j|$  et pour  $\theta$  dans  $C_a$ ,  $\mu(\theta) = \sum_{j=1}^n \gamma_j \theta(\alpha_j)$ .

Alors  $\hat{\mu}(t) = \sum_{j=1}^n \gamma_j e^{i\alpha_j t}$  et d'après b),  $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{\mu}'(t)| \leq a \sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{\mu}(t)|$ .

En particulier, si  $P$  est un polynôme trigonométrique de degré  $N$ , on a  $a = N$  et,

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |P'(t)| \leq N \max_{t \in \mathbb{R}} |P(t)|$$

### D-6 Formule d'inversion de Fourier:

a) En fait,  $\hat{f}(t) = \int_{-A}^A f(x) e^{-ixt} dx$ . Comme l'application  $(t, x) \mapsto f(x) e^{-ixt}$  est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , le *théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre* assure la continuité de  $\hat{f}$  sur  $\mathbb{R}$ .

Par ailleurs, en intégrant deux fois par parties

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \left[ -\frac{1}{it} e^{-ixt} f(x) \right]_{-A}^A + \frac{1}{it} \int_{-A}^A f'(x) e^{-ixt} dx \\ &= \frac{1}{it} \left[ -\frac{1}{it} e^{-ixt} f'(x) \right]_{-A}^A - \frac{1}{t^2} \int_{-A}^A f''(x) e^{-ixt} dx \\ &= \frac{1}{t^2} \int_{-A}^A f''(x) e^{-ixt} dx, \text{ puisque } f(-A) = f(A) = f'(-A) = f'(A) = 0. \end{aligned}$$

On a donc  $t^2 |\hat{f}(t)| \leq \int_{-A}^A |f''(x)| dx = K$  indépendant de  $t$ .

b) La fonction  $f$  peut être considérée comme la restriction à  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  d'une *fonction de classe  $C^2$  et  $T$ -périodique*.

Si  $k$  est dans  $\mathbb{Z}$ , le  $k$ -ième coefficient de Fourier de cette fonction est:

$$c_k(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i 2k\pi t/T} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i 2k\pi t/T} dt = \frac{1}{T} \hat{f}\left(\frac{2k\pi}{T}\right)$$

Comme la fonction considérée est de classe  $C^2$ , elle est somme de sa série de Fourier sur  $\mathbb{R}$ . En particulier,

$$\forall x \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}], f(x) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{2k\pi}{T}\right) e^{i 2k\pi x/T}$$

c) Fixons  $x$  réel. Si  $N$  est un entier,  $N > 2|A|$ , on peut appliquer b) et:

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}\left(\frac{2k\pi}{N}\right) e^{i 2k\pi x/N}.$$

Posons alors  $g_x(t) = \hat{f}(t) e^{ixt}$ . On sait depuis a) que  $t^2 |g_x(t)| = t^2 |\hat{f}(t)| \leq K$ .

Si nous fixons  $\varepsilon > 0$ , nous pouvons trouver un entier  $B > A$  tel que:

$$\int_{|t|>2\pi B} |g_x(t)| dt \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \sum_{|k|>BN} \left| g_x \left( \frac{2k\pi}{N} \right) \right| \leq \varepsilon.$$

L'entier  $B$  étant ainsi fixé,  $\frac{1}{2BN} \sum_{k=-BN}^{BN-1} g_x \left( \frac{2k\pi}{N} \right)$  est une *somme de Riemann* de la fonction  $g_x$  sur l'intervalle  $[-2\pi B, 2\pi B]$ , et comme  $\frac{1}{2BN} g_x(2\pi B) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ ,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=-BN}^{BN} g_x \left( \frac{2k\pi}{N} \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-B}^B g_x(t) dt.$$

Il existe donc  $N_0$  entier tel que  $N \geq N_0$  implique:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=-BN}^{BN} g_x \left( \frac{2k\pi}{N} \right) - \frac{1}{2\pi} \int_{-B}^B g_x(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour  $N \geq N_0$ ,  $\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g_x(t) dt - \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_x \left( \frac{2k\pi}{N} \right) \right| \leq 3\varepsilon$ , soit:

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{ixt} dt - f(x) \right| \leq 3\varepsilon.$$

On en déduit la *formule d'inversion de Fourier*:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{ixt} dt$$

## D-7 Fonctions de Hardy:

a) Par convergence normale, *on peut intégrer terme à terme* la série.

$$f(t) P(t) e^{-ia_n t} = \sum_{k=-m}^m \alpha_k \sum_{p=-\infty}^{\infty} \gamma_p e^{i(a_p - a_n + k)t} \text{ soit:}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(t) e^{-ia_n t} dt = \sum_{k=-m}^m \alpha_k \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_p}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(a_p - a_n + k)t} dt.$$

Pour  $p \neq n$ , lorsque  $k$  varie entre  $-m$  et  $m$ ,  $a_n - k$  varie entre  $a_n - m$  et  $a_n + m$  donc entre  $a_n - b_n + 1$  et  $a_n + b_n - 1$ , et *ne peut être égal à  $a_p$* . Une seule des intégrales est donc non nulle, pour  $p = n$  et  $k = 0$ . Il reste donc  $\alpha_0 \gamma_n = \gamma_n$  puisque  $\alpha_0 = 1$ .

b) On rappelle les calculs déjà faits (voir exercice C-3)

$$\text{pour } t \notin 2\pi \mathbb{Z}, D_n(t) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} \quad F_n(t) = \frac{1}{n+1} \left( \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} \right)^2$$

$$\text{et } D_n(2k\pi) = F_n(2k\pi) = n+1$$

$F_{b_n-1}$  est bien un *polynôme trigonométrique de degré  $b_n - 1$* .

$$\text{Alors, } |\gamma_n| \leq \frac{c}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|x|^\alpha}{b_n} \left( \frac{\sin(b_n x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 dx.$$

Or, sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin u \geq \frac{2}{\pi} u$ , donc:

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq c' \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|x|^\alpha}{b_n} \left( \frac{\sin(b_n x/2)}{x} \right)^2 dx \\ &\leq \frac{c'}{b_n^\alpha} \int_{-b_n\pi}^{b_n\pi} |t|^\alpha \frac{\sin^2(t/2)}{t^2} dt \\ &\leq 2c' b_n^{-\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^\alpha \frac{\sin^2(t/2)}{t} dt = K b_n^{-\alpha} \text{ puisque l'intégrale est} \end{aligned}$$

**convergente:**

$$\text{en } 0 \quad \varphi(t) \sim |t|^\alpha \rightarrow 0$$

$$\text{en } \pm\infty \quad |\varphi(t)| \leq |t|^{\alpha-2} \text{ avec } \alpha < 1.$$

c) Si  $f(t) = o(|t|^\alpha)$ , choisissons  $\varepsilon > 0$  et associons-lui un  $\eta > 0$  tel que  $|t| < \eta \Rightarrow |f(t)| \leq \varepsilon |t|^\alpha$ .

Soit  $M$  un majorant de  $|f|$  sur  $[-\pi, \pi]$ .

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{|t|^\alpha}{b_n} \left( \frac{\sin(b_n t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt + \frac{M}{\pi} \int_{\eta}^{\pi} \frac{1}{b_n} \left( \frac{\sin(b_n t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 dt \\ &\leq \frac{\varepsilon \pi}{2} \int_{-\eta}^{\eta} |t|^\alpha \frac{\sin^2(b_n t/2)}{b_n t^2} dt + M \pi \int_{\eta}^{\pi} \frac{\sin^2(b_n t/2)}{b_n t^2} dt \end{aligned}$$

par le changement de variable  $b_n t = u$ ,

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq \frac{\varepsilon \pi}{2} b_n^{-\alpha} \int_{-\eta b_n}^{\eta b_n} |u|^\alpha \frac{\sin^2(u/2)}{u^2} du + M \pi \int_{\eta b_n}^{\pi b_n} \frac{\sin^2(u/2)}{u^2} du. \\ \int_{\eta b_n}^{\pi b_n} \frac{\sin^2(u/2)}{u^2} du &\leq \int_{\eta b_n}^{\pi b_n} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{b_n} \left( \frac{1}{\eta} - \frac{1}{\pi} \right) < \frac{1}{\eta} b_n^{-1}. \end{aligned}$$

Si  $A$  est la valeur de l'intégrale convergente  $\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^\alpha \frac{\sin^2(u/2)}{u^2} du$ ,

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq \varepsilon \frac{\pi A}{2} b_n^{-\alpha} + \frac{M \pi}{\eta} b_n^{-1} = \left( \varepsilon \frac{\pi A}{2} + \frac{M \pi}{\eta} b_n^{\alpha-1} \right) b_n^{-\alpha} \\ &\leq \varepsilon \pi A b_n^{-\alpha} \text{ pour } |n| \text{ assez grand puisque } b_n^{\alpha-1} \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Ainsi on a  $\gamma_n = o(b_n^{-\alpha})$  quand  $|n| \rightarrow \infty$ .

**Ajouter une constante à  $f$  ne change que  $\gamma_0$ , et comme:**

$$f(t_0 + u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{ia_n(t_0+u)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n' e^{ia_n u} \text{ avec } |\gamma_n'| = |y e^{ia_n t_0}| = |\gamma_n|, \text{ une}$$

**translation sur la variable ne change pas le module des coefficients**, d'où le résultat dans le cas général.

d) Pour  $n > 0$ ,  $b^{n-1} \leq b^n - \frac{b^n}{2} < b^n + \frac{b^n}{2} \leq b^{n+1}$  car  $b \geq 2$  et on en déduit toutes les propriétés requises des suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ .

De plus,  $|\gamma_n| = b^{-\alpha|n|}$  et les séries  $\sum |\gamma_n|$  et  $\sum |\gamma_{-n}|$  sont des séries géométriques convergentes donc  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\gamma_n|$  converge.

La fonction  $f$  est donc continue sur  $\mathbb{R}$  et en regroupant les indices opposés pour lesquels  $\gamma_{-n} = \gamma_n$ , on obtient l'expression:  $f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b^{-\alpha n} \cos(b^n t)$ .

e) La série des dérivées n'est pas convergente, ce qui prouve qu'on ne peut dériver terme à terme, mais ne permet pas de conclure quant à la dérivabilité.

S'il existe  $t_0$  tel que  $f(t) - f(t_0) = o(|t - t_0|^\alpha)$ , on a vu que  $\gamma_n = o(b_n^{-\alpha})$  quand  $|n| \rightarrow \infty$ . Or, ce n'est pas le cas ici puisque  $\gamma_n b_n^\alpha \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 2^{-\alpha}$ .

Ainsi pour tout  $t_0$  réel,  $\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{|h|^\alpha}$  ne tend pas vers 0 quand  $h \rightarrow 0$  donc:

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{|h|} = \pm |h|^{\alpha-1} \cdot \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{|h|^\alpha} \text{ ne reste pas borné quand } h \rightarrow 0.$$

La fonction  $f$  n'est donc dérivable en aucun  $t_0$  réel.

**Remarque:** en fait, on a montré que quel que soit  $\alpha \in ]0, 1]$ , il existe une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  qui n'est pas  $\alpha$ -hölderienne sur aucun sous-intervalle de  $\mathbb{R}$  (voir la définition dans l'exercice C-7 question b).





*Aubin Imprimeur*

LIGUGÉ, POITIERS

IMPRESSION – FINITION

Achevé d'imprimer en octobre 1992

N° d'impression L 41341

Dépôt légal octobre 1992

Imprimé en France





x  
2563

# SUITES et SERIES de FONCTIONS

J. MOISAN - A. VERNOTTE - Nicolas TOSEL

Ellipses

Re-bec

DATE

NOM

15/10

NEZRY

07/11

MALLET

21/11

MARCAULT concerné

8/12

~~21/12~~ ~~VERNAULT~~

14/09

~~VERNAULT~~ ~~VERNAULT~~

---

Cet ouvrage fait partie d'une collection d'exercices résolus de mathématiques qui a pour objectif la préparation des épreuves écrites et orales des concours scientifiques. C'est dire qu'elle s'adresse d'abord aux étudiants des classes de *Mathématiques Supérieures* et de *Mathématiques Spéciales*.

Les exercices proposés, dont le degré de difficulté est variable, sont rédigés de façon à permettre une approche progressive des grands thèmes du programme. Ils pourront intéresser tous ceux – étudiants de premier cycle des universités, candidats aux concours de recrutement (CAPES ou Agrégation), enseignants des lycées – qui pratiquent et aiment ces mathématiques.

Ce volume est consacré à l'étude des *Séries entières* et des *Séries de Fourier*.

---



KO-253-596



9 782729 892937

ISBN 2-7298-9293-1