

MODULO

2^e édition

VECTEURS, MATRICES et NOMBRES COMPLEXES



Vincent Papillon

Avec la collaboration de Dimitri Zuchowski

2^e édition

VECTEURS, MATRICES et NOMBRES COMPLEXES

Vincent Papillon

Collège Jean-de-Brébeuf

Avec la collaboration de **Dimitri Zuchowski**

Cégep de Saint-Laurent

Révision scientifique

Daniel Audet

Collège de Bois-de-Boulogne

François Lorrain

Collège Jean-de-Brébeuf

MODULO

**Catalogage avant publication de Bibliothèque et Archives nationales du Québec
et Bibliothèque et Archives Canada**

Papillon, Vincent

Vecteurs, matrices et nombres complexes

2^e éd.

Comprend un index.

Pour les étudiants du niveau collégial.

ISBN 978-2-89650-466-4

1. Algèbre linéaire. 2. Matrices. 3. Vecteurs. 4. Nombres complexes.
5. Algèbre linéaire - Problèmes et exercices. I. Zuchowski, Dimitri, 1975-
II. Titre.

QA184.P36 2011

512'.5

C2011-941667-0

Équipe de production

Éditeur: Éric Mauras

Chargée de projet: Renée Théorêt

Révision linguistique: Isabelle Canarelli

Correction d'épreuves: Viviane Deraspe

Montage: Interscript inc.

Coordination de la mise en pages: Nathalie Ménard

Maquette: Marguerite Gouin

Couverture: Dessine-moi un mouton (Image de la cité: © Kamruzzaman Ratan/iStockphoto)

**Vecteurs, matrices et nombres complexes, 2^e édition
(1^{re} édition: 1993)**

© Groupe Modulo inc., 2012

MODULO

5800, rue Saint-Denis, bureau 900
Montréal (Québec) H2S 3L5 Canada

Téléphone : 514 273-1066

Télécopieur : 514 276-0324 ou 1 800 814-0324

info.modulo@tc.tc www.groupermodulo.com

Dépôt légal — Bibliothèque et Archives nationales du Québec, 2011

Bibliothèque et Archives Canada, 2011

ISBN 978-2-89650-466-4

Il est illégal de reproduire ce livre en tout ou en partie, par n'importe quel procédé,
sans l'autorisation de la maison d'édition ou d'une société dûment mandatée.

Imprimé au Canada

5 6 7 8 9 M 22 21 20 19 18

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance aux nombreuses personnes qui ont collaboré à l'élaboration de cet ouvrage. Pour la première édition, ce sont principalement Hélène Décoste, François Trottier, Gilbert Labelle, Anne-Marie Lorrain et Janos Baracs qui m'ont généreusement fait profiter de leur expertise et qui m'ont encouragé à poursuivre dans la voie de la géométrie. Par la suite, j'ai grandement bénéficié des remarques et des commentaires judicieux des étudiants et des collègues professeurs dans le travail de mise à jour de la deuxième édition. En particulier, je suis fortement redevable à François Lorrain et à François Trottier pour de nombreuses améliorations et pour plusieurs ajouts, tant pour le fond que pour la forme. François Lorrain et Daniel Audet ont assuré la révision scientifique avec une extrême minutie et avec beaucoup de générosité. Plusieurs jeunes professeurs ont pris la peine de m'encourager en me transmettant commentaires et suggestions par écrit. Parmi eux, Dimitri Zuchowski est devenu un collaborateur précieux et efficace, à qui nous devons le corrigé détaillé et la conception du site qui accompagne le livre. Je remercie aussi Paul Dumais, qui est à l'origine des explications sur le fonctionnement du GPS dans la nouvelle édition. Merci également à Yannick Delbecque, Frédérick Tremblay, Bernard Fraser, Sylvie Savage et Marie-Jane Haguel dont les conseils et les encouragements m'ont été très précieux. Enfin, je remercie la formidable équipe de Modulo, en particulier Carole Deslandes, Renée Théorêt et Éric Murras qui ont piloté cette deuxième édition avec le plus grand soin et une grande gentillesse. Pour terminer, je remercie le Collège Jean-de-Brébeuf de m'avoir accordé un congé d'un semestre à l'hiver 1992 alors que je rédigeais le texte de la première édition.

Vincent Papillon, août 2011.

AVANT-PROPOS

Quant à moi, je n'ai pas oublié la leçon de Gauss :
« Découvrir, c'est voir les mêmes éléments dans une autre configuration »

PAUL INCHAUSPÉ, *Discutons de l'essentiel*.

Pour connaître la rose, quelqu'un emploie la géométrie, et un autre le papillon.

PAUL CLAUDEL, *L'oiseau noir dans le soleil levant*.

Il s'est écoulé près d'une vingtaine d'années entre la première et la deuxième édition de cet ouvrage. Pendant ce temps sont apparus Google, le GPS et le cellulaire, l'imagerie médicale 3D et la robotique, et bien d'autres développements technologiques liés directement ou indirectement à la géométrie vectorielle et à l'algèbre linéaire. En conséquence, nous avons intégré plusieurs compléments dans le corps de certains chapitres, dans les exercices et dans les sections *Pour aller plus loin*, pour présenter et expliquer à un niveau accessible ces liens avec les nouvelles technologies. Parmi les nombreux manuels d'algèbre linéaire, celui-ci, qui se veut tout autant un livre qu'un manuel, a ceci de particulier qu'on y privilégie délibérément l'approche géométrique. Il s'agit non seulement d'un choix pédagogique, mais aussi d'une adaptation à la présence de la géométrie dans notre quotidien.

Ainsi, les trois premiers chapitres sont consacrés entièrement à la géométrie vectorielle, dans le cadre des espaces de dimension 1, 2 ou 3. Au chapitre 1, les vecteurs sont présentés comme des objets dynamiques qui décrivent le mouvement : translations, vitesses, accélérations, forces, moments, etc. Dans ce contexte, les points sont des objets statiques qui matérialisent

l'espace. Coordonnées et composantes viennent ensuite structurer cette géométrie, et on peut alors préciser les concepts plus abstraits d'espace vectoriel et d'espace euclidien. Longueurs, distances, angles, produit scalaire et projections orthogonales font l'objet du chapitre 2, auquel nous avons ajouté, dans cette nouvelle édition, une section sur les coordonnées sphériques (longitude, latitude, altitude). Au chapitre 3, on présente les déterminants en relation avec la mesure des aires et des volumes. Cela permet de voir les propriétés axiomatiques des déterminants comme le simple reflet de principes géométriques, tel, par exemple, le principe de Cavalieri pour le calcul des aires et des volumes. Le produit vectoriel, outil indispensable des constructions géométriques tridimensionnelles, se présente naturellement en conclusion à ce chapitre. Cette approche facilite la réalisation de travaux pratiques intéressants assez tôt en session. On donne en exemple la création de stéréogrammes.

Les problèmes liés à l'intersection de droites ou de plans (chapitre 4) débouchent sur la résolution de systèmes d'équations linéaires (chapitre 5). En guise d'application, on donne dans la section *Pour aller plus loin* des indications pour réaliser un travail pratique sur le positionnement par GPS. La méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires de Gauss-Jordan, purement algébrique, s'appuie sur le concept de matrice qui est ensuite développé pour lui-même à l'aide de nombreux exemples pratiques au chapitre 6. Une attention particulière est portée aux matrices de transition, qui ont de nombreuses applications ; on explique notamment, dans la section *Pour aller plus loin*, le rôle des itérations de produits de matrices de transition dans le fonctionnement des moteurs de recherche comme Google sur le Web. Les chapitres 7 et 8, des ajouts optionnels, réunissent algèbre et géométrie en un heureux mariage duquel naissent les transformations linéaires et les nombres complexes. Une connaissance de base des transformations linéaires et des nombres complexes est un atout précieux pour qui se prépare à des études universitaires en sciences de la nature. Le chapitre 9, consacré à l'arithmétique modulo- n et aux éléments de la théorie des groupes, est un complément qui était destiné initialement aux étudiants des programmes du bac international, mais qui peut aussi faire l'objet d'une lecture libre. L'annexe sur les coniques, rédigée par Dimitri Zuchowski, conclut cet ouvrage par une belle application des matrices à la classification des équations quadratiques.

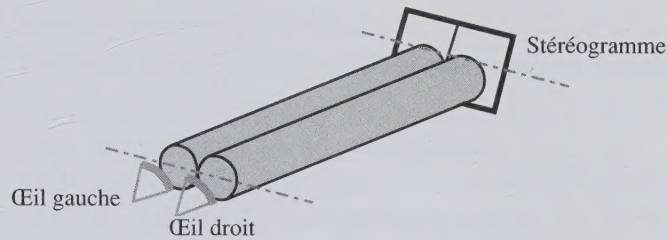
Les sections *Pour aller plus loin*, en fin de chapitre, sont optionnelles. Elles visent à stimuler la curiosité et la créativité en proposant lectures et liens, activités, recherches complémentaires, idées pour des travaux pratiques, explications de certaines technologies, etc. On y donne aussi des indications permettant d'achever quelques démonstrations théoriques délicates.

Vecteurs, matrices et nombres complexes est un ouvrage dense qui contient plus de matière qu'il n'en faut pour un cours de 75 heures. À l'instar de l'astrophysicien Hubert Reeves, nous dirons donc qu'il vaut peut-être mieux ne pas *couvrir* toute la matière... Pour les étudiants du programme régulier de sciences de la nature, les six premiers chapitres contiennent l'essentiel, mais il est fortement recommandé de les compléter avec les chapitres 7 ou 8.

Le lecteur trouvera à la fin du livre les réponses pour tous les exercices. De plus, un corrigé complet et détaillé, ainsi que du matériel complémentaire réalisés par Dimitri Zuchowski sont offerts sur Modulo en ligne.

Le stéréogramme de la couverture arrière

Ce stéréogramme a été créé par Marie-Christine Stafford, étudiante au programme Sciences lettres et arts, dans le cadre du cours de géométrie vectorielle. Pour le voir en 3D, il faut que l'œil gauche ne perçoive que la figure de gauche et que l'œil droit ne perçoive que la figure de droite. Cela peut se faire à l'aide d'une lunette formée de deux cylindres de papier juxtaposés (deux feuilles de format standard enroulées et collées). Il faut s'exercer à ce que chaque œil fixe le centre de la figure qui lui est destinée. Vous trouverez tous les détails pour la conception d'un tel stéréogramme au chapitre 3, dans la section *Pour aller plus loin*.





Digitized by the Internet Archive
in 2021 with funding from
Kahle/Austin Foundation

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	III
---------------------	-----

AVANT-PROPOS	V
--------------------	---

CHAPITRE 1 POINTS ET VECTEURS	1
-------------------------------------	---

Quelques conventions de dessin	1
--------------------------------------	---

1.1 Les points, les vecteurs et les scalaires dans les espaces euclidiens	3
---	---

1.1.1 Les espaces euclidiens.	4
------------------------------------	---

1.1.2 Les points, les vecteurs et les translations	5
--	---

1.1.3 Les opérations sur les vecteurs	6
---	---

1.1.4 Les propriétés des opérations sur les vecteurs	9
--	---

1.1.5 Opération des vecteurs sur les points	10
---	----

Exercices 1.1	12
---------------------	----

1.2 Les composantes des vecteurs	15
--	----

1.2.1 Les combinaisons linéaires de vecteurs	15
--	----

1.2.2 La dépendance et l'indépendance linéaires	16
---	----

1.2.3 Une base d'un espace	19
----------------------------------	----

Exercices 1.2	25
---------------------	----

1.3 Les coordonnées des points.	27
--------------------------------------	----

1.3.1 Les repères dans un espace.	27
--	----

1.3.2 Les opérations sur les coordonnées et les composantes.	28
---	----

1.3.3 Les repères orthonormés dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^n$	33
--	----

Exercices 1.3	35
---------------------	----

1.4 Pour aller plus loin.	39
--------------------------------	----

1.4.1 L'axiomatisation de la géométrie	39
--	----

1.4.2 Les espaces vectoriels et les espaces affines.	40
---	----

1.4.3 La démonstration du théorème de la dimension.	41
--	----

CHAPITRE 2 LONGUEURS, DISTANCES ET ANGLES	45
---	----

1.5 Les longueurs et les distances.	45
--	----

2.1.1 La longueur (norme) d'un vecteur	45
--	----

2.1.2 La distance entre deux points	47
---	----

2.1.3 Les vecteurs unitaires	47
------------------------------------	----

2.1.4 Les lieux géométriques	48
------------------------------------	----

Exercices 2.1	50
---------------------	----

	Le produit scalaire et le calcul d'angles	52
2.2.1	Le produit scalaire de deux vecteurs	52
2.2.2	L'angle entre deux vecteurs	56
2.2.3	La loi des cosinus et le produit scalaire	61
2.2.4	Les projections orthogonales	61
2.2.5	Les coordonnées sphériques	64
	Exercices 2.2	67
	Pour aller plus loin	72
2.3.1	Les cinq solides de Platon	73
2.3.2	Un peu de latitude	75
CHAPITRE 3	AIRES ET VOLUMES	79
	Les déterminants 2×2 et 3×3	79
3.1.1	L'orientation dans $\mathbb{R}^2$	79
3.1.2	Les déterminants 2×2	80
3.1.3	L'orientation dans $\mathbb{R}^3$	88
3.1.4	Les déterminants 3×3	89
3.1.5	Quelques applications des déterminants 3×3	97
	Exercices 3.1	101
	Le produit vectoriel et le produit mixte dans $\mathbb{R}^3$	105
3.2.1	Le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} \wedge \vec{v}$	105
3.2.2	Les propriétés du produit vectoriel	108
3.2.3	Le produit mixte de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$	112
	Exercices 3.2	113
	Pour aller plus loin	116
3.3.1	Le modèle vectoriel du dessin en perspective centrale	116
3.3.2	Les stéréogrammes	122
3.3.3	La distributivité du produit vectoriel sur la somme vectorielle	125
CHAPITRE 4	DROITES ET PLANS	129
	Les droites	129
4.1.1	Les équations vectorielles et paramétriques des droites dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$	129
4.1.2	Les équations non paramétriques des droites dans $\mathbb{R}^2$	132
4.1.3	Les équations non paramétriques des droites dans $\mathbb{R}^3$	134
4.1.4	La distance d'un point à une droite	135
4.1.5	La position relative de deux droites	137

4.1.6	La distance entre deux droites	139
	Exercices 4.1	140
	Les plans	144
4.2.1	Les équations vectorielles et paramétriques des plans dans $\mathbb{R}^3$	144
4.2.2	Les équations non paramétriques des plans dans $\mathbb{R}^3$	145
4.2.3	Un vecteur normal à un plan	146
4.2.4	La distance d'un point à un plan	147
4.2.5	La position relative de deux plans dans $\mathbb{R}^3$	149
4.2.6	L'angle dièdre entre deux plans	150
	Exercices 4.2	152
	Pour aller plus loin	155
CHAPITRE 5	SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES	159
	Les systèmes d'équations linéaires et les matrices	159
5.1.1	Définitions	160
5.1.2	La méthode d'élimination	161
5.1.3	La matrice des coefficients et la matrice augmentée d'un système	162
5.1.4	Les matrices <i>ERL</i>	164
5.1.5	Les matrices <i>L</i> -équivalentes	165
5.1.6	L'algorithme de réduction de Gauss-Jordan	167
5.1.7	La méthode de résolution de Gauss-Jordan	170
	Exercices 5.1	173
	Les positions relatives de deux droites dans $\mathbb{R}^2$ ou de trois plans dans $\mathbb{R}^3$	177
5.2.1	L'interprétation géométrique des systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues dans $\mathbb{R}^2$	178
5.2.2	L'interprétation géométrique des systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues dans $\mathbb{R}^3$	179
	Exercices 5.2	180
	Pour aller plus loin	181
5.3.1	Qu'est-ce que la programmation linéaire ?	182
5.3.2	L'unicité de la forme <i>ERL</i> d'une matrice	184
5.3.3	Le GPS et les équations linéaires	185

CHAPITRE 6 MATRICES 187

	Le langage matriciel	187
6.1.1	Les matrices : définitions et notations	188

6.1.2	Les matrices particulières	190
6.1.3	Les opérations sur les matrices	192
6.1.4	Le produit matriciel	194
6.1.5	Quelques interprétations du produit matriciel	197
	Exercices 6.1	204
	Les matrices élémentaires et les matrices inversibles	208
6.2.1	Les matrices élémentaires	208
6.2.2	Les matrices carrées inversibles	209
	Exercices 6.2	215
	Le déterminant d'une matrice carrée	217
6.3.1	Les déterminants $n \times n$: définition et propriétés intrinsèques	217
6.3.2	Les propriétés des déterminants relatives aux opérations sur les matrices	220
6.3.3	La méthode d'inversion par la matrice adjointe	222
	Exercices 6.3	225
	Économie et matrices : le modèle de Leontief	227
6.4.1	Un cas d'analyse intersectorielle	227
	Exercices 6.4	230
	Pour aller plus loin	231
6.5.1	L'associativité du produit matriciel	231
6.5.2	L'étude des matrices de transition	232
6.5.3	L'algorithme simplifié de PageRank	233
6.5.4	Quelques démonstrations pour les déterminants	237
	CHAPITRE 7 TRANSFORMATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}^2$	239
	Les transformations dans $\mathbb{R}^2$	240
7.1.1	Des définitions et des exemples	240
7.1.2	Les matrices et les transformations linéaires	246
7.1.3	Comment trouver la matrice d'une transformation linéaire	249
	Exercices 7.1	251
	Les homothéties, les rotations et les réflexions	254
7.2.1	Les étirements et les homothéties	254
7.2.2	Les rotations autour de l'origine	257
7.2.3	Les réflexions autour de droites passant par l'origine	259
7.2.4	Les matrices orthogonales	262
7.2.5	Le facteur de changement d'aire	263
	Exercices 7.2	265

D'autres transformations linéaires	268
7.3.1 Les cisaillements	268
7.3.2 Les projections	270
Exercices 7.3.	272
Les points fixes et les directions invariantes, les valeurs propres et les vecteurs propres	273
7.4.1 Les points fixes d'une transformation linéaire	274
7.4.2 Les directions invariantes ou les vecteurs propres	274
Exercices 7.4.	277
Pour aller plus loin.	278
7.5.1 Les transformations affines dans $\mathbb{R}^2$	278
7.5.2 Les rotations et les réflexions dans $\mathbb{R}^3$	280
CHAPITRE 8 NOMBRES COMPLEXES	285
L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes	286
8.1.1 Le produit complexe dans $\mathbb{R}^2$	286
8.1.2 La définition des nombres complexes	291
8.1.3 L'arithmétique complexe	292
Exercices 8.1.	294
Les puissances et les racines des nombres complexes	296
8.2.1 La notation polaire des nombres complexes	296
8.2.2 La formule de Moivre et la formule d'Euler	298
8.2.3 Les racines de nombres complexes	300
8.2.4 Les équations quadratiques à coefficients complexes	302
Exercices 8.2	303
Le théorème fondamental de l'algèbre	304
8.3.1 Le théorème fondamental	305
8.3.2 Les polynômes à coefficients réels	306
Exercices 8.3	307
Les transformations affines avec les nombres complexes	307
8.4.1 L'interprétation géométrique de la multiplication et de l'addition	308
8.4.2 L'interprétation géométrique de la conjugaison	310
Exercices 8.4	312
Pour aller plus loin.	313
8.5.1 Les formules de résolution par radicaux des équations algébriques de degrés 3 et 4	314
8.5.2 L'heuristique de la preuve du théorème fondamental de l'algèbre	314

8.5.3	Les nombres complexes animés	316
8.5.4	Les quaternions	317

CHAPITRE 9 INTRODUCTION À LA THÉORIE DES GROUPES 319

9.1	Les entiers modulo n	319
9.1.1	La congruence modulo n	319
9.1.2	L'arithmétique modulo n	320
	Exercices 9.1.	323
9.2	La structure de groupe	323
9.2.1	Les axiomes de la structure de groupe	323
9.2.2	Les sous-groupes d'un groupe	326
	Exercices 9.2.	327
9.3	Pour aller plus loin.	328
9.3.1	Des suggestions de lecture	328
9.3.2	Un critère d'inversibilité dans $\mathbb{Z}_n$ relativement à la multiplication modulo n	329

ANNEXE CONIQUES 331

A.1	Les équations canoniques des trois formes	331
A.1.1	Le type parabole	332
A.1.2	Le type ellipse	333
A.1.3	Le type hyperbole	335
A.2	L'équation générale d'une conique.	335
A.2.1	Le problème.	337
A.3	Forme quadratique	337
A.3.1	Le changement de variable	339
A.3.2	Diagonalisation	340
A.3.3	Rotation et translation de coniques.	343
	Exercices	345

CORRIGÉ 349

CORRIGÉ		
	Exercices 1.1	349
	Exercices 1.2	350
	Exercices 1.3	352

CHAPITRE 2

Exercices 2.1	354
Exercices 2.2	355

CHAPITRE 3

Exercices 3.1	356
Exercices 3.2	358

CHAPITRE 4

Exercices 4.1	359
Exercices 4.2	362
Questionnaire sur la perception spatiale	364

CHAPITRE 5

Exercices 5.1	364
Exercices 5.2	366

CHAPITRE 6

Exercices 6.1	366
Exercices 6.2	368
Exercices 6.3	369
Exercices 6.4	370

CHAPITRE 7

Exercices 7.1	371
Exercices 7.2	373
Exercices 7.3	376
Exercices 7.4	378

CHAPITRE 8

Exercices 8.1	380
Exercices 8.2	381
Exercices 8.3	382
Exercices 8.4	383

CHAPITRE 9

Exercices 9.1	384
Exercices 9.2	385

CHAPITRE 10

Exercices	387
-----------------	-----

POINTS ET VECTEURS

QUELQUES CONVENTIONS DE DESSIN

- LES POINTS, LES VECTEURS ET LES SCALAIRES DANS LES ESPACES EUCLIDIENS
 - LES COMPOSANTES DES VECTEURS
 - LES COORDONNÉES DES POINTS
 - POUR ALLER PLUS LOIN
-

En mathématiques, on considère les droites, les plans et l'espace tridimensionnel de la physique élémentaire comme des ensembles de points. Ce sont des **espaces vectoriels** en ce sens qu'on peut y décrire les relations entre les points, les droites et les plans ou, encore, les déplacements dans l'ensemble des points, à l'aide des **vecteurs**. Le mot *vecteur* vient du latin *vector* : « celui qui transporte » ; ce mot a été introduit en mathématique par William Rowan Hamilton en 1846. Un espace vectoriel dans lequel on peut de surcroît mesurer des angles et des longueurs s'appelle aussi un *espace euclidien*. La géométrie vectorielle, héritière de la géométrie euclidienne née il y a plus de 23 siècles, s'exprime aujourd'hui dans le langage des ensembles et se fonde sur un système d'énoncés de départ indépendants et cohérents qui lui est propre. De tels énoncés fondateurs sont appelés *axiomes* ou *postulats*. Dans ce premier chapitre, nous établirons le vocabulaire, les définitions et les propriétés qui régissent les points, les vecteurs et les nombres dans les espaces euclidiens. Ensuite, nous généraliserons ces notions dans une définition axiomatique plus générale.

QUELQUES CONVENTIONS DE DESSIN

Avant toute chose, établissons quelques conventions de dessin.

On dit qu'une image vaut mille mots, mais elle peut aussi valoir mille maux si elle est mal interprétée. Comme on aura très souvent à réaliser et à interpréter des dessins d'objets parfois bidimensionnels et parfois tridimensionnels, il est essentiel de convenir de certains codes et de certaines règles afin de réduire au minimum les ambiguïtés.

Sauf avis contraire, les représentations sur un plan (bidimensionnel) d'objets tridimensionnels seront des projections axonométriques (on dit aussi *cylindriques* ou *parallèles*), ce type de représentation étant le mieux adapté à la géométrie vectorielle, aux exemples et aux exercices que contient cet ouvrage.

Pour obtenir un dessin en **projection axonométrique** d'un objet tridimensionnel, on fait la projection de cet objet sur un plan (la feuille à dessin) à l'aide de rayons (des droites) parallèles, comme on le voit sur le plan horizontal (le plancher) dans la figure 1.1.

Dans une telle représentation, les droites qui sont parallèles dans l'objet tridimensionnel demeurent des droites parallèles (éventuellement confondues) dans le plan de projection. La figure 1.1 montre aussi une **projection centrale** du même objet sur un plan vertical ; dans ce cas, les rayons qui projettent l'objet sur ce plan (l'autre feuille à dessin) convergent vers un point central (ici, l'œil de l'observateur). Dans une projection centrale, les droites qui sont parallèles dans l'objet tridimensionnel ne sont plus forcément parallèles une fois projetées : c'est l'effet de perspective. Plus le centre de projection est éloigné de l'objet projeté, plus les rayons projetants ressemblent à des parallèles. On pourrait dire qu'une projection axonométrique est le cas limite d'une projection centrale dont le centre de projection serait situé à l'infini. Ainsi, l'ombre d'un objet projetée par le Soleil sur le sol est en pratique un dessin axonométrique, même s'il s'agit en fait d'une projection centrale, car le Soleil se trouve très loin des objets qu'il éclaire ; ce n'est pas le cas de l'ombre projetée par un lampadaire, car celui-ci n'est jamais très éloigné des objets qu'il éclaire. À la section 3.3, on présente une description détaillée d'un modèle vectoriel de la perspective centrale qui est à l'origine de l'infographie moderne.

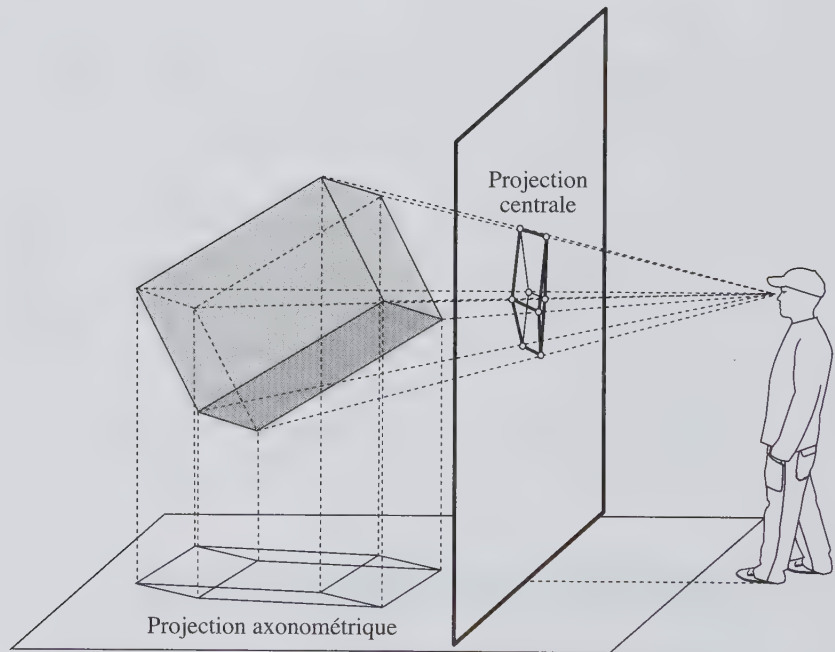


FIGURE 1.1 La projection centrale et la projection axonométrique.

Dans une projection, qu'elle soit axonométrique ou centrale, des **droites gauches**¹ dans l'espace peuvent être prises pour des sécantes sur un dessin. Pour limiter la confusion qui peut en résulter, on utilisera les codes illustrés à la figure 1.2 :

- en a), une vraie intersection est marquée par un point P ;
- en b) et en c), les droites L et D sont gauches dans l'espace ; leur représentation sur un dessin donne lieu à une fausse intersection, et un jeu de caches permet de voir quelle droite se trouve devant l'autre relativement à l'observateur ;

1. Deux droites de l'espace qui ne sont ni parallèles ni sécantes sont dites *gauches*.

- en *d*), les sécantes à angle droit en perspective sont représentées à l'aide d'un symbole d'angle droit au point de rencontre des deux droites ;
- en *e*), une figure tridimensionnelle est montrée en transparence.

Dans certains cas, on utilisera également la couleur ou des tons plus ou moins foncés, la face la plus pâle étant la plus près de l'observateur (voir la figure 1.3 *b*).

Les figures 1.2 à 1.4 montrent donc comment les codes graphiques peuvent changer l'interprétation des dessins.

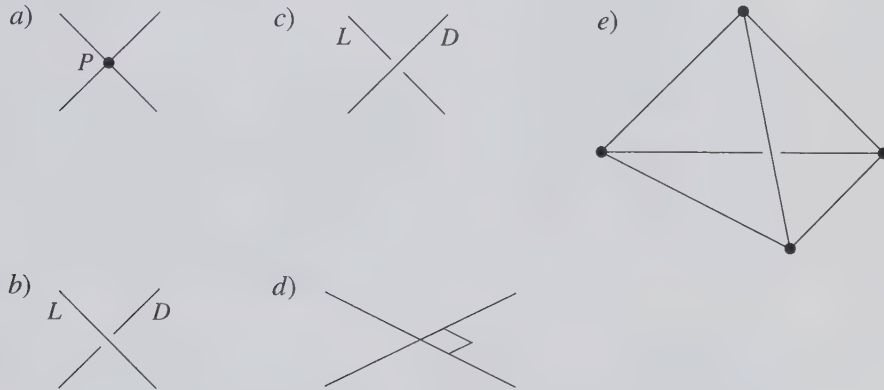


FIGURE 1.2 En *a*), des droites sécantes en *P* ; en *b*), des droites gauches *L* et *D*, *L* devant *D* ; en *c*), des droites gauches *L* et *D*, *D* devant *L* ; en *d*), des droites sécantes à angle droit en perspective ; en *e*), un tétraèdre (pyramide à base triangulaire) en transparence.

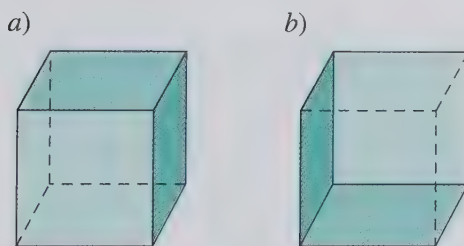


FIGURE 1.3 Un cube en transparence, selon deux perspectives axonométriques différentes.

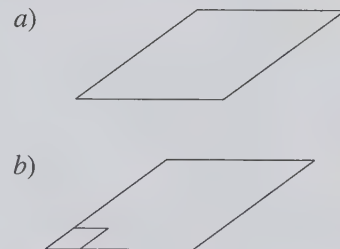


FIGURE 1.4 En *a*), un parallélogramme ; en *b*), un rectangle en perspective axonométrique.

LES POINTS, LES VECTEURS ET LES SCALAIRES DANS LES ESPACES EUCLIENS

Dans cette section, on précise le concept d'espace euclidien, puis on définit les concepts élémentaires de la géométrie vectorielle : on décrit ensuite les opérations sur les vecteurs et les propriétés de ces opérations.

1.1.1 LES ESPACES EUCLIDIENS

DEFINITION Espace euclidien

Une définition correcte d'un espace euclidien serait : espace vectoriel de dimension finie muni d'un **produit scalaire**. Cette définition est ici prématurée, car elle suppose définies les notions d'espace vectoriel, de **dimension** et de produit scalaire que l'on verra plus loin. Pour tout de suite, convenons qu'un espace euclidien est simplement un espace dans lequel on peut appliquer la géométrie vectorielle et la géométrie euclidienne, notamment pour les mesures des longueurs, des distances et des angles.

EXEMPLE 1

Le plan cartésien $\mathbb{R}^2$ constitué de tous les couples de nombres réels (x, y) est un espace euclidien. En effet, on peut y mesurer des longueurs et des distances grâce au théorème de Pythagore appliqué aux triangles rectangles, et ainsi mesurer les angles par les rapports trigonométriques. Il en va de même pour $\mathbb{R}^3$ constitué de tous les triplets (x, y, z) de nombres réels, dans lequel s'applique aussi le théorème de Pythagore. Plus généralement, l'espace $\mathbb{R}^n$ constitué de tous les n -uplets de nombres réels $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ est aussi un espace euclidien pour les mêmes raisons.

EXEMPLE 2

La surface d'une sphère n'est pas un espace euclidien, à cause de sa courbure. Par exemple, sur la surface sphérique de la Terre, en se déplaçant en ligne droite vers le pôle Nord à partir de deux points distincts sur l'équateur, on arrive à tracer un triangle qui a deux angles de 90° et un autre angle non nul au pôle. La somme de ces trois angles vaut donc plus de 180° (voir la figure 1.5). La géométrie de la surface de la sphère est non euclidienne. Le plus court chemin entre deux points sur la sphère n'est pas une droite au sens euclidien, mais plutôt un arc de grand cercle passant par ces deux points. Cependant, rien n'empêche la sphère d'habiter comme objet l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.

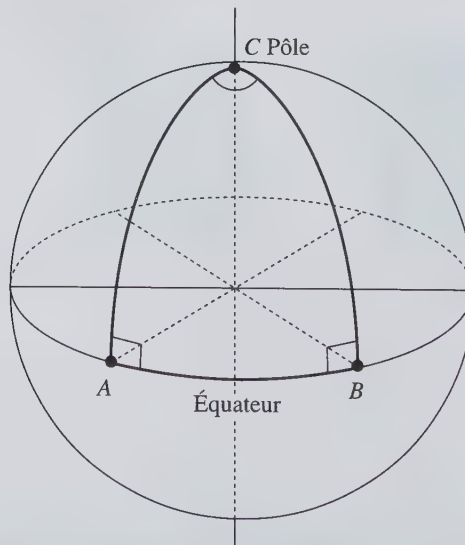


FIGURE 1.5 La somme des angles intérieurs d'un triangle peut dépasser 180° sur la surface de la sphère ; une sphère n'est pas un espace euclidien.

EXEMPLE 3

Les droites, les plans et l'espace tridimensionnel de la physique élémentaire sont des exemples d'espaces euclidiens qu'on peut identifier à $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement lorsqu'on les munit d'un système d'axes cartésiens.

1.1.2 LES POINTS, LES VECTEURS ET LES TRANSLATIONS

Soit $\mathcal{E}$, l'ensemble des **points** d'un espace euclidien, et T , une fonction de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. La fonction T est une **translation** si, pour toute paire de points (A, B) de $\mathcal{E}$, le segment orienté d'origine A et d'extrémité $T(A)$ est équipollent au segment orienté d'origine B et d'extrémité $T(B)$, c'est-à-dire si ces deux segments ont la même direction, le même sens et la même longueur; les points $A, B, T(A)$ et $T(B)$ correspondent alors aux quatre sommets d'un parallélogramme (voir la figure 1.6).

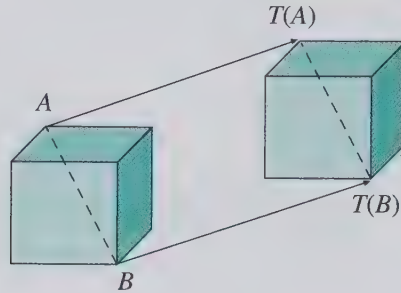


FIGURE 1.6 Une translation T dans un espace $\mathcal{E}$.

Comme on le voit dans la figure 1.6, on peut représenter une translation T par une flèche dont la longueur, le sens et la direction sont caractéristiques de T ; toutes les flèches qui ont la même direction, le même sens et la même longueur représentent la même translation T . On considère aussi comme une translation la fonction T qui ne déplace aucun point dans $\mathcal{E}$: $T(A) = A$ quel que soit A . On l'appelle la *translation nulle* et on l'imagine sous la forme d'une flèche de longueur nulle qui n'a ni sens ni direction². Dans un espace euclidien, un vecteur³ peut toujours être représenté par une translation.

Vecteur et vecteur nul

Dans un espace euclidien, un **vecteur** est la donnée simultanée d'une longueur, d'une direction et d'un sens; on peut imaginer un vecteur comme une translation.

Le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, est l'unique vecteur dont la longueur est nulle. Dans ce cas, le sens et la direction ne sont pas définis. Du point de vue des translations, on peut l'imaginer comme la représentation de l'absence de mouvement.

Symboliquement, les points d'un espace euclidien sont désignés par des lettres majuscules: P, A, B , etc.; les vecteurs sont désignés par des lettres minuscules surmontées d'une flèche: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, etc.; dans un dessin, un vecteur $\vec{v}$ est représenté par une flèche dont le sens, la direction et la longueur correspondent à ceux de $\vec{v}$; on peut représenter un vecteur par plusieurs flèches, pourvu que toutes ces flèches aient la même longueur, la même direction et le même sens.

2. Bien qu'une telle flèche ne puisse pas être tracée, elle constitue une abstraction essentielle qui nous sera très utile.

3. Dans une approche axiomatique, le terme *vecteur* serait primitif, c'est-à-dire non défini (voir la sous-section 1.4.2).

Lorsqu'une figure plane (un dessin) représente des points et des vecteurs de l'espace tridimensionnel, il faut faire attention aux effets de perspective et juger des directions, des angles, des longueurs et des distances selon le contexte spécifié. Ainsi, comme la figure 1.7 représente un cube, on peut affirmer que :

- les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{w}$, $\vec{s}$ et $\vec{t}$ sont tous de la même longueur ;
- la longueur de $\vec{v}$ est supérieure à celle de $\vec{u}$;
- $\vec{v}$ et $\vec{r}$ sont de la même longueur ;
- $\vec{u}$, $\vec{w}$ et $\vec{s}$ ont une même direction ;
- $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ont le même sens ;
- $\vec{s}$ et $\vec{w}$ sont de sens opposés ;
- $\vec{u} = \vec{w}$ (ces deux flèches représentent le même vecteur).

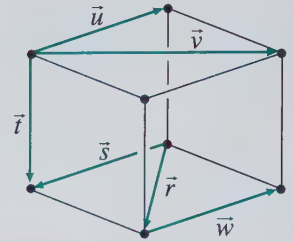


FIGURE 1.7 Un cube.

Égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ non nuls sont dits *égaux* s'ils ont :

- i) une même longueur,
- ii) une même direction,
- iii) un même sens.

Remarque

Tout vecteur de longueur nulle est égal au vecteur nul. En physique, on utilise parfois l'expression *grandeur vectorielle* comme synonyme de *vecteur* lorsqu'on parle des forces, des vitesses et d'autres quantités de la physique qui sont déterminées par une direction, un sens et une longueur (une intensité).

Notation

La longueur d'un vecteur $\vec{v}$ est notée $\|\vec{v}\|$; c'est un scalaire⁴ positif, sauf dans le cas du vecteur nul, le seul dont la longueur est nulle : $\|\vec{0}\| = 0$.

1.1.3 LES OPÉRATIONS SUR LES VECTEURS

Il y a deux opérations naturelles qu'on peut appliquer sur les vecteurs : on peut multiplier un vecteur par un scalaire et on peut additionner deux vecteurs. Ces opérations sont essentielles aux constructions de la géométrie vectorielle.

Produit (multiplication) d'un vecteur par un scalaire

Soit k , un **scalaire** (un nombre réel) non nul ($k \neq 0$), et $\vec{v}$, un vecteur. Le produit $k\vec{v}$ (voir la figure 1.8) est le vecteur dont :

- i) la longueur $\|k\vec{v}\|$ est donnée par $\|k\vec{v}\| = |k| \|\vec{v}\|$, c'est-à-dire le produit de la longueur de $\vec{v}$ par la valeur absolue de k ,
- ii) la direction est celle de $\vec{v}$,
- iii) le sens est celui de $\vec{v}$ si $k > 0$, et opposé à celui de $\vec{v}$ si $k < 0$. Si $k = 0$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$, alors $k\vec{v} = \vec{0}$.

4. Voir aussi la sous-section 2.1.1.

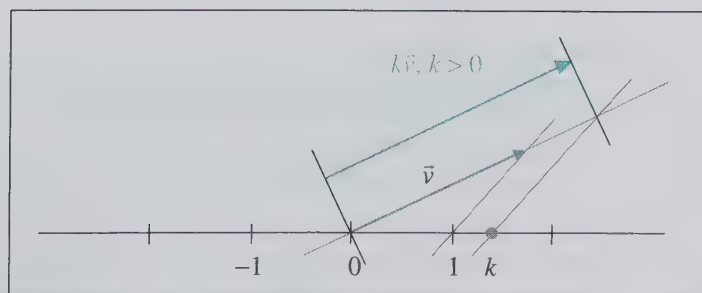
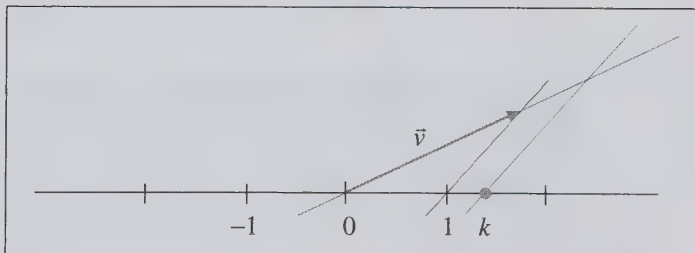
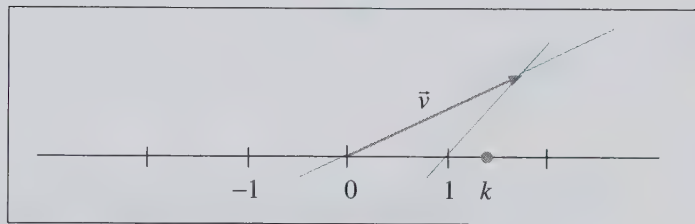
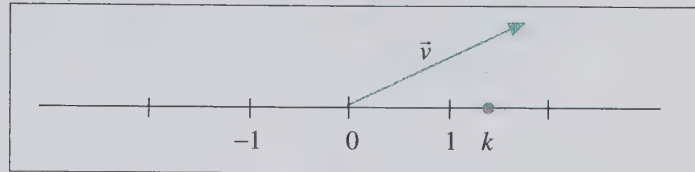
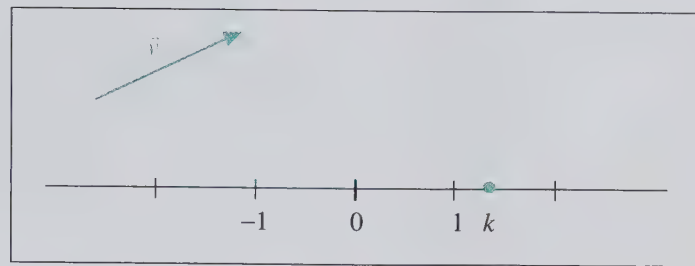


FIGURE 1.8 Le produit d'un vecteur par un scalaire, à la manière de Thalès de Milet (~625-545 av. notre ère).

Remarques

1. Le vecteur $(-1)\vec{v}$ s'écrit plus simplement $-\vec{v}$; son sens est opposé à celui de $\vec{v}$, si $\vec{v} \neq \vec{0}$; on l'appelle le vecteur opposé à $\vec{v}$.
2. On pose $\vec{v}k = k\vec{v}$.
3. On pose $\frac{\vec{v}}{k} = \frac{1}{k}\vec{v}$.

Comme on peut le voir dans la figure 1.8, lorsqu'on multiplie un vecteur par un scalaire k positif, on obtient un étirement de ce vecteur si $k > 1$; si $k < 1$, on obtient une compression du vecteur; si k est négatif, on obtient un étirement ou une compression du vecteur avec un changement de sens (voir la figure 1.9). On peut maintenant introduire la notion de parallélisme entre vecteurs.

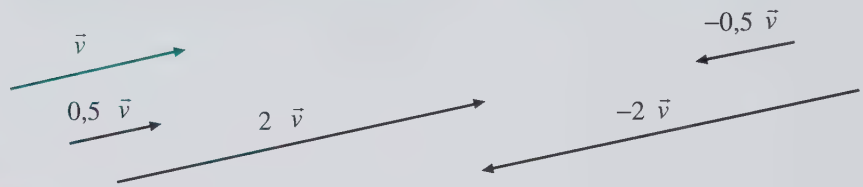


FIGURE 1.9 Étirements, compressions et changements de sens.

Vecteurs parallèles : $\vec{u} \parallel \vec{v}$

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour lesquels $\vec{u} = k\vec{v}$ sont dits **parallèles**. On écrit alors $\vec{u} \parallel \vec{v}$. On peut aussi dire dans ce cas que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.

Somme vectorielle $\vec{u} + \vec{v}$

Dans un espace euclidien, la **somme vectorielle** $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur correspondant à la translation obtenue par la composition des translations représentées par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (voir la figure 1.10). Pour le vecteur $\vec{0}$, on pose $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} = \vec{u} + \vec{0}$, quel que soit $\vec{u}$.

La figure 1.10 montre deux façons différentes d'obtenir la représentation graphique de $\vec{u} + \vec{v}$ à partir des flèches représentant $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Différence entre deux vecteurs

La différence $\vec{u} - \vec{v}$ est définie par $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ (voir la figure 1.11).

On peut retenir une image qui illustre simultanément la somme $\vec{u} + \vec{v}$ et la différence $\vec{u} - \vec{v}$; c'est ce qu'on appelle parfois la **loi du parallélogramme** (voir la figure 1.12).

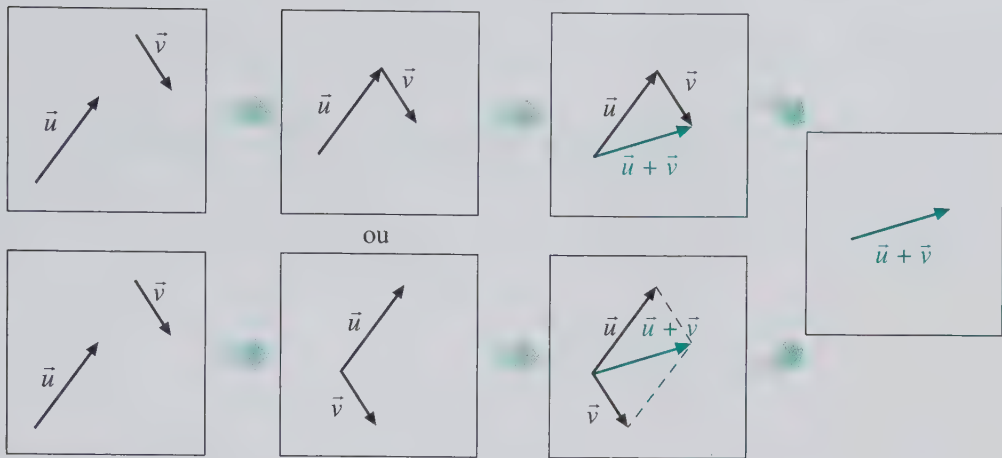
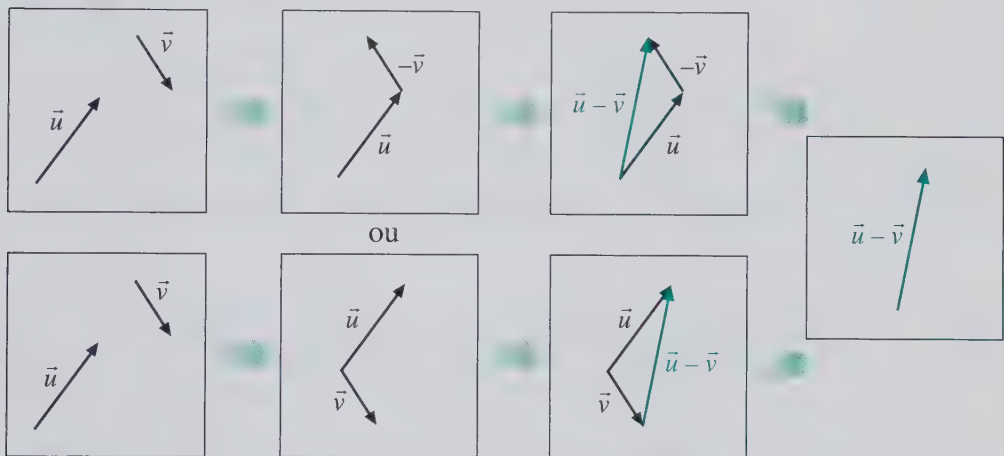
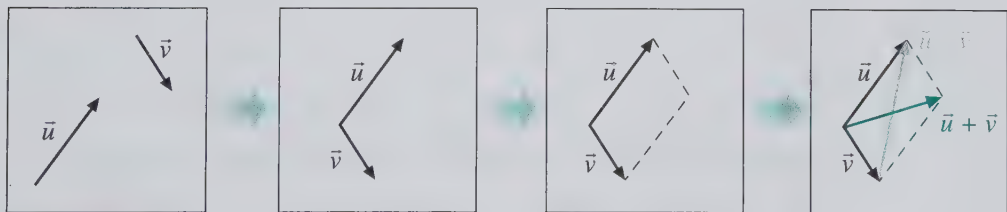
FIGURE 1.10 Deux constructions équivalentes de la somme $\vec{u} + \vec{v}$.FIGURE 1.11 Deux constructions équivalentes de la différence $\vec{u} - \vec{v}$.

FIGURE 1.12 La loi du parallélogramme.

1.1.4 LES PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS SUR LES VECTEURS

Dans les espaces euclidiens, les opérations sur les vecteurs ont des propriétés particulières qui seront très utiles pour simplifier ou résoudre les équations vectorielles. En théorie, on considère ces propriétés comme des **axiomes**. Ceux-ci définissent sur l'ensemble des vecteurs ce qu'on appelle une structure d'**espace vectoriel**. On se contentera ici d'énumérer ces propriétés et de donner, à titre d'exemple, une vérification visuelle de la deuxième propriété, soit l'associativité de l'addition vectorielle (voir la figure 1.13).

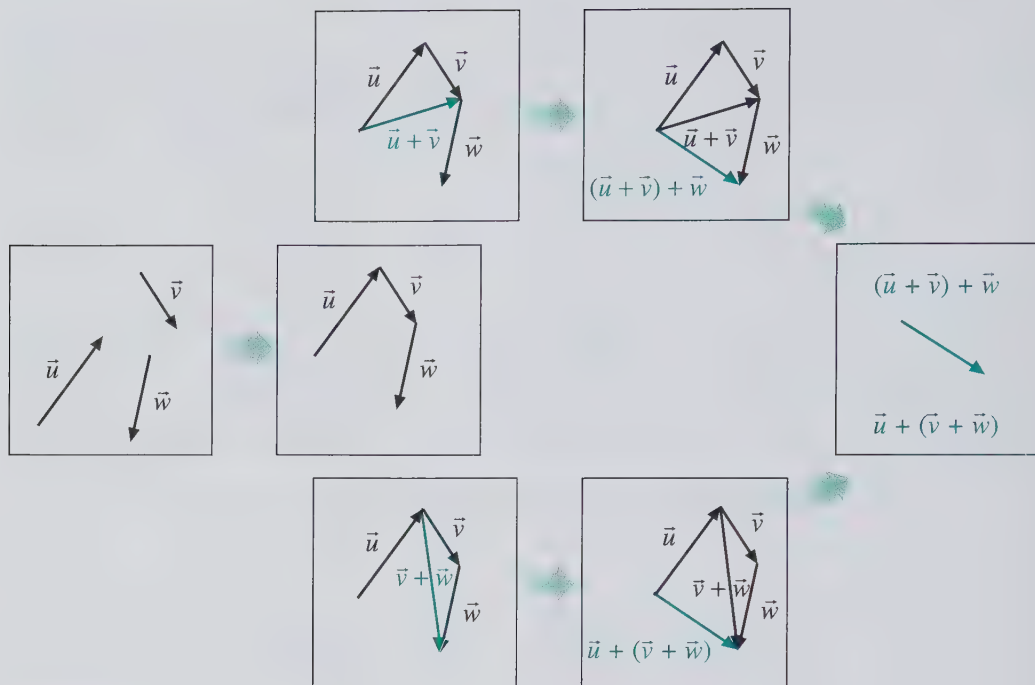


FIGURE 1.13 Une vérification visuelle de l'associativité de l'addition vectorielle.

Les propriétés des opérations sur les vecteurs

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, des vecteurs d'un espace euclidien, et k , r et s , des scalaires. Alors,

- V1** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; [L'addition vectorielle est **commutative**.]
- V2** $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$; [L'addition vectorielle est **associative**.]
- V3** $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$; [Le vecteur $\vec{0}$ est **neutre** dans l'addition vectorielle.]
- V4** $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$; [Le vecteur $-\vec{u}$ est **opposé** au vecteur $\vec{u}$.]
- V5** $1\vec{u} = \vec{u}$; [Le nombre 1 est neutre dans la multiplication par un scalaire.]
- V6** $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$; [La multiplication par un scalaire est distributive sur l'addition vectorielle.]
- V7** $(k + r)\vec{v} = k\vec{v} + r\vec{v}$; [La multiplication par un scalaire est distributive sur l'addition des scalaires.]
- V8** $(rs)\vec{u} = r(s\vec{u})$. [La multiplication par un scalaire est associative.]

1.1.5 OPÉRATION DES VECTEURS SUR LES POINTS

Dans un espace euclidien, les vecteurs, considérés comme des translations, agissent (ou opèrent) sur les points. Si la translation T correspondant à un vecteur donné déplace le point A sur le point B , on peut considérer qu'il y a une opération de nature géométrique entre

le point A et le vecteur dont le résultat est le point B . Cette opération est appelée l'*addition affine*, par opposition à l'addition vectorielle qui ne se fait qu'entre des vecteurs.

REMARQUE Addition affine $A + \vec{v}$

Pour tout point A et tout vecteur $\vec{v}$ d'un espace euclidien, l'**addition affine** $A + \vec{v}$ donne le point B obtenu en appliquant au point A la translation représentée par $\vec{v}$ (voir la figure 1.14). Le vecteur $\vec{v}$ peut alors s'écrire $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. On convient aussi que l'expression $A - \vec{v}$ désigne l'addition affine $A + (-\vec{v})$.

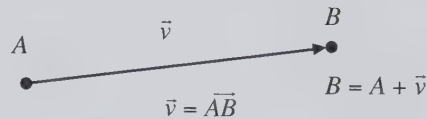


FIGURE 1.14

Remarque

On ne doit pas confondre le signe « $+$ » placé entre un point et un vecteur avec le signe « $+$ » placé entre deux vecteurs. Il ne s'agit pas de la même opération. Le fait d'utiliser le même symbole « $+$ » constitue un abus de notation dont il faut toujours être conscient. Il est à noter aussi que le signe « $+$ » entre deux points A et B n'a pour le moment aucun sens géométrique : l'expression $A + B$ ne désigne ni un point ni un vecteur ; elle n'est tout simplement pas définie pour l'instant.

En utilisant la notation $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ comme synonyme de $A + \vec{v} = B$, voici comment on écrit les règles qui régissent les relations entre les points et les vecteurs ; ces règles sont considérées comme des axiomes⁵ de la géométrie affine.

A1 Étant donné deux points A et B , il existe un et un seul vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

A2 Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, alors $B = C$.

A3 Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$, alors $A = C$.

A4 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

On peut remarquer que l'axiome A4 est équivalent à la **relation de Chasles**⁶ :

$$(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v}).$$

De ces quatre règles et des propriétés des opérations sur les vecteurs, on peut déduire les trois règles supplémentaires suivantes⁷ :

A5 $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (ou, encore, $A + \vec{0} = A$).

A6 $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

A7 Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (voir la figure 1.15).

5. Voir la sous-section 1.4.2 pour plus de détails.

6. Michel Chasles (1793-1880).

7. Les démonstrations des règles A5, A6 et A7 à partir des autres règles et des propriétés des opérations vectorielles font l'objet de l'exercice 7 de la section *Exercices 1.1*.

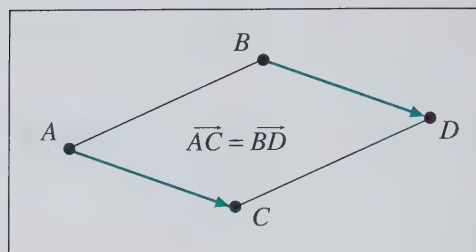
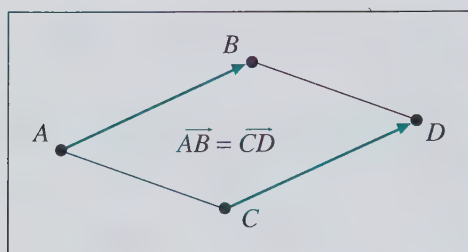
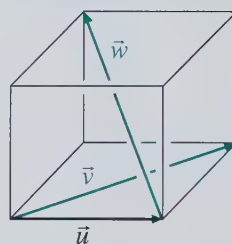


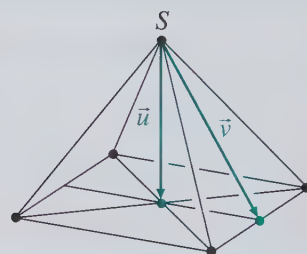
FIGURE 1.15 Si $\vec{AB} = \vec{CD}$, alors $\vec{AC} = \vec{BD}$.

EXERCICES 1.1

1. Dans le cube ci-contre, on donne $\|\vec{u}\| = 1$. À l'aide de projections sur des plans appropriés, et en invoquant le théorème de Pythagore, calculez les longueurs des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

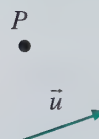


2. La pyramide ci-contre est constituée d'une base carrée et de quatre triangles équilatéraux qui se rencontrent au sommet S ; toutes les arêtes de la pyramide mesurent une unité de longueur. Calculez les longueurs des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui relient le sommet S respectivement au milieu de la base carrée et au milieu d'un côté de la base.



3. Reproduisez le point P et le vecteur $\vec{u}$ illustrés ci-contre, et situez :

- a) un point P_1 tel que $\vec{PP_1} = \vec{u}$;
- b) un point P_2 tel que $\vec{P_2P} = \vec{u}$;
- c) un point P_3 tel que $\|\vec{PP_3}\| = \|\vec{u}\|$, mais $\vec{PP_3} \neq \vec{u}$ et $\vec{P_3P} \neq \vec{u}$;
- d) un point P_4 tel que $\vec{PP_4} = \vec{P_4P}$.



4. Dans la figure de l'exercice 3, on suppose que $\|\vec{u}\| = 1$. Décrivez le lieu (l'ensemble) des points Q pour lesquels :

- | | |
|--|--|
| a) $\ \overrightarrow{PQ}\ = 2$; | d) $\overrightarrow{PQ}$ a la même direction et le même sens que $\vec{u}$; |
| b) $2 \leq \ \overrightarrow{PQ}\ \leq 4$; | e) $\overrightarrow{PQ}$ a la même direction et la même longueur que $\vec{u}$; |
| c) $\overrightarrow{PQ}$ a la même direction que $\vec{u}$; | f) $\ \overrightarrow{PQ}\ \leq \ \vec{u}\ $. |

5. Étant donné un point A d'un espace $\mathcal{E}$, décrivez et illustrez le lieu de tous les points P de $\mathcal{E}$ tels que $\|\overrightarrow{AP}\| = 3$, lorsque :

- | | | |
|----------------------------------|-------------------------------|--|
| a) $\mathcal{E}$ est une droite; | b) $\mathcal{E}$ est un plan; | c) $\mathcal{E}$ est l'espace tridimensionnel. |
|----------------------------------|-------------------------------|--|

6. Soit deux points distincts A et B dans l'espace tridimensionnel. Trouvez tous les points P pour lesquels :

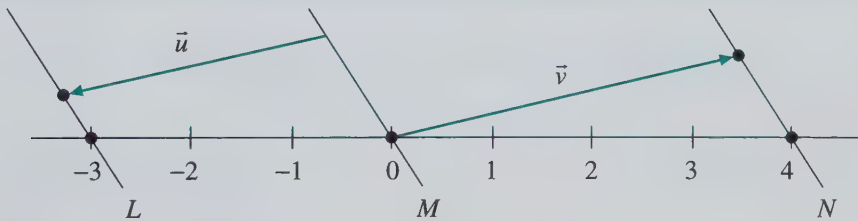
- | | |
|--|--|
| a) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$; | b) $\ \overrightarrow{AP}\ = \ \overrightarrow{PB}\ $. |
|--|--|

7. Démontrez les trois égalités suivantes à partir de la définition de l'addition affine et des règles axiomatiques A1 à A4 données à la sous-section 1.1.5 :

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (ou, encore, $A + \vec{0} = A$); | b) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$; | c) si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. |
|--|---|---|

8. Soit $\vec{v}$, un vecteur non nul. Quelle est la valeur du scalaire k pour laquelle $\vec{v}/k$ est un vecteur unitaire (de longueur 1) ?

9. Dans la figure suivante, les droites L , M et N sont parallèles et $\vec{u} = t\vec{v}$. Quelle est la valeur du nombre t ?

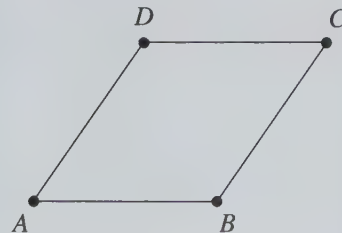


10. L'égalité $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ est-elle équivalente à l'égalité $\vec{u} = \pm \vec{v}$ si l'espace considéré est :

- | | | |
|-----------------|--------------|-------------------------------|
| a) une droite ? | b) un plan ? | c) l'espace tridimensionnel ? |
|-----------------|--------------|-------------------------------|

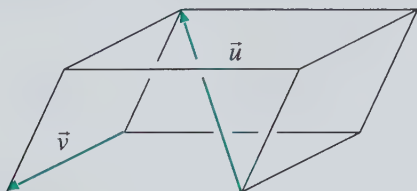
11. En vous reportant au parallélogramme ci-dessous, dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

- | | |
|--|---|
| a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ | d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AB}$ |
| b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB}$ | e) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AD}$ |
| c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$ | |

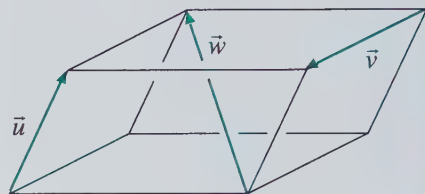


12. Reproduisez chacun des parallélépipèdes illustrés et tracez une flèche représentant exactement le résultat de l'opération demandée. (Note : On dit aussi *parallélépipède*. Dans un parallélépipède, les faces opposées sont des parallélogrammes congrus (2 à 2).)

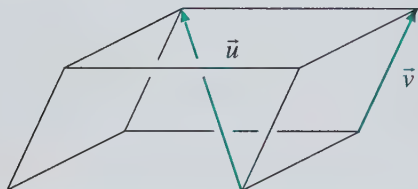
a) $\vec{u} + \vec{v}$



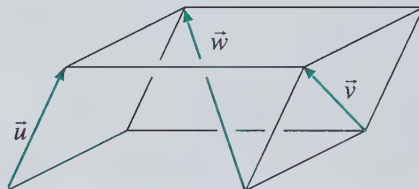
c) $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$



b) $\vec{v} - \vec{u}$



d) $-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$



13. En vous reportant au parallélépipède, dites si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

a) $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{DR}$

f) $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DR} = \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{SB} = \vec{0}$

g) $\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{DC}$

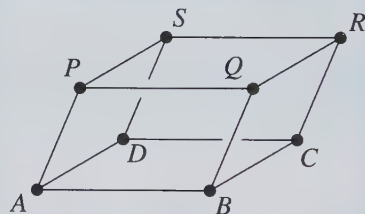
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{PR}$

h) $\overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{SD} = \vec{0}$

d) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DS} = \overrightarrow{CP}$

i) $0,5(\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{AB}$

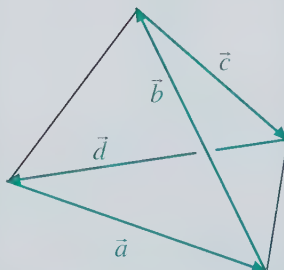
e) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DS} = \overrightarrow{PC}$



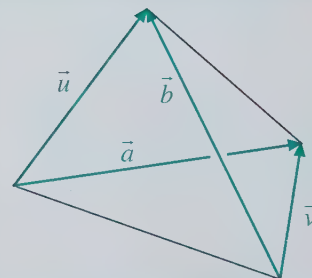
14. Déterminez la somme

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

dans le tétraèdre ci-contre.

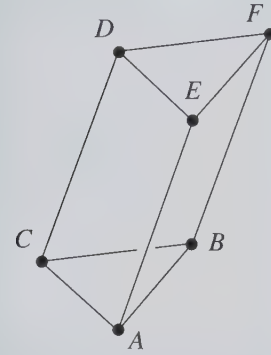


15. Vrai ou faux. Pour tout tétraèdre comme celui illustré ci-contre, l'égalité $\vec{u} + \vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ est toujours vraie.



16. Dans le prisme triangulaire ci-contre, on a $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$.
Lequel des vecteurs suivants représente alors la différence $\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{EB}$?

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $\overrightarrow{BD}$ | e) $\overrightarrow{FB}$ |
| b) $\overrightarrow{DB}$ | f) $\overrightarrow{AB}$ |
| c) $\overrightarrow{EF}$ | g) $\overrightarrow{EB}$ |
| d) $\overrightarrow{CE}$ | h) $\overrightarrow{FA}$ |



17. Dessinez dans un plan des flèches représentant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

- a) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$; b) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \neq 0$; c) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{v}\|, \vec{u} \neq \vec{0}$.

LES COMPOSANTES DES VECTEURS

Dans cette section, on définit les **composantes** d'un vecteur selon une **base** à partir du concept de combinaison linéaire. Les opérations géométriques sur les vecteurs, comme la multiplication par un scalaire et la somme vectorielle, deviennent ainsi des opérations arithmétiques, ou algébriques, sur les composantes des vecteurs. On précise également, à la section 1.2.3, le concept de dimension d'un espace vectoriel.

1.2.1 LES COMBINAISONS LINÉAIRES DE VECTEURS

La première utilité des vecteurs, considérés comme des translations, est de faciliter la description des déplacements d'un point à un autre dans l'espace. Par exemple, imaginez que la figure 1.16 est un quadrillage de rues et d'avenues, et que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, parallèles respectivement aux rues et aux avenues, servent de direction de référence pour décrire tout déplacement. Ainsi, pour se rendre du point A au point B, il faut faire une translation qui est la combinaison des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ représentée par $2\vec{u} + \vec{v}$. Cela signifie que $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u} + \vec{v}$ ou, encore, que « l'adresse » du point B, en partant du point A, est donnée par $B = A + (2\vec{u} + \vec{v})$. Vérifiez les égalités suivantes dans la figure 1.16.

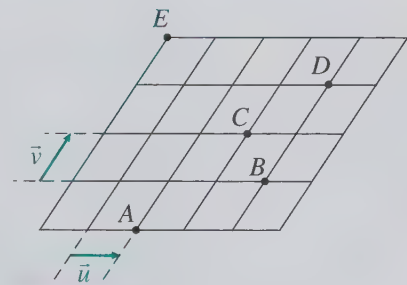


FIGURE 1.16

$$\overrightarrow{BC} = -\vec{u} + \vec{v}$$

$$\overrightarrow{BD} = 0\vec{u} + 2\vec{v}$$

$$A = D - 2\vec{u} - 3\vec{v}$$

$$\overrightarrow{AE} = -2\vec{u} + 4\vec{v}$$

Lorsqu'on écrit $\overrightarrow{AE} = -2\vec{u} + 4\vec{v}$, on dit que le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est exprimé comme une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et que -2 et 4 sont les **coefficients** de cette combinaison. Voici une définition qui généralise cette situation.

Combinaison linéaire

Si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sont des nombres réels et si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$ sont des vecteurs d'un même espace, alors le vecteur

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 + \dots + a_n\vec{v}_n$$

est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n$; les nombres $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sont les **coefficients** de cette combinaison.

1.2.2 LA DÉPENDANCE ET L'INDÉPENDANCE LINÉAIRES

Dans l'exemple de la sous-section précédente (voir la figure 1.16), il était essentiel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnant l'orientation des rues et des avenues ne soient pas parallèles. Autrement, il aurait été impossible d'exprimer tous les vecteurs de ce quadrillage comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls qui ne sont pas parallèles sont appelés **linéairement indépendants**: dans ce cas, $\vec{u} \neq k\vec{v}$. Par contre, si $\vec{u} = k\vec{v}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **linéairement dépendants** (voir la figure 1.17).

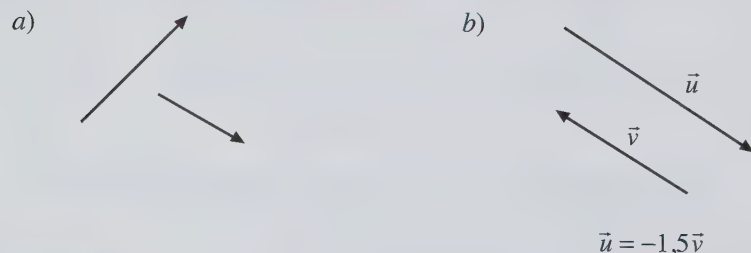


FIGURE 1.17 En a), deux vecteurs linéairement indépendants; en b), deux vecteurs linéairement dépendants (dans un plan).

On peut généraliser les concepts de dépendance linéaire et d'indépendance linéaire à un nombre arbitraire de vecteurs dans tout espace vectoriel avec la définition suivante.

Dépendance linéaire et indépendance linéaire

Un ensemble de vecteurs $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, où $n \geq 2$, est dit *linéairement indépendant* ou, encore, les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ sont dits *linéairement indépendants* si aucun des vecteurs de cet ensemble n'est une combinaison linéaire des autres; si l'un d'entre eux est une combinaison linéaire des autres, alors l'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ est dit *linéairement dépendant* ou, encore, les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ sont dits *linéairement dépendants*.

Tout ensemble $\{\vec{u}\}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ est considéré comme indépendant; l'ensemble $\{\vec{0}\}$ est considéré comme linéairement dépendant.

Le parallépipède illustré dans la figure 1.18 nous fait voir un cas d'indépendance et un cas de dépendance pour trois vecteurs de l'espace tridimensionnel.

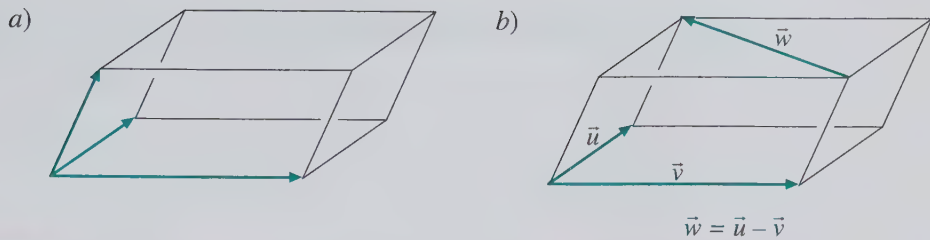


FIGURE 1.18 En a), trois vecteurs linéairement indépendants ; en b), trois vecteurs linéairement dépendants.

La prochaine définition et la prochaine proposition visent à éclairer le concept algébrique de dépendance (ou d'indépendance) linéaire d'un point de vue géométrique dans un espace unidimensionnel, bidimensionnel ou tridimensionnel.

Vecteurs colinéaires et vecteurs coplanaires

Des vecteurs dont les flèches représentatives sont situées sur une même droite quand elles sont issues d'une même origine sont dits **colinéaires** (voir la figure 1.19). Le vecteur nul, même s'il n'a aucune flèche représentative, est considéré comme colinéaire avec tous les vecteurs.

Des vecteurs dont les flèches représentatives sont situées dans un même plan quand elles sont issues d'une même origine sont dits **coplanaires** (voir la figure 1.19). Le vecteur nul, même s'il n'a aucune flèche représentative, est considéré comme coplanaire avec toute paire de vecteurs.

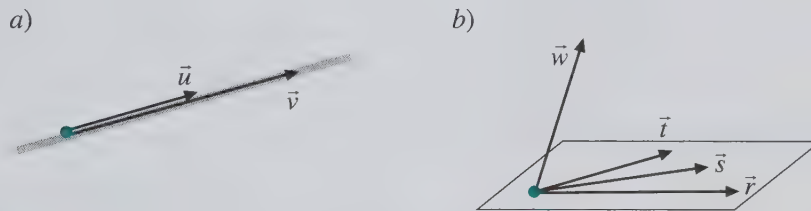


FIGURE 1.19 En a), $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ; en b), $\vec{r}$, $\vec{s}$ et $\vec{t}$ sont coplanaires, mais pas $\vec{w}$, $\vec{r}$ et $\vec{s}$.

Remarques

1. Des vecteurs colinéaires dans l'espace tridimensionnel sont nécessairement coplanaires ; cependant, des vecteurs coplanaires ne sont généralement pas colinéaires.
2. Pour deux vecteurs non nuls, colinéarité et parallélisme sont équivalents. Ce sont simplement deux façons différentes d'imaginer les flèches représentatives de ces vecteurs.
3. Deux vecteurs sont toujours coplanaires.
4. Rappelons que les vecteurs ne sont pas **localisés**. Dire de trois vecteurs qu'ils sont coplanaires ne signifie pas qu'ils sont eux-mêmes situés dans un même plan, mais bien qu'ils peuvent être représentés fidèlement (direction, sens et longueur conservés) par des flèches situées dans un même plan.

- i) Pour que deux vecteurs soient linéairement dépendants, il faut et il suffit qu'ils soient colinéaires.
- ii) Pour que trois vecteurs soient linéairement dépendants, il faut et il suffit qu'ils soient coplanaires.

Démonstration

- i) Si l'un des vecteurs est nul, il n'y a rien à démontrer. Supposons que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants. Alors $\vec{u} = k\vec{v}$, avec $k \neq 0$, ce qui signifie que $\vec{u} \parallel \vec{v}$ ou, encore, que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Par ailleurs, si l'on suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \parallel \vec{v}$ et $\vec{u} = k\vec{v}$, avec $k \neq 0$, ce qui signifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants.

- ii) Si l'un des vecteurs est nul, il n'y a rien à démontrer. Supposons que trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants. Alors, l'un est une combinaison linéaire des deux autres, par exemple $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Par définition de la somme vectorielle, on peut représenter les vecteurs $a\vec{u}$, $b\vec{v}$ et leur somme $\vec{w}$ par les trois côtés d'un même triangle qui est nécessairement une figure plane. De plus, $\vec{u}$ et $a\vec{u}$ étant colinéaires de même que $\vec{v}$ et $b\vec{v}$, il s'ensuit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Par ailleurs, si l'on suppose que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires et non nuls, alors il se peut que deux d'entre eux soient colinéaires, par exemple $\vec{u}$ et $\vec{v}$, auquel cas les trois vecteurs sont forcément linéairement dépendants puisque $\vec{u} = k\vec{v}$ avec $k \neq 0$. Dans les autres cas, les trois vecteurs ont trois directions différentes, ce qui permet, comme on le voit dans la figure 1.20, de tracer un parallélogramme (dans le plan contenant les flèches représentatives de ces vecteurs) dont l'un des côtés est $a\vec{u}$ (pour un certain a non nul) un autre, adjacent, est $b\vec{v}$ (pour un certain b non nul), et dont la diagonale est $\vec{w}$. Cela montre que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ et donc que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

La proposition suivante donne un critère purement algébrique pour déterminer si des vecteurs sont linéairement dépendants ou indépendants.

Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$, n vecteurs d'un même espace, $n \geq 2$. Les deux énoncés suivants sont alors équivalents.

- i) Les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$, sont linéairement dépendants.
- ii) Le vecteur nul peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ avec des coefficients non tous nuls, c'est-à-dire $\vec{0} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_n\vec{u}_n$, avec $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \neq 0$.

Démonstration

Montrons que l'énoncé i) implique l'énoncé ii). Supposons qu'un des vecteurs, par exemple $\vec{u}_1$, est une combinaison linéaire des autres vecteurs : $\vec{u}_1 = a_2\vec{u}_2 + \dots + a_n\vec{u}_n$. En retranchant $\vec{u}_1$ de chaque membre de cette égalité, on obtient $\vec{0} = -\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_n\vec{u}_n$, où au moins un coefficient, à savoir celui de $\vec{u}_1$, qui vaut -1 , est non nul.

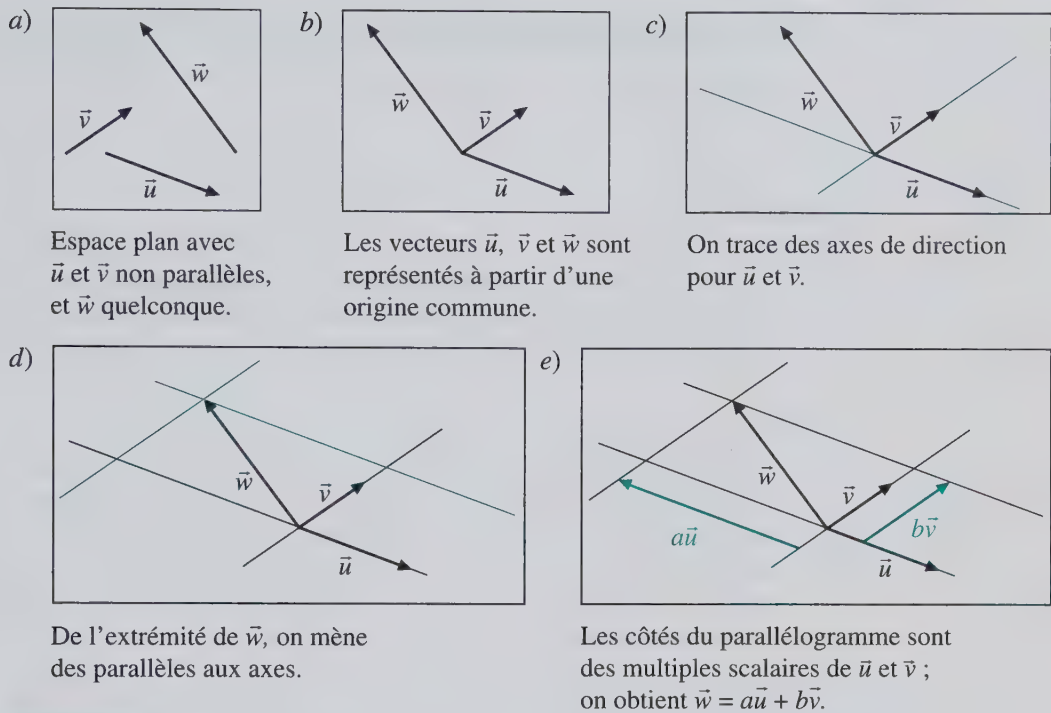


FIGURE 1.20 Dans un plan, deux vecteurs non nuls et non parallèles forment une base.

Montrons maintenant que l'énoncé ii) implique l'énoncé i). La condition $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \neq 0$ signifie qu'au moins un des coefficients a_i est non nul. Supposons par exemple $a_1 \neq 0$. On obtient alors $-a_1\vec{u}_1 = a_2\vec{u}_2 + \dots + a_n\vec{u}_n$, puis, en divisant par $-a_1$, qui est non nul, on obtient $\vec{u}_1$ comme une combinaison linéaire des autres vecteurs : $\vec{u}_1 = \frac{a_2}{-a_1}\vec{u}_2 + \dots + \frac{a_n}{-a_1}\vec{u}_n$.

1.2.3 UNE BASE D'UN ESPACE

Pour pouvoir exprimer chaque vecteur d'un espace comme une combinaison linéaire de quelques vecteurs de référence, il faut d'abord choisir ces derniers de manière à ce qu'ils forment une **base** de cet espace. Voici donc quelques définitions relatives au concept de base.

DEFINITION Famille libre de vecteurs d'un espace $\mathcal{E}$

Une **famille libre** d'un espace $\mathcal{E}$ est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants de $\mathcal{E}$.

Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul quelconque, l'ensemble $\{\vec{u}\}$ ayant $\vec{u}$ pour seul élément constitue une famille libre.

DEFINITION Famille génératrice d'un espace $\mathcal{E}$

Une **famille génératrice** d'un espace $\mathcal{E}$ est un ensemble de vecteurs de $\mathcal{E}$ tel que tout vecteur de $\mathcal{E}$ peut s'obtenir comme une combinaison linéaire des vecteurs de cet ensemble.

Base d'un espace $\mathcal{E}$

Une **base** d'un espace $\mathcal{E}$ est un ensemble de vecteurs de $\mathcal{E}$ qui est à la fois une famille libre et une famille génératrice de $\mathcal{E}$.

EXEMPLE 1 (DANS UN PLAN)

Dans un espace plan, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et non parallèles constituent une base. D'une part, ces vecteurs constituent une famille libre (ils sont linéairement indépendants) et, d'autre part, ils constituent une famille génératrice, car tout vecteur $\vec{w}$ de ce plan peut s'écrire comme une combinaison linéaire de ces deux vecteurs, comme le montre la construction de la figure 1.20 (voir la page 19).

EXEMPLE 2 (DANS L'ESPACE TRIDIMENSIONNEL)

Dans la figure 1.21, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne forment pas une base de l'espace tridimensionnel, car ils ne forment pas une famille génératrice ; par ailleurs, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace, car ils sont linéairement indépendants, et tout vecteur de l'espace peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$, de $\vec{v}$ et de $\vec{w}$. En effet, on peut tracer tout vecteur $\vec{r}$ de l'espace à partir d'une origine commune à $\vec{u}$, à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$ et, en imitant le procédé décrit à la figure 1.20 avec des plans plutôt que des droites, on construit un parallélépipède dans lequel $\vec{r} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

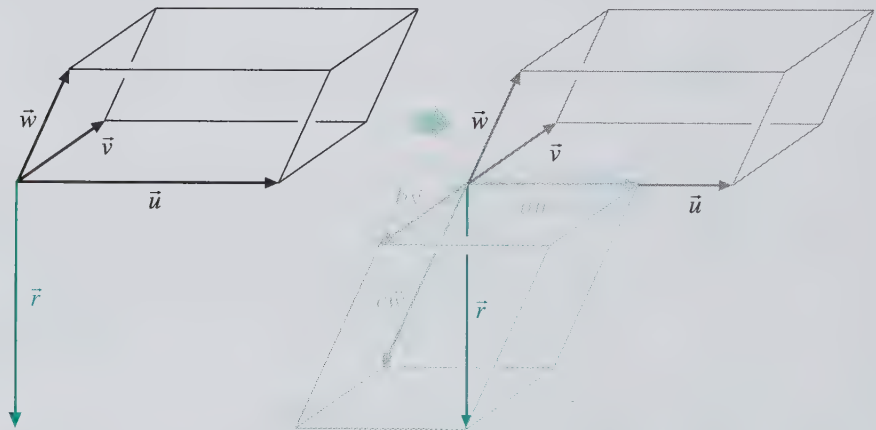


FIGURE 1.21 Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace tridimensionnel ; $\vec{r} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Espace de dimension finie

Un espace vectoriel de dimension finie est un espace qui possède au moins une base constituée d'un nombre fini de vecteurs.

Les exemples 1 et 2 précédents permettent d'anticiper que les espaces euclidiens $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ..., $\mathbb{R}^n$ dans lesquels on peut mener des parallèles aux axes et aux plans de coordonnées sont de dimension finie. De plus, on constate, visuellement ou géométriquement, que dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, toutes les bases sont nécessairement composées respectivement de 1, 2 et 3 vecteurs, ce qui coïncide avec la **dimension** de chacun de ces espaces. Le prochain théorème répond à la question générale suivante : Se pourrait-il que, dans un même espace de dimension finie, on trouve deux bases qui ne contiennent pas le même nombre de vecteurs ? La réponse négative à cette question permettra ensuite de préciser et de donner un sens algébrique au concept de **dimension** d'un espace vectoriel.

Dans un espace donné de dimension finie toutes les bases contiennent le même nombre de vecteurs.

Les lecteurs trouveront une démonstration complète de ce théorème dans la section « Pour aller plus loin » aux pages 41 à 43.

Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

La dimension d'un espace vectoriel de dimension finie est le nombre n de vecteurs dont est constituée toute base de cet espace.

Par exemple, $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, car toute base y est constituée de deux vecteurs non nuls et non parallèles. De même, $\mathbb{R}^n$ est de dimension n , car les n vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ qui relient l'origine $(0, 0, \dots, 0)$ respectivement aux points $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $(0, 0, \dots, 0, 1)$, constituent une base de $\mathbb{R}^n$.

La proposition suivante est une conséquence directe du théorème précédent.

Dans un espace vectoriel de dimension n , toute famille, ou tout ensemble, formée de m vecteurs est :

- i) non génératrice si $m < n$,
- ii) une base si $m = n$ et si les vecteurs sont indépendants,
- iii) non libre si $m > n$.

Base ordonnée

Une base ordonnée d'un espace est une suite ordonnée $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \rangle$ de vecteurs qui forment une base de cet espace.

Par exemple, dans un espace bidimensionnel (un plan), toute base non ordonnée $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ donne lieu à deux bases ordonnées : $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ et $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$; dans l'espace tridimensionnel, toute base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ donne lieu à six bases ordonnées différentes. Voici maintenant une définition d'une grande importance qui permettra ensuite de simplifier considérablement la géométrie vectorielle.

Composantes d'un vecteur selon une base ordonnée

Soit $\mathcal{B} = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \rangle$ une base ordonnée d'un espace $\mathcal{E}$, et $\vec{v}$, un vecteur de cet espace. Les **composantes** de $\vec{v}$ selon $\mathcal{B}$ sont les coefficients $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, pris dans l'ordre, de la combinaison linéaire

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n.$$

On écrit alors

$$\vec{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n)_{\mathcal{B}}$$

ou, si le contexte permet d'éviter toute confusion sur le choix de la base,

$$\vec{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n);$$

de plus, a_i est appelé **composante de $\vec{v}$ dans la direction $\vec{v}_i$** (pour $i = 1, 2, \dots, n$).

EXEMPLE 1 (DANS UN PLAN)

Il y a plusieurs façons d'écrire le vecteur $\vec{r}$ de la figure 1.22, selon la base $\mathcal{B}$ choisie :

$$\vec{r} = \left(2, \frac{3}{2}\right) \text{ si } \mathcal{B} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle,$$

$$\vec{r} = \left(\frac{3}{2}, 2\right) \text{ si } \mathcal{B} = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle,$$

$$\vec{r} = (5, -3) \text{ si } \mathcal{B} = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle,$$

$$\vec{r} = \left(\frac{5}{2}, 2\right) \text{ si } \mathcal{B} = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$

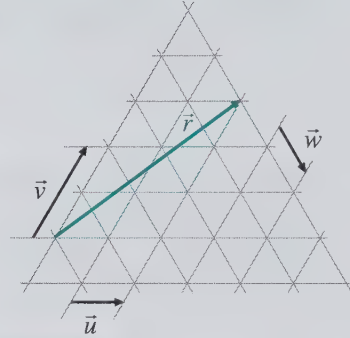


FIGURE 1.22

EXEMPLE 2 (DANS L'ESPACE TRIDIMENSIONNEL)

Dans la figure 1.23, on donne les composantes de différents vecteurs dans la base $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$:

$$\vec{r} = (-1, 1, 1); \vec{s} = (0, 1, -1); \vec{w} = (0, 0, 1).$$

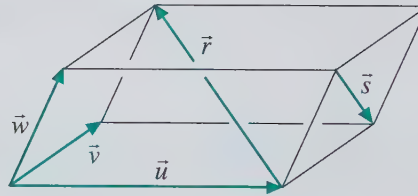


FIGURE 1.23

On voit facilement qu'un même vecteur peut s'écrire de façons différentes dans des bases ordonnées différentes (voir la figure 1.22); cependant, se peut-il qu'un même vecteur s'écrive de deux façons différentes dans une même base ordonnée? Heureusement, c'est impossible, comme l'affirme le théorème suivant.

1.1.3 Théorème

Les composantes d'un vecteur dans une base ordonnée sont uniques.

Preuve

Supposons que $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ sont deux façons d'écrire le même vecteur $\vec{v}$ dans une même base $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \rangle$ d'un espace de dimension n ; on aura alors

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n \quad \text{et} \quad \vec{v} = b_1 \vec{v}_1 + b_2 \vec{v}_2 + \dots + b_n \vec{v}_n,$$

ce qui donnera

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n = b_1 \vec{v}_1 + b_2 \vec{v}_2 + \dots + b_n \vec{v}_n,$$

et par suite

$$\vec{0} = (b_1 - a_1)\vec{v}_1 + (b_2 - a_2)\vec{v}_2 + \cdots + (b_n - a_n)\vec{v}_n.$$

Cette dernière égalité donne le vecteur nul comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$; cela n'est possible que si tous les coefficients de cette combinaison sont nuls, car les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ sont linéairement indépendants. On obtient donc

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n,$$

ce qui montre qu'il n'y a qu'une façon d'écrire $\vec{v}$.

Comme conséquence immédiate de ce théorème, on obtient un critère purement algébrique (ou numérique) pour décider de l'égalité de deux vecteurs.

Soit $\vec{u} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $\vec{v} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, deux vecteurs écrits dans la même base.

Alors, $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, \text{et } a_n = b_n$.

Il reste une autre question à laquelle nous pouvons répondre maintenant : Les opérations sur les vecteurs (la multiplication par un scalaire et la somme vectorielle) peuvent-elles se faire directement (arithmétiquement) sur les composantes des vecteurs ? La réponse est oui et voici comment.

Les opérations sur les composantes

Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, deux vecteurs écrits dans une même base $\mathcal{B}$.

Alors,

$$i) k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n) \text{ pour tout scalaire } k$$

et

$$ii) (a_1, a_2, \dots, a_n) \pm (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \dots, a_n \pm b_n).$$

Preuve

$$\begin{aligned} i) k(a_1, a_2, \dots, a_n) &= k(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n) && [\text{En supposant que } \mathcal{B} = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \rangle] \\ &= ka_1\vec{v}_1 + ka_2\vec{v}_2 + \cdots + ka_n\vec{v}_n && [\text{Distributivité et associativité de la multiplication par un scalaire}] \\ &= (ka_1, ka_2, \dots, ka_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ii) \quad & (a_1, a_2, \dots, a_n) \pm (b_1, b_2, \dots, b_n) \\
&= (a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n) \pm (b_1 \vec{v}_1 + b_2 \vec{v}_2 + \dots + b_n \vec{v}_n) \quad [\text{En supposant que } \mathcal{B} = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \rangle.] \\
&= (a_1 \vec{v}_1 \pm b_1 \vec{v}_1) + (a_2 \vec{v}_2 \pm b_2 \vec{v}_2) + \dots + (a_n \vec{v}_n \pm b_n \vec{v}_n) \quad [\text{Associativité et commutativité de la somme}] \\
&= (a_1 \pm b_1) \vec{v}_1 + (a_2 \pm b_2) \vec{v}_2 + \dots + (a_n \pm b_n) \vec{v}_n \quad [\text{Distributivité de la multiplication par un scalaire}] \\
&= (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \dots, a_n \pm b_n)
\end{aligned}$$

Cette compatibilité entre les opérations géométriques sur les vecteurs et les opérations arithmétiques sur les composantes a une grande importance pratique, car elle permet de traduire de nombreux problèmes de nature géométrique en problèmes de nature algébrique, et vice versa. Cette équivalence entre la géométrie vectorielle et l'arithmétique des n -uplets (qui avait été notée par Descartes) a été popularisée sous le nom de **géométrie analytique**.

EXEMPLE 1 (DANS UN ESPACE BIDIMENSIONNEL)

Dans une base $\mathcal{B}$ (qu'il n'est pas nécessaire de préciser), les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ s'écrivent $\vec{u} = (1, 3)$, $\vec{v} = (-2, 2)$ et $\vec{w} = (8, 0)$.

On veut trouver l'écriture du vecteur $\vec{w}$ dans la base $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. On cherche donc des nombres a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

$$\begin{aligned}
(8, 0) &= a(1, 3) + b(-2, 2) && [\text{Écrit en base } \mathcal{B}] \\
(8, 0) &= (a, 3a) + (-2b, 2b) \\
(8, 0) &= (a - 2b, 3a + 2b) \\
8 &= a - 2b \text{ et } 0 = 3a + 2b \\
a &= 2 \text{ et } b = -3 && [\text{En résolvant le système d'équations}^8.]
\end{aligned}$$

Donc, $\vec{w}$ s'écrit $(2, -3)$ en base $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

EXEMPLE 2 (DANS UN ESPACE BIDIMENSIONNEL)

Dans une base $\mathcal{B}$ (qu'il n'est pas nécessaire de préciser), les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'écrivent $\vec{u} = (1, 3)$ et $\vec{v} = (-2, 2)$, tandis que le vecteur $\vec{w}$ s'écrit $\vec{w} = (-5, 7)$ dans la base $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

On cherche l'écriture du vecteur $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= -5\vec{u} + 7\vec{v} \\
&= -5(1, 3) + 7(-2, 2) && [\text{Écrit en base } \mathcal{B}] \\
&= (-5, -15) + (-14, 14) \\
&= (-19, -1)
\end{aligned}$$

Donc, $\vec{w} = (-19, -1)$ dans la base $\mathcal{B}$.

8. Au chapitre 5, nous présentons une méthode générale de résolution des systèmes d'équations linéaires.

EXEMPLE 3 (DANS L'ESPACE TRIDIMENSIONNEL)

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'écrivent $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $\vec{v} = (-2, 3, 5)$ dans une base donnée. On veut savoir si ces vecteurs sont parallèles.

$\vec{u} \parallel \vec{v}$ si et seulement si $\vec{u} = k\vec{v}$ pour un scalaire $k \neq 0$;

donc,

$$\begin{aligned}\vec{u} \parallel \vec{v} &\Leftrightarrow (1, 2, 3) = k(-2, 3, 5) \\ &\Leftrightarrow 1 = -2k \text{ et } 2 = 3k \text{ et } 3 = 5k \\ &\Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \text{ et } k = \frac{2}{3} \text{ et } k = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Comme aucune valeur de k ne satisfait simultanément toutes ces équations, on conclut que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas parallèles.

EXEMPLE 4 (DANS L'ESPACE TRIDIMENSIONNEL)

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ s'écrivent respectivement $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-2, 3, 1)$ et $\vec{w} = (5, -4, 1)$ dans une base donnée. On veut savoir si ces trois vecteurs sont linéairement dépendants (coplanaires lorsqu'ils sont représentés par des flèches issues d'une origine commune).

Si deux de ces vecteurs étaient parallèles, la réponse à la question serait oui. Cependant, il est facile de voir qu'il n'y a aucune paire de vecteurs parallèles parmi ces trois vecteurs. Il reste donc à voir si l'un d'eux, peu importe lequel, est une combinaison linéaire des deux autres : par exemple, voyons si $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Il faut alors voir s'il existe des nombres a et b tels que :

$$(5, -4, 1) = a(1, 2, 3) + b(-2, 3, 1).$$

Cela donne à résoudre un système de trois équations à deux inconnues :

$$a - 2b = 5, 2a + 3b = -4 \text{ et } 3a + b = 1.$$

Dans ce cas-ci, $a = 1$ et $b = -2$ est une solution. Donc, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

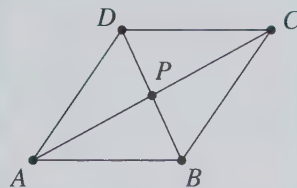
Remarque

Les composantes du vecteur nul sont toutes nulles dans toutes les bases, car $\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_n$ quels que soient les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

EXERCICES 1.2

1. Dans le parallélogramme ci-contre, exprimez :

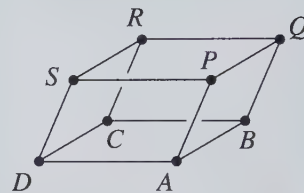
- $\overrightarrow{PC}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$;
- $\overrightarrow{AB}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$;
- $\overrightarrow{AD}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{PD}$.



2. Dans l'exercice 1, vous avez utilisé une propriété connue des parallélogrammes : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. La démonstration géométrique classique de cette propriété consiste à montrer la congruence des triangles ABP et CDP de la figure de l'exercice 1. Au lieu de cela, faites une démonstration vectorielle : posez P comme le point milieu de la diagonale AC , puis montrez que les vecteurs $\overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{PD}$ sont égaux.

3. Dans chacun des cas suivants, en vous reportant au parallépipède ci-contre, déterminez si les vecteurs donnés sont linéairement dépendants ou indépendants.

- | | |
|---|---|
| a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{RQ}$ | e) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{RQ}$ et $\overrightarrow{BS}$ |
| b) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{RQ}$ et $\overrightarrow{DB}$ | f) $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{AR}$ |
| c) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{RQ}$ et $\overrightarrow{DQ}$ | g) $\overrightarrow{SQ}$, $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{BS}$ |
| d) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{RS}$ | h) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DP}$ |



4. En vous reportant à la figure de l'exercice 3, trouvez une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{RQ}$ et $\overrightarrow{DB}$ dont les coefficients ne sont pas tous nuls et qui donne le vecteur nul.
5. Dans le parallépipède de la figure de l'exercice 3, déterminez, relativement à la base $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP} \rangle$, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{AQ}$ et $\overrightarrow{SB}$.
6. Soit $\vec{u} = (3, 1)$, $\vec{v} = (-2, 5)$ et $\vec{w} = (12, -13)$, les expressions, dans une base donnée, de trois vecteurs d'un même plan.
- Exprimez $\vec{w}$ comme une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.
 - Quelles seraient les composantes de $\vec{w}$ dans la base $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$? dans la base $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$?
 - Quelles seraient les composantes de $\vec{v}$ dans la base $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$?
7. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'écrivent $\vec{u} = (-1, 2)$ et $\vec{v} = (3, -4)$ dans la base $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$, tandis que le vecteur $\vec{w}$ s'écrit $\vec{w} = (5, 2)$ dans la base $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. Comment s'écrit le vecteur $\vec{w}$ dans la base $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$?
8. Montrez que les vecteurs $\vec{s}$ et $\vec{t}$ qui s'écrivent $\vec{s} = a\vec{u} + b\vec{v}$ et $\vec{t} = c\vec{u} + d\vec{v}$ dans la base $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ sont linéairement dépendants si, et seulement si, $ad - bc = 0$.
9. Dans chacun des cas suivants, déterminez si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dont les composantes sont exprimées relativement à une même base, sont parallèles.
- | | |
|---|--|
| a) $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (5, 6)$ | c) $\vec{u} = (-3, 2, 1)$, $\vec{v} = (15\pi, -10\pi, -5\pi)$ |
| b) $\vec{u} = (-3, 5)$, $\vec{v} = (6, -10)$ | d) $\vec{u} = (7, 8, 9)$, $\vec{v} = (9, 8, 7)$ |
10. Parmi les familles de vecteurs suivantes, dites lesquelles sont génératrices, lesquelles sont libres et lesquelles sont des bases. On suppose que les vecteurs d'une même famille sont exprimés dans une même base.
- | | |
|---|--|
| a) $F_1 = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ | d) $F_4 = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ |
| b) $F_2 = \{(4, 0, 2), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ | e) $F_5 = \{(-1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)\}$ |
| c) $F_3 = \{(2, 0, 4), (\sqrt{2}, 0, 2)\}$ | |

11. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrivent $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (3, 2, 1)$ et $\vec{w} = (a, b, c)$ dans une même base $\mathcal{B}$. Trouvez des valeurs pour a , b et c de manière à ce que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment à eux trois une base. Il y a une infinité de bonnes réponses à cette question.
12. Soit $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, une base d'un espace euclidien $\mathcal{E}$. Déterminez si les suites de vecteurs suivantes forment une base de $\mathcal{E}$. Si une suite forme une base, écrivez le vecteur $3\vec{u} - 2\vec{v}$ dans cette base.
- | | | | |
|--|---|---|--|
| a) $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ | c) $\langle \vec{u}, 2\vec{u} \rangle$ | e) $\langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle$ | g) $\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle$ |
| b) $\langle \vec{u}, -\vec{v} \rangle$ | d) $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{v} \rangle$ | f) $\langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{v} \rangle$ | h) $\langle \vec{u} + \vec{v} \rangle$ |
13. À l'aide d'une figure appropriée dans un plan, montrez qu'il est possible qu'un vecteur $\vec{v}$ ait la même écriture (les mêmes composantes) dans deux bases différentes.
14. En vous inspirant de l'exemple 4 (voir la page 25), déterminez si les vecteurs suivants (exprimés dans une même base) sont linéairement dépendants ou indépendants.
- | |
|--|
| a) $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (-2, 0, 0)$ et $\vec{w} = (0, 1, 1)$ |
| b) $\vec{u} = (0, 2, 0)$, $\vec{v} = (4, 0, -6)$ et $\vec{w} = (-2, 2, 3)$ |
| c) $\vec{u} = (-3, 2, 5)$, $\vec{v} = (2, 3, -3)$ et $\vec{w} = (0, 1, -1)$ |

LES COORDONNÉES DES POINTS

À la section 1.2, les bases et les composantes nous ont permis d'algébriser les opérations sur les vecteurs. De la même façon, nous verrons que les repères et les coordonnées permettent d'algébriser les opérations affines sur les points.

1.3.1 LES REPÈRES DANS UN ESPACE

Les bases permettent de représenter les vecteurs comme des n -uplets de nombres (composantes); les repères vont permettre de représenter aussi les points comme des n -uplets de nombres (coordonnées)⁹.

Repère, coordonnées relatives à un repère

Un repère d'un espace $\mathcal{E}$ est un couple $\langle O; \mathcal{B} \rangle$, où O est un point de $\mathcal{E}$, appelé **point origine**, et $\mathcal{B}$ est une base ordonnée pour les vecteurs de $\mathcal{E}$.

Si P est un point de $\mathcal{E}$, alors les **coordonnées** de P relatives au repère $\langle O; \mathcal{B} \rangle$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$ dans la base $\mathcal{B}$; $\overrightarrow{OP}$ est appelé **vecteur-position** du point P .

9. On attribue l'idée des coordonnées et des n -uplets à René Descartes (1596-1650).

EXEMPLE 1 (DANS UN PLAN)

Prenons le plan de la figure 1.24. Voici comment on détermine les coordonnées de différents points relativement au repère $\langle O; \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \rangle$ en partant du point origine O .

Les coordonnées du point A sont $(3, 1)$, car le vecteur-position $\overrightarrow{OA}$ s'écrit $3\vec{u} + \vec{v}$; les coordonnées du point B sont $(-1, -2)$; les coordonnées du point C sont $(-1, 2)$; les coordonnées du point origine O sont $(0, 0)$.

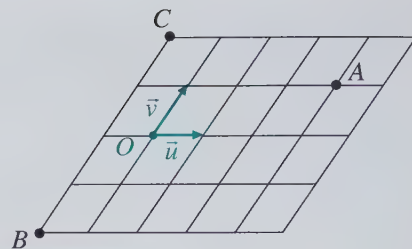


FIGURE 1.24

EXEMPLE 2 (DANS L'ESPACE TRIDIMENSIONNEL)

Dans la figure 1.25, les coordonnées du point A relativement au repère $\langle O; \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle \rangle$ sont $(1, 0, 1)$, car $\overrightarrow{OA} = 1\vec{u} + 0\vec{v} + 1\vec{w}$; les coordonnées du point B sont $(1, 1, 1)$, car $\overrightarrow{OB} = 1\vec{u} + 1\vec{v} + 1\vec{w}$. Cependant, il faut un peu plus d'imagination spatiale pour voir que les coordonnées des mêmes points A et B relativement au repère de la figure 1.26 sont respectivement $(-1, -1, 1)$ et $(0, -1, 1)$. En effet, pour aller du point origine O au point A en suivant les directions $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ indiquées, il faut faire la translation

$$\overrightarrow{OA} = \vec{w} - \vec{v} - \vec{u} = (-1)\vec{u} + (-1)\vec{v} + 1\vec{w}.$$

Pour aller du point origine O au point B en suivant les directions $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ indiquées, il faut faire la translation

$$\overrightarrow{OB} = \vec{w} - \vec{v} = 0\vec{u} + (-1)\vec{v} + 1\vec{w}.$$

Pour décrire la position des points dans l'espace, on choisit habituellement un repère adapté à la forme des objets traités pour simplifier le calcul des coordonnées. En ce sens, le repère de la figure 1.25 est meilleur que celui de la figure 1.26 pour décrire les sommets du parallélépipède.

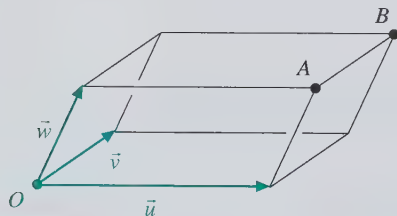


FIGURE 1.25

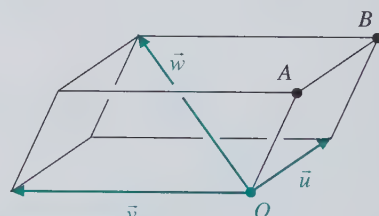


FIGURE 1.26

Notation

Dans un repère donné, pour dire que les coordonnées d'un point A sont $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, on écrit $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, O étant le point origine du repère. On utilise aussi la notation $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pour désigner un point A dont les coordonnées sont $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. L'équation $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est aussi tolérée bien qu'elle puisse porter à confondre les points et les vecteurs si elle n'est pas utilisée avec prudence.

EXEMPLE

Dans le repère $\langle O; \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle \rangle$ de la figure 1.25, $A(1, 0, 1)$ désigne le point A dont le vecteur-position est $\overrightarrow{OA} = (1, 0, 1)$.

1.3.2 LES OPÉRATIONS SUR LES COORDONNÉES ET LES COMPOSANTES

Lorsque l'on considère les vecteurs comme des translations qui agissent sur les points, on peut interpréter l'équation $B = A + \vec{v}$ comme une construction du point B à partir du point A et du vecteur $\vec{v}$; cette construction permet d'obtenir directement les coordonnées du point B

à partir des coordonnées du point A et des composantes du vecteur $\vec{v}$, car elle est équivalente à l'égalité $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{v}$ comme le montre la figure 1.27.

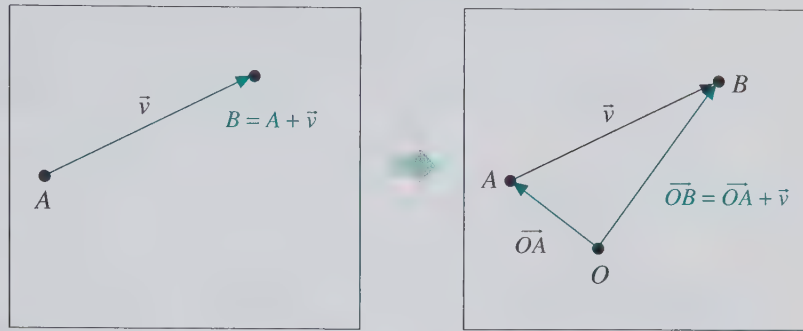


FIGURE 1.27

L'équivalence

$$B = A + \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{v}$$

justifie l'emploi d'un signe « + » et l'appellation *addition affine* pour représenter l'opération des vecteurs sur les points (voir la sous-section 1.1.5). Sur la base de cette équivalence, on peut résumer les relations entre les coordonnées et les composantes comme suit.

Les relations entre coordonnées et composantes

Dans un espace muni d'un repère d'origine O , si $B = A + \vec{v}$, alors :

- 1) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{v}$: les coordonnées du point B s'obtiennent en ajoutant les composantes du vecteur $\vec{v}$ aux coordonnées du point A ;
- 2) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \vec{v}$: les coordonnées du point A s'obtiennent en retranchant les composantes du vecteur $\vec{v}$ des coordonnées du point B ;
- 3) $\vec{v} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$: les composantes du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ s'obtiennent en retranchant des coordonnées de son extrémité B les coordonnées de son extrémité A . Par abus de notation, on écrit parfois $\overrightarrow{AB} = B - A$, car le résultat de l'opération $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ est indépendant de la position du point O . L'opération $B - A$ n'est pas une opération géométrique sur les points A et B , mais une opération algébrique sur les coordonnées de ces points.

EXEMPLE 1

La figure 1.28 représente un parallélogramme dans l'espace tridimensionnel. On donne les composantes du vecteur $\vec{v}$ et les coordonnées des points C et B relativement à un même repère :

$$\vec{v} = (2, -3, 5), \overrightarrow{OC} = (1, 0, 2) \text{ et } \overrightarrow{OB} = (3, 4, 5).$$

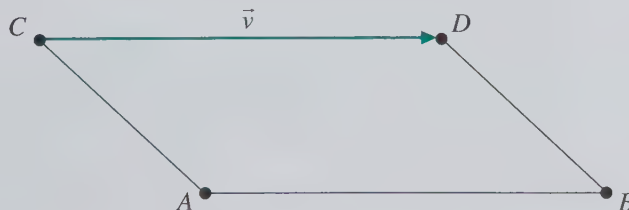


FIGURE 1.28

On cherche les coordonnées des points A et D relativement à ce repère.

Considérant les vecteurs comme des translations, on obtient $D = C + \vec{v}$ et donc

$$\overrightarrow{OD} = (1, 0, 2) + (2, -3, 5) = (3, -3, 7).$$

Le point D est donc donné par $D(3, -3, 7)$; de plus, $A = B + (-\vec{v})$ et donc

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \vec{v} = (3, 4, 5) - (2, -3, 5) = (1, 7, 0).$$

Le point A est donc donné par $A(1, 7, 0)$.

EXEMPLE 2 (TEST DE COLINÉARITÉ DE TROIS POINTS)

Dans l'espace tridimensionnel, on donne les coordonnées des points A , B et C relativement à un repère fixe :

$$A(2, 3, 6), B(-3, 2, 1) \text{ et } C(7, -1, 4).$$

On veut savoir si ces points sont colinéaires dans l'espace.

Les points A , B et C sont colinéaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont parallèles; les composantes de ces vecteurs sont données par

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-3, 2, 1) - (2, 3, 6) = (-5, -1, -5),$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (7, -1, 4) - (2, 3, 6) = (5, -4, -2).$$

Comme $(-5, -1, -5)$ n'est pas un multiple de $(5, -4, -2)$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas parallèles et donc les points A , B et C ne sont pas colinéaires.

EXEMPLE 3 (SUBDIVISION D'UN SEGMENT)

Dans la figure 1.29, on cherche les coordonnées du point C qui subdivise le segment AB selon la proportion $2:1$ (le point C est situé aux deux tiers du chemin entre A et B en partant du point A). Considérant $\overrightarrow{AB}$ comme une translation, on trouve

$$C = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{3}[(1, 3, -2) + 2(4, 0, 5)] \\ &= \left(3, 1, \frac{8}{3}\right).\end{aligned}$$

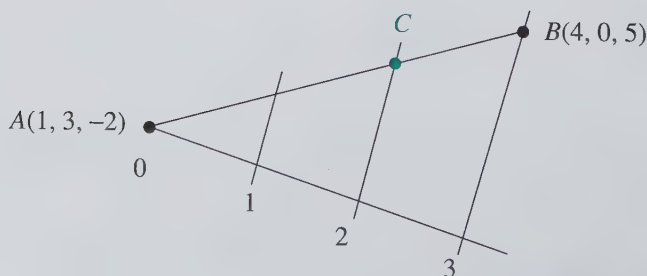


FIGURE 1.29

EXEMPLE 4 (POINT D'ÉQUILIBRE STATIQUE)

Dans la figure 1.30, on cherche le centre d'équilibre statique entre les points A , B et C , c'est-à-dire le point P de l'espace pour lequel les vecteurs $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{PC}$, considérés comme des forces appliquées en P , s'annuleraient et maintiendraient P en équilibre statique.

L'équilibre se traduit par

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} &= \vec{0}, \\ (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) &= \vec{0}, \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OP} &= \vec{0}, \\ \overrightarrow{OP} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).\end{aligned}$$

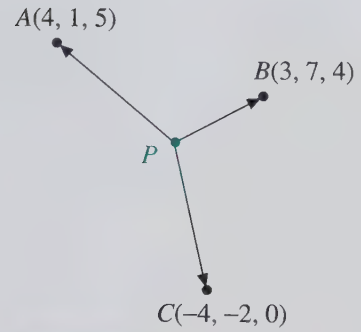


FIGURE 1.30

Les coordonnées du point P sont les moyennes arithmétiques des coordonnées correspondantes des points A , B et C . Cette dernière équation montre que, pour des points donnés A , B et C quelconques, il n'existe qu'un seul point d'équilibre statique entre ces points.

Ainsi, on obtient

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}[(4, 1, 5) + (3, 7, 4) + (-4, -2, 0)] = \frac{1}{3}(3, 6, 9).$$

Le point cherché est donc $P(1, 2, 3)$.

L'exemple 4 se généralise facilement. On en tire la définition suivante.

DE FINITION Barycentre d'un ensemble de points

Le **barycentre** d'un ensemble de points $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ est le point P pour lequel

$$\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \dots + \overrightarrow{PP_n} = \vec{0}.$$

Ce barycentre est unique, comme conséquence de la proposition démontrée ci-dessous.

EXEMPLE 5

Le barycentre G de deux points distincts A et B est situé, comme on doit s'y attendre, au milieu du segment de droite d'extrémités A et B . En effet, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont parallèles, de même longueur et de sens opposés, ce qui situe bien le point G au milieu du segment d'extrémités A et B .

La proposition suivante est une simple généralisation de l'exemple 4.

PROPOSITION

Les coordonnées du barycentre P d'un ensemble de points $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ dans un repère d'origine O sont données par

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_n}).$$

Démonstration

Par la définition du barycentre P , on a $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \cdots + \overrightarrow{PP_n} = \vec{0}$; en choisissant le point O comme point origine, cette définition du barycentre devient successivement

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP}) + \cdots + (\overrightarrow{OP_n} - \overrightarrow{OP}) &= \vec{0}, \\ (\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_n}) - n\overrightarrow{OP} &= \vec{0}, \\ (\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_n}) &= n\overrightarrow{OP}, \\ \overrightarrow{OP} &= \frac{1}{n}(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_n}). \end{aligned}$$

Remarque

La position du barycentre P relativement aux points $P_1, P_2, \dots, P_n$ étant, de par sa définition, indépendante du choix de l'origine O du repère, on peut se permettre l'abus de notation suivant pour le calcul du barycentre dans un repère donné,

$$P = \frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}{n},$$

ce qui signifie que, dans l'équation donnant le barycentre P ,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_n}),$$

on peut remplacer le point O par tout autre point A et obtenir :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \cdots + \overrightarrow{AP_n}).$$

EXEMPLE 6

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point et ce point est précisément le barycentre des sommets du triangle. De plus, le barycentre se trouve aux $2/3$ de chaque médiane en partant du sommet dont elle est issue (voir la figure 1.31)

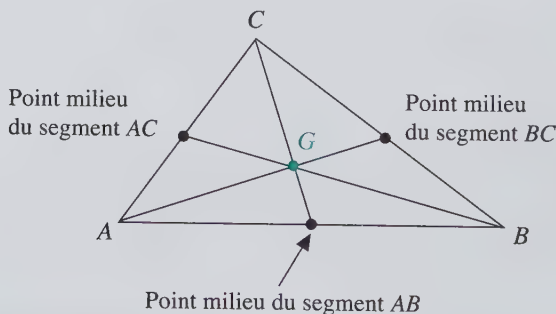


FIGURE 1.31

En effet, si G est le barycentre des sommets A, B, C d'un triangle, alors, en prenant A comme origine, on aura $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, ce qui fait que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, et donc que $G = A + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Il s'ensuit que G est situé au $1/3$ de la diagonale du parallélogramme de côtés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en partant de A (voir la figure 1.32). Les diagonales d'un parallélogramme se coupant en leur milieu, G se trouve sur la médiane issue de A et le $1/3$ de la diagonale est les $2/3$ de la demi-diagonale (la médiane issue de A). On raisonne de la même façon avec les deux autres sommets B et C pour finalement conclure.

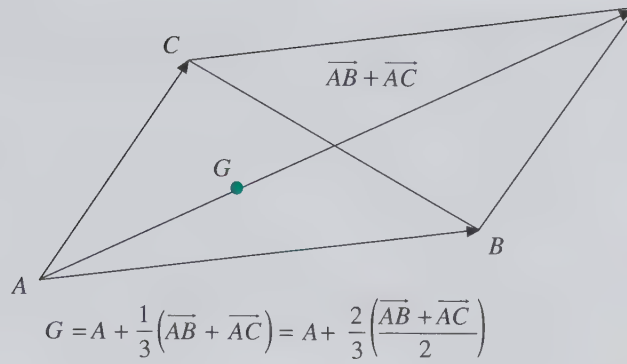


FIGURE 1.32

1.3.3 LES REPÈRES ORTHONORMÉS DANS $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ET $\mathbb{R}^n$

Lorsqu'on définit un repère dans un plan, on met les points de ce plan en correspondance biunivoque avec les éléments de $\mathbb{R}^2$: chaque point, par ses coordonnées, correspond à un seul couple de nombres réels (x, y) et, vice versa, chaque couple (x, y) correspond à un seul point. Pour cette raison, le symbole $\mathbb{R}^2$ désigne l'espace euclidien de dimension 2; de même, $\mathbb{R}^3$ désigne l'espace euclidien de dimension 3 et, plus généralement, $\mathbb{R}^n$ désigne l'espace euclidien de dimension n . Les **points** de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ sont représentés par des n -uplets de nombres réels: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.



Base et repère orthonormés dans un espace euclidien

Une **base orthonormée** est une base dont

- i) tous les vecteurs sont de longueur 1;
- ii) tous les vecteurs sont, deux à deux, orthogonaux (forment un angle droit).

Un **repère orthonormé** est un repère dont la base est orthonormée.

La figure 1.33 montre un repère orthonormé dans $\mathbb{R}^2$: $\langle O; \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle \rangle$; les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et de longueur 1.

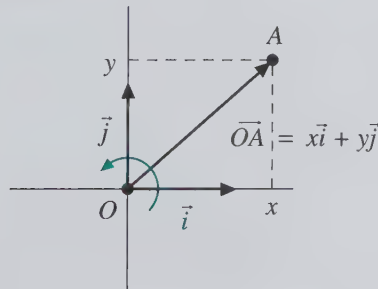


FIGURE 1.33 Repère orthonormé représenté avec une orientation positive.

Si un point A s'écrit $A(x, y)$ dans ce repère, alors x est l'abscisse du point A et y est son ordonnée. De plus, il y a deux façons de représenter un repère orthonormé $\langle O; \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle \rangle$ dans une illustration: une représentation où le vecteur $\vec{j}$ s'obtient à partir du vecteur $\vec{i}$ par une rotation de 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens antihoraire) qui sera conventionnellement appelée *positive*, et une représentation où le vecteur $\vec{j}$

s'obtient à partir du vecteur $\vec{i}$ par une rotation de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre (sens horaire) qui sera conventionnellement appelée *négative* (voir les figures 1.33 et 1.34).

Pour $\mathbb{R}^3$, il y a aussi deux représentations ou **orientations** possibles pour un repère orthonormé¹⁰ $\langle O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$: convenons que la représentation du repère $\langle O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ illustrée à la figure 1.35 est d'orientation positive et que la représentation illustrée à la figure 1.36 est d'orientation négative. Il faut alors noter que dans le cas de la figure 1.35 le vecteur $\vec{k}$ pointe vers la position d'un observateur qui verrait le repère plan $\langle O; \vec{i}, \vec{j} \rangle$ avec une orientation positive dans $\mathbb{R}^2$, tandis que dans le cas de la figure 1.36 le même observateur le verrait avec une orientation négative dans $\mathbb{R}^2$.

Convenons qu'à l'avenir, le repère orthonormé $\langle O; \vec{i}, \vec{j} \rangle$ de $\mathbb{R}^2$ sera toujours représenté avec l'orientation positive. De même, convenons qu'à l'avenir, le repère orthonormé $\langle O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ sera toujours représenté avec l'orientation positive.

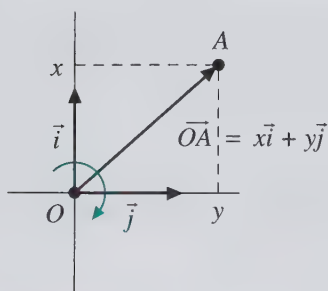


FIGURE 1.34 Un repère orthonormé représenté avec une orientation négative.

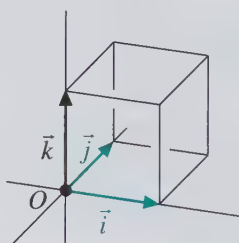


FIGURE 1.35 Un repère orthonormé $\langle O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ représenté avec une orientation positive.

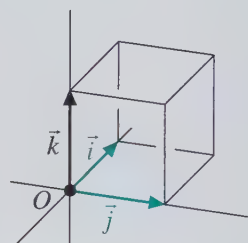


FIGURE 1.36 Un repère orthonormé $\langle O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ représenté avec une orientation négative.

Si A est un point dont les coordonnées sont (x, y, z) dans un repère orthonormé $\langle O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ de $\mathbb{R}^3$, alors x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z est la cote du point A (voir la figure 1.37).

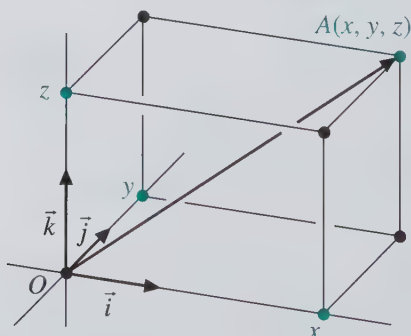


FIGURE 1.37 L'abscisse, l'ordonnée et la cote.

10. Tout espace euclidien de dimension n peut être orienté de deux façons.

L'usage veut que l'on représente les repères orthonormés de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ par des axes de coordonnées orientés dans le même sens et la même direction que les vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, et que l'on identifie ces axes respectivement par les lettres x , y et z ; de telles représentations sont appelées des **repères cartésiens** ou des **systèmes d'axes cartésiens** (voir la figure 1.38).

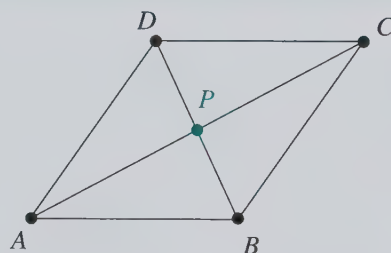


FIGURE 1.38 Des repères cartésiens dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

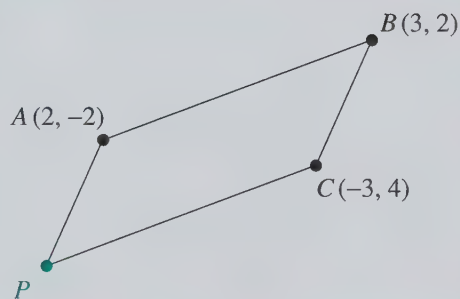
EXERCICES 1.3

1. Dans le parallélogramme illustré ci-contre, déterminez les coordonnées du point P relativement aux repères suivants.

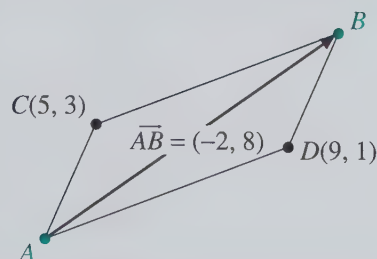
$$\begin{array}{ll} a) \langle A; \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \rangle \rangle & c) \langle D; \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle \rangle \\ b) \langle A; \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle \rangle & d) \langle C; \langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \rangle \rangle \end{array}$$



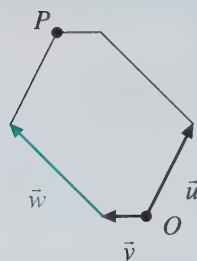
2. Déterminez les coordonnées du point P dans le parallélogramme ci-contre, à partir des coordonnées des trois sommets donnés. Le repère du plan qui contient le parallélogramme n'a pas à être précisé.



3. Déterminez les coordonnées des points A et B à partir des coordonnées et des composantes déjà données dans le parallélogramme ci-contre; le repère du plan n'a pas à être précisé. (*Coup de pouce*: Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.)



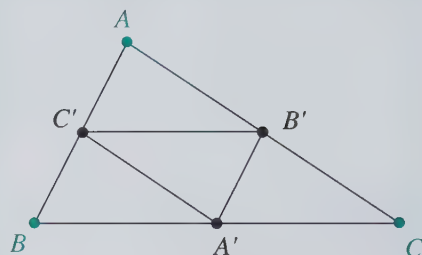
4. Dans l'hexagone (plan) illustré, les côtés opposés sont deux à deux parallèles et de même longueur. Sachant que les coordonnées du point P sont données par $\overrightarrow{OP} = (2, 4)$ dans le repère $\langle O; \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \rangle$, déterminez les composantes du vecteur $\vec{w}$ dans la base $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.



5. Les sommets du triangle $A'B'C'$ ci-contre sont situés au milieu des côtés du triangle quelconque ABC . Déterminez les coordonnées des sommets A, B et C à partir des coordonnées des sommets A', B' et C' données dans un repère qu'il n'est pas nécessaire de préciser :

$$A'(3, 2), B'(-2, 5) \text{ et } C'(2, -4).$$

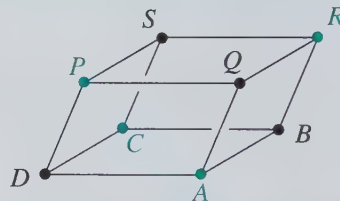
(Coup de pouce : D'après le théorème de Thalès, les côtés du triangle $A'B'C'$ seront parallèles aux côtés correspondants du triangle ABC .)



6. Dans le parallépipède ci-contre, on donne les coordonnées des points B, D, Q et S relativement à un certain repère :

$$B(3, 5, 6), D(3, 2, 1), Q(1, 6, -1), S(3, 7, 0).$$

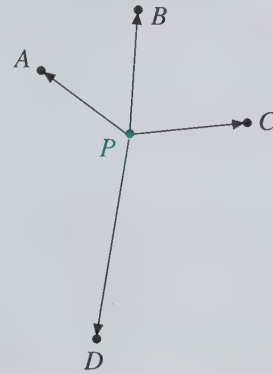
Les coordonnées des points A, C, P et R relativement à ce même repère sont alors entièrement déterminées. Quelles sont-elles ?



7. Dans chacun des cas suivants, déterminez si les points A, B et C , sont colinéaires (parfaitement alignés). Les coordonnées de ces points sont exprimées relativement à un certain repère de l'espace bidimensionnel ou tridimensionnel, selon le cas.
- a) $A(2, 7), B(1, 10)$ et $C(3, 4)$ c) $A(1, 2, 3), B(-2, 5, 4)$ et $C(8, -2, 1)$
 b) $A(5, -2), B(-5, 2)$ et $C(7, -3)$ d) $A(0, 7, 2), B(-2, 3, -4)$ et $C(-3, 2, -7)$
8. Soit $A(1, 3, -1), B(2, 2, 3), C(3, 0, 1)$ et $D(4, -1, 5)$, quatre points de l'espace $\mathbb{R}^3$.
- a) Montrez que A, B, C et D sont coplanaires.
 b) Montrez que $ABCD$ forme un parallélogramme, puis déterminez lesquels des segments AB, AC, AD, BC, BD et CD constituent les côtés du parallélogramme, et lesquels constituent les diagonales.
9. Soit $A(5, 9), B(3, 7)$ et $C(4, 6)$, trois points dont les coordonnées sont relatives au repère $\langle O, \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle \rangle$ de l'espace $\mathbb{R}^2$.
- a) Déterminez les coordonnées du point O dans le repère $\langle A, \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle \rangle$.
 b) Quelles sont les composantes du vecteur $\vec{i}$ dans la base $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$?
 c) Quelles sont les composantes du vecteur $\vec{j}$ dans la base $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$?

10. Quelles sont les coordonnées du point P qui est situé aux $4/5$ du segment AB , en partant du point A , si A et B sont donnés par $A(1, 2, 3)$ et $B(11, -3, 28)$? (On suppose que l'espace est muni d'un repère fixe.)

11. Un point P de l'espace tridimensionnel illustré ci-contre est tel que les vecteurs $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{PD}$, considérés comme des forces appliquées simultanément au point P , maintiennent le point P en équilibre statique. Si A , B , C et D sont donnés par $A(2, -3, 4)$, $B(5, 7, 9)$, $C(-1, 0, 8)$ et $D(-2, 4, -9)$, quelles sont les coordonnées du point P ? (On suppose un repère fixe donné.)



12. Soit P , le barycentre des points P_1, P_2 et P_3 , et Q , le barycentre des points Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 . Si P et Q sont donnés par $P(1, 2, 3)$ et $Q(1, 0, 5)$, quelles sont les coordonnées du barycentre C de l'ensemble des points $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ et Q_4 ? Justifiez votre réponse.

13. Soit G , le barycentre des n points distincts $A_1, A_2, \dots, A_n$. Si P est le barycentre de k points distincts choisis parmi ces n points et si Q est le barycentre des $n - k$ autres points,

a) montrez à l'aide de manipulations algébriques sur la formule de calcul du barycentre que

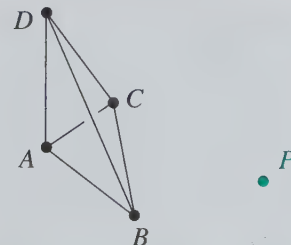
$\overrightarrow{OG} = \frac{k}{n} \overrightarrow{OP} + \frac{n-k}{n} \overrightarrow{OQ}$ ou, encore, avec l'abus de notation, que, $G = \frac{k}{n} P + \frac{n-k}{n} Q$ (une moyenne pondérée des coordonnées);

b) montrez que $G = P + \frac{n-k}{n} \overrightarrow{PQ}$ et donc que G se trouve sur le segment de droite d'extrémités P et Q , à une proportion $(n - k)/n$ de la longueur de ce segment en partant du point P .

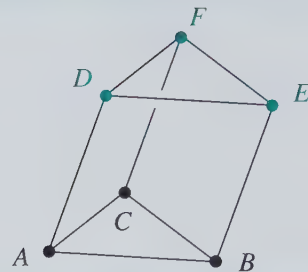
14. Appliquez le résultat obtenu à l'exercice 13 pour trouver graphiquement le barycentre de quatre points distincts A, B, C et D simplement en prenant successivement les milieux de segments appropriés.

15. Soit ABC , un triangle quelconque d'aire non nulle. Utilisez de manière appropriée le résultat de l'exercice 13 pour montrer que le barycentre des sommets A, B et C se situe aux $2/3$ de l'une des médianes quelconques (à partir du sommet dont elle est issue).

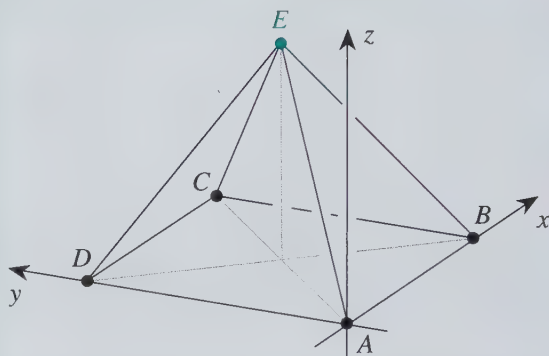
16. Une caméra, située au point $P(8, -2, 8)$ de l'espace tridimensionnel, vise le barycentre G des sommets A, B, C et D du tétraèdre de la figure ci-contre. Le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{PG}$ définit l'orientation de la caméra. Quelles sont les composantes du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{PG}$ si A, B, C et D sont donnés par $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$ et $D(0, 0, 3)$?



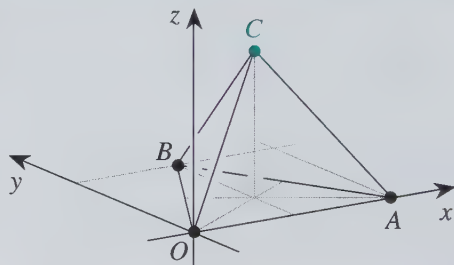
17. Dans le prisme triangulaire illustré ci-contre, on a $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$ et on donne $A(1, 2, 3)$, $B(-5, 1, -2)$ et $C(1, 0, 5)$. Le barycentre des six sommets du prisme est situé en $G(0, -2, 7)$. Quelles sont les coordonnées des sommets D , E et F ?



18. Dans le repère cartésien de la figure ci-contre, la pyramide est formée d'une base carrée et de quatre faces triangulaires qui sont des triangles équilatéraux. Toutes les arêtes de cette pyramide mesurent une unité de longueur. Quelles sont les coordonnées du sommet E ?

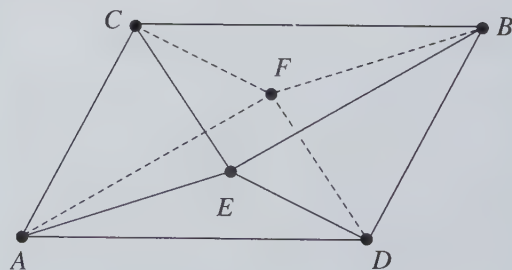


19. Dans le repère cartésien de la figure ci-contre, la pyramide triangulaire $OABC$ est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire que sa base ainsi que ses faces latérales sont des triangles équilatéraux. Les cotes des points O , A et B sont nulles, et les arêtes mesurent une unité de longueur. Déterminez les coordonnées du sommet C . (*Coup de pouce* : Pour raison de symétrie, le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet C au plan contenant la base OAB doit coïncider avec le barycentre des points O , A et B .)



20. Un octaèdre est un polyèdre de l'espace tridimensionnel formé de 8 faces triangulaires, de 12 arêtes et de 6 sommets. L'octaèdre $ABCDEF$ illustré ci-contre est tel que les arêtes opposées sont parallèles et de même longueur.

- a) Écrivez les vecteurs $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ de cet octaèdre dans la base $\langle \overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF} \rangle$.
- b) Si le point A est donné par $A(1, 2, 3)$ et si $\overline{AB} = (2, 5, 6)$, $\overline{CD} = (-1, 0, 2)$ et $\overline{EF} = (3, -2, 4)$ dans le repère $\langle O; \langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle \rangle$, quelles sont les coordonnées des sommets B , C , D , E et F dans ce repère?



POUR ALLER PLUS LOIN

Qu'arrive-t-il lorsque les mots *vecteur* et *point* deviennent des termes primitifs ? Les vecteurs ne sont alors plus nécessairement des translations qui agissent sur les points, ni même des flèches que l'on peut tracer. À ce niveau d'abstraction, les points, les vecteurs et les opérations sur les points et les vecteurs sont définis uniquement par leurs propriétés ; on considère ces dernières comme des axiomes. Ainsi, les termes *translation*, *vitesse*, *accélération*, etc., ne sont que des **interprétations** du concept abstrait de vecteur. Les interprétations sont cependant la base intuitive sur laquelle se fonde la méthode axiomatique.

Dans cette section, on fait un survol de l'histoire de la géométrie depuis les postulats d'Euclide jusqu'à l'axiomatisation moderne, et on donne les définitions axiomatiques des concepts abstraits d'espace vectoriel et d'espace affine.

1.4.1 L'AXIOMATISATION DE LA GÉOMÉTRIE

Lorsque Euclide a écrit les *Éléments*, il y a près de 2300 ans, il ne se doutait probablement pas de l'importance qu'aurait sa méthode axiomatique dans le développement futur des mathématiques. Jusqu'au XIX^e siècle, ses dix postulats¹¹ ont été considérés comme des énoncés évidents et vrais à propos d'objets ayant une existence propre en dehors des mathématiques et des êtres humains. Les géomètres découvraient le monde, ils ne le créaient pas. Plusieurs mathématiciens ont tenté par la suite de réduire le nombre de postulats. Par exemple, ils ont essayé de démontrer l'axiome des parallèles (le cinquième postulat) à partir des autres axiomes ; cet axiome, selon une version popularisée par John Playfair (1748-1819), affirme que par un point P pris hors d'une droite L on peut mener, dans le plan contenant P et L , une et une seule droite parallèle à L . En enlevant cet axiome, on pensait arriver à des absurdités¹², mais Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a montré, en 1820, qu'on obtenait plutôt une autre géométrie, tout aussi cohérente que celle d'Euclide, à la condition de considérer certains mots, tels *point*, *droite*, *plan*, etc., comme des termes primitifs (non définis). C'est ainsi qu'en modifiant certains axiomes et en choisissant différentes interprétations des termes primitifs, Janos Bolyai (1802-1860) et Nikolaï Ivanovitch Lobatchevski (1792-1856) ont fait naître la géométrie hyperbolique, et Ludwig Schläfli (1814-1895) et Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), la géométrie elliptique au siècle dernier. Depuis ce temps, et notamment avec les travaux de Félix Christian Klein (1849-1925) et de David Hilbert (1862-1943), on considère les axiomes comme des énoncés qui doivent être cohérents (plutôt que vrais ou évidents) ; les mots *point*, *droite*, *plan*, etc., deviennent des termes primitifs ou des termes qui ont des interprétations différentes d'une géométrie à l'autre.

La géométrie vectorielle et la géométrie affine que nous présentons dans cet ouvrage sont apparentées à la géométrie euclidienne. Dans une approche axiomatique de ces géométries, le terme *vecteur* est primitif, c'est-à-dire qu'il n'a pas de définition, il n'a que des interprétations. Quand nous interprétons les vecteurs comme des translations ou des flèches, nous sortons volontairement du cadre axiomatique dans le but de faciliter l'élaboration d'un modèle intuitif. Ce modèle est cependant tout à fait cohérent avec les axiomes d'espace vectoriel et les axiomes d'espace affine qui se trouvent à la sous-section suivante.

11. Selon H. S. M. Coxeter dans *Introduction to Geometry*, Wiley, 1969.

12. Coxeter relate que c'est ainsi que le jésuite Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1773) a inventé malgré lui la géométrie hyperbolique, sans toutefois la reconnaître.

1.4.2 LES ESPACES VECTORIELS ET LES ESPACES AFFINES

Si vous cherchez dans un dictionnaire de mathématiques le mot *vecteur*, vous devriez trouver «élément d'un espace vectoriel». Alors, qu'est-ce qu'un espace vectoriel? En voici une définition axiomatique classique indépendante de toute interprétation (même géométrique!).

Espace vectoriel sur les nombres réels

Un **espace vectoriel** sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est la donnée :

- i) d'un ensemble $\mathcal{V}$ dont les éléments sont appelés *vecteurs*, et notés $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, etc.;
- ii) d'une opération appelée *l'addition vectorielle*, qui associe à chaque paire de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ un vecteur dénoté par $\vec{u} + \vec{v}$ et appelé la somme de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ de telle façon :
 1. que l'addition est commutative et associative : quels que soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans $\mathcal{V}$,

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \text{ et } \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w},$$
 2. qu'il existe dans $\mathcal{V}$ un unique élément, noté $\vec{0}$ et appelé *vecteur nul*, pour lequel $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ quel que soit $\vec{u}$ dans $\mathcal{V}$,
 3. que pour chaque vecteur $\vec{u}$ dans $\mathcal{V}$, il existe un unique vecteur $-\vec{u}$ tel que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$;
- iii) d'une opération appelée *multiplication par un scalaire*, qui associe à chaque nombre réel r et à chaque vecteur $\vec{u}$ un vecteur $r\vec{u}$ dans $\mathcal{V}$ appelé *produit* de r par $\vec{u}$, de telle façon que :
 1. la multiplication par un scalaire est associative et distributive relativement à l'addition des nombres réels :

$$r(s\vec{u}) = (rs)\vec{u} \text{ et } (r+s)\vec{u} = r\vec{u} + s\vec{u},$$

2. la multiplication par un scalaire est distributive relativement à l'addition vectorielle :

$$r(\vec{u} + \vec{v}) = r\vec{u} + r\vec{v},$$

3. le nombre 1 est neutre pour la multiplication par un scalaire :

$$1\vec{u} = \vec{u}, \text{ quel que soit } \vec{u} \text{ dans } \mathcal{V}.$$

Quelle différence y a-t-il entre un espace vectoriel et un espace affine? Dans un espace affine, en plus des vecteurs, on a des points ; les vecteurs agissent (opèrent) sur les points à la manière des translations. Ici encore, les mots *point* et *translation* sont des termes primitifs. Voici une définition axiomatique d'un espace affine $\mathcal{E}$ sur un espace vectoriel $\mathcal{V}$.

Espace affine sur un espace vectoriel

Un **espace affine** sur un espace vectoriel $\mathcal{V}$ est la donnée :

- i) d'un ensemble $\mathcal{E}$ dont les éléments sont appelés des *points* et notés A , B , C , etc.;
- ii) d'une opération, appelée *l'addition affine* et notée $+$, qui associe à chaque point A dans $\mathcal{E}$ et à chaque vecteur $\vec{v}$ dans $\mathcal{V}$ un point $A + \vec{v}$ dans $\mathcal{E}$ de telle façon que :
 1. pour chaque paire de points A et B de $\mathcal{E}$, il existe un et un seul vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ tel que $A + \vec{v} = B$,
 2. pour chaque point B de $\mathcal{E}$ et chaque vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$, il existe un et un seul point A de $\mathcal{E}$ tel que $A + \vec{v} = B$,
 3. l'addition vectorielle est transitive sur l'addition affine

$$A + (\vec{u} + \vec{v}) = (A + \vec{u}) + \vec{v}$$

quels que soient le point A dans $\mathcal{E}$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathcal{V}$.

Remarques

1. À partir des trois propriétés de l'addition affine, on peut démontrer facilement la propriété supplémentaire suivante :

$$\text{pour tout point } A \text{ de } \mathcal{E}, A + \vec{0} = A.$$

2. Si l'on désigne un point arbitraire O de $\mathcal{E}$ comme **point origine**, alors il y a correspondance biunivoque entre les points et les vecteurs : à chaque point P de $\mathcal{E}$ est associé l'unique vecteur $\vec{v}$ (appelé *vecteur-position* de P) pour lequel $O + \vec{v} = P$ et à chaque vecteur $\vec{v}$ est associé l'unique point P de $\mathcal{E}$ défini par $P = O + \vec{v}$.

EXEMPLES D'ESPACES VECTORIELS NON GÉOMÉTRIQUES

1. Les polynômes en x à coefficients réels de degrés inférieurs ou égaux à un entier n fixé d'avance forment un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une base naturelle pour cet espace est constituée des **vecteurs-polynômes** $1, x, x^2, \dots, x^n$. Il s'agit donc d'un espace de dimension $n + 1$. En fait, à une notation près, cet espace est identique à $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. Les tableaux (matrices)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

de nombres réels sur lesquels on définit l'addition par l'équation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

et la multiplication par un scalaire par l'équation

$$k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

forment un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$: en effet, il est facile de voir que les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de cet espace vectoriel. Notons que la correspondance

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \leftrightarrow (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$$

entre les matrices à quatre éléments et les vecteurs à quatre composantes fait voir que cet espace de matrices est, à une notation près, identique à $\mathbb{R}^4$. Nous étudierons plus en détail les matrices au chapitre 6, dans d'autres contextes.

1.4.3 LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE LA DIMENSION

La démonstration qui suit s'applique à un espace vectoriel quelconque, satisfaisant les propriétés V1 à V8 (voir la page 10). Il n'est pas nécessaire que cet espace vectoriel soit associé, de prime abord du moins, à un objet géométrique visualisable tel qu'une droite, un plan ou l'espace euclidien tridimensionnel.

Le cas où l'espace considéré ne contient que le vecteur nul n'a pas besoin de preuve : dans un tel espace, il n'existe aucun vecteur indépendant d'un autre, et donc il ne peut exister qu'une seule base, l'ensemble vide.

Supposons donc que l'espace contient au moins un vecteur non nul. Comme cet espace est de dimension finie, il possède au moins une base composée d'un nombre fini (non nul) de vecteurs non nuls. Parmi toutes les bases, on en choisit une, $\mathcal{B}$, qui contient le plus petit nombre possible de vecteurs. Cette base $\mathcal{B}$ contient au moins un vecteur, évidemment non nul.

Cas 1

Considérons d'abord le cas le plus simple, celui où $\mathcal{B}$ contient un seul vecteur : $\mathcal{B} = \{\vec{u}\}$, où $\vec{u} \neq \vec{0}$. Montrons alors que tout vecteur non nul constitue à lui seul une base de l'espace.

Soit $\vec{v}$, un vecteur non nul quelconque de l'espace. Ce vecteur $\vec{v}$ est un multiple de $\vec{u}$: $\vec{v} = k\vec{u}$, où $k \neq 0$. Mais $\vec{u}$ est aussi un multiple de $\vec{v}$, car $\vec{u} = \vec{v}/k$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant multiples l'un de l'autre, tout multiple de l'un est multiple de l'autre. Tous les vecteurs de l'espace sont donc aussi bien des multiples de $\vec{u}$ que de $\vec{v}$. Bref, tout vecteur $\vec{v}$ non nul constitue, à lui seul, une base de l'espace. Il s'ensuit qu'aucune famille de deux vecteurs ou plus de cet espace ne peut être libre. Chaque base de cet espace est donc constituée d'un vecteur unique. Cela démontre le théorème pour le cas où $\mathcal{B}$ contient un seul vecteur.

Cas 2

Considérons maintenant le cas un peu plus difficile où $\mathcal{B}$ est composée de deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Nous procéderons comme dans le cas 1, mais avec deux vecteurs indépendants quelconques $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, au lieu d'un seul. Montrons qu'ils constituent nécessairement une famille génératrice et donc une base de l'espace.

Puisque $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ forment une base, on a $\vec{v}_1 = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2$, au moins un des coefficients, disons a_1 sans perdre de généralité, est non nul, car $\vec{v}_1$ est non nul. Alors, en isolant $\vec{u}_1$ dans la dernière égalité on obtient :

$$(1) \quad \vec{u}_1 = \frac{1}{a_1} \vec{v}_1 - \frac{a_2}{a_1} \vec{u}_2.$$

Tout vecteur de l'espace est une combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et de $\vec{u}_2$ et, selon (1), $\vec{u}_1$ est une combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et de $\vec{u}_2$. Il s'ensuit que tout vecteur de l'espace est une combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et de $\vec{u}_2$: ces deux vecteurs forment donc une famille génératrice. En particulier, $\vec{v}_2 = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{u}_2$, où b_2 est forcément non nul, car $\vec{v}_2$ ne peut pas être un multiple de $\vec{v}_1$ puisque $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont indépendants. En isolant $\vec{u}_2$ de cette dernière égalité, on trouve :

$$(2) \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{b_2} \vec{v}_2 - \frac{b_1}{b_2} \vec{v}_1.$$

Tout vecteur de l'espace est une combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et de $\vec{u}_2$ et, selon (2), $\vec{u}_2$ est une combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et de $\vec{v}_2$. Il s'ensuit que tout vecteur de l'espace est une combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et de $\vec{v}_2$: ces deux vecteurs forment à eux seuls une famille génératrice et donc une base de l'espace. Nous avons montré que deux vecteurs indépendants quelconques constituent nécessairement une base de notre espace. Aucune famille de trois

vecteurs ou plus de cet espace ne peut donc être libre. En même temps, par hypothèse, toutes les bases de notre espace contiennent au moins deux vecteurs. Toutes ses bases sont donc formées de deux vecteurs exactement.

Autres cas

Il est facile mais fastidieux, pour des lecteurs avertis, de généraliser le raisonnement précédent au cas où la base $\mathcal{B}$ serait composée d'un nombre n fini quelconque d'éléments.

SUGGESTIONS DE LECTURE

1. *Le géométricon et Le trou noir*, Jean-Pierre Petit, Éditions Belin, coll. Les aventures d'Anselme Lanturlu.

Sur un ton léger mais très à propos, l'auteur de ces deux bandes dessinées nous amène dans l'univers non euclidien. Plein d'humour et d'imagination. Pour tous. Maintenant offert gratuitement sur le Web.

2. *Introduction to Geometry*, H. S. M. Coxeter, Wiley, 1969.

Voilà une référence indispensable pour comprendre l'évolution de la géométrie depuis Euclide jusqu'à Coxeter. On y trouve une analyse critique des axiomes d'Euclide et la construction axiomatique moderne de la géométrie. Un des chapitres traite de la représentation des figures de l'espace 4-dimensionnel. Un classique, pas pour les enfants, écrit dans la langue de Shakespeare par un très grand géomètre canadien.

3. *L'algèbre linéaire par ses applications*, T. J. Fletcher, CEDIC, 1972.

On trouve dans cet ouvrage des exemples nombreux et variés d'espaces vectoriels dans le cadre de la physique classique.

4. *La quatrième dimension*, Rudy Rucker, Seuil, collection Science ouverte, 1985.

Les espaces euclidiens de dimension 1, 2 ou 3 nous sont accessibles par nos sens. Quelle connaissance et quelle intuition peut-on avoir de l'espace de dimension 4? Un livre de vulgarisation scientifique bien fait. Pour tous.

5. *Histoire des mathématiques*, J. Bouveresse, J. Itard et E. Sallé, Encyclopoche Larousse, 1977.

En plus d'une vue très condensée de l'histoire des mathématiques et des notes biographiques sur la plupart des grands mathématiciens et des grandes mathématiciennes, on trouve, au chapitre 4, la liste des 24 axiomes que David Hilbert a proposés en 1898 pour fonder *la géométrie du monde qui nous entoure*.

LONGUEURS, DISTANCES ET ANGLES

- LES LONGUEURS ET LES DISTANCES
- LE PRODUIT SCALAIRE ET LE CALCUL D'ANGLES
- POUR ALLER PLUS LOIN

Dans ce chapitre, nous nous proposons de numériser ou, mieux encore, d'algébriser les concepts de longueur, de distance et d'angle, en ce sens que nous montrerons comment calculer les valeurs numériques des longueurs, des distances et des angles à partir des coordonnées des points et des composantes des vecteurs. À cette fin, ces coordonnées et ces composantes seront ici exprimées relativement à un repère orthonormé fixe : $\langle O; \vec{i}, \vec{j} \rangle$ pour $\mathbb{R}^2$ et $\langle O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ pour $\mathbb{R}^3$. Dans $\mathbb{R}^2$, on écrira $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$, tandis que dans $\mathbb{R}^3$, on écrira $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

De plus, les représentations graphiques de ces repères seront conventionnellement d'orientation positive.

L'algébrisation de la géométrie est à l'origine des mathématiques qui sous-tendent de nombreuses applications dans la vie contemporaine : images de synthèse (photographie, cinéma, jeux vidéo), robotique spatiale ou médicale, positionnement avec GPS, etc. Bien que les concepts de longueur, de distance ou d'angle se généralisent sans difficulté à l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ de dimension n arbitraire, la plupart des exemples et des exercices de ce chapitre seront tirés de contextes bidimensionnels ou tridimensionnels.

LES LONGUEURS ET LES DISTANCES

Voyons tout d'abord une formule de calcul explicite de la longueur d'un vecteur à partir de ses composantes dans un repère orthonormé. Cela nous permettra de calculer la distance entre deux points dont on connaît les coordonnées. Nous verrons ensuite comment on peut associer à tout vecteur non nul $\vec{v}$ un vecteur unitaire (de longueur 1) qui a la même direction et le même sens que $\vec{v}$. Enfin, nous appliquerons ces notions à la description de quelques lieux géométriques familiers.

2.1.1 LA LONGUEUR (NORME) D'UN VECTEUR

Tel qu'il est défini au tout début du chapitre 1, un vecteur est la donnée simultanée d'une longueur, d'une direction et d'un sens. Dans cette définition, les mots *longueur*, *direction* et *sens* sont des termes primitifs. Cependant, la longueur d'un vecteur $\vec{v}$ correspond, dans un espace euclidien muni d'un repère orthonormé, à sa **norme**.

Norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur $\vec{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, notée $\|\vec{v}\|$, est définie par

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

Remarques

1. Dans cette définition, la racine carrée est non négative : $\|\vec{v}\| \geq 0$.
2. Les deux propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition de $\|\vec{v}\|$:
 $\|\vec{v}\| = 0$ si et seulement si $\vec{v} = \vec{0}$;
 $\|k\vec{v}\| = |k| \|\vec{v}\|$.
3. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$. C'est l'**inégalité du triangle** : dans tout triangle, la longueur d'un côté quelconque est inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres. Autrement dit : la ligne droite est le plus court chemin entre deux points dans un espace euclidien.

Le théorème de Pythagore permet de voir facilement que la norme d'un vecteur dans $\mathbb{R}^2$ correspond à sa longueur (voir la figure 2.1).

De même, dans $\mathbb{R}^3$, deux applications successives du théorème de Pythagore permettent de voir que si $\vec{v} = (a, b, c)$, alors sa norme $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ correspond bien à la longueur du vecteur $\vec{v}$ (voir la figure 2.2). En effet,

$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$L^2 = h^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

et donc

$$L = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

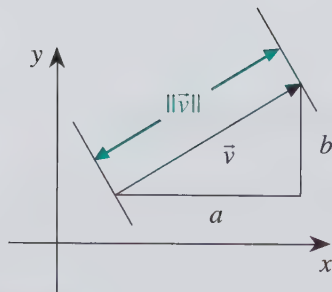


FIGURE 2.1 La norme d'un vecteur $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^2$:
 $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

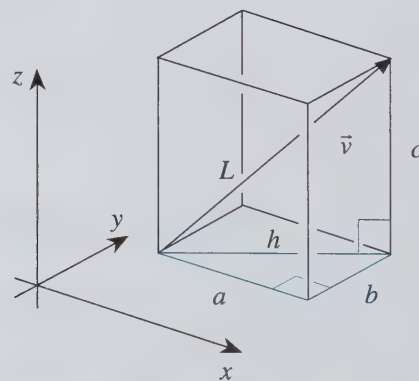


FIGURE 2.2 La norme d'un vecteur $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^3$:
 $\|\vec{v}\| = L = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

EXEMPLE 1

$$\|(-2, 3, 1)\| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$

EXEMPLE 2

$$\|3\vec{i} - 4\vec{k}\| = \|(3, 0, -4)\| = \sqrt{9 + 0 + 16} = 5$$

EXEMPLE 3

$$\|(5, 10, 15)\| = \|5(1, 2, 3)\| = |5| \|(1, 2, 3)\| = 5\sqrt{14}$$

EXEMPLE 4

$$\|(1, -1, 2, 4)\| = \sqrt{22}$$

2.1.2 LA DISTANCE ENTRE DEUX POINTS

Distance entre deux points

Dans un espace euclidien, la **distance** entre deux points A et B , notée $d(A, B)$, est la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

EXEMPLE 1

Pour $A(3, 4)$ et $B(-1, 5)$, on aura

$$d(A, B) = \|(-1, 5) - (3, 4)\| = \|(-4, 1)\| = \sqrt{17}.$$

EXEMPLE 2

Pour $A(1, 2, 3)$ et $B(-3, 2, 1)$, on aura

$$d(A, B) = \|(-3, 2, 1) - (1, 2, 3)\| = \|(-4, 0, -2)\| = 2\sqrt{5}.$$

Remarques

1. $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA}\| = d(B, A)$.
2. $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.
3. $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ (inégalité du triangle).

2.1.3 LES VECTEURS UNITAIRES

Vecteur unitaire

Un vecteur $\vec{u}$ est appelé **unitaire** si $\|\vec{u}\| = 1$.

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires par définition.

Dans $\mathbb{R}^2$, tout vecteur de la forme $(\cos \theta, \sin \theta)$ est unitaire, car

$$\|(\cos \theta, \sin \theta)\| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

(voir la figure 2.3).

Inversement, puisque tout vecteur unitaire $\vec{u}$ dans $\mathbb{R}^2$ peut être représenté par une flèche-rayon dans le cercle trigonométrique, il existe un et un seul angle θ tel que $\vec{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $0 \leq \theta < 2\pi$.

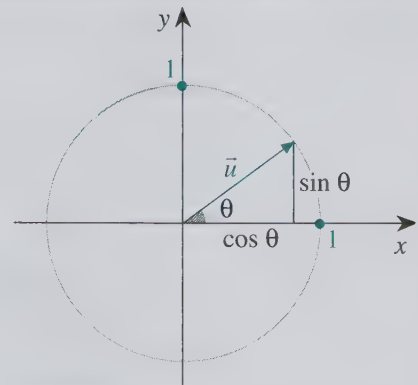


FIGURE 2.3 Un vecteur unitaire dans $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLE 1

Dans $\mathbb{R}^2$, le vecteur $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ qui est obtenu à partir de $(\cos\theta, \sin\theta)$ pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ est un vecteur unitaire.

La proposition suivante montre comment on peut créer un vecteur unitaire à partir d'un vecteur non nul arbitraire.

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors le vecteur $\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$, que l'on écrit aussi $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, est un vecteur unitaire de même direction et de même sens que $\vec{v}$.

La proposition précédente se démontre comme suit :

$$\left\| \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \right\| = \left| \frac{1}{\|\vec{v}\|} \right| \|\vec{v}\| = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \|\vec{v}\| = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = 1.$$

EXEMPLE 2

Dans $\mathbb{R}^2$, tout vecteur non nul $\vec{v}$ peut s'écrire $\vec{v} = r(\cos\theta, \sin\theta)$. Par exemple, si $\vec{v} = (3, 5)$, alors, $\|\vec{v}\| = \sqrt{34}$. On écrit

$$(3, 5) = \sqrt{34} \left(\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}} \right),$$

ce qui donne

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{34}} \text{ et } \sin\theta = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$

et donc, $\theta \approx 1,03$ rad et $r = \sqrt{34}$.

Dans $\mathbb{R}^3$, tout vecteur unitaire $\vec{u}$ peut s'écrire

$$\vec{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

où α, β et γ sont les angles que forme le vecteur $\vec{u}$ avec les axes de coordonnées x, y et z respectivement (voir la figure 2.4).

Les composantes $\cos\alpha, \cos\beta$ et $\cos\gamma$ d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ sont appelées **cosinus directeurs** de $\vec{u}$ et de tout multiple $k\vec{u}$ de $\vec{u}$, pour $k > 0$.

EXEMPLE 3

Si $\vec{v} = (1, 2, 3)$, alors $\frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{14}} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ est un vecteur unitaire et les nombres $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}$ et $\frac{3}{\sqrt{14}}$ sont les cosinus directeurs de $(1, 2, 3)$.

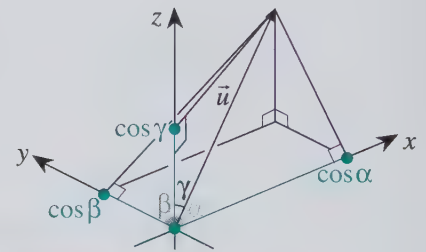


FIGURE 2.4 Les cosinus directeurs d'un vecteur unitaire dans $\mathbb{R}^3$.

2.1.4 LES LIEUX GÉOMÉTRIQUES

Il est possible de caractériser plusieurs courbes et surfaces dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$ par des équations ou des énoncés sur les coordonnées x, y et z d'un point $P(x, y, z)$ considéré comme variable. Ainsi, une courbe ou une surface peut être décrite comme l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ (selon le contexte) qui rendent telle équation vraie ou tel énoncé vrai.

EXEMPLE

L'expression $\{P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$ représente exactement l'ensemble des points situés sur la surface de la sphère de rayon 3 centrée à l'origine dans $\mathbb{R}^3$.

La définition qui suit permet de dire que la sphère dont il est question dans l'exemple précédent est le lieu des points P de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels $\|\overrightarrow{OP}\| = 3$.

Lieu géométrique dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^2$ (ou dans $\mathbb{R}^3$), l'ensemble des points P décrits dans un énoncé donné est appelé le **lieu géométrique** ou simplement le **lieu** correspondant à cet énoncé.

EXEMPLE 1 (LIEU DANS $\mathbb{R}^2$)

Dans $\mathbb{R}^2$, le lieu des points situés à exactement trois unités de distance du point $C(2, 3)$ est un cercle de rayon 3 centré au point $C(2, 3)$ (voir la figure 2.5). On pourrait aussi décrire ce lieu par

$$\{P(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|\overrightarrow{CP}\| = 3 \text{ et } \overrightarrow{OC} = (2, 3)\}$$

ou, encore, par

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x-2, y-3)\| = 3\},$$

ce qui s'écrit plus habituellement

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9\}.$$

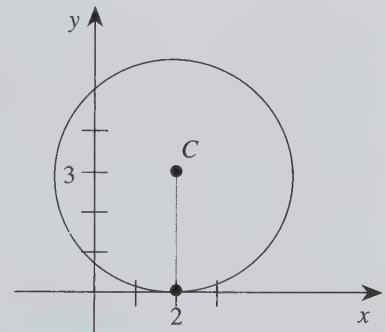


FIGURE 2.5

EXEMPLE 2 (LIEU DANS $\mathbb{R}^3$)

Dans $\mathbb{R}^3$, le lieu des points situés à exactement trois unités de distance du point $C(2, 3, -1)$ est une sphère de rayon 3 centrée au point $C(2, 3, -1)$ (voir la figure 2.6). On peut aussi décrire ce lieu par

$$\{P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|\overrightarrow{CP}\| = 3 \text{ et } \overrightarrow{OC} = (2, 3, -1)\}$$

ou, encore, par

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x-2, y-3, z+1)\| = 3\}$$

ou, comme c'est l'usage, par

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9\}.$$

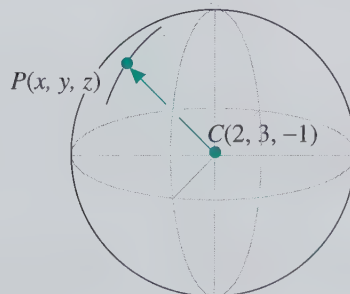


FIGURE 2.6

EXERCICES 2.1

1. Calculez la norme de chacun des vecteurs suivants.

a) $(2, -2, 1)$

b) $(200, -200, 100)$

c) $2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$

2. Calculez la distance entre les points suivants.

a) $P(1, 0, 1)$ et $Q(-1, 1, -1)$

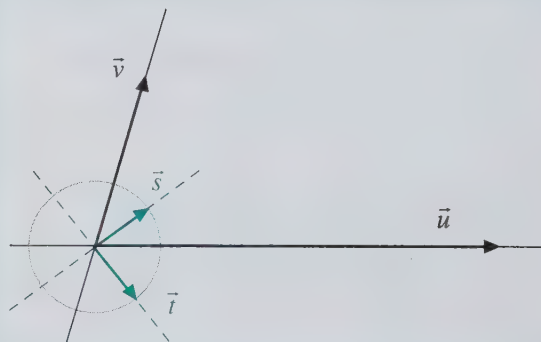
b) $A(2, 7)$ et $B(7, 2)$

3. Déterminez les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}$ ayant la même direction et le même sens que $\vec{v} = (6, -3, 6)$; déterminez aussi les composantes du vecteur $\vec{w}$ de longueur 5 ayant la même direction et le même sens que $\vec{v}$.

4. Déterminez les coordonnées du point B situé exactement à deux unités de distance du point A sur le segment AC de la figure ci-contre, si A et C sont donnés par $A(1, 2, 3)$ et $C(-4, 5, 8)$.

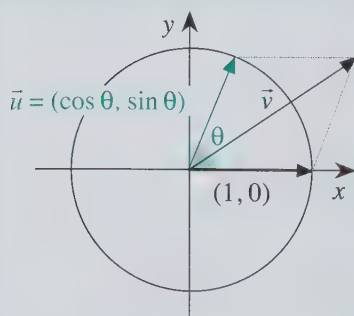


5. À partir de la figure ci-contre, déterminez les composantes des vecteurs unitaires $\vec{s}$ et $\vec{t}$ qui donnent les directions des droites bissectrices des angles aigus et obtus formés par $\vec{u} = (-3, -6, 6)$ et $\vec{v} = (2, -1, 2)$. (Coup de pouce : Dans un losange, les diagonales coïncident avec les bissectrices.)

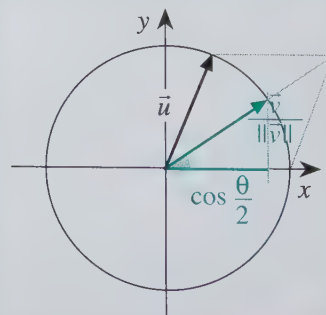


6. Pour $-\pi \leq \theta \leq \pi$, on peut obtenir de façon vectorielle $\cos \frac{\theta}{2}$ à partir de $\cos \theta$ de la façon suivante : dans la figure a), les vecteurs $(\cos \theta, \sin \theta)$ et $(1, 0)$ sont les côtés d'un losange dont la diagonale $\vec{v}$ forme un angle de $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe des abscisses. La première composante du vecteur unitaire $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ est donc $\cos \frac{\theta}{2}$, comme on le voit en b). Utilisez ce raisonnement pour obtenir $\cos \frac{\theta}{2}$ en fonction de $\cos \theta$.

a)



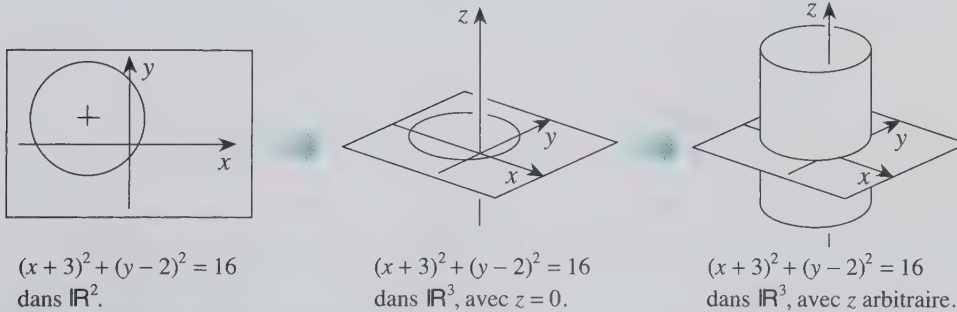
b)



7. Avec la formule que vous avez obtenue à la l'exercice 6, calculez la valeur de $\cos \frac{\pi}{16}$ à partir de $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et de trois subdivisions successives de l'angle $\frac{\pi}{2}$; comparez votre réponse avec celle affichée sur votre calculatrice.
8. Décrivez chacun des lieux géométriques suivants en donnant leurs caractéristiques particulières (les exemples sont limités à des droites, des plans, des cercles et des sphères).
- a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+3)^2 + (y-2)^2 = 16\}$ f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 16 \text{ et } z = 5\}$
 b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x+3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 16\}$ g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$
 c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 16\}$ h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \text{ et } z = 1\}$
 d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 16\}$ i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0\}$
 e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 16\}$
9. Lorsqu'on déplace une courbe plane dans l'espace tridimensionnel en suivant une direction constante, on décrit une surface cylindrique. On obtient ainsi des cylindres circulaires, des cylindres paraboliques, des cylindres elliptiques, etc. Par exemple,

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x+3)^2 + (y-2)^2 = 16\}$$

représente un cylindre circulaire de rayon 4 dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe des cotes (axe des z) et passe par le point $C(-3, 2, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$.



Décrivez aussi précisément que possible les surfaces cylindriques représentées par les expressions symboliques suivantes (illustrez votre description, si possible).

- a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y+3)^2 + (z-2)^2 = 16\}$
 b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sin x\}$
 c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2\}$
 d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0\}$
10. Décrivez par des expressions symboliques les lieux géométriques suivants.
- a) Le plan passant par le point $P(3, -2, 5)$ et qui est parallèle au plan d'équation $y = 0$.
 b) Le cylindre circulaire de rayon 5 dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point $P(1, 2, 3)$.
 c) La sphère de rayon 10 centrée au point $P(-1, 0, 1)$.
11. La sphère d'équation $(x-3)^2 + (y-5)^2 + (z+4)^2 = 25$ coupe le plan d'équation $z = 0$ selon un cercle. Quelle équation décrit ce cercle dans $\mathbb{R}^2$?

LE PRODUIT SCALAIRE ET LE CALCUL D'ANGLES

Le produit scalaire est une opération sur deux vecteurs dont le résultat est, comme son nom l'indique, un scalaire. Cette opération, issue de la notion de **travail** en physique, se révélera un outil essentiel dans le calcul des angles et dans les applications graphiques où interviennent des projections orthogonales.

2.2.1 LE PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

En physique, on représente les forces et les translations par des vecteurs. La figure 2.7 montre comment on calcule le **travail** T effectué par une force constante $\vec{F}$ appliquée à un objet ponctuel lors du déplacement de cet objet d'un point A à un point B en ligne droite selon une translation $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$. Pour mesurer le travail, il faut multiplier la **composante efficace** de $\vec{F}$ dans la direction de cette translation par la longueur de la translation :

$$\text{travail} = (\|\vec{F}\| \cos \theta) \|\vec{d}\| = \|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos \theta.$$

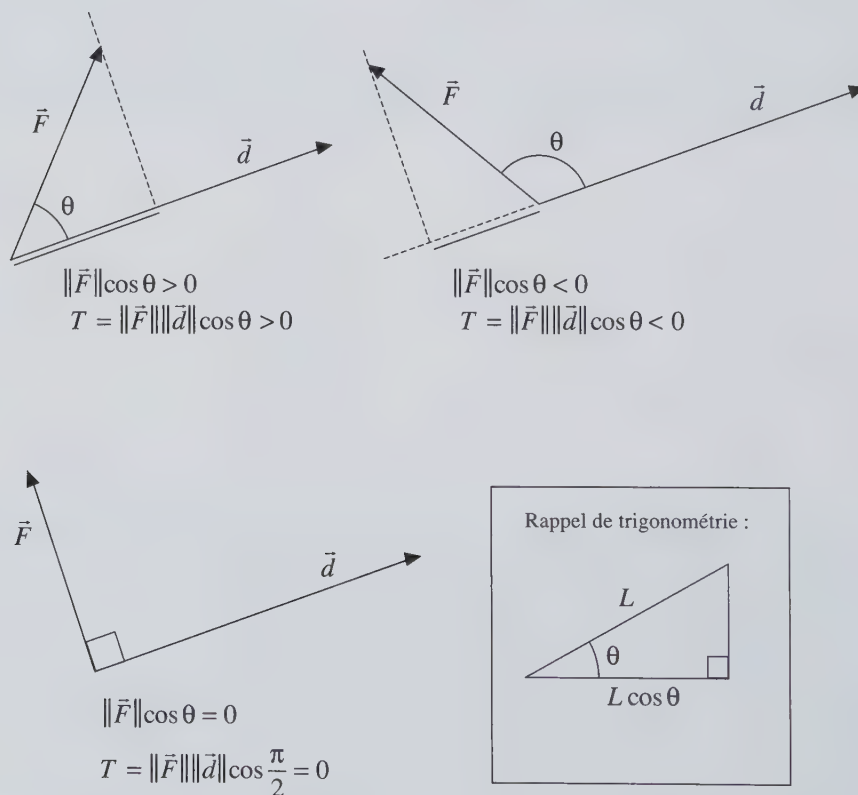


FIGURE 2.7 La mesure du travail T .

Selon le signe et la valeur de $\cos \theta$, le travail peut être un scalaire positif, négatif ou nul :

- si l'angle θ entre $\vec{F}$ et $\vec{d}$ est aigu ($0 \leq \theta < \pi/2$) alors $\|\vec{F}\| \cos \theta > 0$, et par suite $\|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos \theta > 0$;
- si l'angle θ entre $\vec{F}$ et $\vec{d}$ est obtus ($\pi/2 < \theta \leq \pi$), alors $\|\vec{F}\| \cos \theta < 0$, et par suite $\|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos \theta < 0$;

- si l'angle θ entre $\vec{F}$ et $\vec{d}$ est droit ou si $\vec{F} = \vec{0}$, alors $\|\vec{F}\| \cos \theta = 0$, et par suite $\|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos \theta = 0$.

EXEMPLE 1

Dans $\mathbb{R}^2$, une force constante $\vec{F} = 5\vec{j}$ est appliquée à un point mobile P contraint à se déplacer en ligne droite du point $(-2, 0)$ au point $(1, 3)$. On cherche le travail T effectué par la force constante $\vec{F}$ lors de cette translation (voir la figure 2.8).

Si on désigne par $\vec{d}$ la translation, on aura $\vec{d} = (1, 3) - (-2, 0) = (3, 3)$. Dans ce cas, la mesure de l'angle entre $\vec{F}$ et $\vec{d}$ est de $\theta = \frac{\pi}{4}$; T est alors donné par

$$\begin{aligned} T &= \|\vec{F}\| \|\vec{d}\| \cos \theta \\ &= \|5\vec{j}\| \|(3, 3)\| \cos \frac{\pi}{4} \\ &= (5)(3\sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 15 \text{ (unités de travail).} \end{aligned}$$

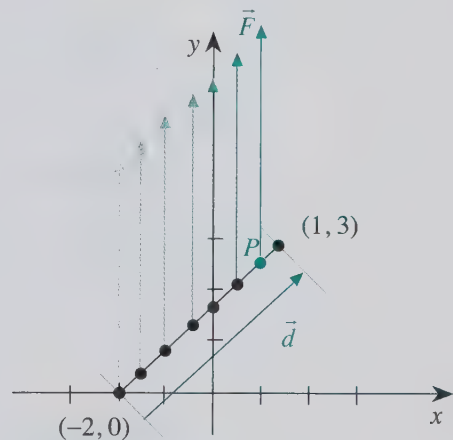


FIGURE 2.8

Qu'arrive-t-il dans le cas où l'angle θ entre $\vec{F}$ et $\vec{d}$ ne se devine pas facilement? La prochaine définition et le prochain théorème permettront de répondre à cette question à la sous-section 2.2.2.

Le produit scalaire de deux vecteurs

Étant donné deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'un même espace, le **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le nombre réel (scalaire) défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta,$$

où θ est l'angle que forment les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ lorsqu'on les rapporte à une même origine ($0 \leq \theta \leq \pi$ rad) (voir la figure 2.9). Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

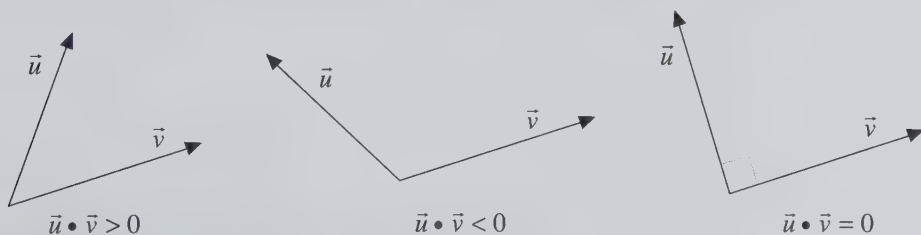


FIGURE 2.9

Remarque

Puisque $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ (quel que soit θ), on a $-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.

EXEMPLE 2

Dans $\mathbb{R}^2$,

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\|\|\vec{i}\| \cos 0 = 1; \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \|\vec{i}\|\|\vec{j}\| \cos \frac{\pi}{2} = 0; \quad \vec{i} \cdot (-\vec{i}) = \|\vec{i}\|\|-\vec{i}\| \cos \pi = -1;$$

$$\vec{i} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = \|\vec{i}\|\|\vec{i} + \vec{j}\| \cos \frac{\pi}{4} = (1)(\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1.$$

Les propriétés du produit scalaire

PS1 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Le produit scalaire est commutatif.

La commutativité du produit scalaire découle directement de la définition.

PS2 $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$ pour tout scalaire k :

La multiplication par un scalaire est commutative avec le produit scalaire.

si $k = 0$, il n'y a rien à démontrer; si $k \neq 0$, montrons, par exemple, que $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

$$\begin{aligned} (k\vec{u}) \cdot \vec{v} &= \|k\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos a, \text{ où } a \text{ est l'angle situé entre } k\vec{u} \text{ et } \vec{v}; \\ &= |k|\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos a, \text{ où } a \text{ est l'angle situé entre } k\vec{u} \text{ et } \vec{v}; \\ &= k\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos b, \text{ où } b \text{ est l'angle situé entre } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ (si } k > 0, \text{ alors } a = b; \text{ si } k < 0, \\ &\quad \text{alors } \cos b = -\cos a); \\ &= k(\vec{u} \cdot \vec{v}). \end{aligned}$$

PS3 $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

et $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Le produit scalaire est distributif sur la somme vectorielle à gauche comme à droite.

Montrons la première égalité (l'autre se déduit ensuite par la commutativité) :

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} &= (\|\vec{u} + \vec{v}\| \cos c) \|\vec{w}\|, \text{ où } c \text{ est l'angle situé entre } \vec{u} + \vec{v} \text{ et } \vec{w}; \\ &= (\|\vec{u}\| \cos a + \|\vec{v}\| \cos b) \|\vec{w}\|, \text{ où } a \text{ est l'angle situé entre } \vec{u} \text{ et } \vec{w}, \text{ et } b, \text{ celui} \\ &\quad \text{situé entre } \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ (voir la figure 2.10);} \\ &= \|\vec{u}\| \cos a \|\vec{w}\| + \|\vec{v}\| \cos b \|\vec{w}\|; \\ &= \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}. \end{aligned}$$

On peut vérifier en adaptant correctement la figure 2.10 que la propriété remarquable $\|\vec{u} + \vec{v}\| \cos c = \|\vec{u}\| \cos a + \|\vec{v}\| \cos b$ est toujours vraie même si les angles a ou b sont obtus, car les signes des cosinus sont conséquents.

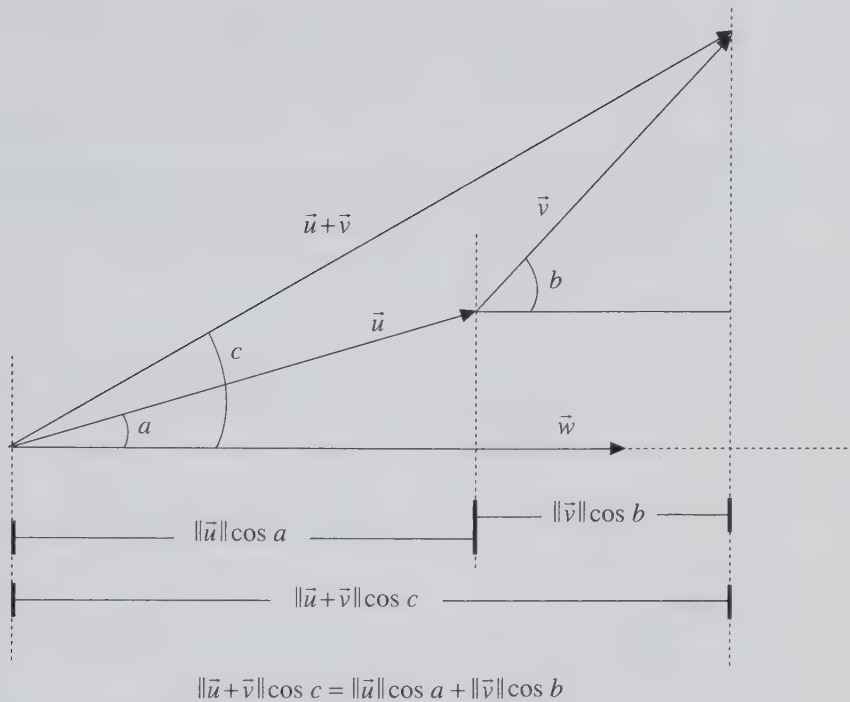


FIGURE 2.10 La distributivité du produit scalaire.

PS4 $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Le produit scalaire d'un vecteur par lui-même donne le carré de sa norme.

Cette propriété est évidente si $\vec{u} = \vec{0}$. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| \cos 0 = \|\vec{u}\|^2.$$

Calcul du produit scalaire à partir des composantes

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ des vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, écrits dans une même base orthonormée, peut être calculé directement à partir des composantes de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n.$$

Preuve

Supposons $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dans $\mathbb{R}^2$; alors

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) \\ &= (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}) \cdot (v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}) \\ &= (u_1 \vec{i}) \cdot (v_1 \vec{i}) + (u_1 \vec{i}) \cdot (v_2 \vec{j}) + (u_2 \vec{j}) \cdot (v_1 \vec{i}) + (u_2 \vec{j}) \cdot (v_2 \vec{j}) \quad (\text{distributivité du produit scalaire}) \\ &= u_1 v_1 (\vec{i} \cdot \vec{i}) + u_1 v_2 (\vec{i} \cdot \vec{j}) + u_2 v_1 (\vec{j} \cdot \vec{i}) + u_2 v_2 (\vec{j} \cdot \vec{j}) \\ &= u_1 v_1 (1) + u_1 v_2 (0) + u_2 v_1 (0) + u_2 v_2 (1) \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2. \end{aligned}$$

La preuve est essentiellement la même dans $\mathbb{R}^n$, car le produit scalaire de deux vecteurs distincts d'une base orthonormée est nul (ils sont à angle droit) et que le produit scalaire d'un vecteur de cette base par lui-même est 1 (vecteur unitaire).

EXEMPLE 3

Une force constante $\vec{F} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ est appliquée à un point mobile P lors d'une translation de ce dernier en ligne droite du point $A(-2, 4, 3)$ au point $B(5, 2, 8)$. On cherche la valeur du travail T effectué par la force $\vec{F}$ lors de cette translation. La translation est représentée par

$$\vec{d} = (5, 2, 8) - (-2, 4, 3) = (7, -2, 5).$$

Le travail est donc

$$\begin{aligned} T &= \vec{F} \cdot \vec{d} \\ &= (-2, -3, 5) \cdot (7, -2, 5) \\ &= (-2)(7) + (-3)(-2) + (5)(5) \\ &= 17 \text{ (unités de travail).} \end{aligned}$$

EXEMPLE 4

Le tableau suivant présente l'état des placements de M. Lefric au début de l'année (les taux d'intérêt sont annuels et le capital, en milliers de dollars).

	Placements de M. Lefric (en milliers de \$)				
	Obligations	Actions A	Actions B	Fonds X	Autres
Capital	5	3	2	4	1
Taux d'intérêt	0,100	0,120	0,090	0,085	0,110

M. Lefric veut connaître le montant des intérêts que rapporteront ses placements au bout d'une année.

On peut considérer les capitaux investis et les taux d'intérêt correspondants comme les composantes de deux vecteurs de $\mathbb{R}^5$:

vecteur « capital » $\vec{C} = (5, 3, 2, 4, 1)$;

vecteur « taux » $\vec{t} = (0,100; 0,120; 0,090; 0,085; 0,110)$ (Remarque: Lorsque les composantes d'un vecteur comprennent des nombres décimaux, on les sépare par des points-virgules (;) pour éviter toute confusion avec la virgule décimale.)

Dans ce contexte, l'intérêt sur le capital de M. Lefric au bout d'une année est représenté par le produit scalaire $\vec{C} \cdot \vec{t}$:

$$\begin{aligned} \vec{C} \cdot \vec{t} &= (5, 3, 2, 4, 1) \cdot (0,100; 0,120; 0,090; 0,085; 0,110) \\ &= (5)(0,100) + (3)(0,120) + (2)(0,090) + (4)(0,085) + (1)(0,110) \\ &= 1,490 \text{ (c'est-à-dire 1490 \$).} \end{aligned}$$

Les placements de M. Lefric ont donc rapporté 1490 \$ d'intérêts et c'est en quelque sorte le **travail** (au sens de la physique) effectué par le vecteur intérêt sur le vecteur capital.

2.2.2 L'ANGLE ENTRE DEUX VECTEURS

On peut exprimer le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ de deux manières:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta \quad (\text{selon la définition})$$

ou

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \quad (\text{vu à la sous-section 2.2.1}).$$

On en déduit que :

Cosinus de l'angle entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}}$$

Il est donc possible de calculer l'angle θ entre deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ directement à partir des composantes de ces deux vecteurs ; l'angle θ défini par

$$\theta = \arccos \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \right)$$

sera toujours compris entre 0 et π radians (entre 0 et 180 degrés).

EXEMPLE 1

Soit la pyramide $OABC$ illustrée à la figure 2.11. On veut calculer la valeur de l'angle $\widehat{ACB}$.

Cet angle est situé entre les vecteurs $\vec{CA}$ et $\vec{CB}$:

$$\begin{aligned} \vec{CA} &= (1, 0, 0) - (0, 0, 3) = (1, 0, -3) \\ \vec{CB} &= (0, 2, 0) - (0, 0, 3) = (0, 2, -3) \\ \cos \widehat{ACB} &= \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{\|\vec{CA}\| \|\vec{CB}\|} \\ &= \frac{(1, 0, -3) \cdot (0, 2, -3)}{\|(1, 0, -3)\| \|(0, 2, -3)\|} \\ &= \frac{0 + 0 + 9}{\sqrt{1+0+9} \sqrt{0+4+9}} \\ &= \frac{9}{\sqrt{10} \sqrt{13}} \\ &\approx 0,789. \end{aligned}$$

Donc, $\cos \widehat{ACB} \approx 0,789$ et, par conséquent, $\widehat{ACB} \approx 37,87^\circ$.

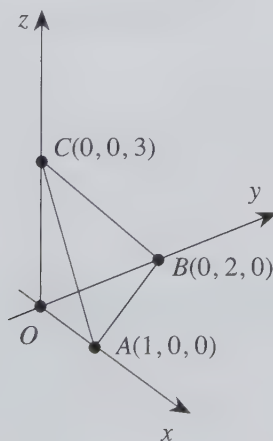


FIGURE 2.11

EXEMPLE 2

La figure 2.12 représente un cône (dans $\mathbb{R}^3$) dont le sommet est l'origine O , dont l'axe de symétrie est l'axe des z et dont l'angle d'ouverture θ , mesuré à partir de l'axe des z , est $\frac{\pi}{4}$ rad. On recherche une équation en x , y et z qui caractérise tous les points $P(x, y, z)$ situés sur ce cône.

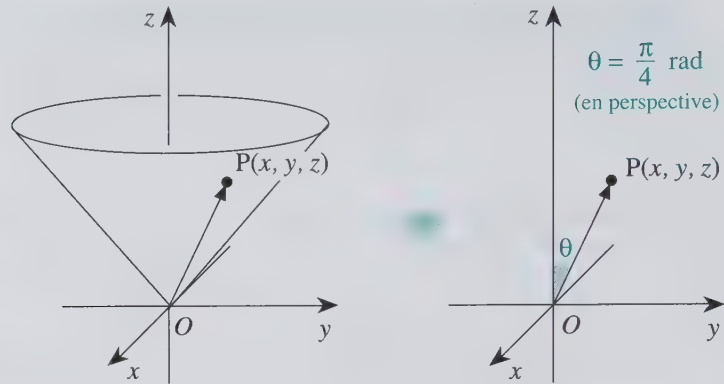


FIGURE 2.12

Ce qui caractérise les points $P(x, y, z)$ autres que O situés sur ce cône, c'est précisément le fait que l'angle situé entre le vecteur-position $\overrightarrow{OP}$ et le vecteur $\vec{k}$ dans la direction et le sens de l'axe des z mesure $\frac{\pi}{4}$ rad :

$$\frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{k}}{\|\overrightarrow{OP}\| \|\vec{k}\|} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Puisque $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$, on obtient

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

ce qui donne

$$2z = \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ou, encore,

$$4z^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2),$$

puis finalement (après simplification)

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Conformément à la figure 2.12, on n'utilise que la racine positive. Cette équation est aussi satisfaite par le sommet O du cône. On peut donc décrire symboliquement ce cône par

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour lesquels $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ sont dits **orthogonaux**.

On écrit $\vec{u} \perp \vec{v}$, ce qui se lit « $\vec{u}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$ » lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et non nuls.

L'angle θ situé entre deux vecteurs orthogonaux non nuls (perpendiculaires) est forcément un angle droit, car

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0, \text{ puisque } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Et, puisque $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, on a $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Inversement, si l'angle θ entre deux vecteurs est droit, alors $\cos \theta = 0$ et par suite, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, ce qui signifie que ces vecteurs sont orthogonaux.

EXEMPLE

Il est bien connu que **les diagonales d'un losange se coupent à angle droit**.

Voici une démonstration vectorielle de cet énoncé, basée sur les propriétés du produit scalaire. En fonction des côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les diagonales du losange (voir la figure 2.13) s'écrivent $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$; pour démontrer que les diagonales se coupent à angle droit, il faut montrer que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$:

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0, \end{aligned}$$

car dans un losange, les côtés ont la même longueur.

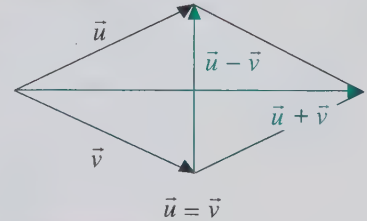


FIGURE 2.13 Les diagonales d'un losange.

Vecteur $\vec{u}_\perp$ dans $\mathbb{R}^2$

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$; alors le vecteur « $\vec{u}$ perpendiculaire », noté $\vec{u}_\perp$, est défini comme suit:

- 1) si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $\vec{u}_\perp$ est le vecteur obtenu de $\vec{u}$ en appliquant à ce dernier une rotation de $\pi/2$ rad (90 degrés) dans le sens antihoraire autour de l'origine;
- 2) si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u}_\perp = \vec{0}$ (autrement dit: $\vec{0}_\perp = \vec{0}$) (voir la figure 2.14).

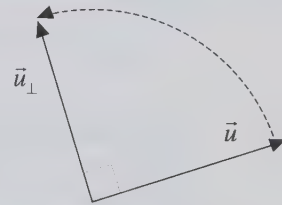
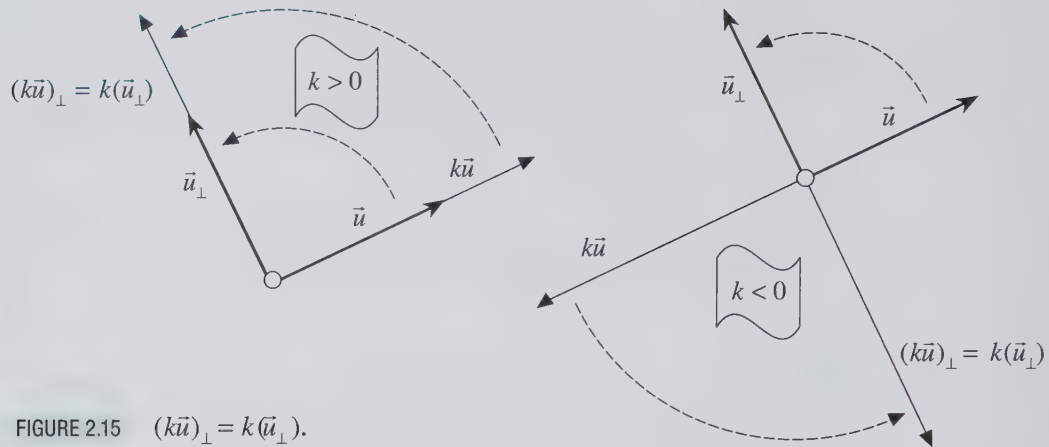
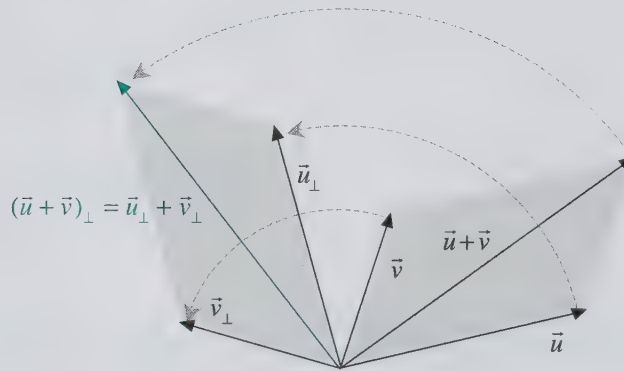
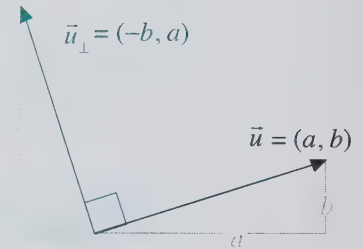


FIGURE 2.14 Le vecteur perpendiculaire $\vec{u}_\perp$.

Les propriétés du vecteur $\vec{u}_\perp$ relativement à $\vec{u}$

1. $\|\vec{u}\| = \|\vec{u}_\perp\|$: en effet, une rotation n'affecte pas les longueurs.
2. $\vec{u} \cdot \vec{u}_\perp = 0$: en effet, si $\vec{u} \neq \vec{0}$, l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{u}_\perp$ est par définition $\pi/2$; si $\vec{u} = \vec{0}$, alors évidemment $\vec{u} \cdot \vec{u}_\perp = 0$.
3. $(k\vec{u})_\perp = k(\vec{u}_\perp)$ quel que soit le scalaire k (voir la figure 2.15).
4. $(\vec{u} + \vec{v})_\perp = \vec{u}_\perp + \vec{v}_\perp$ (voir la figure 2.16).
5. $\vec{i}_\perp = \vec{j}$ et $\vec{j}_\perp = -\vec{i}$.
6. Si $\vec{u} = (a, b)$, alors $\vec{u}_\perp = (-b, a)$; en effet, $(a, b)_\perp = (a\vec{i} + b\vec{j})_\perp = (a\vec{i})_\perp + (b\vec{j})_\perp = a(\vec{i}_\perp) + b(\vec{j}_\perp) = a\vec{j} - b\vec{i} = (-b, a)$ (voir aussi la figure 2.17).

FIGURE 2.15 $(k\vec{u})_{\perp} = k(\vec{u}_{\perp})$.FIGURE 2.16 $(\vec{u} + \vec{v})_{\perp} = \vec{u}_{\perp} + \vec{v}_{\perp}$.FIGURE 2.17 Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}_{\perp}$.**EXEMPLE (CONSTRUCTION D'UN CARRÉ)**

Le quadrilatère $ABCD$ de la figure 2.18 représente un carré dans $\mathbb{R}^2$. On donne les points $A(1, 5)$ et $B(5, 2)$. On cherche les coordonnées des points C et D .

Pour ce faire, on pose :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overrightarrow{AB} \\ &= (5, 2) - (1, 5) \\ &= (4, -3)\end{aligned}$$

Alors $\vec{u}_{\perp} = (3, 4)$.

On a $C = B + \vec{u}_{\perp}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= (5, 2) + (3, 4) \\ &= (8, 6).\end{aligned}$$

On a $D = A + \vec{u}_{\perp}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= (1, 5) + (3, 4) \\ &= (4, 9).\end{aligned}$$

Les points recherchés sont donc $C(8, 6)$ et $D(4, 9)$.

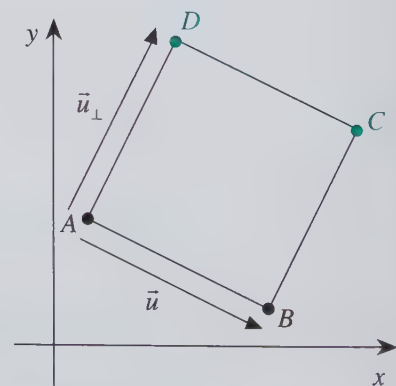


FIGURE 2.18

Dans $\mathbb{R}^2$, si $\vec{u} = (a, b) \neq (0, 0)$, il n'existe qu'une seule direction orthogonale à $\vec{u}$ et c'est celle de $\pm(-b, a)$; cependant, dans $\mathbb{R}^3$, si $\vec{u} = (a, b, c)$, il existe alors une infinité de directions perpendiculaires à $\vec{u}$: par exemple, $(-b, a, 0)$, $(0, -c, b)$, $(-c, 0, a)$, $(bc, ac, -2ab)$, etc. C'est pourquoi le vecteur $\vec{u}_\perp$ n'est défini que dans $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs, dans $\mathbb{R}^3$, étant donné deux vecteurs non nuls et non parallèles $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il n'existe alors qu'une seule direction perpendiculaire à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. Nous verrons comment trouver cette direction au chapitre 3 avec le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$.

2.2.3 LA LOI DES COSINUS ET LE PRODUIT SCALAIRE

Le théorème de Pythagore nous donne la relation $c^2 = a^2 + b^2$ dans un triangle rectangle où c est l'hypoténuse, et a et b sont les côtés de l'angle droit (voir la figure 2.19). La **loi des cosinus**, aussi appelée **théorème d'Al-Kashi**¹, donne $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$, où θ est l'angle opposé au côté c (voir la figure 2.20) dans un triangle quelconque.

On peut démontrer la loi des cosinus dans le langage vectoriel en considérant les côtés du triangle de la figure 2.20 comme des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ (voir la figure 2.21).

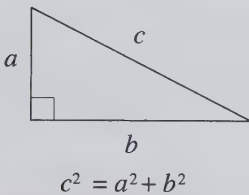


FIGURE 2.19

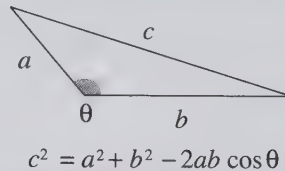


FIGURE 2.20

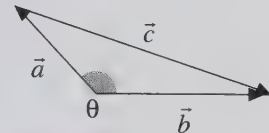


FIGURE 2.21

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
 \|\vec{c}\|^2 &= \|\vec{b} - \vec{a}\|^2 \\
 &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\
 &= \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} \\
 &= \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos \theta + \|\vec{a}\|^2 \\
 &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos \theta.
 \end{aligned}$$

L'égalité $\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos \theta$ ainsi obtenue est précisément la loi des cosinus. Le théorème de Pythagore est simplement un cas particulier de la loi des cosinus quand $\theta = \pi/2$.

2.2.4 LES PROJECTIONS ORTHOGONALES

L'un des problèmes les plus fréquents en mécanique élémentaire consiste à décomposer une force donnée $\vec{F}$ en une somme $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ de telle manière que $\vec{F}_1$ soit parallèle à une direction donnée $\vec{u}$ et que $\vec{F}_2$ soit orthogonal à $\vec{u}$ (voir la figure 2.22).

1. Mathématicien et astronome d'origine perse né à Kashan (d'où le nom d'Al-Kashi) en Iran en 1380, et mort à Samarkand en Ouzbékistan en 1429.

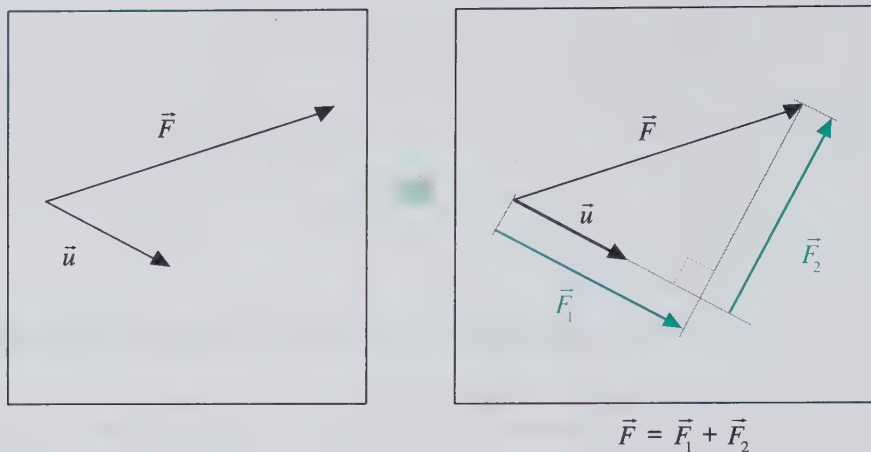


FIGURE 2.22

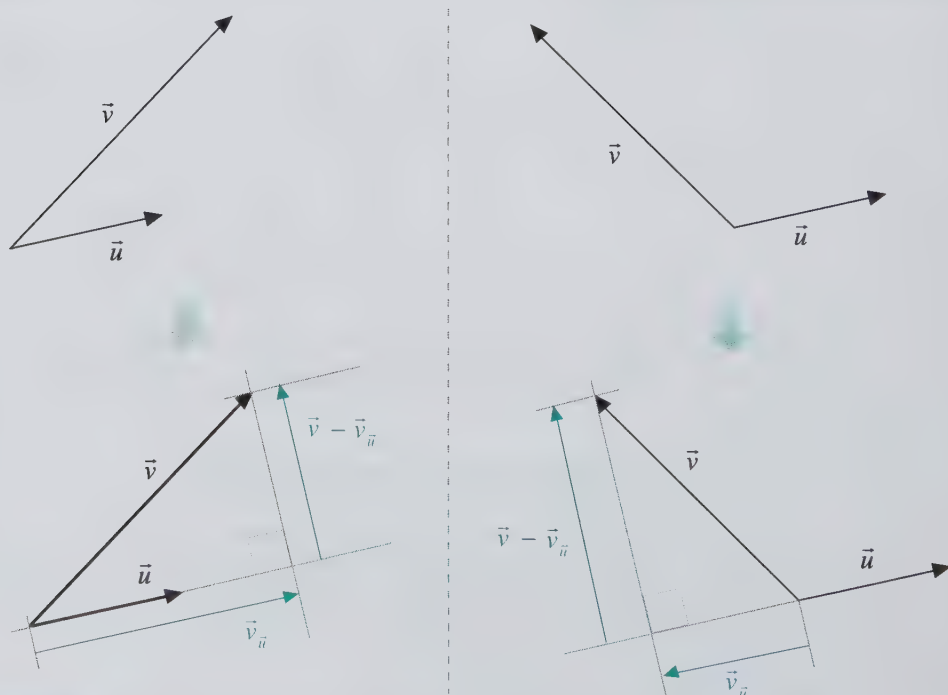
Dans la figure 2.22, le vecteur $\vec{F}_1$ est la projection orthogonale du vecteur $\vec{F}$ sur le vecteur $\vec{u}$. Cela nous conduit à la définition suivante.

Projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$: $\vec{v}_u$

Étant donné deux vecteurs non nuls, non perpendiculaires et non parallèles $\vec{v}$ et $\vec{u}$ dans $\mathbb{R}^n$, la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ est l'unique vecteur (noté $\vec{v}_u$) pour lequel :

- 1) $\vec{v}_u$ est parallèle à $\vec{u}$: $\vec{v}_u \parallel \vec{u}$;
- 2) $\vec{v} - \vec{v}_u$ est perpendiculaire à $\vec{u}$: $(\vec{v} - \vec{v}_u) \perp \vec{u}$ (voir la figure 2.23).

Si $\vec{v} \parallel \vec{u}$, alors $\vec{v}_u = \vec{v}$. Si $\vec{v} \perp \vec{u}$, ou si $\vec{v} = \vec{0}$, ou si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{v}_u = \vec{0}$.

FIGURE 2.23 Projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.

Il n'existe qu'un seul vecteur $\vec{v}_{\vec{u}}$ ayant les propriétés 1 et 2 de la définition précédente. En effet, ces propriétés à elles seules suffisent pour déterminer de façon unique la valeur de $\vec{v}_{\vec{u}}$ en fonction de $\vec{v}$ et de $\vec{u}$.

Du fait que $\vec{v}_{\vec{u}} = k\vec{u}$ (propriété 1), la propriété 2, $(\vec{v} - \vec{v}_{\vec{u}}) \cdot \vec{u} = 0$, équivaut à

$$\begin{aligned}(\vec{v} - k\vec{u}) \cdot \vec{u} &= 0, \\ \vec{v} \cdot \vec{u} - k\vec{u} \cdot \vec{u} &= 0, \\ k &= \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \text{ (puisque } \vec{u} \neq \vec{0}\text{)}.\end{aligned}$$

En substituant cette valeur de k dans $\vec{v}_{\vec{u}} = k\vec{u}$, on obtient, pour $\vec{u} \neq \vec{0}$, une formule de calcul explicite pour $\vec{v}_{\vec{u}}$.

Formule de calcul de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ (pour $\vec{u} \neq \vec{0}$)

$$\vec{v}_{\vec{u}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} \quad \text{et} \quad \|\vec{v}_{\vec{u}}\| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|}$$

Remarque

On ne peut pas simplifier les $\vec{u}$ dans l'expression $\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}$, mais on peut remplacer $\vec{u} \cdot \vec{u}$ par l'expression équivalente $\|\vec{u}\|^2$, ce qui donnera $\vec{v}_{\vec{u}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$.

EXEMPLE 1 (MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE)

Dans $\mathbb{R}^2$, on suppose qu'un objet se déplace dans la direction $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ sous l'effet d'une force $\vec{F} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$. On veut exprimer $\vec{F}$ comme une somme $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ de deux forces, l'une dans la direction du mouvement, l'autre perpendiculaire à cette direction. Voici comment on détermine $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{\vec{u}} = \frac{(6, 2) \cdot (2, -1)}{(2, -1) \cdot (2, -1)} (2, -1) = \frac{10}{5} (2, -1) = (4, -2);$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{F}_1 = (6, 2) - (4, -2) = (2, 4).$$

On peut vérifier que $\vec{F}_1 \perp \vec{F}_2$ en s'assurant que le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul :

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = (4, -2) \cdot (2, 4) = 0.$$

EXEMPLE 2 (CINÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE)

Supposons qu'à un moment donné le vecteur vitesse d'une particule en mouvement soit $\vec{v} = (1, -2, 3)$ et que son vecteur accélération soit $\vec{a} = (2, 2, 1)$. On désire calculer l'accélération tangentielle $\vec{a}_t$ et l'accélération radiale $\vec{a}_r$. L'accélération tangentielle est la projection orthogonale de l'accélération vectorielle sur la vitesse vectorielle : $\vec{a}_t = \vec{a}_{\vec{v}}$ (voir la figure 2.24).

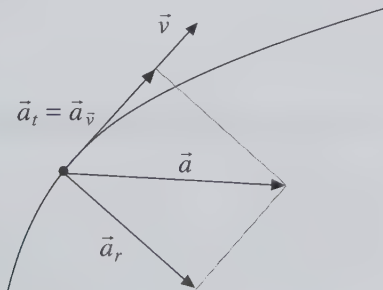


FIGURE 2.24

On a donc

$$\vec{a}_t = \vec{a}_v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} = \frac{1}{14}(1, -2, 3).$$

L'accélération radiale $\vec{a}_r$ est simplement la différence entre l'accélération vectorielle $\vec{a}$ et l'accélération tangentielle : $\vec{a}_r = \vec{a} - \vec{a}_t = (2, 2, -1) - \frac{1}{14}(1, -2, 3) = \left(\frac{27}{14}, \frac{30}{14}, \frac{11}{14}\right)$.

On peut aussi se demander si, dans ce cas, la vitesse scalaire (norme de la vitesse vectorielle) augmente, diminue ou reste stable. La réponse sera donnée par le **signe** du produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{v}$: $\vec{a} \cdot \vec{v} = (2, 2, 1) \cdot (1, -2, 3) = 1 > 0$ et donc la vitesse scalaire augmente.

EXEMPLE 3 (CINÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE)

Supposons qu'à l'instant où une particule passe par le point $A(-2, 4, -2)$, sa vitesse vectorielle soit donnée par $\vec{v} = (5, -2, -2)$. À cet instant précis, la particule se rapproche-t-elle ou s'éloigne-t-elle du point $P(1, 0, 3)$? Quelle est la vitesse d'éloignement ou de rapprochement en l'occurrence? La réponse à la première question sera donnée par le signe du produit scalaire entre les vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AP}$, et la réponse à la seconde question est simplement la norme de la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur $\overrightarrow{AP}$. Voyons les calculs.

Puisque $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AP} = (5, -2, -2) \cdot (3, -4, 5) = 13 > 0$, la particule se rapproche de P ;

la vitesse de rapprochement est de $\|\vec{v}_{AP}\| = \frac{|\vec{v} \cdot \overrightarrow{AP}|}{\|\overrightarrow{AP}\|} = \frac{13}{\|(3, -4, 5)\|} = \frac{13}{\sqrt{50}}$ unités de vitesse.

EXEMPLE 4 (GÉOMÉTRIE)

Dans la figure 2.25, on cherche les coordonnées spatiales du point D , pied de la perpendiculaire abaissée du point C sur le segment AB . On donne $A(1, 2, 3)$, $B(4, 8, -3)$ et $C(6, 3, 2)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sur le vecteur $\overrightarrow{AB}$. De plus, $D = A + \overrightarrow{AD}$.

On trouve donc le point D en écrivant

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}_{\overrightarrow{AB}} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AB} \\ &= (1, 2, 3) + \frac{(5, 1, -1) \cdot (3, 6, -6)}{(3, 6, -6) \cdot (3, 6, -6)} (3, 6, -6) \\ &= (2, 4, 1). \end{aligned}$$

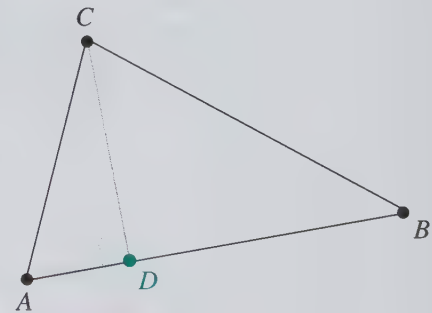


FIGURE 2.25

2.2.5 LES COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Pour repérer les points sur une sphère, il semble naturel de se donner un repère orthonormé $\langle O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ dont l'origine O coïncide avec le centre de la sphère. Ainsi, tout point A de la sphère se trouve déterminé par trois coordonnées cartésiennes : $A(x, y, z)$. Cependant, tant qu'on reste à la surface de la sphère, il suffit de deux informations pour repérer un point quelconque : sa **longitude** θ et sa **latitude** ϕ (voir la figure 2.26).

Coordonnées sphériques

Étant donné un point $A(x, y, z)$ dans l'espace euclidien tridimensionnel muni du repère orthonormé $\langle O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$, on définit les coordonnées sphériques ρ (*rhô*, lettre *r* en grec), θ et ϕ de ce point comme suit :

- 1) ρ est la distance du point A à l'origine O du repère ;
- 2) θ est l'angle orienté, compris entre $-\pi$ et π (entre -180° et 180°), entre les vecteurs $\vec{i}$ et $(x, y, 0)$;
- 3) ϕ est l'angle orienté, compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (entre -90° et 90°), entre les vecteurs (x, y, z) et $(x, y, 0)$.

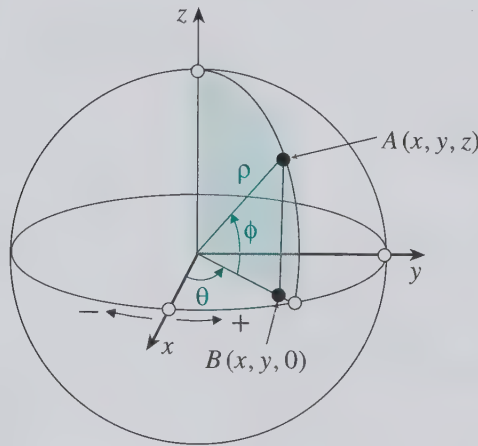


FIGURE 2.26 Les coordonnées sphériques ρ , θ et ϕ du point $A(x, y, z)$.

Remarques

1. Selon le domaine d'application (géolocalisation, robotique, animation 3D, etc.), il peut y avoir des différences dans la notation et dans la définition des coordonnées sphériques. Nous avons adopté ici les conventions actuellement en usage dans les systèmes de géolocalisation par satellite (GPS).
2. Dans la représentation de la Terre comme sphère parfaite (en négligeant les dénivellations et les aplatissements des pôles), on appelle **repère géocentrique** le repère orthonormé $\langle O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ de l'espace tridimensionnel dont l'origine O se situe au centre de la Terre, dont le vecteur $\vec{k}$ pointe vers le pôle Nord, dont le vecteur $\vec{i}$ pointe vers le méridien de Greenwich (demi-cercle allant du pôle Nord au pôle Sud, passant par l'observatoire de Greenwich en Angleterre). Dans ce contexte, l'angle θ dans la définition des coordonnées sphériques est la **longitude** du point A et l'angle ϕ est sa **latitude**. Un **parallèle terrestre** est un cercle sur la Terre, dans un plan parallèle à celui de l'équateur, dont tous les points ont la même latitude ; par exemple, au 45° parallèle Nord, tous les points ont une latitude positive de 45° . On appelle *hémisphère Nord* la moitié du globe terrestre située au-dessus de l'équateur ($z > 0$) et *hémisphère Sud* la moitié située en dessous. Le grand cercle passant par le méridien de Greenwich sépare la Terre en deux hémisphères : celui pour lequel $y < 0$ est conventionnellement appelé *hémisphère Ouest* et l'autre, *hémisphère Est*.

Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques

Soit $A(x, y, z)$, l'espace euclidien tridimensionnel muni du repère orthonormé $\langle O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$.

La **longitude** θ de A est donnée par

$$\theta = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \text{ si } y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \neq 0,$$

ou par

$$\theta = -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \text{ si } y < 0 \text{ et } x^2 + y^2 \neq 0.$$

La **latitude** ϕ est donnée par

$$\phi = \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \text{ si } x^2 + y^2 + z^2 \neq 0.$$

La valeur de ρ est donnée par

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Démonstration

Par définition, θ est l'angle situé entre les vecteurs $(x, y, 0)$ et $(1, 0, 0)$, mesuré de $-\pi$ à π , avec $x^2 + y^2 \neq 0$.

La figure 2.27 montre que

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

pour $y \geq 0$ dans le triangle rectangle OCB et donc

$$\theta = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

dans ce cas, et

$$\theta = -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

pour le cas $y < 0$.

Par définition, ϕ est l'angle entre les vecteurs $(x, y, 0)$ et (x, y, z) mesuré de $-\pi/2$ à $\pi/2$. La figure 2.27 montre que

$$\sin \phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ et donc}$$

$$\phi = \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

si $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$.

L'équation $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ découle directement de la définition de ρ .

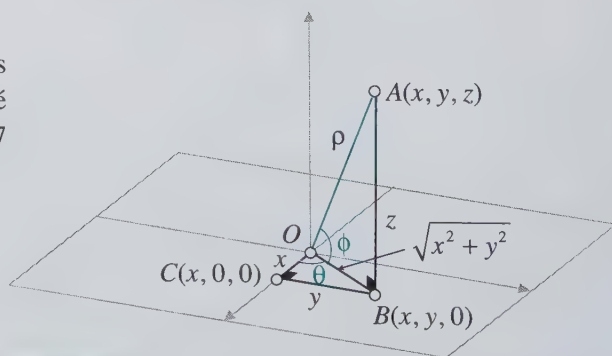


FIGURE 2.27 B est la projection orthogonale de A dans le plan x, y ; C est la projection orthogonale de B sur l'axe des x .

Passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes

Soit A de longitude θ et de latitude ϕ dans l'espace euclidien tridimensionnel muni du repère orthonormé $\langle O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$, pour lequel ρ est connue.

Les coordonnées cartésiennes x , y et z de A sont alors données par

$$x = \rho \cos \phi \cos \theta,$$

$$y = \rho \cos \phi \sin \theta,$$

$$z = \rho \sin \phi.$$

Démonstration

La figure 2.27 montre que $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho \cos \phi$ dans le triangle rectangle OBA .

Par ailleurs, dans le triangle rectangle OCB , il apparaît que $x = \sqrt{x^2 + y^2} \cos \theta$ et que $y = \sqrt{x^2 + y^2} \sin \theta$. Il s'ensuit que $x = \rho \cos \phi \cos \theta$ et que $y = \rho \cos \phi \sin \theta$.

De plus, dans le triangle OBA , on voit immédiatement que $z = \rho \sin \phi$.

EXEMPLE (DISTANCE ENTRE DEUX VILLES TRÈS ÉLOIGNÉES)

On veut savoir quelle distance (en kilomètres) il faut parcourir à la surface de la Terre pour aller de Montréal à Dakar.

Cette distance est la longueur du plus petit des deux arcs de grand cercle qui relient ces deux villes. On sait aussi que, dans un cercle de rayon-unité, la longueur d'un arc de cercle coïncide avec la mesure en radians de l'angle au centre qui sous-tend cet arc. Dans un cercle de rayon R , l'arc sera simplement R fois plus long que dans le cercle de rayon-unité.

Il nous faut donc trouver l'angle en radians entre les vecteurs-positions de ces deux villes (considérées comme ponctuelles à l'échelle de la Terre), puis multiplier le résultat par la valeur du rayon de la Terre en kilomètres (6371 km). On peut maintenant trouver facilement sur Internet la latitude et la longitude de tout lieu d'intérêt sur la Terre : pour Montréal, on donne une latitude de $45^\circ 30'$ et une longitude de $-73^\circ 35'$, tandis que pour Dakar, on donne une latitude de $14^\circ 37'$ et une longitude de $-17^\circ 27'$. Avec les formules de passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes, on obtiendra les vecteurs-positions de ces deux villes, puis à l'aide du produit scalaire de ces deux vecteurs, on trouvera le cosinus de l'angle recherché.

Il ne reste plus qu'à faire les calculs pour vérifier que la distance Montréal–Dakar est d'environ 6243,5 km selon ces données.

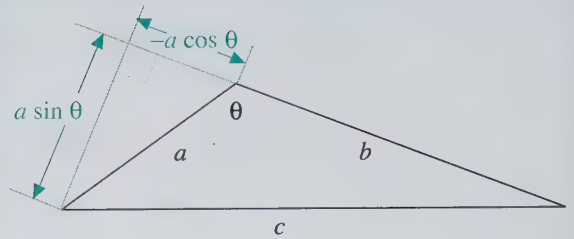
EXERCICES 2.2

1. À partir de la définition $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$, complétez le tableau suivant. Il s'agit de déterminer les produits scalaires des vecteurs de la première colonne par ceux de la première ligne. (*Coup de pouce* : Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont les vecteurs habituels d'un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$; vous pouvez visualiser les angles en dessinant un cube dans lequel vous situerez convenablement ces vecteurs.)

$\vec{u} \cdot \vec{v}$	$\vec{k}$	$\vec{i} + \vec{j}$	$\vec{i} - \vec{j}$	$\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
$\vec{i}$	0			
$\vec{i} + \vec{j}$		2		
$\vec{k}$	1			

2. Selon le *Dictionnaire des mathématiques* (PUF, 1979), on aurait recensé à ce jour plus de 367 démonstrations différentes du théorème de Pythagore. Sauriez-vous en faire une seule, à brûle-pourpoint, sans utiliser les vecteurs ?

Démontrez ensuite, sans les vecteurs, la loi des cosinus en vous inspirant de la figure ci-contre et en appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle construit à partir du triangle ABC quelconque.



3. En utilisant la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$ pour le calcul du produit scalaire, calculez le travail effectué par la force constante

$$\vec{F} = 10(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

dans la translation d'un point mobile P de la position $(-1, 2, 5)$ à la position $(1, 8, 15)$.

4. L'équation $ab = ac$, où a , b et c sont des scalaires, peut toujours se simplifier et donner $b = c$, si $a \neq 0$. Peut-on faire la même simplification pour obtenir $\vec{b} = \vec{c}$ de l'équation $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, si $\vec{a} \neq \vec{0}$? Justifiez votre réponse.

5. Simplifiez l'expression $\left(\|\vec{v}\| \vec{u} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \right) \cdot \vec{v}$.

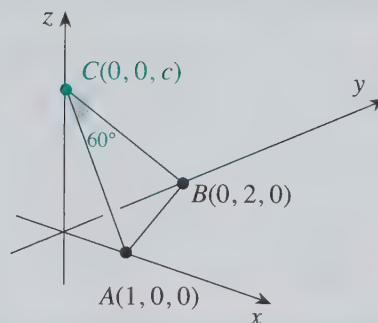
6. Le tableau suivant présente les résultats (sur 100) d'un étudiant à chacun des cinq tests du cours de mathématiques, de même que la pondération accordée à chacun de ces tests.

Test	1	2	3	4	5
Note	62	73	80	58	90
Pondération	0,10	0,15	0,20	0,10	0,45

Exprimez la moyenne pondérée de cet étudiant comme un produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^5$ et évaluez ce produit.

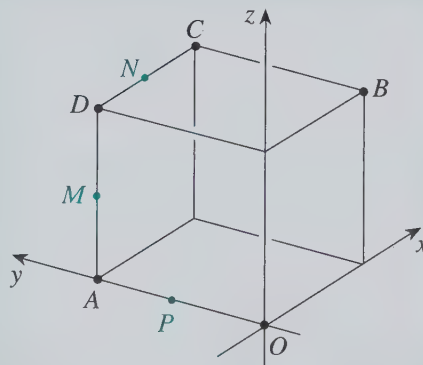
7. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{u} = 4$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$ et $\vec{v} \cdot \vec{v} = 4$. Évaluez la mesure de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
8. a) Pour quelle valeur de r les vecteurs $(3, 3, -2)$ et $(5, -1, r)$ sont-ils orthogonaux ?
 b) Pour quelles valeurs de r et de s le vecteur $(10, r, s)$ est-il orthogonal simultanément aux vecteurs $(1, 3, 2)$ et $(-2, 1, 4)$?
9. Dans $\mathbb{R}^3$, les sommets d'un triangle sont donnés par $A(0, 0, 0)$, $B(3, -2, 4)$ et $C(-3, 2, -1)$. Utilisez le produit scalaire pour calculer les angles en chacun des sommets de ce triangle.

10. Quelle est la valeur de la cote c du point C dans la figure ci-contre, pour laquelle l'angle en C du triangle ABC mesure 60° ?

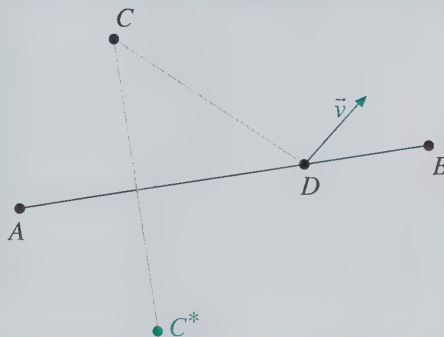


11. Soit le cube illustré ci-contre. Calculez de façon vectorielle (avec le produit scalaire) les angles entre les vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD}$ (il est facile de voir sans calcul que l'angle mesure 60°);
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OC}$;
- $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ (les points M, N et P sont les milieux des arêtes).



12. Dans $\mathbb{R}^2$, calculez la longueur de la projection orthogonale du segment AB sur le segment CD lorsque A, B, C et D sont donnés par $A(2, 3)$, $B(3, 6)$, $C(1, 1)$ et $D(10, 6)$.
13. Décomposez la force $\vec{F} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ en une somme $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, où $\vec{F}_1$ est parallèle à $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{F}_2$ est orthogonal à $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
14. Déterminez l'accélération tangentielle $\vec{a}_t$ et l'accélération radiale $\vec{a}_r$ d'une particule en mouvement, à l'instant précis où son vecteur vitesse est $\vec{v} = (1, -2, 2)$ et son vecteur accélération est $\vec{a} = (4, 2, 9)$. Rappel : $\vec{a}_t \parallel \vec{v}$, $\vec{a}_t \perp \vec{a}_r$ et $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$.
15. Dans la figure ci-contre, le point C^* est le symétrique du point C par rapport au segment AB . On donne $A(1, 2, 3)$, $B(-5, 5, 9)$ et $C(2, 5, 7)$.
- Déterminez les coordonnées du point C^* . (Coup de pouce : Projetez d'abord AC sur AB dans la figure.)
 - Du point C , un rayon de lumière est dirigé vers le point $D(-3, 4, 7)$ du segment AB . Le segment AB agit comme un miroir et réfléchit le rayon dans la direction du vecteur $\vec{v}$ (qu'on peut supposer unitaire). Déterminez les composantes de $\vec{v}$ (selon le principe des réflexions en optique, la direction de $\vec{v}$ est précisément celle de $\overrightarrow{C^*D}$).



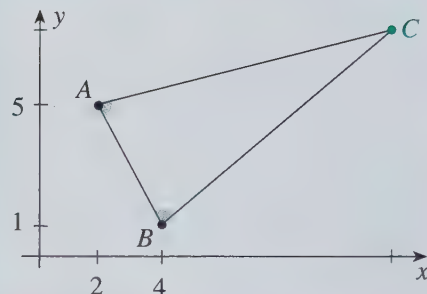
16. Dans $\mathbb{R}^3$, trouvez :

- deux vecteurs unitaires qui forment un angle de 60° avec $\vec{i}$ et un angle de 60° avec $\vec{j}$;
- deux vecteurs unitaires qui forment un angle de 60° avec $\vec{i}$ et un angle de 45° avec $\vec{k}$.

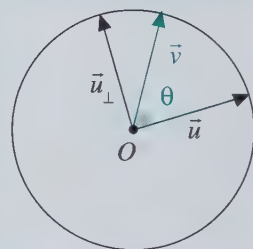
17. Soit $\vec{v} = (-2, 2, 1)$.

- Quels sont les cosinus directeurs de $\vec{v}$?
- Quel angle forme $\vec{v}$ avec $\vec{i}$?
- Quel angle forme $\vec{v}$ avec $\vec{k}$?

18. La figure ci-contre représente un triangle **isocèle** dans $\mathbb{R}^2$ dont la hauteur h issue du sommet C mesure 10 unités. Les sommets A et B sont donnés par $A(2, 5)$ et $B(4, 1)$. Quelles sont les coordonnées du sommet C ? (*Coup de pouce* : Déterminez d'abord $\vec{u}_\perp$ à partir de $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.)

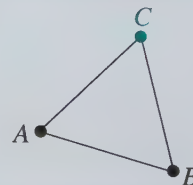


19. Exprimez le vecteur $\vec{v}$ de la figure ci-contre comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}_\perp$. Les coefficients de la combinaison seront fonction de l'angle θ . Le point O est au centre du cercle.

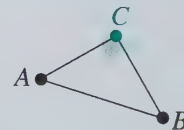


20. En utilisant le résultat obtenu à l'exercice 19, déterminez les coordonnées du sommet C du triangle ABC dans chacun des cas suivants.

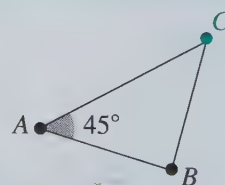
a) Le triangle ABC est équilatéral; les points A et B sont donnés par $A(1, 3)$ et $B(5, 2)$.



b) Le triangle ABC est isocèle et rectangle en C ; les points A et B sont donnés par $A(1, 3)$ et $B(5, 2)$.



c) Les points A et B sont donnés par $A(1, 3)$ et $B(5, 2)$, $\|\overrightarrow{AC}\| = 6$ et $\widehat{BAC} = 45^\circ$.



21. L'angle θ étant donné, décrivez et illustrez les lieux représentés symboliquement par les équations suivantes.

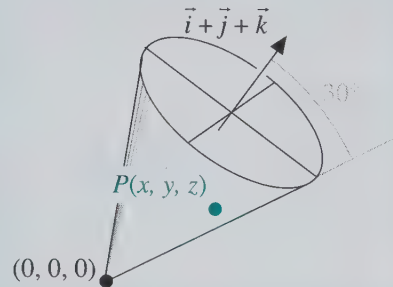
a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) = 0\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) = 1\}$

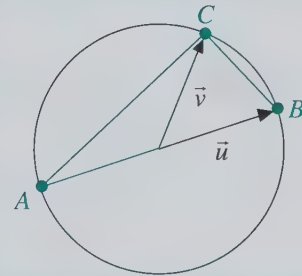
22. Montrez que l'équation en x , y et z qui caractérise tous les points $P(x, y, z)$ situés sur le cône de la figure ci-contre peut s'écrire

$$2(x + y + z) = 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Le sommet de ce cône est à l'origine et l'angle d'ouverture est de 30° relativement à la direction $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ de l'axe de symétrie.



23. Il existe plusieurs démonstrations de l'énoncé suivant : si trois points distincts A , B et C sont inscrits dans un cercle de telle manière que A et B sont les extrémités d'un diamètre de ce cercle, alors le triangle ABC est rectangle en C . (Cet énoncé indique une manière rapide de tracer un angle droit à l'aide de la règle non graduée et du compas.) Faites une démonstration vectorielle de cet énoncé en exprimant d'abord $\vec{AC}$ et $\vec{CB}$ comme des combinaisons linéaires des vecteurs (rayons) $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et en exploitant le fait que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.



24. Trouvez toutes les valeurs de θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$, pour lesquelles

$$-4 \cos \theta + 3 \sin \theta = 2$$

Vous pouvez résoudre ce problème de manière purement algébrique en utilisant la relation $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$. Vous pouvez aussi le résoudre de façon vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ en traduisant l'équation $a \cos \theta + b \sin \theta = c$ par $(a, b) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) = c$, puis par

$$\frac{(a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot (\cos \theta, \sin \theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

ce qui signifie que l'angle α entre (a, b) et $(\cos \theta, \sin \theta)$ a pour cosinus la valeur

$$\cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

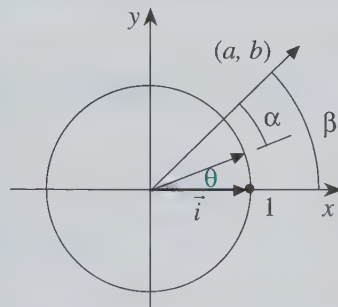
Par conséquent, on obtient

$$\theta = \beta \pm \alpha,$$

où β est l'angle que forme le vecteur (a, b) avec $\vec{i}$ et

$$\alpha = \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

La figure ci-contre illustre le cas $\theta = \beta - \alpha$.



25. Dans $\mathbb{R}^3$, les points distincts A et B étant donnés, décrivez le lieu des points P pour lesquels $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$.
(Coup de pouce : Revoir l'exercice 23.)

26. Chasse au trésor²

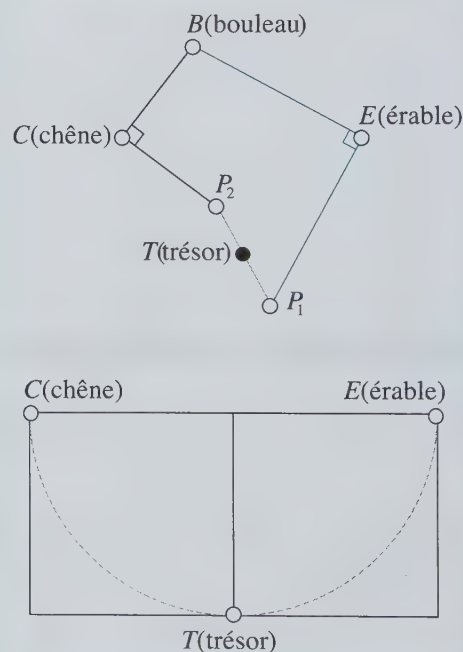
Un prince découvre un vieux manuscrit sur lequel on donne les instructions suivantes pour trouver un fabuleux trésor caché dans la forêt derrière son château.

1. Allez sous le plus grand bouleau de la forêt (B) ; de là, vous verrez le plus grand chêne (C) et le plus grand érable (E) de la forêt ;
2. du bouleau, marchez en ligne droite jusqu'à l'érable et comptez bien vos pas ;
3. rendu à l'érable, tournez à droite de 90° et marchez en ligne droite dans cette direction d'autant de pas que vous venez de faire ; là, posez un piquet P_1 ;
4. revenez ensuite au bouleau ; maintenant, marchez en ligne droite vers le chêne en comptant bien vos pas ;
5. rendu au chêne, tournez à gauche de 90° et marchez en ligne droite dans cette direction d'autant de pas que vous venez de faire ; là, posez un piquet P_2 ;
6. le trésor T se trouve exactement à mi-chemin entre les deux piquets.

Le fidèle serviteur du prince lui a tracé un plan hypothétique de la forêt sur lequel figure l'emplacement du chêne C et celui de l'érable E (voir la figure ci-contre). Malheureusement, il n'y a plus aucune trace du bouleau B dans la forêt ! Le plan ne semble donc pas fiable.

Le serviteur, passionné d'informatique, a utilisé son logiciel de géométrie dynamique préféré (par exemple *GeoGebra*, gratuit sur le Web, ou *Cabri-Géomètre*) et a remarqué que l'emplacement du trésor T n'était pas modifié quand il déplaçait un point de départ B arbitraire représentant le bouleau disparu, pourvu qu'il suive les instructions du manuscrit. Il a ainsi pu remettre à son prince le plan simplifié ci-contre).

Pouvez-vous justifier ce plan à l'aide d'un calcul vectoriel, ou à l'aide de toute autre méthode, qui montrerait que, selon les instructions données, l'emplacement du trésor ne dépend que de l'emplacement du chêne et de l'emplacement de l'érable ?



POUR ALLER PLUS LOIN

Dans cette section, nous décrivons brièvement les cinq solides de Platon, les seuls polyèdres réguliers. Nous donnons ensuite des indications pour aider les lecteurs curieux à numériser ces polyèdres, c'est-à-dire à trouver les coordonnées des sommets relativement à un repère orthonormé bien choisi.

2. Adapté de « Chasse au trésor » de Vincent Papillon dans *Mathématiques d'hier et d'aujourd'hui* (Modulo, 2000), paru aussi dans *Le Bus*, vol. 14, n° 1, 1996.

2.3.1 LES CINQ SOLIDES DE PLATON

Déjà à l'époque de Platon (III^e s. av. J.-C.), on savait que les cinq «solides» décrits à la figure 2.28 sont les seuls polyèdres réguliers. Platon accordait une très grande importance à ces figures, et on croyait même que les mouvements des astres étaient réglés selon la géométrie de ces polyèdres³. Le cube, le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre symbolisaient les quatre éléments : la terre, le feu, l'air et l'eau ; le dodécaèdre représentait l'enveloppe du monde.

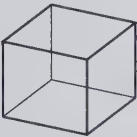
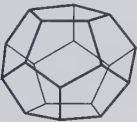
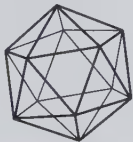
Forme	Nom	Face	Sommet	Arête
	Tétraèdre régulier	4 triangles équilatéraux	4	6
	Cube	6 carrés	8	12
	Octaèdre régulier	8 triangles équilatéraux	6	12
	Dodécaèdre régulier	12 pentagones réguliers	20	30
	Icosaèdre régulier	20 triangles équilatéraux	12	30

FIGURE 2.28 Les cinq solides de Platon.

Les Grecs savaient beaucoup de choses à propos de ces polyèdres. Cependant, comme ils ne connaissaient pas la géométrie vectorielle, ils n'ont jamais tenté de déterminer les coordonnées des sommets de ces différents polyèdres relativement à un repère orthonormé. Compte tenu des développements récents de l'infographie, la numérisation des objets géométriques (recherche des coordonnées des sommets) a un grand intérêt pratique. Voici quelques indications pour les lecteurs qui voudraient numériser les cinq solides de Platon.

Pour déterminer les coordonnées des sommets d'un cube, on choisit un repère dont les axes sont parallèles aux arêtes du cube, et on donne ensuite les coordonnées des sommets relativement à ce repère.

Pour déterminer les coordonnées des sommets d'un tétraèdre, on peut inscrire cette figure dans un cube ainsi que le montre la figure 2.29 a).

Pour déterminer les coordonnées des sommets d'un octaèdre, on peut aussi l'inscrire dans un cube (voir la figure 2.29 b) : ses sommets coïncident avec les milieux des faces du cube.

3. Cette croyance a survécu jusqu'à l'avènement de la nouvelle cosmologie de Kepler (1596).

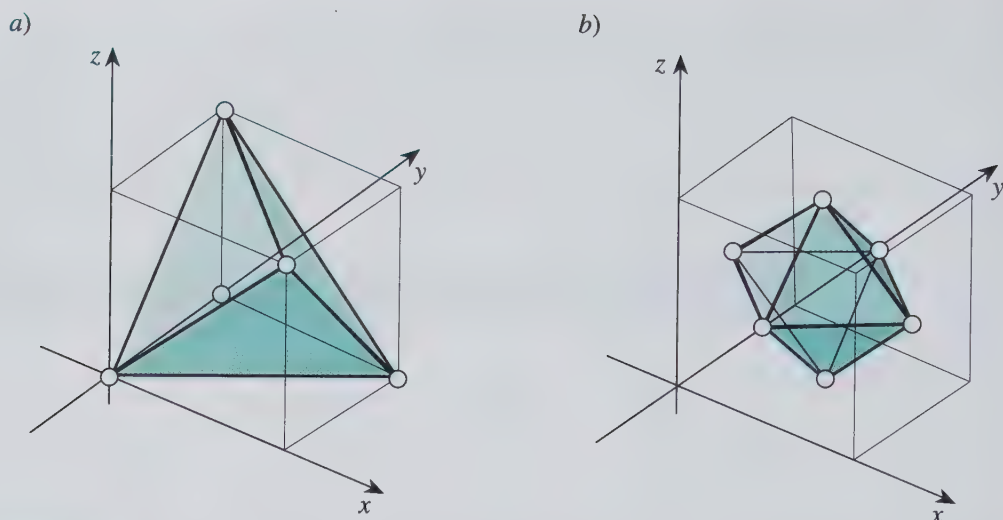


FIGURE 2.29 En a), inscription d'un tétraèdre dans un cube. En b), inscription d'un octaèdre dans un cube.

Déterminer les coordonnées des sommets d'un dodécaèdre et d'un icosaèdre est beaucoup moins facile. Commençons par l'icosaèdre. Les Grecs connaissaient la valeur du rapport Φ entre la longueur d'une diagonale et la longueur d'un côté dans un pentagone régulier. Ce rapport est le fameux nombre d'or : $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1,618\,03\dots$ Vous pouvez calculer Φ en supposant que le côté du pentagone de la figure 2.30 mesure 1 ($\|\overline{AB}\| = 1$), puis en observant que $ABCF$ est un losange et que $\Phi = \|\overline{EC}\|$, puis en établissant les rapports de côtés correspondants dans les triangles semblables BCE et DFC .

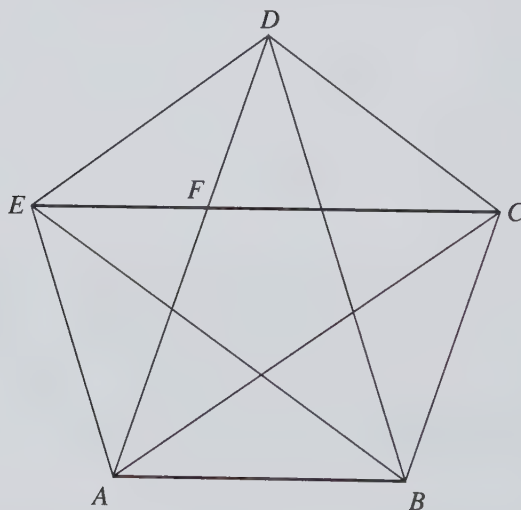


FIGURE 2.30

L'icosaèdre est relié au nombre d'or de la façon suivante : en reliant les extrémités de deux arêtes opposées de l'icosaèdre, on obtient un rectangle d'or⁴, c'est-à-dire un rectangle dont le rapport du plus grand côté au plus petit est précisément le nombre d'or Φ . La figure 2.31 montre trois de ces rectangles qui sont deux à deux perpendiculaires.

4. Il y a plusieurs coïncidences réelles et naturelles, mais aussi plusieurs mythes à propos du nombre d'or. Voyez à ce sujet l'article fort intéressant de Jean-Paul Krivine dans le n° 278 d'août 2007 du site Internet de *Science... et pseudo-sciences* à l'adresse <http://www.pseudo-sciences.org/spip.php?article796>.

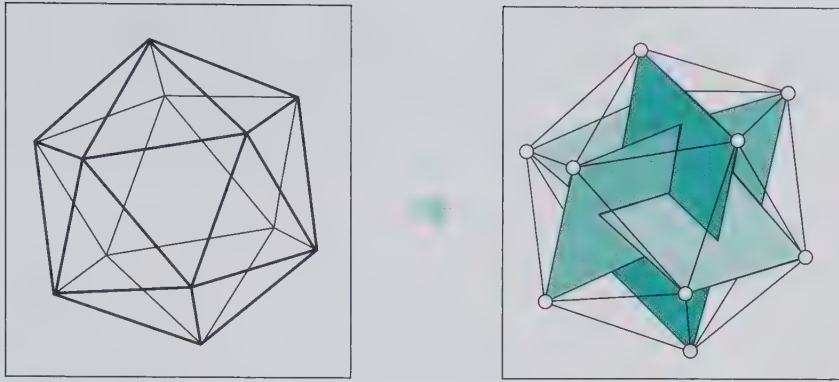


FIGURE 2.31 Trois rectangles d'or deux à deux perpendiculaires (d'après un dessin de Coxeter).

À partir de ces trois rectangles et d'un repère bien choisi, on peut exprimer les coordonnées des 12 sommets de l'icosaèdre en fonction du nombre d'or.

Pour déterminer les coordonnées des sommets d'un dodécaèdre, on peut inscrire cette figure dans l'icosaèdre. On voit alors que les 20 sommets du dodécaèdre coïncident avec les milieux des 20 faces de l'icosaèdre. On peut donc exprimer les coordonnées des sommets du dodécaèdre en fonction du nombre d'or Φ . La figure 2.32 suggère une autre façon de voir le dodécaèdre : on ajoute simplement des calottes spéciales identiques, mais orientées différemment, à chacune des faces d'un cube. Si on colle une calotte sur une face du cube, on peut calculer les coordonnées des sommets de cette calotte relativement à un repère orienté selon les arêtes du cube. Le rapport entre l'arête du cube et l'arête du dodécaèdre est le nombre d'or Φ (cela détermine les sommets de la calotte spéciale).

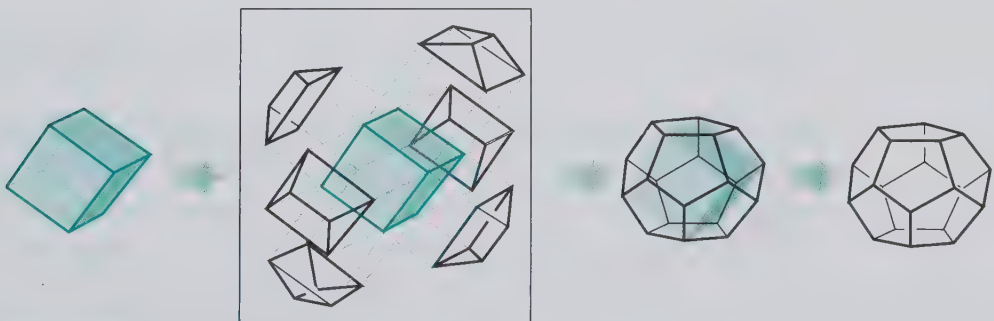


FIGURE 2.32 Un dodécaèdre.

Connaissant les coordonnées des sommets des polyèdres réguliers dans des repères ortho-normés, on peut ensuite calculer (de façon vectorielle) toutes les caractéristiques métriques de ces polyèdres : angles dièdres (angles entre les faces), longueurs, volumes, etc.

2.3.2 UN PEU DE LATITUDE

L'axe de rotation de la Terre (sur elle-même) a une direction qu'on peut, à court terme, considérer comme constante par rapport au plan de l'écliptique, le plan dans lequel évoluent les planètes, y compris la Terre, autour du Soleil. Cela signifie que l'étoile

Polaire, alignée sur l'axe de rotation de la Terre, semble immobile dans le mouvement apparent des étoiles du ciel nocturne de l'hémisphère Nord. Ainsi, à une latitude donnée de l'hémisphère Nord, l'angle d'élévation sous lequel on voit l'étoile Polaire, relativement à l'horizon, est constant. Cet angle est exactement le même que celui de la latitude d'où l'on observe l'étoile Polaire comme le montre la figure 2.33.

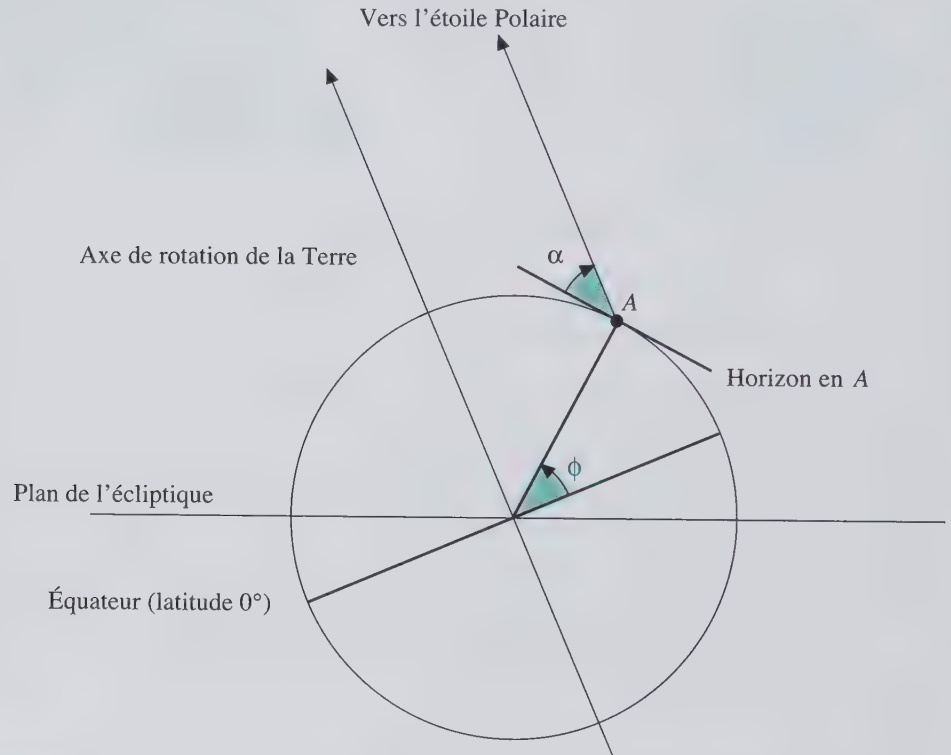


FIGURE 2.33 $\alpha = \phi$: l'angle d'élévation de l'étoile Polaire en A est égal à la latitude en A.

L'angle entre l'axe de rotation de la Terre et la perpendiculaire au plan de l'écliptique mesure environ $23,5^\circ$. La figure 2.34 montre la Terre avec son inclinaison maximale de l'hémisphère Nord vers le Soleil, ce qui se produit au solstice d'été. À l'équateur, la durée du jour et la durée de la nuit sont égales pendant toute l'année; cependant, comme on le voit dans la figure 2.34, au solstice d'été, plus on monte vers le nord, plus grande est la durée du jour et plus courte est la durée de la nuit. La situation est inversée dans l'hémisphère Sud à cet instant. À l'équinoxe du printemps et à l'équinoxe de l'automne, le jour et la nuit ont la même durée partout sur la Terre; pour le concevoir, imaginez que le Soleil se trouve à ce moment-là à la verticale au-dessus de la page de la figure 2.34, dans le plan de l'écliptique (plus ou moins à la place du bout de votre nez...).

Le **cercle polaire** est le parallèle terrestre de plus basse latitude dans l'hémisphère Nord pour lequel le Soleil ne descend pas sous l'horizon au solstice d'été. Le **tropique du Cancer** est le parallèle terrestre pour lequel le Soleil est au **zénith** (angle d'élévation de 90°) à midi, au solstice d'été.

Vous pouvez maintenant calculer facilement la latitude du cercle polaire et celle du tropique du Cancer à l'aide de la figure 2.34. Toujours à l'aide de cette figure, vous pouvez démontrer

que l'angle d'élévation α du Soleil, à midi, au solstice d'été de l'hémisphère Nord, à la latitude ϕ , est donné par $\alpha = 90^\circ + 23,5^\circ - \phi$. De cette dernière égalité, vous pouvez déduire, par exemple, l'angle d'élévation maximal du Soleil à Montréal ($45,5^\circ$ de latitude Nord) sur une année complète.

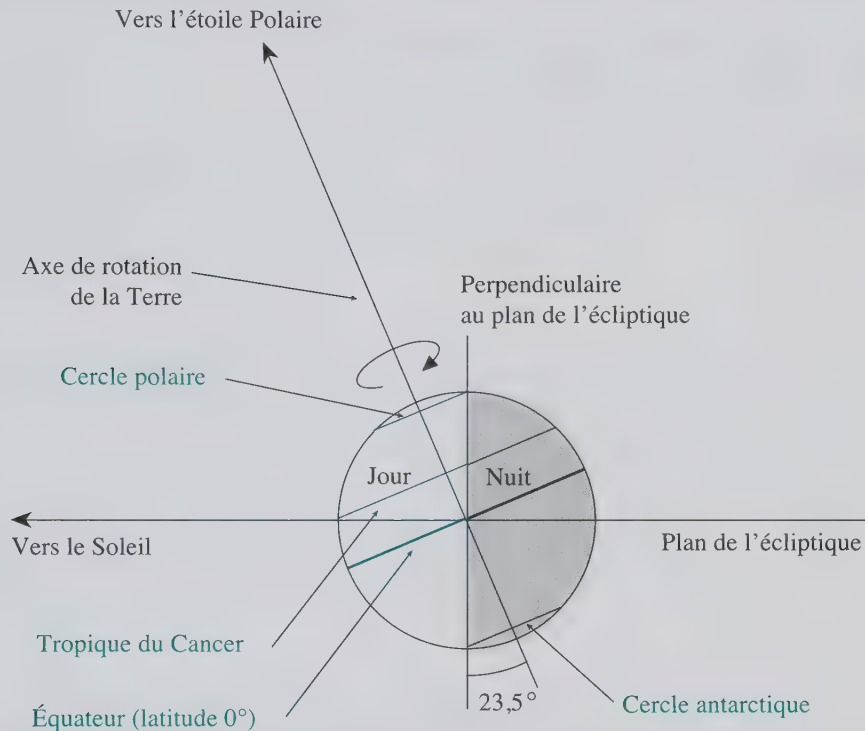


FIGURE 2.34 La Terre au solstice d'été de l'hémisphère Nord.

SUGGESTIONS DE LECTURE

Pour en savoir davantage sur les mathématiques à l'origine du système de localisation par satellite (GPS)

Mathématiques et technologie, Christiane Rousseau et Yvan Saint-Aubin, Springer, 2008.

Ce livre s'adresse à des étudiants de premier cycle universitaire, mais il contient de nombreuses sections accessibles à des lecteurs de niveau préuniversitaire, notamment dans le premier chapitre sur la localisation et la cartographie. On y traite de nombreux sujets, tous plus intéressants les uns que les autres, du GPS à la compression d'images, en passant par la chirurgie aux rayons gamma. Prix Adrien-Pouliot de l'Association mathématique du Québec 2009.

Pour en savoir davantage sur le nombre d'or

«La numérologie du nombre d'or», dans *Les inattendus mathématiques*, Jean-Paul Delahaye, Éditions Belin – Pour la science, 2004.

Le nombre d'or, Marguerite Neveux, et H. E. Huntley, coll. Points Sciences, Seuil, 1995.

Consultez aussi le site Internet <http://www.pseudo-sciences.org/spip.php?article796>.

Pour en savoir davantage sur diverses démonstrations du théorème de Pythagore

Dans l'excellente revue québécoise *Accromath*, numéro été-automne 2010, vol. 5, on trouve un article de Bernard Hodgson de l'Université Laval qui donne plusieurs preuves visuelles classiques du théorème de Pythagore. Cette revue est gratuite ; consultez le site www.accromath.ca.

Pour en savoir davantage sur les polyèdres

Introduction to Geometry, 2^e éd., H. S. M. Coxeter, Wiley, 1989.

Il y a aussi dans ce livre un chapitre très intéressant sur le nombre d'or ; la figure 2.31 (trois rectangles d'or deux à deux perpendiculaires) est inspirée d'une illustration de ce livre de Coxeter.

Pour en savoir davantage sur les mathématiques de la Grèce antique

La naissance de la science, tome 2, André Pichot, coll. Folio Essais, Gallimard, 1991.

Ce livre captivant montre comment les mathématiques se sont construites entre la science et la mythologie dans la Grèce présocratique. Pour les passionnés de l'histoire et de l'épistémologie des sciences.

AIRES ET VOLUMES

LES DÉTERMINANTS 2×2 ET 3×3

LE PRODUIT VECTORIEL ET LE PRODUIT MIXTE DANS $\mathbb{R}^3$

POUR ALLER PLUS LOIN

En convenant que les bases $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$ de $\mathbb{R}^2$ et $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ sont orientées positivement¹, on peut déterminer l'orientation relative, positive ou négative de toute autre base de ces espaces. Cela nous conduit aux concepts d'aire orientée et de volume orienté. Ces concepts peuvent sembler bien abstraits à première vue, mais ils se concrétiseront grâce aux formules de calcul des déterminants. Ceux-ci nous permettront de simplifier considérablement les calculs d'aire et de volume, et ils nous faciliteront aussi l'étude des droites, des plans et des systèmes d'équations linéaires dans les chapitres suivants.

LES DÉTERMINANTS 2×2 ET 3×3

Dans cette section, il est question des deux orientations dans l'espace $\mathbb{R}^2$, puis de la définition et des propriétés des déterminants 2×2 . Ensuite, nous verrons les deux orientations dans l'espace $\mathbb{R}^3$, la définition et les propriétés des déterminants 3×3 , et quelques applications de ces déterminants.

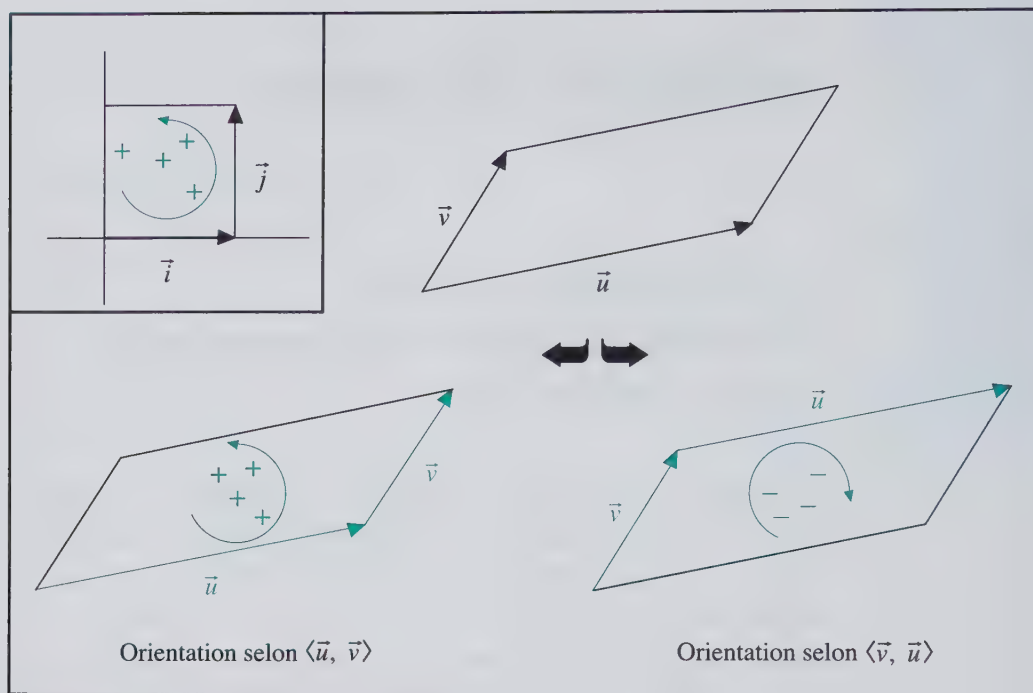
3.1.1 L'ORIENTATION DANS $\mathbb{R}^2$

Dans $\mathbb{R}^2$, deux vecteurs non nuls et non parallèles $\vec{u}$ et $\vec{v}$ engendrent un parallélogramme qui peut être orienté (relativement à la base $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$) de deux façons différentes par $\vec{u}$ et $\vec{v}$: selon le sens convenu positif de la base $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$, soit le sens contraire des aiguilles d'une montre, ou selon le sens négatif, soit le sens des aiguilles d'une montre. Pour déterminer l'orientation correspondant à une suite ordonnée $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, on trace d'abord $\vec{u}$, puis, de la pointe de $\vec{u}$, on trace $\vec{v}$ (voir la figure 3.1). Si cette séquence indique le sens contraire des aiguilles d'une montre, son orientation est positive (celle donnée par la séquence $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$); si elle indique le sens des aiguilles d'une montre, son orientation est alors négative. Dans la figure 3.1, la suite $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ a l'orientation relative positive, tandis que la suite $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ a l'orientation relative négative.

EXEMPLE 1

La suite $\langle \vec{i} + \vec{j}, \vec{j} \rangle$ est orientée positivement.

1. Voir la sous-section 1.2.3 du chapitre 1.

FIGURE 3.1 Les deux orientations dans $\mathbb{R}^2$.**EXEMPLE 2**

La suite $\langle \vec{i}, \vec{i} - \vec{j} \rangle$ est orientée négativement.

EXEMPLE 3

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors la suite $\langle \vec{u}, \vec{u}_\perp \rangle$ est orientée positivement.

3.1.2 LES DÉTERMINANTS 2×2 **Déterminant 2×2**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ donnés par $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$. Le déterminant de la suite ordonnée $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, noté² $\Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ou plus simplement $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, est la valeur numérique de l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, positive si la suite $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ est d'orientation positive ou négative si la suite $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ est d'orientation négative. Bref, nous dirons que $\Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ est l'aire orientée du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, ou si $\vec{u} \parallel \vec{v}$, alors $\Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

EXEMPLE 1

$\Delta\langle \vec{i}, 2\vec{i} \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, car $\vec{i} \parallel 2\vec{i}$; le parallélogramme engendré par la suite $\langle \vec{i}, 2\vec{i} \rangle$ est dégénéré.

2. Le symbole Δ se lit delta: c'est le D grec, que nous utilisons comme abréviation du mot **déterminant**.

EXEMPLE 2

$\Delta\langle \vec{j}, 3\vec{i} \rangle = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$, car la suite $\langle \vec{j}, 3\vec{i} \rangle$ engendre un parallélogramme rectangle orienté négativement dont l'aire est de 3 (voir la figure 3.2).

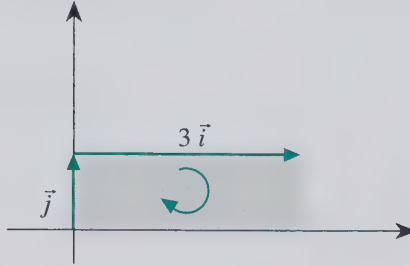


FIGURE 3.2

Les quatre propriétés suivantes des déterminants 2×2 sont des propriétés axiomatiques, c'est-à-dire qu'on les considère comme des axiomes lorsqu'on veut généraliser³ le concept de déterminant à une suite de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. À partir de la définition des déterminants, nous pouvons justifier et illustrer ces propriétés dans $\mathbb{R}^2$.

D1 Le déterminant de la suite $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$ est 1.

$$\Delta\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle = 1: \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

La suite $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$ engendre un carré orienté positivement dont l'aire est de 1.

D2 Un déterminant qui a deux lignes identiques est nul.

$$\Delta\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0: \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

Cette propriété est une conséquence immédiate de la définition. Elle traduit le fait que le parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{u}$ est dégénéré (aire nulle).

EXEMPLE

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

D3 On peut factoriser hors du déterminant un facteur k qui est commun à tous les éléments d'une même ligne.

$$\Delta\langle k\vec{u}, \vec{v} \rangle = k\Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle: \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Cette propriété traduit le fait que si on étire, ou qu'on comprime, le vecteur $\vec{u}$ par un facteur k , alors l'aire orientée du parallélogramme engendré par la suite $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ sera multipliée par le facteur k (voir la figure 3.3).

Bien sûr, on a aussi $\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$

3. On attribue le point de vue axiomatique sur les déterminants à Leopold Kronecker et à Karl Weierstrass (seconde moitié du XIX^e siècle); le concept lui-même date du XVIII^e siècle.

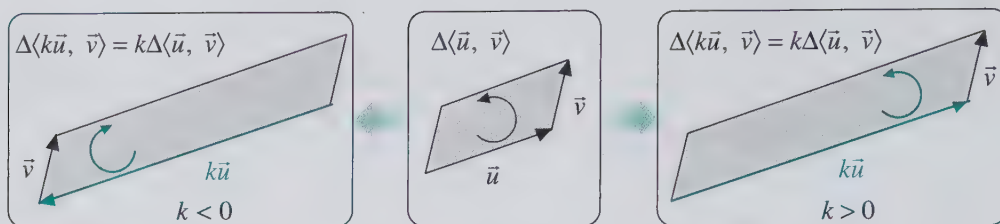


FIGURE 3.3 La troisième propriété des déterminants 2×2 : $\Delta\langle k\vec{u}, \vec{v} \rangle = k\Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

EXEMPLE

$$\begin{vmatrix} 5 & 25 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

D4 Sur chaque ligne, le déterminant est «compatible» avec la somme vectorielle. Considéré comme une sorte de produit entre vecteurs, le déterminant est distributif sur la somme vectorielle.

$\Delta\langle \vec{r} + \vec{s}, \vec{v} \rangle = \Delta\langle \vec{r}, \vec{v} \rangle + \Delta\langle \vec{s}, \vec{v} \rangle$: en posant $\vec{r} = (r_1, r_2)$, $\vec{s} = (s_1, s_2)$ et $\vec{v} = (c, d)$, cela donne

$$\begin{vmatrix} r_1 + s_1 & r_2 + s_2 \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Cette propriété trouve sa justification dans la figure 3.4 qui illustre le cas où les orientations correspondant à $\langle \vec{r}, \vec{v} \rangle$, $\langle \vec{s}, \vec{v} \rangle$ et $\langle \vec{r} + \vec{s}, \vec{v} \rangle$ sont identiques.

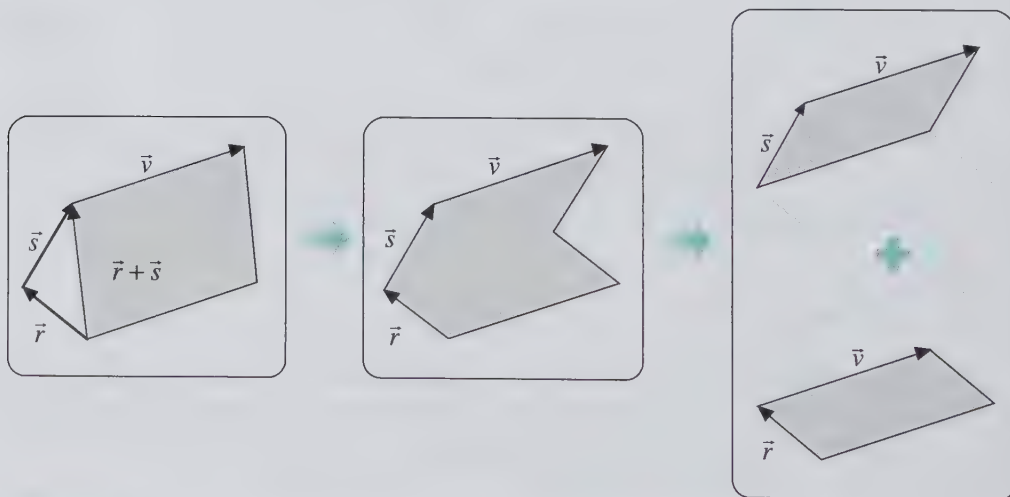


FIGURE 3.4 La quatrième propriété des déterminants: $\Delta\langle \vec{r} + \vec{s}, \vec{v} \rangle = \Delta\langle \vec{r}, \vec{v} \rangle + \Delta\langle \vec{s}, \vec{v} \rangle$ (Attention ! Cette figure n'est pas une perspective d'objets tridimensionnels.)

Bien sûr, on a aussi $\Delta\langle \vec{u}, \vec{r} + \vec{s} \rangle = \Delta\langle \vec{u}, \vec{r} \rangle + \Delta\langle \vec{u}, \vec{s} \rangle$.

EXEMPLE

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}, \text{ car } (a, b) = (a, 0) + (0, b).$$

Les déterminants 2×2 ont plusieurs autres propriétés⁴, qu'on peut démontrer à partir des quatre propriétés précédentes ou directement à partir de la définition. En voici quelques-unes qui nous seront utiles.

D5 Permuter deux lignes d'un déterminant a pour seul effet de changer le signe du déterminant.

$$\Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -\Delta\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle : \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

Cette propriété est une conséquence immédiate de la définition : les suites $\langle (a, b), (c, d) \rangle$ et $\langle (c, d), (a, b) \rangle$ engendrent en effet le même parallélogramme avec un changement d'orientation.

EXEMPLE

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

D6 On peut ajouter à la ligne d'un déterminant un multiple d'une autre ligne sans changer la valeur du déterminant.

$$\Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \Delta\langle \vec{u} + k\vec{v}, \vec{v} \rangle = \Delta\langle \vec{u}, \vec{v} + k\vec{u} \rangle :$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix}$$

EXEMPLE

Dans le déterminant $\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$, on peut ajouter -2 fois la deuxième ligne à la première

$$\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

On peut démontrer la propriété D6 à partir des propriétés D4, D3 et D2, ou à partir de la figure 3.5. Dans celle-ci, les trois parallélogrammes ont la même base et la même hauteur, donc, la même aire ; de plus, ils ont la même orientation.

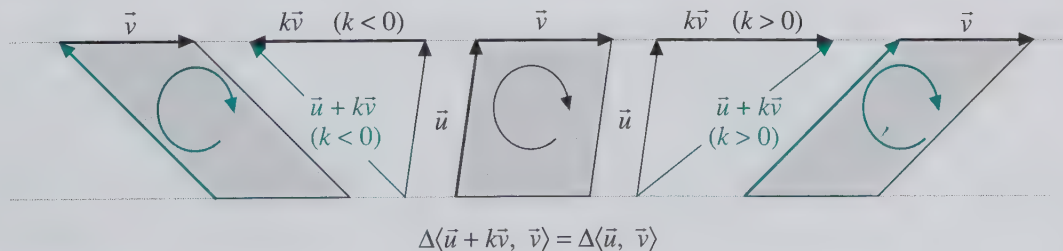


FIGURE 3.5

4. Voir aussi le chapitre 6 portant sur les matrices.

Le théorème suivant donne une formule de calcul rapide des déterminants.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Preuve

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \Delta\langle (a, b), (c, d) \rangle \\ &= \Delta\langle a\vec{i} + b\vec{j}, c\vec{i} + d\vec{j} \rangle \\ &= \Delta\langle a\vec{i}, c\vec{i} + d\vec{j} \rangle + \Delta\langle b\vec{j}, c\vec{i} + d\vec{j} \rangle && \text{(Propriété D4)} \\ &= \Delta\langle a\vec{i}, c\vec{i} \rangle + \Delta\langle a\vec{i}, d\vec{j} \rangle + \Delta\langle b\vec{j}, c\vec{i} \rangle + \Delta\langle b\vec{j}, d\vec{j} \rangle && \text{(Propriété D4)} \\ &= ac \Delta\langle \vec{i}, \vec{i} \rangle + ad \Delta\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle + bc \Delta\langle \vec{j}, \vec{i} \rangle + bd \Delta\langle \vec{j}, \vec{j} \rangle && \text{(Propriété D3)} \\ &= 0 + ad \Delta\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle + bc \Delta\langle \vec{j}, \vec{i} \rangle + 0 && \text{(Propriété D2)} \\ &= ad \Delta\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle - bc \Delta\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle && \text{(Propriété D5)} \\ &= ad - bc && \text{(Propriété D1)} \end{aligned}$$

On peut voir à la figure 3.6 une démonstration visuelle⁵ très convaincante de ce même théorème dans le cas où $a, b, c, d > 0$ et la suite $\langle (a, b), (c, d) \rangle$ est d'orientation positive.

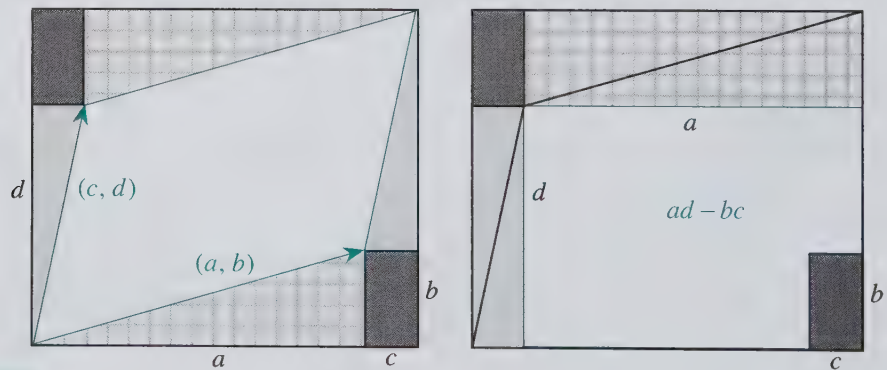


FIGURE 3.6

Le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ représente l'aire orientée du parallélogramme engendré par les vecteurs lignes (a, b) et (c, d) pris dans l'ordre $\langle (a, b), (c, d) \rangle$, et sa valeur est donnée par $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

5. Une idée originale de François Trottier.

EXEMPLE 1

Dans $\mathbb{R}^2$, pour déterminer l'aire du triangle ABC (voir la figure 3.7) dont les sommets sont donnés par $A(-3, 1)$, $B(2, -3)$ et $C(4, 5)$ on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, -3) - (-3, 1) = (5, -4)$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (4, 5) - (-3, 1) = (7, 4)$.

L'aire⁶ S du triangle, orienté positivement par $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, est la demie de l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et donc

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [5 \cdot 4 - (-4) \cdot 7] = \frac{1}{2} \cdot 48 = 24.$$

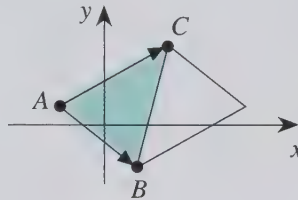
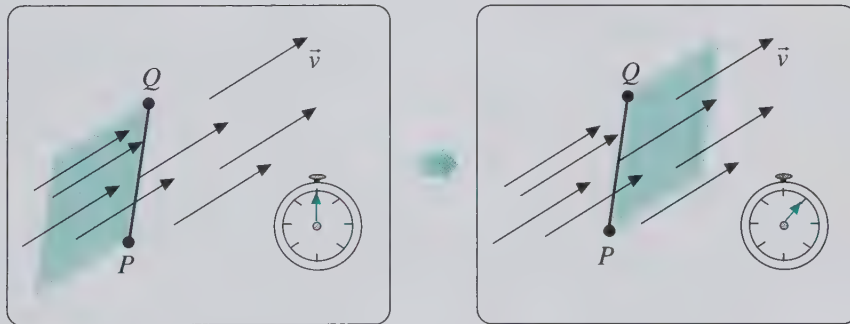


FIGURE 3.7

EXEMPLE 2 (INTERPRÉTATION PHYSIQUE DES DÉTERMINANTS 2×2)

Imaginons que le vecteur $\vec{v}$ de la figure 3.8 représente la vitesse d'écoulement d'un fluide incompressible (comme l'eau) en **état stationnaire**⁷ dans $\mathbb{R}^2$ et que le segment PQ est une membrane parfaitement perméable à ce fluide. Dans une unité de temps, la quantité de fluide⁸ qui aura traversé la membrane sera numériquement égale à l'aire du parallélogramme ombré; si $\vec{v} = (a, b)$ et $\overrightarrow{PQ} = (c, d)$, cela revient à dire que le débit du fluide à travers cette membrane sera (dans des unités appropriées) égal au déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

FIGURE 3.8 Le débit d'un fluide à travers une membrane dans $\mathbb{R}^2$.**EXEMPLE 3 (TEST DE COLINÉARITÉ DE TROIS POINTS OU DE PARALLÉLISME DE DEUX VECTEURS DANS $\mathbb{R}^2$)**

On donne trois points A , B et C dans $\mathbb{R}^2$, par exemple $A(1, 1)$, $B(3, 2)$ et $C(6, 3)$.

Pour savoir si les trois points sont colinéaires, on doit vérifier si les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont parallèles. Cela revient à voir si $\Delta \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$ est nul, c'est-à-dire si l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, et, par conséquent, celle du triangle ABC sont nulles (voir la figure 3.9).

6. L'aire non orientée est la valeur absolue de l'aire orientée.

7. Cela signifie que la vitesse $\vec{v}$ est la même à chaque instant et en tout point de l'espace.

8. On suppose ici que le fluide est bidimensionnel.

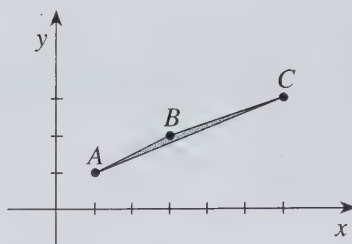


FIGURE 3.9 Le test de colinéarité à l'aide d'un déterminant (calcul d'aire).

Ici, on a $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$ et $\overrightarrow{AC} = (5, 2)$, et alors

$$\Delta\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas parallèles et les trois points A , B et C ne sont pas colinéaires.

EXEMPLE 4 (TEST D'ORIENTATION DANS $\mathbb{R}^2$)

Selon la définition même de déterminant, le signe de $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ est positif (+) si la suite ordonnée $\langle(a, b), (c, d)\rangle$ est orientée positivement et négatif (−) dans le cas contraire. Il est donc possible de connaître l'orientation d'une suite ordonnée sans la voir ou sans la dessiner : il suffit de calculer le déterminant correspondant et de n'en retenir que le signe. Ainsi, la suite $\langle(3, -5), (-4, 7)\rangle$ est orientée positivement, car

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - (-5) \cdot (-4) = +1 > 0.$$

La transposée d'un déterminant 2×2

Pour terminer, voici une dernière propriété des déterminants⁹ qui est plutôt **algébrique**, par opposition à **géométrique**.

D11 Un déterminant ne change pas de valeur si l'on transpose ses lignes en colonnes (la première ligne devient la première colonne et la deuxième ligne devient la deuxième colonne).

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

La preuve de cette propriété consiste simplement à calculer les deux déterminants à l'aide de la formule de calcul que nous avons établie :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \text{ et } \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb = ad - bc.$$

La propriété D11 a pour conséquence spectaculaire que toutes les propriétés énoncées à propos des lignes d'un déterminant sont également vraies à propos des colonnes¹⁰ de ce

9. Les propriétés D7 à D10 seront formulées au chapitre 6 portant sur les matrices.

10. Il faut alors considérer les colonnes d'un déterminant comme des vecteurs colonnes.

déterminant. Par exemple, la propriété D3 devient $\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$:

on peut factoriser hors d'un déterminant un facteur k qui est commun à chaque élément d'une même colonne.

La propriété D5 devient : Permuter les deux colonnes d'un déterminant a pour seul effet de changer son signe.

La règle de Cramer pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues

Dans le système d'équations

$$ax + by = m$$

$$cx + dy = n,$$

on considère x et y comme des inconnues à déterminer en fonction des constantes (paramètres) a, b, c, d, m et n . La règle de Cramer¹¹ donne explicitement les solutions de ce système sous

la forme de quotients de deux déterminants lorsque $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

La démonstration de la règle de Cramer

On remplace d'abord m et n respectivement par $ax + by$ et $cx + dy$ dans le déterminant $\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}$ et on applique les propriétés D3 et D4 des déterminants 2×2 à la première colonne de ce déterminant :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} ax+by & b \\ cx+dy & d \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} ax & b \\ cx & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & b \\ dy & d \end{vmatrix} \\ &= x \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix} \\ &= x \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 0 \\ &= x \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

11. Gabriel Cramer (1704-1752) a été l'élève de Jean Bernoulli (1667-1748).

Ainsi, puisque $\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, on obtient $x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$. Ensuite, on obtient la valeur de l'inconnue y en remplaçant m et n respectivement par $ax + by$ et $cx + dy$ dans le déterminant $\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}$, et en appliquant les mêmes règles de calcul :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & ax+by \\ c & cx+dy \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & ax \\ c & cx \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & by \\ c & dy \end{vmatrix} \\ &= x \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= y \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix} = y \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ et, finalement, } y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Il est facile, pour terminer, de vérifier que les valeurs (uniques) de x et de y ainsi déterminées forment bel et bien une solution du système d'équations de départ.

EXEMPLE

Selon la règle de Cramer, les solutions du système

$$2x + 3y = 1$$

$$3x - 2y = 4$$

sont données par

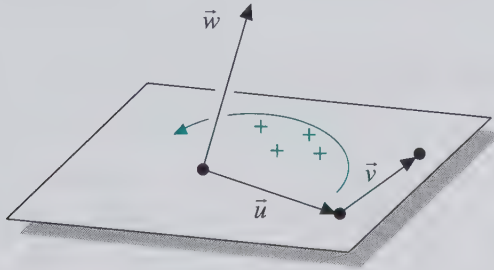
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{14}{13} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = -\frac{5}{13}.$$

3.1.3 L'ORIENTATION DANS $\mathbb{R}^3$

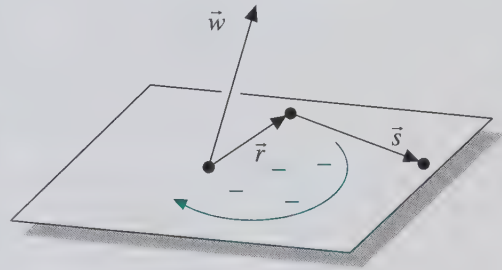
Toute suite ordonnée $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ de trois vecteurs non nuls et linéairement indépendants correspond à l'une des deux orientations possibles dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer cette orientation relative à la base $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$, on représente d'abord $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par deux flèches mises bout à bout selon la séquence $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$: on trace¹² d'abord $\vec{u}$, puis de la pointe de $\vec{u}$, on trace $\vec{v}$ (voir la figure 3.10); ensuite, à partir de l'origine de $\vec{u}$, on trace le vecteur $\vec{w}$ qui est linéairement indépendant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, et qui n'est donc pas contenu dans le plan

12. Attention aux effets de perspective !

déterminé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On choisit de regarder ce plan du côté par lequel le vecteur $\vec{w}$ « sort » ; si la séquence $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ indique le sens contraire des aiguilles d'une montre sur cette face du plan, alors l'orientation de la suite ordonnée $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ est positive (celle de $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$) ; autrement l'orientation de la suite $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ est négative.



Suite $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ orientée positivement.



Suite $\langle \vec{r}, \vec{s}, \vec{w} \rangle$ orientée négativement.

FIGURE 3.10 Les deux orientations dans $\mathbb{R}^3$.

On dit aussi que l'orientation est donnée par la **règle de la main droite**. Dans la figure 3.10, la suite ordonnée $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ obéit à la règle suivante : si l'on place la main droite avec le pouce levé de telle manière qu'il aura la direction et le sens de $\vec{w}$, alors la paume et les doigts de la main droite s'incurvent naturellement dans le sens que doit avoir la suite ordonnée $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ pour que l'orientation de $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ soit positive. Essayez avec la suite $\langle \vec{r}, \vec{s}, \vec{w} \rangle$ de la même figure et vous constaterez que l'orientation de cette suite est négative.

3.1.4 LES DÉTERMINANTS 3×3

Le concept de déterminant 3×3 est un prolongement naturel de l'espace $\mathbb{R}^3$ du concept de déterminant 2×2 ; plutôt que de vouloir calculer l'aire d'un parallélogramme, on veut maintenant calculer le volume d'un parallélépipède engendré, et orienté, par une suite ordonnée $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ de trois vecteurs dans l'espace euclidien tridimensionnel (voir la figure 3.11).

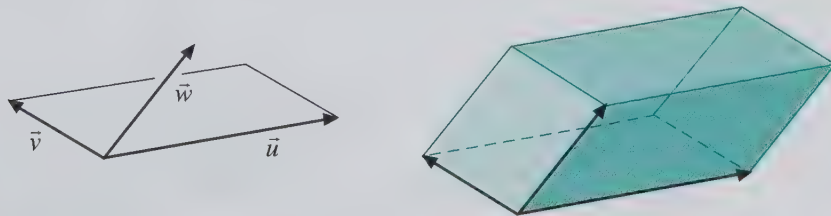


FIGURE 3.11 Le parallélépipède engendré par la suite $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

Déterminant 3×3

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ et $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Le déterminant de la suite ordonnée $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$, noté $\Delta \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ ou

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

est la valeur numérique du **volume** du parallépipède engendré par la suite ordonnée $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$, positive si cette suite est orientée positivement ou négative si cette suite est orientée négativement. Bref, nous dirons que $\Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ est le volume orienté du parallépipède engendré par la suite $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

Remarque

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{w} = \vec{0}$, ou si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants, alors $\Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$.

EXEMPLE

$\Delta\langle 2\vec{i}, 3\vec{j}, -5\vec{k} \rangle = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -30$, car la suite $\langle 2\vec{i}, 3\vec{j}, -5\vec{k} \rangle$ engendre un parallépipède rectangle orienté négativement dont les côtés mesurent respectivement 2, 3 et 5 unités de longueur.

Toutes les propriétés (D1 à D6 et D11) des déterminants 2×2 s'appliquent aux déterminants 3×3 . Voici une reformulation de ces propriétés¹³ pour les déterminants 3×3 . Les démonstrations sont sensiblement les mêmes, mais les illustrations sont évidemment plus complexes.

D1 Le déterminant de la suite $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ est 1.

$$\Delta\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle = 1 : \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

La suite ordonnée $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ engendre un cube orienté positivement dont le volume est unitaire.

D2 Un déterminant dans lequel deux lignes sont identiques est nul.

$$\Delta\langle \vec{u}, \vec{u}, \vec{v} \rangle = \Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \rangle = \Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ e & f & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

Quand deux lignes sont identiques, le parallépipède engendré par les vecteurs lignes est dégénéré (plat) et son volume est nul.

D3 On peut factoriser hors d'un déterminant un facteur k qui est commun à tous les éléments d'une même ligne.

$$\Delta\langle k\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \Delta\langle \vec{u}, k\vec{v}, \vec{w} \rangle = \Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, k\vec{w} \rangle = k\Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

$$\begin{vmatrix} ku_1 & ku_2 & ku_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ kv_1 & kv_2 & kv_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ kw_1 & kw_2 & kw_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

13. *Rappel* : Les propriétés D1 à D4 sont des propriétés axiomatiques dont on peut déduire toutes les autres.

Cette propriété traduit simplement le fait que, si l'un des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ ou $\vec{w}$ est étiré, ou comprimé, par un facteur k , alors le volume orienté du parallélépipède engendré par la suite ordonnée $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ sera multiplié par k (signe inclus, pour tenir compte de l'orientation).

D4 Sur chaque ligne, le déterminant, considéré comme l'opérateur, est distributif sur la somme vectorielle.

$$\Delta\langle \vec{r} + \vec{s}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \Delta\langle \vec{r}, \vec{v}, \vec{w} \rangle + \Delta\langle \vec{s}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

$$\begin{vmatrix} r_1 + s_1 & r_2 + s_2 & r_3 + s_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

La figure 3.12 illustre et justifie cette propriété dans le cas où les orientations des suites ordonnées $\langle \vec{r} + \vec{s}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$, $\langle \vec{r}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ et $\langle \vec{s}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ sont les mêmes; pour alléger la présentation, nous n'illustrerons que ce cas.

En remplaçant successivement $\vec{v}$ et $\vec{w}$ par $\vec{r} + \vec{s}$ (voir la figure 3.12), on obtiendrait aussi

$$\Delta\langle \vec{u}, \vec{r} + \vec{s}, \vec{w} \rangle = \Delta\langle \vec{u}, \vec{r}, \vec{w} \rangle + \Delta\langle \vec{u}, \vec{s}, \vec{w} \rangle$$

et

$$\Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{r} + \vec{s} \rangle = \Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{r} \rangle + \Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{s} \rangle.$$

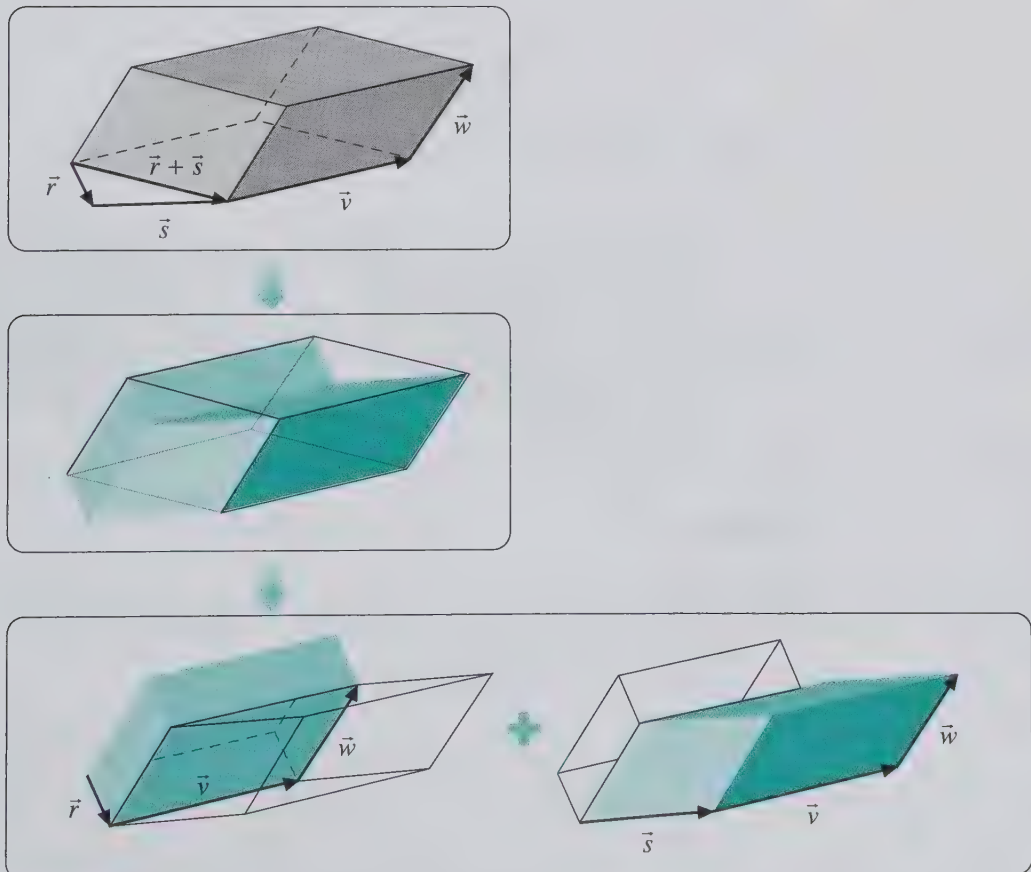


FIGURE 3.12 La quatrième propriété des déterminants 3×3 : $\Delta\langle \vec{r} + \vec{s}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \Delta\langle \vec{r}, \vec{v}, \vec{w} \rangle + \Delta\langle \vec{s}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$.

EXEMPLE

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

car $(u_1, u_2, u_3) = (u_1, 0, 0) + (0, u_2, 0) + (0, 0, u_3)$ sur la première ligne.

D5 Une permutation de deux lignes quelconques d'un déterminant a pour seul effet de changer le signe de ce déterminant.

$$\Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = -\Delta\langle \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \rangle, \Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = -\Delta\langle \vec{w}, \vec{v}, \vec{u} \rangle, \Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = -\Delta\langle \vec{u}, \vec{w}, \vec{v} \rangle$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

La figure 3.13 illustre le cas où l'on permute les deux premières lignes.

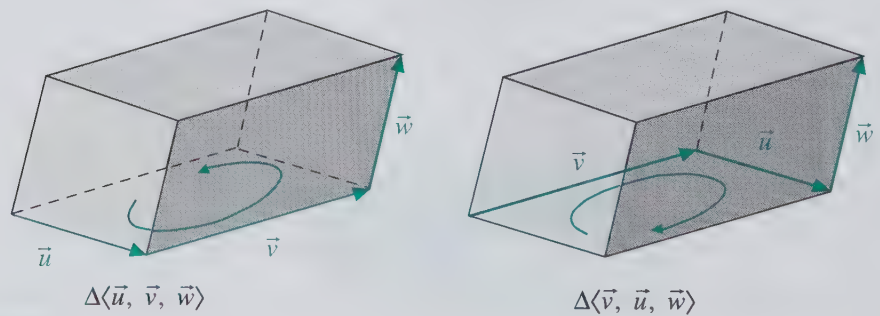


FIGURE 3.13

D6 À une ligne donnée, on peut ajouter une combinaison linéaire des autres lignes sans changer la valeur du déterminant.

$$\Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \Delta\langle \vec{u} + a\vec{v} + b\vec{w}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 + av_1 + bw_1 & u_2 + av_2 + bw_2 & u_3 + av_3 + bw_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Cette propriété est valide pour toutes les lignes.

EXEMPLE

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad [\text{\AA la ligne 3, on a ajout\AA (-1) fois la ligne 2.}]$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad [\text{\AA la ligne 2, on a ajout\AA (-1) fois la ligne 1.}]$$

$$= 0 \quad [\text{Propri\AA t\AA D2}]$$

On peut facilement d\AA mon\AA trer la propri\AA t\AA D6 \AA partir des propri\AA t\AA D4, D3 et D2; cependant, comme le montre la figure 3.14, la propri\AA t\AA D6 n'est rien d'autre que le **principe de Cavalieri** appliqu\AA aux parall\AA l\AA ip\AA d\AA es. Selon ce principe, formul\AA par Bonaventura Cavalieri¹⁴ en 1629, des prismes, ou des cylindres, ayant la m\AA me section et la m\AA me hauteur ont le m\AA me volume.

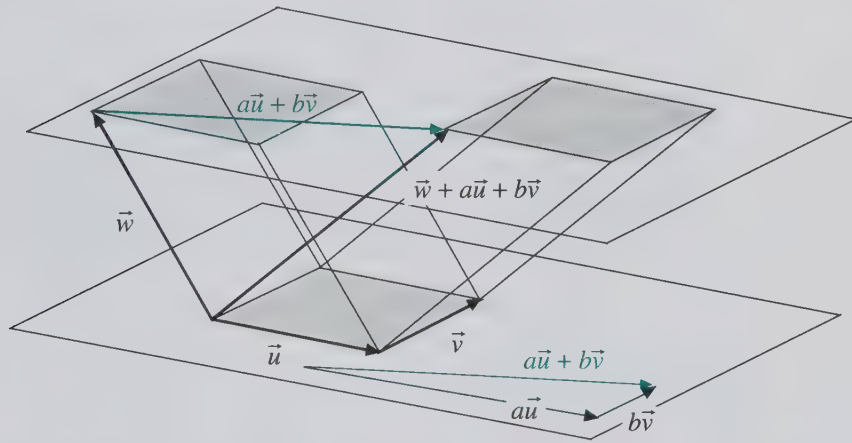


FIGURE 3.14 Le principe de Cavalieri ou la propri\AA t\AA D6 des d\AA t\AA rminants; illustration du cas $\Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + a\vec{u} + b\vec{v} \rangle$.

Avant de donner une formule explicite de calcul pour les d\AA t\AA rminants 3×3 , il nous faut faire quelques... r\AA flexions.

D'abord, dans $\mathbb{R}^2$, on constate que permuter les colonnes du d\AA t\AA rminant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ pour obtenir $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ s'interpr\AA te g\AA om\AA triquement par la r\AA flexion autour de la droite d'\AA quation $y = x$ du parall\AA logramme engendr\AA par la suite $\langle (a, b), (c, d) \rangle$. Cette r\AA flexion ne change pas l'aire du parall\AA logramme mais seulement son orientation, et c'est pourquoi on a $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ (voir la figure 3.15).

14. Cavalieri \AA tait alors un \AA l\AA ve du c\AA l\AA bre Galil\AA e; son principe s'\AA nonce dans une version plus g\AA n\AA rale que celle que nous utilisons ici.

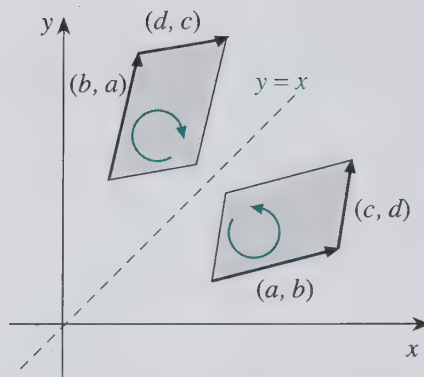


FIGURE 3.15 L'effet d'une réflexion dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$.

Il en va de même dans $\mathbb{R}^3$: une réflexion autour d'un plan (miroir) ne modifie pas la grandeur d'un volume, mais change son orientation (signe). Or, dans un déterminant 3×3 , la permutation de deux colonnes quelconques (distinctes) peut être interprétée géométriquement par une réflexion autour d'un plan dans $\mathbb{R}^3$; par exemple, si l'on permute les deux premières colonnes, cela revient à appliquer aux vecteurs lignes du déterminant une réflexion autour du plan caractérisée par l'équation $y = x$. On en déduit la propriété suivante des déterminants 3×3 , que nous désignerons par D5', car elle est l'équivalent de la propriété D5 appliquée aux colonnes plutôt qu'aux lignes¹⁵.

D5' La permutation de deux colonnes d'un déterminant 3×3 a pour seul effet de changer le signe de ce déterminant.

EXEMPLE

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 8 & 7 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \quad [\text{On a permuté la première et la troisième colonne.}]$$

Maintenant, on peut appliquer les propriétés des déterminants 3×3 pour trouver une formule de calcul explicite.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} && (\text{Propriété D4}) \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_2 & 0 & 0 \\ v_2 & v_1 & v_3 \\ w_2 & w_1 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_3 & 0 & 0 \\ v_3 & v_1 & v_2 \\ w_3 & w_1 & w_2 \end{vmatrix} && (\text{Propriété D5'}) \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & v_3 \\ 0 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_2 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & v_3 \\ 0 & w_1 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_3 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & v_2 \\ 0 & w_1 & w_2 \end{vmatrix} && (\text{Propriétés D4, D3 et D2}) \end{aligned}$$

15. Au chapitre 6, cette propriété sera une conséquence de la propriété D11 (voir la sous-section 6.3.2).

[Il faut remplacer (v_1, v_2, v_3) par $(v_1, 0, 0) + (0, v_2, v_3)$, appliquer les propriétés, puis faire de même avec (w_1, w_2, w_3) .]

$$= u_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & v_3 \\ 0 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & v_3 \\ 0 & w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & v_2 \\ 0 & w_1 & w_2 \end{vmatrix} \quad (\text{Propriété D3})$$

$$= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix},$$

$$\text{car } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad (\text{voir la figure 3.16}).$$

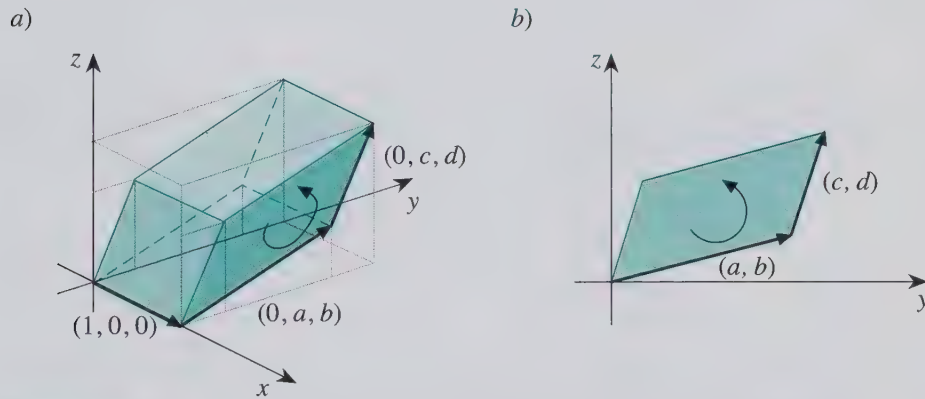


FIGURE 3.16 Le parallélépipède en a) s'obtient en donnant au parallélogramme en b) une épaisseur de une unité ; le volume du premier coïncide avec l'aire du second (numériquement).

Le déterminant $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ représente le volume orienté du parallélépipède engendré par les vecteurs lignes (u_1, u_2, u_3) , (v_1, v_2, v_3) et (w_1, w_2, w_3) pris dans l'ordre $\langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3), (w_1, w_2, w_3) \rangle$ et sa valeur est donnée par

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}.$$

Cette formule est appelée **développement de Laplace**¹⁶ selon la première rangée.

16. En l'honneur de Pierre Simon de Laplace (1749-1827). On pourrait utiliser cette formule comme définition des déterminants 3×3 .

EXEMPLE 1

On cherche le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u} = (2, 1, 3)$, $\vec{v} = (-1, 2, 0)$ et $\vec{w} = (5, 3, 1)$.

Le volume orienté correspondant à la suite ordonnée $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ est donné par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} :$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2[2 \cdot 1 - 0 \cdot 3] - 1[-1 \cdot 1 - 0 \cdot 5] + 3[-1 \cdot 3 - 2 \cdot 5] \\ &= -34. \end{aligned}$$

Le volume non orienté est donc de 34 unités.

EXEMPLE 2

Pour savoir si la suite ordonnée $\langle (-2, 3, 4), (2, 1, -3), (-5, 2, 5) \rangle$ est orientée positivement ou négativement, on doit calculer le signe du déterminant correspondant à cette suite :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & 5 \end{vmatrix} &= -2 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot 11 - 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 9 \\ &= +29 > 0. \end{aligned}$$

Comme le déterminant est positif, l'orientation de la suite est donc **positive** (identique à celle de la base $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$).

Pour terminer, la propriété D11 des déterminants 2×2 se vérifie aussi pour les déterminants 3×3 ¹⁷.

D11 On peut transposer les lignes en colonnes sans changer la valeur du déterminant.

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Pour prouver la propriété D11, il suffit de calculer au long le développement de chacun de ces deux déterminants et de constater qu'on obtient le même résultat ; il n'y a pas de justification géométrique élémentaire ou intuitive de cette propriété. Conséquence de la propriété D11 : toutes les propriétés vraies pour les lignes d'un déterminant sont automatiquement vraies pour les colonnes.

17. Les propriétés D7 à D10 seront formulées au chapitre 6 portant sur les matrices (voir la sous-section 6.3.2).

3.1.5 QUELQUES APPLICATIONS DES DÉTERMINANTS 3×3

Les déterminants 3×3 nous permettent de savoir si trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants ou indépendants et si quatre points dans $\mathbb{R}^3$ sont coplanaires ou non. Ils nous permettent également de déterminer le volume d'un tétraèdre, d'un prisme ou d'une pyramide à partir de la décomposition d'un parallélépipède.

Le test de la dépendance linéaire de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$

Si l'un des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des deux autres, alors le parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est dégénéré (plat) et a un volume nul. On peut donc écrire ce qui suit.

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement indépendants si et seulement si

$$\Delta\langle\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\rangle \neq 0.$$

EXEMPLE

On veut savoir si les vecteurs $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ et $(3, 1, 2)$ forment une base dans $\mathbb{R}^3$.

Pour que ces trois vecteurs forment une base, il suffit qu'ils soient linéairement indépendants.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= (1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (3) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1)(5) - (2)(1) + (3)(-7) \\ &= -18 \end{aligned}$$

Le déterminant étant non nul, on conclut que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants; ils forment donc une base de l'espace $\mathbb{R}^3$.

Le test de la coplanarité de quatre points dans $\mathbb{R}^3$

Quatre points¹⁸ distincts A , B , C et D de $\mathbb{R}^3$ sont dits « coplanaires » s'il existe un plan qui les contient tous. Si les quatre points A , B , C et D sont coplanaires, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont tous les trois parallèles au plan contenant les quatre points, et donc le parallélépipède engendré par ces trois vecteurs est dégénéré. Cela se traduit par le test suivant.

Les quatre points A , B , C et D de $\mathbb{R}^3$ sont coplanaires si et seulement si

$$\Delta\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\rangle = 0.$$

EXEMPLE

On veut savoir si les points $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 3)$ et $D(1, 1, 1)$ sont coplanaires.

On a $\overrightarrow{AB} = (-3, 3, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, 0, 3)$ et $\overrightarrow{AD} = (-2, 1, 1)$ et

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= (-3) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (0) \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -3 \cdot (-3) - 3 \cdot 3 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc, dans ce cas, les quatre points A , B , C et D sont effectivement coplanaires.

18. Dans $\mathbb{R}^3$, trois points sont toujours coplanaires.

Le volume d'un tétraèdre, d'un prisme ou d'une pyramide

La figure 3.17 montre la décomposition d'un parallélépipède ① en deux prismes triangulaires ② et ③ de volumes égaux ; un de ces prismes, ③, est ensuite décomposé en une pyramide dont la base est un parallélogramme, ④, et un tétraèdre ⑤ ; la pyramide se décompose elle-même en deux tétraèdres de volumes égaux ⑥ et ⑦ (des bases triangulaires égales et de même hauteur). En fait, les tétraèdres ⑤, ⑥ et ⑦ ont tous le même volume, car la juxtaposition des tétraèdres ⑤ et ⑦ montre (voir le bas de la figure 3.17) que ceux-ci sont chacun la demie d'une même pyramide dont la base est un parallélogramme (couchée sur une face triangulaire, avec un sommet au point A)¹⁹.

La figure 3.17 permet de conclure que :

- le volume du prisme ③ est la moitié du volume du parallélépipède ① ;
- le volume de la pyramide dont la base est un parallélogramme, ④, mesure $\frac{2}{3}$ du volume du prisme ③, c'est-à-dire $\frac{1}{3}$ du volume du parallélépipède ① ;
- le volume de chacun des tétraèdres ⑤, ⑥ et ⑦ mesure $\frac{1}{3}$ du volume du prisme triangulaire ③, c'est-à-dire $\frac{1}{6}$ du volume du parallélépipède ①.

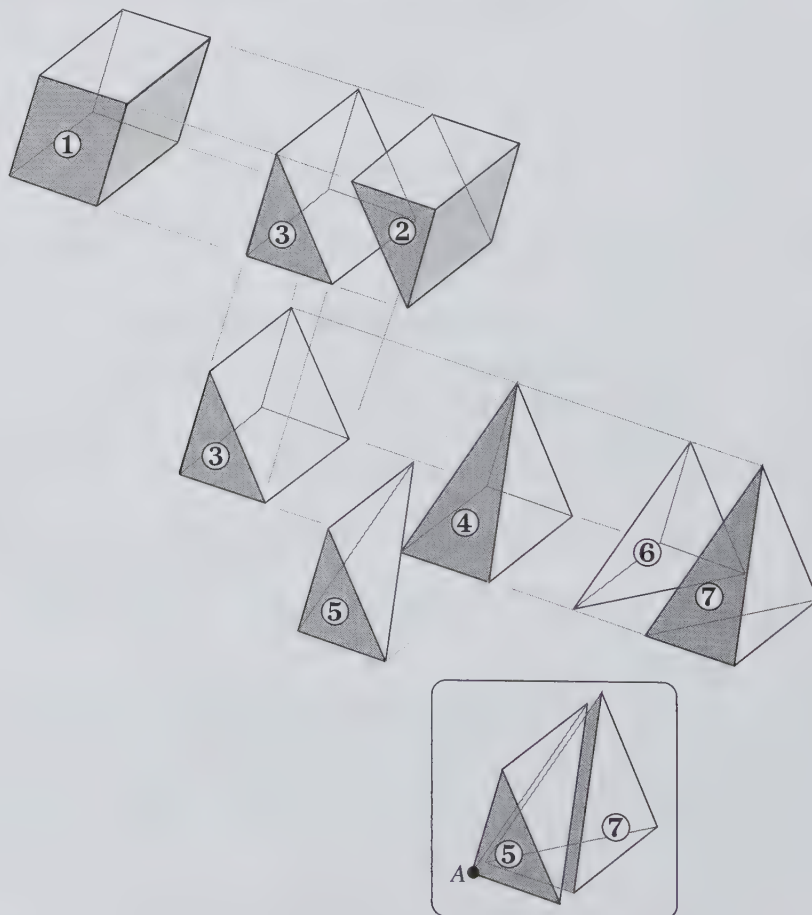


FIGURE 3.17 La décomposition d'un parallélépipède.

19. On pourrait aussi appliquer le principe de Cavalieri pour voir que les tétraèdres ⑤ et ⑦ ont le même volume.

EXEMPLE 1

On cherche le volume du tétraèdre $OABC$ de la figure 3.18, dont les sommets sont donnés par $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$ avec $a, b, c > 0$.

Le volume V du tétraèdre est de $1/6W$, où W est le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \frac{1}{6} abc.$$

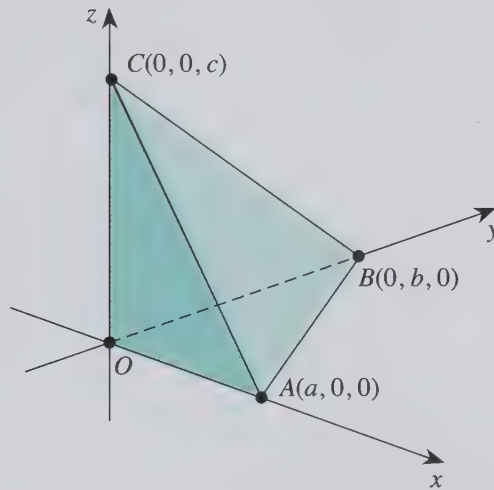


FIGURE 3.18

EXEMPLE 2

La figure 3.19 montre un prisme triangulaire pour lequel les sommets A, B, C et D sont donnés par $A(-1, 1, 2)$, $B(0, 3, 5)$, $C(2, 2, 7)$ et $D(12, 7, 7)$, et dans lequel $\overline{AF} = \overline{BE} = \overline{CD}$. On cherche le volume V de ce prisme.

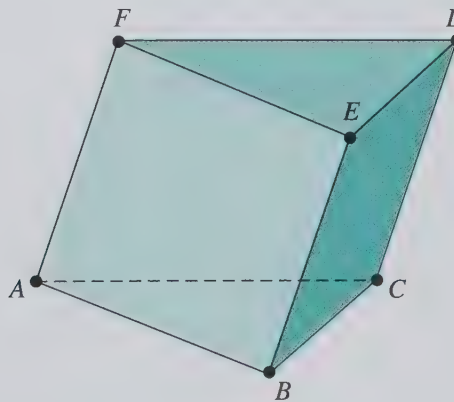


FIGURE 3.19

Le volume du prisme est la moitié du volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$:

$$V = \frac{1}{2} \Delta \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD} \rangle = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 10 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 45.$$

La règle de Cramer pour un système de trois équations à trois inconnues

Si le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ est non nul, alors les solutions du système de trois équations

à trois inconnues

$$ax + by + cz = m$$

$$dx + ey + fz = n$$

$$gx + hy + iz = p$$

sont données par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & e & f \\ p & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ d & n & f \\ g & p & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} \text{ et } z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ d & e & n \\ g & h & p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}.$$

La démonstration de la règle de Cramer pour les systèmes de trois équations à trois inconnues est semblable à celle de la règle pour les systèmes de deux équations à deux inconnues qui a déjà été donnée (voir la sous-section 3.1.2).

EXEMPLE

Selon la règle de Cramer, les solutions du système

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$2x - y + z = 0$$

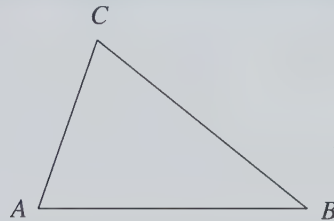
$$3x + y - z = 1$$

sont données par

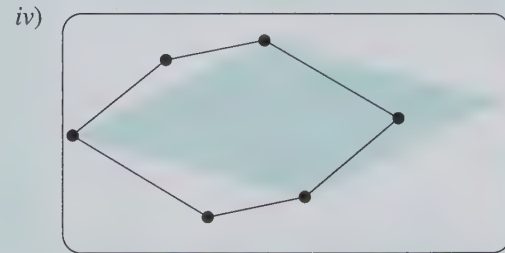
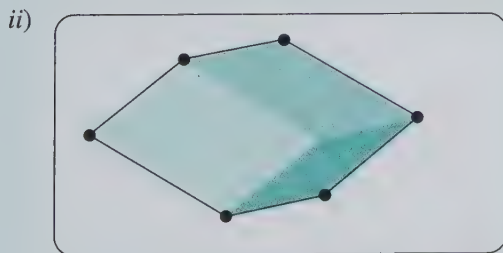
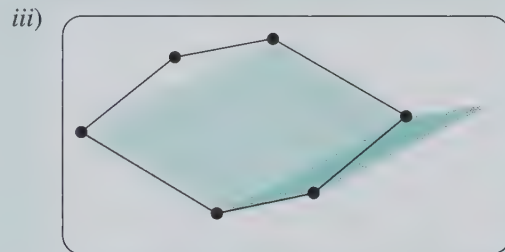
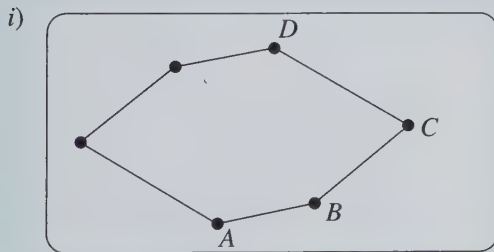
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}, y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{25}{25} = 1 \text{ et } z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

EXERCICES 3.1

- Déterminez l'orientation, positive ou négative, de chacune des suites ordonnées suivantes dans $\mathbb{R}^2$.
 - $\langle (-3, 5), (1, 1) \rangle$
 - $\langle (-1, 0), (0, -1) \rangle$
 - $\langle (3, -2), (-4, 2) \rangle$
- Calculez l'aire de chacun des triangles ABC à l'aide d'un déterminant approprié lorsque les sommets sont donnés par :
 - $A(2, 5)$, $B(-2, 4)$ et $C(3, 3)$;
 - $A(5, 0)$, $B(0, 5)$ et $C(-5, 5)$.
- Dans $\mathbb{R}^2$, l'aire du triangle ABC de la figure ci-dessous est de 20 (unités d'aire); quelle est la valeur du déterminant $\Delta\langle \overline{AB}, \overline{CB} \rangle$?



- Dans l'hexagone de la figure i), les côtés opposés sont congrus et parallèles deux à deux. Les sommets A , B , C et D sont donnés par $A(3, 1)$, $B(8, 2)$, $C(13, 10)$ et $D(6, 18)$.
 - Calculez l'aire de cet hexagone en l'exprimant comme la somme de trois déterminants 2×2 (figure ii).
 - Calculez l'aire de cet hexagone en l'exprimant comme la somme de deux déterminants 2×2 (figure iii).
 - Calculez l'aire de cet hexagone à l'aide d'un seul déterminant 2×2 (figure iv).



- À l'aide d'un test sur un déterminant 2×2 , déterminez si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants sont parallèles.
 - $\vec{u} = (3, 8)$ et $\vec{v} = (12, 31)$.
 - $\vec{u} = (-9, 21)$ et $\vec{v} = (3, -7)$.
- À l'aide d'un test sur un déterminant 2×2 , déterminez si les points A , B et C suivants sont colinéaires dans $\mathbb{R}^2$.
 - $A(3, 1)$, $B(-2, 5)$ et $C(10, -8)$.
 - $A(-1, 3)$, $B(-3, 7)$ et $C(2, -3)$.

7. Le déterminant $\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}$ représente l'aire d'un parallélogramme issu de l'origine dont les côtés sont donnés par les vecteurs (x, y) et (a, b) . En maintenant (a, b) constant et en faisant varier (x, y) de manière à garder l'aire du parallélogramme inchangée, le sommet de coordonnées (x, y) du parallélogramme parcourt un lieu géométrique. Décrivez et illustrez ce lieu de $\mathbb{R}^2$ dans les cas suivants.

a) $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \right\}$ b) $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 \right\}$ c) $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 \right\}$

8. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrez que :

a) $\Delta\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle = \vec{u}_\perp \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v}_\perp)$;

b) $\Delta\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$, où θ est l'angle situé entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ mesuré dans le sens antihoraire de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$.

9. À partir de l'exercice 8, interprétez le produit scalaire $\vec{s} \cdot \vec{t}$ des vecteurs $\vec{s}$ et $\vec{t}$ de $\mathbb{R}^2$ comme l'aire orientée d'un parallélogramme particulier; décrivez les côtés de ce parallélogramme en fonction des vecteurs $\vec{s}$ et $\vec{t}$.

10. Appliquez la règle de Cramer pour résoudre les systèmes d'équations suivants.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 7y = 10 \\ -2x + y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 7x - 3y = 0 \end{cases}$

11. (Changement de base dans $\mathbb{R}^2$ à l'aide de la règle de Cramer)

Déterminez les composantes x et y du vecteur $\vec{s}$ dans la base $\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle$, où $\vec{s} = 7\vec{i} + 12\vec{j}$, $\vec{u} = 4\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$. Écrivez d'abord un système de deux équations à deux inconnues qui détermine x et y , puis résolvez ce système par la méthode de Cramer.

12. À l'aide d'un test sur un déterminant 3×3 , voyez si les suites ordonnées suivantes sont orientées positivement ou négativement.

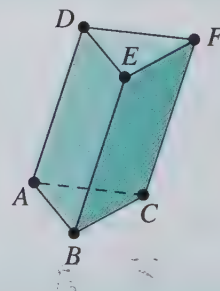
a) $\langle(1, 0, 1), (0, -1, 0), (1, 1, 0)\rangle$

b) $\langle(3, 1, -2), (0, 1, 5), (1, 1, 1)\rangle$

13. Calculez le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs

$$\vec{u} = (2, 1, 1), \vec{v} = (-1, 1, 3) \text{ et } \vec{w} = (1, -2, 2).$$

14. À l'aide d'un déterminant 3×3 , calculez le volume du prisme triangulaire illustré ci-contre dont les sommets sont donnés par $A(3, 1, 2)$, $B(2, 2, 0)$, $C(4, 5, 3)$, $D(5, 0, 3)$, $E(4, 1, 1)$ et $F(6, 4, 4)$.



15. À l'aide d'un déterminant 3×3 , calculez le volume de la pyramide triangulaire (tétraèdre) dont les sommets sont donnés par

$$A(1, 2, 3), B(4, 1, 4), C(7, 5, -1) \text{ et } D(10, 6, 8).$$

16. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ suivants sont-ils linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$? Répondez à l'aide d'un test sur un déterminant 3×3 .

a) $\vec{u} = (1, -2, 3)$, $\vec{v} = (3, 6, -7)$ et $\vec{w} = (5, 2, -1)$.

b) $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 3, 1)$ et $\vec{w} = (3, 1, 2)$.

17. Dans chacun des cas suivants, voyez si les quatre points donnés sont coplanaires (utilisez un test sur un déterminant 3×3).

a) $A(2, 2, 1)$, $B(2, 3, 6)$, $C(5, 3, -1)$ et $D(3, 3, 2)$.

b) $A(1, 1, 2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 1, 1)$ et $D(-3, 1, -1)$.

18. Déterminez toutes les valeurs du paramètre k (s'il existe) pour lesquelles les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

a) $\vec{u} = (2, 1, 2)$, $\vec{v} = (1, k, 1)$ et $\vec{w} = (3, 1, k)$.

b) $\vec{u} = (1, k, -1)$, $\vec{v} = (3, -1, 2)$ et $\vec{w} = (1 - 2k, 5, 1 + 3k)$.

19. Calculez la valeur du déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ m & n & p \end{vmatrix}$ sachant que $\begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ r & 0 & t \\ m & 0 & p \end{vmatrix} = 5$, $\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & s & 0 \\ m & 0 & p \end{vmatrix} = 2$ et $\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ r & 0 & t \\ 0 & n & 0 \end{vmatrix} = 1$.

(Coup de pouce : Voyez la deuxième colonne comme une somme de trois vecteurs colonnes et appliquez la propriété D4 des déterminants à cette colonne.)

20. Supposons qu'un fluide incompressible s'écoule à la vitesse constante $\vec{v} = (3, 2, 5)$ dans tout l'espace $\mathbb{R}^3$ (la vitesse d'écoulement est la même en tout point de $\mathbb{R}^3$; les composantes de $\vec{v}$ sont mesurées en m/s). Supposons aussi que les sommets A , B et C d'une membrane plane triangulaire sont donnés par $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ et $C(0, 0, 3)$ dans $\mathbb{R}^3$.

a) Quel est le débit du fluide (en m^3/s) à travers cette membrane?

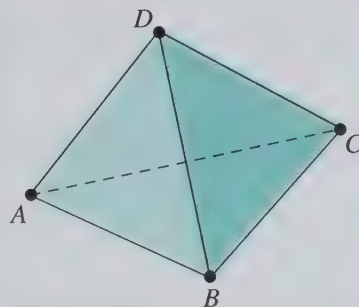
b) Quelle quantité de fluide (en m^3) traverse cette membrane en une minute?

21. On peut calculer le volume V du tétraèdre $ABCD$ illustré ci-contre de différentes manières. En voici trois :

$$V = \frac{1}{6} \Delta \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle, \text{ ou } V = \frac{1}{6} \Delta \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD} \rangle,$$

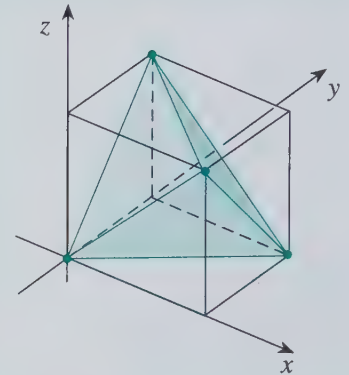
$$\text{ou } V = \frac{1}{6} \Delta \langle \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC} \rangle.$$

À l'aide des propriétés des déterminants, montrez que ces trois équations donnent la même réponse. (Coup de pouce : Exprimez tous les vecteurs comme des combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.)



22. a) Soit un triangle quelconque ABC dans $\mathbb{R}^2$ et G , le barycentre des sommets A , B et C . Montrez que les trois triangles GAB , GBC et GAC ont la même aire.
- b) Soit $ABCD$, un tétraèdre quelconque dans $\mathbb{R}^3$, et G , le barycentre des sommets A , B , C et D . Montrez que les quatre tétraèdres issus de G , dont les bases sont les faces triangulaires du tétraèdre $ABCD$, ont le même volume.

23. Comme le montre la figure ci-contre, un tétraèdre régulier (toutes les faces sont des triangles équilatéraux) peut toujours être inscrit dans un cube: les arêtes du tétraèdre coïncident alors avec les diagonales des faces du cube.



- a) Déterminez le volume du tétraèdre régulier en fonction de la longueur c d'une arête du cube.
- b) Exprimez la longueur c d'une arête du cube en fonction de la longueur a de la diagonale d'une face du cube, puis, avec le résultat obtenu en a), exprimez le volume du tétraèdre régulier en fonction de la longueur a d'une de ses arêtes.
- c) Quelle doit être la longueur (en cm) de l'arête d'un berlingot de jus en forme de tétraèdre régulier si l'on veut qu'il ait un volume de 200 mL ?

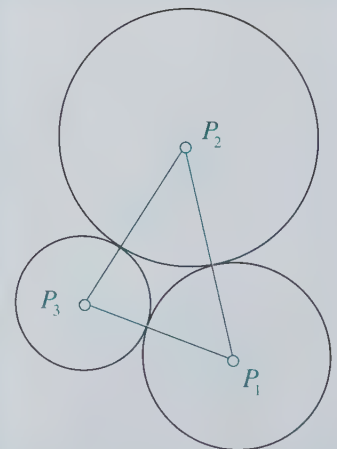
24. Appliquez la règle de Cramer pour résoudre les systèmes d'équations suivants.

$$a) \begin{cases} 2x + 3y + z = -1 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \\ 3y - 2z = 2 \end{cases}$$

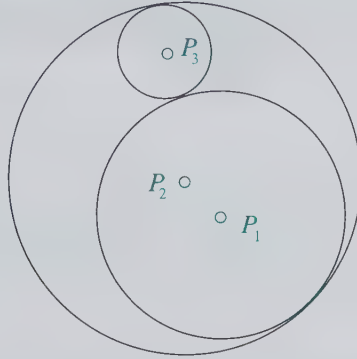
$$b) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \\ x + 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

25. La figure ci-contre est constituée de trois cercles tangents deux à deux dans un même plan, de centres P_1 , P_2 et P_3 . La distance entre P_1 et P_2 mesure 6 unités, la distance entre P_1 et P_3 mesure 4 unités, et la distance entre P_2 et P_3 mesure 5 unités.

- a) Écrivez, sans le résoudre, un système de trois équations linéaires à trois inconnues permettant de déterminer les rayons r_1 , r_2 et r_3 de ces trois cercles.
- b) Appliquez la règle de Cramer pour déterminer la valeur de r_1 .



26. La figure ci-dessous est constituée de trois cercles tangents deux à deux dans un même plan, de centres P_1 , P_2 et P_3 . La distance entre P_1 et P_2 mesure 3 unités, la distance entre P_1 et P_3 mesure 6 unités, et la distance entre P_2 et P_3 mesure 5 unités.



- a) Écrivez, sans le résoudre, un système de trois équations linéaires à trois inconnues permettant de déterminer les rayons r_1 , r_2 et r_3 de ces trois cercles.
- b) Appliquez la règle de Cramer pour déterminer la valeur de r_1 .
27. Démontrez la propriété D5 des déterminants à partir des propriétés D2 et D4 (dans $\mathbb{R}^2$). (*Coup de pouce*: Partez de l'équation $0 = \Delta(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v})$, qui est une conséquence de D2, puis appliquez D4 et de nouveau D2.)
28. Montrez que l'aire du triangle de sommets $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ et $C(c_1, c_2)$ dans $\mathbb{R}^2$ est donnée par la valeur absolue de

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

LE PRODUIT VECTORIEL ET LE PRODUIT MIXTE DANS $\mathbb{R}^3$

Dans cette section, le concept physique de moment de force nous amène à définir le produit vectoriel de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ et à étudier des propriétés géométriques de ce produit. Comme son nom l'indique, le résultat du produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur. En composant le produit vectoriel avec le produit scalaire, nous obtiendrons le produit mixte de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ et nous constaterons que ce dernier produit coïncide avec le volume orienté (déterminant) du parallélépipède engendré par ces trois vecteurs.

3.2.1 LE PRODUIT VECTORIEL DANS $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} \wedge \vec{v}$

Tout comme la définition du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ était motivée par le concept de travail emprunté à la mécanique (voir la sous-section 2.2.1), la définition du produit vectoriel, valide dans $\mathbb{R}^3$ seulement, est motivée par le concept de **moment de force**, emprunté aussi à la mécanique.

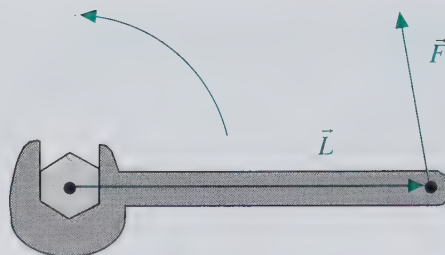


FIGURE 3.20

Supposons que la clé représentée à la figure 3.20 est placée de telle manière que son manche, représenté par $\vec{L}$, et la force $\vec{F}$ appliquée sur ce manche soient dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation du boulon. L'efficacité de la force $\vec{F}$ à faire tourner le boulon dépendra alors de la longueur $\|\vec{L}\|$ du manche, de l'intensité $\|\vec{F}\|$ de la force $\vec{F}$ et de l'angle situé entre $\vec{L}$ et $\vec{F}$.

En fait, l'efficacité de la force $\vec{F}$ à faire tourner le boulon est proportionnelle au produit $\|\vec{L}\|\|\vec{F}\|\sin\theta$, où θ est l'angle entre $\vec{L}$ et $\vec{F}$, car, en décomposant $\vec{F}$ en une somme de deux vecteurs, l'un parallèle à $\vec{L}$ et l'autre perpendiculaire à $\vec{L}$ (voir la figure 3.21), on voit que seul le terme perpendiculaire à $\vec{L}$, dont l'intensité (longueur) est $\|\vec{F}\|\sin\theta$, contribue à l'effort de rotation.

En physique, le moment de force déterminé par $\vec{L}$ et $\vec{F}$ est représenté par un vecteur $\vec{M}$ défini comme suit :

- 1) la longueur de $\vec{M}$ est le produit $\|\vec{L}\|\|\vec{F}\|\sin\theta$ (c'est l'**intensité** du moment) ;
- 2) la direction de $\vec{M}$ est perpendiculaire à celle de $\vec{L}$ et à celle de $\vec{F}$ simultanément, et correspond à l'axe de rotation (si $\sin\theta = 0$, alors $\vec{M} = \vec{0}$) ;
- 3) le sens de $\vec{M}$ est tel que la suite ordonnée $\langle \vec{L}, \vec{F}, \vec{M} \rangle$ est orientée positivement. Ce vecteur $\vec{M}$ est noté $\vec{L} \wedge \vec{F}$ (l'ordre compte) et est appelé **produit vectoriel** de $\vec{L}$ par $\vec{F}$.

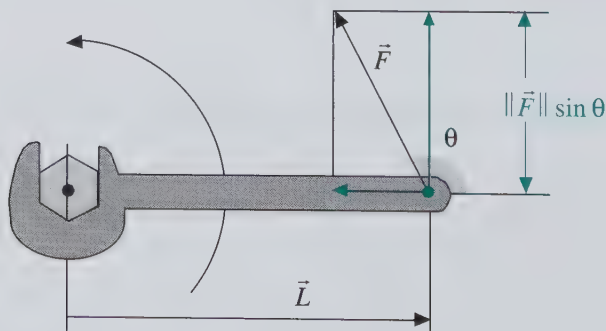


FIGURE 3.21

Remarques

1. Le produit vectoriel $\vec{L} \wedge \vec{F}$ est aussi noté $\vec{L} \times \vec{F}$ par plusieurs auteurs.
2. Dans l'expression $\|\vec{L}\|\|\vec{F}\|\sin\theta$, on a toujours $\sin\theta \geq 0$.
3. La longueur du produit vectoriel, donnée par $\|\vec{L} \wedge \vec{F}\| = \|\vec{L}\|\|\vec{F}\|\sin\theta$, est précisément la mesure de l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{L}$ et $\vec{F}$ (voir la figure 3.22).

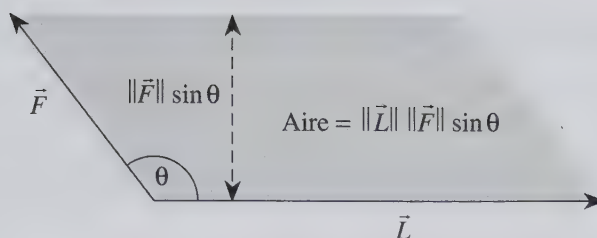


FIGURE 3.22

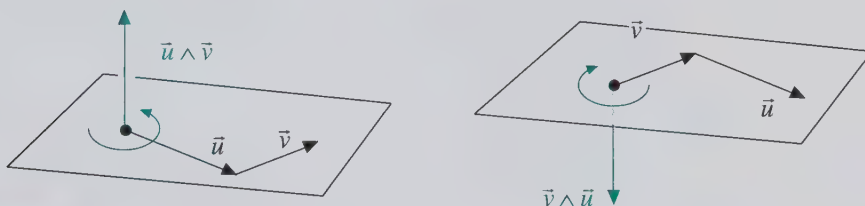
Voici maintenant une définition du produit vectoriel indépendante de la physique²⁰.

Produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans $\mathbb{R}^3$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^3$. Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont

- 1) la longueur est donnée par l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
- 2) la **direction** est orthogonale simultanément à celle de $\vec{u}$ et à celle de $\vec{v}$;
- 3) le **sens** est celui pour lequel la suite ordonnée $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle$ est orientée positivement (voir la figure 3.23).

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants, c'est-à-dire si $\vec{u} = \vec{0}$, ou $\vec{v} = \vec{0}$, ou $\vec{u} \parallel \vec{v}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

FIGURE 3.23 Les produits vectoriels $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{v} \wedge \vec{u}$; on remarque que $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Remarques

1. $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ quel que soit $\vec{u}$ (conséquence immédiate de la définition);
2. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est aussi noté $\vec{u} \times \vec{v}$.

EXEMPLES (voir la figure 3.24)

- 1) $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$
- 2) $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$
- 3) $(\vec{i} + \vec{j}) \wedge \vec{k} = \vec{i} - \vec{j}$

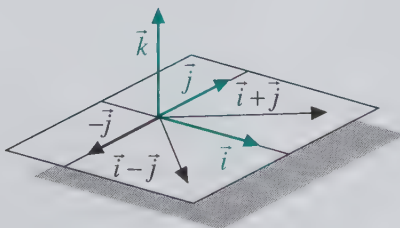


FIGURE 3.24

20. On attribue cette définition, de même que la notation $\vec{u} \wedge \vec{v}$, à Hermann G. Grassmann (1809-1877).

3.2.2 LES PROPRIÉTÉS DU PRODUIT VECTORIEL

Pour calculer, par exemple, les composantes du produit vectoriel $(1, 2, 3) \wedge (-3, 1, 5)$, nous devons trouver une formule qui donne explicitement les composantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ en fonction des composantes de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$. Nous obtiendrons une telle formule après avoir identifié les principales propriétés algébriques du produit vectoriel.

PV1 $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$

Dans la définition, un changement d'ordre entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ correspond à un changement d'orientation et donc à un changement de signe pour le produit vectoriel (voir la figure 3.23).

PV2 $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$

Si l'on étire ou comprime par un facteur k un des côtés du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, l'aire du parallélogramme se trouvera multipliée par $|k|$ et l'orientation des suites $\langle k\vec{u}, \vec{v} \rangle$ et $\langle \vec{u}, k\vec{v} \rangle$ sera identique à celle de $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ si $k > 0$ et contraire à celle de $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ si $k < 0$.

PV3 $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$

La justification géométrique de cette propriété (distributivité du produit vectoriel sur la somme vectorielle) est donnée dans la section *Pour aller plus loin* de ce chapitre pour alléger la présentation.

PV4 $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$

Cette propriété est une conséquence de PV1 et de PV3.

PV5 $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j} \text{ et } \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}.$

Cette propriété est une conséquence immédiate de la définition.

Remarque

Les propriétés PV1, PV2, PV3 et PV5 sont axiomatiques : on pourrait considérer qu'elles définissent le produit vectoriel.

Pour obtenir une formule explicite de calcul du produit vectoriel $(u_1, u_2, u_3) \wedge (v_1, v_2, v_3)$, il suffit maintenant d'appliquer ces propriétés du produit vectoriel.

$$\begin{aligned}
 (u_1, u_2, u_3) \wedge (v_1, v_2, v_3) &= (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}) \wedge (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) \\
 &= u_1v_1(\vec{i} \wedge \vec{i}) + u_1v_2(\vec{i} \wedge \vec{j}) + u_1v_3(\vec{i} \wedge \vec{k}) \\
 &\quad + u_2v_1(\vec{j} \wedge \vec{i}) + u_2v_2(\vec{j} \wedge \vec{j}) + u_2v_3(\vec{j} \wedge \vec{k}) \\
 &\quad + u_3v_1(\vec{k} \wedge \vec{i}) + u_3v_2(\vec{k} \wedge \vec{j}) + u_3v_3(\vec{k} \wedge \vec{k}) \\
 &= u_1v_2\vec{k} + u_1v_3(-\vec{j}) + u_2v_1(-\vec{k}) + u_2v_3\vec{i} + u_3v_1\vec{j} + u_3v_2(-\vec{i}) \\
 &= (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k} \\
 &= \vec{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

On peut mémoriser facilement cette dernière expression en l'écrivant comme un déterminant 3×3 .

Formule pour le calcul explicite des composantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\begin{aligned} (u_1, u_2, u_3) \wedge (v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

EXEMPLE 1

$$\begin{aligned} (1, 2, 3) \wedge (-3, 1, 5) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(7) - \vec{j}(14) + \vec{k}(7) \\ &= (7, -14, 7) \end{aligned}$$

On peut vérifier que le vecteur $(7, -14, 7)$ est bien orthogonal aux deux vecteurs $(1, 2, 3)$ et $(-3, 1, 5)$:

$$(7, -14, 7) \cdot (1, 2, 3) = 7 - 28 + 21 = 0$$

et

$$(7, -14, 7) \cdot (-3, 1, 5) = -21 - 14 + 35 = 0.$$

EXEMPLE 2

$$\begin{aligned} (a, b, 0) \wedge (c, d, 0) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(0, 0, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right) \\ &= (0, 0, ad - bc) \end{aligned}$$

Cet exemple illustre le fait que la longueur du produit vectoriel (ici $|ad - bc|$) des vecteurs $(a, b, 0)$ et $(c, d, 0)$ correspond à l'aire du parallélogramme engendré par ces vecteurs.

EXEMPLE 3

Un appareil photo situé au point $P(10, -5, 20)$ est pointé vers le point $Q(50, 35, 0)$, comme dans la figure 3.25. Les vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$ sont trois vecteurs unitaires qui forment une base orthonormée orientée positivement lorsqu'ils sont pris dans l'ordre $\langle \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \rangle$; ces trois vecteurs indiquent respectivement la droite, le devant et le haut relativement à l'appareil photo. On veut savoir quelles sont les composantes de ces trois vecteurs si le vecteur $\vec{X}$ est parallèle au plan des abscisses et des ordonnées.

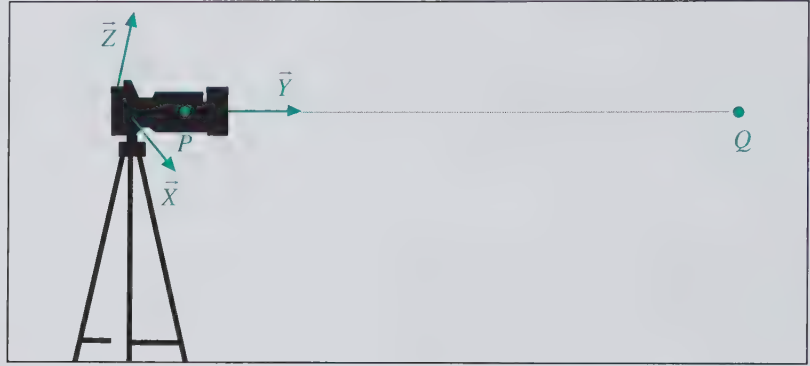


FIGURE 3.25

On aura d'abord

$$\begin{aligned}\vec{Y} &= \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} \\ &= \frac{(40, 40, -20)}{\|(40, 40, -20)\|} \\ &= \frac{1}{3}(2, 2, -1).\end{aligned}$$

Ensuite, puisque $\vec{X} \perp \vec{Y}$ et $\vec{X} \perp \vec{k}$, $\vec{X}$ doit être un multiple (positif) du vecteur $\vec{Y} \wedge \vec{k}$; et puisque $\vec{X}$ est unitaire, on aura

$$\begin{aligned}\vec{X} &= \frac{\vec{Y} \wedge \vec{k}}{\|\vec{Y} \wedge \vec{k}\|} \\ &= \frac{\frac{1}{3}(2, 2, -1) \wedge (0, 0, 1)}{\left\| \frac{1}{3}(2, 2, -1) \wedge (0, 0, 1) \right\|} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0).\end{aligned}$$

Finalement, $\vec{Z} = \vec{X} \wedge \vec{Y} = \frac{\sqrt{2}}{6}(1, 1, 4)$ (après le calcul).

EXEMPLE 4

On cherche l'aire du triangle ABC de la figure 3.26 dont les sommets sont donnés par $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ et $C(0, 0, 3)$.

L'aire du triangle est la moitié de l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc $1/2 \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| &= \frac{1}{2} \|(-1, 2, 0) \wedge (-1, 0, 3)\| \\ &= \frac{1}{2} \|(6, 3, 2)\| \\ &= \frac{7}{2} \text{ unités d'aire.}\end{aligned}$$

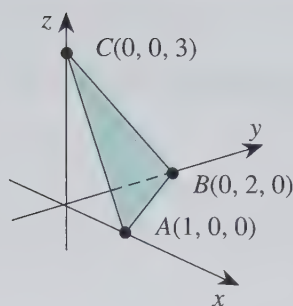


FIGURE 3.26

La définition du produit vectoriel donne aussi un test pour le parallélisme de deux vecteurs non nuls dans $\mathbb{R}^3$: l'angle θ entre deux vecteurs parallèles étant nul, le produit vectoriel sera nul.

Test de parallélisme dans $\mathbb{R}^3$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. Alors, $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

EXEMPLE

Pour savoir si les points $A(1, 2, 3)$, $B(-4, 5, 2)$ et $C(3, -2, 1)$ sont colinéaires dans $\mathbb{R}^3$, on doit vérifier si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont parallèles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= (-5, 3, -1) \wedge (2, -4, -2) \\ &= (-10, -12, 14).\end{aligned}$$

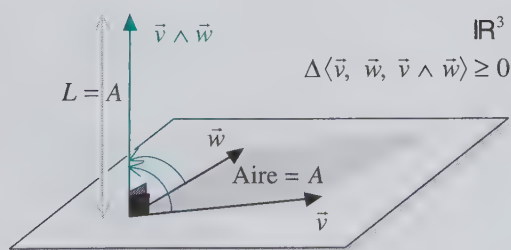
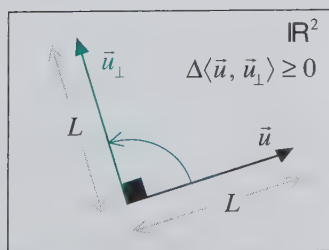
Comme le produit vectoriel n'est pas le vecteur nul, on conclut dans ce cas que les trois points A , B et C sont non colinéaires.

Remarque

Il y a une grande analogie entre le produit vectoriel de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ et l'opération « $\vec{u}$ perpendiculaire », notée $\vec{u}_\perp$, dans $\mathbb{R}^2$. La figure 3.27 montre les aspects géométriques de cette analogie. Il y a aussi une analogie remarquable du point de vue algébrique :

$(a, b)_\perp = (-b, a)$ dans $\mathbb{R}^2$, à comparer avec $(0, 0, 1) \wedge (a, b, 0) = (-b, a, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$;

$$(a, b)_\perp = \begin{vmatrix} a & b \\ \vec{i} & \vec{j} \end{vmatrix} \text{ dans } \mathbb{R}^2, \text{ à comparer avec } (c, d, e) \wedge (f, g, h) = \begin{vmatrix} c & d & e \\ f & g & h \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

FIGURE 3.27 L'analogie entre l'opération $\vec{u} \mapsto \vec{u}_\perp$ dans $\mathbb{R}^2$ et l'opération $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \wedge \vec{w}$ dans $\mathbb{R}^3$.

3.2.3 LE PRODUIT MIXTE DE TROIS VECTEURS DANS $\mathbb{R}^3$

Produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$

Le double produit $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est appelé le **produit mixte** de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Le produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est un scalaire. Que représente ce scalaire? Calculons le produit mixte :

$$\begin{aligned}
 (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot (w_1, w_2, w_3) \\
 &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (w_1, w_2, w_3) \\
 &= w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\
 &= \Delta \langle \vec{w}, \vec{u}, \vec{v} \rangle \\
 &= \Delta \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle.
 \end{aligned}$$

Donc, le produit mixte $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ n'est rien d'autre que le déterminant $\Delta \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$, c'est-à-dire le volume orienté du parallélépipède engendré par la suite $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \Delta \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

À cause de cette coïncidence entre le produit mixte et le déterminant, les propriétés des déterminants se traduisent par des propriétés équivalentes du produit mixte. Par exemple :

$$\begin{aligned}
 (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \Delta \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle \\
 &= \Delta \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle \\
 &= (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} \\
 &= \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}),
 \end{aligned}$$

ce qui fait : $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ (une étrange associativité mixte).

Remarque

Le produit **vectoriel** n'est pas associatif comme le montre le cas suivant, entre autres :

$$\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}, \text{ mais } (\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} = \vec{0} \wedge \vec{j} = \vec{0}.$$

EXERCICES 3.2

1. Parmi les expressions suivantes, déterminez celles qui sont bien définies et dites si elles représentent un nombre ou un vecteur.

a) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$

d) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

g) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \cdot \vec{w})$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$

h) $\vec{u} \cdot (3\vec{v})$

c) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$

f) $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{w})$

i) $(\vec{u} \wedge \vec{v})\vec{w}$

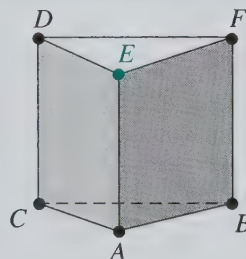
2. Testez le parallélisme ou le non-parallélisme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chacun des cas suivants (utilisez le produit vectoriel).

a) $\vec{u} = (3, -4, 7)$, $\vec{v} = (-18, 24, 32)$

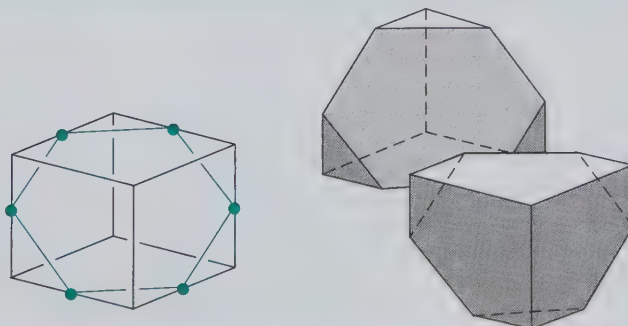
b) $\vec{u} = 0,5\vec{i} - 1,5\vec{j} + 3,5\vec{k}$, $\vec{v} = -2\vec{i} + 6\vec{j} - 14\vec{k}$

3. Cherchez deux vecteurs unitaires orthogonaux aux vecteurs $(-13, 16, 15)$ et $(-13, 18, 12)$.

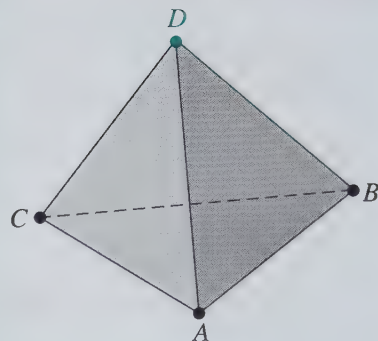
4. La figure ci-contre représente un prisme triangulaire droit : $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AC}$. On donne $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 4, 5)$ et $C(-4, -6, 12)$. Quelles sont les coordonnées du sommet E si $\|\overrightarrow{AE}\| = 6$?



5. Calculez l'aire, non orientée, du parallélogramme $ABCD$ de $\mathbb{R}^3$ dont les sommets (consécutifs) sont $A(1, -1, 1)$, $B(3, 0, 2)$, $C(2, 3, 4)$ et $D(0, 2, 3)$.
6. Dans l'exercice 5, quelle est la hauteur h du parallélogramme $ABCD$ mesurée du côté AB au côté CD ?
7. Quelle est l'aire du triangle dont les sommets sont donnés par $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 1, 1)$ et $C(0, 1, 1)$?
8. Comme le montre la figure suivante, on peut inscrire un hexagone régulier dans un cube : les sommets de l'hexagone sont alors situés au milieu des arêtes du cube. Si les arêtes du cube mesurent une unité de longueur, quelle sera l'aire de l'hexagone ? Résolvez ce problème de manière « vectorielle » en utilisant un repère approprié, puis résolvez-le de manière non vectorielle et comparez vos réponses.



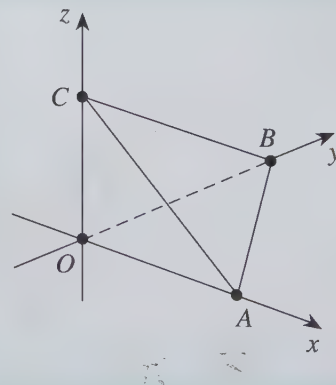
9. Les sommets de la pyramide triangulaire (tétraèdre) illustrée ci-contre sont donnés par $A(1, 2, 3)$, $B(4, 1, 4)$, $C(7, 5, -1)$ et $D(10, 6, 8)$. Calculez la hauteur du sommet D relativement à la base ABC .



10. Cherchez deux vecteurs unitaires linéairement dépendants de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, et orthogonaux à $\vec{w}$, avec $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (1, 1, -2)$ et $\vec{w} = (2, -1, 1)$.
11. Quel est le lieu des points $P(x, y, z)$ dans $\mathbb{R}^3$ pour lesquels $(x, y, z) \wedge \vec{v}_0 = \vec{0}$?
12. Soit $A(x_0, y_0, z_0)$, un point de $\mathbb{R}^3$ et $\vec{v}_0$, un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$. Quel est le lieu des points $P(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \wedge \vec{v}_0 = \vec{0}$?
13. Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que $\vec{u} \wedge \vec{v} = (1, -2, 3)$ et $\vec{w} = (2, 1, 5)$.
- Calculez l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
 - Calculez le volume du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
14. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrez que

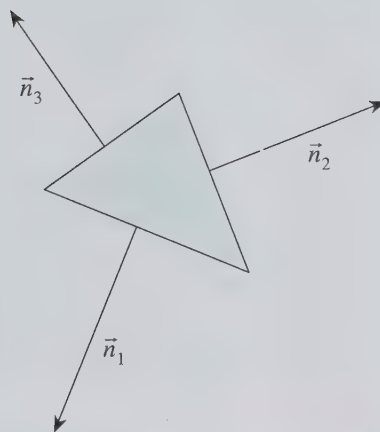
$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{u} & \vec{u} \cdot \vec{v} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} & \vec{v} \cdot \vec{v} \end{vmatrix}.$$

15. Déterminez les vecteurs unitaires $\vec{X}$, $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$ qui représentent respectivement la droite, le devant et le haut pour un appareil photo situé au point $A(60, 20, 30)$, pointé vers l'origine $O(0, 0, 0)$ et orienté de manière à ce que le vecteur $\vec{X}$ soit parallèle au plan des abscisses et des ordonnées (voir l'exemple 3 de la sous-section 3.2.2).
16. Dans la figure ci-contre, le tétraèdre $OABC$ est rectangle en O . À l'aide du produit vectoriel des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, montrez que le carré de l'aire de la face triangulaire «hypoténuse» ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre. Cette généralisation à l'espace tridimensionnel du théorème de Pythagore était apparemment connue de Descartes; on peut aussi en faire une démonstration en géométrie classique, sans faire appel aux vecteurs (voir aussi l'exercice 18 b) à la page 116).



17. (Retour sur la loi des cosinus)

- a) Sur chacun des trois côtés du triangle quelconque dans $\mathbb{R}^2$ illustré ci-contre, on a tracé, à partir d'un point quelconque sur chaque côté et vers l'extérieur du triangle, un vecteur perpendiculaire à ce côté et de longueur égale à celle de ce côté. Montrez que la somme $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3$ de ces trois vecteurs est nulle.



- b) Le résultat obtenu en a) s'écrit $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 = \vec{0}$. Vous pouvez aussi l'écrire autrement, par exemple : $\vec{n}_1 = -(\vec{n}_2 + \vec{n}_3)$.

De cette égalité on peut déduire :

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_1 = (\vec{n}_2 + \vec{n}_3) \cdot (\vec{n}_2 + \vec{n}_3) = \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_2 + \vec{n}_3 \cdot \vec{n}_3 + 2\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3$$

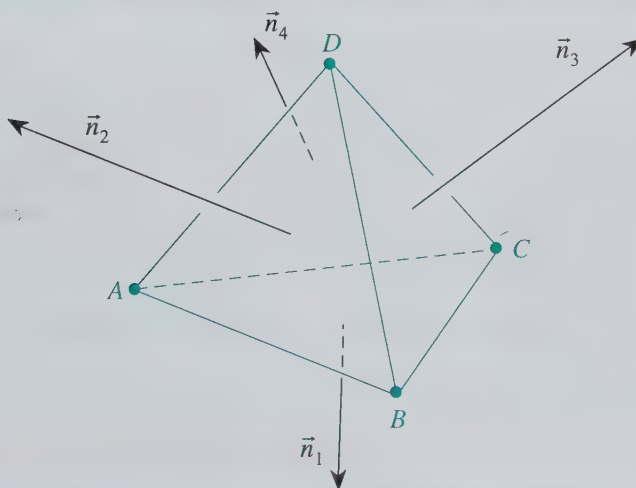
ou, encore,

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_2 + \vec{n}_3 \cdot \vec{n}_3 - 2(-\vec{n}_2) \cdot (\vec{n}_3).$$

Montrez que cette dernière égalité, en tenant compte de la définition des vecteurs $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ donnée en a), est équivalente à la **loi des cosinus** pour ce triangle.

18. (Généralisation de la loi des cosinus à un tétraèdre ; il est préférable de faire l'exercice 17 avant le numéro 18.)

- a) Sur chacune des quatre faces d'un tétraèdre quelconque $ABCD$ dans $\mathbb{R}^3$, on trace, à partir d'un point quelconque sur chaque face et vers l'extérieur du tétraèdre, un vecteur perpendiculaire à cette face et de longueur égale à l'aire de cette face (voir la figure ci-dessous). Montrez que la somme $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4$ de ces quatre vecteurs est nulle et donc, que ces quatre vecteurs, s'ils étaient mis bout à bout, formeraient une chaîne fermée. Pour arriver à ce résultat, exprimez les vecteurs $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ et $\vec{n}_4$ de cette somme en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ seulement, à l'aide de produits vectoriels.



- b) Le résultat obtenu en a) conduit à une généralisation de la loi des cosinus à un tétraèdre quelconque. En effet, en écrivant le résultat $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4 = \vec{0}$ sous la forme $\vec{n}_1 = -(\vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4)$, déduisez, en vous inspirant des étapes de l'exercice 17 b), l'équation

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_2 + \vec{n}_3 \cdot \vec{n}_3 + \vec{n}_4 \cdot \vec{n}_4 - 2(-\vec{n}_2) \cdot (\vec{n}_3) - 2(-\vec{n}_2) \cdot (\vec{n}_4) - 2(-\vec{n}_3) \cdot (\vec{n}_4).$$

Interprétez tous les termes dans cette équation en fonction des aires des faces du tétraèdre et en fonction des angles dièdres situés entre ces faces pour expliquer que cette équation est une (jolie) généralisation de la loi des cosinus aux tétraèdres quelconques dans l'espace tridimensionnel. Remarquez que, lorsque le tétraèdre est trirectangle au sommet D , on obtient $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_2 + \vec{n}_3 \cdot \vec{n}_3 + \vec{n}_4 \cdot \vec{n}_4$, car $\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_4 = \vec{n}_3 \cdot \vec{n}_4 = 0$ dans ce cas ; or, l'équation $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_2 + \vec{n}_3 \cdot \vec{n}_3 + \vec{n}_4 \cdot \vec{n}_4$ est précisément équivalente au théorème de Pythagore généralisé à un tétraèdre trirectangle (voir l'exercice 16).

POUR ALLER PLUS LOIN

La géométrie vectorielle a plus d'une utilité. Elle permet, entre autres, de créer des images de synthèse. Nous vous proposons ici une méthode en six étapes qui vous permettra de réaliser le dessin en perspective centrale d'un avion en papier (virtuel). À partir de cette méthode, nous verrons également comment créer des stéréogrammes.

3.3.1 LE MODÈLE VECTORIEL DU DESSIN EN PERSPECTIVE CENTRALE

Les dessinateurs de la Renaissance qui ont inventé l'art du dessin en perspective²¹ ne connaissaient pas la géométrie vectorielle ; ils ont inventé une technique qui est plus proche de la géométrie projective que de la géométrie vectorielle. Aujourd'hui, on se sert de la géométrie vectorielle pour modéliser cet art. L'approche vectorielle a même donné naissance à l'infographie et à la science des images de synthèse.

En fait, lorsqu'on fait un dessin en perspective centrale, on projette des points de l'espace tridimensionnel (l'objet à dessiner) sur un plan (la feuille à dessin) à partir d'un centre de projection (l'œil du dessinateur). Pour que vous puissiez comprendre facilement le modèle vectoriel du dessin en perspective, nous vous proposons de créer l'image de synthèse d'un avion en papier en suivant les six étapes suivantes.

Étape 1 La description de l'objet à dessiner

On trace une esquisse approximative de l'objet à dessiner, puis on inscrit les **mesures** pertinentes sur des vues de face, de dessus et de côté ; on choisit ensuite un repère qui permet de décrire facilement les coordonnées des points caractéristiques de l'avion (les sommets de la ligne de contour) et on inscrit les coordonnées dans un tableau (voir la figure 3.28). Toutes les lignes sont apparentes, car notre modèle sera en transparence.

Étape 2 Le choix de la position C de l'observateur (centre de projection)

On peut définir la position C de l'observateur à partir du barycentre G des points P_1 à P_6 . Par exemple, pour avoir une vue de l'avion semblable à celle de la figure 3.28, on peut s'éloigner de G dans la direction et le sens du vecteur $\vec{v} = (2, -2, 1)$ sur une distance de 60 unités (on

21. Ici on parle de perspective centrale, non de perspective axonométrique (voir la sous-section 1.1.1).

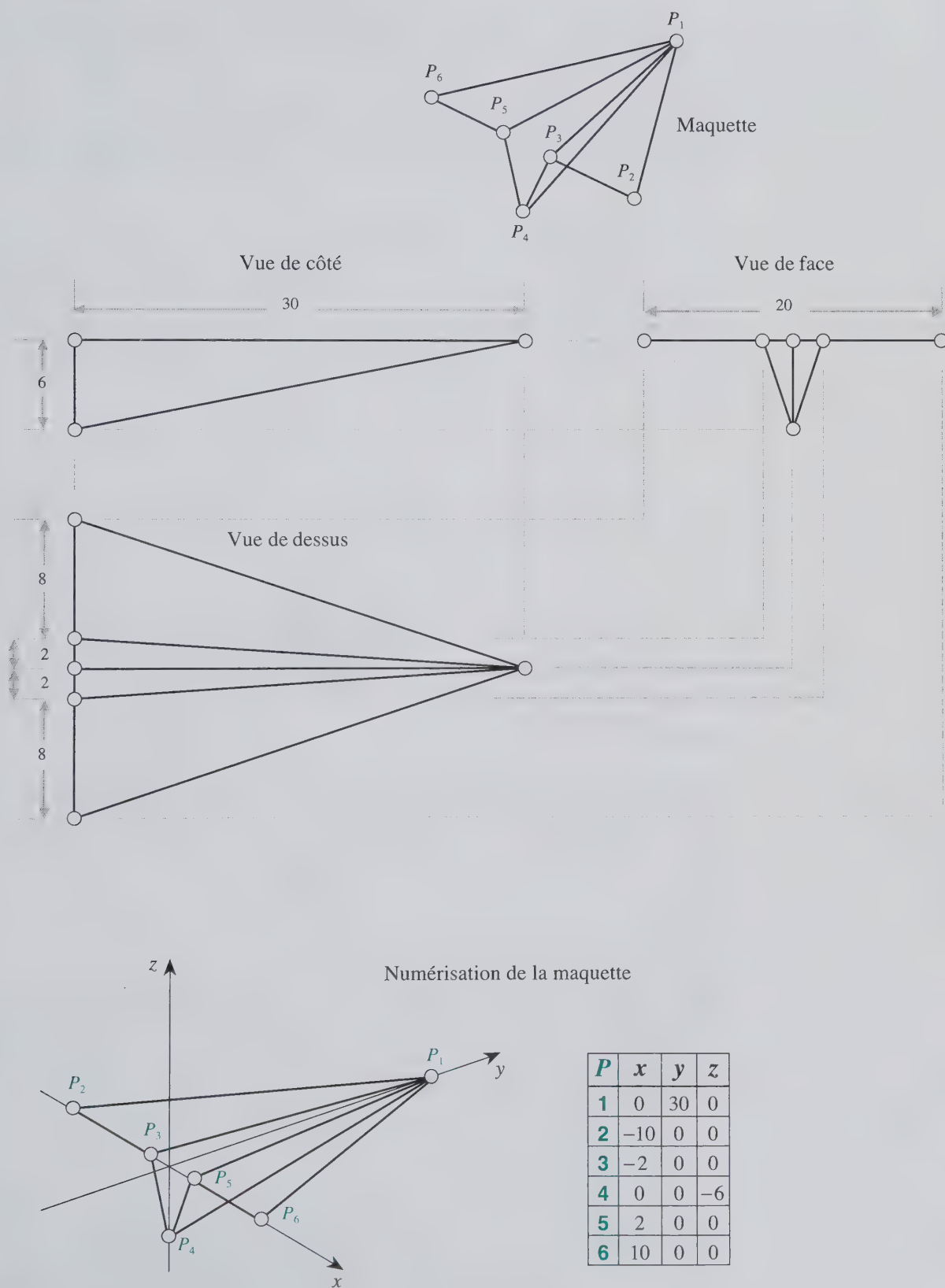


FIGURE 3.28

peut présumer que les unités sont exprimées en centimètres dans cet exemple); le point C sera alors donné par

$$C = G + 60 \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|},$$

c'est-à-dire que l'observateur, identifié au point C (appelé «centre de projection»), sera situé en $C(60, -55, 29)$ (faites les calculs).

Étape 3 L'orientation de l'observateur

Une fois la position de l'observateur connue, il faut déterminer son orientation à l'aide de trois vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux $\vec{D}$, $\vec{H}$ et $\vec{V}$, qui décrivent respectivement, si l'on identifie l'observateur à un appareil photo, la direction visée par l'appareil, l'horizontale de l'appareil (dans le sens du bras droit) et la verticale de l'appareil (voir la figure 3.29).

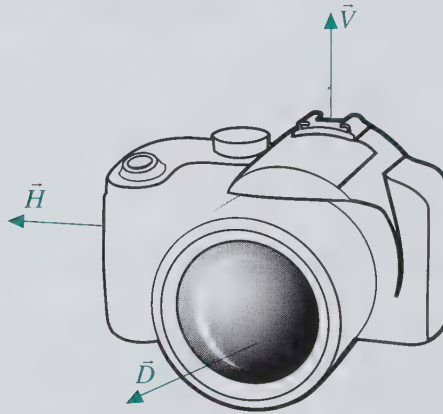


FIGURE 3.29

On doit calculer les composantes de ces trois vecteurs relativement au repère qui a servi au calcul des coordonnées de l'avion. Si l'appareil photo situé en C vise le barycentre G , on aura

$$\vec{D} = \frac{\vec{CG}}{\|\vec{CG}\|},$$

ce qui donne $\vec{D} = \frac{1}{3}(-2, 2, -1)$ (vérifiez les calculs).

Pour déterminer $\vec{H}$, on peut choisir d'orienter l'appareil photo de manière que son horizontale soit parallèle au plan des abscisses et des ordonnées: ainsi, $\vec{H}$ doit être orthogonal simultanément à $\vec{D}$ et à $\vec{k}$. Pour obtenir $\vec{H}$, on divise le produit vectoriel $\vec{D} \wedge \vec{k}$ par sa longueur pour le rendre unitaire:

$$\vec{H} = \frac{\vec{D} \wedge \vec{k}}{\|\vec{D} \wedge \vec{k}\|};$$

après les calculs, on obtient $\vec{H} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ (vérifiez les calculs).

Le vecteur $\vec{V}$ qui représente la verticale se trouve alors entièrement déterminé:

$$\vec{V} = \vec{H} \wedge \vec{D} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1, 0) \wedge \frac{1}{3}(-2, 2, -1) = \frac{\sqrt{2}}{6}(-1, 1, 4) \text{ (vérifiez les calculs).}$$

Étape 4 Le choix du plan de projection

La feuille à dessin, appelée « plan de projection » (noté $\mathcal{P}$), doit être perpendiculaire à l'axe de visée, c'est-à-dire au vecteur $\vec{D}$, et doit être placée à une distance d de l'observateur. Dans l'exemple, on peut placer le plan de projection à mi-chemin entre l'observateur (C) et l'avion (G); cela donne $d = 30$ (voir la figure 3.30).

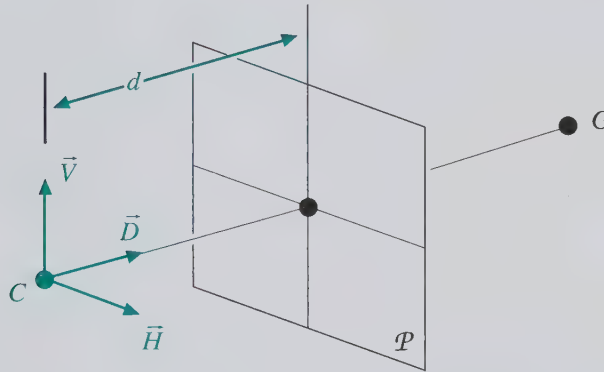


FIGURE 3.30

Étape 5 Le calcul des projections

Pour chaque point P (de P_1 à P_6), il faut maintenant calculer les coordonnées a et b de sa projection P' dans le plan $\mathcal{P}$ relativement aux axes de coordonnées bidimensionnels de $\mathcal{P}$ (voir la figure 3.31).

Les formules de calcul pour a et b (démontrées plus loin) sont :

$$a = d \frac{\overrightarrow{CP} \cdot \vec{H}}{\overrightarrow{CP} \cdot \vec{D}} \quad \text{et} \quad b = d \frac{\overrightarrow{CP} \cdot \vec{V}}{\overrightarrow{CP} \cdot \vec{D}}.$$

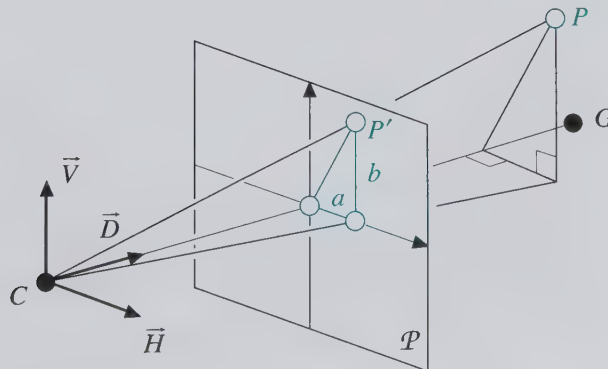


FIGURE 3.31

Le tableau de la figure 3.32 montre les résultats obtenus avec un tableur (par exemple Excel ou Open Office qui est gratuit sur le Web).

				x	y	z	Norme	
$C =$				60	-55	29		
$G =$				0	5	-1		
$\overline{CG} =$				-60	60	-30		
$\overline{D} =$				-0,6667	0,6667	-0,3333	1	
$\overline{H}' =$				0,6667	0,6667	0,0000	0,942809042	
$\overline{H} =$				0,7071	0,7071	0,0000	1	
$\overline{V} =$				-0,2357	0,2357	0,9428	1	
$d =$				30				

				$\overline{CP}$			Projections P'	
P	x	y	z	x	y	z	a	b
1	0	30	0	-60	85	-29	4,9874	1,9285
2	-10	0	0	-70	55	-29	-3,4215	0,6843
3	-2	0	0	-62	55	-29	-1,6938	0,0807
4	0	0	-6	-60	55	-35	-1,2007	-2,0012
5	2	0	0	-58	55	-29	-0,7487	-0,2496
6	10	0	0	-50	55	-29	1,3314	-0,9763

FIGURE 3.32 Les résultats obtenus : les cases ombrées contiennent les données entrées manuellement; les autres cases contiennent les données calculées.

Étape 6 Le dessin

Sur une feuille de papier millimétrée représentant le plan de projection $\mathcal{P}$, on reporte les points P' en considérant les valeurs de a et b respectivement comme les abscisses et les ordonnées de ces points (relativement à un repère cartésien centré au milieu de la feuille); il ne reste plus qu'à tracer les segments de droite représentant le contour de l'avion. Avec un papier-calque, on peut obtenir une copie qui ne représente que l'avion.

Il est évidemment plus rapide et plus précis encore de faire tous les calculs dans un tableur qui peut tracer l'avion sur l'écran de l'ordinateur simplement à partir de la liste des coordonnées (a, b) . De plus, on peut placer l'appareil photo C sur une orbite autour de G grâce aux coordonnées sphériques :

$$C = G + \rho(\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, \sin \phi),$$

où ρ , θ et ϕ , qui représentent respectivement la distance à G , la longitude et la latitude relativement au repère $\langle G; \langle \overline{H}, \overline{D}, \overline{V} \rangle \rangle$, sont des paramètres qu'on peut contrôler manuellement ou par des curseurs dynamiques dans un tableur. L'avantage de travailler avec un tableur consiste précisément à pouvoir animer le dessin en y introduisant autant de curseurs que de

paramètres désirés. La figure 3.33 montre deux résultats obtenus dans le tableur Excel pour deux positions différentes de l'appareil photo C .

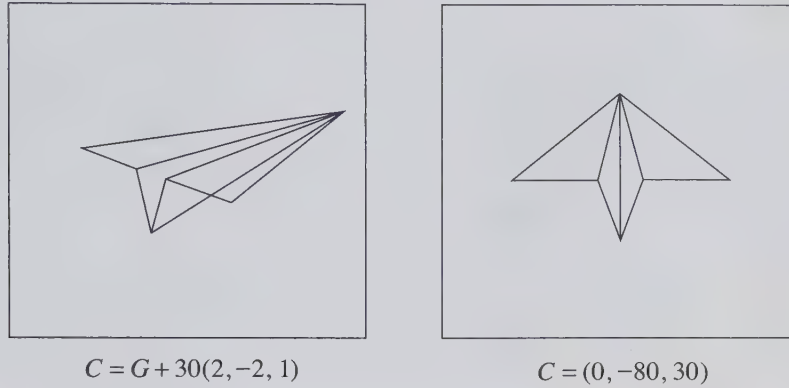


FIGURE 3.33 Deux vues obtenues par deux positions différentes de l'appareil photo.

La démonstration des formules donnant a et b à l'étape 5

En observant la figure 3.31 (voir la page 119) dans l'axe du vecteur $\vec{V}$, on obtient une vue de dessus (voir la figure 3.34) où $a/d = r/s$, c'est-à-dire $a = dr/s$.

Si β désigne l'angle situé entre les vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{CP}$ dans la figure 3.34, on voit que

$$r = \|\vec{CP}\| \cos \beta = \vec{CP} \cdot \vec{H} \quad (\text{car } \|\vec{H}\| = 1).$$

Par ailleurs, si α désigne l'angle entre les vecteurs $\vec{D}$ et $\vec{CP}$, on voit que

$$s = \|\vec{CP}\| \cos \alpha = \vec{CP} \cdot \vec{D} \quad (\text{car } \|\vec{D}\| = 1).$$

Ainsi, on obtient :

$$a = d \frac{r}{s} = d \frac{\vec{CP} \cdot \vec{H}}{\vec{CP} \cdot \vec{D}}.$$

En observant la figure 3.31 dans l'axe du vecteur $\vec{H}$, on obtient une vue de côté (voir la figure 3.35) où

$$\frac{b}{d} = \frac{m}{s}, \text{ c'est-à-dire } b = d \frac{m}{s}.$$

Si γ désigne l'angle situé entre les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{CP}$ dans la figure 3.35, on voit que

$$m = \|\vec{CP}\| \cos \gamma = \vec{CP} \cdot \vec{V} \quad (\text{car } \|\vec{V}\| = 1).$$

Par ailleurs, $s = \vec{CP} \cdot \vec{D}$ (voir la figure 3.34), ce qui donne

$$b = d \frac{\vec{CP} \cdot \vec{V}}{\vec{CP} \cdot \vec{D}}.$$

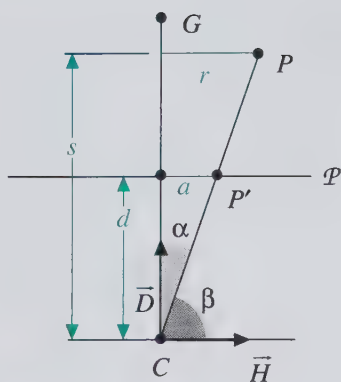


FIGURE 3.34 Une vue de dessus de la figure 3.31.

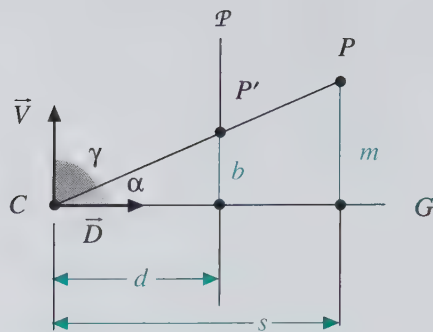


FIGURE 3.35 Une vue de côté de la figure 3.31.

3.3.2 LES STÉRÉOGRAMMES

Vous avez peut-être eu dans votre jeunesse une petite visionneuse 3D pour regarder des diapositives de scènes ou de personnages célèbres avec un effet de profondeur. Ou peut-être avez-vous déjà visionné un film 3D avec des lunettes polarisées au cinéma ou sur un téléviseur 3D. Pour obtenir un tel effet de profondeur, il faut considérer que vos deux yeux sont deux centres de projection qui envoient au cerveau deux images légèrement différentes ; c'est précisément la différence entre ces deux images que le cerveau traduit en effet de profondeur (le phénomène est semblable pour le son stéréophonique et les deux oreilles). On peut simuler cet effet de profondeur en utilisant le modèle vectoriel de la sous-section 3.3.1 de manière à produire deux dessins juxtaposés, un pour chaque œil. Un **stéréogramme** est la juxtaposition de deux projections centrales d'un même objet 3D, ou d'une scène composée de plusieurs objets 3D, à partir de deux centres de projection distincts situés à environ 6,5 cm l'un de l'autre (distance approximative entre les deux yeux d'un adulte). En regardant un stéréogramme de telle manière que chaque œil ne perçoit que l'image qui lui est destinée, on parvient à créer un effet de profondeur ou de réalité virtuelle. Cela peut se faire sans artifice en s'habituant à regarder le stéréogramme avec les yeux en vision parallèle (on regarde devant soi vers un point imaginaire infiniment loin au milieu de la scène). Il est aussi possible de bricoler une visière avec deux cylindres fabriqués avec des feuilles de papier pour obliger les yeux à regarder droit devant ou, encore, de se procurer des lunettes prismatiques pour ce type particulier de stéréogramme. On peut aussi utiliser un jeu de filtres et de couleurs : le dessin destiné à l'œil droit est rouge et celui destiné à l'œil gauche est vert, tandis que la personne qui regarde ces dessins doit porter une lunette à fenêtre verte pour l'œil droit et une lunette à fenêtre rouge pour l'œil gauche, tout en regardant en vision parallèle.

Voici comment vous pouvez transformer en un stéréogramme le dessin de l'avion en papier obtenu à la sous-section 3.3.1. Sur une feuille de papier que vous nommez « Cyclope », vous suivez les étapes 1 à 4 exactement comme à la sous-section 3.3.1, en supposant que toutes les coordonnées et les mesures de longueur sont en centimètres. Le centre de projection C représente alors le point situé exactement au milieu, entre vos deux yeux (vision cyclope). Pour créer le dessin destiné à l'œil droit, il faut déplacer l'appareil photo à partir de C sur une

distance correspondant à la demi-distance entre les deux yeux, dans la direction et dans le sens du vecteur $\vec{H}$. On obtient le nouvel appareil photo C_{droit} :

$$C_{\text{droit}} = C + \frac{\lambda}{2} \vec{H},$$

où λ est la distance entre les deux yeux (environ 6,5 cm). Sur une nouvelle feuille de calcul que vous nommez «Œil droit» vous reprenez les étapes 2 à 6, en ayant soin au départ de remplacer C par C_{droit} . Le point visé (ici G) sera situé au centre du dessin ; idéalement, pour faciliter le visionnement du stéréogramme sans lunettes, ce dessin devrait être très précis (réalisé dans un tableur) et tenir dans un carré d'environ 5 cm sur 5 cm centré sur le point visé.

Vous faites ensuite, sur une feuille de papier nommée «Œil gauche», les mêmes calculs à partir de la feuille «Cyclope», en remplaçant cette fois C par C_{gauche} :

$$C_{\text{gauche}} = C - \frac{\lambda}{2} \vec{H}.$$

Le dessin obtenu pour l'œil gauche diffère très légèrement de celui obtenu pour l'œil droit. Il faut ensuite placer les deux dessins côte à côte, celui pour l'œil gauche à gauche et l'autre à droite, dans des formats parfaitement identiques, puis les regarder d'une distance d'environ 20 cm pour avoir un bon effet 3D. Inutile de dire qu'il vaut mieux utiliser un tableur pour réaliser un tel stéréogramme : en plus de faciliter les calculs, on peut animer le stéréogramme en changeant les valeurs de certains paramètres en les assujettissant à des curseurs dynamiques. La figure 3.36 montre un stéréogramme de deux avions identiques (l'un est obtenu par la translation de l'autre) créé dans un tableur. La figure 3.37 montre des stéréogrammes plus complexes réalisés dans Excel par des étudiants.

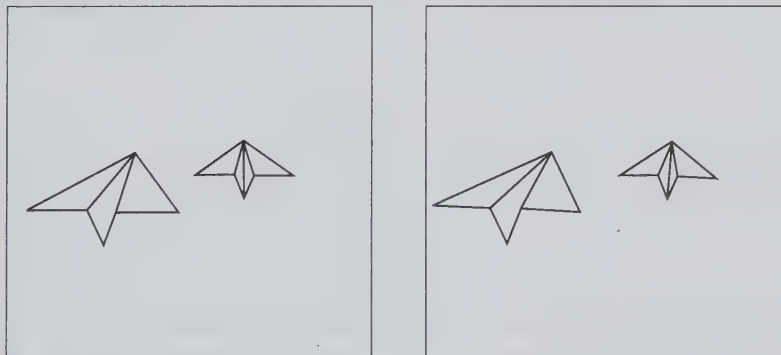


FIGURE 3.36

a)

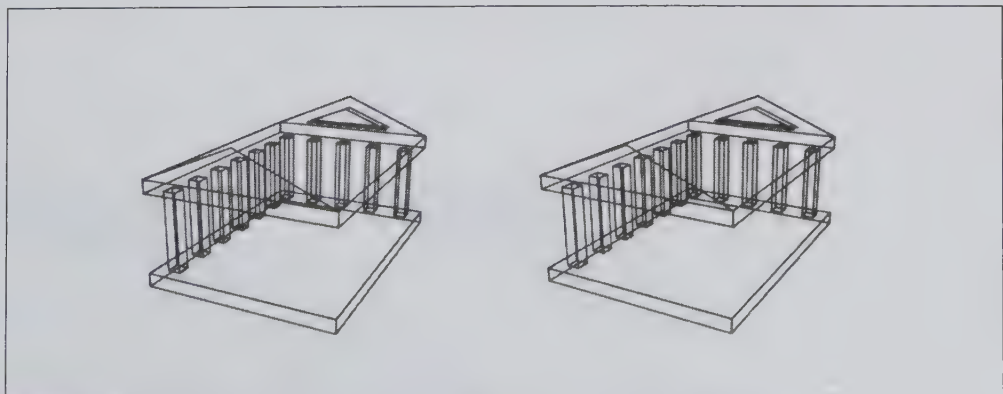


FIGURE 3.37 Exemples de stéréogrammes réalisés dans Excel par des étudiants.

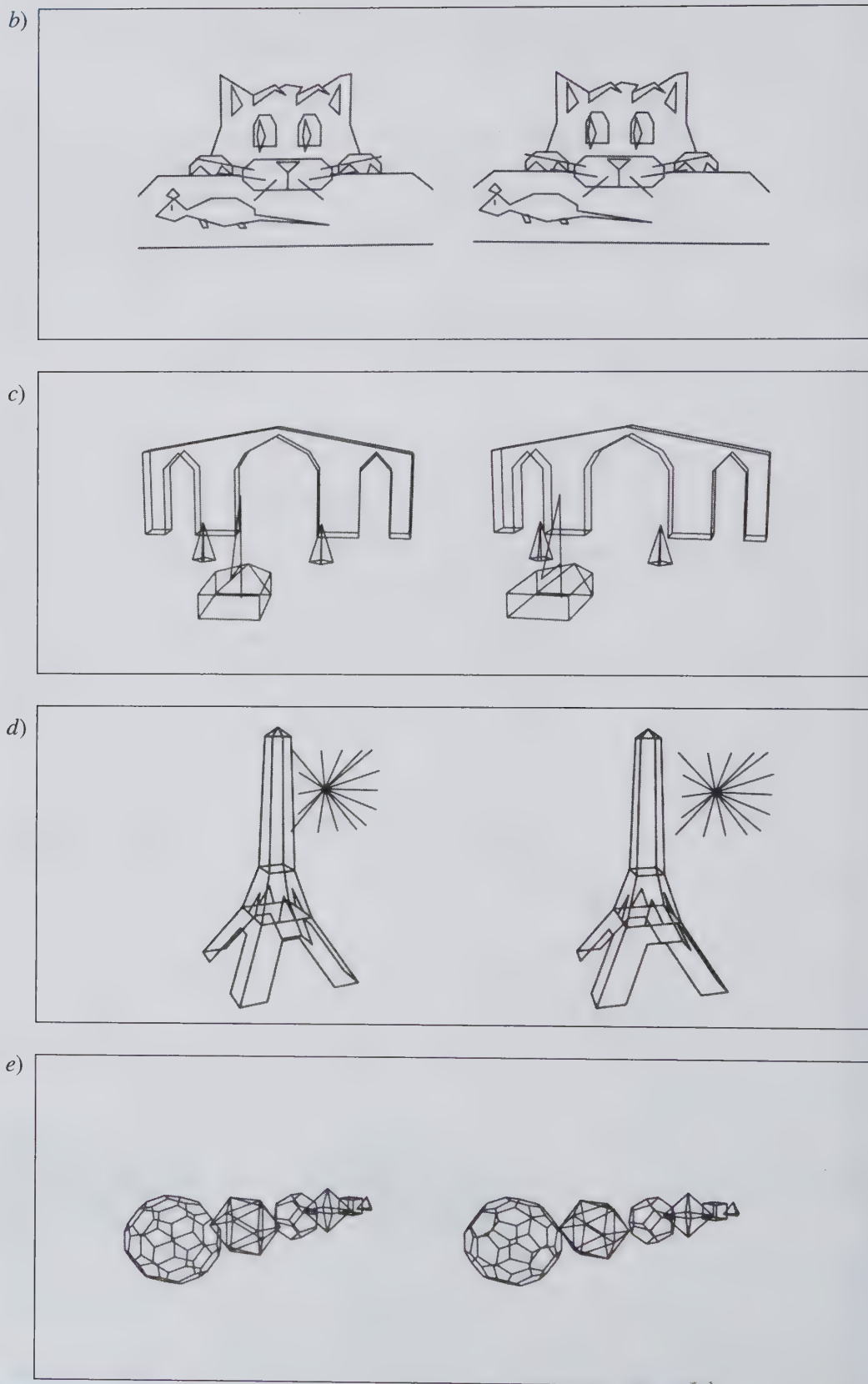


FIGURE 3.37 (suite)

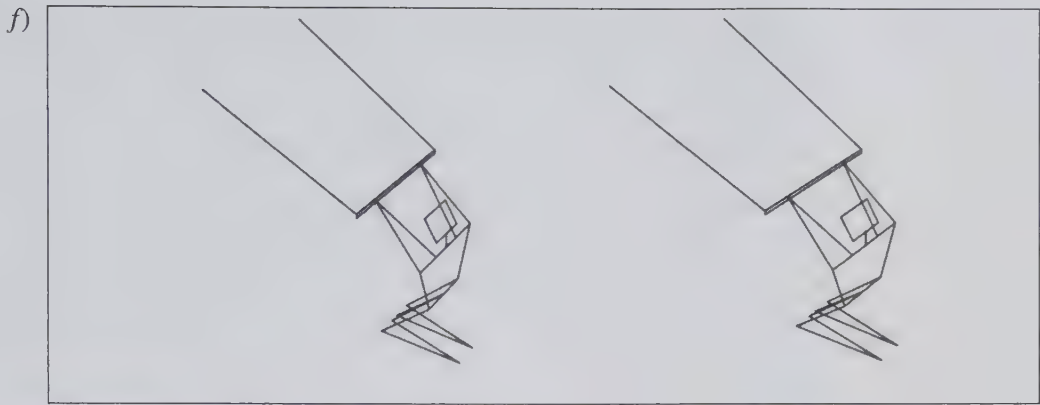


FIGURE 3.37 (suite)

3.3.3 LA DISTRIBUTIVITÉ DU PRODUIT VECTORIEL SUR LA SOMME VECTORIELLE

Voici une démonstration géométrique de l'égalité $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ (distributivité du produit vectoriel sur la somme vectorielle, propriété PV3 du produit vectoriel). La démonstration se déroule en quatre étapes, selon une idée originale proposée par François Lorrain.

Étape 1

Soit $\vec{u}$, un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Alors, pour tout vecteur $\vec{s}$ de $\mathbb{R}^3$, le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{s}$ reste inchangé si l'on remplace $\vec{s}$ par $\vec{s}_{\perp \vec{u}}$, le vecteur illustré dans la figure 3.38 :

$$\vec{u} \wedge \vec{s} = \vec{u} \wedge \vec{s}_{\perp \vec{u}},$$

où le vecteur noté $\vec{s}_{\perp \vec{u}}$ est la projection orthogonale de $\vec{s}$ sur le plan $\mathcal{P}$, perpendiculaire à $\vec{u}$ et passant par l'origine de la flèche qui représente $\vec{u}$.

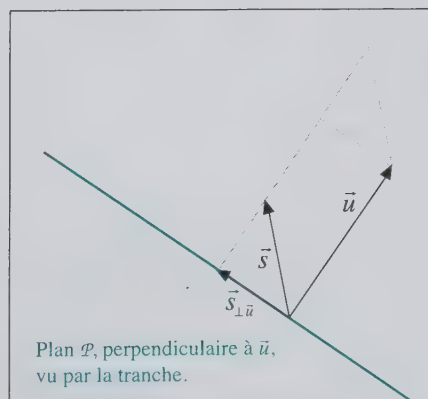


FIGURE 3.38

L'égalité $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v}_{\perp \vec{u}}$ découle de la définition du produit vectoriel et des trois observations suivantes :

- le parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}_{\perp \vec{u}}$ a la même aire que celle du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (même base et même hauteur) ;
- ces deux parallélogrammes étant dans le même plan, tout vecteur orthogonal simultanément à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ le sera aussi à $\vec{u}$ et à $\vec{v}_{\perp \vec{u}}$, et vice versa ;
- les deux suites ordonnées $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle$ et $\langle \vec{u}, \vec{v}_{\perp \vec{u}}, \vec{u} \wedge \vec{v}_{\perp \vec{u}} \rangle$ ont la même orientation.

Étape 2

La projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P}$ (perpendiculaire à $\vec{u}$) de la somme $\vec{v} + \vec{w}$ est la somme des projections de $\vec{v}$ et de $\vec{w}$:

$$(\vec{v} + \vec{w})_{\perp \vec{u}} = \vec{v}_{\perp \vec{u}} + \vec{w}_{\perp \vec{u}}.$$

Cela découle simplement du fait que la diagonale du parallélogramme engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est projetée sur la diagonale du parallélogramme engendré par $\vec{v}_{\perp \vec{u}}$ et $\vec{w}_{\perp \vec{u}}$ dans le plan $\mathcal{P}$, comme l'illustre la figure 3.39.

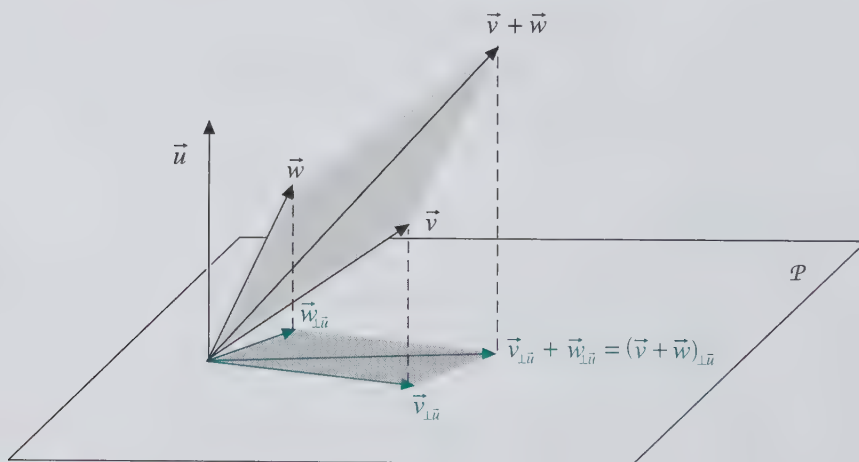


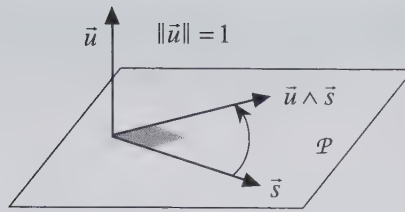
FIGURE 3.39 La projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P}$.

Étape 3

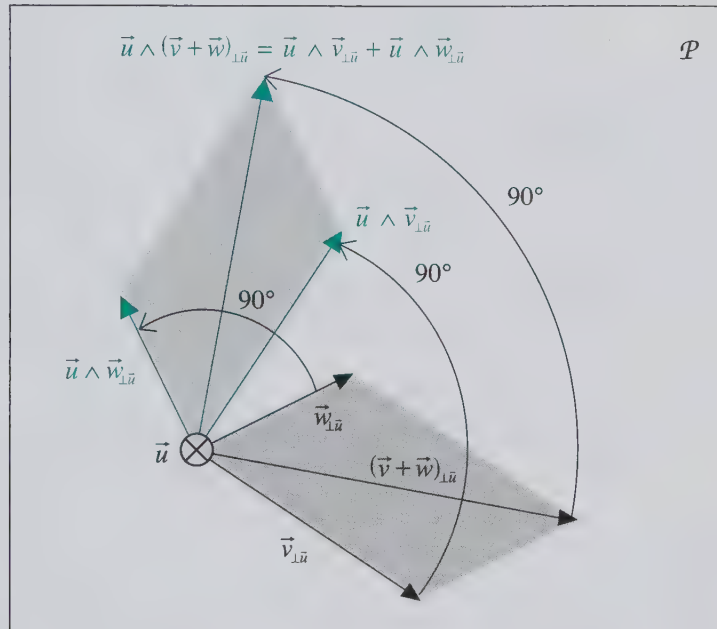
Montrons maintenant que

$$\vec{u} \wedge (\vec{v}_{\perp \vec{u}} + \vec{w}_{\perp \vec{u}}) = \vec{u} \wedge \vec{v}_{\perp \vec{u}} + \vec{u} \wedge \vec{w}_{\perp \vec{u}}.$$

Pour simplifier, supposons temporairement que $\vec{u}$ est unitaire. Notons alors que pour tout vecteur $\vec{s}$ orthogonal à $\vec{u}$, l'opération $\vec{u} \wedge \vec{s}$, considérée comme une opération de $\vec{u}$ sur $\vec{s}$, a pour effet géométrique de faire tourner de 90° le vecteur $\vec{s}$ dans le plan $\mathcal{P}$ orthogonal à $\vec{u}$. Cela tient à ce que $\vec{u} \wedge \vec{s}$ est à la fois orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{s}$, et de même longueur que $\vec{s}$. La rotation de 90° a lieu dans le sens pour lequel la suite $\langle \vec{u}, \vec{s}, \vec{u} \wedge \vec{s} \rangle$ est orientée positivement (voir la figure 3.40).

FIGURE 3.40 Rotation de 90° dans le plan $\mathcal{P}$.

La figure 3.41 montre cette rotation dans le plan $\mathcal{P}$, appliquée cette fois aux vecteurs $(\vec{v} + \vec{w})_{\perp \vec{u}}$, $\vec{v}_{\perp \vec{u}}$ et $\vec{w}_{\perp \vec{u}}$.

FIGURE 3.41 Rotation de 90° dans le plan $\mathcal{P}$ vu à plat ($\vec{u}$ pointe vers vous).

L'équation $\vec{u} \wedge (\vec{v}_{\perp \vec{u}} + \vec{w}_{\perp \vec{u}}) = \vec{u} \wedge \vec{v}_{\perp \vec{u}} + \vec{u} \wedge \vec{w}_{\perp \vec{u}}$ découle alors du fait que la rotation de 90° applique la diagonale du parallélogramme engendré par $\vec{v}_{\perp \vec{u}}$ et $\vec{w}_{\perp \vec{u}}$ sur la diagonale du parallélogramme engendré par $\vec{u} \wedge \vec{v}_{\perp \vec{u}}$ et $\vec{u} \wedge \vec{w}_{\perp \vec{u}}$, comme le montre la figure 3.41.

Si $\vec{u}$ n'est pas unitaire, il faut simplement penser que la rotation sera composée avec un agrandissement (si $\|\vec{u}\| > 1$) ou une réduction (si $\|\vec{u}\| < 1$), ce qui ne changera rien à la relation entre les diagonales des deux parallélogrammes.

Étape 4

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w})_{\perp \vec{u}} \quad (\text{Étape 1})$$

$$= \vec{u} \wedge (\vec{v}_{\perp \vec{u}} + \vec{w}_{\perp \vec{u}}) \quad (\text{Étape 2})$$

$$= \vec{u} \wedge \vec{v}_{\perp \vec{u}} + \vec{u} \wedge \vec{w}_{\perp \vec{u}} \quad (\text{Étape 3})$$

$$= \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \quad (\text{Étape 1})$$

En conclusion, $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

**Tableau comparatif
de la géométrie vectorielle dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$**

Parallélisme	Dans $\mathbb{R}^2$	Dans $\mathbb{R}^3$
	Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.	Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
Orthogonalité	Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.	Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
Indépendance linéaire	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants $\Leftrightarrow \Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \neq 0$.	$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants $\Leftrightarrow \Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle \neq 0$.
Orientation	La suite ordonnée $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ est orientée positivement $\Leftrightarrow \Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle > 0$.	La suite $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ est orientée positivement $\Leftrightarrow \Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle > 0$.
Aires et volumes	L'aire orientée du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (pris dans cet ordre) est $\Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.	a) Le volume orienté du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (pris dans cet ordre) est $\Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$. b) L'aire non orientée du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\ \vec{u} \wedge \vec{v}\ $.
$\vec{u}_\perp$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$	Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $\vec{u}_\perp$ est un vecteur $\perp$ à $\vec{u}$ tel que : i) la suite $\langle \vec{u}, \vec{u}_\perp \rangle$ est orientée positivement ; ii) $\ \vec{u}_\perp\ =$ longueur de $\vec{u}$.	Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur $\perp$ à $\vec{u}$ et $\perp$ à $\vec{v}$, tel que : i) la suite $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle$ est orientée positivement ; ii) $\ \vec{u} \wedge \vec{v}\ =$ aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Colinéarité et coplanarité	Trois points A, B et C sont colinéaires $\Leftrightarrow \Delta\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0$.	a) Trois points A, B et C sont colinéaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$. b) Quatre points A, B, C et D sont coplanaires $\Leftrightarrow \Delta\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = 0$.

DROITES ET PLANS

LES DROITES

LES PLANS

POUR ALLER PLUS LOIN

Les droites et les plans ont une grande importance en mathématiques. En effet, la plupart des courbes et des surfaces utilisées comme modèles dans les sciences quantitatives sont ou bien des droites et des plans, ou bien des courbes et des surfaces localement droites ou planes. Dans ce chapitre, on étudie les droites et les plans pour eux-mêmes ; on les décrit avec des équations de différentes formes et on utilise ces équations pour résoudre certains problèmes de nature géométrique. Cela conduit souvent à résoudre des systèmes de plusieurs équations linéaires simultanées. Les techniques de résolution de ces systèmes d'équations ne seront cependant étudiées qu'au chapitre suivant.

LES DROITES

Dans cette section, nous verrons comment caractériser les droites à l'aide d'équations vectorielles, paramétriques et non paramétriques dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$. Nous verrons également comment calculer la distance d'un point à une droite, comment décrire la position relative de deux droites et comment calculer la distance entre deux droites.

4.1.1 LES ÉQUATIONS VECTORIELLES ET PARAMÉTRIQUES DES DROITES DANS $\mathbb{R}^2$ ET $\mathbb{R}^3$

Dans un espace euclidien, étant donné un point A et un vecteur $\vec{v}$ non nul, il existe une seule droite passant par ce point et parallèle à $\vec{v}$. Tout point P sur cette droite peut alors s'écrire

$$P = A + k\vec{v}$$

pour une valeur appropriée du scalaire k (voir la figure 4.1).

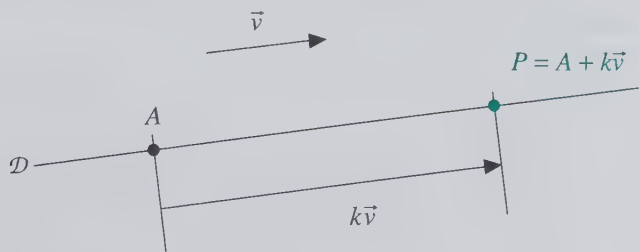


FIGURE 4.1

Droite dans $\mathbb{R}^n$

Soit A , un point, et $\vec{v}$, un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. La droite $\mathcal{D}$ passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{v}$ est le lieu des points P de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels

$$P = A + k\vec{v} \text{ ou, ce qui est équivalent, } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\vec{v} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

L'équation $P = A + k\vec{v}$ est appelée **équation affine** de la droite $\mathcal{D}$ et l'équation $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\vec{v}$ est appelée **équation vectorielle** de la droite $\mathcal{D}$; k est le **paramètre** de cette équation, $\vec{v}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et A est un point de référence sur $\mathcal{D}$.

Ainsi, dans $\mathbb{R}^2$, on obtient une équation vectorielle de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(x_0, y_0)$ et parallèle au vecteur $\vec{v} = (a, b)$ en traduisant $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\vec{v}$ par

$$(x, y) = (x_0, y_0) + k(a, b), k \in \mathbb{R}.$$

Dans $\mathbb{R}^3$, on obtient une équation vectorielle de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point A et parallèle au vecteur $\vec{v} = (a, b, c)$ en traduisant $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\vec{v}$ par

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + k(a, b, c), k \in \mathbb{R}.$$

EXEMPLE 1

Pour obtenir une équation affine ou une équation vectorielle représentant la droite $\mathcal{D}$ qui passe par les sommets $A(1, 0, 0)$ et $B(0, 1, 1)$ du cube illustré dans la figure 4.2, on peut choisir A comme point de référence, $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur et t comme paramètre; on obtient ainsi l'équation affine

$$\mathcal{D}: P = A + t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R}$$

ou, encore, l'équation vectorielle

$$\mathcal{D}: (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(-1, 1, 1), t \in \mathbb{R}.$$

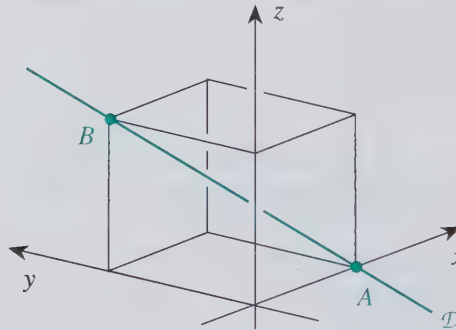


FIGURE 4.2

EXEMPLE 2

Dans $\mathbb{R}^2$, on a l'habitude de décrire les droites par des équations cartésiennes:

$$\mathcal{D}: y = mx + b,$$

où m est la **pente** de $\mathcal{D}$, et b , l'ordonnée du point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec l'axe des y (voir la figure 4.3). On cherche une équation vectorielle de $\mathcal{D}$ qui correspond à l'équation cartésienne $y = mx + b$.

La pente m nous fournit un vecteur directeur: $\vec{v} = (1, m)$. De plus, le point $A(0, b)$ est sur la droite $\mathcal{D}$. Voici donc une équation vectorielle de $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}: (x, y) = (0, b) + t(1, m), t \in \mathbb{R}.$$

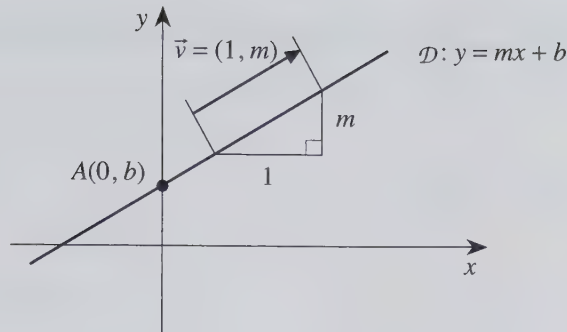


FIGURE 4.3

La vitesse vectorielle et la vitesse scalaire

La cinétique est l'étude des mouvements d'une particule immatérielle en physique. La cinétique des mouvements linéaires à vitesse constante peut se résumer ainsi :

Vitesse vectorielle et vitesse scalaire

Soit l'équation vectorielle

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c).$$

Si le paramètre t représente le **temps**, alors (x, y, z) est la position à l'instant t d'une particule mobile P qui se déplace en ligne droite à la **vitesse vectorielle** constante $\vec{v} = (a, b, c)$. Le point (x_0, y_0, z_0) correspond à la position de la particule P à l'instant initial $t = 0$, et le scalaire $\|\vec{v}\|$ est la **vitesse scalaire** de la particule.

EXEMPLE

À l'instant $t = 0$, un avion de papier (voir la figure 4.4) identifié à un **point** mobile (ce peut être la pointe de l'avion) se trouve à la position $A(-2, -4, 30)$ et se déplace en ligne droite vers le point $B(18, 16, 20)$ à la vitesse scalaire constante de 3 m/s (les unités spatiales sont mesurées en mètres et le temps, en secondes). On cherche une équation vectorielle qui décrit la position de l'avion à chaque instant t .

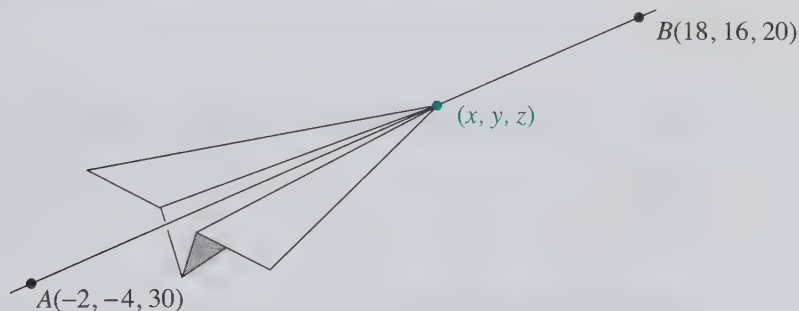


FIGURE 4.4

On trouve une telle équation en écrivant

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \overrightarrow{OA} + t \left(3 \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \right) \\ &= (-2, -4, 30) + t \left(3 \frac{(20, 20, -10)}{\|(20, 20, -10)\|} \right) \\ &= (-2, -4, 30) + t(2, 2, -1), t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Équations paramétriques d'une droite dans $\mathbb{R}^3$

Soit $\mathcal{D}$, une droite dans $\mathbb{R}^3$ d'équation vectorielle

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c), t \in \mathbb{R}.$$

Alors, le système d'équations

$$\left. \begin{array}{l} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{array} \right\}, t \in \mathbb{R}$$

est appelé **système d'équations paramétriques** de $\mathcal{D}$; t est le **paramètre** de ce système d'équations.

Remarque

On peut donner une définition semblable des équations paramétriques d'une droite dans $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLE

On veut savoir en quel point la droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$ définie par le système d'équations paramétriques

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 8 + 4t \end{array} \right\}, t \in \mathbb{R}$$

coupe le plan des abscisses et des ordonnées.

La cote de ce point P sera 0 et donc, on aura $0 = 8 + 4t$, c'est-à-dire $t = -2$. Le point recherché correspond donc à la valeur $t = -2$ du paramètre t :

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3(-2) = -4, \\ y &= 2 - (-2) = 4, \\ z &= 8 + 4(-2) = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne le point $P(-4, 4, 0)$.

4.1.2 LES ÉQUATIONS NON PARAMÉTRIQUES DES DROITES DANS $\mathbb{R}^2$

Dans $\mathbb{R}^2$, il y a deux façons de caractériser une droite $\mathcal{D}$ passant par un point donné A sans utiliser aucun paramètre : l'équation symétrique de $\mathcal{D}$ et l'équation normale de $\mathcal{D}$.

Équation symétrique de $\mathcal{D}$

Si $\vec{v}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et si A est un point de $\mathcal{D}$, alors $P \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \parallel \vec{v}$ ou $P = A$ (voir la figure 4.5).



FIGURE 4.5

Dans $\mathbb{R}^2$, cette relation se traduit par $P \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \Delta \langle \overrightarrow{AP}, \vec{v} \rangle = 0$, ce qui donne, pour le point de référence $A(x_0, y_0)$ et le vecteur directeur $\vec{v} = (a, b)$:

$$\begin{aligned} P(x, y) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a & b \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow b(x - x_0) = a(y - y_0) \\ &\Leftrightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad (\text{\textcolor{teal}{à supposer que } } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0). \end{aligned}$$

Équation symétrique d'une droite dans $\mathbb{R}^2$

Soit $\mathcal{D}$, une droite dans $\mathbb{R}^2$ passant par le point $A(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = (a, b)$. Alors l'équation

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

est appelée **équation symétrique** de $\mathcal{D}$. Cette équation n'est définie que si $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

EXEMPLE

On obtient une équation symétrique de la droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ passant par les points $A(3, -1)$ et $B(5, 4)$ à partir du vecteur directeur $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2, 5)$ et du point de référence $A(3, -1)$ en écrivant :

$$\mathcal{D}: \frac{x - 3}{2} = \frac{y + 1}{5}.$$

Équation normale de $\mathcal{D}$

Si $\vec{n}$ est un **vecteur normal** à $\mathcal{D}$, c'est-à-dire **perpendiculaire** à $\mathcal{D}$ (voir la figure 4.6), alors,

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \vec{n} \text{ ou } P = A \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \bullet \vec{n} = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne, pour le point de référence $A(x_0, y_0)$ et le vecteur normal $\vec{n} = (a, b)$,

$$\begin{aligned} P(x, y) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0) \bullet (a, b) = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by = c, \quad \text{où } c = ax_0 + by_0. \end{aligned}$$

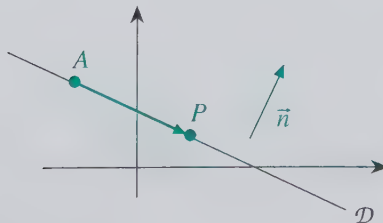


FIGURE 4.6 $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$.

Dans $\mathbb{R}^2$, l'équation $ax + by = c$ représente une droite $\mathcal{D}$ de vecteur normal $\vec{n} = (a, b)$; si cette droite passe par le point $P(x_0, y_0)$, alors $c = ax_0 + by_0$.

L'équation $ax + by = c$ est appelée **équation normale** ou, encore, **équation linéaire** ou **équation cartésienne** de $\mathcal{D}$.

EXEMPLE

On veut trouver une équation normale de la droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ qui passe par le sommet C et qui est orthogonale au côté $\overline{AB}$ du triangle ABC de la figure 4.7.

Un vecteur normal de $\mathcal{D}$ est $\vec{n} = \overline{AB} = (3, 7)$. Puisque $\mathcal{D}$ passe par $C(-2, 4)$, on obtient une équation normale de $\mathcal{D}$ en écrivant : $3(x+2) + 7(y-4) = 0$ ou, encore, $3x + 7y = 22$.

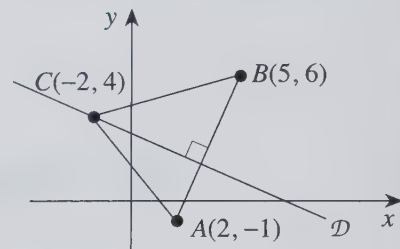


FIGURE 4.7

4.1.3 LES ÉQUATIONS NON PARAMÉTRIQUES DES DROITES DANS $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, on ne peut pas caractériser une droite donnée par une équation normale, car il existe une infinité de droites distinctes passant par un même point A et orthogonales à un même vecteur $\vec{n}$. Ces droites sont cependant toutes dans un même plan (voir la figure 4.8) et nous pourrons, à la sous-section 4.2.3, donner l'équation normale de ce plan.

Par ailleurs, dans $\mathbb{R}^3$, on peut obtenir les équations symétriques de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = (a, b, c)$ comme suit :

$$P \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overline{AP} \parallel \vec{v} \text{ ou } P = A,$$

ce qui peut se traduire par (voir la figure 4.9)

$$P(x, y, z) \in \mathcal{D}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overline{AP} = k\vec{v};$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = k(a, b, c);$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ tel que}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = k \quad (\text{à supposer que } a \neq 0, b \neq 0 \text{ et } c \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (\text{à supposer que } a \neq 0, b \neq 0 \text{ et } c \neq 0).$$

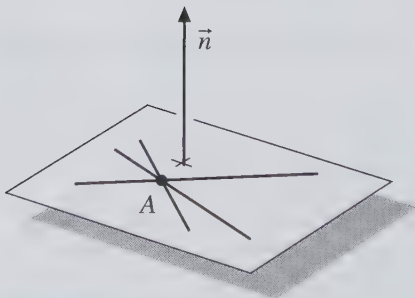


FIGURE 4.8

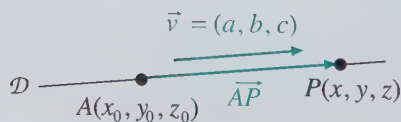


FIGURE 4.9

D'où la définition suivante.

Équations symétriques d'une droite dans $\mathbb{R}^3$

Soit $\mathcal{D}$, une droite dans $\mathbb{R}^3$ passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = (a, b, c)$; alors, le système d'équations

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

est appelé **système d'équations symétriques** de $\mathcal{D}$. Ces équations ne sont définies que si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$ (voir la figure 4.9).

EXEMPLE

On cherche un système d'équations symétriques de la droite $\mathcal{D}$ d'équation vectorielle

$$(x, y, z) = (-3, 0, 2) + t(5, -3, 1), t \in \mathbb{R}.$$

Ici, on aura $(x_0, y_0, z_0) = (-3, 0, 2)$ et $(a, b, c) = (5, -3, 1)$. On obtient un système d'équations symétriques de $\mathcal{D}$ en écrivant

$$\frac{x + 3}{5} = \frac{y}{-3} = z - 2.$$

4.1.4 LA DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

Soit $\mathcal{D}$, la droite passant par le point A et parallèle au vecteur $\vec{v}$; la distance d'un point arbitraire P à la droite $\mathcal{D}$, notée $d(P, \mathcal{D})$, correspond alors à la hauteur h du parallélogramme engendré par $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AP}$ dans la figure 4.10. Ainsi, h est la valeur minimale de $\text{dist}(P, Q)$ pour tout point Q sur $\mathcal{D}$.

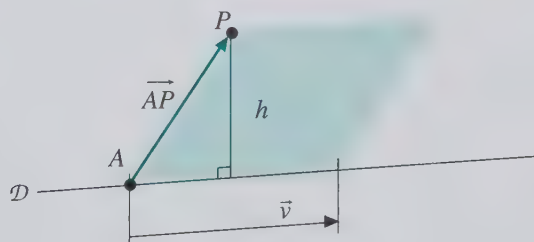


FIGURE 4.10 Le calcul de la distance d'un point à une droite.

Le calcul de la hauteur h peut se faire indirectement à partir du calcul de l'aire du parallélogramme de la figure 4.10: aire du parallélogramme = $\|\vec{v}\|h$, ce qui se traduit¹ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$|\Delta(\overrightarrow{AP}, \vec{v})| = \|\vec{v}\|h$$

et dans $\mathbb{R}^3$ par

$$\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{v}\|h.$$

1. Ici, l'aire est non orientée, donc positive.

En isolant la hauteur h dans ces deux équations, on obtient les formules de calcul qui suivent.

Calcul de la distance d'un point à une droite

Dans $\mathbb{R}^2$, soit $\mathcal{D}$, la droite passant par $A(x_0, y_0)$ et de direction $\vec{v} = (a, b)$. La distance d'un point $P(x, y)$ à $\mathcal{D}$ est

$$d(P, \mathcal{D}) = \frac{|\Delta\langle \overrightarrow{AP}, \vec{v} \rangle|}{\|\vec{v}\|}.$$

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $\mathcal{D}$, la droite passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et de direction $\vec{v} = (a, b, c)$. La distance d'un point $P(x, y, z)$ à $\mathcal{D}$ est

$$d(P, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

EXEMPLE 1

Dans $\mathbb{R}^2$, on donne $\mathcal{D}: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4}$. La distance de $P(3, -2)$ à $\mathcal{D}$ est

$$d(P, \mathcal{D}) = \frac{|\Delta\langle \overrightarrow{AP}, \vec{v} \rangle|}{\|\vec{v}\|}.$$

On a $\overrightarrow{AP} = (3, -2) - (-1, 2) = (4, -4)$. Ainsi,

$$\Delta\langle \overrightarrow{AP}, \vec{v} \rangle = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 28$$

et donc

$$|\Delta\langle \overrightarrow{AP}, \vec{v} \rangle| = 28.$$

De plus, $\|\vec{v}\| = \|(3, 4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ et par suite,

$$d(P, \mathcal{D}) = \frac{28}{5}.$$

EXEMPLE 2

Dans $\mathbb{R}^3$, on donne $\mathcal{D}: (x, y, z) = (-1, 0, 3) + k(2, 1, -2)$, $k \in \mathbb{R}$. La distance de $P(1, 2, 3)$ à $\mathcal{D}$ est

$$d(P, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Ici, $\overrightarrow{AP} = (1, 2, 3) - (-1, 0, 3) = (2, 2, 0)$ et $\vec{v} = (2, 1, -2)$;

$$\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-4, 4, -2)$$

et

$$\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-2)^2} = 6.$$

Puisque $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$, on a

$$d(P, \mathcal{D}) = \frac{6}{3} = 2.$$

Remarques

1. Vous pouvez vérifier que pour toute droite $\mathcal{D}$, $P \in \mathcal{D} \Leftrightarrow d(P, \mathcal{D}) = 0$.
2. On peut tout aussi bien utiliser les projections orthogonales pour calculer la distance d'un point à une droite: $d(P, \mathcal{D}) = \|\overrightarrow{AP_{\vec{v}}} - \overrightarrow{AP}\|$, où $\vec{v}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et A un point sur $\mathcal{D}$ (voir la figure 4.11).

3. Le pied Q de la perpendiculaire abaissée de P à $\mathcal{D}$, qui est le point le plus rapproché de P sur $\mathcal{D}$, est $Q = P + (\overline{AP}_{\vec{v}} - \overline{AP})$.

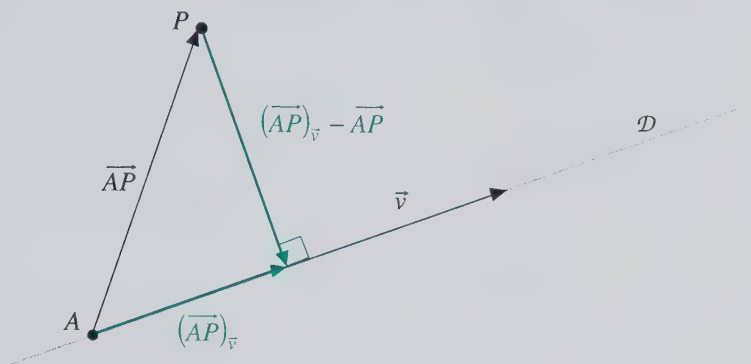


FIGURE 4.11 Le calcul d'un point à une droite.

4.1.5 LA POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES

Dans $\mathbb{R}^2$, deux droites distinctes peuvent être parallèles ou sécantes; dans $\mathbb{R}^3$, deux droites distinctes peuvent être parallèles sécantes ou gauches² (voir la figure 4.12).

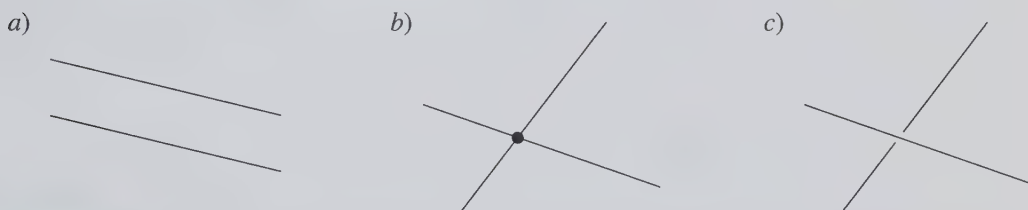


FIGURE 4.12 En a), des droites parallèles; en b), des droites sécantes; en c), droites des gauches.

EXEMPLE 1

Dans $\mathbb{R}^2$, on veut déterminer la position relative des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$:

$$\mathcal{D}_1: (x, y) = (2, -3) + t(-1, 2), t \in \mathbb{R} \quad \mathcal{D}_2: \frac{x+2}{5} = \frac{y-2}{2}.$$

Les vecteurs directeurs $(-1, 2)$ et $(5, 2)$ n'étant pas parallèles, ces droites sont forcément sécantes en un point P (dans $\mathbb{R}^2$, des droites ne peuvent pas être gauches). Il y a plusieurs façons de trouver les coordonnées de P . Par exemple, on peut d'abord écrire $\mathcal{D}_2$ sous forme vectorielle (en prenant soin de distinguer par des notations différentes les paramètres de $\mathcal{D}_1$ et de $\mathcal{D}_2$):

$$\mathcal{D}_2: (x, y) = (-2, 2) + s(5, 2), s \in \mathbb{R},$$

puis traduire en équation le fait que le point d'intersection des deux droites s'écrit de deux manières équivalentes:

$$(2, -3) + t(-1, 2) = (-2, 2) + s(5, 2),$$

ce qui conduit à résoudre³ le système de deux équations linéaires à deux inconnues

$$\begin{aligned} 2 - t &= -2 + 5s \\ -3 + 2t &= 2 + 2s. \end{aligned}$$

2. Rappel: Dans $\mathbb{R}^3$, deux droites qui ne sont ni sécantes ni parallèles sont dites gauches.

3. On peut résoudre le système par la méthode de Cramer dans ce cas-ci; au chapitre 5, on expliquera une méthode de résolution plus générale.

On trouve $s = \frac{1}{4}$ et $t = \frac{11}{4}$. On peut ensuite calculer la position du point P soit en remplaçant s par $\frac{1}{4}$ dans l'équation vectorielle de $\mathcal{D}_2$: $\overrightarrow{OP} = (-2, 2) + \frac{1}{4}(5, 2) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{2}\right)$, soit en remplaçant t par $\frac{11}{4}$ dans l'équation vectorielle de $\mathcal{D}_1$.

EXEMPLE 2

Dans $\mathbb{R}^3$, on cherche la position relative des deux droites définies par :

$$\mathcal{D}_1 : (x, y, z) = (-2, 10, -2) + t(-3, 8, -5), t \in \mathbb{R}$$

et

$$\mathcal{D}_2 : (x, y, z) = (5, 1, 13) + s(3, -2, 2), s \in \mathbb{R}.$$

Comme les vecteurs directeurs sont non parallèles, ces deux droites sont ou bien gauches ou bien sécantes en un point. Pour déterminer l'éventuel point d'intersection, on doit résoudre les équations simultanées :

$$-2 - 3t = 5 + 3s,$$

$$10 + 8t = 1 - 2s,$$

$$-2 - 5t = 13 + 2s.$$

En résolvant les deux dernières équations (on les additionne membre à membre pour éliminer s), on trouve $t = 2$ et $s = -25/2$. Cependant, ces valeurs ne sont pas applicables à la première équation. Il n'y a donc pas de solution commune aux trois équations ; par conséquent, les deux droites sont gauches.

L'angle entre deux droites

L'angle entre deux droites est toujours défini, même pour des droites qui ne sont pas sécantes dans $\mathbb{R}^3$: c'est l'angle entre les vecteurs directeurs de ces deux droites. Comme le montre la figure 4.13, il y a en fait deux angles (supplémentaires) formés par les deux droites ; on obtiendra l'un ou l'autre de ces deux angles selon le sens des vecteurs directeurs choisis pour représenter ces deux droites.

Dans l'exemple 2 ci-dessus, l'angle θ entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est déterminé par

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(-3, 8, -5) \cdot (3, -2, 2)}{\|(-3, 8, -5)\| \|(3, -2, 2)\|} \\ &= \frac{-35}{\sqrt{98} \sqrt{17}}, \end{aligned}$$

ce qui fait $\theta \approx 149^\circ$ ou $\theta \approx 31^\circ$.

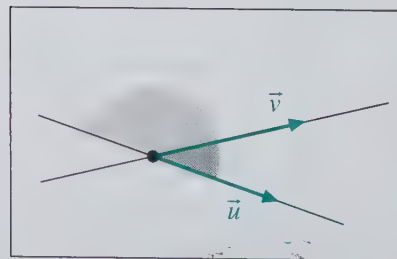
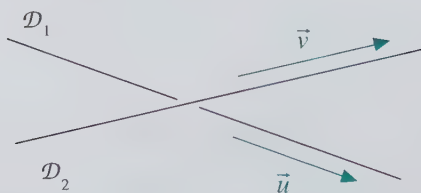


FIGURE 4.13 L'angle entre deux droites.

4.1.6 LA DISTANCE ENTRE DEUX DROITES

Par définition, la distance entre deux droites sécantes est nulle; la distance entre deux droites parallèles est la distance d'un point quelconque de l'une des droites à l'autre droite. On définit la distance entre deux droites gauches dans $\mathbb{R}^3$ comme suit: c'est la plus petite distance possible entre deux points pris sur l'une et l'autre de ces deux droites; les points P_1 et P_2 correspondant à cette distance minimale sont uniquement déterminés sur chacune des deux droites gauches, et le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ est alors orthogonal à chacun des vecteurs directeurs des deux droites (voir la figure 4.14):

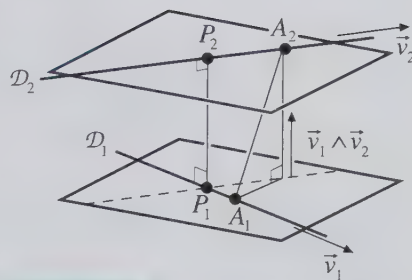


FIGURE 4.14 La distance entre deux droites gauches (en perspective).

Le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ est alors la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ (joignant deux points arbitraires de l'une et l'autre droite) sur le vecteur $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ perpendiculaire aux deux droites simultanément:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)}{\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\|^2} \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2.$$

La distance entre les deux droites gauches est donnée par la norme de ce vecteur:

$$d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \frac{|\overrightarrow{A_1A_2} \cdot (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)|}{\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\|}.$$

EXEMPLE 1

Voici comment on calcule la distance entre les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ définies par

$$\mathcal{D}_1: (x, y, z) = (-2, 10, -2) + t(-3, 8, -5), \quad t \in \mathbb{R}$$

et

$$\mathcal{D}_2: (x, y, z) = (5, 1, 13) + s(3, -2, 2), \quad s \in \mathbb{R}.$$

On a d'abord $\overrightarrow{A_1A_2} = (7, -9, 15)$ et $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = (-3, 8, -5) \wedge (3, -2, 2) = (6, -9, -18)$. Donc,

$$\begin{aligned} d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) &= \frac{|(7, -9, 15) \cdot (6, -9, -18)|}{\|(6, -9, -18)\|} \\ &= 7 \text{ unités.} \end{aligned}$$

EXEMPLE 2

On cherche les deux points les plus rapprochés sur les droites gauches $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de l'exemple 1.

Toujours avec les données de l'exemple 1, on peut calculer les coordonnées des points P_1 et P_2 les plus rapprochés sur $\mathcal{D}_1$ et sur $\mathcal{D}_2$ en écrivant d'abord le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ en fonction des paramètres s et t :

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (7 + 3s + 3t, -9 - 2s - 8t, 15 + 2s + 5t),$$

puis en résolvant le système de deux équations à deux inconnues obtenu en traduisant les relations $\overrightarrow{P_1P_2} \perp \vec{v}_1$ et $\overrightarrow{P_1P_2} \perp \vec{v}_2$ par

$$(7 + 3s + 3t, -9 - 2s - 8t, 15 + 2s + 5t) \cdot (-3, 8, -5) = 0$$

et

$$(7 + 3s + 3t, -9 - 2s - 8t, 15 + 2s + 5t) \cdot (3, -2, 2) = 0.$$

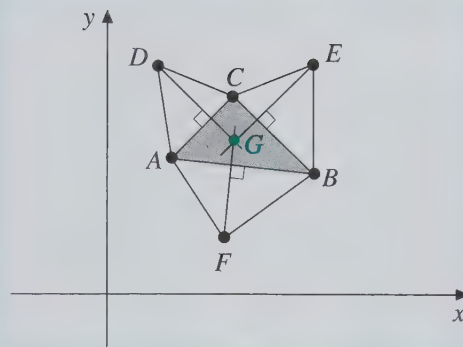
Vérifiez que vous obtenez ainsi $s = -2$ et $t = -1$ et par suite, les points $P_1(1, 2, 3)$ et $P_2(-1, 5, 9)$; vérifiez aussi que $\|P_1P_2\| = 7 = d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$.

EXERCICES 4.1

- Dans $\mathbb{R}^2$, la droite $\mathcal{D}$ passe par les points $A(-1, 4)$ et $B(3, 1)$.
 - Donnez une équation vectorielle de $\mathcal{D}$. (L'équation n'est évidemment pas unique.)
 - Donnez une équation symétrique de $\mathcal{D}$.
 - Donnez une équation normale de $\mathcal{D}$.
- Dans $\mathbb{R}^2$, on donne la droite $\mathcal{D}$ par l'équation $3x - 2y = 1$.
 - Trouvez un vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathcal{D}$.
 - Trouvez un vecteur directeur $\vec{v}$ de $\mathcal{D}$.
- Dans $\mathbb{R}^2$, on donne la droite $\mathcal{D}$ par l'équation $ax + by = c$.
 - Décrivez en fonction de a , b et c un vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathcal{D}$.
 - Trouvez en fonction de a , b et c un vecteur directeur $\vec{v}$ de $\mathcal{D}$.
 - Si les valeurs de a et de b sont fixes, quel est l'effet graphique sur $\mathcal{D}$ d'un changement de valeur de c ?
- Quelle ou quelles valeurs peut-on donner à p afin que les droites suivantes dans $\mathbb{R}^2$ soient
 - parallèles distinctes ?
 - confondues ?
 - sécantes ?
 - perpendiculaires ?
 - $\mathcal{D}_1: 2x + py = 1$ et $\mathcal{D}_2: x + y = 0$.
 - $\mathcal{D}_1: (x, y) = (2, -1) + t(7, -1)$, $t \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{D}_2: (x, y) = (9, -2) + s(-1, p)$, $s \in \mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{R}^2$, on donne les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ par

$$\mathcal{D}_1: 5x + y = 4 \text{ et } \mathcal{D}_2: x + 3y = -4.$$
 Déterminez les vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ de ces deux droites, et calculez la valeur de l'angle aigu formé par celles-ci.
- Pour chacune des droites suivantes de $\mathbb{R}^2$, calculez la distance du point $P(3, -1)$ à la droite $\mathcal{D}$.
 - $\mathcal{D}: 2x - y = 5$
 - $\mathcal{D}: \frac{x+8}{4} = y+1$
 - $\mathcal{D}: x + 5y = -8$
- Montrez que dans $\mathbb{R}^2$ l'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ représente toujours une droite qui coupe l'axe des abscisses en $(a, 0)$ et l'axe des ordonnées en $(0, b)$.

8. La figure ci-contre représente le développement plan dans $\mathbb{R}^2$ de la maquette d'une pyramide à base triangulaire (tétraèdre). La maquette est obtenue en repliant (dans $\mathbb{R}^3$) les trois triangles périphériques le long des côtés du triangle central ABC , jusqu'à ce que les trois points D , E et F viennent coïncider dans l'espace $\mathbb{R}^3$ en un sommet S . Lors de ce pliage, les sommets D , E et F suivent des trajectoires circulaires dont les projections dans $\mathbb{R}^2$ sont des lignes droites concourantes en un point G de $\mathbb{R}^2$ (qui est la projection orthogonale du sommet S de la pyramide sur le plan ABC). Les sommets des triangles sont donnés par $A(4, 9)$, $B(13, 8)$, $C(8, 13)$, $D(3, 15)$ et $E(13, 15)$.



- a) Donnez une équation normale de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par E et G , et une équation normale de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par D et G dans $\mathbb{R}^2$.
- b) Quelles sont les coordonnées du point G dans $\mathbb{R}^2$?
- c) Quelles sont les coordonnées du point F dans $\mathbb{R}^2$?
- d) Quelle est la hauteur h de la pyramide, mesurée du sommet S dans $\mathbb{R}^3$ à la base ABC dans $\mathbb{R}^2$?
9. Donnez les équations vectorielles, paramétriques, puis symétriques de la droite $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^3$ passant par les points $A(2, 1, -1)$ et $B(1, 0, 5)$. Ces équations ne sont pas uniques.
10. Soit $\mathcal{D}$, une droite de $\mathbb{R}^3$ représentée par le système d'équations paramétriques
- $$x = 1 + 2k, \quad y = 1 + k \quad \text{et} \quad z = 2 + 3k, \quad k \in \mathbb{R}.$$
- a) Donnez deux points sur $\mathcal{D}$.
- b) Donnez deux points hors de $\mathcal{D}$.
- c) Quelle partie de $\mathcal{D}$ obtient-on si $k \in [-1, 2]$? Illustrez votre réponse. (Il est inutile de tracer les axes du repère; tracez d'abord une droite arbitraire, un point de référence sur cette droite et un vecteur directeur, à l'échelle de votre choix.)
- d) La droite $\mathcal{D}$ rencontre-t-elle les plans de coordonnées? Si oui, en quel ou quels points?
- e) La droite $\mathcal{D}$ rencontre-t-elle les axes de coordonnées? Si oui, en quel ou quels points?
11. Représentez par un système d'équations symétriques la droite $\mathcal{D}$ de l'exercice 10.
12. Une droite $\mathcal{D}$ a pour équations symétriques

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1/2}{-1} = \frac{z-2}{5}$$

- a) La projection orthogonale de $\mathcal{D}$ dans le plan des abscisses et des ordonnées (plan des x et des y) est une droite $\mathcal{D}_1$. En identifiant $\mathbb{R}^2$ au plan des x et des y , donnez une équation symétrique de $\mathcal{D}_1$ dans $\mathbb{R}^2$.
- b) La projection orthogonale de $\mathcal{D}$ dans le plan des ordonnées et des cotes (le plan des y et des z) est une droite $\mathcal{D}_2$. En identifiant $\mathbb{R}^2$ au plan des y et des z , donnez une équation symétrique (en y et en z) de $\mathcal{D}_2$ dans $\mathbb{R}^2$.
- c) La projection orthogonale de $\mathcal{D}$ dans le plan des abscisses et des cotes (le plan des x et des z) est une droite $\mathcal{D}_3$. En identifiant $\mathbb{R}^2$ au plan des x et des z , donnez une équation symétrique (en x et en z) de $\mathcal{D}_3$ dans $\mathbb{R}^2$.

13. Déterminez la position relative des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de $\mathbb{R}^3$ données par

$$\mathcal{D}_1: x = 1 + 6t, y = 3 - t, z = -2 + 6t, t \in \mathbb{R}$$

et

$$\mathcal{D}_2: \frac{x-3}{2} = 2-3y = \frac{z-3}{2}.$$

14. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, données par

$$\mathcal{D}_1: (x, y, z) = (4, 0, 4) + t(3, 2, -1) \quad t \in \mathbb{R}$$

et

$$\mathcal{D}_2: (x, y, z) = (5, -4, -3) + s(-2, 1, 4), s \in \mathbb{R},$$

sont sécantes en un point P de $\mathbb{R}^3$. Trouvez les coordonnées de P .

15. Déterminez les valeurs de m et de n pour lesquelles les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, données par

$$\mathcal{D}_1: \frac{x+1}{m} = \frac{y-2}{n} = \frac{z}{3}$$

et

$$\mathcal{D}_2: x = 1 + 2t, y = 4 - t, z = -5 - t, t \in \mathbb{R},$$

a) sont parallèles ;

b) sont orthogonales (il n'est pas nécessaire qu'elles soient sécantes).

16. Calculez la distance du point $P(2, 1, 3)$ à la droite $\mathcal{D}$ définie par

$$x = 2k, y = 1 - k, z = 2 - 3k, k \in \mathbb{R}.$$

17. Calculez la distance de l'origine $O(0, 0, 0)$ à la droite $\mathcal{D}$ définie par

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{2}.$$

Quel est le point de $\mathcal{D}$ le plus près de l'origine ?

18. Quelle est la distance entre les deux droites parallèles décrites par les équations suivantes ?

$$\mathcal{D}_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{3}$$

$$\mathcal{D}_2: x-3 = \frac{y-4}{2} = \frac{2}{3}(z-2)$$

19. Quel est le point situé le plus près de l'axe des abscisses sur la droite d'équation vectorielle $(x, y, z) = (-2, 6, 2) + t(3, -2, 1), t \in \mathbb{R}$?

20. Deux particules P et Q se dirigent l'une vers l'autre sur la droite d'équations symétriques

$$\frac{x-1}{-6} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{2}.$$

À l'instant $t = 0$, P se trouve au point de coordonnées $(19, 8, -4)$ et Q se trouve au point de coordonnées $(-29, -16, 12)$. Les vitesses scalaires de P et de Q sont respectivement de 4 m/s et 6 m/s.

a) Quelles seront les coordonnées du point de collision de P et Q ? (On suppose que toutes les coordonnées et les composantes sont mesurées en mètres.)

b) À quel instant aura lieu la collision ?

21. Les positions de deux particules P et Q à l'instant t sont données par

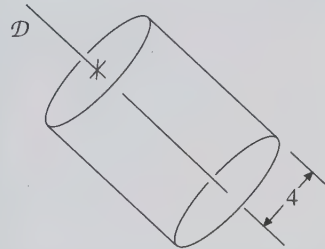
$$P: (x, y, z) = (-1, 2, 5) + t(1, 2, 3) \text{ et } Q: (x, y, z) = (3, 4, 2) + t(-1, 3, 2).$$

Le point M se déplace dans l'espace de telle manière qu'il est toujours exactement à mi-chemin entre P et Q .

- Montrez que M se déplace selon une droite et donnez une équation vectorielle de cette droite.
 - Est-il exact d'affirmer que la vitesse vectorielle de M est la moyenne entre la vitesse vectorielle de P et la vitesse vectorielle de Q ?
 - Est-il exact d'affirmer que la vitesse scalaire de M est la moyenne entre la vitesse scalaire de P et la vitesse scalaire de Q ?
22. Le cylindre circulaire illustré ci-contre est le lieu des points $P(x, y, z)$ qui sont à 4 unités de distance de la droite $\mathcal{D}$ définie par les équations paramétriques

$$x = 1 + t, y = 2 - 2t, z = 3 + 2t, t \in \mathbb{R}.$$

Trouvez une équation en x, y et z qui caractérise ce lieu dans $\mathbb{R}^3$.



23. Trois particules P_1, P_2 et P_3 se déplacent dans l'espace $\mathbb{R}^3$ de telle sorte que leurs positions respectives à l'instant t sont données par :

$$P_1: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = 4 + 3t \end{cases} \quad P_2: \begin{cases} x = -8 + t \\ y = 2t \\ z = -2 + 4t \end{cases} \quad P_3: \begin{cases} x = 10 - 2t \\ y = 5 + t \\ z = 3t \end{cases}$$

- Où se trouvent les particules à l'instant $t = 0$?
- Quelles sont les vitesses scalaires respectives des particules P_1, P_2 et P_3 ?
- Quelle distance sépare les particules P_2 et P_3 à l'instant $t = 5$?
- Les trajectoires de P_1 et de P_3 sont-elles parallèles?
- À quelle distance la particule P_2 se trouve-t-elle de la trajectoire de la particule P_3 à l'instant $t = 2$?
- Les trajectoires des particules P_2 et P_3 se croisent-elles? Si oui, en quel point? Sinon, quelle distance sépare ces trajectoires?
- Montrez que les trajectoires des particules P_1 et P_2 sont sécantes.
- Les particules P_1 et P_2 entreront-elles en collision?
- Quelle est la valeur de l'angle entre les trajectoires des particules P_2 et P_3 ?
- À quel instant la particule P_2 est-elle le plus près de la trajectoire de P_3 ?

24. En quels points la droite d'équation vectorielle

$$(x, y, z) = (-10, 4, 9) + t(8, -1, -3), t \in \mathbb{R}$$

perce-t-elle la surface de la sphère de rayon 7 centrée à l'origine?

25. En quels points la droite d'équation vectorielle

$$(x, y, z) = (9, 22, -11) + t(3, 9, -5), t \in \mathbb{R}$$

perce-t-elle la surface du cylindre circulaire de rayon 5 dont l'axe de symétrie coïncide avec l'axe des z (l'axe des cotes)?

LES PLANS

Dans $\mathbb{R}^3$, les plans se décrivent à l'aide d'équations vectorielles, paramétriques et non paramétriques. Nous verrons aussi comment utiliser le vecteur normal (à un plan) pour calculer la distance d'un point à un plan, pour évaluer la position relative de deux plans dans $\mathbb{R}^3$ et pour mesurer l'angle dièdre entre deux plans.

4.2.1 LES ÉQUATIONS VECTORIELLES ET PARAMÉTRIQUES DES PLANS DANS $\mathbb{R}^3$

La donnée d'un point P_0 et de deux vecteurs non nuls et non parallèles $\vec{u}$ et $\vec{v}$ détermine un unique plan $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}^3$: c'est l'ensemble (le lieu) de tous les points P pour lesquels $P = P_0 + r\vec{u} + s\vec{v}$ (voir la figure 4.15) avec $r, s \in \mathbb{R}$.

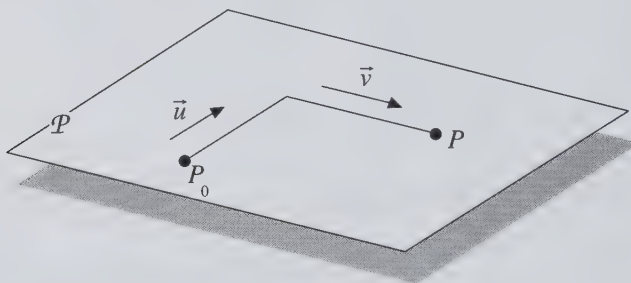


FIGURE 4.15 Un plan dans $\mathbb{R}^3$: deux vecteurs directeurs et un point de référence.

Plan dans $\mathbb{R}^3$

Soit A , un point, et $\vec{u}$ et $\vec{v}$, des vecteurs non nuls et non parallèles de $\mathbb{R}^3$. Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le lieu des points $P(x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels

$$P = A + (r\vec{u} + s\vec{v}) \text{ ou, encore, } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + r\vec{u} + s\vec{v}, \text{ avec } r, s \in \mathbb{R}.$$

L'équation $P = A + (r\vec{u} + s\vec{v})$ est une **équation affine** de $\mathcal{P}$ et l'équation $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + r\vec{u} + s\vec{v}$ est une **équation vectorielle** de $\mathcal{P}$. Les scalaires r et s sont les paramètres de ces équations et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les **vecteurs directeurs** du plan $\mathcal{P}$; A est un **point de référence** de $\mathcal{P}$.

EXEMPLE

On peut obtenir une équation vectorielle du plan $\mathcal{P}$ passant par les points

$$A(1, 0, 0), B(0, 2, 0) \text{ et } C(0, 0, 3),$$

en choisissant :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ comme vecteurs directeurs,

et A comme point de référence (voir la figure 4.16) :

$$\mathcal{P}: (x, y, z) = (1, 0, 0) + r(-1, 2, 0) + s(-1, 0, 3), r, s \in \mathbb{R}.$$

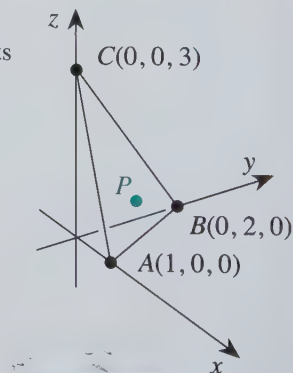


FIGURE 4.16

Équations paramétriques d'un plan

Soit $\mathcal{P}$, un plan dans $\mathbb{R}^3$ d'équation vectorielle

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + r(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3), \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Alors, le système d'équations

$$x = x_0 + ru_1 + sv_1$$

$$y = y_0 + ru_2 + sv_2$$

$$z = z_0 + ru_3 + sv_3$$

est appelé **système d'équations paramétriques** de $\mathcal{P}$, et r et s sont les **paramètres** de ces équations.

EXEMPLE

Voici un système d'équations paramétriques du plan $\mathcal{P}$ d'équation vectorielle

$$\mathcal{P}: (x, y, z) = (1, 0, 0) + r(-1, 2, 0) + s(-1, 0, 3), \quad r, s \in \mathbb{R}:$$

$$x = 1 - r - s$$

$$y = 2r$$

$$z = 3s$$

4.2.2 LES ÉQUATIONS NON PARAMÉTRIQUES DES PLANS DANS $\mathbb{R}^3$

On peut caractériser les points $P(x, y, z)$ du plan $\mathcal{P}$ qui passe par le point A et qui a comme vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, par le fait que le vecteur $\overrightarrow{AP}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, et que le parallépipède engendré par $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est plat (de volume nul)⁴:

$$P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \Delta\langle \overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \text{ (voir la figure 4.17).}$$

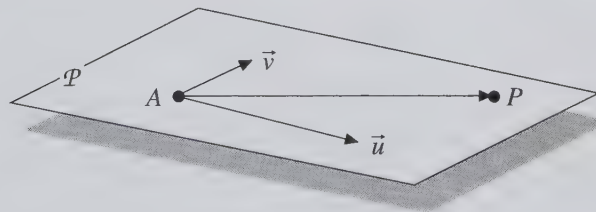


FIGURE 4.17

Cela nous donne, pour les coordonnées x, y et z de tout point P du plan $\mathcal{P}$, une équation sans paramètre. Si le point de référence sur $\mathcal{P}$ est $A(x_0, y_0, z_0)$ et si les vecteurs directeurs sont $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, alors l'équation

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0,$$

qui caractérise tous les points $P(x, y, z)$ du plan $\mathcal{P}$ est une équation non paramétrique de $\mathcal{P}$.

4. Voir le test de la coplanarité de quatre points à la sous-section 3.1.5.

EXEMPLE

On obtient une équation non paramétrique du plan $\mathcal{P}$ de la figure 4.16 (voir la page 144) passant par les points $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ et $C(0, 0, 3)$ à partir de l'équation $\Delta(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$:

$$P(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne, en développant ce déterminant, et en séparant variables et constante :

$$\mathcal{P}: 6x + 3y + 2z = 6.$$

Cette dernière équation est ce que nous appellerons plus loin une **équation normale** de $\mathcal{P}$.

4.2.3 UN VECTEUR NORMAL À UN PLAN

Étant donné un plan $\mathcal{P}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$, il existe une seule direction orthogonale à toutes les directions de $\mathcal{P}$ (c'est-à-dire à tous les vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$). Un vecteur $\vec{n}$ qui a cette direction est appelé **vecteur normal** au plan $\mathcal{P}$. À l'inverse, étant donné un vecteur non nul $\vec{n}$ et un point A de $\mathbb{R}^3$, il existe un seul plan $\mathcal{P}$ passant par A ayant $\vec{n}$ pour vecteur normal (voir la figure 4.18).

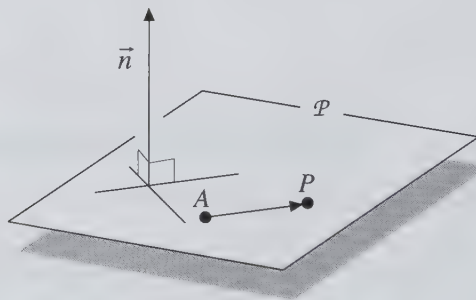


FIGURE 4.18 Un vecteur normal à un plan.

Si $\overrightarrow{OA} = (x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{n} = (a, b, c)$, on peut obtenir une équation non paramétrique du plan $\mathcal{P}$ comme suit :

$$\begin{aligned} P(x, y, z) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp \vec{n} \text{ ou } P = A \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz = d, \text{ où } d = ax_0 + by_0 + cz_0. \end{aligned}$$

On en déduit l'énoncé suivant.

Si $abc \neq 0$, l'équation

$$ax + by + cz = d$$

représente un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n} = (a, b, c)$; si ce plan passe par le point $A(x_0, y_0, z_0)$, alors $d = ax_0 + by_0 + cz_0$. L'équation $ax + by + cz = d$ est appelée **équation normale** ou, encore, **équation linéaire** ou **équation cartésienne** du plan $\mathcal{P}$.

EXEMPLE 1

Dans la figure 4.19, le plan $\mathcal{P}$ est perpendiculaire au segment AB et passe par le milieu de ce segment. On donne $A(5, 2, -1)$ et $B(1, 8, 1)$.

Pour obtenir une équation normale de $\mathcal{P}$, on utilise le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur normal :

$$\vec{n} = (-4, 6, 2).$$

Dans ce cas, l'équation normale de $\mathcal{P}$ sera

$$-4x + 6y + 2z = d.$$

Pour déterminer la valeur de la constante d de cette équation, il faut connaître un point du plan $\mathcal{P}$. Le milieu M du segment AB est sur $\mathcal{P}$. C'est le barycentre des points A et B :

$$M(x, y, z) = \frac{1}{2}[(5, 2, -1) + (1, 8, 1)] = (3, 5, 0).$$

On obtient la valeur de d en substituant les coordonnées de M aux variables x, y et z dans l'équation du plan :

$$\begin{aligned} -4(3) + 6(5) + 2(0) &= d, \\ d &= 18. \end{aligned}$$

L'équation de $\mathcal{P}$ est donc

$$-4x + 6y + 2z = 18$$

ou, encore,

$$-2x + 3y + z = 9.$$

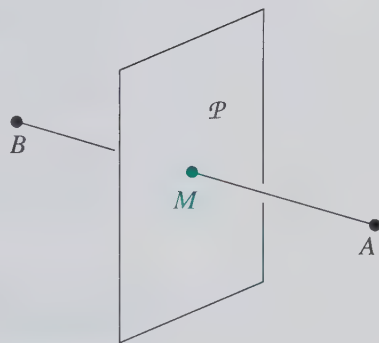


FIGURE 4.19

EXEMPLE 2

Un plan $\mathcal{P}$ est défini par l'équation

$$x - y + 3z = 5$$

et une droite $\mathcal{D}$ a pour équations paramétriques

$$x = -2 + 2t, \quad y = 4 + t, \quad z = 3 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On veut savoir si la droite $\mathcal{D}$ est parallèle ou sécante au plan $\mathcal{P}$.

Le vecteur normal de $\mathcal{P}$ est $\vec{n} = (1, -1, 3)$ et le vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{v} = (2, 1, 2)$. On évalue le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{n} : (2, 1, 2) \cdot (1, -1, 3) = 7$. Le produit scalaire étant non nul, on peut affirmer que $\vec{v}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux. La droite $\mathcal{D}$ est donc sécante au plan $\mathcal{P}$. On peut trouver le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{P}$ en substituant dans l'équation de $\mathcal{P}$ les expressions paramétriques des variables x, y et z données par les équations de $\mathcal{D}$. L'équation $x - y + 3z = 5$ du plan $\mathcal{P}$ devient

$$(-2 + 2t) - (4 + t) + 3(3 + 2t) = 5,$$

ce qui donne $t = 2/7$; on obtient alors le point recherché en attribuant cette valeur au paramètre t dans les équations de $\mathcal{D}$. On trouve ainsi les coordonnées du point d'intersection : $(-10/7, 30/7, 25/7)$.

4.2.4 LA DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN

La distance d'un point P à un plan $\mathcal{P}$, notée $d(P, \mathcal{P})$, est la longueur de la perpendiculaire abaissée du point P au plan $\mathcal{P}$. Le pied de cette perpendiculaire est le point le plus rapproché

de P sur $\mathcal{P}$. Si A est un point arbitraire de $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$, un vecteur normal de $\mathcal{P}$, alors $d(P, \mathcal{P})$ est la longueur de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AP}$ sur $\vec{n}$ (voir la figure 4.20), où $d = d(P, \mathcal{P})$.

En utilisant la formule de calcul des projections orthogonales (voir la sous-section 2.2.4), on obtient le résultat suivant.

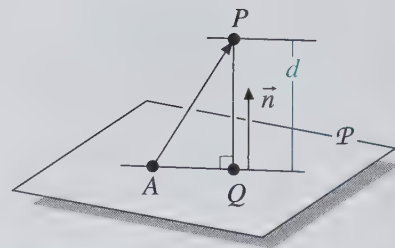


FIGURE 4.20

Calcul de la distance d'un point à un plan

$$d(P, \mathcal{P}) = \|\overrightarrow{AP_{\vec{n}}}\| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|},$$

où A est un point arbitraire de $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$, un vecteur normal de $\mathcal{P}$.

Par suite, on a aussi :

Le point Q , pied de la perpendiculaire abaissée du point P au plan $\mathcal{P}$ (voir la figure 4.20), est donné par

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{AP_{\vec{n}}} = \overrightarrow{OP} - \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$$

et le point P' , **symétrique de P relativement au plan $\mathcal{P}$** , est donné par

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - 2\overrightarrow{AP_{\vec{n}}} = \overrightarrow{OP} - 2 \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

EXEMPLE

On veut calculer la distance du point $P(-1, 8, -10)$ au plan $\mathcal{P}$ défini par

$$\mathcal{P}: 2x - 3y + 6z = 12.$$

On choisit un point sur $\mathcal{P}$ en posant, par exemple, $x = 0$ et $y = 0$ dans l'équation de $\mathcal{P}$. On trouve $z = 2$, et donc le point $A(0, 0, 2)$ est sur $\mathcal{P}$. Ainsi $\overrightarrow{AP} = (-1, 8, -12)$. Le vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n} = (2, -3, 6)$. On obtient

$$\begin{aligned} d(P, \mathcal{P}) &= \frac{|(-1, 8, -12) \cdot (2, -3, 6)|}{\|(2, -3, 6)\|} \\ &= \frac{|-98|}{7} \\ &= 14 \text{ unités.} \end{aligned}$$

Le pied de la perpendiculaire abaissée de P à $\mathcal{P}$ est le point Q donné par

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{AP_{\vec{n}}} \\ &= (-1, 8, -10) - \frac{(-1, 8, -12) \cdot (2, -3, 6)}{\|(2, -3, 6)\|^2} (2, -3, 6) \\ &= (-1, 8, -10) - (-4, 6, -12) \\ &= (3, 2, 2). \end{aligned}$$

Le symétrique P' de P relativement à $\mathcal{P}$ est donné par

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'} &= (-1, 8, -10) - 2(-4, 6, -12) \\ &= (7, -4, 14).\end{aligned}$$

Remarques

1. Si une droite $\mathcal{D}$ est parallèle à un plan $\mathcal{P}$, alors la distance de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{P}$ est la distance d'un point quelconque de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{P}$.
2. La distance entre deux plans parallèles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est la distance d'un point quelconque de l'un des plans à l'autre plan.

4.2.5 LA POSITION RELATIVE DE DEUX PLANS DANS $\mathbb{R}^3$

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, deux plans de l'espace $\mathbb{R}^3$ donnés par les équations normales

$$\mathcal{P}_1: a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

et

$$\mathcal{P}_2: a_2x + b_2y + c_2z = d_2.$$

Si les vecteurs normaux $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ sont parallèles ($\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \vec{0}$), alors les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ seront parallèles. Autrement, si $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \neq \vec{0}$, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ dont la direction est donnée par $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$, car $\mathcal{D}$ est orthogonale à la fois à $\vec{n}_1$ et à $\vec{n}_2$ (voir la figure 4.21).

Pour obtenir une équation vectorielle de la droite $\mathcal{D}$ d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, il n'y a qu'à trouver un point sur $\mathcal{D}$, car la direction de $\mathcal{D}$ est donnée par $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$; cela revient à trouver une solution⁵ particulière (x, y, z) aux équations simultanées des deux plans :

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2.$$

Lorsque les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants, il y a une infinité de solutions à ce système, et ces solutions sont précisément les points $P(x, y, z)$ situés sur $\mathcal{D}$. Des trois composantes de $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$, le vecteur directeur de $\mathcal{D}$, au moins l'une est non nulle. Supposons que ce soit la composante en z (la cote); dans ce cas, on est certain que $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle au plan des abscisses et des ordonnées, et donc que $\mathcal{D}$ rencontre ce plan en un point $(x, y, 0)$. On pose alors $z = 0$ dans le système des deux équations et on n'a plus qu'à résoudre un simple système de deux équations à deux inconnues.

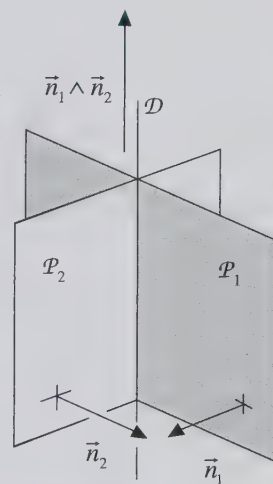


FIGURE 4.21 L'intersection de deux plans.

5. On présentera au chapitre 5 une méthode simple et systématique pour trouver toutes les solutions.

EXEMPLE

On veut déterminer la position relative des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ définis par

$$\mathcal{P}_1: 4x - 2y + z = 10$$

et

$$\mathcal{P}_2: -3x + 5y + z = -4.$$

Ici, $\vec{n}_1 = (4, -2, 1)$ et $\vec{n}_2 = (-3, 5, 1)$, ce qui donne $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (-7, -7, 14)$: les plans sont donc sécants selon une droite $\mathcal{D}$ de direction $\vec{v} = (1, 1, -2)$ [c'est un multiple de $(-7, -7, 14)$]. En posant $z = 0$ dans les équations des deux plans, on obtient un système de deux équations à deux inconnues à résoudre :

$$4x - 2y = 10$$

$$-3x + 5y = -4.$$

On trouve facilement $x = 3$ et $y = 1$, de sorte que le point $A(3, 1, 0)$ est sur la droite $\mathcal{D}$ et par suite l'équation vectorielle de $\mathcal{D}$ est

$$\mathcal{D}: (x, y, z) = (3, 1, 0) + t(1, 1, 2), t \in \mathbb{R}.$$

4.2.6 L'ANGLE DIÈDRE ENTRE DEUX PLANS

Pour mesurer l'angle entre deux plans distincts $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ non parallèles, on choisit un point P sur la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et de $\mathcal{P}_2$ (voir la figure 4.22) et par le point P , on mène deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ perpendiculaires à la droite d'intersection et situées respectivement sur $\mathcal{P}_1$ et sur $\mathcal{P}_2$. L'angle dièdre entre les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est, par définition, l'angle entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Il y a en fait deux angles (supplémentaires) entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$: on choisit celui qui convient selon le contexte (ordinairement l'angle aigu). Lorsque les deux plans sont parallèles, on convient que l'angle entre les deux est nul.

Si on observe les plans de la figure 4.22 par la tranche, on voit alors la droite d'intersection des deux plans comme un point, les plans apparaissent confondus avec les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ (voir la figure 4.23), et l'angle dièdre θ apparaît en vraie grandeur.

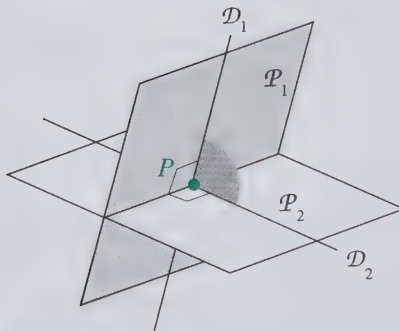


FIGURE 4.22 L'angle dièdre entre deux plans.

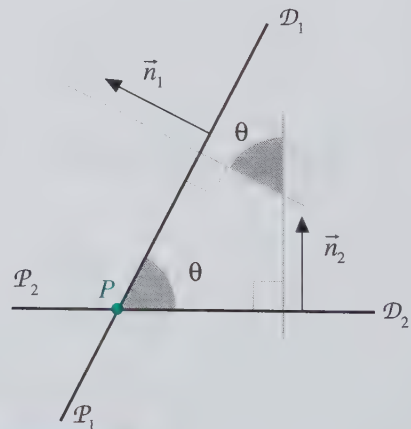


FIGURE 4.23

On remarque que l'angle θ entre les deux plans est le même que l'angle entre les vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$; c'est une conséquence d'un théorème de géométrie plane: deux angles aigus (ou deux angles obtus) dont les côtés sont mutuellement perpendiculaires doivent être égaux. Cela justifie l'énoncé suivant.

L'angle dièdre entre les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ est égal à l'angle α entre $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ou à l'angle β entre $-\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$; α et β sont supplémentaires.

EXEMPLE

On cherche la valeur de l'angle dièdre entre le plan $\mathcal{P}$ de la figure 4.24 et le plan d'équation $z = 0$.

Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est $\vec{n} = (-1, 2, 0) \wedge (-1, 0, 3) = (6, 3, 2)$ et un vecteur normal au plan d'équation $z = 0$ est $(0, 0, 1)$; l'angle θ entre les deux plans peut donc être défini par

$$\cos \theta = \frac{(6, 3, 2) \cdot (0, 0, 1)}{\|(6, 3, 2)\| \|(0, 0, 1)\|} = \frac{2}{7},$$

ce qui donne $\theta \approx 73,4^\circ$. On aurait pu aussi choisir l'angle supplémentaire: $106,6^\circ$.

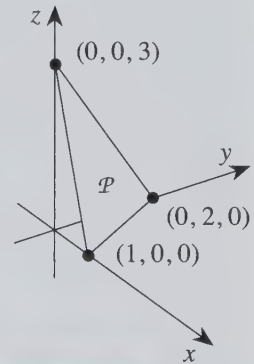


FIGURE 4.24

On peut également définir l'angle entre une droite et un plan: l'angle α entre la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ est l'angle complémentaire de l'angle entre le vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et le vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, si ces deux vecteurs pointent vers le même côté du plan (voir la figure 4.25). On pourrait aussi dire que c'est l'angle complémentaire de l'angle aigu entre $\mathcal{D}$ et toute droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$. De plus, si $\mathcal{D}$ n'est pas perpendiculaire à $\mathcal{P}$, on peut dire que α est l'angle entre $\mathcal{D}$ et sa projection orthogonale $\mathcal{D}'$ sur $\mathcal{P}$; parmi toutes les droites sur $\mathcal{P}$, c'est $\mathcal{D}'$ qui fait le plus petit angle (aigu) avec $\mathcal{D}$.

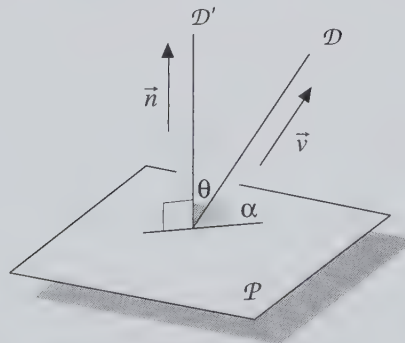


FIGURE 4.25 L'angle α entre une droite $\mathcal{D}$ et un plan $\mathcal{P}$.

EXEMPLE

On cherche la valeur de l'angle entre l'axe des abscisses et le plan d'équation $x + y + z = 1$.

Le vecteur directeur de l'axe des abscisses est $\vec{v} = (1, 0, 0)$ et le vecteur normal au plan est $\vec{n} = (1, 1, 1)$; l'angle θ entre $\vec{v}$ et $\vec{n}$ est déterminé par

$$\cos \theta = \frac{(1, 0, 0) \cdot (1, 1, 1)}{\|(1, 0, 0)\| \|(1, 1, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

ce qui donne $\theta \approx 54,74^\circ$. L'angle α entre l'axe des abscisses et le plan est donc

$$\alpha \approx 90^\circ - 54,74^\circ = 35,26^\circ.$$

EXERCICES 4.2

1. Soit $\mathcal{P}$, le plan d'équation vectorielle

$$(x, y, z) = (4, -2, 3) + k(-7, 7, -4) + m(-3, 4, -4), \quad k, m \in \mathbb{R}.$$

Décrivez et illustrez (sans les axes de coordonnées) chacun des sous-ensembles du plan correspondant à chacune des données suivantes.

a) $k = 0$ et $m = 1$

c) $m = 0$ et $-1 \leq k \leq 1$

b) $k = 1$ et $m \in \mathbb{R}$

d) $0 \leq m \leq 1$ et $0 \leq k \leq 2$

2. Soit $\mathcal{P}$, le plan d'équations paramétriques

$$x = -3 + 6k + 3m,$$

$$y = -5 + 5k + 10m,$$

$$z = 2 - 2k + 2m,$$

où $k, m \in \mathbb{R}$.

- a) Donnez deux points distincts sur $\mathcal{P}$.
 b) Donnez trois vecteurs non parallèles entre eux, mais tous parallèles au plan $\mathcal{P}$.
 c) Trouvez un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ et donnez une équation normale de $\mathcal{P}$.
 d) Le point $A(-1, 1, 3)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$?
 e) Le vecteur $\vec{v} = (1, 1, -1)$ est-il parallèle au plan $\mathcal{P}$?
 f) Trouvez les points d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les axes de coordonnées, et donnez ensuite une représentation graphique de $\mathcal{P}$ dans un repère orthonormé, sous la forme (partielle) d'un triangle plein.
3. Donnez une équation normale du plan $\mathcal{P}$ passant par les points $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 1, 1)$ et $C(3, -2, -1)$.
4. Soit $\mathcal{P}$, le plan d'équation normale $2x - 3y + z = 5$.
 a) Trouvez un vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathcal{P}$.
 b) Trouvez deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ linéairement indépendants, mais tous deux parallèles à $\mathcal{P}$.
5. Donnez une équation normale du plan $\mathcal{P}$ contenant les droites sécantes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de $\mathbb{R}^3$ définies par
- $$\mathcal{D}_1: x = 1, y = 2 \qquad \mathcal{D}_2: y = 2, z = 3,$$
- et illustrez ce plan dans un repère orthonormé.

6. a) Si un plan $\mathcal{P}$ coupe les trois axes de coordonnées en trois points distincts, montrez que l'équation normale de $\mathcal{P}$ peut alors prendre la forme

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

appelée équation réduite de $\mathcal{P}$, et donnez l'interprétation graphique des nombres a , b et c .

- b) Trouvez les composantes d'un vecteur normal à ce plan en fonction des nombres a , b et c .
 c) Comment définiriez-vous l'équation réduite d'une droite dans $\mathbb{R}^2$?
 d) Quelle est l'équation réduite du plan passant par les points $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ et $(0, 0, 3)$?
 e) Quelle serait l'équation réduite du plan d'équation normale $3x - 2y + z/3 = -2$? Déduisez de cette équation réduite les intersections du plan avec les axes de coordonnées.

7. Donnez une équation normale du plan $\mathcal{P}$ qui contient la droite $\mathcal{D}_1$ d'équations symétriques

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z}{1/2}$$

et qui est parallèle à la droite $\mathcal{D}_2$ d'équations paramétriques

$$x = 3 - t, y = 1 + 2t, z = -1, t \in \mathbb{R}.$$

8. Dans chacun des cas suivants, déterminez la position relative de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$.

a) $\mathcal{D}: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = z+1$

$\mathcal{P}: 3x + 6y = -31$

b) $\mathcal{D}: x = 1 - t, y = 2 + 5t, z = 8t, t \in \mathbb{R}$

$\mathcal{P}: 2x + 2y - z = 6$

c) $\mathcal{D}: x = 4 - 3t, y = 3 - 2t, z = t, t \in \mathbb{R}$

$\mathcal{P}: 3x - y + 2z = -7$

9. Déterminez la valeur de k dans l'équation du plan $\mathcal{P}: 2x + ky - 5z = -3$, pour que la droite $\mathcal{D}$ d'équations symétriques

$$\frac{x-3/2}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z}{-5}$$

a) soit parallèle à $\mathcal{P}$;

b) soit perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

10. Soit $\mathcal{P}$, le plan d'équation $x - y + 2z = 6$, et $\mathcal{D}$, la droite d'équations paramétriques

$$x = 2t, y = -2 - 3t, z = 4 + t, t \in \mathbb{R}.$$

a) Déterminez l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$.

b) Calculez l'angle que fait la droite $\mathcal{D}$ avec le plan $\mathcal{P}$.

11. Dans chacun des cas suivants, déterminez la position relative des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. (Donnez une équation vectorielle de la droite d'intersection, s'il y a lieu.)

a) $\mathcal{P}_1: 2x - 4y - 2z = -1$

$\mathcal{P}_2: x - 2y - z = -4$

b) $\mathcal{P}_1: 4x - 6y + 13z = -8$

$\mathcal{P}_2: -4x - 6y + 5z = -16$

12. Un plan $\mathcal{P}$ contient le point $A(4, -2, 0)$ et est perpendiculaire aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ définis par

$$\mathcal{P}_1: x + y - z = 0 \text{ et } \mathcal{P}_2: 2x - 4y + z = 5.$$

Donnez une équation normale de ce plan $\mathcal{P}$.

13. Un plan $\mathcal{P}$ contient l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ définis par

$$\mathcal{P}_1: 2x + y = 4 \text{ et } \mathcal{P}_2: y + 2z = 0.$$

Donnez une équation normale de ce plan $\mathcal{P}$

a) s'il contient le point $A(2, -1, 1)$;

b) s'il est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}_3$ d'équation $3x + 2y - 3z = 6$.

14. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ définis par

$$\mathcal{P}_1: ax + by + cz = d \text{ et } \mathcal{P}_2: Ax + By + Cz = D$$

se rencontrent suivant une droite $\mathcal{D}$. Montrez que tout plan $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{D}$ est d'équation

$$\lambda(ax + by + cz) + \mu(Ax + By + Cz) = \lambda d + \mu D,$$

où λ et μ sont des scalaires tous deux non nuls. (*Indice*: Les vecteurs normaux de trois plans qui se rencontrent en une droite sont coplanaires.)

15. Calculez la valeur de l'angle dièdre entre les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ définis par

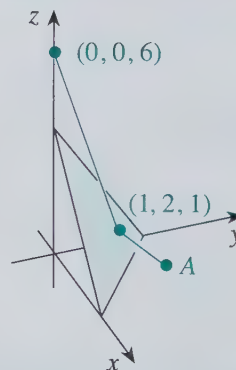
$$\mathcal{P}_1: x + 3y + z = 18 \text{ et } \mathcal{P}_2: 2x + y - 3z = 6.$$

16. Quelle est la distance du point origine $O(0, 0, 0)$ au plan défini par $x + y + z = 1$?

17. Quelle est la distance entre les plans parallèles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ définis par

$$\mathcal{P}_1: x + 2y + 3z = 5 \text{ et } \mathcal{P}_2: x + 2y + 3z = -1?$$

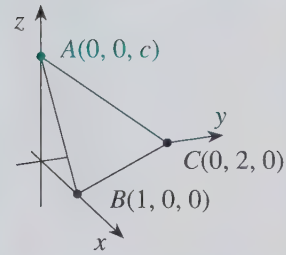
18. Un miroir triangulaire plan est appuyé contre les trois axes de coordonnées aux points de coordonnées $(4, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ et $(0, 0, 4)$. Un rayon lumineux issu du point de coordonnées $(0, 0, 6)$ vient frapper ce miroir au point de coordonnées $(1, 2, 1)$, subit une réflexion et va finalement frapper le plan d'équation $z = 0$ en un point A , tel qu'il est illustré ci-contre. Quelles sont les coordonnées de A ?



19. Une sphère dont la surface intérieure est parfaitement polie et argentée est centrée à l'origine et a un rayon de 7 unités; du point $A(-2, 2, 3)$ à l'intérieur de la sphère, un rayon lumineux est dirigé vers le point $B(6, 3, 2)$ sur la sphère, et de là est réfléchi vers le point C sur la surface de la sphère. Quelles sont les coordonnées du point C ? (*Coup de pouce*: i) Localement, au point d'impact du rayon lumineux, on peut identifier la sphère au plan qui lui est tangent en ce point. ii) Le vecteur normal du plan tangent à une sphère de centre $O(0, 0, 0)$ au point $P(a, b, c)$ est $\vec{n} = (a, b, c)$.)
20. Donnez l'équation de la sphère de centre $C(0, 1, 3)$ tangente au plan $\mathcal{P}$ défini par
- $$\mathcal{P}: x - 2y + 3z = -3.$$

21. Calculez la valeur de l'angle dièdre θ entre deux faces d'un tétraèdre régulier; les vecteurs normaux à ces deux faces sont faciles à identifier si vous inscrivez le tétraèdre dans un cube comme l'illustre la figure de l'exercice 23 de la section Exercices 3.1.

22. Dans la figure ci-contre, quelle est la valeur de la cote c du point A pour laquelle l'angle dièdre entre le plan ABC et le plan d'équation $z = 0$ mesure 60° ?

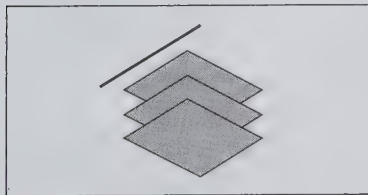


POUR ALLER PLUS LOIN

Dans le but d'aider ses étudiants à améliorer leur perception spatiale, le professeur Janos Baracs de la Faculté d'aménagement de l'Université de Montréal a conçu une série de questionnaires sur la géométrie dans l'espace. Avec son aimable autorisation⁶, nous reproduisons ici son questionnaire sur les droites et les plans, de même que les illustrations qui l'accompagnent. En répondant à ce questionnaire, vous pourrez vérifier votre compréhension du vocabulaire, des images et de la logique de la géométrie des droites et des plans dans l'espace. (Le corrigé de ce questionnaire se trouve dans le corrigé à la fin de l'ouvrage, après les réponses aux questions de la section *Exercices 4.2.*)

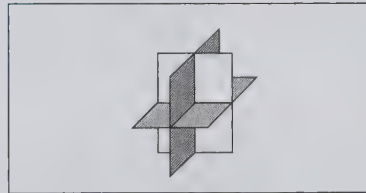
Questionnaire sur la perception spatiale

1. Des plans parallèles à une même droite sont parallèles entre eux.



- Toujours vrai ☐
 Généralement vrai ☐
 Toujours faux ☐
 Généralement faux ☐

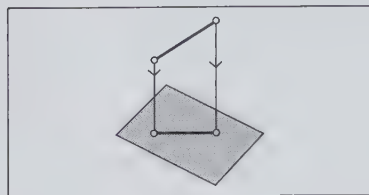
2. Trois plans divisent l'espace en huit régions.



- Toujours vrai ☐
 Généralement vrai ☐
 Toujours faux ☐
 Généralement faux ☐

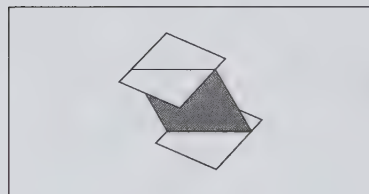
6. Ce questionnaire a également été publié dans le *Bulletin AMQ* de l'Association mathématique du Québec, en octobre 1987.

3. La longueur de la projection orthogonale d'un segment est inférieure à celle du segment lui-même.



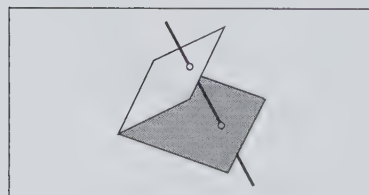
- Toujours vrai ☐
- Généralement vrai ☐
- Toujours faux ☐
- Généralement faux ☐

4. Le plan OPQ étant parallèle au plan RST , un plan UVZ sécant à ces deux plans distincts coupe ceux-ci selon deux droites parallèles.



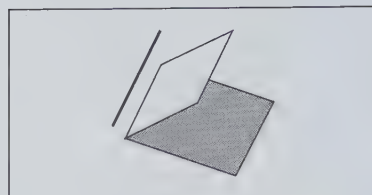
- Toujours vrai ☐
- Généralement vrai ☐
- Toujours faux ☐
- Généralement faux ☐

5. Deux plans sécants (non parallèles) étant donnés, il existe une droite perpendiculaire à ces deux plans.



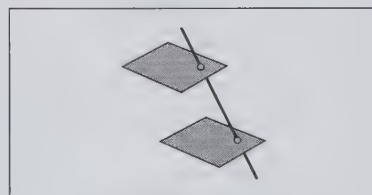
- Toujours vrai ☐
- Généralement vrai ☐
- Toujours faux ☐
- Généralement faux ☐

6. Deux plans sécants étant donnés, il existe une droite parallèle à ces deux plans.



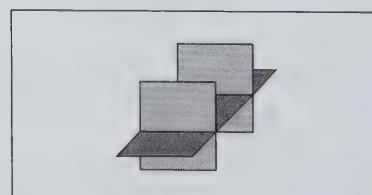
- Toujours vrai ☐
- Généralement vrai ☐
- Toujours faux ☐
- Généralement faux ☐

7. Deux plans distincts perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre eux.



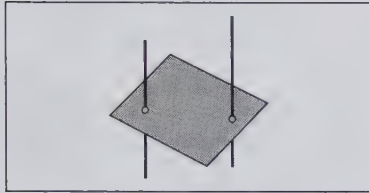
- Toujours vrai ☐
- Généralement vrai ☐
- Toujours faux ☐
- Généralement faux ☐

8. Deux plans distincts perpendiculaires à un même plan sont parallèles entre eux.



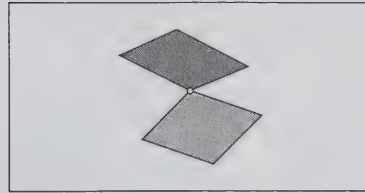
- Toujours vrai ☐
- Généralement vrai ☐
- Toujours faux ☐
- Généralement faux ☐

9. Deux droites distinctes perpendiculaires à un même plan sont parallèles entre elles.



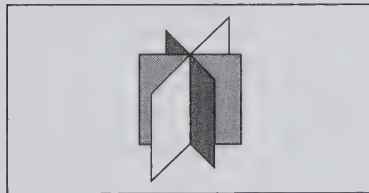
Toujours vrai ☐
 Généralement vrai ☐
 Toujours faux ☐
 Généralement faux ☐

12. L'intersection de deux plans est un point.



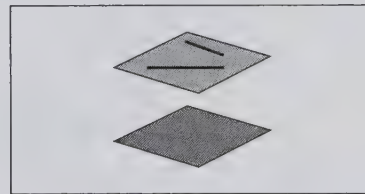
Toujours vrai ☐
 Généralement vrai ☐
 Toujours faux ☐
 Généralement faux ☐

10. L'intersection de trois plans est une droite.



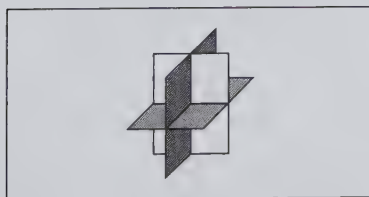
Toujours vrai ☐
 Généralement vrai ☐
 Toujours faux ☐
 Généralement faux ☐

13. Les plans OPQ et RST étant parallèles et distincts, toutes les droites de OPQ sont parallèles au plan RST .



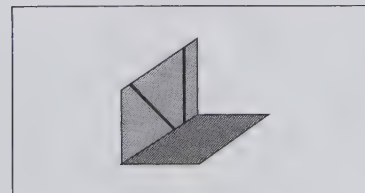
Toujours vrai ☐
 Généralement vrai ☐
 Toujours faux ☐
 Généralement faux ☐

11. L'intersection de trois plans est un point.



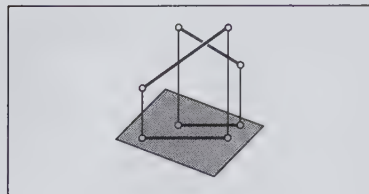
Toujours vrai ☐
 Généralement vrai ☐
 Toujours faux ☐
 Généralement faux ☐

14. Le plan OPQ étant perpendiculaire au plan RST , toutes les droites de OPQ sont perpendiculaires au plan RST .



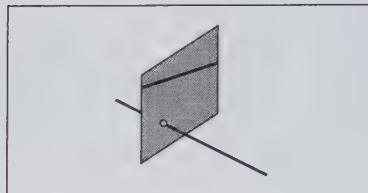
Toujours vrai ☐
 Généralement vrai ☐
 Toujours faux ☐
 Généralement faux ☐

15. Les projections de deux droites gauches sur un même plan sont deux droites parallèles.



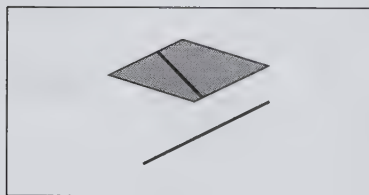
- Toujours vrai ☐
 Généralement vrai ☐
 Toujours faux ☐
 Généralement faux ☐

17. Les droites AB et CD étant gauches, il existe un plan qui passe par la droite AB et qui est perpendiculaire à la droite CD .



- Toujours vrai ☐
 Généralement vrai ☐
 Toujours faux ☐
 Généralement faux ☐

16. Les droites AB et CD étant gauches, il existe un plan qui passe par la droite AB et qui est parallèle à la droite CD .



- Toujours vrai ☐
 Généralement vrai ☐
 Toujours faux ☐
 Généralement faux ☐

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES ET LES MATRICES

LES POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES DANS $\mathbb{R}^2$ OU DE TROIS PLANS DANS $\mathbb{R}^3$

POUR ALLER PLUS LOIN

Les équations algébriques représentant des droites dans $\mathbb{R}^2$ (par exemple, $2x - 3y = 2$) ou des plans dans $\mathbb{R}^3$ (par exemple, $2x - 3y + 5z = 1$) sont similaires. On les appelle **équations linéaires** en x , y et z . C'est en résolvant des systèmes d'équations linéaires qu'on arrive, entre autres, à trouver l'intersection de plusieurs droites ou l'intersection de plusieurs plans. Dans d'autres domaines que la géométrie, on a aussi à résoudre des systèmes contenant un nombre d'équations et d'inconnues assez important, notamment quand il s'agit de planification, de prévision et d'optimisation. Pour résoudre de tels systèmes, il y a plusieurs méthodes parfaitement applicables dans les cas où le nombre d'équations et d'inconnues n'est pas exagéré. Si le système est trop complexe, il est cependant préférable d'avoir recours à de bons logiciels, compte tenu de leur rapidité et de leur disponibilité.

Dans ce chapitre, l'algèbre reprend le dessus sur la géométrie. Nous y exposerons la méthode de Gauss et Jordan¹, facilement programmable et universellement employée, pour résoudre les systèmes d'équations linéaires. D'abord introduite pour condenser l'écriture, la notation matricielle est vite devenue essentielle à une bonne compréhension de la théorie des systèmes d'équations linéaires. Comme les matrices ont plusieurs autres applications, il en sera aussi question dans les deux chapitres suivants : on les étudiera pour elles-mêmes au chapitre 6 et en lien avec les transformations linéaires au chapitre 7.

LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES ET LES MATRICES

Dans cette section, nous verrons tout d'abord ce que sont une équation linéaire et un système d'équations linéaires. Nous étudierons ensuite la méthode d'élimination (sur laquelle se fonde la méthode de Gauss-Jordan) pour la résolution de tels systèmes. Cela nous conduira à deux notions essentielles à la description de l'algorithme de résolution de Gauss-Jordan : le concept de matrice *Échelonnée-Réduite-Ligne (ERL)* et le concept d'équivalence-ligne entre deux matrices. La méthode de Gauss-Jordan est plus générale que la règle de Cramer vue au chapitre 3, cette dernière ne s'appliquant qu'aux systèmes d'équations linéaires où le nombre d'inconnues égale le nombre d'équations, et où la solution du système existe et est unique.

1. La méthode de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a été généralisée par Wilhelm Jordan (1842-1899).

5.1.1 DÉFINITIONS

Équation linéaire

On appelle **équation linéaire** en $x_1, x_2, \dots, x_n$ une équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c,$$

où $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des variables, où $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des constantes (les **coefficients** des variables) et où c est aussi une constante. Lorsque $c = 0$, c'est-à-dire lorsque l'équation s'écrit

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0.$$

l'équation est dite **homogène**.

EXEMPLE 1

$2x - \sqrt{2}y = 3$ est une équation linéaire en x et y ; le coefficient de x est 2 et le coefficient de y est $-\sqrt{2}$.

EXEMPLE 2

$2x - \sqrt{2}y = 3$ est une équation non linéaire en x et y , car y est au-dessous du radical.

EXEMPLE 3

$3x_1 + x_2 - 6 = \frac{x_3 - 4x_4 + 2}{5}$ est une équation linéaire en x_1, x_2, x_3, x_4 , car elle peut s'écrire $15x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 32$.

EXEMPLE 4

$3x - 2y = z$ est une équation linéaire homogène, car elle peut s'écrire $3x - 2y - z = 0$.

Système d'équations linéaires

Un système d'équations linéaires est la donnée simultanée de plusieurs équations linéaires en $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & c_m. \end{array}$$

L'ensemble solution d'un système d'équations linéaires en $x_1, x_2, \dots, x_n$ est l'ensemble de tous les n -uplets de valeurs réelles que l'on peut attribuer au n -uplet de variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ de manière que toutes les équations du système deviennent des égalités numériques vraies.

Un système d'équations linéaires dont l'ensemble solution est vide est dit **incompatible**, ou **contradictoire**, ou **incohérent**.

EXEMPLE 1

Le système

$$\begin{array}{rcl} x & - & 2y = 5 \\ x & + & 2y = 1 \end{array}$$

n'a qu'une seule solution²: $(x, y) = (3, -1)$.

2. Dans ce cas, on peut résoudre le système par la règle de Cramer.

EXEMPLE 2

L'ensemble solution du système

$$\begin{aligned}x - 2y &= 5 \\ -2x + 4y &= -10\end{aligned}$$

est l'ensemble³ de tous les couples (x, y) définis par

$$(x, y) = (5, 0) + t(2, 1), \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

EXEMPLE 3

L'ensemble solution du système

$$\begin{aligned}x - 2y &= 5 \\ -2x + 4y &= 0\end{aligned}$$

est vide : c'est un système incohérent⁴.**5.1.2 LA MÉTHODE D'ÉLIMINATION**

La méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires de Gauss-Jordan se fonde sur la méthode d'élimination : en transformant les équations d'un système à l'aide d'opérations sur les équations qui ne changent pas l'ensemble solution de ce système (on peut, par exemple, ajouter aux deux membres d'une équation les deux membres correspondants d'une autre équation), on essaie d'éliminer le plus grand nombre possible de variables dans chaque équation. Pour éliminer une variable particulière dans une équation, il faut faire en sorte que le coefficient de cette variable dans cette équation devienne nul ; par exemple, pour résoudre le système

$$\begin{aligned}x + 2y &= -1 \\ x + y &= 2\end{aligned}$$

à l'aide de la méthode d'élimination, on doit éliminer x dans la seconde équation et ensuite y dans la première.

On soustrait membre à membre la première équation de la seconde.

$$\begin{array}{|l} x + 2y = -1 \\ x + y = 2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|l} x + 2y = -1 \\ 0x - y = 3 \end{array}$$

On multiplie les deux membres de la seconde équation par -1 .

$$\begin{array}{|l} x + 2y = -1 \\ 0x - y = 3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|l} x + 2y = -1 \\ 0x + y = -3 \end{array}$$

On soustrait deux fois la seconde équation de la première.

$$\begin{array}{|l} x + 2y = -1 \\ 0x + y = -3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|l} x + 0y = 5 \\ 0x + y = -3 \end{array}$$

3. Ici, les deux équations définissent une même droite dans $\mathbb{R}^2$.

4. Ici, le système est incohérent, car un point (x, y) ne peut pas appartenir simultanément à deux droites parallèles et distinctes dans $\mathbb{R}^2$.

Le dernier système obtenu donne la solution (unique dans ce cas-ci) :

$$x = 5 \text{ et } y = -3.$$

Dans cette méthode, on remplace à chaque étape un système par un autre système équivalent (qui a le même ensemble solution) plus simple, jusqu'à ce qu'on obtienne un système qui permette de lire directement les solutions. Il est toutefois essentiel de n'effectuer sur les équations que des opérations qui donnent un système équivalent. De telles opérations sont appelées **opérations élémentaires**.



Opérations élémentaires sur les équations

Dans un système d'équations linéaires, l'une ou l'autre des opérations suivantes sont des opérations élémentaires sur les équations :

- 1) permuter deux équations ;
- 2) multiplier les deux membres d'une équation par un même scalaire non nul ;
- 3) ajouter aux deux membres d'une équation un multiple des deux membres correspondants d'une autre équation.

Il est facile de s'assurer que ces trois opérations préservent l'ensemble solution d'un système d'équations (même non linéaires).

Les opérations élémentaires n'agissent que sur les coefficients et les constantes dans les équations d'un système : par exemple, si l'on permute deux équations, les variables et les signes d'égalité ne sont pas affectés. Et c'est là qu'entre en jeu le concept de **matrice**⁵. On peut en effet gagner du temps et économiser de l'encre et du papier si, à chaque étape de la résolution d'un système par la méthode d'élimination, on écrit les coefficients et les constantes sous la forme d'un tableau ordonné et condensé.

5.1.3 LA MATRICE DES COEFFICIENTS ET LA MATRICE AUGMENTÉE D'UN SYSTÈME

Étant donné un système d'équations linéaires

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & c_m, \end{array}$$

le tableau ordonné

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right)$$

5. Les matrices sont apparues au milieu du XIX^e siècle sous la plume des mathématiciens Arthur Cayley (1821-1895) et James J. Sylvester (1814-1897).

est appelé **matrice des coefficients du système** ; c'est une matrice de format $m \times n$, m désignant le nombre de lignes et n , le nombre de colonnes. Le tableau

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_n \end{array} \right)$$

est appelé **matrice augmentée du système** ; c'est une matrice de format $m \times (n + 1)$. Il comprend la matrice des coefficients, une ligne de démarcation en pointillé qui représente les signes d'égalité et les constantes dans la dernière colonne.

EXEMPLE

Pour le système

$$\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ x + y &= 2, \end{aligned}$$

la matrice des coefficients, de format 2×2 , est

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right)$$

et la matrice augmentée, de format 2×3 , est

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Les opérations élémentaires sur les équations d'un système correspondent à des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée de ce système.

Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice

On appelle **opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice** l'une ou l'autre des opérations suivantes :

- 1) permuter deux lignes ;
- 2) multiplier une ligne par un scalaire non nul ;
- 3) ajouter un multiple d'une autre ligne à une ligne.

Voici comment coder les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice (A et B désignent des matrices de même format).

$A \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} B$ la matrice B s'obtient de A en permutant les lignes i et j de la matrice A ;

$A \xrightarrow{L_i \leftarrow kL_i} B$ la matrice B s'obtient de A en multipliant la i -ième ligne de A par le scalaire k ;

$A \xrightarrow{L_i \leftarrow (L_i + kL_j)} B$ la matrice B s'obtient de A en ajoutant k fois la j -ième ligne de A à la i -ième ligne de A .

EXEMPLE

Reprenons l'exemple du système

$$x + 2y = -1$$

$$x + y = 2$$

que nous avons résolu à la sous-section 5.1.2 à l'aide de la méthode d'élimination en utilisant cette fois la notation matricielle et le nouveau code des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) & \xrightarrow{L_2 \leftarrow (L_2 - L_1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_2 \leftarrow (-1)L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_1 \leftarrow (L_1 - 2L_2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

En décodant la dernière matrice augmentée, c'est-à-dire en écrivant les variables et les signes d'égalité aux endroits appropriés, on obtient la solution

$$x = 5 \text{ et } y = -3.$$

La matrice des coefficients qui se trouve dans la dernière matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

de l'exemple précédent est réduite à une forme particulière qui facilite au maximum la lecture des solutions du système : c'est une matrice *ERL*.

5.1.4 LES MATRICES ERL**Matrice ERL**

Une matrice est appelée **matrice ERL**, c'est-à-dire *Échelonnée-Réduite-Ligne*, si elle satisfait aux quatre conditions suivantes.

- 1) Sur chaque ligne non nulle, le premier élément non nul est 1.
- 2) Dans la colonne du premier élément non nul d'une ligne, il n'y a, hormis cet élément, que des 0.
- 3) Le premier élément non nul d'une ligne est toujours placé à droite du premier élément non nul de la ligne précédente.
- 4) Toutes les lignes nulles, s'il y en a, sont placées au-dessous des lignes non nulles.

EXEMPLES

1. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont *ERL*.

2. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas *ERL*.

3. Voici la liste complète de toutes les matrices *ERL* de format 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } k \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Colonne pivot

Dans une matrice *ERL*, la colonne du premier élément non nul d'une ligne est appelée **colonne pivot** de cette matrice.

EXEMPLES

1. Dans la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, les deux colonnes sont des colonnes pivots.
2. Dans la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, seule la première colonne est une colonne pivot.
3. Dans la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, seule la seconde colonne est une colonne pivot.
4. Dans la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, il n'y a pas de colonne pivot.

5.1.5 LES MATRICES *L*-ÉQUIVALENTES

Matrices *l*-équivalentes

Soit A et B , deux matrices de même format. La matrice A est dite ligne-équivalente ou *l*-équivalente à B si B peut s'obtenir de A par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes de A . Pour dire que A est *l*-équivalente à B , on écrit $A \sim B$.

Remarques

1. $A \sim A$: en effet, A s'obtient de A par l'opération élémentaire qui consiste à multiplier la première ligne de A par la constante non nulle 1.
2. $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$: les opérations élémentaires sont réversibles.
3. Si $A \sim B$ et $B \sim C$, alors $A \sim C$: la juxtaposition de deux suites finies d'opérations élémentaires est elle-même une suite d'opérations élémentaires.
4. Si A et B sont deux matrices *l*-équivalentes, on peut alors les considérer comme les matrices de coefficients de deux systèmes homogènes équivalents (ayant le même ensemble solution). On peut aussi les considérer comme les matrices augmentées de deux systèmes équivalents non homogènes (si la dernière colonne de chacune est non nulle).

EXEMPLE 1

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow (L_2 - L_1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 2

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas *l*-équivalente à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: aucune séquence d'opérations élémentaires sur les lignes ne peut transformer une colonne non nulle en une colonne nulle (et vice versa). De plus, la matrice augmentée $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ correspond au système homogène $\begin{matrix} 1x + 0y = 0 \\ 0x + 1y = 0 \end{matrix}$ dont l'unique solution est évidemment $x = 0$ et $y = 0$, tandis que la matrice augmentée $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ correspond au système homogène $\begin{matrix} 0x + 1y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{matrix}$ qui a une infinité de solutions: x est arbitraire et $y = 0$; ces deux systèmes ne sont pas équivalents.

Voici un théorème sur l'équivalence-ligne qui sera utile par la suite.

Si A et B sont deux matrices de même format et l -équivalentes, alors les vecteurs lignes de B sont des combinaisons linéaires des vecteurs lignes de A , et réciproquement, les vecteurs lignes de A sont des combinaisons linéaires des vecteurs lignes de B .

Preuve

Supposons $A \sim B$. Alors B peut être obtenue de A par une suite d'opérations élémentaires et inversement : $A = A_0 \sim A_1 \sim A_2 \sim \dots \sim A_n = B$, où chaque l -équivalence $A_i \sim A_{i+1}$ résulte d'une seule opération élémentaire. Si l'on observe bien chacun des trois types d'opérations élémentaires, on s'aperçoit que, quel que soit le type d'opération particulier utilisé pour passer de A_i à A_{i+1} , chacune des lignes de A_{i+1} est une combinaison linéaire d'une ou de deux lignes de A_i . Réciproquement, chacune des lignes de A_i est une combinaison linéaire d'une ou de plusieurs lignes de A_{i+1} . Donc, chacune des lignes de la matrice $A_n = B$ est une combinaison linéaire de lignes de A_{n-1} , lesquelles sont des combinaisons linéaires des lignes de A_{n-2} , lesquelles..., et ainsi de suite. Autrement dit, chaque ligne de B est une combinaison linéaire de combinaisons linéaires de combinaisons linéaires... de combinaisons linéaires de lignes de A . Finalement, chacune des lignes de B est une combinaison linéaire de lignes de A . Et réciproquement, chaque ligne de A est une combinaison linéaire de lignes de B .

Rang d'une matrice A

Le rang d'une matrice A , noté $r(A)$, est le nombre maximal de vecteurs lignes linéairement indépendants dans A .

EXEMPLE 1

Le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ est 2 : les deux vecteurs lignes de A forment ici une famille libre.

EXEMPLE 2

Le rang de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ est 1 : les deux derniers vecteurs lignes sont des multiples du premier vecteur ligne (qui est non nul).

THÉORÈME 2

Soit A et B , deux matrices de même format $n \times m$, telles que A est l -équivalente à la matrice B . Alors $r(A) = r(B)$.

Preuve

Soit $\mathcal{L}_A$, l'espace vectoriel formé de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui sont des combinaisons linéaires des vecteurs lignes de A , et soit $\mathcal{L}_B$, l'espace vectoriel formé de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui sont des combinaisons linéaires des vecteurs lignes de B . Alors, on a $r(A) = \dim(\mathcal{L}_A)$ et $r(B) = \dim(\mathcal{L}_B)$. De plus, en vertu du théorème 1, tous les vecteurs lignes de A sont des combinaisons linéaires des vecteurs lignes de B , et tous les vecteurs lignes de B sont des combinaisons linéaires des vecteurs lignes de A . Il s'ensuit que $\mathcal{L}_A \subseteq \mathcal{L}_B$ et que $\mathcal{L}_A \supseteq \mathcal{L}_B$, et ainsi $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_B$, ce qui permet de conclure que $r(A) = r(B)$.

On utilisera le théorème 2 pour faciliter le calcul du rang dans le cas d'une matrice A pour laquelle ce calcul n'est pas évident : on réduit A à une matrice l -équivalente beaucoup plus simple pour le calcul du rang, grâce à un algorithme que nous décrivons à la sous-section suivante.

5.1.6 L'ALGORITHME DE RÉDUCTION DE GAUSS-JORDAN

Comme nous le verrons à la sous-section 5.1.7, la méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires de Gauss-Jordan consiste à effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée du système jusqu'à ce que cette matrice devienne *ERL*; la lecture des solutions devient alors automatique. Mais voyons tout d'abord comment la procédure appelée **l'algorithme de réduction de Gauss-Jordan** permet de réduire une matrice A donnée à une matrice *ERL* l -équivalente. Il existe plusieurs variantes à cette procédure, selon que l'on veut augmenter la vitesse de calcul manuel ou réduire le risque d'erreurs attribuables à l'arrondissement des nombres dans un calcul automatisé⁶. Voici l'algorithme dans sa version la plus simple.

Soit A , une matrice de format $m \times n$. Si A est la matrice nulle (il n'y a que des 0), alors A est déjà *ERL*. Si A n'est pas la matrice nulle, on procède alors en quatre étapes.

1^{re} étape

On repère la première ligne non nulle.

2^e étape

Soit a_{lk} , le premier élément non nul de cette ligne; on transforme la colonne de a_{lk} en colonne pivot grâce à la séquence d'opérations élémentaires suivante :

$$i) \quad L_l \leftarrow \left(\frac{1}{a_{lk}} L_l \right) : a_{lk} \text{ est remplacé par } 1 ;$$

ii) à toutes les lignes i où $a_{ik} \neq 0$, sauf à la ligne l , on fait $L_i \leftarrow (L_i - a_{ik} L_l)$: tous les éléments de la k -ième colonne seront remplacés par 0, sauf le nombre 1 qui est à la l -ième ligne.

6. Dans *Algèbre linéaire : une approche matricielle* de P. Leroux (Modulo Éditeur, 1983), on trouve une variante de l'algorithme de Gauss-Jordan écrite en pseudo-code structuré (pour la programmation d'un ordinateur).

3^e étape

On va à la ligne non nulle suivante et on y reprend la deuxième étape; si on est déjà à la dernière ligne non nulle, on passe à la quatrième étape.

4^e étape

On ordonne les lignes de manière que :

- i) toutes les lignes nulles (s'il y en a) soient placées à la fin ;
- ii) le premier élément non nul de chaque ligne soit placé à droite du premier élément non nul de la ligne précédente.

Cette mise en ordre se fait par un nombre fini de permutations des lignes, c'est-à-dire par des opérations élémentaires du type $L_i \leftrightarrow L_j$.

Si deux personnes appliquent l'algorithme décrit ci-dessus à une même matrice arbitraire A , il est évident qu'elles obtiendront la même matrice ERL . Qu'arrive-t-il cependant si ces personnes n'appliquent pas la même variante de l'algorithme ? Se peut-il que deux matrices ERL de même format soient l -équivalentes et distinctes ? La réponse à cette question est donnée par le théorème 3 suivant.

Théorème 3

Deux matrices ERL de même format et l -équivalentes sont nécessairement identiques.

Ce théorème est relativement facile à vérifier sur de petits formats ; par exemple, on peut dresser la liste de toutes les matrices ERL de format 2×3 et constater qu'aucune de ces matrices n'est l -équivalente à une autre matrice ERL de même format. La preuve plus générale est cependant plus difficile à faire et nous l'avons reportée à la sous-section 5.3.2 pour alléger la présentation.

Corollaire

Soit C et D , deux matrices de même format, telles que la matrice C est l -équivalente à la matrice ERL C' , et D est l -équivalente à la matrice ERL D' . Alors $C \sim D \Leftrightarrow C' = D'$.

Preuve

Les opérations élémentaires étant réversibles, on a assurément $C \sim D \Leftrightarrow C' \sim D'$. De plus, le théorème 3 appliqué aux matrices ERL C' et D' permet de remplacer dans ce cas l'équivalence-ligne $C' \sim D'$ par l'égalité $C' = D'$.

Forme ERL d'une matrice A

L'unique matrice ERL l -équivalente à une matrice A donnée est appelée la **forme ERL de A** .

EXEMPLE

On veut savoir si les matrices définies par $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ sont l -équivalentes.

Pour le savoir, il suffit, selon le corollaire précédent, de vérifier si ces deux matrices ont la même forme ERL ; on doit donc réduire A et B .

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \left(\frac{1}{2}L_1\right)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow (L_3 + L_1)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \left(\frac{1}{3}L_2\right)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow \left(L_1 - \frac{1}{2}L_2\right) \\ L_3 \leftarrow \left(L_3 - \frac{3}{2}L_2\right)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \left| \right. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow (L_2 + 2L_1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow (L_3 - 3L_1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Les formes ERL de A et B étant différentes, nous concluons que A et B ne sont pas l -équivalentes; de plus, on peut vérifier ici que $r(A) = 2$, tandis que $r(B) = 1$. L'exemple précédent laisse présager que le rang d'une matrice est le même que celui de sa forme ERL et le même que celui de toute matrice de même format qui lui est l -équivalente. Le théorème 4 présenté plus loin confirmera ce fait.

Matrice EL

Une matrice est appelée **matrice EL** , c'est-à-dire *Échelonnée-Ligne*, si elle satisfait aux deux conditions suivantes.

- 1) Le premier élément non nul d'une ligne est toujours placé à droite du premier élément non nul de la ligne précédente.
- 2) Toutes les lignes nulles (s'il y en a) sont placées au-dessous des lignes non nulles.

EXEMPLE

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est EL mais pas ERL . Par ailleurs, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est EL et ERL .

Remarques

1. Toutes les matrices ERL sont EL , mais l'inverse n'est pas vrai.
2. Il n'y a qu'une seule matrice ERL l -équivalente à une matrice donnée, mais il y a généralement une infinité de matrices EL distinctes, l -équivalentes à une matrice donnée:

par exemple, toutes les matrices $EL \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$, sont à la fois distinctes et l -équivalentes entre elles.

3. Pour obtenir une matrice EL à partir d'une matrice quelconque A , on applique à A l'algorithme de réduction de la section 5.1.6 en modifiant la 2^e étape comme suit :

Soit a_{ik} , le premier élément non nul de cette ligne ; on transforme la colonne de a_{ik} en appliquant les opérations élémentaires suivantes :

à toutes les lignes i où $a_{ik} \neq 0$, pour $i > l$, on fait $L_i \leftarrow \left(L_i - \frac{a_{ik}}{a_{lk}} L_l \right)$: tous les éléments de la k -ième colonne, au-dessous de la l -ième ligne, seront remplacés par 0.

Soit A , une matrice quelconque, et B , une matrice EL de même format que A et l -équivalente à A . Alors le rang de A est égal au nombre de lignes non nulles de B .

Preuve

Puisque $A \sim B$, on a $r(A) = r(B)$ en vertu du théorème 2 de la sous-section 5.1.5. Il reste à vérifier que le rang de B coïncide avec le nombre de lignes non nulles de B . À cause de sa forme échelonnée, B a le même nombre de lignes non nulles que l'unique matrice ERL qui lui est l -équivalente (et par ricochet l -équivalente à A). Or, dans toute matrice ERL , les vecteurs lignes non nuls forment nécessairement une famille libre, car il n'y a qu'un seul élément non nul dans toute colonne pivot.

EXEMPLE

On veut savoir si les trois vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$ sont linéairement dépendants :

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 2, 2), \quad \vec{v}_2 = (-2, 4, 1, 3), \quad \vec{v}_3 = (8, 1, 5, -2).$$

On réduit d'abord la matrice dont les lignes sont formées par ces vecteurs en une matrice EL :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 8L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -11 & -18 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_3 \leftarrow 4L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -44 & -72 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -49 & -79 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il est visible dans ce cas que le rang de la dernière matrice est 3, et donc que les trois vecteurs donnés dans la matrice initiale l -équivalente forment une famille libre.

5.1.7 LA MÉTHODE DE RÉOLUTION DE GAUSS-JORDAN

La méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires de Gauss-Jordan consiste à appliquer l'algorithme de réduction à la matrice augmentée du système, tout en respectant les règles d'interprétation suivantes.

- Si, en cours de réduction, on obtient sur la matrice augmentée une ligne dans laquelle tous les éléments sont nuls sauf le dernier, alors le système n'a pas de solution et il est déclaré

contradictoire (ou incohérent, ou incompatible). En effet, une telle ligne correspond à l'équation

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = c, \text{ avec } c \neq 0,$$

qui n'a évidemment pas de solution; il n'est alors plus nécessaire de poursuivre la réduction. Dans ce cas, le rang de la matrice des coefficients est plus petit que celui de la matrice augmentée.

Si le rang de la matrice des coefficients coïncide avec celui de la matrice augmentée et avec le nombre de colonnes de la matrice des coefficients, alors le système a une seule solution, car alors la forme *ERL* de la matrice augmentée (sans les lignes nulles inutiles) correspondra au système

$$\begin{array}{ccccccc} 1x_1 & + & 0x_2 & + & \cdots & + & 0x_n & = & d_1 \\ 0x_1 & + & 1x_2 & + & \cdots & + & 0x_n & = & d_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & \cdots & + & 1x_n & = & d_n \end{array}$$

dont la solution (unique) est

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (d_1, d_2, \dots, d_n).$$

Si le rang de la matrice des coefficients coïncide avec celui de la matrice augmentée, mais est plus petit que le nombre de colonnes de la matrice des coefficients, alors le système a une infinité de solutions. Les solutions sont alors exprimées sous forme paramétrique.

EXEMPLE 1

Les équations $3x + y - 3z = 5$ et $2x + y - z = 4$ définissent deux plans dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Pour trouver l'intersection de ces deux plans, on doit résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{array}{rrcr} 3x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ 2x & + & y & - & z & = & 4. \end{array}$$

On applique alors la méthode de résolution de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right) & \xrightarrow{L_1 \leftarrow \left(\frac{1}{3}L_1\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & -1 & 5/3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_2 \leftarrow (L_2 - 2L_1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & -1 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & 2/3 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_2 \leftarrow (3L_2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & -1 & 5/3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_1 \leftarrow \left(L_1 - \frac{1}{3}L_2\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

En décodant la matrice *ERL*, on obtient le système

$$\begin{array}{rrcr} 1x & + & 0y & - & 2z & = & 1 \\ 0x & + & 1y & + & 3z & = & 2 \end{array}$$

qui a une infinité de solutions. Puis, en isolant les variables qui correspondent à des colonnes pivots (ici, ce sont x et y), on a

$$\begin{array}{l} x = 1 + 2z \\ y = 2 - 3z, \text{ où } z \text{ est arbitraire : } z = t, t \in \mathbb{R}. \end{array}$$

On peut récrire les solutions sous forme paramétrique :

$$\begin{aligned}x &= 1 + 2t \\y &= 2 - 3t \\z &= t, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ce sont là les équations paramétriques de la droite d'intersection des deux plans. Sous forme vectorielle, les solutions s'écrivent

$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + t(2, -3, 1), \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

EXEMPLE 2

Dans $\mathbb{R}^2$, l'équation $y = ax^2 + bx + c$ représente une **parabole** dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe des ordonnées. On veut trouver les valeurs des coefficients a , b et c pour lesquels cette parabole passe par les points $P_1(-1, 6)$, $P_2(1, 2)$ et $P_3(3, 22)$.

En substituant ces valeurs des coordonnées dans l'équation de la parabole pour chacun des trois points, on obtient un système de trois équations linéaires à trois inconnues (a , b et c).

$$\begin{aligned}a - b + c &= 6 \\a + b + c &= 2 \\9a + 3b + c &= 22\end{aligned}$$

On trouve alors les valeurs de a , b et c en résolvant ce système.

$$\begin{aligned}&\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 6 \\1 & 1 & 1 & 2 \\9 & 3 & 1 & 22\end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow (L_3 - 9L_1)]{L_2 \leftarrow (L_2 - L_1)} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 6 \\0 & 2 & 0 & -4 \\0 & 12 & -8 & -32\end{array}\right) \\&\xrightarrow{L_2 \leftarrow \left(\frac{1}{2}L_2\right)} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 6 \\0 & 1 & 0 & -2 \\0 & 12 & -8 & -32\end{array}\right) \\&\xrightarrow[L_3 \leftarrow (L_3 - 12L_2)]{L_1 \leftarrow (L_1 + L_2)} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 4 \\0 & 1 & 0 & -2 \\0 & 0 & -8 & -8\end{array}\right) \\&\xrightarrow{L_3 \leftarrow \left(-\frac{1}{8}L_3\right)} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 4 \\0 & 1 & 0 & -2 \\0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right) \\&\xrightarrow{L_1 \leftarrow (L_1 - L_3)} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 3 \\0 & 1 & 0 & -2 \\0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\end{aligned}$$

La solution, unique dans ce cas-ci, est $(a, b, c) = (3, -2, 1)$. La parabole s'écrit donc

$$y = 3x^2 - 2x + 1.$$

EXEMPLE 3

Carl-Friedrich a un devoir supplémentaire. Il doit trouver trois nombres qui satisfont aux conditions suivantes :

- la somme des trois nombres est 1000;
- la somme des deux premiers moins le troisième est 200;
- la somme des deux derniers moins le premier est 300;
- la somme du premier et du dernier moins le deuxième est 400.

Carl-Friedrich griffonne ceci sur un bout de papier :

$$x + y + z = 1000$$

$$x + y - z = 200$$

$$-x + y + z = 300$$

$$x - y + z = 400$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \leftarrow (L_2 - L_1) \\ L_3 \leftarrow (L_3 + L_1) \\ L_4 \leftarrow (L_4 - L_1) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 13 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow (L_3 + L_2 + L_4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

En observant la troisième ligne de cette dernière matrice, Carl-Friedrich comprend que son professeur s'est moqué de lui.

EXERCICES 5.1

1. Soit A , une matrice qui a au moins quatre lignes. Parmi les opérations suivantes sur A , lesquelles sont élémentaires ou équivalentes à une séquence d'opérations élémentaires ?

a) $L_2 \leftarrow (3L_2 + 2L_4)$

c) $L_3 \leftarrow \left(\frac{L_1 + L_2 + L_3}{3} \right)$

b) $L_3 \leftarrow (L_1 - L_2)$

d) $L_4 \leftarrow (3L_1)$

2. Dans la classe de Carl-Friedrich, le professeur donne l'exemple d'un système de trois équations linéaires simultanées à résoudre.

(i) $x + y = 4$

(ii) $x - y = -2$

(iii) $x + 2y = 7$

Il écrit au tableau

(i) - (ii): $0x + 2y = 6$

(ii) - (iii): $0x - 3y = -9$

(iii) - (i): $0x + y = 3$

et il dit à ses élèves: « Vous voyez, y vaut 3 et selon les trois dernières équations, x est arbitraire ; il y a donc une infinité de solutions. »

Pendant que les élèves notent tout cela dans leur cahier, Carl-Friedrich proteste: « Mais Monsieur, si vous remplacez y par 3 dans l'équation (i), x égale forcément 1. La valeur de la variable x n'est donc pas arbitraire. » Heureusement, la cloche de la récréation sonne, et le professeur en profitera pour trouver son erreur. Venez-lui en aide.

3. Dressez la liste complète de toutes les matrices *ERL* de chacun des formats suivants. (Utilisez un ou plusieurs paramètres distincts, lorsque c'est nécessaire.)

a) 2×3

b) 3×2

c) 3×3

4. Réduisez les matrices suivantes à leur forme *ERL* et donnez leur rang.

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

d)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \text{ où } abc \neq 0.$$

5. Dans chacun des cas suivants, voyez si les deux matrices données sont *l*-équivalentes.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Déterminez si les vecteurs suivants sont générateurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 = (1, 2, -1), \vec{v}_2 = (8, -5, -5), \vec{v}_3 = (-2, 3, 1), \vec{v}_4 = (5, 3, -4).$$

Suggestion: Réduisez la matrice *A* de format 4×3 dont les vecteurs lignes sont $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ en une matrice échelonnée *l*-équivalente, et obtenez ainsi le rang de *A*.

7. Déterminez toutes les valeurs de *k* pour lesquelles

a) le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & k & 18 \end{pmatrix}$ est 1;

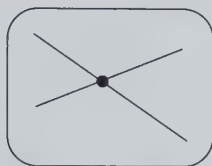
b) le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est:

i) 1,

ii) 2,

iii) 3.

8. Dans chacun des six systèmes d'équations linéaires suivants, les équations représentent des droites dans $\mathbb{R}^2$. Résolvez ces systèmes à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan et attribuez à chacun de ces systèmes l'une des six icônes illustrées ci-dessous.



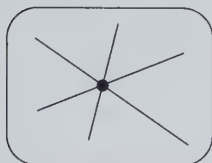
Deux droites distinctes sécantes.



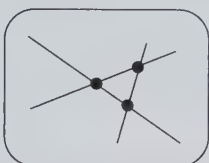
Deux droites distinctes parallèles.



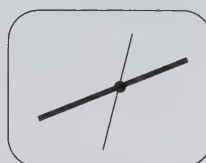
Deux droites confondues.



Trois droites distinctes sécantes 3 à 3.



Trois droites sécantes 2 à 2 mais non 3 à 3.



Deux droites confondues, sécantes à une troisième.

$$\begin{aligned} a) \quad 3x - 2y &= -2 \\ x + 3y &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad 3x - 2y &= -2 \\ -6x + 4y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \quad 3x - 2y &= -2 \\ x + 3y &= -8 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad 3x - 2y &= -2 \\ -6x + 4y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad 3x - 2y &= -2 \\ x + 3y &= -8 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f) \quad 3x - 2y &= -2 \\ x + 3y &= -8 \\ -6x + 4y &= 4 \end{aligned}$$

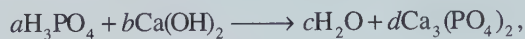
9. Trouvez toutes les solutions du système d'équations linéaires suivant.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

10. Appliquez la méthode de Gauss-Jordan pour trouver les solutions du système suivant. Donnez votre réponse sous forme paramétrique.

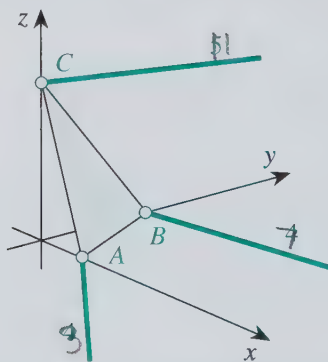
$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0 \\ x + 4y + 2z &= -1 \\ -x + 14y &= -3 \end{aligned}$$

11. En chimie, il arrive parfois que l'on doive équilibrer des réactions entre plusieurs produits chimiques. Par exemple, pour équilibrer la réaction



il faut trouver les plus petits nombres entiers positifs a , b , c et d pour lesquels les nombres d'atomes de chaque élément sont les mêmes avant et après la réaction. Pour chaque élément H, P, O et Ca, écrivez les équations d'équilibre et appliquez ensuite la méthode de Gauss-Jordan au système d'équations obtenu pour trouver toutes les valeurs possibles de a , b , c et d . Choisissez ensuite la solution appropriée.

12. Trois tiges sont ancrées aux points $A(5, 0, 0)$, $B(0, 5, 0)$ et $C(0, 0, 7)$ comme l'illustre la figure ci-dessous. La tige en A mesure 3 unités de longueur, celle en B , 7 unités de longueur, et celle en C , 11 unités de longueur. Les extrémités libres de ces tiges doivent se rejoindre dans l'espace en un point $P(x, y, z)$. Quelles sont les coordonnées de ce point ? (Il y a deux solutions, symétriques l'une de l'autre relativement au plan ABC .)



Suggestion : Il faut trouver l'intersection de trois sphères de centres A , B et C , et de rayons respectifs 3, 7 et 11. À partir des équations (non linéaires) de ces trois sphères, on peut obtenir (par l'élimination des termes quadratiques dans les deux premières équations) deux équations linéaires dont on substitue la solution (paramétrique) dans l'équation de l'une des sphères. On peut aussi remplacer, dans chacune des trois équations, la somme $x^2 + y^2 + z^2$ par une nouvelle variable t : $t = x^2 + y^2 + z^2$; ensuite, on exprime x , y et z en fonction de t par la méthode de Gauss-Jordan, pour finalement trouver les deux valeurs de t qui sont les solutions de l'équation $t = x^2 + y^2 + z^2$ et ainsi les deux points $P(x, y, z)$ recherchés. Voyez aussi la sous-section 5.3.3, *Le GPS et les équations linéaires*, pour apprécier la portée de cet exercice.

13. Soit $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ et $P_3(x_3, y_3)$, trois points de $\mathbb{R}^2$, et $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$.

Démontrez les trois propositions suivantes :

- a) si P_1 , P_2 et P_3 sont confondus, alors $r(A) = 1$;
- b) si P_1 , P_2 et P_3 sont colinéaires sans être confondus, alors $r(A) = 2$;
- c) si P_1 , P_2 et P_3 ne sont pas colinéaires, alors $r(A) = 3$.

Déterminez si les points $P_1(1, 2)$, $P_2(3, 4)$ et $P_3(5, 6)$ sont colinéaires en calculant le rang de A .

14. Soit $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ et $P_4(x_4, y_4, z_4)$, quatre points de $\mathbb{R}^3$, et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}.$$

Démontrez les quatre propositions suivantes :

- a) si P_1, P_2, P_3, P_4 sont confondus, alors $r(A) = 1$;
- b) si P_1, P_2, P_3, P_4 sont colinéaires sans être confondus, alors $r(A) = 2$;
- c) si P_1, P_2, P_3, P_4 sont coplanaires sans être colinéaires, alors $r(A) = 3$;
- d) si P_1, P_2, P_3, P_4 ne sont pas coplanaires, alors $r(A) = 4$.

Déterminez si les points $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(3, 4, 5)$, $P_3(5, 6, 7)$ et $P_4(7, 8, 9)$ sont confondus, colinéaires ou coplanaires, en calculant le rang de A .

15. Soit $P_1(1, 2)$, $P_2(3, 1)$ et $P_3(2, 6)$, trois points (non colinéaires) de $\mathbb{R}^2$, et $C(x, y)$, le centre du cercle de rayon r passant par P_1 , P_2 et P_3 .

- a) Trouvez un système de trois équations non linéaires en x , y et r pour exprimer le fait que C est à r unités de distance de chacun des points P_1 , P_2 et P_3 .
- b) Effectuez le changement de variable $t = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$ dans le système d'équations trouvé en a), puis résolvez ce système, et trouvez ainsi les coordonnées du centre C du cercle et son rayon r .

16. Pour résoudre le système d'équations non linéaires

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + 3b^2 &= 3 \\ 2a^2 + 3ab - b^2 &= 13, \end{aligned}$$

- a) posez $x = a^2$, $y = ab$ et $z = b^2$, puis trouvez, sous la forme paramétrée, toutes les solutions x , y et z du système linéaire ainsi obtenu;
- b) dans le système non linéaire de départ, substituez aux variables a et b leur valeur en fonction du paramètre utilisé pour décrire les solutions du système linéaire en a), et trouvez ainsi toutes les solutions du système d'équations non linéaires.

LES POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES DANS $\mathbb{R}^2$ OU DE TROIS PLANS DANS $\mathbb{R}^3$

Cette section est un complément à l'étude des droites dans $\mathbb{R}^2$ et des plans dans $\mathbb{R}^3$ que nous avons faite au chapitre 4. Ici, nous résumons et illustrons à l'aide d'un tableau synthèse les cas qui peuvent se présenter lors de la résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues ou de trois équations linéaires à trois inconnues. Chacun de ces cas correspond à une position relative particulière de deux droites dans $\mathbb{R}^2$ ou à une position relative particulière de trois plans dans $\mathbb{R}^3$.

5.2.1 L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS LINÉAIRES À DEUX INCONNUES DANS $\mathbb{R}^2$

L'équation linéaire $ax + by = c$ représente une droite dans $\mathbb{R}^2$ ayant précisément (a, b) , qu'on suppose non nul, comme vecteur normal. Résoudre le système d'équations simultanées

$$(*) \quad \begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

représentant deux droites revient alors à trouver les points $P(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ communs à ces deux droites.

1^{er} cas

Si les vecteurs normaux (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont linéairement indépendants, c'est-à-dire si

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, alors la matrice des coefficients du système (*) sera de rang 2 (de même

que celui de la matrice augmentée) et la forme ERL de la matrice augmentée

sera : $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & d_2 \end{array} \right)$. Dans ce cas, les deux droites sont sécantes en un point (unique)

$P(d_1, d_2)$.

2^e cas

Si les vecteurs normaux (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont linéairement dépendants, c'est-à-dire

si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, alors la matrice des coefficients du système (*) sera de rang inférieur

à 2 (mais non nul, car les vecteurs normaux sont supposés non nuls). Par conséquent, la matrice des coefficients du système (*) sera de rang 1 et la matrice augmentée pourra être (a) de rang 1 ou (b) de rang 2. La forme ERL de la matrice augmentée du système (*) sera alors :

(a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & r & d_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ ou $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$: les deux droites sont confondues ; le système (*) a une infinité de solutions ;

(b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & r & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 \end{array} \right)$ ou $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 \end{array} \right)$: les deux droites sont parallèles distinctes ; le système (*) n'a pas de solution.

Le tableau 5.1 présente le résumé de la situation : A désigne la matrice des coefficients du système (*) et A^+ désigne la matrice augmentée du même système.

TABLEAU 5.1 Les positions relatives de deux droites dans $\mathbb{R}^2$.

Deux droites	Vecteurs normaux à ces droites : $\vec{n}_1, \vec{n}_2$	Déterminant de la matrice des coefficients $\Delta(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$	Caractéristiques du système d'équations représentant les deux droites		
			$r(A)$	$r(A')$	Nombre de solutions
Confondues	Parallèles	0	1	1	Infinité
Distinctes parallèles	Parallèles	0	1	2	0
Distinctes sécantes	Non parallèles	$\neq 0$	2	2	1

5.2.2 L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES SYSTÈMES DE TROIS ÉQUATIONS LINÉAIRES À TROIS INCONNUES DANS $\mathbb{R}^3$

Comme on l'a vu au chapitre 4, l'équation linéaire

$$ax + by + cz = d$$

représente un plan dans $\mathbb{R}^3$ ayant précisément le vecteur (a, b, c) , qu'on suppose non nul, pour vecteur normal. Résoudre le système d'équations simultanées

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

revient donc à déterminer la position relative des trois plans de $\mathbb{R}^3$ représentés par ces équations. Les vecteurs normaux $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ de ces trois plans sont donnés par

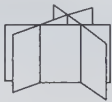
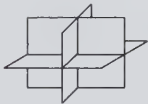
$$\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1), \vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2) \text{ et } \vec{n}_3 = (a_3, b_3, c_3).$$

Supposons que Δ désigne le déterminant de la suite $\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3 \rangle$, c'est-à-dire le déterminant de la matrice des coefficients du système

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Alors le tableau 5.2 montre la correspondance entre les positions relatives de ces trois plans, la relation de dépendance (ou d'indépendance) linéaire entre les vecteurs normaux $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ à ces trois plans, la valeur du déterminant $\Delta(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ de format 3×3 , et les caractéristiques algébriques du système d'équations linéaires simultanées représentant ces trois plans. Pour simplifier le tableau, on suppose ici que les trois plans sont distincts.

TABLEAU 5.2 Les positions relatives de trois plans distincts dans $\mathbb{R}^3$.

Trois plans distincts	Vecteurs normaux à ces trois plans: $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$	Déterminant** $(\Delta \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3 \rangle)$	Caractéristiques du système d'équations représentant les trois plans**		
			$r(A)$	$r(A^*)$	Nombre de solutions
	Tous parallèles	0	1	2	0
	Exactement deux parallèles	0	2	3	0
	Non parallèles mais linéairement dépendants	0	2	3	0
		0	2	2	∞
	Linéairement indépendants	$\neq 0$	3	3	1

* $\Delta \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3 \rangle$: déterminant de la matrice des coefficients du système.

** $r(A)$: rang de la matrice des coefficients du système d'équations représentant les trois plans.

$r(A^*)$: rang de la matrice augmentée du système d'équations représentant les trois plans.

EXERCICES 5.2

Dans chacun des exercices 1 à 4, déterminez la position relative de chacun des trois plans donnés. Lorsqu'il y a intersection des trois plans, donnez l'équation de la droite d'intersection ou les coordonnées du point d'intersection, selon le cas. Suivez les étapes suivantes.

1^{re} étape

Observez les vecteurs normaux des trois plans pour déceler le parallélisme éventuel de certains plans.

2^e étape

Calculez la valeur du déterminant de la suite ordonnée des trois vecteurs normaux pour voir si ceux-ci sont linéairement dépendants ou indépendants.

3^e étape

Réduisez la matrice augmentée du système d'équations linéaires correspondant aux trois plans et interprétez la matrice *ERL* ainsi obtenue.

$$\begin{aligned} 1. \mathcal{P}_1: & 5x + 6y - z = 0 \\ \mathcal{P}_2: & 7x + 6y - 2z = -8 \\ \mathcal{P}_3: & 3x + 2y - z = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \mathcal{P}_1: & 2x - 3y + z = 2 \\ \mathcal{P}_2: & 5x + y - 3z = 5 \\ \mathcal{P}_3: & -6x + 9y - 3z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \mathcal{P}_1: & 4y - z = -4 \\ \mathcal{P}_2: & 3x - 2y - z = 5 \\ \mathcal{P}_3: & 2x - z = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \mathcal{P}_1: & 4x - 2y + z = 3 \\ \mathcal{P}_2: & -x + 3y + 2z = 11 \\ \mathcal{P}_3: & x - y - 3z = -10 \end{aligned}$$

5. Trouvez toutes les valeurs de k (s'il y en a) pour lesquelles les trois plans définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1: & kx - 2y + kz = 2 \\ \mathcal{P}_2: & x - y + z = k \\ \mathcal{P}_3: & -2x + ky + 2z = -k \end{aligned}$$

- a) se rencontrent en un point unique;
- b) se rencontrent selon une droite;
- c) ne se rencontrent pas.

6. Déterminez les positions relatives des trois plans définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1: & x + 3z = 1 \\ \mathcal{P}_2: & y - z = -1 \\ \mathcal{P}_3: & x + y + 2z = 2. \end{aligned}$$

7. Trouvez les valeurs de a et de b pour lesquelles l'intersection des trois plans suivants est une droite

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1: & -2x + y + az = -5 \\ \mathcal{P}_2: & x - 2y = 1 \\ \mathcal{P}_3: & -y + z = b \end{aligned}$$

et donnez une équation vectorielle de cette droite.

POUR ALLER PLUS LOIN

La programmation linéaire est une extension de la théorie des équations linéaires aux inéquations linéaires qui permet de résoudre certains problèmes d'optimisation. Dans cette section, nous donnons un exemple simple d'un tel problème. Nous donnons également l'essentiel de la preuve de l'**unicité** de la forme *ERL* d'une matrice donnée. Finalement, nous donnons un exemple d'application des équations linéaires dans la géolocalisation par satellite (GPS).

5.3.1 QU'EST-CE QUE LA PROGRAMMATION LINÉAIRE ?

Dans beaucoup de problèmes pratiques de gestion (allocation de ressources, transport, planification d'une production, etc.), il arrive que les relations entre les nombreuses variables se traduisent par des systèmes d'**inégalités** linéaires plutôt que par des systèmes d'**équations** linéaires. De plus, on s'intéresse en pratique non pas à toutes les solutions du système, mais seulement à celle (ordinairement unique) qui optimise une certaine fonction linéaire des variables, appelée **fonction objective**. Celle-ci représente un profit, une économie, un rendement, etc. La programmation linéaire a pour objets l'étude de tels systèmes et la recherche d'une solution optimale. On doit au mathématicien américain George Bernard Dantzig (1914-2005) le développement de l'algorithme du simplexe pour résoudre les problèmes de programmation linéaire. Dans le cadre de cet ouvrage, un exemple réaliste nécessiterait trop de développement. Voyons un exemple volontairement fantaisiste, comportant peu de variables (et donc facile à traiter manuellement), mais tout de même analogue dans sa structure à des problèmes plus complexes et plus réalistes.

Supposons que ce soit la saison des fraises et de la rhubarbe, et qu'on décide de produire des confitures de fraises et de rhubarbe qu'on vendra ensuite au marché.

On dispose déjà de 150 kg de fraises, de 60 kg de rhubarbe et de 90 kg de sucre. Selon les règles du marché, on ne peut produire que des confitures de qualité A ou de qualité B :

- la confiture de qualité A doit être composée de 60 % de fraises, de 10 % de rhubarbe et de 30 % de sucre (en poids); elle rapporte un profit de 3 \$/kg;
- la confiture de qualité B doit être composée de 30 % de fraises, de 30 % de rhubarbe et de 40 % de sucre (en poids); elle rapporte un profit de 2 \$/kg.

Quelle quantité de confiture de chacune des deux qualités doit-on produire pour maximiser le profit ? (On suppose que tout sera vendu.)

Si l'on désigne respectivement par x et y les quantités de confitures de qualité A et de qualité B qu'on produira, alors le profit z que l'on réalisera sera une fonction linéaire de x et de y (fonction objective) :

$$z = 3x + 2y.$$

On cherche les valeurs des quantités (variables) x et y qui **optimisent** (ici, qui **maximisent**) le profit tout en respectant les **contraintes** dictées par le contexte et exprimées sous forme d'inégalités linéaires.

- 1) $x \geq 0$
- 2) $y \geq 0$
- 3) $0,6x + 0,3y \leq 150$ [disponibilité des fraises]
- 4) $0,1x + 0,3y \leq 60$ [disponibilité de la rhubarbe]
- 5) $0,3x + 0,4y \leq 90$ [disponibilité du sucre]

La conjonction de toutes ces contraintes situe le point (x, y) dans une région $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^2$ bornée par une ligne polygonale (voir la figure 5.1).

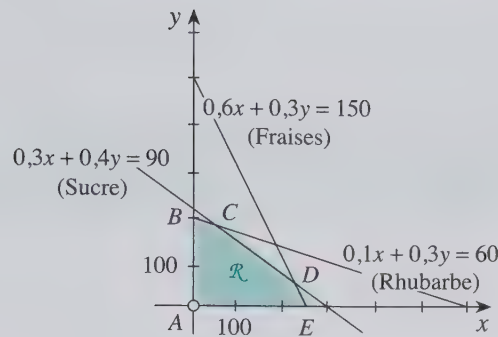


FIGURE 5.1 La région des contraintes.

Par ailleurs, l'équation $z = 3x + 2y$ donnant le profit en fonction de x et de y représente, dans $\mathbb{R}^3$ (voir la figure 5.2), au-dessus de la région $\mathcal{R}$, une portion de plan, et on voit que dans cette portion de plan, le point le plus élevé (z maximal) se trouve forcément sur une pointe, c'est-à-dire au-dessus d'un sommet de la ligne de contour de $\mathcal{R}$.

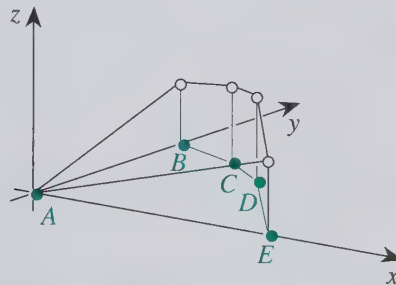


FIGURE 5.2 La fonction « profit » au-dessus de la région des contraintes.

Pour trouver le sommet (x, y) de la région $\mathcal{R}$ qui correspond à la valeur optimale de z , on calcule les coordonnées des sommets de $\mathcal{R}$ et on compare les valeurs de z en chacun de ces sommets (voir le tableau 5.3).

Le tableau 5.3 montre dans ce cas-ci qu'on obtiendra le plus grand profit au sommet D , lorsque $(x, y) = (220, 60)$; on produira donc 220 kg de confiture de qualité A et 60 kg de confiture de qualité B, ce qui donnera un profit de 780 \$.

Dans la pratique, les problèmes de programmation linéaire font intervenir un nombre considérable de variables, ce qui rend impraticables les raisonnements géométriques et les calculs manuels. Il faut alors transformer les inégalités en égalités en introduisant autant de variables d'écart que nécessaire. Par exemple, en introduisant une variable d'écart e dans l'inégalité

$$0,6x + 0,3y \leq 150,$$

on obtient l'égalité

$$0,6x + 0,3y + e = 150.$$

Ainsi, on peut faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée du système d'équations linéaires correspondant et saisir les données qui permettent de chercher une solution optimale relativement à une fonction linéaire des variables donnée. L'algorithme

du simplexe, que nous ne pouvons pas exposer ici, mais qui est apparenté à la méthode de Gauss-Jordan, est précisément une méthode pour la réalisation de ce programme.

TABLEAU 5.3 L'inspection des sommets.

Sommet	Système correspondant	Coordonnées (solution du système)	Valeur de z
A	$x = 0$ $y = 0$	$(0, 0)$	0
B	$0,1x + 0,3y = 60$ $x = 0$	$(0, 200)$	400
C	$0,1x + 0,3y = 60$ $0,3x + 0,4y = 90$	$(60, 180)$	540
D	$0,3x + 0,4y = 90$ $0,6x + 0,3y = 150$	$(220, 60)$	780
E	$y = 0$ $0,6x + 0,3y = 150$	$(250, 0)$	750

5.3.2 L'UNICITÉ DE LA FORME ERL D'UNE MATRICE

Toute matrice A est l -équivalente à une seule matrice ERL de même format. L'algorithme de Gauss-Jordan montre comment obtenir au moins une matrice ERL l -équivalente à A , mais ne garantit pas l'unicité de cette matrice ERL . C'est maintenant à vous de faire la preuve de cette unicité. Pour cela, il faut montrer que deux matrices ERL l -équivalentes de même format sont nécessairement identiques. La preuve peut se faire en deux étapes.

1^{re} étape

On montre que si A et B sont deux matrices ERL l -équivalentes non nulles de même format, alors A et B ont les mêmes colonnes pivots. Pour faire cette démonstration, il faut tenir compte du fait (démontré au théorème 1 de la sous-section 5.1.5) que les vecteurs lignes de A sont des combinaisons linéaires des vecteurs lignes de B et réciproquement. Pour faciliter l'argumentation, on tient aussi compte de la définition suivante : On appelle marge d'un vecteur $\vec{v}$ le nombre de composantes nulles qui précèdent la première composante non nulle de ce vecteur. Par exemple, la marge de $\vec{v} = (3, -1, 0, 5, 0)$ est de 0 et celle de $\vec{u} = (0, 0, 0, 1, 0, -5)$ est de 3. On considère le vecteur ligne $\vec{l}$ contenant le « 1 » d'une colonne pivot de A et on raisonne sur la marge de ce vecteur lorsqu'on le conçoit comme une combinaison linéaire des vecteurs lignes de B pour montrer que B a forcément un vecteur ligne qui a la même marge que $\vec{l}$. À chaque vecteur ligne non nul de A correspond un vecteur ligne de B qui a la même marge, et réciproquement. Comme les vecteurs lignes non nuls d'une matrice ERL ont des marges distinctes, A et B ont le même nombre de vecteurs lignes non nuls et le même nombre de vecteurs lignes nuls. Or, les lignes nulles sont placées

en dernier et les lignes non nulles sont disposées de telle sorte que leurs marges vont en augmentant quand on descend dans la matrice. Par conséquent, les 1 initiaux des lignes non nulles sont placés exactement aux mêmes endroits dans les deux matrices, ce qui signifie que A et B ont les mêmes colonnes pivots aux mêmes endroits.

2^e étape

Deux matrices *ERL* qui ont les mêmes colonnes pivots ne sont pas forcément identiques, comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cependant, deux matrices *ERL* *l*-équivalentes qui ont les mêmes colonnes pivots sont forcément identiques, comme il vous reste à le démontrer (utilisez pour ce faire l'exercice 4 de la section *Exercices 5.1*).

5.3.3 LE GPS ET LES ÉQUATIONS LINÉAIRES

Le principe géométrique de base dans le calcul du positionnement d'un point sur la Terre à l'aide du système GPS (*Global Positioning System*) est très simple⁷. Si un récepteur GPS reçoit à un instant donné les positions exactes de trois satellites (non colinéaires) et les trois distances précises entre lui-même et ces trois satellites, alors sa position $P(x, y, z)$ sera à l'intersection de trois sphères dont les centres $C_i(x_i, y_i, z_i)$, pour $i = 1, 2, 3$, sont connus (ce sont les positions des satellites), et dont les rayons r_1, r_2 et r_3 sont également connus (ce sont les trois distances du récepteur aux satellites). Pour calculer les coordonnées x, y et z , il suffira de résoudre un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{aligned} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 &= r_1^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 &= r_2^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 &= r_3^2. \end{aligned}$$

Ces équations ne sont pas linéaires : elles sont quadratiques, c'est-à-dire du deuxième degré, en chacune des trois inconnues x, y et z . Cependant, avec un peu de patience, on peut, comme à l'exercice 12 de la section *Exercices 5.1*,

- i) élever au carré les expressions mises entre parenthèses ;
- ii) éliminer les termes en x^2, y^2 et z^2 dans les deux premières équations, en soustrayant la troisième équation ;
- iii) résoudre le système d'équations linéaires de deux équations à trois inconnues en exprimant les inconnues x et y en fonction de z utilisée comme paramètre ;
- iv) remplacer x et y dans la troisième équation (quadratique) par leur expression en fonction de z ;
- v) résoudre l'équation quadratique en z ainsi obtenue et ne conserver que la solution physiquement acceptable.

7. Notre présentation s'inspire ici de deux sources : « Le positionnement sur la Terre et dans l'espace » dans le magnifique ouvrage *Mathématiques et technologie* de Christiane Rousseau et Yvan Saint-Aubin (Springer, 2008) et un texte inédit que nous a aimablement communiqué Paul Dumais, du Collège de Rosemont, écrit pour ses étudiants sous la forme d'un travail pratique à réaliser à l'aide d'un tableur électronique et d'Internet.

Cela semble trop simple pour être vrai ! Il y a en effet, dans la réalité, une difficulté supplémentaire. Pour évaluer les distances r_i du récepteur aux satellites, il faut d'abord mesurer, pour chaque satellite, le temps T_i que prend le signal pour se rendre du satellite au récepteur GPS qui se trouve sur la Terre, puis calculer $r_i = cT_i$, où c est la vitesse de la lumière. Inutile de dire que la moindre erreur sur T_i produira une énorme erreur sur r_i ... Heureusement, les satellites sont équipés d'horloges atomiques très sophistiquées, très précises et synchronisées entre elles. Cependant l'horloge du récepteur n'est pas de la même qualité (question de coût, non de goût) et il y a donc un décalage τ , inconnu, mais le même, entre cette horloge et celles des satellites synchronisés. Bref, la valeur exacte de T_i est $T_i = t'_i - t_i - \tau$, où :

■ t'_i est l'heure d'arrivée du signal du satellite i sur le récepteur, selon l'horloge du récepteur ;

■ t_i est l'heure de départ du signal du satellite i , selon l'horloge du satellite i ;

■ τ est le décalage : (heure d'arrivée du signal du satellite i sur le récepteur selon l'horloge du récepteur) – (heure d'arrivée du signal du satellite i sur le récepteur selon l'horloge du satellite) ; cette valeur est supposée être la même pour les trois satellites.

Avec toutes ces considérations, les équations $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = r_i^2$ pour $i = 1, 2, 3$, doivent être corrigées :

$$\begin{aligned} (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 &= r_i^2 \\ &= c^2 T_i^2 \\ &= c^2 (t'_i - t_i - \tau)^2 \\ &= c^2 (s_i - \tau)^2, \text{ où } s_i = t'_i - t_i. \end{aligned}$$

Il y a maintenant quatre inconnues : x , y , z et τ . Il faut donc ajouter une autre équation provenant d'un quatrième satellite, synchronisé, et non coplanaire avec les trois autres. L'ajout de cette quatrième équation permettra de calculer la valeur de la nouvelle inconnue : la valeur du décalage τ entre l'horloge du récepteur et les horloges des quatre satellites. Finalement, il faudra résoudre ce système de quatre équations à quatre inconnues :

$$\begin{aligned} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 &= c^2 (s_1 - \tau)^2, \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 &= c^2 (s_2 - \tau)^2, \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 &= c^2 (s_3 - \tau)^2, \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 &= c^2 (s_4 - \tau)^2. \end{aligned}$$

Heureusement, on peut encore ici suivre les étapes i) à v) décrites précédemment pour éliminer les carrés des inconnues dans les trois premières équations (en soustrayant cette fois la quatrième à chacune) et obtenir un système linéaire de trois équations à quatre inconnues qui permettra de réduire (après substitutions) la quatrième équation à une simple équation quadratique à une seule variable (τ). On choisira la valeur de τ qui donnera l'unique valeur physiquement acceptable pour $P(x, y, z)$. On peut ensuite convertir les coordonnées cartésiennes géocentriques en **latitude**, **longitude** et **altitude** (voir la sous-section 2.2.4 du chapitre 2) et finalement, visualiser sur un site Internet de repérage terrestre la position exacte du récepteur.

MATRICES

LE LANGAGE MATRICIEL

LES MATRICES ÉLÉMENTAIRES ET LES MATRICES INVERSIBLES

LE DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE

ÉCONOMIE ET MATRICES : LE MODÈLE DE LEONTIEF

POUR ALLER PLUS LOIN

Nous avons vu précédemment que l'étude des systèmes d'équations linéaires conduit naturellement au concept de matrice. Les matrices ont cependant de nombreuses autres applications. L'une des applications les plus spectaculaires se trouve dans les moteurs de recherche (par exemple Google) sur le Web ; ces « moteurs » dépendent essentiellement des matrices de transition pour répondre aux requêtes (recherches à partir de quelques mots clés) avec rapidité et pertinence. Malgré le fait que nous n'étudierons en détail dans ce chapitre que les matrices de transition de format 2×2 , nous donnerons cependant des indications et des références dans la section *Pour aller plus loin* pour aider à comprendre comment les pages Web sont classées en fonction d'une requête. Autre exemple : en robotique spatiale, en imagerie ou en chirurgie assistée par ordinateur, les mouvements des instruments peuvent être représentés et programmés par des transformations linéaires. Ces transformations sont représentables par des matrices comme nous le verrons au chapitre 7, consacré aux transformations linéaires dans le plan. Pour ceux qui s'intéressent aux méthodes matricielles en économie, la section 6.4 donne un aperçu du modèle d'analyse intersectorielle de Leontief qui a valu à son auteur le prix Nobel d'économie en 1973. Au dernier chapitre de cet ouvrage, nous verrons aussi comment les matrices facilitent les changements de base et la classification des coniques (dans le plan).

Pour commencer, par souci d'efficacité, nous présenterons les matrices pour elles-mêmes. Nous verrons comment additionner, soustraire et multiplier des matrices, et nous donnerons ensuite un sens à ces opérations dans des exemples simples, parfois fantaisistes, mais inspirés de situations réelles plus complexes.

LE LANGAGE MATRICIEL

Dans cette section, nous définissons les termes propres au langage matriciel et nous décrivons les opérations algébriques sur les matrices. Nous donnerons ensuite un aperçu de différentes interprétations du produit matriciel dans des contextes choisis.

6.1.1 LES MATRICES : DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Matrice de format $m \times n$

Une matrice A de format $m \times n$ est un tableau rectangulaire ordonné de mn éléments disposés en m lignes et n colonnes.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

L'élément de la i -ième ligne et j -ième colonne est désigné par a_{ij} ; sauf avis contraire, les éléments sont des nombres réels.

D'autres notations sont aussi utilisées. Par exemple, $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ou, encore, $\begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \\ \hline \end{array}$ peuvent

s'écrire à la place de $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

EXEMPLE 1

Supposons que les compagnies C_1 , C_2 et C_3 , spécialisées respectivement en comptabilité, en services juridiques et en services informatiques, s'échangent des services et que le tableau suivant présente les valeurs de ces échanges en milliers de dollars (\$) sur une période d'une année.

Ventes (milliers de \$)  à de	C_1	C_2	C_3
C_1	5	25	30
C_2	6	1	20
C_3	50	35	20

Alors, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 25 & 30 \\ 6 & 1 & 20 \\ 50 & 35 & 20 \end{pmatrix},$$

dans laquelle a_{ij} représente la quantité de services vendus (en milliers de \$) de la compagnie i à la compagnie j , est la matrice des échanges de services entre ces trois compagnies; A est une matrice de format 3×3 .

EXEMPLE 2

La figure 6.1 représente quatre îles dont certaines sont reliées par des ponts; alors la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dans laquelle

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{s'il y a un pont entre l'île } i \text{ et l'île } j, \\ 0 & \text{s'il n'y a pas de pont entre l'île } i \text{ et l'île } j, \end{cases}$$

est la matrice d'adjacence entre les trois îles ; A est une matrice de format 4×4 .

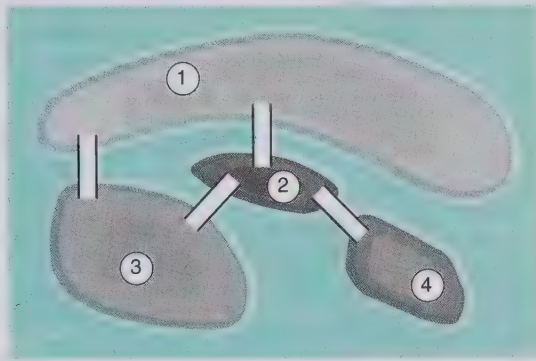


FIGURE 6.1

EXEMPLE 3

Les positions de quatre points situés sur un axe sont $x_1 = -4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$ et $x_4 = -2$. Alors la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -5 & -2 \\ 7 & 0 & 2 & 5 \\ 5 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

où $a_{ij} = x_i - x_j$ est la matrice des distances orientées entre les points.

EXEMPLE 4

La figure 6.2 représente une toile sur Internet, ultra-simplifiée, ne contenant que quatre pages. Les pages sont représentées par des points et sont numérotées de 1 à 4. Dans cette représentation, qu'on appelle un **graphe**, une flèche qui va d'une page j à une page i indique, dans le langage informatique, que la page j pointe vers la page i : un internaute qui se trouve sur la page j est invité à éventuellement cliquer sur un lien l'amenant à la page i .

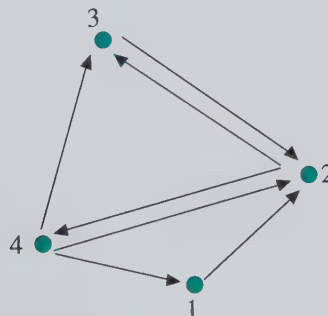


FIGURE 6.2

Supposons qu'un internaute se promène sur cette minitoile avec indifférence : lorsqu'il est à une page donnée, il choisit au hasard uniforme (avec des **probabilités** égales) parmi les pages qu'il peut atteindre d'un simple clic sur cette page. Ainsi, dans le graphe de la figure 6.2, cet internaute, s'il se trouvait, par exemple, à la page 2, choisirait d'aller ensuite à la page 1 avec la probabilité 0, à la page 2 avec la probabilité 0, à la page 3 avec la probabilité $1/2$, et à la page 4 avec la probabilité $1/2$. Les probabilités de transition d'une page à la suivante, pour ce promeneur, se présentent sous la forme d'une matrice, appelée **matrice de transition**, où l'élément a_{ij} de la i -ième ligne et de la j -ième colonne est la probabilité d'aller de la page j à la page i . Voici la matrice de transition M pour cette minitoile :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En réalité, les moteurs de recherche doivent, pour répondre à une requête donnée, présenter les pages du Web dans un ordre pertinent à cette requête. Chez Google, par exemple, la mise en ordre se fait par un algorithme appelé PageRank (Larry Page, cofondateur de Google, est l'un de ceux qui ont inventé cet algorithme aux États-Unis en 1998). Cet algorithme est un secret commercial, mais il est connu que son principe de base repose sur l'utilisation de matrices de transition (voir à ce sujet la section *Pour aller plus loin*).

Égalité de deux matrices

Deux matrices A et B sont égales si elles ont le même format et si leurs éléments correspondants sont égaux : $a_{ij} = b_{ij}$ pour toute paire d'indices i et j .

EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 2 & y & 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -1 \text{ et } y = -3.$$

6.1.2 LES MATRICES PARTICULIÈRES

Matrices lignes et matrices colonnes

On peut considérer les lignes d'une matrice A de format $m \times n$ comme des matrices de format $1 \times n$; une matrice de format $1 \times n$ est appelée **matrice ligne**. De même, on peut considérer les colonnes d'une matrice A comme des matrices de format $m \times 1$; ce sont des **matrices**

colonnes. Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, qui est de format 2×3 , les matrices lignes sont $(1 \ 2 \ 3)$ et $(4 \ 5 \ 6)$; ce sont des matrices de format 1×3 . Les matrices colonnes de A sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$; ce sont des matrices de format 2×1 .

Matrice nulle

La matrice de format $m \times n$ dont tous les éléments sont nuls est appelée **matrice nulle** et est notée O , ou $O_{m \times n}$ si l'on insiste sur le format. Par exemple, la matrice nulle de format 2×4 est

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice carrée

Une matrice qui a autant de lignes que de colonnes est dite **carrée**. Une matrice carrée de format $n \times n$ est dite d'ordres n . Par exemple,

$$(-3), \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sont des matrices carrées d'ordres 1, 2 et 3 respectivement.

Diagonale principale d'une matrice carrée

On appelle **diagonale principale** d'une matrice carrée l'ensemble des éléments a_{ij} de cette matrice pour lesquels $i = j$. Par exemple, dans la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, la diagonale principale est constituée des éléments 0 et 3.

Matrice diagonale

Une matrice carrée dont tous les éléments à l'extérieur de la diagonale principale sont nuls ($a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$) est une **matrice diagonale**. Par exemple, $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ sont diagonales, mais $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne le sont pas.

Matrice triangulaire supérieure

Une matrice carrée dont tous les éléments situés sous la diagonale principale sont nuls est appelée **matrice triangulaire supérieure**. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure.

Matrice triangulaire inférieure

Une matrice carrée dont tous les éléments situés au-dessus de la diagonale principale sont nuls est appelée **matrice triangulaire inférieure**. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure.

Matrice identité

La matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments situés sur la diagonale principale sont 1 et tous les autres sont 0 est appelée **matrice identité** $n \times n$ ou d'ordre n et est notée I ou $I_{n \times n}$ si l'on veut insister sur le format. Par exemple, la matrice identité de format 3×3 est

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrice symétrique

Une matrice carrée A d'ordre n est dite **symétrique** si $a_{ij} = a_{ji}$ pour $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ sont symétriques. Dans une matrice symétrique,

la diagonale principale est un axe de symétrie pour les éléments situés de part et d'autre de cet axe.

Matrice antisymétrique

Une matrice carrée A d'ordre n est dite **antisymétrique** si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour $i, j = 1, 2, \dots, n$. Par

exemple, $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ sont antisymétriques.

6.1.3 LES OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

Nous définissons ici la transposition d'une matrice, l'addition matricielle et la multiplication d'une matrice par un scalaire, et nous verrons ensuite les propriétés de ces opérations. Le produit matriciel (la multiplication) sera traité à la section 6.1.4.

A^T , la transposée de A

La **transposée** d'une matrice A de format $m \times n$, notée A^T , est la matrice B de format $n \times m$ telle que $b_{ji} = a_{ij}$ pour $j = 1, 2, \dots, n$ et $i = 1, 2, \dots, m$.

Remarques

1. Les matrices colonnes de A^T sont les transposées des matrices lignes de A . Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T = (1 \ 2 \ 3) \text{ et } (1 \ 2 \ 3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. A est symétrique $\Leftrightarrow A^T = A$.

3. A est antisymétrique $\Leftrightarrow A^T = -A$.

DEFINITION Produit kA d'une matrice A par un scalaire k

Le produit d'une matrice A par un scalaire k , noté kA ou Ak , est la matrice de même format que A obtenue en multipliant tous les éléments de A par k .

Le produit $-1A$ s'écrit simplement $-A$.

EXEMPLE 1

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 2

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

DEFINITION Somme de deux matrices

Soit A et B , deux matrices de même format $m \times n$. Alors, la somme $A + B$ est la matrice C dont l'élément c_{ij} est la somme $a_{ij} + b_{ij}$ des éléments correspondants de A et de B pour $i = 1, 2, \dots, m$ et $j = 1, 2, \dots, n$.

EXEMPLE 1

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 2

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ n'est pas définie, car les formats de ces deux matrices sont différents.}$$

Remarque

La différence $A - B$ est définie par $A - B = A + (-B)$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les propriétés des opérations sur les matrices sont des conséquences immédiates des définitions; les démonstrations sont laissées aux lecteurs.

Soit A , B et C , des matrices de format $m \times n$, r et s , des scalaires, et O , la matrice nulle de format $m \times n$. Alors, les opérations sur les matrices satisfont les propriétés suivantes.

Les propriétés de l'addition matricielle

M1 $A + B = B + A$

[L'addition matricielle est commutative.]

M2 $A + (B + C) = (A + B) + C$

[L'addition matricielle est associative.]

M3 $A + O = A = O + A$

[La matrice nulle O est neutre dans l'addition matricielle.]

M4 $A - A = O$

[La matrice $-A$ est l'opposé de la matrice A .]

Les propriétés de la multiplication par un scalaire

M5 $1A = A$ [Le nombre 1 est neutre dans la multiplication par un scalaire.]

M6 $r(A + B) = rA + rB$ [La multiplication par un scalaire est distributive sur la somme matricielle.]

M7 $(r + s)A = rA + sA$ [La multiplication par un scalaire est distributive sur la somme des scalaires.]

M8 $(rs)A = r(sA)$ [La multiplication par un scalaire est associative.]

Les propriétés de la transposition

M9 $(A + B)^T = A^T + B^T$ [La transposition préserve la somme matricielle.]

M10 $(rA)^T = rA^T$ [La transposition préserve le produit par un scalaire.]

M11 $(A^T)^T = A$ [La transposée de la transposée d'une matrice est cette même matrice.]

6.1.4 LE PRODUIT MATRICIEL

Le produit matriciel de deux matrices A et B se définit à partir des produits scalaires des matrices lignes de A (considérées comme des vecteurs lignes) avec les matrices colonnes de B (considérées comme des vecteurs colonnes). Pour que ces produits scalaires soient définis, il faut que le nombre de colonnes de A coïncide avec le nombre de lignes de B . Dans ce cas, on dit que A et B sont compatibles pour la multiplication.

Produit matriciel AB

Soit A , une matrice de format $m \times p$, et B , une matrice de format $p \times n$. Alors, le **produit matriciel** AB est la matrice C de format $m \times n$ dont l'élément c_{ij} est le produit scalaire (au sens de somme de produits) des deux vecteurs dont les p composantes sont respectivement les éléments de la i -ième matrice ligne de A et les éléments de la j -ième matrice colonne de B .

Remarque

Si les éléments des matrices A , B et C sont désignés respectivement par a_{ij} , b_{ij} et c_{ij} , alors

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

EXEMPLE 1

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (5)$.

Remarquez les formats: $A_{1 \times 3} B_{3 \times 1} = C_{1 \times 1}$.

EXEMPLE 2

Si $A = (1 \ 2 \ 3)$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, alors $AB = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (5 \ 3)$.

Remarquez les formats : $\underbrace{A_{1 \times 3} B_{3 \times 2}} = C_{1 \times 2}$.

EXEMPLE 3

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, alors on peut disposer ces matrices sous la forme d'une **table de multiplication** pour faciliter l'exécution (manuelle) des produit scalaires des lignes de A par les colonnes de B pour obtenir le produit matriciel AB :

$A \times B$			-1	1
			0	4
			2	-2
1	2	3	5	3
7	8	9	11	21

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{A_{2 \times 3} B_{3 \times 2}} = C_{2 \times 2}$$

et

$B \times A$		1	2	3
		7	8	9
-1	1	6	6	6
0	4	28	32	36
2	-2	-12	-12	-12

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 28 & 32 & 36 \\ -12 & -12 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{B_{3 \times 2} A_{2 \times 3}} = C_{3 \times 3}$$

L'exemple 3 montre que le produit matriciel n'est généralement pas commutatif : $AB \neq BA$. En effet, pour que les produits AB et BA soient égaux, il faut d'abord que ces produits soient définis simultanément et soient de même format, ce qui nécessite que A et B soient des matrices carrées de même format. Mais, même dans ce cas, on a généralement $AB \neq BA$, comme le montre l'exemple suivant, où A et B sont de format 2×2 .

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ alors } AB = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les propriétés du produit matriciel

PM1 $A_{m \times n} O_{n \times p} = O_{m \times p}$ et $O_{m \times n} A_{n \times p} = O_{m \times p}$

[Si le produit de deux matrices est défini, et si l'une des deux est nulle, alors leur produit est nécessairement nul.]

PM2 $A_{m \times n} I_{n \times n} = A_{m \times n}$ et $I_{m \times m} A_{m \times n} = A_{m \times n}$

[Toute matrice identité I est neutre dans le produit matriciel.]

PM3 $A(BC) = (AB)C$

[Le produit matriciel est associatif.]

PM4 $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ $k \in \mathbb{R}$

[La multiplication par un scalaire est associative mixte.]

PM5 $A(B + C) = AB + AC$ et $(B + C)D = BD + CD$

[Le produit matriciel est distributif sur la somme.]

PM6 $(AB)^T = B^T A^T$

[La transposée d'un produit est le produit des transposées dans l'ordre inverse.]

Les propriétés PM1, PM2, PM4 et PM5 découlent directement des définitions. Il en va différemment de PM3 et de PM6. Il est facile de vérifier ces deux propriétés pour des matrices de petits formats, mais la démonstration générale est ardue, particulièrement pour PM3 (l'associativité). La démonstration de PM3 se trouve dans la section *Pour aller plus loin* et la démonstration de PM6 fait l'objet d'un exercice (voir l'exercice 14 dans la section *Exercices 6.1*).

Si A est une matrice carrée et n est un nombre naturel non nul, alors le produit $AAA \dots A$, où la matrice A apparaît n fois comme facteur, est noté A^n .

ATTENTION! Le produit $AABA$ peut s'écrire A^2BA mais généralement pas A^3B , car le produit matriciel n'est pas commutatif.

Il y a deux façons de voir le produit matriciel $AB = C$.

- 1) La matrice B est un opérateur qui transforme les lignes de A en lignes de C ; par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

alors on peut écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 21 \end{pmatrix}.$$

- 2) La matrice A est un opérateur qui transforme les colonnes de B en colonnes de C . Cette seconde façon de voir la multiplication matricielle sera mise à profit dans l'exemple 3 de la sous-section suivante et au chapitre 7 portant sur les **transformations linéaires**. Par exemple, avec les mêmes matrices A , B et C que précédemment, on peut écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 21 \end{pmatrix}.$$

6.1.5 QUELQUES INTERPRÉTATIONS DU PRODUIT MATRICIEL

Voici maintenant trois exemples pratiques d'interprétation du produit matriciel. Dans l'exemple 1, on montre comment le produit matriciel facilite le calcul des coûts de production d'une petite entreprise familiale. Dans l'exemple 2, l'étude des effets d'une campagne publicitaire nous conduit aux matrices de transition et aux chaînes de Markov. Enfin, l'exemple 3 nous fait voir une interprétation du produit matriciel dans le contexte de l'infographie.

EXEMPLE 1

La cantine mobile Le coq roulant

Le propriétaire d'une cantine mobile spécialisée dans la préparation du poulet veut savoir quelle somme il doit investir chaque jour pour servir ses clients. Tous les matins, il cuisine 200 repas répartis comme suit : 100 menus économiques, 60 menus ordinaires et 40 menus du gourmand. La matrice ligne $Q = (100 \ 60 \ 40)$ représente cette répartition. Le propriétaire a établi un système d'unités qui lui permet d'évaluer les quantités de poulet, de frites, de boisson, de dessert et de travail requises pour préparer un repas de chaque menu. (Il a également déterminé le coût de chacune des unités, comme nous le verrons plus loin.) Le tableau suivant présente ces données.

Type de repas	Quantités requises (unités)				
	Poulet	Frites	Boisson	Dessert	Travail
Économique	1	1	1	0	2
Ordinaire	2	1	2	1	3
Du gourmand	3	2	2	1	4

La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ représente ce tableau. Le produit matriciel QM s'interprète alors comme la matrice des quantités totales de poulet, de frites, etc., requises pour préparer tous les repas.

$$QM = (100 \ 60 \ 40) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (340 \ 240 \ 300 \ 100 \ 540)$$

Il faut donc 340 unités de poulet, 240 unités de frites, etc., pour préparer tous les repas d'une journée.

Voyons maintenant la valeur en dollars (\$) que le propriétaire a attribuée à chaque élément de son système d'unités.

	Poulet	Frites	Boisson	Dessert	Travail
Coût (\$) par unité	0,60	0,25	0,30	0,40	0,80

Si l'on représente ce tableau par la matrice colonne

$$C = \begin{pmatrix} 0,60 \\ 0,25 \\ 0,30 \\ 0,40 \\ 0,80 \end{pmatrix},$$

le produit matriciel QMC peut alors être interprété comme le coût total de la préparation des 200 repas. On peut effectuer cette opération de deux manières équivalentes : $(QM)C$ ou $Q(MC)$; le résultat

$$(QM)C = \begin{pmatrix} 340 & 240 & 300 & 100 & 540 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,60 \\ 0,25 \\ 0,30 \\ 0,40 \\ 0,80 \end{pmatrix} = (826)$$

est une matrice de format 1×1 .

Le propriétaire de la cantine investit donc 826\$ par jour pour préparer tous les repas.

Il est intéressant de noter que l'égalité $(QM)C = Q(MC)$, qui est l'expression de l'associativité du produit matriciel, correspond ici à un principe comptable naturel. Le coût total de la préparation des repas peut se calculer soit en fonction des quantités totales des différents composants des repas et des coûts unitaires de ces composants, $(QM)C$, soit en fonction du nombre de repas de chaque type et du coût unitaire de production de chaque type de repas, $Q(MC)$.

EXEMPLE 2

Matrices de transition et guerre de marché

L'exemple que nous présentons ici, volontairement simplifié et fantaisiste, donne un bon aperçu des propriétés des matrices de transition relativement à la multiplication matricielle.

Supposons que deux brasseries se partagent la clientèle d'une petite municipalité. Pour augmenter sa part de marché, qui est en ce moment de 30 %, la brasserie Boulga met sur pied une grande campagne publicitaire. Sa compétitrice, qui tient à conserver sa part de 70 %, décide d'en faire autant. Après un mois de campagne, la brasserie Gloubi est allée chercher 10 % de la clientèle de la brasserie Boulga, mais a elle-même perdu 20 % de la sienne au profit de Boulga. Le tableau suivant présente les mouvements de transition de la clientèle.

de ↓ à	Gloubi	Boulga
Gloubi	0,8	0,1
Boulga	0,2	0,9

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$, dans laquelle a_{ij} représente la proportion de la clientèle de la brasserie j passant à la brasserie i après un mois de publicité, est appelée la **matrice de transition** pour cette période. Par exemple, $a_{11} = 0,8$ signifie que 80 % de la clientèle de Gloubi reste fidèle à Gloubi après un mois et $a_{21} = 0,2$, que 20 % de la clientèle de Gloubi passe à Boulga après un mois. Si la matrice colonne $X_0 = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix}$ représente la **distribution** des parts de marché des deux brasseries avant la campagne publicitaire, alors le produit matriciel AX_0 , qui donne une matrice colonne X_1 , représente la distribution des parts de marché des deux brasseries après un mois de publicité :

$$X_1 = AX_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,59 \\ 0,41 \end{pmatrix}.$$

En effet, la part de marché de Gloubi après un mois est composée de la part provenant de Gloubi qui est restée à Gloubi, soit $(0,8)(0,7)$, à laquelle il faut ajouter la part provenant de Boulga qui a transité vers Gloubi, soit $(0,1)(0,3)$, ce qui revient à effectuer le produit scalaire de la première ligne de A par (l'unique) colonne de B : $(0,8)(0,7) + (0,1)(0,3) = 0,59$. De manière semblable, la part de Boulga après un mois est le produit scalaire de la deuxième ligne de A avec l'unique colonne de B : $(0,2)(0,7) + (0,9)(0,3) = 0,41$.

Si la campagne publicitaire est répétée tous les mois avec le même résultat (la même matrice de transition), alors les parts de marché des deux brasseries seront

■ après 2 mois : $X_2 = AX_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,59 \\ 0,41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,513 \\ 0,487 \end{pmatrix};$

■ après 3 mois : $X_3 = AX_2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,513 \\ 0,487 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4591 \\ 0,5409 \end{pmatrix};$

■ après 4 mois : $X_4 = AX_3 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4591 \\ 0,5409 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,4214 \\ 0,5786 \end{pmatrix};$

■ après 8 mois : $X_8 = AX_7 \approx \begin{pmatrix} 0,355 \\ 0,645 \end{pmatrix}$ (on peut faire ces calculs avec un tableur comme Excel, où

l'on trouve des outils pour effectuer des multiplications matricielles ou, encore, avec un logiciel de calcul plus évolué comme Maple);

■ après 16 mois : $X_{16} = AX_{15} \approx \begin{pmatrix} 0,335 \\ 0,665 \end{pmatrix};$

■ après 32 mois : $X_{32} = AX_{31} \approx \begin{pmatrix} 0,333 \\ 0,667 \end{pmatrix}.$

On constate que, après un certain temps, les parts de marché de Gloubi et de Boulga semblent se stabiliser respectivement à $1/3$ et $2/3$ du marché : $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$

Ce résultat sera confirmé par les prochains théorèmes sur les matrices de transition.

Dans l'exemple qui précède, les matrices $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des matrices de distribution et la suite $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ est une chaîne de Markov¹, au sens des définitions suivantes.

1. Andreï Andréievitch Markov (1856-1922) a été le premier à étudier de telles chaînes de distribution.

Matrice de distribution, matrice de transition

Une **matrice de distribution** est une matrice colonne dont tous les éléments sont compris entre 0 et 1 (inclusivement) et dont la somme est 1.

Une **matrice de transition** ou **matrice stochastique** est une matrice carrée dont toutes les colonnes sont des distributions.

Remarque

Les matrices de distribution de format 2×1 ont toutes la forme $\begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$, où $0 \leq x \leq 1$, et

les matrices de transition de format 2×2 ont toutes la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$ où $0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 1$.

Dans la proposition suivante, U_n est la matrice ligne de format $1 \times n$ dont tous les éléments sont 1 ; par exemple, $U_2 = (1 \ 1)$ et $U_3 = (1 \ 1 \ 1)$.

- 1) Soit D , une matrice colonne de format $n \times 1$ dont tous les éléments sont non négatifs ; alors D est une distribution si et seulement si $U_n D = (1)$.
- 2) Soit A , une matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont non négatifs ; alors A est une matrice de transition si et seulement si $U_n A = U_n$.

La démonstration de cette proposition repose simplement sur l'observation que la multiplication de U_n par D a pour effet d'additionner les éléments de D , ce qui donne 1, si et seulement si D est une distribution. La partie 2) est une conséquence de la partie 1), puisque les colonnes d'une matrice de transition sont par définition des distributions.

- 1) Soit A , une matrice de transition d'ordre n , et D , une distribution de format $n \times 1$. Alors AD est une distribution de format $n \times 1$.
- 2) Le produit AB de deux matrices de transition d'ordre n est une matrice de transition d'ordre n .
- 3) Les puissances (itérées) d'une matrice de transition sont des matrices de transition : si A est une matrice de transition, alors A^k est une matrice de transition pour toute valeur entière positive de k .

Démonstration

- 1) En vertu de la proposition précédente, il suffit de montrer que $U_n(AD) = (1)$. Or, $U_n(AD) = (U_n A)D = U_n D = (1)$.
- 2) En vertu de la proposition précédente, il suffit de montrer que $U_n(AB) = U_n$. Or, $U_n(AB) = (U_n A)B = U_n B = U_n$.
- 3) C'est une conséquence immédiate de la partie 2) de ce théorème.

Chaîne de Markov

Une **chaîne de Markov** est une suite $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ de matrices de distribution pour lesquelles il existe une matrice de transition A telle que

$$X_1 = AX_0, X_2 = AX_1, X_3 = AX_2, \dots, X_n = AX_{n-1}, \dots$$

Remarque

Dans une chaîne de Markov $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, où A est la matrice de transition, on a, comme conséquence de l'associativité du produit matriciel,

$$X_n = AX_{n-1} = AAX_{n-2} = \dots = \underbrace{AAA \cdots A}_{n \text{ facteurs}} X_0.$$

Il s'ensuit qu'on a simultanément

$$X_n = A^n X_0 \text{ et } X_n = AX_{n-1}.$$

EXEMPLE 2 (suite)

Si la distribution des parts de marché dans l'exemple 2 converge vers une distribution stable X , alors cette distribution X aura la propriété $X = AX$ relativement à la matrice de transition A . Cela s'écrit aussi $AX - IX = O$, où I et O sont respectivement la matrice identité de format 2×2 et la matrice nulle de format 2×1 . Cette dernière équation s'écrit encore $(A - I)X = O$, où l'on peut poser

$X = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}$ car X est une distribution. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -0,2 & 0,1 \\ 0,2 & -0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cette dernière équation matricielle se traduit par le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} -2x + 1-x &= 0, \\ 2x - (1-x) &= 0, \end{aligned}$$

qui a pour unique solution $x = 1/3$. On peut conclure que

$$X = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, \overline{3} \\ 0, \overline{6} \end{pmatrix}.$$

Cela confirme le résultat empirique obtenu précédemment : à long terme, si l'effet de la publicité était constant, la brasserie Gloubi conserverait le tiers du marché et la brasserie Boulga posséderait les deux autres tiers. Cette distribution serait **stationnaire** relativement à la matrice de transition A .

On note, de plus, que la distribution stationnaire X est indépendante de la distribution initiale X_0 (qui, dans l'exemple, valait $\begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix}$). En effet, l'équation $(A - I)X = O$, qui détermine X , ne dépend

pas de X_0 . Remarquons que l'équation $X_n = A^n X_0$ fait voir que la distribution stable X pourrait éventuellement s'écrire $X = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n X_0$, si les grandes puissances de la matrice A convergent vers une matrice de distribution stable. Voyons donc quelques puissances de la matrice de transition A calculées à l'aide d'un tableur :

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline 0,8 & 0,1 \\ \hline 0,2 & 0,9 \\ \hline \end{array}$$

$$A^2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 0,66 & 0,17 \\ \hline 0,34 & 0,83 \\ \hline \end{array}$$

$$A^4 = \begin{array}{|c|c|} \hline 0,4934 & 0,2533 \\ \hline 0,5066 & 0,7467 \\ \hline \end{array}$$

$$A^8 = \begin{array}{|c|c|} \hline 0,37176534 & 0,31411733 \\ \hline 0,62823466 & 0,68588267 \\ \hline \end{array}$$

$$A^{16} \approx \begin{array}{|c|c|} \hline 0,335548862 & 0,332225569 \\ \hline 0,664451138 & 0,667774431 \\ \hline \end{array}$$

$$A^{32} \approx \begin{array}{|c|c|} \hline 0,333340696 & 0,333329652 \\ \hline 0,666659304 & 0,666670348 \\ \hline \end{array}$$

On observe un résultat étonnant : $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. Les puissances de A «convergent» non seulement vers une matrice stable, mais en plus les colonnes de cette matrice sont identiques et précisément égales à la distribution stationnaire X . Le théorème suivant généralise la situation.

Pour toute **matrice de transition**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}, \text{ avec } A \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{on a } \lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \text{ où } \alpha = \frac{b}{1-(a-b)}.$$

De plus, $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$ est l'unique distribution stationnaire de la matrice de transition A , au sens

$$\text{où } A \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

La démonstration de ce théorème se trouve plus loin dans la section 6.5, *Pour aller plus loin*.

EXEMPLE 3

Le traitement d'images graphiques

Le produit d'une matrice carrée 2×2 par une matrice colonne 2×1 donne une matrice colonne 2×1 .

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Si l'on interprète la matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ comme le vecteur position d'un point P affiché sur l'écran d'un ordinateur, alors le produit $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ transforme la position $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du point P en une nouvelle position $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, et on peut alors voir la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ comme une **matrice de transformation** d'écran. Par exemple, si les vecteurs positions des sommets P_1 , P_2 et P_3 d'un triangle affiché sur l'écran sont respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (voir la figure 6.3) et si la matrice de transformation est donnée par

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alors les points P_1 , P_2 et P_3 seront transformés respectivement en P'_1 , P'_2 et P'_3 , dont les vecteurs positions seront

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ pour } P'_1, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ pour } P'_2, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ pour } P'_3. \end{aligned}$$

Le triangle $P_1P_2P_3$ est transformé en un autre triangle $P'_1P'_2P'_3$ par la matrice A .

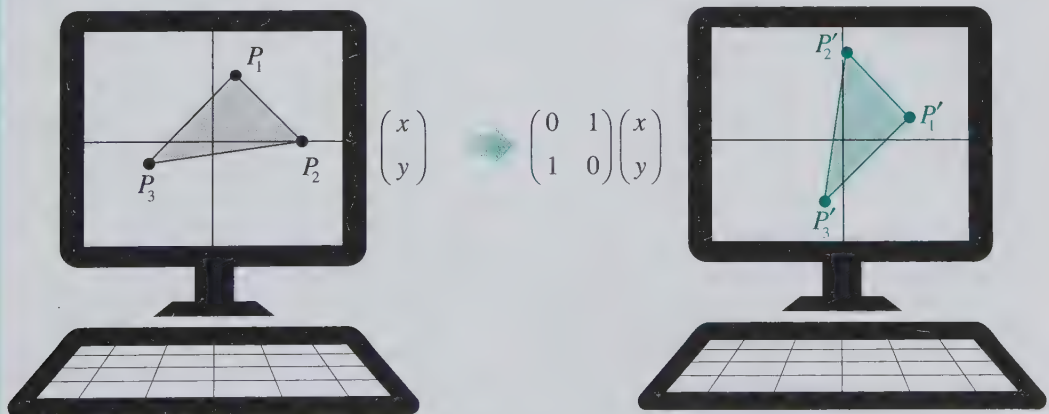


FIGURE 6.3

Remarquez l'efficacité du langage matriciel pour condenser l'écriture : une seule équation matricielle suffit pour obtenir simultanément les sommets P'_1 , P'_2 et P'_3 à partir de la matrice A et des sommets P_1 , P_2 et P_3 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{P_1P_2P_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}}_{P'_1P'_2P'_3}.$$

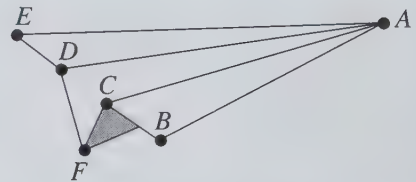
Par exemple, pour connaître l'effet de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ sur les sommets $P_1(0, 0)$, $P_2(2, -2)$, $P_3(4, 1)$ et $P_4(1, 5)$ d'un quadrilatère, il suffit de calculer le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

et les quatre nouveaux sommets sont donnés par les quatre vecteurs colonnes de la matrice produit : $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 11 \\ 0 & -8 & -1 & 14 \end{pmatrix}$. On présente au chapitre 7 une étude détaillée des matrices 2×2 considérées comme une représentation des transformations.

EXERCICES 6.1

1. Écrivez la matrice d'adjacence entre les sommets de l'avion de papier illustré ci-contre (voir l'exemple 2 de la sous-section 6.1.1, au besoin).



2. Écrivez la matrice A de format 2×3 dont les éléments a_{ij} sont donnés en fonction de i et de j par

a) $a_{ij} = i$

b) $a_{ij} = j$

c) $a_{ij} = i + j$

d) $a_{ij} = \max\{i, j\}$

3. Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calculez la valeur numérique de chacune des expressions suivantes.

a) $\sum_{j=1}^4 a_{2j}$

b) $\sum_{i=1}^2 a_{i4}$

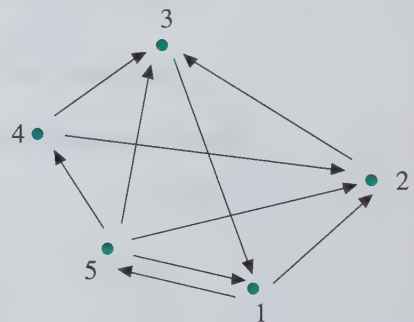
c) $\sum_{i=1}^3 a_{ii}$

d) $\sum_{j=1}^4 (a_{1j} - a_{3j})$

4. a) Écrivez la matrice de transition M correspondant au graphe de la figure ci-contre qui représente, comme dans l'exemple 3 de la sous-section 6.1.1, un miniréseau de pages Web avec un internaute indifférent.

- b) Tracez un graphe qui représente, comme dans l'exemple 3 de la sous-section 6.1.1, un miniréseau de 4 pages Web avec un internaute indifférent, et qui correspond à la matrice de transition

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



5. Dans chacune des équations matricielles suivantes, trouvez le format de la matrice A .

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Soit X , une matrice carrée quelconque. Montrez que $X + X^T$ est une matrice symétrique et que $X - X^T$ est une matrice antisymétrique. Montrez ensuite que toute matrice X est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

7. Montrez que, quelle que soit la matrice A , A et A^T sont compatibles pour la multiplication dans l'ordre AA^T et dans l'ordre $A^T A$.

8. Effectuez les produits matriciels suivants.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$c) (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 1)^T$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^3$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Vrai ou faux. Justifiez votre réponse.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

10. Dans chacun des cas suivants, trouvez des matrices A , X et C telles que le système d'équations linéaires donné soit équivalent à l'équation matricielle $AX = C$.

$$a) \begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ x - y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} y - z = 2 \\ 2x + 3y = 1 \\ -y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x - 5y + 2z = 5 \\ x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ -y + 5z = 0 \end{cases}$$

11. Traduisez chacune des équations matricielles suivantes en un système d'équations linéaires. Résolvez ensuite le système obtenu par la méthode de Gauss-Jordan.

$$a) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

12. Vrai ou faux. Si l'énoncé suivant est vrai, faites-en la preuve ; si l'énoncé est faux, donnez un contre-exemple.

Si A et B sont deux matrices carrées de même format telles $AB = O$, alors $A = O$ ou $B = O$.

13. Donnez un exemple de deux matrices carrées 2×2 A et B non nulles et distinctes pour lesquelles

$$a) (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad c) (A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$

$$b) (A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2 \quad d) (A-B)(A+B) \neq A^2 - B^2$$

14. Démontrez l'identité $(AB)^T = B^T A^T$ en suivant les étapes suivantes :

a) montrez que si A et B sont compatibles pour la multiplication dans l'ordre AB (le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B), alors B^T et A^T sont compatibles pour la multiplication dans l'ordre $B^T A^T$;

b) montrez que les formats des matrices $(AB)^T$ et $B^T A^T$ sont les mêmes ;

c) montrez que l'élément dans la ligne i et la colonne j de la matrice $(AB)^T$ est égal à l'élément dans la ligne i et la colonne j de la matrice $B^T A^T$, à l'aide des indications suivantes :

- l'élément dans la ligne i et la colonne j de la matrice X^T est l'élément dans la ligne j et la colonne i de la matrice X ;
- l'élément dans la ligne i et la colonne j de la matrice XY est égal au produit scalaire de la ligne i de X et de la colonne j de Y ;
- la ligne i de X^T est la colonne i de X ;
- la colonne i de X^T est la ligne i de X .

15. À la fin d'une session, trois étudiants (E_1, E_2 et E_3) veulent calculer leur note finale au cours de mathématiques à partir de leurs résultats des trois contrôles (C_1, C_2 et C_3) et des travaux pratiques (TP). Le plan de cours prévoit trois modes de calcul avec des pondérations différentes (P_1, P_2 et P_3). Chaque étudiant aura donc trois moyennes, et le professeur retiendra pour chacun la plus élevée des trois notes. À partir des tableaux suivants et d'un calcul matriciel approprié, déterminez quel étudiant aura le meilleur résultat.

	Notes sur 100			
	TP	C_1	C_2	C_3
E_1	70	60	50	70
E_2	80	80	70	60
E_3	60	90	80	60

	Pondérations (%)		
	P_1	P_2	P_3
TP	25	10	20
C_1	25	20	10
C_2	25	30	10
C_3	25	40	60

16. Déterminez une matrice symétrique S de format approprié pour laquelle le produit $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est une matrice 1×1 dont l'unique élément est $4x^2 - 16xy - 3y^2$.

17. Certaines personnes affirment que prédire qu'il fera le même temps demain qu'aujourd'hui est la meilleure prédiction météorologique que l'on puisse faire. Un adepte de cette théorie, qui tient des statistiques depuis plusieurs années, a dressé un tableau montrant les probabilités de passage d'un état à un autre (ensoleillé ou non ensoleillé) sur une période de 24 heures.

On représente ce tableau par la matrice de transition $A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$.

de à		
	0,9	0,4
	0,1	0,6

- a) Calculez et interprétez la valeur de chacun des quatre éléments de la matrice A^2 .
- b) Calculez $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$.
- c) D'après le résultat obtenu en b), quelle est, sur une très longue période, la proportion de journées ensoleillées dans la région où l'on a obtenu la matrice A ?
18. Une entreprise de location d'automobiles possède deux succursales de location à court terme. Les clients peuvent louer une voiture et la ramener à l'une ou l'autre succursale à la fin d'une période de location (24 heures), ou ils peuvent prolonger la location d'une autre période. À la fin d'une période de 24 heures, chaque voiture se trouve donc dans l'une des trois situations suivantes :

E_1 : la voiture se trouve à la succursale 1 ;

E_2 : la voiture se trouve à la succursale 2 ;

E_3 : la voiture est louée.

Chaque élément a_{ij} de la matrice de transition A représente la proportion d'automobiles qui passent de la situation E_j à la situation E_i dans une période de 24 heures selon les statistiques établies par cette entreprise. On suppose que cette matrice est la même chaque jour et qu'elle est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,5 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Si l'on désigne par x et y les proportions du nombre total d'automobiles de cette entreprise qui sont respectivement dans les situations E_1 et E_2 à la fin d'une période de 24 heures, l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,5 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - (x + y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - (x + y) \end{pmatrix}$$

indique que la distribution $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - (x + y) \end{pmatrix}$ est stationnaire.

- a) En écrivant l'équation matricielle précédente sous la forme d'un système de trois équations linéaires à deux inconnues (x et y) et en résolvant ce système, déterminez les proportions stables x , y et $1 - (x + y)$.
- b) Si l'entreprise dispose de 104 automobiles, combien d'entre elles se trouvent dans chacune des trois situations, à la fin d'une période de 24 heures, lorsque la distribution est stable ?
19. À l'aide d'un outil de calcul approprié (par exemple Excel, Maple, etc.), calculez A^2 , A^4 , A^8 et A^{16} pour la matrice de transition A de l'exercice 18. Comparez les colonnes de la matrice A^{16} avec la distribution stationnaire de la matrice A .

LES MATRICES ÉLÉMENTAIRES ET LES MATRICES INVERSIBLES

Dans cette section, nous montrons comment coder les opérations élémentaires dans les lignes d'une matrice sous la forme de matrices dites élémentaires. Nous utilisons ensuite ces matrices pour expliquer la méthode d'inversion de Gauss-Jordan : étant donné une matrice carrée A , comment trouver (lorsque c'est possible) la matrice A^{-1} inverse de A , au sens où $AA^{-1} = I$ et $A^{-1}A = I$.

6.2.1 LES MATRICES ÉLÉMENTAIRES

Matrice élémentaire

Une **matrice élémentaire** d'ordre n est une matrice carrée d'ordre n obtenue en effectuant sur la matrice identité d'ordre n une et une seule opération élémentaire.

EXEMPLE 1

$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices élémentaires d'ordre 2 :

on obtient $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow -2L_1$;

on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow (L_2 + 3L_1)$;

on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow (L_1 + L_2)$.

EXEMPLE 2

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices élémentaires d'ordre 3 :

on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow 5L_2$;

on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow (L_3 - 4L_2)$;

on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow (L_1 + 2L_3)$.

Les observations suivantes font ressortir la pertinence des matrices élémentaires.

OBSERVATION 1

Effectuer une opération élémentaire sur une matrice A de format $m \times n$ donnée équivaut à multiplier (à gauche) cette matrice A par la matrice élémentaire d'ordre m correspondant à cette opération élémentaire.

EXEMPLE 1

Pour permuter les lignes 2 et 3 de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, on multiplie A à gauche par

la matrice élémentaire $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ obtenue en permutant les lignes 2 et 3 de la matrice identité d'ordre 3 :

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 2

Pour ajouter la 1^{re} ligne -5 fois à la 2^e ligne dans la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, on multiplie à

gauche par la matrice élémentaire $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Comme conséquence de l'observation précédente, on peut reformuler la définition de « matrices l -équivalentes » donnée au chapitre 5 comme suit.

OBSERVATION 2

Deux matrices A et B de même format sont l -équivalentes si et seulement s'il existe des matrices élémentaires $E_k, \dots, E_2, E_1$ telles que

$$E_k \dots E_2 E_1 A = B.$$

6.2.2 LES MATRICES CARRÉES INVERSIBLES

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice sont réversibles, c'est-à-dire que pour chaque opération élémentaire, il existe une autre opération élémentaire (parfois la même) qui annule son effet. Par exemple, si l'opération élémentaire consiste à multiplier une ligne par 3, l'opération élémentaire inverse consiste à multiplier cette même ligne par $1/3$; si l'opération élémentaire consiste à ajouter 3 fois la ligne j à la ligne i , alors l'opération élémentaire inverse consiste à ajouter -3 fois la ligne j à la ligne i ; si l'opération élémentaire consiste à permuter les lignes i et j , alors l'opération élémentaire inverse consiste à refaire la même chose.

Opération élémentaire	Opération élémentaire inverse
$L_i \leftrightarrow L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$
$L_i \leftarrow kL_i$	$L_i \leftarrow \frac{1}{k}L_i$
$L_i \leftarrow L_i + kL_j$	$L_i \leftarrow L_i - kL_j$

Cela justifie la proposition suivante.

Pour toute matrice élémentaire E d'ordre n , il existe une matrice élémentaire d'ordre n , notée E^{-1} et appelée l'**inverse** de E , telle que $EE^{-1} = E^{-1}E = I$.

EXEMPLE 1

Si $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$EE^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

et

$$E^{-1}E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

EXEMPLE 2

Si $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (faites la vérification).

EXEMPLE 3

Si $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $E^{-1} = E$ (faites la vérification).

Voici un théorème fondamental pour l'étude des matrices inversibles.

2

Soit A , une matrice non ERL; alors A peut s'écrire comme le produit d'un nombre fini de matrices élémentaires $E_1, E_2, \dots, E_k$ et d'une matrice ERL R unique (R est la forme ERL de A):

$$A = E_k \dots E_2 E_1 R.$$

Preuve

Soit A , une matrice non *ERL*; l'algorithme de réduction de Gauss-Jordan nous assure qu'il existe des matrices élémentaires $E_1, \dots, E_k$ telles que $E_k \dots E_2 E_1 A = R$, où R est la forme *ERL* de A (voir l'observation 2 de la sous-section 6.2.1). Puisque $E_1, \dots, E_k$ sont des matrices élémentaires, elles sont inversibles et leurs inverses $E_1^{-1}, \dots, E_k^{-1}$ sont aussi des matrices élémentaires (voir la proposition précédente); en multipliant chaque membre de l'équation

$$E_k \dots E_2 E_1 A = R$$

par le produit $E_1^{-1} \dots E_k^{-1}$ on obtient

$$(E_1^{-1} \dots E_k^{-1}) E_k \dots E_2 E_1 A = (E_1^{-1} \dots E_k^{-1}) R,$$

ce qui donne $A = E_1^{-1} \dots E_k^{-1} R$ après simplification. La matrice A est donc le produit d'un nombre fini de matrices élémentaires et d'une matrice *ERL* unique.

EXEMPLE

L'application de l'algorithme de réduction de Gauss-Jordan à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et par suite

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui fait

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = F_3 F_2 F_1 R$$

où F_1, F_2 et F_3 sont élémentaires.

Voici maintenant une définition générale du concept de matrice inversible.

Matrice inversible

Une matrice carrée A d'ordre n est dite **inversible** s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $AB = BA = I$; la matrice B est notée A^{-1} et est appelée l'inverse de A .

Voici quelques propriétés remarquables³ des matrices inversibles.

PM11 L'inverse d'une matrice A est unique.

En effet, si B et C sont deux matrices inverses de A , alors

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

3. Nous verrons d'autres propriétés des matrices inversibles relatives aux déterminants à la sous-section 6.3.2.

PM12 L'inverse de l'inverse de A est A .

Si A est inversible, alors A^{-1} l'est aussi et $(A^{-1})^{-1} = A$.

PM13 L'inverse d'un produit de matrices inversibles est le produit des inverses de ces matrices dans l'ordre inverse.

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des matrices carrées d'ordre n inversibles, alors le produit de ces matrices est inversible et

$$(A_1 A_2 \dots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1} \text{ (attention à l'ordre).}$$

PM14 L'inverse de la transposée d'une matrice est la transposée de son inverse. Si A est inversible, alors A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. En effet, en transposant les deux membres de l'équation $AA^{-1} = I$, on obtient

$$(A^{-1})^T A^T = I \quad [\text{Propriété PM6}]$$

et en transposant les deux membres de l'équation $A^{-1}A = I$ on obtient

$$A^T (A^{-1})^T = I. \quad [\text{Propriété PM6}]$$

$$A^{-n} = (A^{-1})^n \text{ et } A^0 = I.$$

Remarques

1. Comme conséquence de l'associativité du produit matriciel, on a aussi $A^n A^m = A^{n+m}$ et $(A^n)^m = A^{nm}$ pour $n, m \in \mathbb{Z}$.
2. Les matrices carrées ne sont pas toutes inversibles. Par exemple, la matrice nulle n'est pas inversible. Voici un exemple d'une matrice non nulle et non inversible:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, car

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quels que soient a, b, c et d .

Étant donné une matrice A , comment sait-on si A est inversible et, le cas échéant, y a-t-il une méthode pour trouver A^{-1} ? La prochaine définition et le théorème qui suit permettent de répondre à ces deux questions.

Matrice régulière

Une matrice carrée A d'ordre n est dite **régulière** si sa forme ERL est la matrice identité d'ordre n ; de façon équivalente, on peut dire qu'une matrice carrée d'ordre n est régulière si elle est de rang n .

Les matrices élémentaires sont des exemples de matrices régulières.

Remarque

En vertu du théorème de Gauss-Jordan, les matrices régulières sont précisément les matrices qui s'écrivent comme un produit de matrices élémentaires.

Soit A , une matrice carrée. Alors A est inversible $\Leftrightarrow A$ est régulière.

Preuve

- 1) Supposons que A est une matrice carrée inversible. Montrons que A est alors régulière, c'est-à-dire de rang n . Pour cela, il faut montrer que si A est interprétée comme la matrice des coefficients d'un système d'équations linéaires, alors ce système admet une et une seule solution (la forme ERL de A est alors forcément I).

Posons $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Alors, le système d'équations

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & c_n \end{array} \quad \text{est équivalent à l'équation matricielle } AX = C; \text{ puisque}$$

A est inversible, cette équation est équivalente (après la multiplication à gauche par A^{-1} de chaque membre) à $A^{-1}AX = A^{-1}C$ et donc à $X = A^{-1}C$; on constate que la solution X existe et est unique. La matrice des coefficients A est donc de rang n et A est régulière.

- 2) Supposons maintenant que A est une matrice carrée régulière; montrons que A est inversible. Puisque A est régulière, A est l -équivalente à la matrice identité I ; il existe alors des matrices élémentaires $E_1, E_2, \dots, E_p$ telles que

$$E_p \dots E_2 E_1 A = I.$$

Puisque les matrices élémentaires sont inversibles, l'équation $E_p \dots E_2 E_1 A = I$ équivaut à $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_p^{-1}$. En posant $B = E_p \dots E_2 E_1$, on déduit de ces deux équations que $BA = AB = I$.

La deuxième partie de la démonstration du théorème précédent nous donne une méthode explicite de calcul de A^{-1} lorsque A est régulière: $B = A^{-1} = E_p \dots E_2 E_1 I$. Pour calculer A^{-1} , il suffit donc d'effectuer sur la matrice identité les opérations élémentaires (dans le même ordre) qui transforment A en sa forme ERL (dans ce cas-ci I). Cela donne la méthode d'inversion de Gauss-Jordan.

Soit A , une matrice carrée d'ordre n régulière. Pour calculer A^{-1} , on augmente la matrice A de la matrice identité d'ordre n et on applique la méthode de réduction de Gauss-Jordan à la matrice augmentée $(A | I)$. Une fois réduite, cette matrice s'écrira $(I | A^{-1})$.

Pour s'assurer qu'il n'y a pas eu d'erreur de calcul lors de l'inversion, on peut toujours vérifier que $AA^{-1} = I$ en effectuant le produit matriciel AA^{-1} .

EXEMPLE 1

Pour inverser $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on augmente A de $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on réduit.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{L_2 \leftarrow (L_2 - 3L_1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_1 \leftarrow (L_1 + L_2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow \left(-\frac{1}{2}L_2\right)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ainsi $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, et on peut vérifier que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 2

Pour inverser $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on augmente A de $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on réduit.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow (L_2 + L_1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_3 \leftarrow (L_3 - 2L_1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_3 \leftarrow (L_3 + L_2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow \left(\frac{1}{2}L_2\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{L_1 \leftarrow (L_1 - L_2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow \left(\frac{1}{3}L_3\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow (L_1 + L_3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow (L_2 - L_3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/6 & 5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{array} \right)$$

Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 & 1/6 \\ -1/3 & 1/6 & 5/6 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} = 1/6 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et on vérifie que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} 1/6 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 3

Pour inverser $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, on augmente A de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on réduit.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow (L_2 + 2L_1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Cette fois, on constate que A n'est pas régulière (elle est de rang 1 au lieu de rang 2); donc, A n'est pas inversible.

Remarques

1. L'exemple 2 montre que l'inversion d'une matrice d'ordre supérieur à 3 conduit à des calculs numériques fastidieux. En pratique, on fait ces calculs à l'aide d'un ordinateur.
2. Nous décrirons plus loin (voir la sous-section 6.3.3) une autre méthode d'inversion basée sur les déterminants. Grâce aux déterminants, nous disposerons aussi d'un test rapide pour savoir si une matrice donnée est inversible sans avoir à la réduire : il suffira de vérifier si le déterminant de cette matrice est non nul (voir la sous-section 6.3.2).

EXERCICES 6.2

1. Dressez la liste de toutes les matrices élémentaires de format

a) 2×2 ;

b) 3×3 .

2. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont élémentaires ?

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Trouvez trois matrices élémentaires E_1 , E_2 et E_3 telles que

$$E_1 E_2 E_3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont-elles uniques ?

4. Trouvez l'inverse de chacune des matrices élémentaires.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Inversez les matrices suivantes à l'aide de la méthode d'inversion de Gauss-Jordan.

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{matrix} abc \neq 0 \end{matrix}$$

$$h) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Écrivez la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ comme un produit de trois matrices élémentaires (voir l'exercice 3).

7. Écrivez la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ comme un produit de deux matrices élémentaires.

8. Dans chacune des équations matricielles suivantes, trouvez la matrice inconnue X ; pour ce faire, isolez d'abord la matrice inconnue X , puis effectuez les calculs numériques requis. Attention à la non-commutativité du produit matriciel.

$$a) AXB + C = D, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$b) AX + B = X, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$c) XA + B = X, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Tout système d'équations linéaires peut s'écrire $AX = C$, où A est la matrice des coefficients, X est la matrice des inconnues et C est la matrice des constantes. Si le système est tel que la matrice A est inversible, alors la solution est donnée par $X = A^{-1}C$. Appliquez cette méthode pour résoudre les systèmes suivants.

$$a) \begin{cases} 5x + 7y = 8 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 100 \\ 2x - y + z = 200 \\ x - y + z = 100 \end{cases}$$

LE DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE

En généralisant les concepts de déterminants 2×2 et 3×3 présentés au chapitre 3, on peut associer à toute matrice carrée A d'ordre n un déterminant $n \times n$ noté $\det A$. Dans l'algèbre matricielle, les déterminants occupent une place importante tant en théorie qu'en pratique. C'est que la valeur numérique du déterminant d'une matrice carrée fournit toutes sortes d'informations sur cette matrice de nature tant algébrique que géométrique. Dans cette section, nous ne traitons que des aspects algébriques des déterminants des matrices carrées; nous verrons au chapitre 7 la signification géométrique des déterminants de matrices lorsque celles-ci sont interprétées comme des transformations linéaires.

6.3.1 LES DÉTERMINANTS $n \times n$: DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS INTRINSÈQUES

À toute matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'ordre 2 se trouve naturellement associé le déterminant de format 2×2 défini par (voir le chapitre 3)

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

et représentant l'aire orientée du parallélogramme engendré par les vecteurs lignes de la matrice A . Par exemple, $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$. De même, à toute matrice

carrée $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ x & y & z \end{pmatrix}$ d'ordre 3 se trouve naturellement associé le déterminant de

format 3×3 défini par

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ x & y & z \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} s & t \\ y & z \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} r & t \\ x & z \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} r & s \\ x & y \end{vmatrix}.$$

La valeur numérique de ce déterminant représente le volume orienté du parallépipède engendré par les vecteurs lignes de la matrice A . Par exemple,

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -16.$$

On peut définir les déterminants des matrices carrées d'ordre supérieur à 3 soit à partir des propriétés axiomatiques des déterminants 2×2 et 3×3 , soit par récurrence à partir des formules explicites de calcul des déterminants 2×2 et 3×3 . Compte tenu de l'usage restreint que nous ferons ici des déterminants de matrices d'ordre supérieur à 3, nous limiterons les développements théoriques et nous considérerons que la définition par récurrence donnée confère aux déterminants $n \times n$ toutes les propriétés axiomatiques des déterminants 2×2 et 3×3 de même que les autres propriétés qui en découlent⁴.

Au chapitre 3, nous n'avons pas défini les déterminants 1×1 , car ils n'avaient aucun intérêt particulier⁵; convenons cependant que le déterminant d'une matrice carrée $A = (a)$ d'ordre 1 a pour valeur a ; ainsi, $\det(-8) = -8$ et $\det(5) = 5$.

Étant donné que les déterminants des matrices carrées d'ordres 1, 2 et 3 sont déjà définis, définir par récurrence les déterminants de format $n \times n$ pour $n \geq 3$ revient à dire comment les déterminants de format $n \times n$ se calculent à partir des déterminants de format $(n-1) \times (n-1)$.

Déterminant d'une matrice carrée A d'ordre n : $\det A$

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, une matrice carrée d'ordre n , avec $n \geq 3$. Alors le

déterminant de A , noté $\det A$, est le nombre défini par

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n},$$

où, pour $j = 1, 2, \dots, n$, $\det A_{1j}$ est le déterminant de format $(n-1) \times (n-1)$ de la matrice carrée A_{1j} obtenue en supprimant la première rangée de A et la j -ième colonne de A ; $\det A_{1j}$ est appelé le **mineur** de l'élément a_{1j} et $(-1)^{1+j} \det A_{1j}$ est appelé le **cofacteur** de a_{1j} .

EXEMPLE

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, $\det A$ est donné par

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(-6) - (2) - 3(-1) + (-1) = -12. \end{aligned}$$

Les propriétés intrinsèques des déterminants de formats 2×2 et 3×3 justifiées au chapitre 3 s'appliquent aussi aux déterminants $n \times n$. Voici comment on peut les reformuler.

4. Pour un traitement complet et accessible des déterminants, consulter l'ouvrage de P. Leroux, *Algèbre linéaire : une approche matricielle*, Modulo Éditeur, 1983, p. 255-298.

5. On pourrait définir les déterminants 1×1 comme des **longueurs orientées**.

D1 $\det I = 1$ quel que soit le format de la matrice identité I .

EXEMPLE

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

D2 Un déterminant dans lequel deux lignes sont identiques est nul.

EXEMPLE

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

D3 Si le nombre non nul k est un facteur commun de tous les éléments de la ligne i de la matrice carrée A , alors $\det A = k \det(A')$, où A' est la matrice obtenue en divisant tous les éléments de la ligne i de A par k .

EXEMPLE

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x^2 & x^3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & x^2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{ATTENTION! } \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ mais } \begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = k^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Si A est d'ordre n , alors $\det(kA) = k^n \det A$.

D4 Dans une matrice carrée A , si la ligne L_i , considérée comme une matrice ligne, est la somme de deux matrices lignes L'_i et L''_i , alors $\det A$ est la somme des deux déterminants $\det(A')$ et $\det(A'')$, où A' et A'' sont obtenues en remplaçant dans A la ligne L_i respectivement par L'_i et L''_i .

EXEMPLE

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1+x & 1+y & 1+z \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

D5 Permuter deux lignes d'un déterminant équivaut à changer le signe de ce déterminant.

EXEMPLE

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

- D6** À une ligne donnée d'un déterminant, on peut ajouter un multiple d'une autre ligne sans changer la valeur de ce déterminant.

EXEMPLE

$$\begin{vmatrix} 1-5x & 2-5y & 3-5z \\ x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

- D7** Si un déterminant possède une ligne nulle, alors ce déterminant est nul.

EXEMPLE

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Remarque

Les propriétés D5, D6 et D7 peuvent être démontrées à partir des propriétés D1 à D4 lorsqu'on considère ces dernières comme des axiomes qui définissent le concept de déterminant ; la formule de calcul des déterminants donnée dans la définition par récurrence est également une conséquence, moins évidente, des propriétés D1 à D4 lorsqu'on adopte le point de vue axiomatique⁶.

On peut évaluer les déterminants de quelques matrices particulières très rapidement avec la formule de calcul donnée dans la définition de «déterminant». C'est le cas pour les déterminants des matrices triangulaires (inférieures ou supérieures) et pour les matrices diagonales : dans ces cas, le déterminant est simplement le produit des éléments situés sur la diagonale.

EXEMPLE

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(1)(3)(-1) = 6 ; \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(1)(3)(-1) = 6 ;$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(1)(3)(-1) = 6.$$

6.3.2 LES PROPRIÉTÉS DES DÉTERMINANTS RELATIVES AUX OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

Relativement à la transposition, à la multiplication et à l'inversion, les déterminants ont les propriétés suivantes que nous ajoutons aux sept propriétés de la sous-section 6.3.1.

- D8** Si A est une matrice carrée d'ordre n , alors A est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

6. La démonstration de cette formule de calcul est faite au chapitre 3 pour les formats 2×2 et 3×3 .

EXEMPLE

$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

D9 Si A et B sont des matrices carrées d'ordre n , alors

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) \text{ et } \det(A^k) = (\det A)^k.$$

EXEMPLE

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\det A = 3$, $\det B = 2$, $AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\det(AB) = 6$; on constate que $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

D10 $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

EXEMPLE

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, $\det A = 3$ et $\det(A^{-1}) = 1/3$; on constate que $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

D11 $\det A^T = \det A$; cette propriété fait en sorte que si l'on remplace systématiquement le mot « ligne » par le mot « colonne » dans les propriétés D2 à D7, alors ces propriétés demeurent valides.

EXEMPLE

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; on constate que $\det A = 3 = \det A^T$.

La démonstration de ces propriétés dépend essentiellement du théorème de Gauss-Jordan; nous l'avons reportée à la section *Pour aller plus loin* (voir la sous-section 6.5.2), car elle n'est pas essentielle à une première lecture et requiert un niveau d'abstraction relativement élevé.

Voici deux exemples d'utilisation des propriétés D1 à D11 dans des calculs de déterminants.

EXEMPLE 1

Pour calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, on commence par le simplifier.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} && \text{[Propriété D6 avec } L_i \leftarrow (L_i - L_{i+1}) \text{ successivement,} \\ && \text{pour } i = 1, 2, 3] \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} && \text{[Propriété D6 avec } L_i \leftarrow (L_i - L_{i+1}) \text{ successivement,} \\ && \text{pour } i = 1, 2, 3] \\ &= - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} && \text{[Permutation des colonnes 1 et 3 selon les propriétés D11} \\ && \text{et D5]} \\ &= -(-2)(-2)(-5)(1) = 20 && \text{[Matrice triangulaire]} \end{aligned}$$

EXEMPLE 2

Supposons que A et B sont des matrices carrées d'ordre 4 et que $\det A = -2$ et $\det B = 1/3$. Alors, pour calculer $\det (2AB^{-1})^T$, on procéderait comme suit :

$$\begin{aligned}\det (2AB^{-1})^T &= \det (2AB^{-1}) \\ &= \det (2A) \det (B^{-1}) \\ &= 2^4 (\det A) (\det B)^{-1} \\ &= 2^4 (-2) (1/3)^{-1} \\ &= -96\end{aligned}$$

Résumons la théorie des matrices inversibles par neuf énoncés équivalents.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre n . Alors, les énoncés suivants sont équivalents.

- 1) A est régulière.
- 2) A est de rang n .
- 3) La forme *ERL* de A est la matrice identité I .
- 4) A peut s'écrire comme un produit de matrices élémentaires.
- 5) A est inversible.
- 6) $\det A \neq 0$.
- 7) Le système d'équations linéaires

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & c_n \end{array}$$

a une seule solution.

- 8) Les vecteurs lignes de A sont linéairement indépendants.
- 9) Les vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendants.

Remarque

L'équivalence entre les énoncés 6 et 8 est une généralisation du test de la dépendance linéaire (à l'aide des déterminants) vu au chapitre 3 ; l'équivalence étonnante entre les énoncés 8 et 9 est une conséquence de la propriété D11 des déterminants.

6.3.3 LA MÉTHODE D'INVERSION PAR LA MATRICE ADJOINTE

La méthode d'inversion de Gauss-Jordan pour les matrices carrées régulières (voir la sous-section 6.2.2) est donnée sous la forme d'un algorithme (l'algorithme de réduction à la forme *ERL* de la matrice augmentée $A | I$). Dans certaines occasions, il est utile d'avoir une formule explicite de calcul des éléments de A^{-1} à partir des éléments de A . Nous donnons

ici cette formule d'inversion sans démonstration⁷; vous pouvez toutefois la vérifier pour les matrices carrées régulières d'ordre 2 et d'ordre 3.

Mineur et cofacteur d'un élément a_{ij} d'une matrice carrée

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, une matrice carrée d'ordre n .

- 1) Le **mineur** de la position (i, j) de A , qu'on appelle aussi, abusivement, le mineur de l'élément a_{ij} , est le déterminant $\det A_{ij}$ de la matrice A_{ij} obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A .
- 2) Le **cofacteur** de position (i, j) de A , qu'on appelle aussi, abusivement, le cofacteur de l'élément a_{ij} , est $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

EXEMPLE

Dans la matrice $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, le mineur de la position $(2, 3)$ ou, encore, le mineur de l'élément -4

est $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -19$;

le cofacteur de la position $(2, 3)$ ou, encore, le cofacteur de l'élément -4 est $(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(-19) = 19$;

le mineur de la position $(3, 1)$ ou, encore, le mineur de l'élément 5 est $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -9$;

le cofacteur de la position $(3, 1)$ ou, encore, le cofacteur de l'élément 5 est $(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = (1)(-9) = -9$.

Matrice des cofacteurs de A et matrice adjointe de A

Si A est une matrice carrée d'ordre n , alors la **matrice des cofacteurs de A** , notée $\text{cof}(A)$, est la matrice obtenue en remplaçant chaque élément a_{ij} de A par son cofacteur. La **matrice adjointe de A** , notée $\text{adj}(A)$, est la matrice transposée de la matrice des cofacteurs de A : $\text{adj}(A) = (\text{cof}(A))^T$.

EXEMPLE

Pour la matrice $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, on aura

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -20 & -5 \\ -1 & -11 & 19 \\ -9 & -12 & -3 \end{pmatrix} \text{ et}$$

7. Vous trouverez une démonstration générale de la formule d'inversion dans l'ouvrage de P. Leroux et dans celui de Ben Noble, *Applied Linear Algebra*.

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 14 & -20 & -5 \\ -1 & -11 & 19 \\ -9 & -12 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 14 & -1 & -9 \\ -20 & -11 & -12 \\ -5 & 19 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si A est une matrice carrée régulière, alors l'inverse de A est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A).$$

EXEMPLE

Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, on a

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 14 & -1 & -9 \\ -20 & -11 & -12 \\ -5 & 19 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } \det A = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -87$$

et la formule d'inversion par l'adjointe donne

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A) = \frac{-1}{87} \begin{pmatrix} 14 & -1 & -9 \\ -20 & -11 & -12 \\ -5 & 19 & -3 \end{pmatrix}.$$

Pour terminer, mentionnons que le calcul d'un déterminant peut se faire avec la formule du développement de Laplace selon la i -ième rangée :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \text{ où } i \text{ est arbitraire mais fixe.}$$

Ce calcul peut aussi se faire avec la formule du développement de Laplace selon la j -ième colonne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \text{ où } j \text{ est arbitraire mais fixe.}$$

Ces formules de Laplace permettent de réduire les calculs numériques lorsqu'une ligne ou une colonne contient beaucoup de 0 dans un déterminant de grand format.

EXEMPLE

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} \\
 = (-1)(-1)^{2+3} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix} \\
 = 2 \left\{ (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \right\} \\
 = 2(-20 + 18) \\
 = -4$$

EXERCICES 6.3

1. Évaluez les déterminants suivants à partir de la définition par récurrence et des propriétés D1 à D7. Observez bien les déterminants avant de calculer.

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 7 & -2 \end{vmatrix} &
 \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 5 & 7 & 9 & 7 \\ 3 & -2 & 7 & 6 \end{vmatrix} &
 \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} &
 \text{d)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

2. Soit A et B , deux matrices carrées d'ordre 3 telles que $\det A = 3$ et $\det B = -2$. Évaluez les déterminants suivants à partir des propriétés D8 à D11.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \det \left(\left(\frac{1}{3} A \right)^{-1} B^T \right) &
 \text{b)} \det \left(A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} B \right)
 \end{array}$$

3. A et B sont des matrices carrées d'ordre n , $n \geq 2$. Dites, à propos de chacun des énoncés, s'il est vrai ou faux.

- $$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \det(AB) = \det(BA) & \text{e)} \det(2A) = \det A \Rightarrow A \text{ est non inversible.} \\
 \text{b)} \det(-A) = -\det(A) & \text{f)} \det(A-B) = 0 \Rightarrow A = B. \\
 \text{c)} \det(AB) = 5 \Rightarrow A \text{ et } B \text{ sont inversibles.} & \text{g)} \det(AB) \neq 0 \Rightarrow A \text{ et } B \text{ ont le même rang.} \\
 \text{d)} \det A^2 = 1 \Rightarrow A = I \text{ ou } A = -I. & \text{h)} \det A^2 = 0 \Rightarrow \det A = 0.
 \end{array}$$

4. Déterminez toutes les valeurs de k pour lesquelles le système d'équations linéaires suivant a une et une seule solution.

$$x + y + z - kw = 0$$

$$x + ky + 2z + w = 1$$

$$2x + ky + z + w = 2$$

$$x + ky + z + w = 3$$

5. Trouvez l'adjointe et l'inverse de chacune des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

6. En supposant que $ad - bc \neq 0$, calculez l'adjointe puis l'inverse de la matrice carrée $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et obtenez la formule d'inversion suivante :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

7. Appliquez la formule d'inversion des matrices carrées d'ordre 2 obtenue à l'exercice 6 pour calculer A^{-1} dans chacun des cas suivants.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. Soit $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{v}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ et $\vec{v}_4 = (x_4, y_4, z_4)$, quatre vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^3$, à partir desquels on forme deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & \cos \theta_{12} & \cos \theta_{13} & \cos \theta_{14} \\ \cos \theta_{21} & 1 & \cos \theta_{23} & \cos \theta_{24} \\ \cos \theta_{31} & \cos \theta_{32} & 1 & \cos \theta_{34} \\ \cos \theta_{41} & \cos \theta_{42} & \cos \theta_{43} & 1 \end{pmatrix}, \text{ où } \theta_{ij} \text{ est l'angle entre } \vec{v}_i \text{ et } \vec{v}_j.$$

a) Montrez que $AA^T = B$.

b) Montrez que $\det B = 0$.

c) Montrez que si α_{ij} est l'angle dièdre situé entre la face i et la face j d'un tétraèdre, alors

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} & \cos \alpha_{14} \\ \cos \alpha_{21} & -1 & \cos \alpha_{23} & \cos \alpha_{24} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & -1 & \cos \alpha_{34} \\ \cos \alpha_{41} & \cos \alpha_{42} & \cos \alpha_{43} & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

d) Montrez que l'angle dièdre situé entre les faces d'un tétraèdre régulier est $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$.

ÉCONOMIE ET MATRICES : LE MODÈLE DE LEONTIEF

Nous présentons ici un exemple classique d'application du calcul matriciel dans le contexte de l'analyse intersectorielle en économie. La méthode matricielle développée par Wassily Leontief vers 1930 a valu à son auteur le prix Nobel d'économie en 1973. L'exemple que nous avons choisi pour présenter la méthode d'analyse de Leontief est une simplification de la réalité⁸.

6.4.1 UN CAS D'ANALYSE INTERSECTORIELLE

Supposons que l'activité économique d'un petit pays fictif, le Leonland, soit partagée en deux secteurs : le secteur 1 des biens et des produits de base, et le secteur 2 des services. Le tableau ci-dessous (Tableau des ventes intermédiaires aux fins de production⁹) présente la valeur des ventes d'un secteur à l'autre aux fins de production, en milliards de dollars, pour une année.

Ventes (milliards de \$) à de	Secteur 1	Secteur 2
Secteur 1	4	1
Secteur 2	3	2

Voyons les caractéristiques d'un tel tableau.

- La somme des éléments sur chaque ligne donne le total des ventes du secteur correspondant sur le marché des producteurs. Il s'agit des ventes intermédiaires. Dans l'exemple, on constate que les deux secteurs ont vendu chacun pour 5 milliards de dollars pour satisfaire la demande intermédiaire.
- La somme des éléments dans chaque colonne donne le total des achats du secteur correspondant sur le marché des producteurs. Il s'agit des coûts de production. Dans l'exemple, les coûts de production du secteur 1 sont de 7 milliards de dollars et ceux du secteur 2 sont de 3 milliards de dollars.

On constate que les coûts de production du secteur 1 excèdent largement le total de ses ventes sur le marché intermédiaire. C'est qu'on doit ajouter à ce tableau les ventes de chaque secteur sur le marché externe de la consommation (demande externe) pour connaître la valeur des ventes totales de chaque secteur.

Supposons, pour le Leonland, que le tableau complet des transactions intersectorielles soit :

Ventes (milliards de \$) à de	Secteur 1	Secteur 2	Ventes intermédiaires	Ventes externes	Ventes totales
Secteur 1	4	1	5	20	25
Secteur 2	3	2	5	10	15

8. Pour une présentation plus détaillée de la méthode d'analyse intersectorielle, consultez l'ouvrage déjà cité de P. Leroux, *Algèbre linéaire : une approche matricielle*.

9. Pour produire, chaque secteur achète des biens et des services de tous les secteurs, y compris de lui-même.

L'analyse intersectorielle permet de déterminer l'effet d'une variation des ventes externes (la demande des consommateurs) sur les ventes intermédiaires (la demande des producteurs) et sur les ventes totales. Dans cette analyse, il est naturel de supposer, comme le fait Leontief, que les **ventes** du secteur i au secteur j , qui sont en fait les **achats** faits par le secteur j au secteur i aux fins de production, sont directement proportionnelles aux ventes totales du secteur j ; symboliquement, cela s'écrit

$$v_{ij} = c_{ij} t_j,$$

où v_{ij} = ventes du secteur i au secteur j (achats faits par le secteur j dans le secteur i);

t_j = ventes totales du secteur j ;

c_{ij} = coefficient de proportionnalité entre v_{ij} et t_j ; $c_{ij} = v_{ij}/t_j$.

La matrice C formée des coefficients c_{ij} est appelée **matrice des coefficients techniques**; ici on a

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11}/t_1 & v_{12}/t_2 \\ v_{21}/t_1 & v_{22}/t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/25 & 1/15 \\ 3/25 & 2/15 \end{pmatrix}.$$

Soit $T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$, la matrice des ventes totales par secteur. Ici, $T = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, la matrice des ventes externes par secteur. Ici, $X = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, la matrice des ventes intermédiaires par secteur. Ici, $Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Alors, les matrices C , T , X et Y sont liées par les relations

$$T = Y + X \text{ et } Y = CT,$$

ce qui permet d'exprimer la matrice des ventes totales T en fonction de la matrice X des ventes externes (aux consommateurs):

$$T = CT + X,$$

$$T - CT = X,$$

$$(I - C)T = X,$$

$$T = (I - C)^{-1} X \text{ (en supposant la matrice } I - C \text{ inversible). } (*)$$

La matrice $(I - C)^{-1}$ est appelée **matrice d'impact** et est notée E ; alors $T = EX$, et la matrice E permet de calculer l'impact de tout changement dans la demande externe X sur les ventes totales. De l'équation (*), il est facile ensuite de calculer l'impact de tout changement dans la demande externe X sur les ventes intermédiaires Y , car $Y = T - X$:

Dans le cas du Leonland, on a

$$I - C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/25 & 1/15 \\ 3/25 & 2/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/25 & -1/15 \\ -3/25 & 13/15 \end{pmatrix}$$

et $I - C$ est inversible, car

$$\det(I - C) = \begin{vmatrix} 21/25 & -1/15 \\ -3/25 & 13/15 \end{vmatrix} = \frac{1}{25} \frac{1}{15} \begin{vmatrix} 21 & -1 \\ -3 & 13 \end{vmatrix} = \frac{18}{25} \neq 0.$$

En appliquant la formule d'inversion¹⁰ $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ ou la méthode d'inversion de Gauss-Jordan à la matrice $I - C$, on obtient la matrice d'impact E pour l'économie du Leonland :

$$E = (I - C)^{-1} = \begin{pmatrix} 21/25 & -1/15 \\ -3/25 & 13/15 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 65/64 & 5/54 \\ 1/6 & 7/6 \end{pmatrix}.$$

Vérifions qu'on a bien $T = EX$ dans le cas du Leonland :

$$T = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ et } EX = \begin{pmatrix} 65/54 & 5/54 \\ 1/6 & 7/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Après cette vérification, on peut interpréter la matrice d'impact E . D'abord, on remarque que le produit $E \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne la première colonne de E et que le produit $E \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donne la deuxième colonne de E ; la première colonne de E représente donc l'augmentation dans les ventes totales qu'occasionnerait une augmentation des ventes externes $X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de 1 unité (dans ce cas-ci, un milliard de dollars) dans le secteur 1 et de 0 unité dans le secteur 2; la deuxième colonne de E représente l'augmentation dans les ventes totales qu'occasionnerait une augmentation des ventes externes $X'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de 0 unité dans le secteur 1 et de 1 unité dans le secteur 2.

Ainsi, en comparant la somme des éléments dans chaque colonne de la matrice d'impact E , on peut déterminer le secteur dont la variation des ventes externes a le plus d'impact sur les ventes totales. Dans le cas du Leonland, avec $E = \begin{pmatrix} 65/54 & 5/54 \\ 1/6 & 7/6 \end{pmatrix}$, la somme de la première colonne est $74/54$ et celle de la deuxième colonne est $68/54$. On en déduit qu'une augmentation des ventes du secteur 1 a plus d'impact sur les ventes totales qu'une augmentation des ventes dans le secteur 2.

10. Voir l'exercice 6 de la section Exercices 6.3, p. 226.

EXERCICES 6.4

Dans tous les exercices de cette section, conservez au moins quatre chiffres significatifs pour effectuer vos calculs numériques.

1. Complétez le tableau des transactions intersectorielles du Leonland en supposant que la matrice C des coefficients techniques est la même que celle de l'exemple de la sous-section 6.4.1, soit

$$C = \begin{pmatrix} 4/25 & 1/15 \\ 3/25 & 2/15 \end{pmatrix}$$

et que les ventes externes pour les secteurs 1 et 2 (en milliards de dollars) sont données par

$$X = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Ventes (milliards de \$)	à de	Secteur 1	Secteur 2	Ventes intermédiaires Y	Ventes externes X	Ventes totales T
		Secteur 1	Secteur 2			
	Secteur 1				40	
	Secteur 2				30	

2. Complétez le tableau des transactions intersectorielles du Leonland en supposant que la matrice C des coefficients techniques est la même que celle de l'exemple de la sous-section 6.4.1, soit

$$C = \begin{pmatrix} 4/25 & 1/15 \\ 3/25 & 2/15 \end{pmatrix}$$

et que les ventes totales pour les secteurs 1 et 2 (en milliards de dollars) sont données par

$$T = \begin{pmatrix} 50 \\ 45 \end{pmatrix}.$$

Ventes (milliards de \$)	à de	Secteur 1	Secteur 2	Ventes intermédiaires Y	Ventes externes X	Ventes totales T
		Secteur 1	Secteur 2			
	Secteur 1					50
	Secteur 2					45

3. Supposons que les ventes intersectorielles et les ventes totales sont données par le tableau suivant.

Ventes (milliards de \$) ➡ à de	Secteur 1	Secteur 2	Ventes intermédiaires Y	Ventes externes X	Ventes totales T
Secteur 1	3	5			15
Secteur 2	5	1			10

- Complétez le tableau.
- Quels sont les coûts de production des secteurs 1 et 2 ?
- Calculez la matrice C des coefficients techniques.
- Quelle est l'interprétation économique du coefficient c_{21} de la matrice C ?
- Calculez la matrice d'impact E .
- Dans quel secteur de l'économie du Leonland les ventes aux consommateurs (ventes externes) ont-elles le plus d'impact sur les ventes totales ?
- De combien les ventes intermédiaires y_1 et y_2 des deux secteurs augmenteraient-elles si les ventes externes augmentaient simultanément d'un milliard de dollars dans chacun des secteurs ?

POUR ALLER PLUS LOIN

Comme complément au chapitre 6, nous proposons une preuve de l'associativité du produit matriciel (PM3), une étude des matrices de transition d'ordre 2, quelques explications sur l'algorithme PageRank de Google et les démonstrations des propriétés extrinsèques des déterminants (D8 à D11).

6.5.1 L'ASSOCIATIVITÉ DU PRODUIT MATRICIEL

Pour prouver que le produit matriciel est associatif (PM3), il faut montrer que l'élément général de la matrice $(AB)C$ est le même que celui de la matrice $A(BC)$. Cela requiert le recours à la notation $\sum$ pour des sommes sur plusieurs indices à la fois. Cette démonstration s'adresse donc aux lecteurs pour qui le symbolisme mathématique n'est pas trop rebutant.

Supposons que A soit de format $n \times p$, B , de format $p \times q$, et C , de format $q \times m$. La matrice $(AB)C$ et la matrice $A(BC)$ sont alors forcément de format $n \times m$. Désignons l'élément de la i -ième ligne et de la j -ième colonne de A par a_{ij} , l'élément de la j -ième ligne et de la k -ième colonne de B par b_{jk} , et l'élément de la k -ième ligne et de la l -ième colonne de C par c_{kl} .

Calculons l'élément général de la i -ième ligne et de la l -ième colonne de $(AB)C$: cet élément est $\sum_{k=1}^q x_{ik} c_{kl}$, où x_{ik} est l'élément de la i -ième ligne et de la k -ième colonne de AB . Or, cet élément x_{ik} est lui-même, par la définition de « produit matriciel AB », représenté par la somme $\sum_{j=1}^p a_{ij} b_{jk}$.

L'élément de la i -ième ligne et de la l -ième colonne de $A(BC)$ est donc $\sum_{k=1}^q \left(\sum_{j=1}^p a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl}$, ce qui

peut aussi s'écrire $\sum_{k=1}^q \left(\sum_{j=1}^p a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right)$, en invoquant la distributivité de la multiplication ordinaire entre nombres réels sur l'addition ordinaire entre nombres réels et l'associativité de la multiplication ordinaire entre nombres réels.

Calculons maintenant l'élément général de la i -ième ligne et de la l -ième colonne de $A(BC)$: cet élément est $\sum_{j=1}^p a_{ij} y_{jl}$, où y_{jl} est l'élément de la j -ième ligne et de la l -ième colonne de BC . Or cet élément y_{jl} est lui-même, par définition du produit matriciel BC , représenté par la somme $\sum_{k=1}^q b_{jk} c_{kl}$. L'élément de la i -ième ligne et de la l -ième colonne de $A(BC)$ est donc $\sum_{j=1}^p a_{ij} \left(\sum_{k=1}^q b_{jk} c_{kl} \right)$, ce qui peut aussi s'écrire $\sum_{j=1}^p \left(\sum_{k=1}^q a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right)$, en invoquant la distributivité de la multiplication ordinaire entre nombres réels sur l'addition ordinaire entre nombres réels et l'associativité de la multiplication ordinaire entre nombres réels.

Il reste à voir, pour terminer, que l'égalité $\sum_{k=1}^q \left(\sum_{j=1}^p a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{k=1}^q a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right)$ est vraie. Dans ces deux expressions, on additionne les mêmes termes $a_{ij} b_{jk} c_{kl}$, indexés par j et k (i et l sont constants). Le nombre de termes à additionner est exactement pq , car j varie de 1 à p et k varie de 1 à q . On peut imaginer que ces pq termes sont disposés dans un tableau de p lignes et q colonnes. Il y a alors deux façons équivalentes d'additionner ces termes. Dans la première façon, on calcule d'abord les sommes dans chaque colonne, puis on additionne ces sommes : c'est ce que représente l'expression mathématique $\sum_{k=1}^q \left(\sum_{j=1}^p a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right)$. Dans la deuxième façon, on calcule d'abord les sommes dans chaque ligne, puis on additionne ces sommes : c'est ce que représente l'expression mathématique $\sum_{j=1}^p \left(\sum_{k=1}^q a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right)$. Nous avons donc montré que $(AB)C = A(BC)$.

6.5.2 L'ÉTUDE DES MATRICES DE TRANSITION

Voici un rappel de l'énoncé du théorème sur les matrices de transition et, ensuite, sa démonstration.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$ est une matrice de transition autre que la matrice identité et autre que

la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$, où $\alpha = \frac{b}{1-(a-b)}$.

Ce théorème se généralise, sous différentes formes et sous certaines conditions, aux matrices de transition d'ordre n . Cependant, pour raison de simplicité, nous limitons ici notre étude aux matrices de transition d'ordre 2.

Démonstration

1^{er} cas : $a = b$. Vérifiez que le théorème est évident dans ce cas ($\alpha = a = b$).

2^e cas : $a \neq b$.

- 1) Montrez que $\det A = a - b$ et que $-1 < a - b < 1$.
- 2) De 1), obtenez $\lim_{n \rightarrow \infty} (\det A)^n = 0$, puis en utilisant $\det(A^n) = (\det A)^n$, déduisez que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\det A^n) = 0$.
- 3) En posant $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 1-a_n & 1-b_n \end{pmatrix}$ et en tenant compte de 2), montrez que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$.
- 4) De $AA^n = A^n A$ (associativité), que vous pouvez écrire

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 1-a_n & 1-b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 1-a_n & 1-b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix},$$
 obtenez $b_n = \frac{b(1-a_n)}{1-a}$, puis substituez cette valeur de b_n dans $a_n - b_n$ pour transformer $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{b}{1-(a-b)}$.
- 5) Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{b}{1-(a-b)}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$, obtenez aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{b}{1-(a-b)}$.

Le théorème est démontré !

Remarquez que la matrice de transition $B = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$ a la propriété

$$B = B^2 = B^3 = \dots = B^n = \dots$$

Remarquez aussi que, quelle que soit la distribution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le produit $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est le même :

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}; \text{ cela signifie que dans une chaîne de Markov}$$

$$X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots,$$

où les distributions X_n sont définies à partir de la distribution initiale X_0 et de la matrice de transition A par $X_n = A^n X_0$, on aura

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A^n X_0) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A^n \right) X_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} X_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que la valeur limite de la distribution ne dépend pas de la distribution initiale X_0 , mais uniquement de la matrice de transition A . La distribution stationnaire X associée

$$\text{à } A \text{ est } X = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

6.5.3 L'ALGORITHME SIMPLIFIÉ DE PAGERANK

Sans trop exagérer, on pourrait dire que Google doit son succès, en bonne partie, à une utilisation judicieuse des matrices, en particulier des matrices de transition. C'est grâce à un algorithme appelé PageRank que Google parvient à présenter dans un ordre pertinent les pages correspondant à la requête d'un usager du Web. Sans entrer dans les détails et dans la

complexité de cet algorithme, qui fait encore partiellement l'objet d'un secret commercial, nous donnons ici un aperçu du rôle des matrices de transition dans cet algorithme ainsi que des références pour le lecteur désireux d'approfondir ce sujet.

À la suite d'une requête, à partir d'un mot ou d'un ensemble de mots, l'utilisateur du Web est redirigé vers des pages qui mentionnent ce mot ou cet ensemble de mots, et ces pages sont présentées dans un ordre qui semble vraiment pertinent. Par exemple, si nous soumettons la requête « algorithme PageRank », nous obtenons en moins d'une seconde plus de 75 millions de pages qui mentionnent l'expression « PageRank » et qui, fort heureusement, sont triées et présentées dans un ordre pertinent. Comment se font ce tri et ce classement par ordre de « pertinence » ? Il n'y a certainement pas un petit diable qui lit toutes ces pages pour nous et qui les classe selon le contenu à la vitesse de l'éclair !

La première idée est de voir les pages comme des points (sommets) d'un graphe et de considérer les liens de l'une vers une autre comme des flèches d'un point à un autre de ce graphe. Ensuite, la deuxième idée est de définir l'ordre de « pertinence » des pages dans ce graphe par l'**ordre des fréquences** avec lesquelles un internaute fictif indifférent visiterait les pages s'il se promenait indéfiniment dans ce graphe en choisissant au hasard uniforme, à chaque page qu'il visite, le lien (la flèche) qui conduit à une autre page du graphe. Derrière cette conception de la « pertinence » se trouve l'idée qu'un passage à une page est en quelque sorte un **vote** pour cette page. Le problème de la mise en ordre des pages, de ce point de vue, revient à calculer les fréquences de visite (les pourcentages de vote cumulés à long terme) de chacune des pages par notre internaute fictif indifférent. On suppose qu'on élimine de notre graphe les pages qui ne pointent pas vers une autre page du graphe ou, encore, les pages qui pointent vers elles-mêmes. En réalité, on réduit davantage le nombre de pages, ne serait-ce, par exemple, qu'en fonction de la langue et du pays d'origine de la requête. Pour calculer les fréquences de visite des pages par notre internaute fictif, on établit la matrice de transition M de format $n \times n$ correspondant à ce graphe de n points (pages), comme à l'exemple 4 de la sous-section 6.1.1, puis on cherche la distribution stable X de format $n \times 1$ solution de l'équation $MX = X$. Cette équation matricielle équivaut généralement à un système d'équations linéaires comportant des milliers d'équations et d'inconnues (les éléments de X). Sous certaines conditions raisonnables sur la matrice M , que nous ne précisons pas ici, la solution X est unique et ne dépend pas du point de départ de notre internaute fictif dans le graphe. Dans ce cas, les puissances M^k de la matrice de transition M convergent, lorsque k augmente indéfiniment, vers une matrice de transition M^* dont toutes les colonnes sont identiques et égales à la distribution stable (stationnaire) X . Nous avons vu le pourquoi et le comment de cette situation pour les matrices de transition de format 2×2 à la sous-section précédente.

Revoyons l'exemple 3 simplifié de la sous-section 6.1.1, constitué de quatre pages Web fictives avec le graphe de la figure 6.4, pour illustrer notre propos.

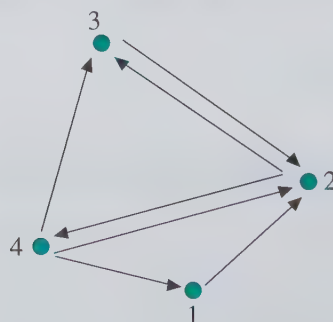


FIGURE 6.4

La matrice de transition correspondant à ce graphe pour l'internaute indifférent est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si l'internaute se trouve à la page 1 au début de sa visite dans le graphe, alors la

distribution initiale X_0 est $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, signifiant qu'il se trouve à la page 1 avec la probabilité 1

et aux autres pages avec la probabilité 0. S'il se trouve plutôt à la page 2 au début, alors

$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, etc. La page de départ étant sans importance dans notre recherche de la

distribution stationnaire X , supposons que ce soit la page 1. Alors à quelle page se trouvera l'internaute dans le graphe immédiatement après avoir visité la page 1 ? La réponse est donnée par la distribution

$$X_1 = MX_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{l'internaute se trouvera à la page 2.}$$

À quelle page se trouvera-t-il à l'étape suivante ? La réponse est donnée par la distribution

$$\begin{aligned} X_2 = MX_1 = M^2 X_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/6 & 1/2 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui montre que l'internaute se trouvera à la page 3 avec la probabilité 1/2 ou à la page 4 avec la probabilité 1/2.

Après 64 étapes, les puissances de la matrice de transition M se stabilisent, comme le montre le tableau suivant.

		1	2	3	4
M	1	0	0	0	0,333 333 333
	2	1	0	1	0,333 333 333
	3	0	0,5	0	0,333 333 333
	4	0	0,5	0	0
		1	2	3	4
M^2	1	0	0,166 666 667	0	0
	2	0	0,666 666 667	0	0,666 666 667
	3	0,5	0,166 666 667	0,5	0,166 666 667
	4	0,5	0	0,5	0,166 666 667
		1	2	3	4
M^4	1	0	0,111 111 111	0	0,111 111 111
	2	0,333 333 333	0,444 444 444	0,333 333 333	0,555 555 556
	3	0,333 333 333	0,277 777 778	0,333 333 333	0,222 222 222
	4	0,333 333 333	0,166 666 667	0,333 333 333	0,111 111 111
		1	2	3	4
M^8	1	0,074 074 074	0,067 901 235	0,074 074 074	0,074 074 074
	2	0,444 444 444	0,419 753 086	0,444 444 444	0,419 753 086
	3	0,277 777 778	0,290 123 457	0,277 777 778	0,290 123 457
	4	0,203 703 704	0,222 222 222	0,203 703 704	0,216 049 383
		1	2	3	4
M^{16}	1	0,07 133 059	0,071 483 006	0,07 133 059	0,071 483 006
	2	0,428 440 786	0,428 593 202	0,428 440 786	0,428 745 618
	3	0,285 779 607	0,285 703 399	0,285 779 607	0,285 627 191
	4	0,214 449 017	0,214 220 393	0,214 449 017	0,214 144 185
		1	2	3	4
M^{32}	1	0,071 428 576	0,071 428 565	0,071 428 576	0,071 428 576
	2	0,428 571 458	0,428 571 412	0,428 571 458	0,428 571 412
	3	0,285 714 271	0,285 714 294	0,285 714 271	0,285 714 294
	4	0,214 285 694	0,214 285 729	0,214 285 694	0,214 285 718
		1	2	3	4
M^{64}	1	0,071 428 571	0,071 428 571	0,071 428 571	0,071 428 571
	2	0,428 571 429	0,428 571 429	0,428 571 429	0,428 571 429
	3	0,285 714 286	0,285 714 286	0,285 714 286	0,285 714 286
	4	0,214 285 714	0,214 285 714	0,214 285 714	0,214 285 714

On voit dans ce tableau que les colonnes de la matrice de transition M^{64} sont identiques. De plus, on vérifie facilement que

$$M^{64} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx M^{64} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx M^{64} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \approx M^{64} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,071428571 \\ 0,428571429 \\ 0,285714286 \\ 0,214285714 \end{pmatrix},$$

et ici $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/7 \\ 2/7 \\ 3/14 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que, quel que soit le point de départ de l'internaute

dans le graphe, après 64 étapes, et aux étapes suivantes, il se trouvera à la page 1 avec la probabilité $1/14$, à la page 2 avec la probabilité $3/7$, à la page 3 avec la probabilité $2/7$ et à la page 4 avec la probabilité $3/14$. On constate dans cet exemple que la page 2 aura la plus grande fréquence de visite à long terme, puisque la probabilité de s'y trouver est la plus grande. Ainsi, l'ordre de «pertinence» des pages, de la plus pertinente à la moins pertinente, serait 2-3-4-1 dans ce cas, et c'est dans cet ordre qu'il conviendrait d'afficher les pages, en réponse à la requête qui est à l'origine du graphe.

Ce n'est là qu'un exemple très simple, mais il donne une idée de l'utilisation des matrices de transition. En réalité, pour attribuer un rang à chaque page d'une requête, on s'en doute bien, la situation est plus complexe. Pour les lecteurs curieux d'en savoir plus, voici deux références intéressantes :

Mathématiques et technologie, Christiane Rousseau, et Yvan Saint-Aubin, Springer, 2008 ; le chapitre 9, très accessible et de lecture agréable, est consacré à l'algorithme PageRank.

Le site <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eiserm/Enseignement/google-promenade.pdf> fournit aussi une explication succincte, claire et rigoureuse.

6.5.4 QUELQUES DÉMONSTRATIONS POUR LES DÉTERMINANTS

Nous donnons ici les démonstrations des propriétés des déterminants relatives aux opérations sur les matrices (propriétés D8 à D11, voir la sous-section 6.3.2). Ces démonstrations sont classiques. On les retrouve avec quelques variantes dans la plupart des ouvrages d'algèbre linéaire. Nous les avons incorporées dans cette section pour encourager et satisfaire la curiosité des lecteurs et pour montrer l'importance du théorème de Gauss-Jordan (voir la sous-section 6.2.2) dans la théorie des déterminants.

La démonstration des propriétés D8 à D11 dépend d'une proposition que nous désignons par **proposition***.

Proposition*

Soit A , une matrice carrée d'ordre n , et E , une matrice élémentaire d'ordre n . Alors $\det(EA) = (\det E)(\det A)$.

Preuve

- 1) Si E est la matrice élémentaire correspondant à l'opération élémentaire $L_i \leftarrow kL_i$ ($k \neq 0$), alors $\det E = k \det I = k$ (propriétés D3 et D1). De même, $\det(EA) = k \det A$ (propriété D3); il s'ensuit que $\det(EA) = (\det E)(\det A)$.
- 2) Si E est la matrice élémentaire correspondant à l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + kL_j$, alors $\det E = 1$ (propriété D6 appliquée à I) et $\det(EA) = \det A$ (propriété D6 appliquée à A); il s'ensuit que $\det(EA) = (\det E)(\det A)$.
- 3) Si E est la matrice élémentaire correspondant à l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$, alors $\det E = -1$ (propriété D5 appliquée à I) et $\det(EA) = -\det A$ (propriété D5 appliquée à A); il s'ensuit encore que $\det(EA) = (\det E)(\det A)$.

Démonstration des propriétés D8 à D11

A est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Supposons A inversible; alors A est un produit de matrices élémentaires; en appliquant la proposition* autant de fois que nécessaire, on constate que $\det A$ est le produit des déterminants de ces matrices élémentaires; comme aucun de ces déterminants n'est nul, on obtient $\det A \neq 0$.

Supposons $\det A \neq 0$; selon le théorème de Gauss-Jordan, A est le produit d'un nombre fini de matrices élémentaires et d'une matrice *ERL* unique R . En appliquant la proposition* autant de fois que nécessaire, on voit que $\det A$ est le produit des déterminants de toutes ces matrices et que $\det R$ est un facteur de $\det A$. Puisque $\det A \neq 0$, on aura $\det R \neq 0$ et I étant la seule matrice *ERL* dont le déterminant est non nul, on aura $R = I$, ce qui signifie que A est inversible.

$\det(AB) = (\det A)(\det B)$

Si A est inversible, alors A est un produit de matrices élémentaires et la propriété D9 s'obtient par l'application de la proposition*.

Si A n'est pas inversible, alors $\det A = 0$; montrons que $\det(AB) = 0$ et alors, on aura bien $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. Pour montrer que $\det(AB) = 0$, on applique le théorème de Gauss-Jordan à la matrice A dans le produit AB : $AB = E_1 E_2 \dots E_k RB$; puisque A est non inversible, sa forme *ERL* R contient au moins une ligne nulle; alors la ligne correspondante du produit RB sera nulle et donc $\det(RB) = 0$. En appliquant la proposition* autant de fois que nécessaire au membre droit de l'équation $AB = E_1 E_2 \dots E_k RB$, on constate que $\det(AB) = 0$.

$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

En appliquant la propriété D9 à $AA^{-1} = I$, on obtient immédiatement

$$(\det A) \det(A^{-1}) = \det I = 1, \text{ d'où } \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

$\det A^T = \det A$

Il est facile de vérifier que $\det E = \det E^T$ lorsque E est une matrice élémentaire (il y a trois cas évidents). Par ailleurs, si A n'est pas élémentaire, nous distinguons deux cas.

Si A est inversible,

alors A est un produit de matrices élémentaires et A^T est le produit (dans l'ordre inverse) de ces mêmes matrices élémentaires transposées; on a donc, dans ce cas, $\det A = \det A^T$.

Si A n'est pas inversible,

alors A^T ne l'est pas non plus et donc dans ce cas, $\det A = 0 = \det A^T$.

TRANSFORMATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}^2$

- 1 LES TRANSFORMATIONS DANS $\mathbb{R}^2$
- 2 LES HOMOTHÉTIES, LES ROTATIONS ET LES RÉFLEXIONS
- 3 D'AUTRES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES
- 4 LES POINTS FIXES ET LES DIRECTIONS INVARIANTES, LES VALEURS PROPRES ET LES VECTEURS PROPRES
- 5 POUR ALLER PLUS LOIN

Dans ce chapitre, nous étudions les matrices d'un point de vue dynamique, les considérant comme des outils de transformation des figures géométriques. Les matrices représentent en effet une classe particulière de transformations : ce sont les transformations linéaires. Ces transformations sont à la base du traitement des images dans les logiciels de graphisme (rotations, réflexions, homothéties, etc.). Nous ne considérerons ici que les transformations de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ pour des raisons de simplicité. De plus, nous verrons que les transformations linéaires sont toujours centrées à l'origine ; les rotations, par exemple, se font autour du point origine. Cette limitation est cependant facile à contourner avec le concept de transformation affine, comme nous l'expliquerons dans la section *Pour aller plus loin*. Dans cette dernière section, nous donnerons aussi des indications sur une manière de généraliser les rotations et les réflexions à l'espace $\mathbb{R}^3$.

Dans ce qui suit, nous supposons que les coordonnées des points et les composantes des vecteurs sont toutes relatives à un même repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$. Pour des raisons de commodité et d'adaptation à l'écriture matricielle, les coordonnées (x, y) d'un point P et les composantes (v_1, v_2) d'un vecteur $\vec{v}$ seront désormais écrites sous forme de matrices colonnes¹ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le point $P(x, y)$ et le vecteur $\vec{v} = (v_1, v_2)$ s'écriront respectivement

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

1. On dit aussi **vecteurs colonnes**.

LES TRANSFORMATIONS DANS $\mathbb{R}^2$

Dans cette section, nous donnons la définition du concept général de transformation et quelques exemples dans $\mathbb{R}^2$. Nous distinguons ensuite les transformations dites linéaires. Puis nous voyons le théorème de représentation, qui montre que les transformations linéaires coïncident avec les transformations représentables par des matrices. Nous décrivons enfin les propriétés générales des transformations linéaires.

7.1.1 DES DÉFINITIONS ET DES EXEMPLES

Transformation dans $\mathbb{R}^2$

Une transformation dans $\mathbb{R}^2$ est une fonction T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui associe à chaque matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ une matrice colonne $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, notée $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Soit T , une transformation dans $\mathbb{R}^2$. Si P est un point de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $T(P)$

désigne le point dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont définies par $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $T(P)$ est

appelée l'**image du point P** par T . De même, si $\vec{v}$ est un vecteur de composantes $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, alors

$T(\vec{v})$ désigne le vecteur dont les composantes $\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}$ sont définies par $\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$;

$T(\vec{v})$ est appelée l'**image du vecteur $\vec{v}$** par T .

EXEMPLE 1

La fonction T_1 définie par $T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$ est une transformation dans $\mathbb{R}^2$; lorsqu'on considère $\mathbb{R}^2$ comme un espace affine, cette transformation s'applique à chaque point et à chaque vecteur. Par exemple, dans la figure 7.1, on a appliqué cette transformation aux sommets du parallélogramme $OABC$, ce qui donne les sommets d'un nouveau parallélogramme $O'A'B'C'$.

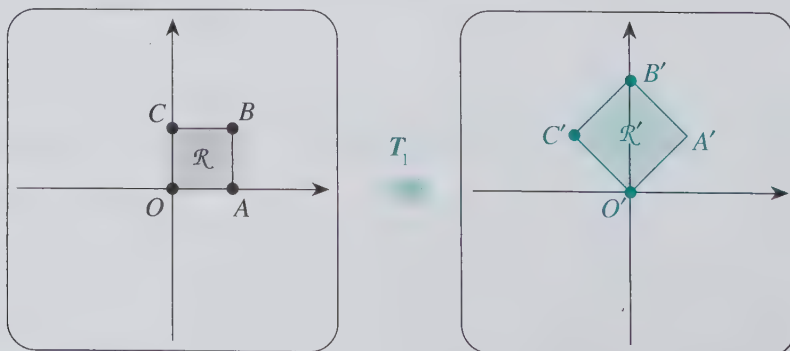


FIGURE 7.1

En effet,

■ l'image du point $O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ par T_1 est $O' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ parce que $T_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

■ l'image du point $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par T_1 est $A' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ parce que $T_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

■ l'image du point $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ par T_1 est $B' \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ parce que $T_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;

■ l'image du point $C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par T_1 est $C' \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ parce que $T_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans la figure 7.1, si on restreint T_1 à la région $\mathcal{R}$ bornée par le parallélogramme $OABC$ (l'écran de gauche), on constate que T_1 transforme cette région en une région image $\mathcal{R}'$ (l'écran de droite) bornée par le parallélogramme $O'A'B'C'$.

EXEMPLE 2

La fonction T_2 définie par $T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^2 y \end{pmatrix}$ est aussi une transformation des points et des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Par exemple, dans la figure 7.2, la région $\mathcal{R}$ bornée par le parallélogramme $OABC$ est transformée en une région $\mathcal{R}'$ bornée par un segment de parabole et deux segments de droite.

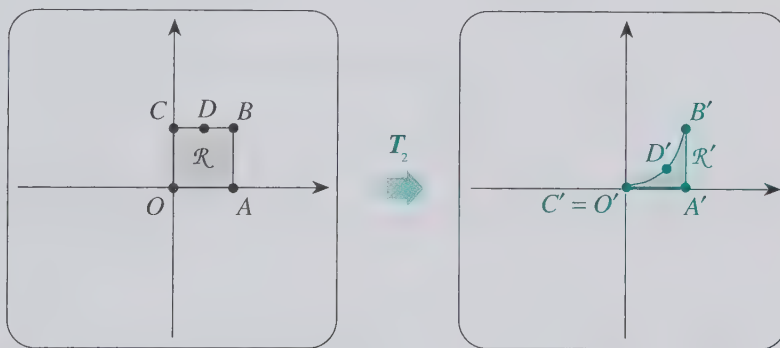


FIGURE 7.2 La projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P}$.

Ainsi,

■ l'image du point $O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ par T_2 est $O' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ parce que $T_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (0^2)0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

■ l'image du point $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ par T_2 est $A' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ parce que $T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ (1^2)0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

■ l'image du point $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ par T_2 est $B' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ parce que $T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ (1^2)1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

■ l'image du point $C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par T_2 est $C' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ parce que $T_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (0^2)1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

■ l'image du point $D \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ par T_2 est $D' \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$ parce que $T_2 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ (x^2)1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$.

Dans l'exemple 1, on peut vérifier que T_1 transforme tout segment de droite en un segment de droite. Ce n'est cependant pas le cas dans l'exemple 2: T_2 transforme le segment de droite CB en un segment de parabole $C'B'$ (voir la figure 7.2). La définition suivante a justement pour but de distinguer les transformations qu'on appelle **linéaires**, qui ont, entre autres, la propriété géométrique de préserver les alignements de points, le parallélisme des vecteurs et les relations affines entre points et vecteurs. Intuitivement, on peut penser qu'une transformation qui préserve les combinaisons linéaires préservera aussi les alignements et le parallélisme; cela sera confirmé par les propriétés géométriques des transformations linéaires qui découleront de la définition.

Remarque

Selon la définition d'une transformation, toute transformation T transforme le vecteur position d'un point P dans le vecteur position du point $T(P)$, car un point et son vecteur position sont représentés par le même couple $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Transformation linéaire dans $\mathbb{R}^2$

Une transformation T dans $\mathbb{R}^2$ est dite linéaire si elle satisfait aux deux conditions suivantes:

- 1) $T(a\vec{u}) = aT(\vec{u})$, quel que soit le vecteur $\vec{u}$ et quel que soit le scalaire a ;
- 2) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$, quels que soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Les propriétés géométriques des transformations linéaires

L1 Toute transformation linéaire préserve le point origine et le vecteur nul :

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou, encore, } T(O) = O \text{ et } T(\vec{0}) = \vec{0}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= T[0\vec{u}] \quad [\text{quel que soit } \vec{u}] \\ &= 0[T(\vec{u})] \quad [\text{la condition 1 de la définition}] \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L2 Toute transformation linéaire préserve le parallélisme (voir la figure 7.3):

si $\vec{u} \parallel \vec{v}$, alors $T(\vec{u}) \parallel T(\vec{v})$ ou bien $T(\vec{u}) = T(\vec{v}) = \vec{0}$.

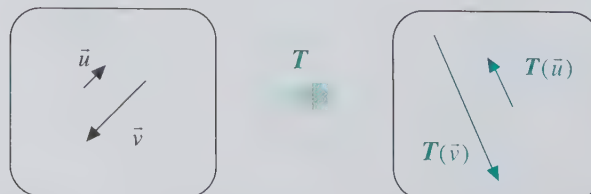


FIGURE 7.3 La propriété L2.

La propriété L2 est une conséquence directe de la condition 1) de la définition :

si $\vec{u} \parallel \vec{v}$, alors $\vec{u} = k\vec{v}$ et par la suite $T(\vec{u}) = T(k\vec{v}) = kT(\vec{v})$, ce qui signifie que $T(\vec{u}) \parallel T(\vec{v})$ ou $T(\vec{u}) = T(\vec{v}) = \vec{0}$.

L3 Toute transformation linéaire transforme de façon cohérente points et vecteurs, en ce sens que $T(\overline{AB}) = \overline{T(A)T(B)}$ (voir la figure 7.4).

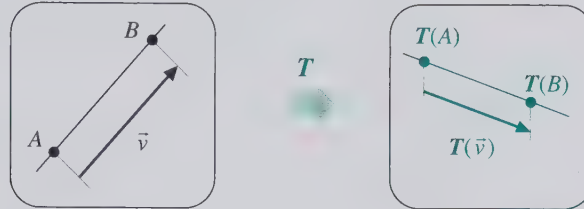


FIGURE 7.4 La propriété L3.

La propriété L3 se démontre ainsi :

$$\begin{aligned}
 T(\overline{AB}) &= T(\overline{OB} - \overline{OA}) \\
 &= T[\overline{OB} + (-\overline{OA})] \\
 &= T(\overline{OB}) + T(-\overline{OA}) \quad [\text{la condition 2 de la définition}] \\
 &= T(\overline{OB}) - T(\overline{OA}) \quad [\text{la condition 1 de la définition}] \\
 &= T(B) - T(A) \\
 &= \overline{T(A)T(B)}.
 \end{aligned}$$

L4 Toute transformation linéaire préserve la colinéarité (voir la figure 7.5).

Si A, B et C sont trois points colinéaires, alors leurs images $T(A)$, $T(B)$ et $T(C)$ sont aussi colinéaires.

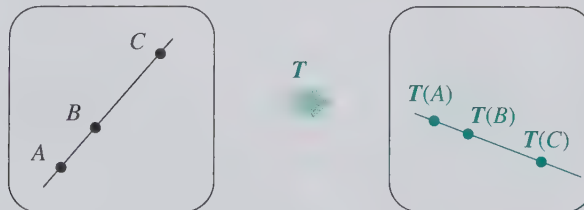


FIGURE 7.5 La propriété L4.

La propriété L4 est une conséquence directe de la propriété L5.

L5 Toute transformation linéaire transforme les droites en droites² et préserve les positions relatives des points, dans les mêmes rapports, le long d'une droite donnée : si $P = A + k\vec{v}$, alors $T(P) = T(A) + kT(\vec{v})$.

2. Nous supposons ici qu'une droite peut être **dégénérée**, c'est-à-dire réduite à un seul point, lorsque le vecteur directeur est nul.

Par exemple, si le point P est situé aux deux tiers du segment AB en partant du point A , alors, si $T(A) \neq T(B)$, $T(P)$ sera situé aux deux tiers du segment de $T(A)$ à $T(B)$ en partant de $T(A)$ (voir la figure 7.6).

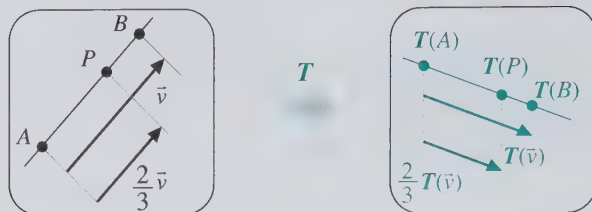


FIGURE 7.6 La propriété L5.

La démonstration de L5 est semblable à celle de L3 (voir la figure 7.7):

$$\begin{aligned}
 T(P) &= T(\overrightarrow{OA} + k\vec{v}) \\
 &= T(\overrightarrow{OA}) + T(k\vec{v}) \quad [\text{la condition 2 de la définition}] \\
 &= T(\overrightarrow{OA}) + kT(\vec{v}) \quad [\text{la condition 1 de la définition}] \\
 &= T(A) + kT(\vec{v}).
 \end{aligned}$$

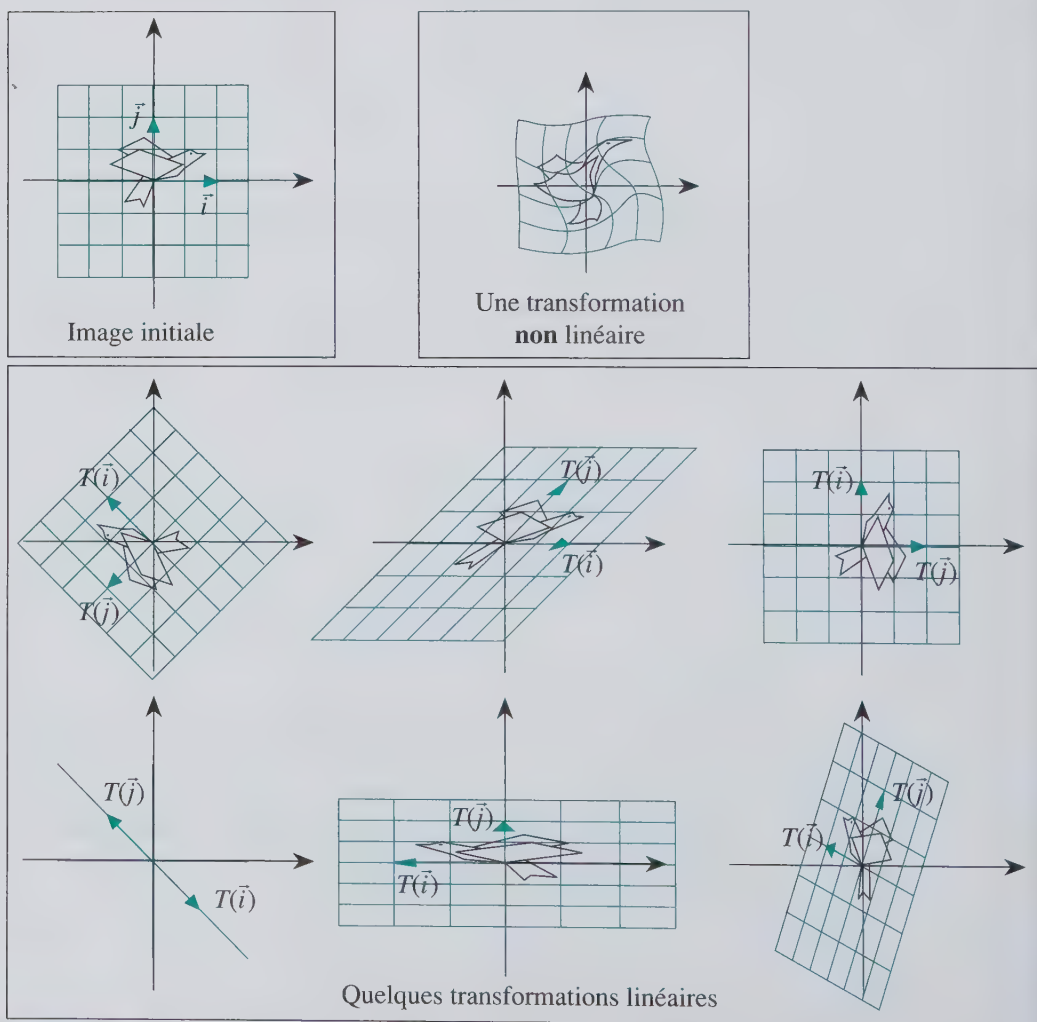


FIGURE 7.7 Exemples de transformations.

EXEMPLE 1

La transformation T_1 définie par $T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$ est linéaire, car elle satisfait aux deux conditions de la définition. En effet,

$$1) \quad T_1 \left(a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = T_1 \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax-ay \\ ax+ay \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = a T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} 2) \quad T_1 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right) &= T_1 \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+z)-(y+w) \\ (x+z)+(y+w) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x-y)+(z-w) \\ (x+y)+(z+w) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z-w \\ z+w \end{pmatrix} \\ &= T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T_1 \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

EXEMPLE 2

La transformation T_2 définie par $T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^2 y \end{pmatrix}$ n'est pas linéaire, parce qu'elle ne préserve pas le parallélisme (voir la figure 7.2 à la page 241). Elle ne satisfait pas à la première condition de la définition de transformation linéaire lorsque $a \neq 0$ et $a \neq 1$. En effet, nous avons

$$T_2 \left(a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = T_2 \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ (ax)^2 ay \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ a^2 x^2 y \end{pmatrix},$$

mais $a T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ x^2 y \end{pmatrix}$ et alors, si $a \neq 0$ et $a \neq 1$, $T_2 \left(a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \neq a T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

EXEMPLE 3

Soit T_3 , la transformation définie par la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de la façon suivante : $T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (produit matriciel), c'est-à-dire

$$T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que T_3 est linéaire ; en fait, T_3 représente une réflexion autour de la droite $y = x$ dans $\mathbb{R}^2$ (voir l'exemple 3 de la sous-section 6.1.5).

Remarques

1. Les transformations linéaires sont fermées sous la composition : si T_1 et T_2 sont des transformations linéaires, alors la transformation T définie par $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_2 \left[T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$ est aussi une transformation linéaire, ce qui est facile à vérifier.
2. L'exemple 3 laisse soupçonner qu'il existe un lien entre les matrices et les transformations linéaires ; ce lien est explicité à la sous-section 7.1.2.

7.1.2 LES MATRICES ET LES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

Transformation représentable par une matrice

Soit T , une transformation de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On dit que T est **représentable** par la matrice

constante $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ si

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ quel que soit } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 1

La transformation T_1 définie par $T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$ est représentable par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, car

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 2

La transformation T_2 définie par $T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^2 y \end{pmatrix}$ n'est pas représentable par une matrice. En effet,

s'il existait une matrice constante $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^2 y \end{pmatrix}$ pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors

on aurait en particulier pour $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ (1^2)0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et, pour $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (0^2)1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui s'écrit dans une seule équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou, encore, } \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cependant, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne peut pas représenter la transformation T_2 , car

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x \\ x^2 y \end{pmatrix} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0.$$

La coïncidence entre les transformations linéaires et les transformations représentables par des matrices est confirmée par le théorème suivant.

Soit T , une transformation dans $\mathbb{R}^2$. Alors T est linéaire si et seulement si T est représentable par une matrice.

De plus, si $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ représente T , alors cette représentation est unique³ et est donnée par

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Preuve

1) Supposons que T est linéaire. Alors, montrons que T est représentable par une matrice :

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= T \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= T \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + T \left(y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad [\text{car } T \text{ est linéaire}] \\ &= x T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [\text{car } T \text{ est linéaire}] \\ &= x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad \left[\text{en posant } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} ax \\ bx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cy \\ dy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ et donc } T \text{ est représentable par } \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2) Supposons que T est représentée par $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Alors, en appliquant les propriétés

du produit matriciel, montrons que T satisfait aux deux conditions de la définition de transformation linéaire.

$$i) \quad T \left(a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = Ma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = aM \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = aT \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$ii) \quad T \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right) = M \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right) = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}.$$

3. On suppose que tous les points et tous les vecteurs sont exprimés dans le même repère orthonormé $\langle O, \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle \rangle$.

3) Maintenant, si on suppose que T est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on aura forcément :

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ et } T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

ce qui montre que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et aussi que la représentation est unique.

EXEMPLE

Toute figure qui apparaît à l'écran d'un ordinateur est composée d'un grand nombre de points-images appelés **pixels**; si l'on applique une même transformation linéaire T à chacun des pixels qui composent une telle figure, alors la figure elle-même subira cette transformation. Ainsi, pour faire tourner l'image initiale de 90° (dans le sens contraire des aiguilles d'une montre) autour de l'origine sur l'écran de la figure 7.8, on peut imaginer que l'ordinateur multiplie la matrice des coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de chaque point composant l'image initiale par la matrice $R = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ qui représente cette rotation; puisque cette rotation est une transformation linéaire, on trouve sa matrice R en appliquant le théorème de représentation :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc $R = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

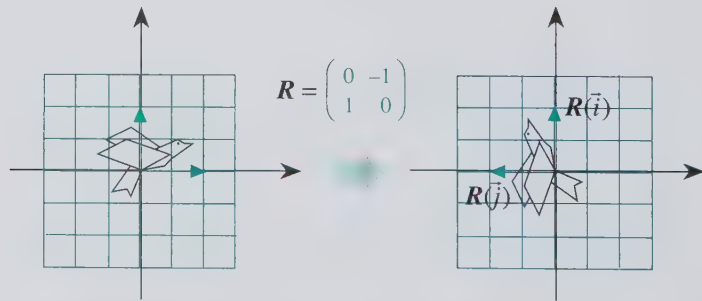


FIGURE 7.8 Une rotation de 90° .

Remarques

1. La matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ représente la transformation identité, notée I , qui laisse l'écran inchangé; la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ représente la transformation nulle, notée O , qui réduit tout l'écran au point origine.
2. Si T_1 et T_2 sont deux transformations linéaires représentées respectivement par les matrices M_1 et M_2 , alors la transformation composée T définie par $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_2 \left(T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$ est aussi une transformation linéaire et elle est représentée par la matrice produit $M_2 M_1$.

En effet,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_2\left(T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T_2\left(M_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = M_2\left(M_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (M_2 M_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

3. Si la matrice M qui représente une transformation linéaire T est inversible, alors T est inversible et la transformation inverse de T , notée T^{-1} , est représentée par M^{-1} , la matrice inverse de M .

En effet, puisque la matrice M représente la transformation T , l'équation

$$M^{-1}M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = MM^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

qui exprime le fait que M et M^{-1} sont des matrices inverses l'une de l'autre, se traduit par

$$M^{-1}T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\left(M^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = I\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

ce qui exprime alors le fait que M^{-1} représente la transformation inverse de T .

7.1.3 COMMENT TROUVER LA MATRICE D'UNE TRANSFORMATION LINÉAIRE

Selon le théorème de représentation (voir la sous-section 7.1.2), la première colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et la deuxième colonne $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ de la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ représentant une transformation

linéaire T sont respectivement l'image par T de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que dès

que l'on connaît l'effet de la transformation T sur les vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de $\mathbb{R}^2$, on peut calculer les images par T de tous les vecteurs et de tous les points de $\mathbb{R}^2$, car la matrice de T se trouve alors complètement déterminée.

EXEMPLE

Dans la figure 7.9, la matrice de la transformation linéaire T est forcément $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, car $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: ainsi, par exemple, on peut calculer l'image du point $P\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ par T .

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

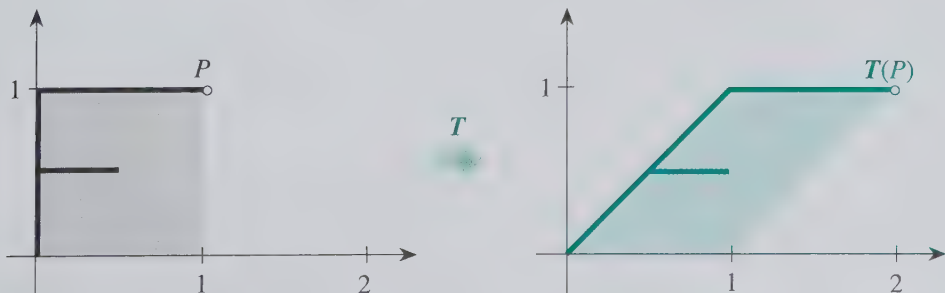


FIGURE 7.9

Il arrive souvent que l'effet d'une transformation T sur les vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$, ne soit pas connu, tout en l'étant sur deux autres vecteurs linéairement indépendants $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

$$T \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \text{ et } T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}$$

Alors, dans ce cas, la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ qui représente T satisfera forcément aux deux équations

suivantes : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}$, de telle sorte que

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_1 & v'_1 \\ u'_2 & v'_2 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_1 & v'_1 \\ u'_2 & v'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

En effet, les vecteurs colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ étant linéairement indépendants, cette matrice est nécessairement inversible (voir le chapitre 6).

Remarque

Comme on doit souvent inverser des matrices de format 2×2 , il est utile de mémoriser la formule d'inversion suivante :

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \text{ et } \det A \neq 0, \text{ alors } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} v_2 & -v_1 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE

Dans la figure 7.10, la matrice de la transformation linéaire T s'obtient en observant que

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ ce qui donne}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

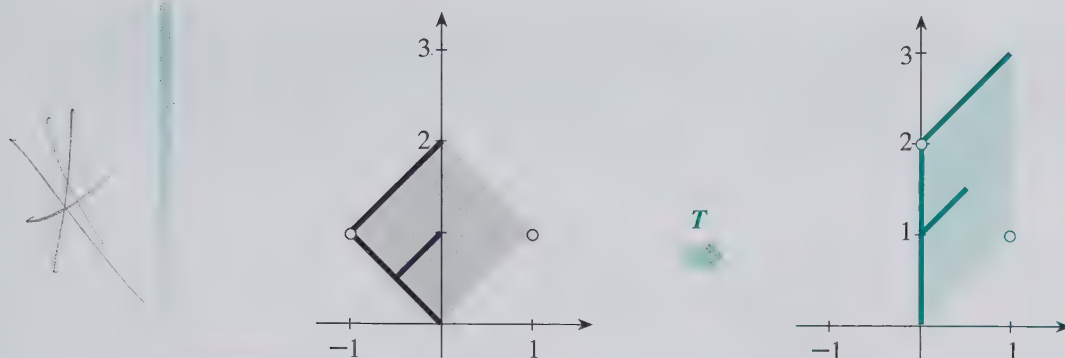


FIGURE 7.10

On constate *a posteriori* que les vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$ auraient respectivement pour images

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \text{ dans ce cas.}$$

EXERCICES 7.1

1. Parmi les transformations suivantes dans $\mathbb{R}^2$, identifiez celles qui sont linéaires, c'est-à-dire celles qui respectent les deux conditions de la définition d'une transformation linéaire.

a) $T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$

c) $T_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$

b) $T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x \end{pmatrix}$

d) $T_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/(1+x^2) \\ y \end{pmatrix}$

2. Tracez les images de la lettre F illustrée ci-dessous par T lorsque T est la transformation linéaire correspondant à la matrice M donnée.

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

h) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

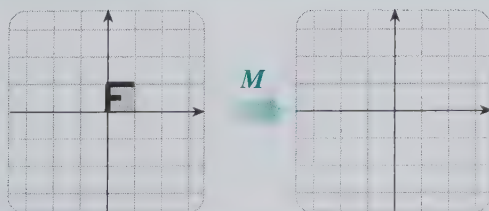
i) $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

g) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

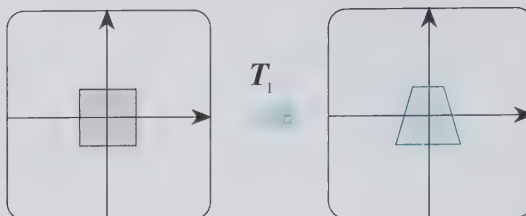
j) $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

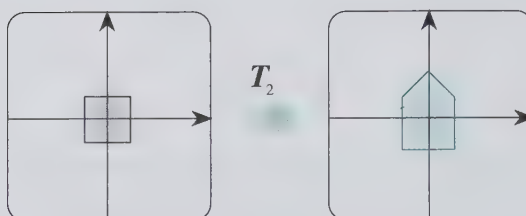


3. Parmi les transformations correspondant aux illustrations suivantes, identifiez celles qui ne satisfont pas l'une ou l'autre des propriétés L1 à L5 des transformations linéaires (voir la sous-section 7.1.1) et qui, par le fait même, ne sont pas linéaires.

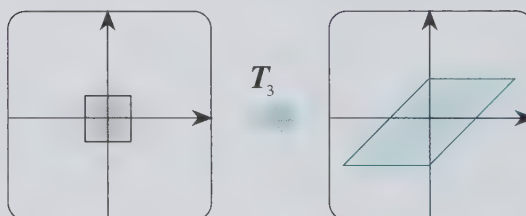
a)



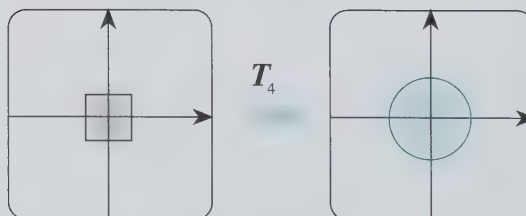
b)



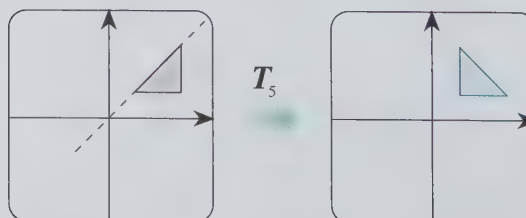
c)



d)

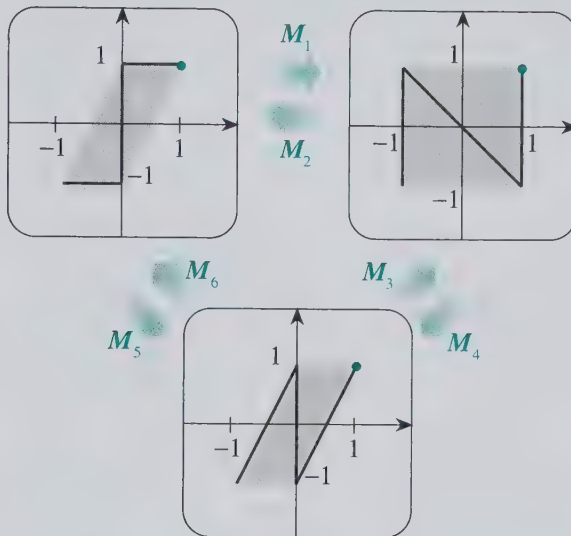


e)



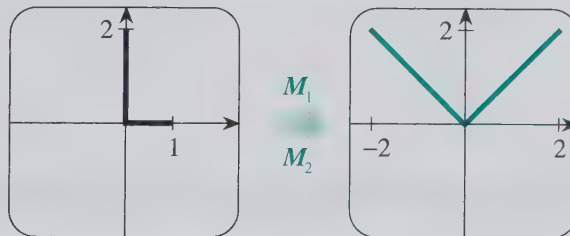
4. Appliquez le théorème de représentation ou la méthode présentée à la sous-section 7.1.3 pour déterminer les matrices M_1 à M_6 de chacune des transformations linéaires illustrées ci-dessous. Vérifiez que :

a) $M_1 M_2 = M_3 M_4 = M_5 M_6 = I$; b) $M_4 M_1 = M_5$; c) $M_2 M_3 = M_6$.

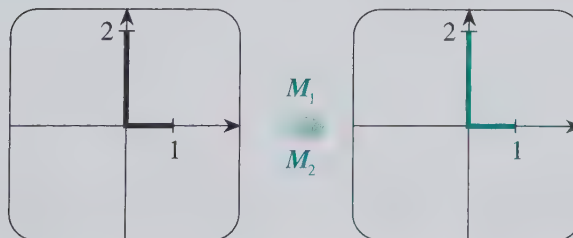


5. Dans chacun des cas suivants, déterminez deux matrices différentes M_1 et M_2 qui transforment la figure de l'écran de gauche en la figure de l'écran de droite.

a)

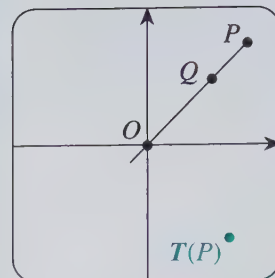


b)

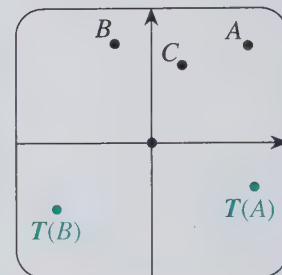


6. Soit T , une transformation linéaire telle que $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $T^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, où T^2 désigne la transformation qui résulte de deux applications successives de T . Calculez $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. Sur l'écran représenté ci-contre, les points O (l'origine), Q et P sont colinéaires; le point $T(P)$ est l'image de P par une transformation linéaire T inconnue. Sans effectuer de calculs, déterminez la position du point $T(Q)$ sur l'écran à l'aide d'une règle et d'une équerre, ou d'une règle et d'un compas, et à l'aide des propriétés L1 à L5 des transformations linéaires.



8. Sur l'écran représenté ci-contre, les points A et B sont non colinéaires à l'origine. Une transformation linéaire inconnue transforme respectivement ces points en $T(A)$ et $T(B)$. Sans effectuer de calculs, déterminez la position de l'image $T(C)$ du point C sur l'écran à l'aide d'une règle et d'une équerre, ou d'une règle et d'un compas, et à l'aide des propriétés L1 à L5 des transformations linéaires.



9. La transformation linéaire T représentée par la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ transforme la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x + 1$ en une droite $\mathcal{D}'$. Trouvez l'équation de $\mathcal{D}'$ sous la forme $y = mx + b$.

LES HOMOTHÉTIES, LES ROTATIONS ET LES RÉFLEXIONS

Tous les logiciels de traitement de l'image comprennent des outils de transformation : les plus simples sont les agrandissements (homothéties), les rotations et les réflexions. Dans cette section, nous montrons comment trouver les matrices qui représentent ces transformations linéaires et nous analysons leurs propriétés particulières. Nous montrons aussi que les rotations et les réflexions sont représentées par une classe particulière de matrices : les matrices orthogonales. Enfin, nous montrons que le déterminant de la matrice d'une transformation linéaire peut-être interprété comme un facteur de changement d'aire. Pour alléger le texte, nous identifions la transformation linéaire T avec la matrice M qui la représente.

7.2.1 LES ÉTIREMENTS ET LES HOMOTHÉTIES

Soit k , un nombre réel. L'étirement de facteur k dans la direction de l'axe des x est la transformation linéaire M pour laquelle $M(\vec{i}) = k\vec{i}$ et $M(\vec{j}) = \vec{j}$. D'après le théorème de représentation, on a alors $M = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est la matrice élémentaire correspondant à

l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow kL_1$. La figure 7.11 montre un étirement de facteur 2 dans la direction de l'axe des x .

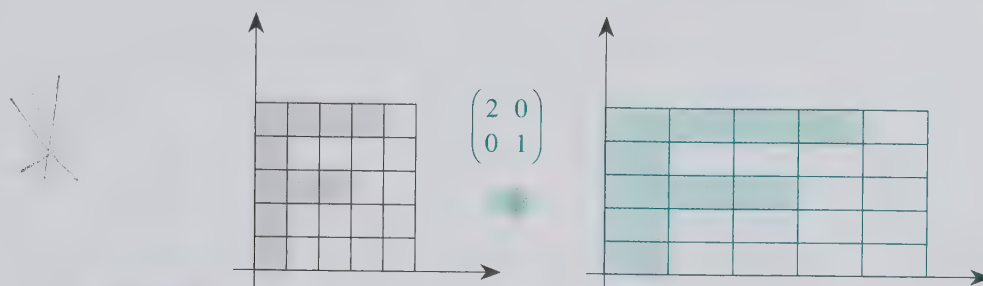


FIGURE 7.11

De la même façon, l'étirement de facteur k dans la direction de l'axe des y est la transformation linéaire M pour laquelle $M(\vec{i}) = \vec{i}$ et $M(\vec{j}) = k\vec{j}$. La figure 7.12 montre un étirement de facteur 2 dans la direction de l'axe des y .

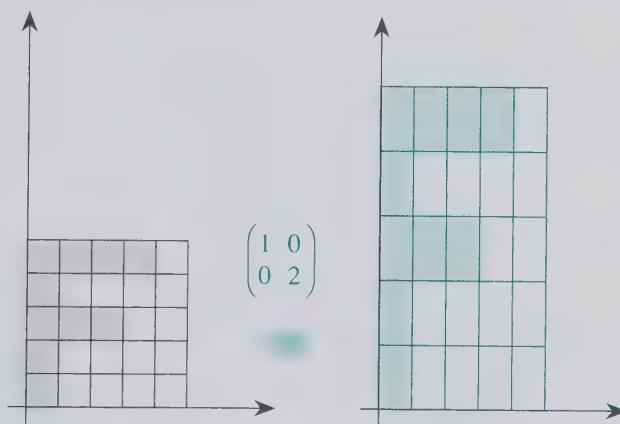


FIGURE 7.12

Voici la définition générale d'un étirement de facteur k dans une direction arbitraire.

Étirement de facteur k dans la direction $\vec{u}$

Soit k , un scalaire, et $\vec{u}$, un vecteur non nul. L'étirement⁴ de facteur k dans la direction $\vec{u}$ est la transformation linéaire M pour laquelle $M(\vec{u}) = k\vec{u}$ et $M(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp$.

Remarques

1. Lorsque $0 < |k| < 1$, l'étirement M est une **compression**.
2. Lorsque $k = 1$, $M = I$. Lorsque $k = -1$, M est une réflexion autour de la droite de direction $\vec{u}_\perp$, passant par l'origine.
3. Lorsque $k = 0$, M est une **projection orthogonale** sur la droite de direction $\vec{u}_\perp$, passant par l'origine.
4. Lorsque $k < 0$, on dit que M est un étirement **avec retournement**.

4. En anglais, on dit *stretch* pour « étirement ».

EXEMPLE

L'étirement de facteur 2 dans la direction $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est déterminé par

$$M(\vec{u}) = M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } M(\vec{u}_\perp) = M \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors $M \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

et donc

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les figures 7.13 et 7.14 montrent deux façons de voir l'étirement de facteur 2 dans la direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

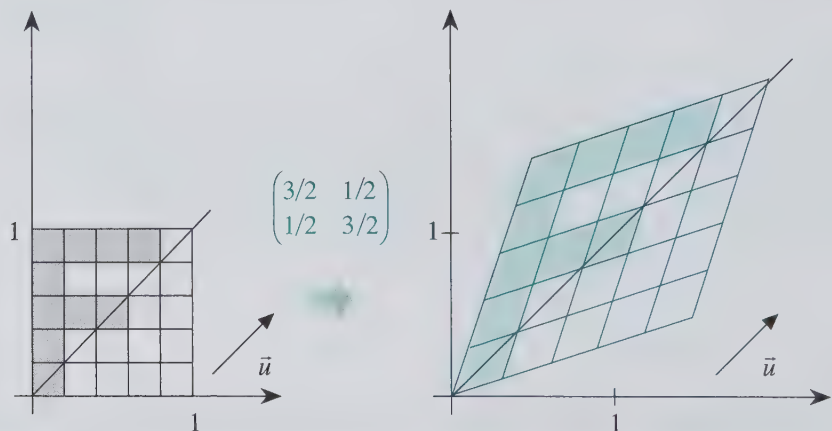


FIGURE 7.13 L'étirement de facteur 2 dans la direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

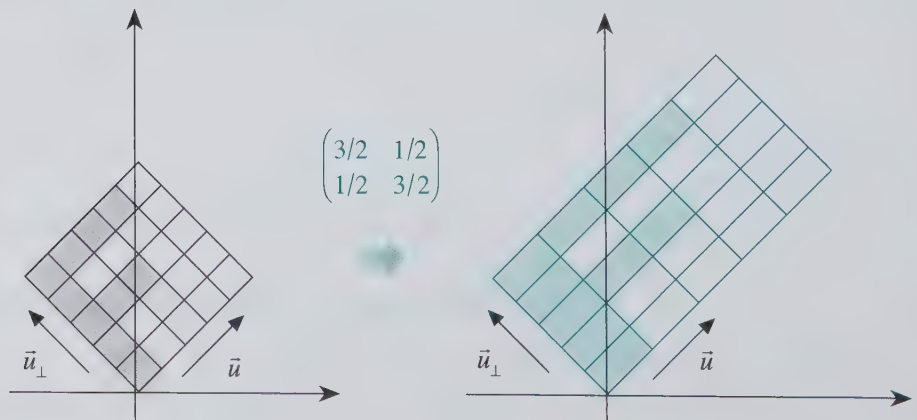


FIGURE 7.14 Une autre façon de voir l'étirement de facteur 2 dans la direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Homothétie de rapport k

Soit $k \geq 0$; l'homothétie de rapport k est la transformation linéaire M telle que

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} \text{ pour tout } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Remarque

Contrairement aux étirements, l'usage veut que les homothéties soient sans retournement. C'est pourquoi on pose $k \geq 0$ dans la définition d'homothétie. Les retournements sont en fait des réflexions et seront traités plus loin.

EXEMPLE 1

Si $k = 2$, alors $M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, et donc $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Il s'agit alors d'une homothétie de rapport 2 (voir la figure 7.15).

EXEMPLE 2

Si $k = 1/2$, alors $M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, et donc $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Il s'agit alors d'une homothétie de rapport $1/2$ (voir la figure 7.15).

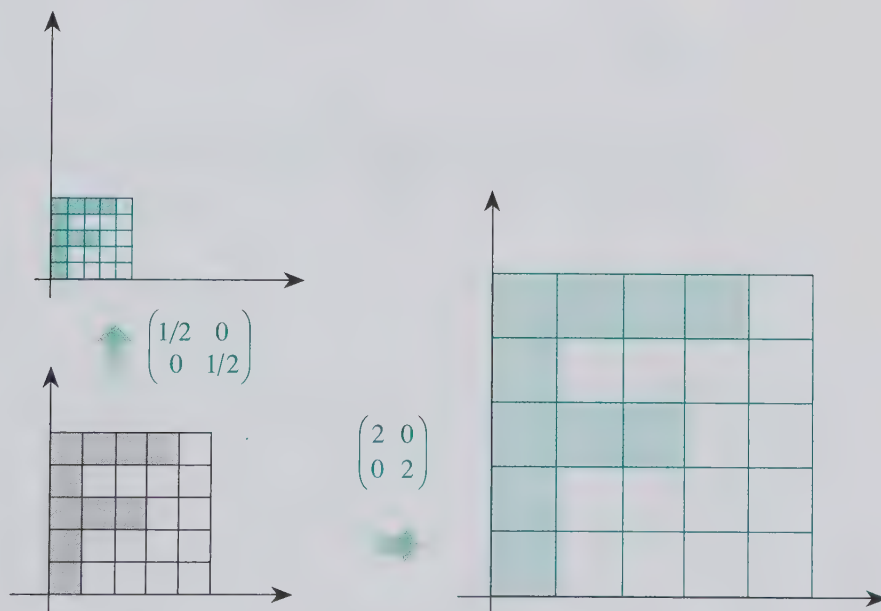


FIGURE 7.15 Des homothéties de rapports $1/2$ et 2 .

7.2.2 LES ROTATIONS AUTOUR DE L'ORIGINE

Les rotations autour du point origine et les réflexions autour de droites centrées à l'origine sont des transformations linéaires. Nous suivons ici la convention habituelle de mesure des angles autour de l'origine : les angles sont mesurés positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

La matrice R_θ d'une rotation d'angle θ autour de l'origine (dans le sens contraire des aiguilles d'une montre) s'obtient en calculant $R_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $R_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ à partir de la figure 7.16 :

$$R_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \text{ et } R_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

et donc, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

On obtient ainsi une matrice de rotation d'angle θ .

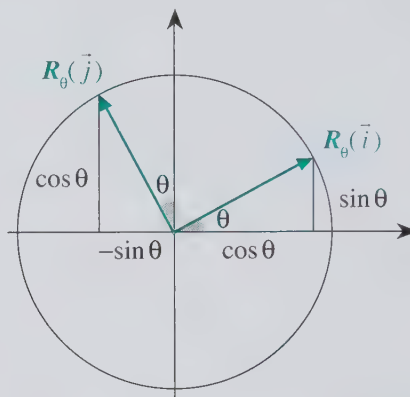


FIGURE 7.16 Les images de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ par une rotation d'angle θ .

Matrice de rotation d'angle θ

La matrice d'une rotation d'angle θ autour de l'origine est

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE

La rotation de 60° , ou $\pi/3$ radian, est représentée par la matrice

$$R_{\pi/3} = \begin{pmatrix} \cos \pi/3 & -\sin \pi/3 \\ \sin \pi/3 & \cos \pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ (voir la figure 7.17).}$$

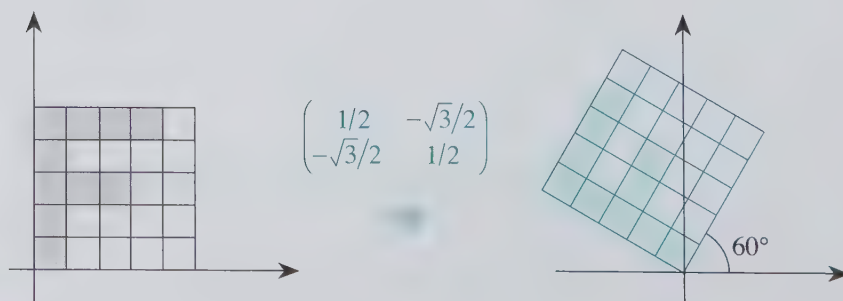


FIGURE 7.17 Une rotation de 60° ou $\pi/3$ radian.

7.2.3 LES RÉFLEXIONS AUTOUR DE DROITES PASSANT PAR L'ORIGINE

On vérifie facilement que la matrice S_x d'une réflexion autour de l'axe des x est $S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

et que la matrice S_y d'une réflexion autour de l'axe des y est $S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (voir la figure 7.18).

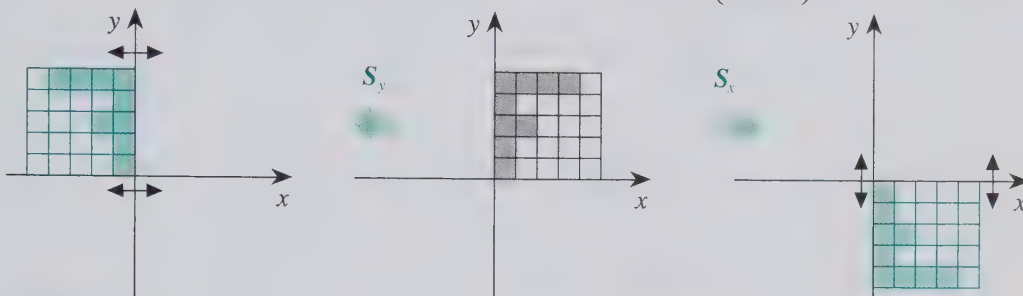


FIGURE 7.18 Les réflexions S_x et S_y autour des axes de coordonnées.

On veut maintenant trouver la matrice de réflexion autour d'une droite $\mathcal{D}$ arbitraire passant par l'origine.

Soit $\mathcal{D}$, une droite qui passe par l'origine et qui forme un angle θ avec l'axe des x . Il y a plusieurs façons équivalentes d'obtenir la matrice de la **réflexion** S_θ autour de la droite $\mathcal{D}$. En voici deux :

Méthode 1

$S_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur unitaire qui forme un angle 2θ avec l'axe des x , c'est-à-dire

$S_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}$ et $S_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur unitaire qui forme un angle 2θ avec la

partie négative de l'axe des y , c'est-à-dire

$S_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ (voir la figure 7.19).

Cela donne

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

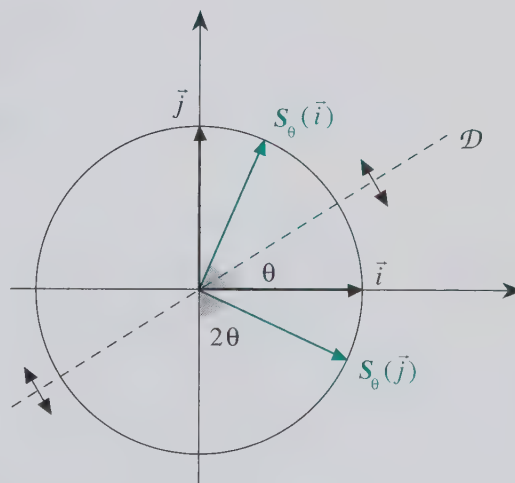


FIGURE 7.19

Méthode 2

En choisissant le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$, on aura $S_\theta(\vec{u}) = \vec{u}$ et $S_\theta(\vec{u}_\perp) = -\vec{u}_\perp$ (voir la figure 7.20) :

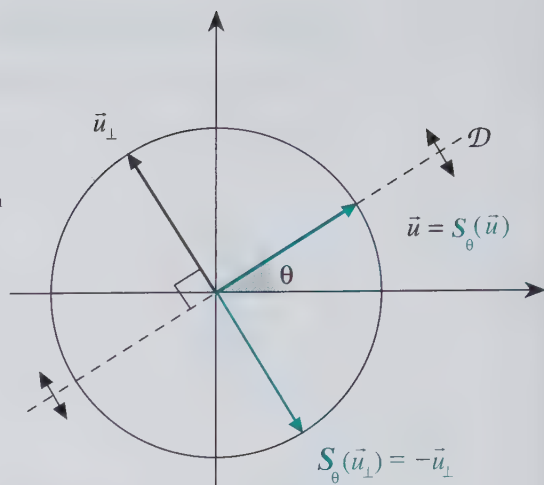
$$S_\theta \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \text{ et } S_\theta \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$S_\theta \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

et donc,

$$\begin{aligned} S_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ 2 \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



C'est ainsi qu'on obtient la matrice d'une réflexion autour de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = (\tan \theta)x$.

FIGURE 7.20

Matrice d'une réflexion autour de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = (\tan \theta)x$

La matrice d'une réflexion autour de la droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine et formant un angle θ avec l'axe des x est

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ 2 \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

La droite $\mathcal{D}$ est l'axe de réflexion.

Exercices

1. En remplaçant θ par $\frac{\theta}{2}$ dans la matrice $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$, on voit que la matrice $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ représente une réflexion autour de la droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine et formant un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe des x .
2. En remplaçant θ par 0 dans $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$, on obtient la réflexion autour de l'axe des x : $S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; en remplaçant θ par $\pi/2$, on obtient la réflexion autour de l'axe des y : $S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; en remplaçant θ par $\pi/4$, on obtient la réflexion autour de la droite d'équation $y = x$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, une matrice élémentaire qui correspond à l'opération élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_2$.
3. Tous les points P situés sur l'axe de réflexion sont fixes: $S(P) = P$.

EXEMPLE 1

La réflexion autour de la droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine et formant un angle de 60° avec l'axe des x est représentée par la matrice

$$S_{60^\circ} = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & \sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & -\cos 120^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ (voir la figure 7.21).}$$

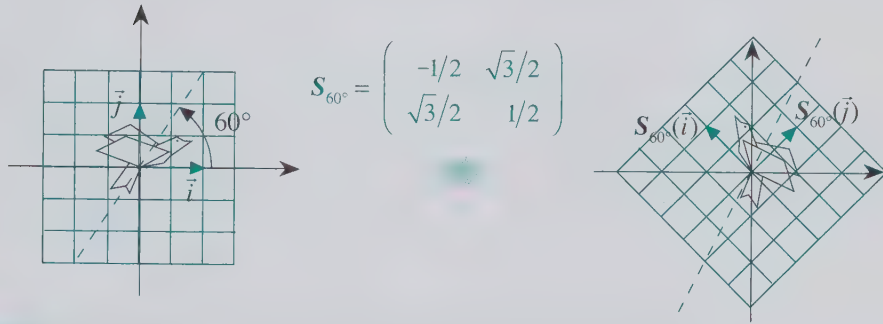


FIGURE 7.21 La réflexion S_{60° .

EXEMPLE 2

On peut calculer la matrice S de la réflexion autour de la droite d'équation $y = 2x$ (voir la figure 7.22)

en choisissant le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de cette droite :

$$S(\vec{u}) = S \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } S(\vec{u}_\perp) = S \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$S \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ou, encore,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

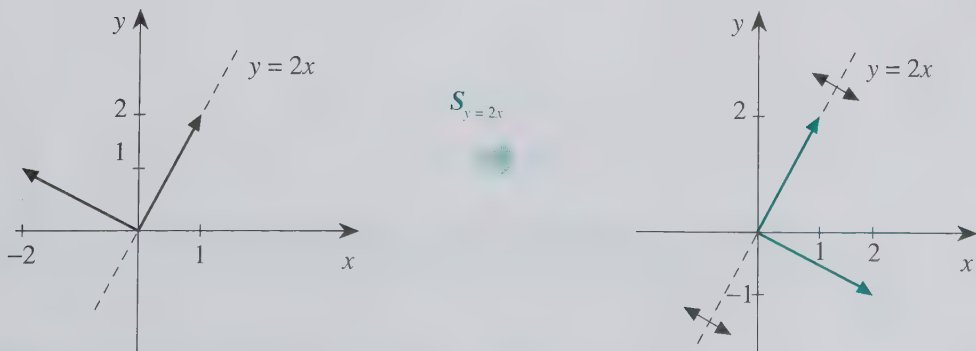


FIGURE 7.22 La réflexion autour de la droite d'équation $y = 2x$.

7.2.4 LES MATRICES ORTHOGONALES

On peut vérifier que l'inverse de la matrice de rotation R_θ est la matrice de rotation $R_{-\theta}$:

$$(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

On observe que $(R_\theta)^{-1} = (R_\theta)^T$, c'est-à-dire que l'inverse de R_θ coïncide avec la transposée de R_θ .

On peut aussi vérifier que l'inverse de la matrice de réflexion $S_{\theta/2}$ est la matrice de réflexion

$S_{\theta/2}$ elle-même : $(S_{\theta/2})^{-1} = S_{\theta/2} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$. De plus, on observe que $(S_{\theta/2})^{-1} = (S_{\theta/2})^T$, c'est-à-dire que l'inverse de $S_{\theta/2}$ coïncide avec la transposée de $S_{\theta/2}$.

Ces observations conduisent à la définition suivante.

Matrice orthogonale

Une matrice carrée M est dite **orthogonale** si $M^T = M^{-1}$, c'est-à-dire si

$$MM^T = M^T M = I.$$

La condition $M^T M = I$ pour une matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ se traduit par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où l'on voit que $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ et $ac + bd = 0$, c'est-à-dire que les vecteurs colonnes

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ de $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ sont unitaires et perpendiculaires l'un à l'autre : ils forment donc

une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. Or, toutes les bases orthonormées de $\mathbb{R}^2$ s'écrivent forcément

$\left\langle \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle$ si elles sont orientées positivement, ou $\left\langle \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle$ si elles

sont orientées négativement. On en déduit que les seules matrices orthogonales d'ordre 2 sont celles qui représentent les rotations et les réflexions. Puisque le déterminant d'une

matrice de rotation R_θ est toujours $\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ et que le déterminant

d'une matrice de réflexion est toujours $\begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{vmatrix} = -\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -1$, on obtient la

caractérisation suivante des matrices de rotation et de réflexion.

- 1) Une matrice carrée M d'ordre 2 est une matrice de rotation si et seulement si M est orthogonale et $\det M = 1$.
- 2) Une matrice carrée M d'ordre 2 est une matrice de réflexion si et seulement si M est orthogonale et $\det M = -1$.

EXEMPLE 1

La matrice $\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale, car les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$ sont unitaires et le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul. De plus,

$$\det \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right)^2 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = (0,1)(10) = 1.$$

Cette matrice représente donc une rotation d'angle θ avec $\cos \theta = 3/\sqrt{10}$ et $\sin \theta = -1/\sqrt{10}$, ce qui donne $\theta \approx -18,43^\circ$.

EXEMPLE 2

La matrice $\frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale dont le déterminant est -1 (faites vous-même la vérification). Cette matrice représente donc une réflexion autour d'une droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine et formant un angle α avec l'axe des x pour lequel $\cos 2\alpha = -2/\sqrt{13}$ et $\sin 2\alpha = 3/\sqrt{13}$; cela donne $2\alpha \approx 123,69^\circ$ et donc $\alpha \approx 61,84^\circ$. L'équation de l'axe de réflexion $\mathcal{D}$ est $y = (\tan \alpha)x$, ce qui donne approximativement $y = 1,87x$.

On peut aussi trouver un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ directement à partir de la matrice de réflexion: le vecteur $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est forcément parallèle à $\mathcal{D}$, car $\mathcal{D}$ est la bissectrice de l'angle formé par les vecteurs $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; on trouve ainsi

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2 + \sqrt{13})/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{pmatrix},$$

et alors, le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. La pente de $\mathcal{D}$ est donc de $\frac{3}{-2 + \sqrt{13}} = \frac{2 + \sqrt{13}}{3} \approx 1,87$.

EXEMPLE 3

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ n'est manifestement pas orthogonale; la transformation linéaire qu'elle représente n'est donc ni une rotation ni une réflexion.

7.2.5 LE FACTEUR DE CHANGEMENT D'AIRES

Au chapitre 3, nous avons défini le déterminant $\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$ comme la valeur numérique de l'aire orientée du parallélogramme engendré par les vecteurs lignes (x, y) et (z, w) . Mais comme la transposition ne change pas la valeur d'un déterminant (voir le chapitre 6), nous pouvons tout aussi bien considérer que la valeur du déterminant $\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$ donne l'aire orientée du

parallélogramme engendré par les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}$.

Ainsi, le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ d'une transformation linéaire donne la valeur de l'aire orientée du parallélogramme engendré par les vecteurs colonnes

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, c'est-à-dire l'aire orientée de l'image par M du carré-unité engendré par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (voir la figure 7.23).

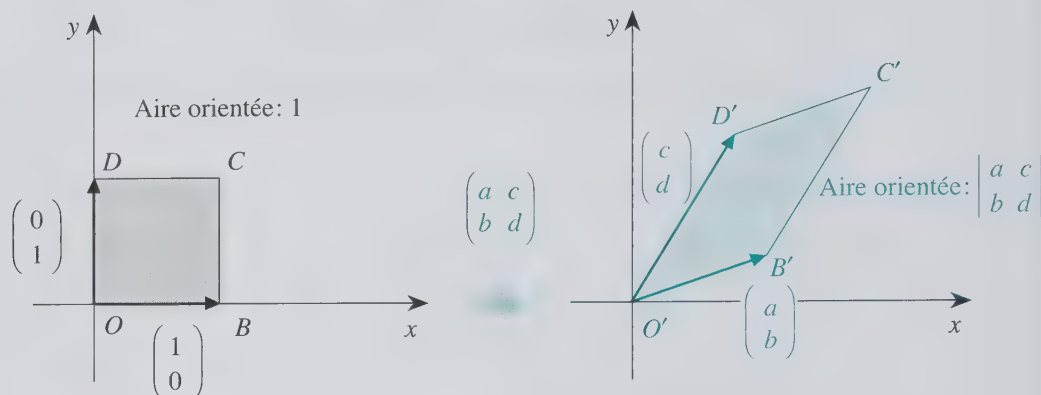


FIGURE 7.23

Soit $OBCD$, le parallélogramme engendré par la suite ordonnée de vecteurs $\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle$, et soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, la matrice d'une transformation linéaire. Alors, l'aire orientée A' du parallélogramme $O'B'C'D'$, image de $OBCD$ par M , est le produit du déterminant de M par l'aire orientée A de $OBCD$ (voir la figure 7.24) :

$$A' = (\det M)A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Pour cette raison, le déterminant $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ est appelé le **facteur de changement d'aire** de la transformation M .

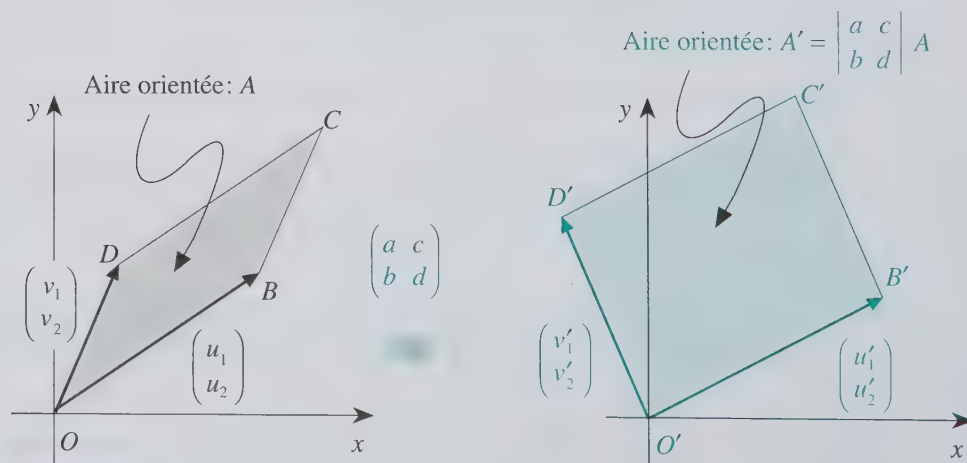


FIGURE 7.24

Preuve

Le parallélogramme $O'B'C'D'$ est engendré par la suite ordonnée $\left\langle \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} \right\rangle$ dans

laquelle $\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\begin{aligned} A' &= \det \begin{pmatrix} u'_1 & v'_1 \\ u'_2 & v'_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \left[M \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right] \quad \left[\text{car} \begin{pmatrix} u'_1 & v'_1 \\ u'_2 & v'_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \det M \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \quad [\text{car} \det(M_1 M_2) = \det M_1 \det M_2] \\ &= (\det M) A \quad \left[\text{car} A = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

EXEMPLE

La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ transforme tout parallélogramme d'aire A en un parallélogramme d'aire $3A$,

car $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$. En réalité, M transforme toute région $\mathcal{R}$ d'aire A en une région $\mathcal{R}'$ d'aire $3A$.

En effet, on pourrait montrer que M transforme un pavage de $\mathcal{R}$ avec des parallélogrammes en un pavage de $\mathcal{R}'$ avec les parallélogrammes images correspondants d'aire trois fois plus grande.

Remarque

Le concept de facteur de changement d'aire d'une transformation linéaire se généralise sous certaines conditions à d'autres transformations (qu'on appelle **localement** linéaires) et porte le nom plus officiel de **jacobien d'une transformation**, en l'honneur de Carl Gustav Jacobi (1804-1851) qui a montré comment on peut s'en servir pour le calcul de certaines intégrales multiples.

EXERCICES 7.2

1. Déterminez la matrice 2×2 qui représente l'étirement de facteur k dans la direction $\vec{u}$ pour chacun des cas suivants.

a) $k = 3, \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $k = 2, \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $k = 2, \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $k = 5, \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $k = 4, \vec{u} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{pmatrix}$

2. Montrez que le déterminant d'une matrice M qui représente un étirement de facteur k dans une direction arbitraire est égal à k .
3. Vérifiez que la matrice inverse d'un étirement de facteur k dans la direction $\vec{u}$ est la matrice d'un étirement de facteur $1/k$ dans la direction $\vec{u}$.
4. Montrez que l'inverse d'une homothétie de rapport k est une homothétie de rapport $1/k$.
5. Montrez que le déterminant d'une homothétie de rapport k est k^2 .
6. Écrivez la matrice d'une homothétie de rapport k comme un produit de deux matrices d'étirement.

7. Écrivez la matrice R_θ qui représente une rotation autour de l'origine d'un angle θ pour les différentes valeurs de θ .

a) $\theta = 180^\circ$

c) $\theta = 30^\circ$

e) $\theta = 2\pi/3$ rad

b) $\theta = -120^\circ$

d) $\theta = -45^\circ$

8. Écrivez la matrice S_α qui représente une réflexion autour d'une droite passant par l'origine et formant un angle α avec l'axe des x pour les différentes valeurs de α .

a) $\alpha = 90^\circ$

b) $\alpha = 135^\circ$

c) $\alpha = \pi/3$ rad

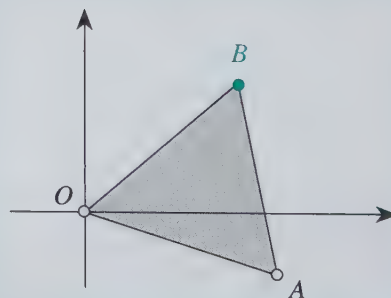
9. Parmi les matrices suivantes, identifiez celles qui représentent des rotations ou des réflexions, et déterminez l'angle de rotation ou l'angle que forme l'axe de réflexion avec l'axe des x , le cas échéant.

a) $\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

10. Le triangle OAB illustré ci-contre est équilatéral, et les coordonnées du sommet A sont $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Déterminez les coordonnées du sommet B à l'aide d'une matrice de rotation appropriée.



11. Soit $\mathcal{D}$, la droite d'équation $y = -3x$.

a) Déterminez la matrice S de la réflexion autour de la droite $\mathcal{D}$.

b) À l'aide de la matrice S , calculez les coordonnées du point Q symétrique du point $P \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ relativement à la droite $\mathcal{D}$.

12. Soit $\mathcal{D}$, la droite d'équation $y = mx$. Écrivez la matrice S qui représente la réflexion autour de $\mathcal{D}$ directement en fonction de m , et ce, sans utiliser la trigonométrie. Vérifiez ensuite que S est une matrice orthogonale et que $\det S = -1$, quel que soit m .
13. Si on désigne la matrice de rotation d'angle α par R_α et la matrice de rotation d'angle β par R_β , on peut prévoir que le produit $R_\beta R_\alpha$ coïncidera avec la matrice de rotation d'angle $\alpha + \beta$, c'est-à-dire que $R_\beta R_\alpha = R_{\alpha+\beta}$. Utilisez cette dernière égalité pour retrouver les formules habituelles d'addition des fonctions trigonométriques cosinus et sinus.
- $\cos(\alpha + \beta) = ?$
 - $\sin(\alpha + \beta) = ?$
14. R_θ et S_θ désignent respectivement une rotation d'angle θ et une réflexion autour d'une droite passant par l'origine et formant un angle θ avec l'axe des x . Justifiez géométriquement et (ou) algébriquement les relations suivantes.
- $(S_\theta)^{2n} = I$ et $(S_\theta)^{2n+1} = S_\theta$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$
 - $(R_\theta)^n = R_{n\theta}$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$
 - $S_\theta = R_\theta S_x R_\theta^{-1}$, où S_x est la réflexion autour de l'axe des x .
 - $S_\beta S_\alpha = R_{2(\beta-\alpha)}$. (Remarque : Cette relation correspond au principe des kaléidoscopes : deux réflexions autour de deux droites concourantes dans un plan donnent, par composition, une rotation autour du point de rencontre des deux droites ; la valeur de l'angle de la rotation est précisément le double de celle de l'angle situé entre les droites.)
15. Soit M , une matrice carrée. S'il existe un nombre entier positif k tel que $M^k = I$, alors M est dite k -involutive. (On suppose que k est le plus petit nombre entier positif pour lequel $M^k = I$.)
- Expliquez pourquoi toute matrice de rotation d'angle $\theta = 2\pi/k$, où k est un entier positif, est k -involutive.
 - Donnez un exemple d'une matrice 3-involutive.
 - Donnez un exemple d'une matrice 4-involutive.
16. Déterminez deux matrices de rotation X telles que $X^2 + I = O$ (matrice nulle). Remarquez qu'il n'y a aucun nombre réel solution de l'équation algébrique $x^2 + 1 = 0$, mais nous verrons au chapitre 8 que cette équation a deux solutions dans l'ensemble des nombres complexes, et que ceux-ci sont en relation avec les rotations.
17. Une rotation d'angle θ autour de l'origine, suivie, ou précédée, d'une homothétie de rapport r centrée à l'origine, donne une **similitude directe** centrée à l'origine que l'on note $Z_{r, \theta}$. Une réflexion autour de la droite passant par l'origine et formant un angle θ avec l'axe des x , suivie, ou précédée, d'une homothétie de rapport r centrée à l'origine, donne une **similitude indirecte** que l'on note $Z_{r, \theta}^*$.
- Montrez que toute matrice de similitude (centrée à l'origine) s'écrit rM , où r est un nombre réel positif et M , une matrice orthogonale.
 - Montrez que toute matrice de similitude directe peut s'écrire $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.
 - Montrez que toute matrice de similitude indirecte peut s'écrire $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

18. Pour chacune des matrices, dites s'il s'agit d'une similitude et, le cas échéant, si elle est directe ou indirecte, puis calculez les valeurs de r et de θ .

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

19. Soit $\mathcal{D}$, la droite d'équation $y = 3x$. Pour chacune des transformations de l'exercice 18, déterminez l'équation exacte de l'image de $\mathcal{D}$.

20. Le triangle ABC de sommets $A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est transformé par la similitude $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ en un triangle semblable $A'B'C'$. Déterminez les coordonnées des sommets A' , B' et C' .

21. Calculez le facteur de changement d'aire de chacune des matrices représentant les transformations linéaires suivantes.

a) Rotation d'angle θ .

b) Réflexion autour d'une droite.

c) Étirement de facteur k .

d) Homothétie de facteur k .

e) Similitude indirecte de rapport k et d'angle θ .

22. La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ transforme une région $\mathcal{R}$ en une région $\mathcal{R}'$ dont l'aire mesure 20 cm^2 . Quelle est l'aire de la région $\mathcal{R}$?

D'AUTRES TRANSFORMATIONS LINÉAIRES

En plus des étirements, des homothéties, des rotations et des réflexions, on trouve aussi parmi les transformations linéaires dans $\mathbb{R}^2$ les cisaillements et les projections. Dans cette section, nous complétons notre étude des transformations linéaires par la description de ces transformations.

7.3.1 LES CISAILLEMENTS

Dans les études de résistance des matériaux, les ingénieurs appellent **cisaillement** de facteur k et de direction $\vec{u}$ la déformation illustrée à la figure 7.25. Des déformations de ce type se produisent parfois, pour de petites valeurs de k , dans des poutres soumises à de fortes contraintes. Par ailleurs, les logiciels de traitement de l'image comprennent aussi dans leurs menus des options de cisaillement⁵ pour créer des effets spéciaux (ombres, perspectives parallèles, etc.).

5. En anglais, on dit *shear* pour « cisaillement ».

Les cisaillements sont des transformations linéaires. En voici une définition générale :

Cisaillement de facteur k dans la direction $\vec{u}$

Soit $\vec{u}$, un vecteur non nul, et k , un scalaire. Le cisaillement de facteur k dans la direction $\vec{u}$ est la transformation linéaire T pour laquelle

$$T(\vec{u}) = \vec{u} \text{ et } T(\vec{u}_\perp) = \vec{u}_\perp + k\vec{u} \text{ (voir la figure 7.25).}$$

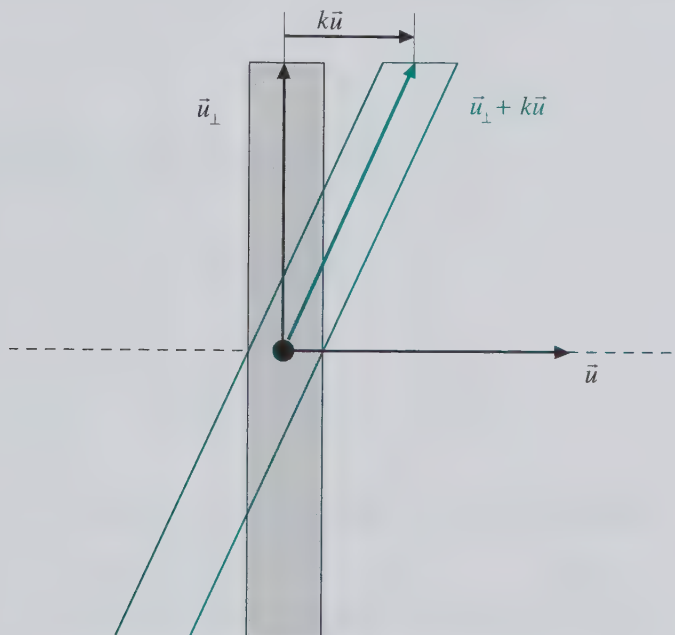


FIGURE 7.25 Un cisaillement de facteur k dans la direction $\vec{u}$.

EXEMPLE 1

Le cisaillement de facteur k dans la direction $\vec{i}$ est défini par $T(\vec{i}) = \vec{i}$ et $T(\vec{j}) = \vec{j} + k\vec{i}$. La matrice de ce cisaillement est donc $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est la matrice élémentaire correspondant à l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + kL_2$. La figure 7.26 illustre les cisaillements de facteurs 1 et -1 dans la direction $\vec{i}$, c'est-à-dire les cisaillements correspondant respectivement aux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

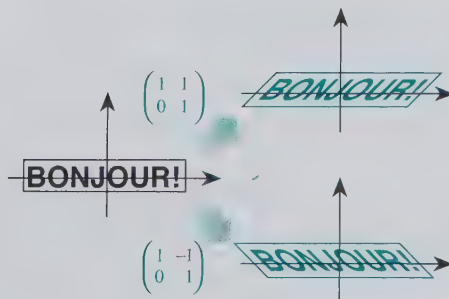


FIGURE 7.26 Des cisaillements de facteurs 1 et -1 dans la direction $\vec{i}$.

EXEMPLE 2

Le cisaillement de facteur k dans la direction $\vec{j}$ est défini par $T(\vec{j}) = \vec{j}$ et $T(\vec{j}_\perp) = \vec{j}_\perp + k\vec{j}$. Puisque $\vec{j}_\perp = -i$, ces égalités se traduisent par $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $T\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ k \end{pmatrix}$, d'où $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -k \end{pmatrix}$, de telle sorte que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}.$$

La figure 7.27 illustre les cisaillements de facteurs 1 et -1 dans la direction $\vec{j}$, c'est-à-dire les cisaillements correspondant respectivement aux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

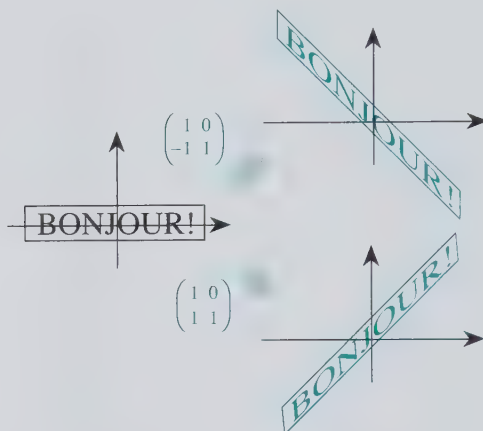


FIGURE 7.27 Des cisaillements de facteurs 1 et -1 dans la direction $\vec{j}$.

EXEMPLE 3

La matrice M du cisaillement de facteur 2 dans la direction $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ se trouve ainsi: $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, d'où $M\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et, après avoir effectué les calculs, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque

Le principe de Cavalieri permet de voir qu'un cisaillement ne change pas l'aire d'un parallélogramme. On peut aussi s'en convaincre en démontrant que le déterminant de la matrice d'un cisaillement de facteur k et de direction $\vec{u}$ est 1 pour toute valeur de k et toute direction $\vec{u}$ (voir l'exercice 7 à la fin de cette section).

7.3.2 LES PROJECTIONS

Dans $\mathbb{R}^2$, les projections sur les droites passant par l'origine sont des transformations linéaires. Les plus simples sont la projection orthogonale sur l'axe des x représentée par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et la projection orthogonale sur l'axe des y représentée par $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour lesquelles on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},$$

quel que soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (voir la figure 7.28).

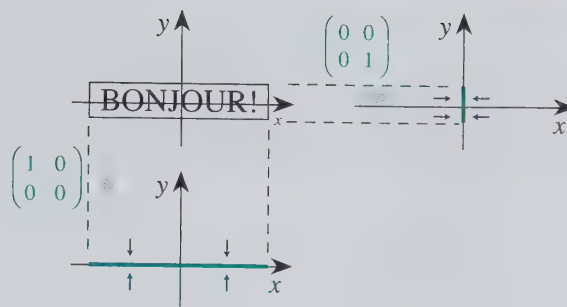


FIGURE 7.28 Des projections orthogonales sur les axes de coordonnées.

Projection oblique et projection orthogonale

Soit $\mathcal{D}$, une droite passant par l'origine et de direction $\vec{u}$, et soit $\vec{v}$, un vecteur non nul et non parallèle à $\vec{u}$. La **projection oblique** de direction $\vec{v}$ sur la droite $\mathcal{D}$ est la transformation linéaire T pour laquelle

$$T(\vec{u}) = \vec{u} \text{ et } T(\vec{v}) = \vec{0}.$$

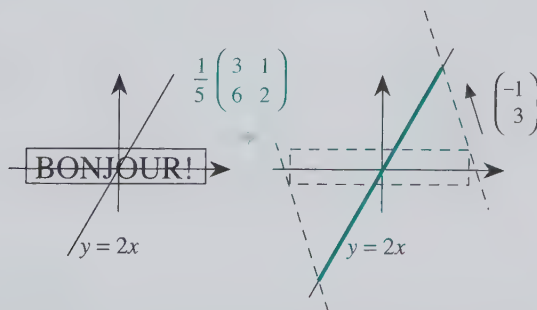
Lorsque $\vec{v} \perp \vec{u}$, on dit que T est une **projection orthogonale** sur $\mathcal{D}$.

EXEMPLE

Soit $\mathcal{D}$, la droite d'équation $y = 2x$, et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. La projection oblique de direction $\vec{v}$ sur $\mathcal{D}$ (voir la figure 7.29) est représentée par la matrice M définie par

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } M \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

car la direction de la droite $\mathcal{D}$ est donnée par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; on obtient ainsi $M \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et, par la suite, $M = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

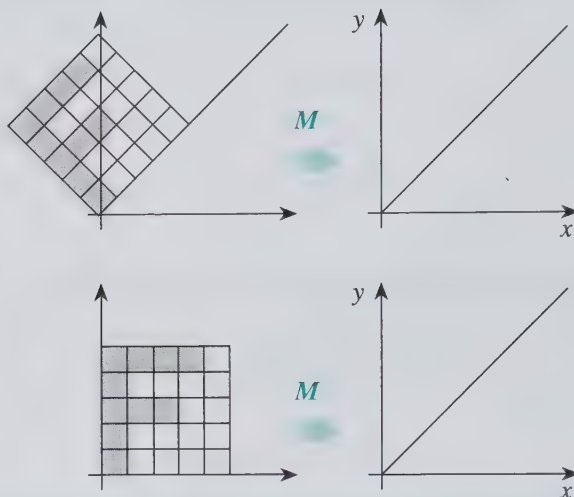
FIGURE 7.29 Une projection oblique de direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sur la droite d'équation $y = 2x$.

Remarque

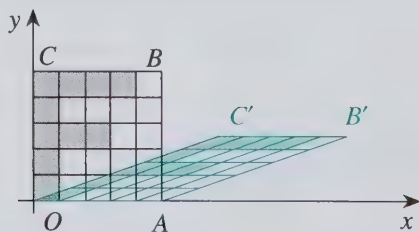
Le déterminant de toute matrice de projection est nul; ainsi, les matrices de projection sont non inversibles (voir l'exercice 9 de la section Exercices 7.3).

EXERCICES 7.3

1. Déterminez la matrice M du cisaillement de facteur $+1$ dans la direction $\vec{i} + \vec{j}$ et, après avoir reproduit la figure ci-dessous sur une feuille de papier quadrillée, complétez les deux illustrations qui s'y trouvent.



2. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs parallèles et non nuls ($\vec{v} = t\vec{u}$, $t \neq 0$) ; vérifiez que la matrice du cisaillement de facteur k dans la direction $\vec{u}$ est la même que la matrice du cisaillement de facteur k dans la direction $\vec{v}$.
3. Pour créer un effet d'ombre, un infographiste veut transformer la lettre F inscrite dans le parallélogramme $OABC$ ci-dessous en lettre F qui est inscrite dans le parallélogramme $OAB'C'$. Le logiciel de graphisme qu'il utilise l'oblige à faire cette transformation en deux étapes :
- il doit d'abord comprimer la lettre F par un étirement de facteur $1/2$ dans la direction $\vec{j}$;
 - il doit ensuite appliquer un cisaillement de facteur 3 dans la direction $\vec{i}$.
- a) Écrivez les matrices M_1 et M_2 qui correspondent à ces deux transformations.
- b) À partir des deux matrices trouvées en a), trouvez la matrice M qui transforme directement la lettre F du parallélogramme $OABC$ en lettre F du parallélogramme $OAB'C'$.



4. Donnez une justification géométrique aux égalités matricielles suivantes, valides quel que soit k .

a) $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & nk \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -nk & 1 \end{pmatrix}$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$

d) $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Soit M , la matrice d'un cisaillement de facteur k dans la direction $\vec{u}$.
- Soit P , un point quelconque de $\mathbb{R}^2$. Le cisaillement déplace le point P sur $M(P)$. Montrez que, si le vecteur $\overrightarrow{PM(P)}$ de ce déplacement est non nul, alors il est parallèle à $\vec{u}$. (*Coup de pouce*: Écrivez $\overrightarrow{OP} = a\vec{u} + b\vec{u}_\perp$, puis $M(\overrightarrow{OP}) = aM(\vec{u}) + bM(\vec{u}_\perp)$ et appliquez la définition de cisaillement.)
 - Si $\vec{v}$ est un vecteur parallèle à $\vec{u}$, montrez que $M(\vec{v}) = \vec{v}$.
6. La matrice M représente un cisaillement. Sachant que $M \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, trouvez :
- la direction $\vec{u}$ de ce cisaillement (la longueur et le sens de $\vec{u}$ n'ont pas d'importance);
 - la matrice M ;
 - le facteur k de ce cisaillement.
7. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, et M , la matrice du cisaillement de facteur k dans la direction $\vec{u}$.
- Justifiez géométriquement l'égalité $M = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_\theta^{-1}$, où R_θ représente la rotation d'angle θ autour de l'origine.
 - À partir de l'expression de M donnée en a), montrez que $\det M = 1$ quel que soit k et quel que soit θ .
 - Montrez que $M^{-1} = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_\theta^{-1}$, où R_θ représente la rotation d'angle θ autour de l'origine.
 - Montrez que $M^n = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & nk \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_\theta^{-1}$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, où R_θ représente la rotation d'angle θ autour de l'origine.
8. Déterminez les matrices qui représentent les projections suivantes :
- la projection orthogonale sur la droite d'équation $y = x$;
 - la projection oblique de direction $\vec{i}$ sur la droite d'équation $y = x$;
 - la projection oblique de direction $\vec{j}$ sur la droite d'équation $y = x$.
9. Démontrez que le déterminant de toute matrice de projection oblique est nul.
10. On appelle **matrice idempotente** toute matrice M pour laquelle $M^2 = M$. La matrice identité et la matrice nulle sont idempotentes. Montrez que les matrices de projection sont toutes idempotentes.
11. Montrez que toute matrice représentant une projection orthogonale est symétrique.

LES POINTS FIXES ET LES DIRECTIONS INVARIANTES, LES VALEURS PROPRES ET LES VECTEURS PROPRES

Dans cette section, nous montrons comment trouver les points fixes, les vecteurs propres (directions invariantes) et les valeurs propres (facteurs d'invariance) de certaines transformations linéaires.

7.4.1 LES POINTS FIXES D'UNE TRANSFORMATION LINÉAIRE

Toute transformation linéaire laisse le point origine O fixe: $M(O) = O$. Certaines transformations linéaires ont d'autres points fixes en plus du point origine.

Point fixe

Un point P pour lequel $M(P) = P$ est appelé un **point fixe** de la matrice M ou de la transformation linéaire représentée par M .

EXEMPLE

Tous les points de la droite d'équation $y = x$ sont des points fixes pour la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Preuve

L'ensemble des points fixes d'une matrice M est soit $\{O\}$, soit une droite passant par l'origine O , soit tout $\mathbb{R}^2$. Dans ce dernier cas, $M = I$.

Supposons que M a un point fixe $P \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ en plus du point origine. Alors, quel que soit t , on aura $M \begin{pmatrix} tx_0 \\ ty_0 \end{pmatrix} = tM \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_0 \\ ty_0 \end{pmatrix}$, ce qui montre que les points de coordonnées $\begin{pmatrix} tx_0 \\ ty_0 \end{pmatrix}$ sont tous fixes et donc, que la droite passant par O et P est fixe. Par ailleurs, si M possède un autre point fixe $Q \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ en dehors de cette droite, on aura $M \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix}$. La matrice $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix}$ est inversible, car ses vecteurs colonnes sont linéairement indépendants (les points P et Q sont non colinéaires avec l'origine). Par conséquent, on obtient

$$M = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{pmatrix}^{-1} = I.$$

7.4.2 LES DIRECTIONS INVARIANTES OU LES VECTEURS PROPRES

Une matrice de transformation peut n'avoir aucun point fixe autre que le point origine, mais avoir cependant des directions invariantes (on dit **vecteurs propres**) au sens de la définition suivante.



Vecteur propre d'une transformation linéaire ou vecteur propre d'une matrice

Soit une transformation linéaire T représentée par la matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Un vecteur non nul $\vec{v}$ est appelé **vecteur propre** de T ou de M si $T(\vec{v}) = k\vec{v}$ pour un certain scalaire k . Le nombre k est appelé **valeur propre** de T ou de M . Cette valeur propre k est dite **associée** au vecteur propre $\vec{v}$. La direction d'un vecteur propre $\vec{v}$ est appelée **direction invariante** de la transformation T .

Remarque

Si $\vec{v}$ est un vecteur propre de M , alors la droite $\mathcal{D}$ de direction $\vec{v}$ et passant par l'origine est invariante sous la transformation représentée par M , au sens où tous les points de $\mathcal{D}$ sont transformés par M en points de $\mathcal{D}$.

EXEMPLE

La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a une infinité de vecteurs propres : ce sont tous les multiples de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$. Les valeurs propres associées à ces deux directions sont respectivement 2 et 3. L'axe des x et l'axe des y sont des droites invariantes de M .

Voici comment on peut trouver les valeurs propres k et les vecteurs propres correspondants

$\vec{v}$ d'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} M(\vec{v}) = k\vec{v} &\Leftrightarrow M(\vec{v}) = kI(\vec{v}) \\ &\Leftrightarrow M(\vec{v}) - kI(\vec{v}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow (M - kI)(\vec{v}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Cette dernière équation a toujours la solution évidente $\vec{v} = \vec{0}$, qui sera unique lorsque $\det(M - kI) \neq 0$. Comme $\vec{0}$ n'est pas un vecteur propre, on trouvera des valeurs propres, et par suite des vecteurs propres, uniquement lorsque $\det(M - kI) = 0$, c'est-à-dire lorsque

$$\begin{vmatrix} a-k & c \\ b & d-k \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui revient à dire $k^2 - (a+d)k + ad - bc = 0$.

Les valeurs propres de M sont donc les racines, s'il y en a, de ce polynôme du deuxième degré en k . Cette observation conduit à la définition suivante.

Polynôme caractéristique d'une matrice

Étant donné une matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, le polynôme en k qui résulte du calcul du déterminant

$\begin{vmatrix} a-k & c \\ b & d-k \end{vmatrix}$, c'est-à-dire $k^2 - (a+d)k + ad - bc$, est appelé **polynôme caractéristique** de M .

L'équation $k^2 - (a+d)k + ad - bc = 0$ est appelée l'**équation caractéristique** de M .

Remarque

L'équation caractéristique $k^2 - (a+d)k + ad - bc = 0$ de toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ a au plus deux solutions pour k . Il en résulte que toute matrice de format 2×2 a au plus deux valeurs propres. De plus, si $ad - bc = 0$, c'est-à-dire si $\det M = 0$, alors l'équation caractéristique de M est simplement $k^2 - (a+d)k = 0$ ou, encore, $k(k - (a+d)) = 0$, dont les solutions sont $k_1 = 0$ et $k_2 = a+d$.

EXEMPLE

Les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ sont les racines du polynôme caractéristique $\begin{vmatrix} 4-k & 10 \\ 5 & -1-k \end{vmatrix} = 0$, ce qui donne $k^2 - 3k - 54 = 0$. Ce polynôme a deux racines : $k_1 = 9$ et $k_2 = -6$. On trouve les vecteurs propres (directions invariantes) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui correspondent à ces valeurs propres en résolvant les équations

$$\begin{pmatrix} 4-9 & 10 \\ 5 & -1-9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 4+6 & 10 \\ 5 & -1+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Avec la méthode de Gauss-Jordan ou autrement, on trouve $u_1 = 2u_2$ et $v_1 = -v_2$, ce qui donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -s \\ s \end{pmatrix}$. En choisissant $t = 1$ et $s = 1$, on peut dire que les directions invariantes sont celles des vecteurs propres $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La droite $\mathcal{D}_1$ de direction $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ passant par l'origine et la droite $\mathcal{D}_2$ de direction $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ passant par l'origine sont invariantes. On peut alors visualiser la transformation représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, comme le montre la figure 7.30.

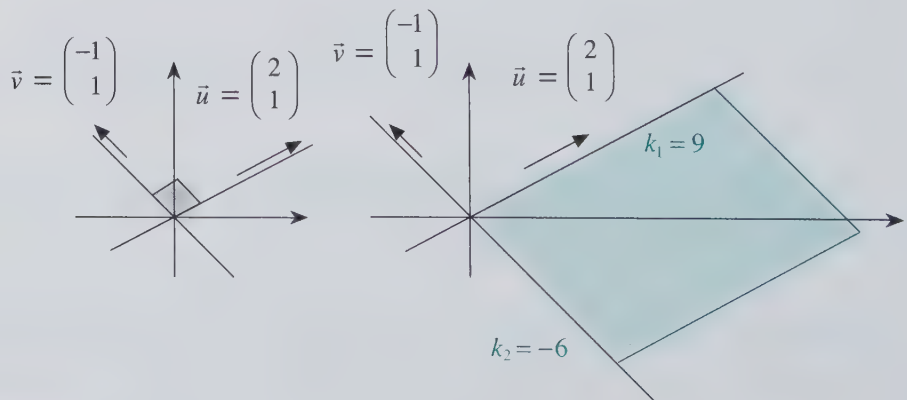


FIGURE 7.30

EXERCICES 7.4

- Décrivez l'ensemble des points fixes de chacune des transformations suivantes.
 - Rotation d'angle θ autour de l'origine, avec $\theta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$
 - Réflexion autour de la droite d'équation $y = mx$.
 - Étirement de facteur k dans la direction $\vec{u}$, avec $k \neq 1$.
 - Homothétie de rapport k , avec $k \neq 1$.
 - Cisaillement de facteur k dans la direction $\vec{u}$, avec $k \neq 0$.
 - Projection oblique de direction $\vec{v}$ sur une droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine.
- La matrice $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 3 \\ -1 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ représente un cisaillement de facteur k dans la direction $\vec{u}$. Trouvez le facteur k et la direction $\vec{u}$.
- La matrice $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 13 \end{pmatrix}$ représente un étirement de facteur k dans une direction $\vec{u}$. Trouvez le facteur k et la direction $\vec{u}$.
- Sans calcul, pour chacune des transformations suivantes, déterminez la valeur du déterminant (en fonction des paramètres, s'il y a lieu), les directions invariantes (ou vecteurs propres) et les valeurs propres correspondantes.
 - Rotation d'angle θ autour de l'origine, avec $\theta \neq 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$
 - Rotation d'angle π (ou 180°) autour de l'origine.
 - Réflexion autour de la droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine et de direction $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$.
 - Étirement de facteur k dans la direction $\vec{u}$, avec $k \neq 1$.
 - Homothétie de rapport k .
 - Cisaillement de facteur k dans la direction $\vec{u}$, avec $k \neq 0$.
 - Projection oblique de direction $\vec{v}$ sur une droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine et de vecteur directeur $\vec{u}$.
- Évaluez le déterminant, trouvez les valeurs propres et les vecteurs propres correspondants, et l'ensemble des points fixes de chacune des matrices. Décrivez ensuite la transformation que chacune représente.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	e) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	g) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	d) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	f) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$	h) $\begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$

La méthode de réduction de Gauss-Jordan permet d'affirmer que toute matrice $\mathbf{A}$ de format 2×2 est

- soit la matrice $\mathbf{I}$ (identité);
- soit le produit $\mathbf{E}_4 \mathbf{E}_3 \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1$ d'au plus quatre matrices élémentaires (précisément lorsque $\mathbf{A}$ est inversible);
- soit le produit $\mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{R}$ d'au plus deux matrices élémentaires et d'une matrice échelonnée-réduite-ligne $\mathbf{R}$.

Il est donc toujours possible d'obtenir une description de toute matrice $\mathbf{A}$ comme transformation linéaire en la décomposant en un produit de matrices élémentaires et ERL qui ont l'avantage d'être faciles à interpréter. Les exercices qui suivent portent sur cette méthode d'interprétation.

6. Décrivez la transformation représentée par chacune des matrices *ERL* de format 2×2 .

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(*Coup de pouce*: En c), on peut écrire $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et décrire la transformation représentée par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ comme la composée de deux transformations simples.)

7. Donnez une description géométrique de la transformation représentée par chacune des matrices élémentaires de format 2×2 (ces transformations sont appelées **élémentaires**).

a) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $k \neq 0, k \neq 1$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ pour $k \neq 0$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ pour $k \neq 0, k \neq 1$.

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $k \neq 0$.

8. Écrivez la matrice de rotation de 90° autour de l'origine comme un produit d'au plus quatre matrices élémentaires et interprétez chacune de ces matrices comme une transformation linéaire élémentaire.

9. Décomposez chacune des matrices en un produit de matrices élémentaires et *ERL*, et interprétez ces matrices comme une composition des transformations correspondantes.

a) $\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

POUR ALLER PLUS LOIN

Cette section vise deux objectifs. Premièrement, elle vise à montrer qu'en composant les translations avec la famille des transformations linéaires, on obtient de nouvelles transformations appelées **transformations affines**. Ces transformations permettent, par exemple, d'effectuer des rotations centrées ailleurs qu'à l'origine et des réflexions autour de droites arbitraires ne passant pas forcément par l'origine. Deuxièmement, elle donne des pistes pour généraliser les transformations linéaires à l'espace tridimensionnel $\mathbb{R}^3$, en particulier les rotations autour d'une droite et les réflexions autour d'un plan.

7.5.1 LES TRANSFORMATIONS AFFINES DANS $\mathbb{R}^2$

Les translations ne sont pas des transformations linéaires, car elles déplacent le point origine. Cela signifie que dans $\mathbb{R}^2$, on ne peut pas représenter les translations par les matrices 2×2 et la multiplication matricielle. Cependant, comme nous l'avons vu au chapitre 1, les translations sont représentées par les vecteurs et l'addition vectorielle. Par exemple, le

vecteur⁶ $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ représente une translation au sens où l'addition vectorielle⁷ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ définit une transformation (non linéaire), de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, qui est une translation (voir la figure 7.31):

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 \\ y+2 \end{pmatrix}.$$

En composant les transformations linéaires et les translations, on obtient les transformations affines.

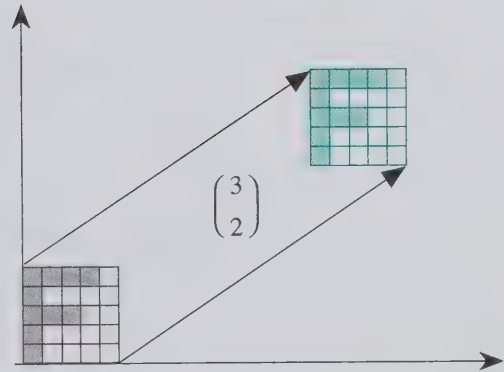


FIGURE 7.31 Une translation définie par le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Transformation affine dans $\mathbb{R}^2$

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, la matrice d'une transformation linéaire, et $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, un vecteur. Alors, la transformation T définie par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

est appelée **transformation affine** dans $\mathbb{R}^2$.

EXEMPLE 1

Rotation de 90° autour du point $P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^2$

Une rotation de 90° autour du point $P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^2$ s'effectue en trois étapes (voir la figure 7.32).

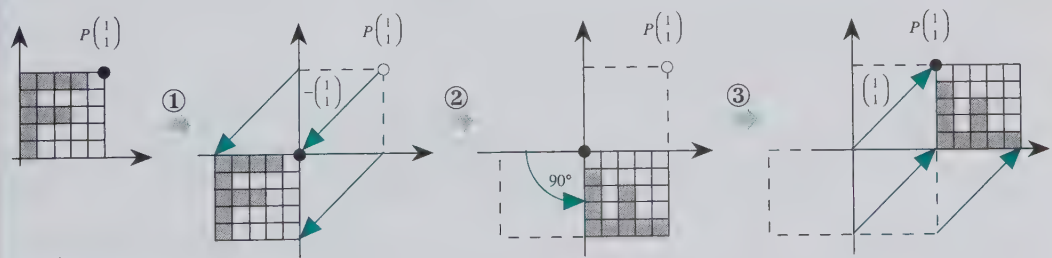


FIGURE 7.32 Une rotation de 90° autour du point $P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en trois étapes.

Étape 1

On effectue d'abord une translation de tout l'espace $\mathbb{R}^2$, qui ramène le centre de rotation de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ au point origine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Nous conservons ici l'écriture colonne pour pouvoir composer les translations avec les transformations linéaires.

7. L'addition vectorielle coïncide ici avec l'addition des matrices 2×1 .

Étape 2

On effectue la rotation de 90° autour de l'origine.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Étape 3

Enfin, on effectue la translation inverse de la première étape pour replacer le centre de rotation à sa position de départ.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La rotation de 90° autour du point $P\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ est donc représentée par la transformation T suivante.

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

EXEMPLE 2**Réflexion autour de la droite d'équation $y = x + 2$**

Nous voulons obtenir une réflexion autour de la droite d'équation $y = x + 2$. Cette droite ne passe pas par l'origine. La réflexion S autour de cette droite nécessite donc, dans un premier temps, une translation qui ramène cette droite à l'origine, sans changer sa direction. Cela peut se faire de plusieurs façons. Puisque la droite passe par le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, choisissons la translation T définie par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On effectue ensuite la réflexion autour de la nouvelle droite ($y = x$), et enfin on effectue la translation inverse qui replace l'axe de réflexion dans sa position initiale :

$$S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

7.5.2 LES ROTATIONS ET LES RÉFLEXIONS DANS $\mathbb{R}^3$

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on représente les transformations linéaires par des matrices de format 3×3 . Les rotations se font autour des droites et les réflexions, autour des plans. Pour les rotations, il faut d'abord choisir une orientation de l'axe de rotation qui déterminera ensuite le sens de mesure positif des angles (voir la figure 7.33).

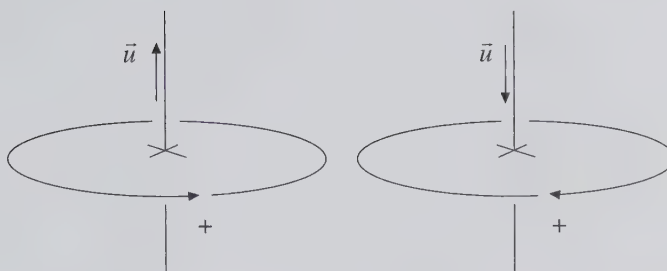


FIGURE 7.33 L'orientation de l'axe de rotation et le sens de mesure positif des angles relativement à cette orientation.

Voici les matrices de rotation autour de chacun des axes de coordonnées lorsque ces axes sont orientés par les vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : \text{rotation d'angle } \theta \text{ autour de l'axe des } x;$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} : \text{rotation d'angle } \theta \text{ autour de l'axe des } y;$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{rotation d'angle } \theta \text{ autour de l'axe des } z.$$

On peut toujours écrire la matrice d'une rotation d'angle α autour d'une droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine comme un produit de matrices de rotation autour des axes de coordonnées : si $\mathcal{D}$ ne coïncide pas avec l'axe des z , alors on effectue une première rotation $\mathbf{R}_1$ autour de l'axe des z jusqu'à ce que $\mathcal{D}$ soit située dans le plan engendré par l'axe des x et l'axe des z , puis on effectue une seconde rotation $\mathbf{R}_2$ autour de l'axe des y jusqu'à ce que $\mathcal{D}$ coïncide avec l'axe des z . On tourne ensuite d'un angle α autour de l'axe des z et on refait les rotations $\mathbf{R}_2$ et $\mathbf{R}_1$ en sens inverse pour ramener l'axe de rotation à sa position de départ.

Toute réflexion autour d'un plan passant par l'origine peut être ramenée à une composition de rotations autour des axes de coordonnées avec une réflexion autour d'un des plans de coordonnées. En effet, avec des rotations appropriées autour des axes de coordonnées, on peut faire coïncider le vecteur normal du plan de réflexion avec une des directions $\vec{i}$, $\vec{j}$ ou $\vec{k}$ et alors, le plan de réflexion coïncidera avec un des plans de coordonnées. Après la réflexion autour de ce plan de coordonnées, on revient à la position de départ du plan en effectuant les rotations inverses.

Les transformations linéaires dans $\mathbb{R}^3$ peuvent être composées avec des translations. Ainsi on peut décrire ou programmer, par exemple, les mouvements d'un robot ou d'une caméra réelle ou virtuelle. Notons aussi que les concepts de polynôme caractéristique, de valeur propre et de vecteur propre se généralisent facilement aux matrices carrées d'ordre 3 et même aux matrices carrées d'ordre n .

TABLEAU-RÉSUMÉ Les transformations linéaires dans $\mathbb{R}^2$.

Transformation	Illustration	Matrice M	$\det M$	Particularités de M	Directions invariantes ou vecteurs propres ($\vec{v}$) et valeurs propres (p)
Identité		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	Matrice identité	$p = 1$ pour tout $\vec{v}$
Rotation (θ)		$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	1	- Matrice orthogonale $M^{-1} = M^T$	Aucune pour $\theta \neq n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)
Réflexion (θ)		$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$	-1	- Matrice orthogonale - symétrique $M^{-1} = M = M^T$	$p = 1$ pour $\vec{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ $p = -1$ pour $\vec{v} = (-\sin \theta, \cos \theta)$
Étirement horizontal de facteur k		$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	k	Inversible pour $k \neq 0$	$p = k$ pour $\vec{v} = (1, 0)$ $p = 1$ pour $\vec{v} = (0, 1)$
Étirement vertical de facteur k		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$	k	Inversible pour $k \neq 0$	$p = 1$ pour $\vec{v} = (1, 0)$ $p = k$ pour $\vec{v} = (0, 1)$
Homothétie de rapport k		$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$	k^2	$M = kI$ $M^{-1} = \frac{1}{k}I$ ($k \neq 0$)	$p = k$ pour tout $\vec{v}$
Cisaillement horizontal de facteur k		$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	Inversible	$p = 1$ pour $\vec{v} = (1, 0)$
Cisaillement vertical de facteur k		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}$	1	Inversible	$p = 1$ pour $\vec{v} = (0, 1)$

Transformation	Illustration	Matrice M	$\det M$	Particularités de M	Directions invariantes ou vecteurs propres ($\vec{v}$) et valeurs propres (p)
Projection orthogonale sur l'axe des x		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	0	• Non inversible • $M^n = M$ pour $n = 1, 2, 3, 4, \dots$	• $p = 1$ pour $\vec{v} = (1, 0)$ • $p = 0$ pour $\vec{v} = (0, 1)$
Projection orthogonale sur l'axe des y		$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	0	• Non inversible • $M^n = M$ pour $n = 1, 2, 3, 4, \dots$	• $p = 0$ pour $\vec{v} = (1, 0)$ • $p = 1$ pour $\vec{v} = (0, 1)$

NOMBRES COMPLEXES

■ L'ENSEMBLE $\mathbb{C}$ DES NOMBRES COMPLEXES

■ LES PUISSANCES ET LES RACINES DES NOMBRES COMPLEXES

■ LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

■ LES TRANSFORMATIONS AFFINES AVEC LES NOMBRES COMPLEXES

■ POUR ALLER PLUS LOIN

Ce chapitre vise un double objectif : développer des habiletés de base en arithmétique complexe et susciter une réflexion sur les fondements du concept de nombre en mathématiques. Les nombres complexes sont au bout d'une chaîne de systèmes de nombres qui reflète l'évolution des mathématiques au cours de l'histoire. En premier, on a inventé (ou découvert) les nombres naturels positifs ($\mathbb{N}^*$) pour dénombrer, puis les nombres rationnels positifs ($\mathbb{Q}_+^*$) pour exprimer les fractions (ratios) ou les rapports de nombres naturels positifs. Ensuite, on a complété cet ensemble avec les nombres irrationnels positifs tels que $\sqrt{2}$, par exemple, qui ne peut pas s'écrire comme quotient de deux nombres entiers, ainsi qu'on l'a démontré dès l'Antiquité (preuve attribuée à Pythagore). Les nombres comme $\sqrt{2}$, π (le rapport entre la circonférence et le diamètre dans un cercle) et e (la base des logarithmes naturels) ont un développement décimal infini non périodique. Si on ajoute tous les nombres positifs à développement décimal infini non périodique (les nombres irrationnels positifs) aux nombres positifs à développement décimal fini ou périodique (les nombres rationnels positifs), on obtient l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ des nombres réels positifs. En y ajoutant ensuite le nombre 0 et les nombres négatifs, la chaîne de nombres devient, avant l'apparition de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Les nombres réels ne suffisent cependant pas à résoudre toutes les équations algébriques : l'équation $x^2 = -1$, par exemple, n'a pas de solution réelle, car le carré de tout nombre réel est positif. L'idée de considérer les racines de nombres négatifs comme des **nombres imaginaires**, pour résoudre des équations comme $x^2 + 1 = 0$, est apparue pour la première fois dans un ouvrage de Raffaele Bombelli datant de 1572. Ce sont ensuite principalement Jean Bernoulli (1667-1748) et Leonhard Euler (1707-1783) qui ont exploré les propriétés de ces nombres qu'on appelle aujourd'hui **nombres complexes**. En 1799, dans sa thèse de doctorat, Gauss a donné une première démonstration rigoureuse du théorème fondamental de l'algèbre selon lequel le système $\mathbb{C}$ des nombres complexes contient toutes les solutions de toutes les équations algébriques à coefficients réels ou complexes. John Wallis (1616-1703), Caspar

Wessel (1745-1818) et Jean Robert Argand (1768-1822) ont proposé, à peu près à la même époque, de considérer les nombres complexes comme des points (ou des vecteurs positions) dans $\mathbb{R}^2$. De cette façon, les nombres complexes et les opérations sur les nombres complexes, tout en complétant l'algèbre des nombres réels, allaient permettre une arithmétisation complète de la géométrie dans $\mathbb{R}^2$. C'est ce que nous allons voir dans ce chapitre.

L'ENSEMBLE $\mathbb{C}$ DES NOMBRES COMPLEXES

Dans cette section, nous définissons la multiplication (ou produit) complexe dans $\mathbb{R}^2$ comme une opération qui prolonge aux vecteurs la multiplication habituelle de l'arithmétique définie pour les nombres réels sur l'axe des x . Les propriétés de ce produit complexe conduisent à considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ comme des nombres complexes qui, au lieu d'avoir un signe (+ ou -), ont plutôt un angle polaire. Cette interprétation des signes permet de concevoir le nombre complexe i , qui a la propriété étonnante $i^2 = -1$. Nous expliquons ensuite les rudiments de l'arithmétique complexe.

8.1.1 LE PRODUIT COMPLEXE DANS $\mathbb{R}^2$

Les nombres réels sont habituellement représentés par des points sur une droite orientée appelée **droite réelle** (voir la figure 8.1).

On peut considérer que la droite réelle $\mathbb{R}$ est identique à l'axe des x dans l'espace $\mathbb{R}^2$. Tout nombre réel t correspond alors à un unique vecteur de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire au vecteur position du point d'abscisse t sur l'axe des x ; ainsi, le nombre 0 correspond au vecteur nul $\vec{0}$, les nombres positifs correspondent à des vecteurs qui font un angle nul avec le vecteur position du nombre 1, et les nombres négatifs correspondent à des vecteurs qui font un angle de 180° avec le vecteur position du nombre 1 (voir la figure 8.2). L'idée de remplacer les signes par des angles est fondamentale dans la genèse des nombres complexes, comme nous le verrons plus loin.

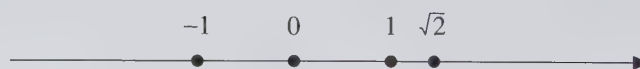
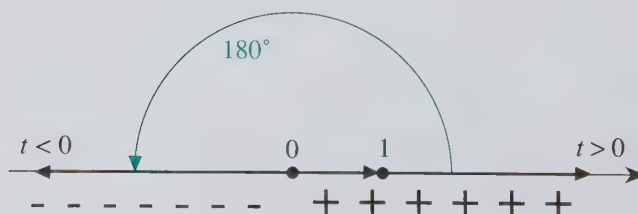


FIGURE 8.1 La droite réelle $\mathbb{R}$.



Signe	Angle correspondant
-	Multiple impair de 180°
+	Multiple de 360°

FIGURE 8.2

INITIO

Angle polaire d'un vecteur dans $\mathbb{R}^2$

L'angle que fait un vecteur non nul $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$ avec le vecteur position du nombre 1, sur l'axe des x est appelé l'**angle polaire** de $\vec{u}$. La mesure de cet angle n'est déterminée qu'à un multiple entier de 360 degrés ou 2π radians près. Il est considéré comme positif quand il est mesuré dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et négatif dans l'autre cas (voir la figure 8.3). L'angle polaire du vecteur nul n'est pas défini.

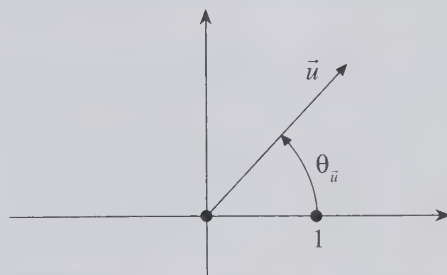


FIGURE 8.3

EXEMPLE 1

L'angle polaire du vecteur $\vec{v} = (-2, 0)$ représentant le nombre réel -2 est de 180° ou π rad.

EXEMPLE 2

L'angle polaire du vecteur $\vec{v} = (3, 0)$ représentant le nombre réel 3 est de 0° ou 0 rad.

EXEMPLE 3

L'angle polaire du vecteur $\vec{v} = (-1, 1)$ est de 135° ou $3\pi/4$ rad.

Remarque

Dans $\mathbb{R}^2$, un vecteur est entièrement déterminé dès qu'on connaît sa longueur et son angle polaire.

Les nombres réels négatifs correspondent à des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont l'angle polaire mesure 180° (ou tout multiple entier impair de 180°) et les nombres réels positifs, à des vecteurs dont l'angle polaire mesure 0° (ou tout multiple entier de 360°).

Tout nombre réel non nul t se trouve donc déterminé par une grandeur (la longueur ou valeur absolue de t) et un angle polaire (le signe mesuré sous la forme d'un angle). L'addition numérique des nombres réels coïncide parfaitement avec l'addition vectorielle des vecteurs positions de ces nombres dans l'espace $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs, le produit (multiplication) de deux nombres réels correspond au produit de la grandeur de ces nombres et à la somme de leurs angles polaires. Par exemple, le produit de (-2) par (3) donne un nombre de grandeur $2 \times 3 = 6$ et d'angle polaire $180^\circ + 0^\circ = 180^\circ$, c'est-à-dire le nombre négatif -6 . On voit ici que la fameuse règle des signes dans la multiplication n'est rien d'autre qu'une règle d'addition des angles polaires :

$$(+)\times(+)= (+): 0^\circ+0^\circ=0^\circ;$$

$$(-)\times(-)= (+): 180^\circ+180^\circ=360^\circ \text{ (équivalent à } 0^\circ \text{)};$$

$$(-)\times(+)= (-): 180^\circ+0^\circ=180^\circ;$$

$$(+)\times(-)= (-): 0^\circ+180^\circ=180^\circ.$$

La règle d'addition des angles polaires est compatible avec l'idée que l'angle polaire n'est déterminé qu'à un multiple de 2π radians près; par exemple, la règle $(-)\times(-)=(+)$ correspond au fait que la somme de deux multiples impairs de π est un multiple pair de π .

Cette interprétation de la multiplication numérique en relation avec la règle d'addition des angles polaires définit un produit correspondant sur les vecteurs positions des nombres réels ; ce produit est appelé le produit complexe. La définition suivante est une généralisation qui s'applique à toute paire de vecteurs de $\mathbb{R}^2$; elle va ensuite nous permettre de traiter les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ comme des nombres.

Produit complexe dans $\mathbb{R}^2$

Le **produit complexe** de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$, noté $\vec{u}\vec{v}$, est le vecteur $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^2$ dont la longueur est le produit de la longueur de $\vec{u}$ par celle de $\vec{v}$ et dont l'angle polaire est la somme des angles polaires de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ (voir la figure 8.4) :

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \text{ et } \theta_w = \theta_u + \theta_v.$$

De plus, le produit complexe du vecteur nul par tout autre vecteur est le vecteur nul :

$$\vec{0}\vec{u} = \vec{0} = \vec{u}\vec{0}.$$

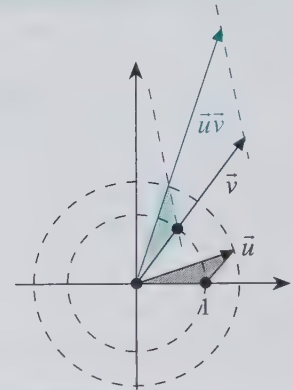


FIGURE 8.4

EXEMPLE 1

$(-1, 1)(0, -1) = (1, 1)$; en effet, en posant $\vec{u} = (-1, 1)$ et $\vec{v} = (0, -1)$, on a $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ et $\theta_u = 135^\circ$, puis $\|\vec{v}\| = 1$ et $\theta_v = -90^\circ$, de telle sorte que le produit complexe aura pour longueur $\sqrt{2}$ et pour angle polaire $135^\circ + (-90^\circ) = 45^\circ$, ce qui correspond à l'unique vecteur $(1, 1)$.

EXEMPLE 2

$(1, 1)(1, 1) = (0, 2)$; en effet, en posant $\vec{u} = \vec{v} = (1, 1)$, on a $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ et $\theta_u = \theta_v = 45^\circ$, et alors le produit complexe $(1, 1)(1, 1)$ aura pour longueur $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$ et pour angle polaire $45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, ce qui correspond à l'unique vecteur $(0, 2)$.

Les propriétés du produit complexe

PC0 Le produit complexe coïncide avec la multiplication ordinaire dans le cas des nombres réels.

$$(x, 0)(y, 0) = (xy, 0)$$

Cette propriété est une conséquence directe de la définition.

PC1 Le produit complexe est commutatif.

$$\vec{u}\vec{v} = \vec{v}\vec{u}$$

Cette propriété est une conséquence directe de la définition.

PC2 Le produit complexe est associatif.

$$\vec{u}(\vec{v}\vec{w}) = (\vec{u}\vec{v})\vec{w}$$

Cette propriété est aussi une conséquence directe de la définition.

PC3 Le produit complexe est distributif sur la somme vectorielle.

$$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$$

On peut démontrer cette propriété à l'aide de la figure 8.5 : la multiplication complexe par le vecteur $\vec{u}$ a pour effet de faire tourner autour de l'origine tous les vecteurs d'un même angle θ , égal à l'angle polaire de $\vec{u}$, et d'agrandir (ou de réduire selon le cas) la norme de tous ces vecteurs par un même facteur, égal à $\|\vec{u}\|$. Il s'ensuit que le parallélogramme illustrant la somme $\vec{v} + \vec{w}$ (voir la figure 8.5) est appliqué par cette multiplication sur le parallélogramme engendré par $\vec{u}\vec{v}$ et $\vec{u}\vec{w}$. La coïncidence entre les vecteurs $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w})$ et $\vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$ est due au fait que la diagonale $\vec{v} + \vec{w}$ du premier parallélogramme est appliquée sur la diagonale $\vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$ du second.

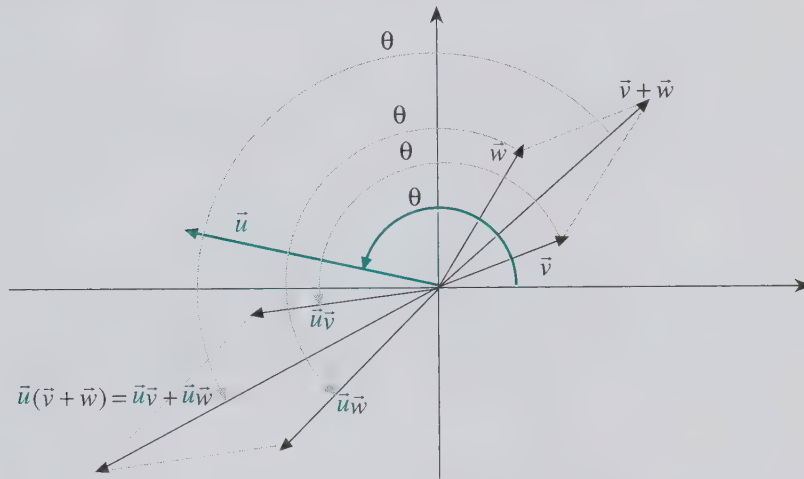


FIGURE 8.5

PC4 Le vecteur position du nombre réel 1 est neutre pour le produit complexe.

$$(1, 0)\vec{u} = \vec{u} = \vec{u}(1, 0)$$

Cette propriété est une conséquence immédiate de la définition et des faits suivants : $\|(1, 0)\| = 1$ et l'angle polaire de $(1, 0)$ est de 0° .

PC5 Tout vecteur non nul $\vec{u}$ a un inverse multiplicatif, noté $(\vec{u})^{-1}$, pour lequel

$$\vec{u}(\vec{u})^{-1} = (1, 0) = (\vec{u})^{-1}\vec{u}.$$

En effet, il suffit d'utiliser pour $(\vec{u})^{-1}$ l'unique vecteur de longueur $\|\vec{u}\|^{-1}$ et d'angle polaire $-\theta$, où θ est l'angle polaire de $\vec{u}$; le produit complexe de $\vec{u}$ par $(\vec{u})^{-1}$ donnera alors un vecteur de longueur 1 et d'angle polaire nul, c'est-à-dire le vecteur neutre $(1, 0)$. Seul le vecteur nul n'a pas d'inverse multiplicatif, car $\|\vec{0}\| = 0$.

Un fait remarquable : les propriétés du produit complexe sur les vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et en particulier la propriété PC5, sont identiques aux propriétés de ces mêmes opérations sur les nombres réels. Pour cette raison, on peut considérer les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ comme des nombres ; ce sont précisément les nombres complexes, tels que nous les définirons à la sous-section 8.1.2. Par ailleurs, l'ensemble des nombres complexes n'est pas ordonné, au sens où la relation d'ordre des nombres réels ne peut pas s'étendre, avec toutes ses propriétés, aux nombres complexes : $z_1 \leq z_2$ n'a pas de sens dans $\mathbb{C}$, à moins que z_1 et z_2 ne soient déjà tous deux réels.

La proposition suivante montre comment calculer¹ le produit complexe de deux vecteurs directement à partir de leurs composantes, sans être obligé de calculer leur norme et leur angle polaire; elle donne aussi une méthode de calcul de l'inverse multiplicatif d'un vecteur relativement au produit complexe et au vecteur neutre $(1, 0)$.

Soit (x, y) , un vecteur de $\mathbb{R}^2$, et a et b , des nombres réels arbitraires. Alors,

- 1) $(x, y)(a, 0) = a(x, y) = (ax, ay)$;
- 2) $(x, y)(0, b) = b(-y, x) = (-by, bx)$;
- 3) $(x, y)(a, b) = a(x, y) + b(-y, x) = (ax - by, ay + bx)$;
- 4) si $(x, y) \neq (0, 0)$, alors $(x, y)^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x, -y)$.

Démonstration

- 1) Pour démontrer cette partie de la proposition, il suffit d'appliquer la définition du produit complexe en distinguant les cas $a > 0$, $a < 0$ et $a = 0$.
- 2) Si $b = 0$, il n'y a rien à démontrer; si $b > 0$, alors l'angle polaire de $(0, b)$ est de 90° et, dans ce cas, $(x, y)(0, b)$ est un vecteur dont l'angle polaire mesure 90° de plus que l'angle polaire de (x, y) et dont la longueur est b fois celle de (x, y) : c'est exactement le vecteur $b(-y, x)$. Si $b < 0$, alors l'angle polaire de $(0, b)$ est de -90° et, dans ce cas, $(x, y)(0, b)$ est un vecteur dont l'angle polaire mesure 90° de moins que l'angle polaire de (x, y) et dont la longueur est de $-b$ fois celle de (x, y) : c'est exactement le vecteur $b(-y, x)$.
- 3) $(x, y)(a, b) = (x, y)[(a, 0) + (0, b)]$
 $= (x, y)(a, 0) + (x, y)(0, b)$ [PC3]
 $= a(x, y) + b(-y, x)$ [Parties 1 et 2 de la proposition]
 $= (ax, ay) + (-by, bx)$.
- 4) Pour démontrer cette partie de la proposition, il suffit de vérifier, en appliquant la partie 3) de la proposition, que $(x, y)\frac{1}{x^2 + y^2}(x, -y) = (1, 0)$.

EXEMPLE 1

$$(1, 2)(3, 4) = (3 - 8, 4 + 6) = (-5, 10).$$

On peut vérifier que $\|(-5, 10)\| = \|(1, 2)\|\|(3, 4)\|$; en effet, $\sqrt{(-5)^2 + 10^2} = \sqrt{125}$ et

$$\sqrt{1^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{5}\sqrt{25} = \sqrt{125}.$$

EXEMPLE 2

$$(-1, 1)(1, 1) = (-1 - 1, -1 + 1) = (-2, 0).$$

EXEMPLE 3

$(1, 2)^{-1} = \frac{1}{1^2 + 2^2}(1, -2) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$. On peut vérifier que $(1, 2)\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right) = (1, 0)$ en appliquant la partie 3) de la proposition.

1. Nous verrons à la sous-section 8.3.1 une autre méthode de calcul plus facile à mémoriser.

8.1.2 LA DÉFINITION DES NOMBRES COMPLEXES

Le vecteur $(0, 1)$ a une propriété tout à fait remarquable relativement au produit complexe :

$$(0, 1)\vec{u} = \vec{u}_\perp \text{ quel que soit le vecteur non nul } \vec{u}.$$

En effet, selon la définition du produit complexe, lorsqu'on multiplie $\vec{u}$ par $(0, 1)$, la longueur de $\vec{u}$ se trouve multipliée par 1 et l'angle polaire de $\vec{u}$ se trouve augmenté de l'angle polaire de $(0, 1)$, soit de 90° , ce qui donne $\vec{u}_\perp$. Autre propriété tout aussi remarquable : en remplaçant $\vec{u}$ par $(0, 1)$ dans l'équation $(0, 1)\vec{u} = \vec{u}_\perp$, on obtient

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0),$$

c'est-à-dire que le vecteur $(0, 1)$ se comporte comme un nombre (que l'on qualifie d'imaginaire) dont le carré est de -1 si l'on identifie le vecteur position $(-1, 0)$ au nombre -1 lui-même. Pour cette raison, on adopte la notation d'Euler : on désigne le vecteur $(0, 1)$ par la lettre i et on écrit la relation $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$ sous la forme plus audacieuse

$$i^2 = -1.$$

Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, plan d'Argand

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est l'ensemble de tous les couples ordonnés (x, y) de nombres réels, muni de l'addition vectorielle et de la multiplication complexe.

Le plan d'Argand est l'espace $\mathbb{R}^2$, muni d'une base orthonormée, dans lequel les couples qui représentent les coordonnées des points ou les composantes des vecteurs sont considérés comme des nombres complexes.

La terminologie et les notations

Voici les termes et les notations habituellement utilisés pour les nombres complexes.

- On utilise habituellement la lettre z pour désigner un nombre complexe arbitraire ; si $z = (x, y)$, alors (x, y) est appelé l'écriture vectorielle du nombre complexe z .
- On convient que le nombre complexe $(0, 0)$ peut être identifié au nombre réel 0 et qu'on peut le désigner par $z = 0$.
- On convient que le nombre complexe $(x, 0)$ peut être identifié au nombre réel x et qu'on peut le désigner par $z = x$.
- On convient que le nombre complexe $(0, 1)$ peut s'écrire i , comme la première lettre du mot **imaginaire**.
- Puisque $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, tout nombre complexe $z = (x, y)$ s'écrit

$$z = x + iy,$$

où x et y sont des nombres réels ; l'écriture $z = x + iy$ est appelée l'écriture cartésienne de z .

$\text{Re}(z)$, $\text{Im}(z)$, $\text{Arg}(z)$, $\|z\|$ et $\bar{z}$

Soit $z = x + iy$, un nombre complexe, où $x, y \in \mathbb{R}$.

- 1) x est appelé la partie réelle de z et est noté $\text{Re}(z)$.
- 2) y est appelé la partie imaginaire de z et est noté $\text{Im}(z)$.
- 3) L'angle polaire du vecteur (x, y) correspondant à z est appelé l'argument de z et est noté $\text{Arg}(z)$.
- 4) La longueur (norme) du vecteur (x, y) qui correspond à z est appelée le module de z et est notée $\|z\|$; on a $\|x + yi\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Le module de z est un nombre réel positif si $z \neq 0$ et nul si $z = 0$.
- 5) Le conjugué du nombre complexe $z = x + iy$ est le nombre complexe $\bar{z}$ défini par $\bar{z} = x + yi = x - yi$ (on change le signe de la partie imaginaire de z).

EXEMPLE

Le nombre complexe $z = (-1, 2)$ s'écrit $z = -1 + 2i$ sous la forme cartésienne (voir la figure 8.6). On a alors $\text{Re}(z) = -1$, $\text{Im}(z) = 2$, $\|z\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$; $\text{Arg}(z)$ est l'angle θ pour lequel

$$\cos \theta = \frac{\text{Re}(z)}{\|z\|} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

et

$$\sin \theta = \frac{\text{Im}(z)}{\|z\|} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

ce qui donne $\theta = \text{Arg}(z) \approx 116,57^\circ$ ou environ $2,034$ rad.

Le conjugué de $-1 + 2i$ est

$$\overline{-1 + 2i} = -1 - 2i.$$

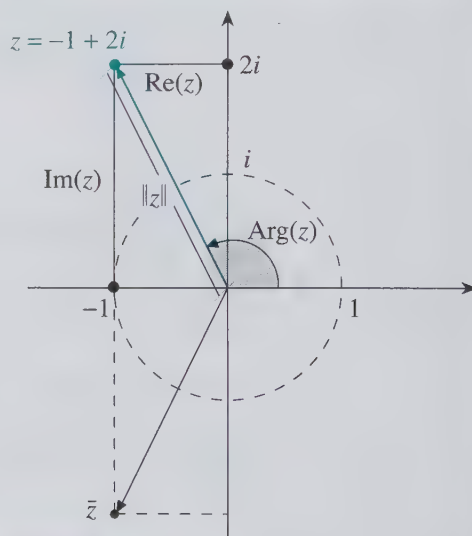


FIGURE 8.6 Représentations de $\text{Re}(z)$, $\text{Im}(z)$, $\text{Arg}(z)$, $\|z\|$ et $\bar{z}$ pour $z = -1 + 2i$.

Remarques

1. Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ et $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$.
2. $\text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z$ représente un nombre réel. Si $\text{Re}(z) = 0$ et $\text{Im}(z) \neq 0$, alors z est appelé un imaginaire pur.
3. Les points représentés par z et $\bar{z}$ sont toujours symétriques l'un de l'autre relativement à l'axe des x ; en d'autres termes, la conjugaison correspond à une réflexion autour de l'axe des x . Nous avons de plus $\bar{\bar{z}} = z$.
4. Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $\|z_1 z_2\| = \|z_1\| \|z_2\|$ et $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2)$; c'est en effet la définition même du produit complexe.

8.1.3 L'ARITHMÉTIQUE COMPLEXE

Voici une reformulation des propriétés² de l'addition vectorielle et du produit complexe (PC1 à PC5) dans le langage des nombres complexes (on suppose que z, z_1, z_2 et z_3 sont des nombres complexes arbitraires).

2. Ces propriétés définissent sur l'ensemble des nombres complexes ce que les mathématiciens appellent une structure de **corps**; le **corps des complexes** prolonge le **corps des réels**.

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	[Commutativité de l'addition]
$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$	[Associativité de l'addition]
$z + 0 = 0 + z = z$	[0 est neutre pour l'addition.]
$z + (-z) = 0 = (-z) + z$	[Existence de l'inverse additif]
$z_1 z_2 = z_2 z_1$	[Commutativité de la multiplication]
$z_1 (z_2 z_3) = (z_2 z_1) z_3$	[Associativité de la multiplication]
$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$	[Distributivité]
$1z = z1 = z$	[1 est neutre pour la multiplication.]
$zz^{-1} = z^{-1}z = 1$	[Existence de l'inverse multiplicatif pour $z \neq 0$ (division)]

Voyons maintenant comment additionner, soustraire, multiplier, inverser et diviser les nombres complexes. Nous verrons plus loin (voir la section 8.2) comment en extraire les racines carrées.

L'addition et la soustraction

Pour additionner deux nombres complexes, on additionne tout simplement les parties réelles entre elles et les parties imaginaires entre elles :

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

On procède de la même façon pour la soustraction :

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

EXEMPLE

$$(2 - 5i) + (3 + 4i) = 5 - i \text{ et } (2 - 5i) - (3 + 4i) = -1 - 9i.$$

La multiplication

Il n'est pas nécessaire de mémoriser une formule pour la multiplication : il suffit de noter que la multiplication est distributive sur l'addition, qu'elle est associative et commutative (propriétés du produit complexe), et que $i^2 = -1$.

EXEMPLE

On calcule un produit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (2 - 5i)(3 + 4i) &= 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4i - 5i \cdot 3 - 5i \cdot 4i \\ &= 6 + 8i - 15i - (-20) \\ &= 26 - 7i. \end{aligned}$$

En général, on obtiendra

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i.$$

L'inversion

Rappelons que dans la notation vectorielle, l'inverse multiplicatif du vecteur non nul (x, y) est

$$(x, y)^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2} (x, -y).$$

Ainsi, dans la notation cartésienne, si $z = x + yi$ et $z \neq 0$, l'inverse multiplicatif du nombre complexe z devient

$$z^{-1} = \frac{1}{\|z\|^2} \bar{z} = \frac{1}{x^2 + y^2} (x - yi).$$

EXEMPLE

$$(2 - 5i)^{-1} = \frac{1}{2^2 + (-5)^2} \overline{(2 - 5i)} = \frac{1}{29} (2 + 5i).$$

La division

Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes et si $z_2 \neq 0$, alors

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 (z_2)^{-1} = z_1 \left(\frac{1}{\|z_2\|^2} \bar{z}_2 \right).$$

EXEMPLE

$$\begin{aligned} \frac{3+4i}{2-5i} &= (3+4i) \frac{1}{29} (2+5i) \\ &= \frac{1}{29} (3+4i)(2+5i) \\ &= \frac{1}{29} (-14+23i) \\ &= -\frac{14}{29} + \frac{23}{29}i \end{aligned}$$

Voici une autre façon d'effectuer la division complexe $\frac{3+4i}{2-5i}$ de l'exemple précédent. On multiplie le numérateur et le dénominateur de cette fraction par le conjugué du dénominateur.

$$\frac{3+4i}{2-5i} = \frac{(3+4i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{-14+23i}{29} = -\frac{14}{29} + \frac{23}{29}i$$

EXERCICES 8.1

1. Pour chacun des nombres complexes suivants, donnez les valeurs de $\operatorname{Re}(z)$, de $\operatorname{Im}(z)$, de $\|z\|$ et de $\operatorname{Arg}(z)$; déterminez un angle compris entre 0 et 2π radians pour $\operatorname{Arg}(z)$.

a) i

c) $1-i$

e) $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

g) $5i$

b) $-i$

d) $(1 + \sqrt{3}i)$

f) -4

h) $4-3i$

2. Décrivez la région du plan d'Argand qui correspond à chacune des relations suivantes.

a) $\operatorname{Re}(z) \geq 1$

c) $1 \leq \|z\| \leq 2$

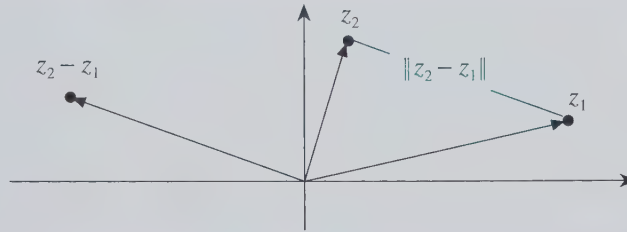
e) $z = \bar{z}$

b) $|\operatorname{Im}(z)| \leq 1$

d) $|\operatorname{Arg}(z)| \leq \pi/4$

f) $z = -\bar{z}$

3. Si z_1 et z_2 représentent les coordonnées de deux points du plan d'Argand, alors $z_2 - z_1$ représente les composantes du vecteur allant de z_1 à z_2 dans le plan d'Argand, de sorte que $\|z_2 - z_1\|$ représente la longueur de ce vecteur et donc la distance de z_2 à z_1 (voir la figure ci-dessous).



À l'aide de cette interprétation géométrique de $\|z_2 - z_1\|$, décrivez la région du plan d'Argand qui correspond à chacune des relations suivantes.

a) $\|z - 1\| = 2$

b) $\|z + i\| \leq 1$

c) $1 \leq \|z - 1 + 2i\| \leq 2$

d) $\|z - 1\| = \|z + i\|$

4. Calculez i^n pour les valeurs suivantes de n .

a) $n = 1, 2, 3, 4, 5$

b) $n = -1, -2, -3, -4, -5$

5. Effectuez les opérations arithmétiques et donnez le résultat sous la forme $x + iy$.

a) $(2 + i)(1 - 2i)$

c) $\frac{1+i}{(1-i)^3}$

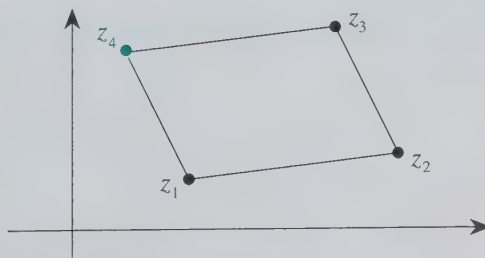
e) $2 - i + 3i \left(\frac{1+i}{1-i} \right)$

b) $\frac{2-3i}{3+4i}$

d) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{i}}$

6. Déterminez le nombre complexe z qui correspond au point situé aux deux tiers du segment reliant $2 - i$ à $3 + 4i$ à partir du point $2 - i$ dans le plan d'Argand.

7. À partir du parallélogramme ci-dessous, exprimez le nombre complexe z_4 en fonction des nombres z_1, z_2 et z_3 .



8. Résolvez l'équation $(1-i)z + 4 + i = 6 - 3i$.
9. La méthode de résolution de Gauss-Jordan s'applique aussi aux systèmes d'équations linéaires à coefficients complexes. Appliquez cette méthode pour résoudre le système suivant.
- $$\begin{aligned} iz + (1-i)w &= 8 + 5i \\ 3z + iw &= 2 - 8i \end{aligned}$$
10. Démontrez chacune des égalités suivantes, où z est un nombre complexe arbitraire.
- a) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ b) $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ c) $z\bar{z} = \|z\|^2$
11. L'ensemble des solutions de l'équation $i\bar{z} - 1 + i = z$ constitue une droite dans le plan d'Argand. Quelle est l'équation de cette droite sous la forme $y = mx + b$ si $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$?
12. Vérifiez l'égalité $(2+i)(3+i) = 5+5i$, puis montrez comment on en déduit cette autre égalité : $\arctan(1/2) + \arctan(1/3) = \pi/4$.

LES PUISSANCES ET LES RACINES DES NOMBRES COMPLEXES

Dans cette section, nous décrivons la multiplication complexe et la division complexe sous la forme polaire ; nous obtenons ainsi la formule de Moivre pour le calcul des puissances et des racines des nombres complexes. Nous décrivons les racines n -ièmes de l'unité et nous montrons comment résoudre les équations quadratiques à coefficients complexes.

8.2.1 LA NOTATION POLAIRE DES NOMBRES COMPLEXES

Si $z = x + iy$ est un nombre complexe de module r et d'argument θ , où $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$x = r \cos \theta \text{ et } y = r \sin \theta \text{ (voir la figure 8.7).}$$

On peut donc écrire

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

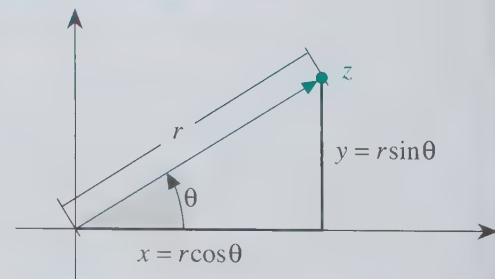


FIGURE 8.7

$$z = r \operatorname{cis} \theta$$

L'expression $z = r \operatorname{cis} \theta$ désigne le nombre complexe de module r et d'argument θ ; c'est une abréviation symbolique de $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$; on dit que $z = r \operatorname{cis} \theta$ est l'écriture polaire du nombre complexe z et on convient que θ est mesuré en radians dans l'écriture polaire. On convient aussi que l'écriture polaire de 0 est 0.

EXEMPLE 1

L'écriture polaire du nombre i est $i = \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$.

EXEMPLE 2

L'écriture polaire du nombre -5 est $-5 = 5 \operatorname{cis} \pi$.

EXEMPLE 3

L'écriture polaire du nombre 3 est $3 = 3 \operatorname{cis} 0$.

EXEMPLE 4

L'écriture polaire du nombre $1 + i$ est $1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$.

La multiplication et la division sous forme polaire

L'addition complexe et la soustraction complexe se font très facilement sous forme cartésienne, ou mieux encore sous forme vectorielle, car l'addition complexe coïncide par définition avec l'addition vectorielle. Cependant, la multiplication complexe et la division complexe se font plus facilement avec l'écriture polaire, car on a défini le produit complexe de deux nombres z_1 et z_2 comme le nombre dont le module est le produit des modules de z_1 et de z_2 , et dont l'argument est la somme des arguments de z_1 et de z_2 : si $z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1$ et $z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$, alors

$$z_1 z_2 = (r_1 \operatorname{cis} \theta_1)(r_2 \operatorname{cis} \theta_2) = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2).$$

EXEMPLE

Voici une multiplication sous forme polaire :

$$\begin{aligned} \left(2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}\right) \left(5 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}\right) &= 10 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 10 \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{6}\right); \end{aligned}$$

on peut ensuite convertir la réponse sous forme cartésienne, si c'est utile.

$$\begin{aligned} 10 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} &= 10 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \\ &= 10 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \\ &= -5\sqrt{3} + 5i \end{aligned}$$

Pour la division, on a simplement

$$z^{-1} = (r \operatorname{cis} \theta)^{-1} = r^{-1} \operatorname{cis}(-\theta)$$

parce que

$$(r \operatorname{cis} \theta)(r^{-1} \operatorname{cis}(-\theta)) = r r^{-1} \operatorname{cis}(\theta - \theta) = 1$$

et

$$\frac{r_1 \operatorname{cis} \theta_1}{r_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2).$$

EXEMPLE 1

$$i^{-1} = \left(1 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}\right)^{-1} = 1 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i.$$

EXEMPLE 2

$$\frac{2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}}{5 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}} = \frac{2}{5} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2}{5} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{5} i.$$



8.2.2 LA FORMULE DE MOIVRE ET LA FORMULE D'EULER

Les puissances entières z^n d'un nombre complexe non nul z se définissent ainsi :

$$\text{si } n = 0, \text{ alors } z^0 = 1; \text{ si } n > 0, \text{ alors } z^n = \underbrace{z \cdots z}_{n \text{ facteurs}} \text{ et } z^{-n} = (z^{-1})^n.$$

EXEMPLE 1

Pour calculer $(1+i)^2$, on peut procéder de deux manières :

$$(1+i)^2 = (1+i)(1+i) = 1+i+i-1 = 2i, \text{ ou}$$

$$(1+i)^2 = \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right) \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2})^2 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = 2i.$$

EXEMPLE 2

Pour calculer $(1+i)^{11}$, on utilise la forme polaire de $1+i$:

$$\begin{aligned} (1+i)^{11} &= \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)^{11} \\ &= (\sqrt{2})^{11} \operatorname{cis} \left(11 \frac{\pi}{4}\right) \quad [\sqrt{2} \text{ est multiplié 11 fois par lui-même et } \frac{\pi}{4} \text{ est additionné 11 fois à lui-même.}] \\ &= 32\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= 32\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4} \\ &= 32\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -32 + 32i. \end{aligned}$$

Comme le montrent les exemples 1 et 2, sous forme polaire, z^n s'écrit

$$z^n = (r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta).$$

Pour $r = 1$, la formule $(r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$ s'appelle **formule de Moivre**³.

Formule de Moivre

Pour tout entier n , $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

EXEMPLE 1

$$i^{2013} = \left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{2}\right)^{2013} = \operatorname{cis} \frac{2013\pi}{2} = \operatorname{cis} \left(\frac{2012\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = i.$$

EXEMPLE 2

On utilise parfois la formule de Moivre «à l'envers» quand il faut exprimer $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ en fonction des puissances de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$ dans un calcul trigonométrique. Ainsi, avec $n = 3$, la formule de Moivre donne

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + i \sin 3\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (\cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= \cos^3 \theta + i \cos^2 \theta \sin \theta + 2i \cos^2 \theta \sin \theta - 2 \cos \theta \sin^2 \theta - \sin^2 \theta \cos \theta - i \sin^3 \theta \\ &= (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta). \end{aligned}$$

3. On doit cette formule à Abraham de Moivre (1667-1754).

En séparant les parties réelles des parties imaginaires, on obtient

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta \text{ et } \sin 3\theta = 3\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta.$$

Euler a raffiné la formule de Moivre. À l'instar de Beethoven qui est devenu sourd à la fin de sa vie, on rapporte que Euler est devenu aveugle 17 ans avant sa mort. Cela ne l'a pas empêché de poursuivre ses recherches en mathématiques. Voici d'abord le lien étonnant qu'il a découvert entre les fonctions trigonométriques et l'exponentielle :

Formule d'Euler

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

Dans le cas particulier où $\theta = \pi$, on obtient sa célèbre équation

$$e^{i\pi} = -1$$

qui donne une relation étonnante entre quatre nombres fréquemment utilisés en mathématiques : e , π , i et 1. Sur certains campus universitaires, on trouve encore cette formule inscrite sur des tee-shirts !

Rappelons que le nombre e est défini comme la valeur limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ lorsque n devient arbitrairement grand, et que sa valeur approximative est 2,718 28... ; le choix de la lettre e pour désigner ce nombre est un hommage à Euler. Voici, en résumé, comment celui-ci a pu obtenir l'égalité $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Euler connaissait les représentations des fonctions e^x , $\cos x$ et $\sin x$ par des **séries entières**, popularisées à son époque par Brook Taylor (1685-1731) et Colin MacLaurin (1698-1746) :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \end{aligned}$$

où $n!$ est une abréviation de $n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ (par exemple, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$). En remplaçant x par $i\theta$ dans la première équation et par θ dans les deux autres, on obtient

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \dots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

La **formule d'Euler** peut aussi s'écrire

$$\operatorname{cis} \theta = e^{i\theta},$$

et l'on peut affirmer que tout nombre complexe z de module r et d'argument θ peut s'écrire

$$z = r \operatorname{cis} \theta = r e^{i\theta}$$

que nous appelons **forme d'Euler du nombre complexe z** .

Dans sa formulation eulérienne, la formule de Moivre devient

$$(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Remarquons, en terminant, que la formule d'Euler est en fait une définition de l'exponentielle complexe. Cette définition est justifiée par l'utilisation des séries réelles pour $\cos \theta$ et $\sin \theta$ et par la comparaison avec la série formelle obtenue en remplaçant x par $i\theta$ dans le développement en série réelle de e^x .

8.2.3 LES RACINES DE NOMBRES COMPLEXES

L'égalité $(r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$ nous donne un moyen de calculer les n racines n -ièmes de tout nombre complexe non nul z_0 , c'est-à-dire les n solutions de l'équation $z^n = z_0$.

EXEMPLE 1

Dans l'ensemble des nombres complexes, le nombre 1 a trois racines cubiques, dont l'une est réelle et les deux autres, complexes.

Si $z = r \operatorname{cis} \theta$, avec $r, \theta \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} z^3 = 1 &\Leftrightarrow (r \operatorname{cis} \theta)^3 = 1 \\ &\Leftrightarrow r^3 \operatorname{cis} 3\theta = 1 \operatorname{cis} 0 \\ &\Leftrightarrow r = 1 \text{ et } 3\theta = 0 + 2k\pi, \text{ avec } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \text{ etc.}, \\ &\Leftrightarrow r = 1 \text{ et } \theta = \frac{2k\pi}{3}, \text{ avec } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \text{ etc.}, \\ &\Leftrightarrow r = 1 \text{ et } \theta = 0 \text{ ou } \frac{2\pi}{3}, \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \text{ (les autres valeurs de } \theta \text{ sont des répétitions),} \end{aligned}$$

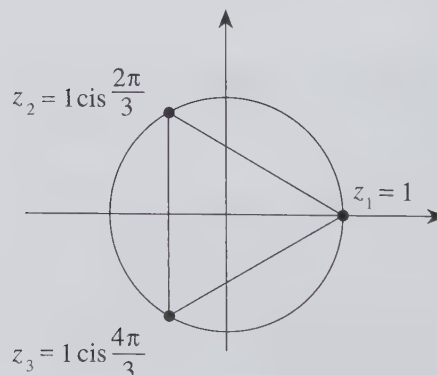


FIGURE 8.8 Les trois racines cubiques de 1.

ce qui fait que les trois racines cubiques de 1 sont (voir la figure 8.8) :

$$z_1 = 1, z_2 = 1 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_3 = 1 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

EXEMPLE 2

Le nombre -1 a exactement deux racines carrées.

Si $z = r \operatorname{cis} \theta$, avec $r, \theta \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} z^2 = -1 &\Leftrightarrow (r \operatorname{cis} \theta)^2 = 1 \operatorname{cis} \pi \\ &\Leftrightarrow r^2 \operatorname{cis} 2\theta = 1 \operatorname{cis} \pi \\ &\Leftrightarrow r^2 = 1 \text{ et } 2\theta = \pi + 2k\pi, \text{ avec } k = 0, \pm 1, \pm 2, \text{ etc.}, \\ &\Leftrightarrow r = 1 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ avec } k = 0, \pm 1, \pm 2, \text{ etc.}, \\ &\Leftrightarrow r = 1 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2}, \end{aligned}$$

ce qui fait que les deux racines carrées de -1 sont

$$z_1 = 1 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = i \text{ et } z_2 = 1 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} = -i.$$

En suivant le raisonnement des exemples 1 et 2, on montre facilement que les n solutions de l'équation $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ appelées les racines n -ièmes de l'unité, sont données par $z = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, avec $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Les racines n -ièmes de l'unité sont représentées par des points qui partagent le cercle de rayon 1 centré à l'origine en n secteurs égaux dans $\mathbb{R}^2$. La figure 8.9 montre les six racines sixièmes de l'unité.

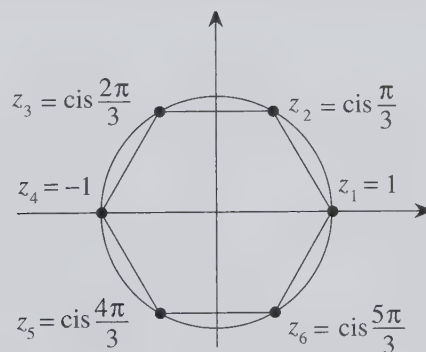


FIGURE 8.9 Les racines sixièmes de l'unité.

Tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées distinctes ; on peut calculer ces racines sous forme polaire à partir de la formule $(r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou bien directement à partir de la forme cartésienne comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE

Voici deux méthodes équivalentes pour calculer les racines carrées de $4 + 3i$.

Méthode algébrique

Notons que $a + bi$ est une racine carrée de $4 + 3i$ si et seulement si $(a + bi)^2 = 4 + 3i$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
(a+bi)^2 &= 4+3i \Leftrightarrow (a^2-b^2)+2abi=4+3i \\
&\Leftrightarrow a^2-b^2=4 \text{ et } 2ab=3 \\
&\Leftrightarrow a^2-\left(\frac{3}{2a}\right)^2=4 \text{ et } b=\frac{3}{2a} \\
&\Leftrightarrow a^2-\frac{9}{4a^2}=4 \text{ et } b=\frac{3}{2a} \\
&\Leftrightarrow 4a^4-16a^2-9=0 \text{ et } b=\frac{3}{2a} \\
&\Leftrightarrow 4c^2-16c-9=0 \text{ et } c=a^2 \text{ et } b=\frac{3}{2a} \\
&\Leftrightarrow a^2=\frac{9}{2} \text{ et } b=\frac{3}{2a} \\
&\Leftrightarrow a+bi=\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } -\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}$$

On peut vérifier qu'on a $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=4+3i$.

Méthode géométrique (vectorielle)

Les racines carrées de $4+3i$ se trouvent forcément sur la bissectrice de l'angle entre les vecteurs positions des nombres 1 et $4+3i$ (voir la figure 8.10). Puisque $\|4+3i\|=5$, la somme des vecteurs positions des nombres 5 et $4+3i$, c'est-à-dire $9+3i$, sera sur cette bissectrice. Le module des racines carrées devant être égal à $\sqrt{5}$, on aura

$$\sqrt{4+3i} = \pm\sqrt{5} \frac{9+3i}{\sqrt{9^2+3^2}} = \pm \frac{3+i}{\sqrt{2}} = \pm \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

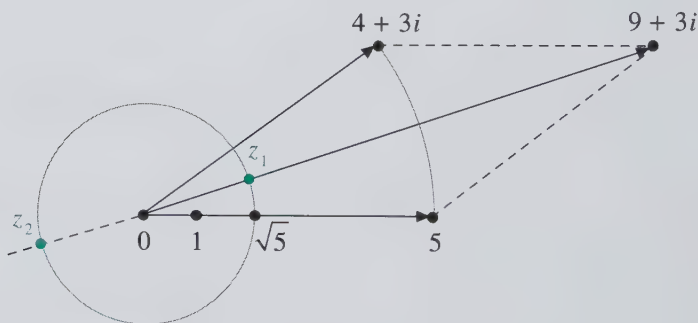


FIGURE 8.10 Les deux racines carrées z_1 et z_2 de $4+3i$.

8.2.4 LES ÉQUATIONS QUADRATIQUES À COEFFICIENTS COMPLEXES

L'équation $az^2+bz+c=0$ dans laquelle a , b et c sont des nombres complexes est appelée **équation quadratique à coefficients complexes**. Les solutions de cette équation sont données par la formule habituelle,

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

La nouveauté avec les nombres complexes, c'est que la racine carrée de b^2-4ac existe toujours, peu importe que cette expression soit un nombre réel négatif ou positif, ou même

un nombre complexe arbitraire. Le signe $\pm$ devant la racine indique que les deux racines carrées d'un nombre complexe sont toujours symétriques l'une de l'autre relativement au point origine du plan d'Argand.

EXEMPLE 1

Les solutions de l'équation $x^2 - 2x + 2 = 0$ sont données par

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} \\ &= 1 \pm i, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $x_1 = 1 + i$ et $x_2 = 1 - i$.

EXEMPLE 2

Les solutions de l'équation $iz^2 - z + 1 - i = 0$ sont données par

$$\begin{aligned} z &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4i(1 - i)}}{2i} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{-3 - 4i}}{2i} \\ &= \frac{1 \pm (1 - 2i)}{2i}, \quad \left[\text{Voir l'exercice 8 d) à la fin de cette section, pour le calcul de } \sqrt{-3 - 4i}. \right] \end{aligned}$$

ce qui fait $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = 1$.

EXERCICES 8.2

1. Écrivez chaque nombre sous la forme polaire $r \operatorname{cis} \theta$ avec $0 \leq \theta < 2\pi$.

a) $1 + \sqrt{3}i$

b) $-1 - i$

c) -10

d) $-3i$

2. Écrivez chaque nombre sous la forme cartésienne $a + bi$.

a) $\operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$

b) $10 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$

c) $3 \operatorname{cis} \pi$

d) $4 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4}$

3. Effectuez chaque opération sous la forme polaire et donnez les résultats sous la forme cartésienne.

a) $\left(2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right)(3 \operatorname{cis} \pi)$

b) $\left(5 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}\right)\left(2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}\right)$

c) $\frac{4 \operatorname{cis} \pi}{2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}}$

d) $\frac{\operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}}{\operatorname{cis} \frac{\pi}{5}}$

4. Effectuez chaque opération et donnez la réponse sous la forme cartésienne.

a) $(1 - i)^{12}$

b) $(-i)^{103}$

c) i^{2001}

d) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{1993}$

5. Soit $\alpha = \text{Arg}(1 + 2i)$ et $\beta = \text{Arg}(3 + 4i)$. À l'aide de la multiplication complexe et de la division complexe, montrez comment on peut déterminer les valeurs exactes de $\tan(\alpha + \beta)$ et $\tan(\alpha - \beta)$ sans calculer ni α ni β et sans utiliser la calculatrice.
6. À l'aide de la formule de Moivre, retrouvez les expressions de $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$ en fonction de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$.
7. Donnez les deux racines carrées de chaque nombre sous la forme polaire.

a) $16 \text{ cis } \frac{5\pi}{3}$ b) $\frac{1}{4} \text{ cis } \pi$
8. Donnez les deux racines carrées de chaque nombre sous la forme cartésienne.

a) i b) $-i$ c) -9 d) $-3 - 4i$
9. Trouvez toutes les racines quatrième de l'unité et représentez-les sur le cercle-unité.
10. Trouvez toutes les racines cinquièmes de l'unité et représentez-les sur le cercle-unité.
11. Décomposez chaque polynôme en deux facteurs du premier degré. (Il peut y avoir des coefficients complexes.)

a) $x^2 + 4$ b) $x^2 - 4x + 13$ c) $x^2 + 6x + 10$ d) $iz^2 + (1+i)z + 1$
12. Trouvez toutes les solutions (réelles ou complexes) de chacune des équations.

a) $x^2 - x + 1 = 0$ b) $z^2 + iz + 1 = 0$ c) $(iz - 1)(z^2 + 9) = 0$ d) $z^4 + z^2 = 0$
13. Démontrez les propriétés suivantes de la conjugaison en utilisant la forme d'écriture la plus appropriée, cartésienne ou polaire, dans chaque cas.

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ d) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$

b) $\overline{(-z)} = -(\overline{z})$ e) $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$ si $z \neq 0$.

c) $\overline{r \text{ cis } \theta} = r \text{ cis } (-\theta)$ f) $\overline{\left(\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} \right)} = \left(\begin{matrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{matrix} \right)$ si $z_2 \neq 0$.

LE THÉOREME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

Dans cette section, nous présentons le théorème fondamental de l'algèbre sur les solutions des équations polynomiales à coefficients complexes et sur la factorisation des polynômes. Nous ne ferons pas la démonstration formelle de ce théorème, celle-ci dépassant le niveau de cet ouvrage ; on trouvera cependant dans la section *Pour aller plus loin* des indications

sur ce sujet. Ce théorème montre que le système des nombres complexes est en quelque sorte complet et qu'il n'y a pas lieu d'en chercher une extension pour résoudre des équations polynomiales qui ne seraient pas résolubles dans $\mathbb{C}$. Nous terminons cette section par quelques considérations sur les polynômes à coefficients réels.

8.3.1 LE THÉORÈME FONDAMENTAL

Il semble que l'idée de résoudre des problèmes de partage avec des équations et des inconnues remonte à la période babylonienne, c'est-à-dire au troisième millénaire av. J.-C. Cependant, l'écriture symbolique des équations, telle que nous la pratiquons aujourd'hui avec l'emploi du signe d'égalité, daterait de la Renaissance. Déjà à cette époque, on savait résoudre les équations algébriques (à solutions réelles) de degrés 2, 3 et 4 par des formules ne faisant intervenir que des radicaux (racines de degrés entiers). Ainsi, pour résoudre les équations

de degré 2 telle $ax^2 + bx + c = 0$, on connaissait la formule $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ laquelle donne

les solutions réelles lorsque $b^2 - 4ac \geq 0$ et fait intervenir un radical de degré 2.

Aux XVII^e et XVIII^e siècles, les mathématiciens ont cherché en vain des formules semblables pour résoudre les équations de degrés supérieurs à 4. Niels Henrik Abel (1802-1829) a donné le premier, en 1826, une démonstration de l'impossibilité d'une telle formule pour résoudre l'équation générale de degré 5. Évariste Galois (1811-1832) a élaboré pour sa part une théorie générale pour reconnaître toutes les équations algébriques de tous les degrés qui sont résolubles par des formules ne faisant intervenir que des radicaux.

Le fait qu'il n'y ait pas de formule pour obtenir les solutions d'une équation ne signifie pas que cette équation soit sans solution. À défaut de donner une formule de calcul explicite des solutions, le théorème fondamental garantit l'existence d'au moins une solution de toutes les équations algébriques dans l'ensemble des nombres complexes.

DÉFINITION Polynôme et équation algébrique de degré n

L'expression $p(z)$ définie par

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

est un **polynôme** en z de degré n (si $a_n \neq 0$). L'équation $p(z) = 0$ est une **équation polynomiale** de degré n ou, encore, une **équation algébrique** de degré n .

Les nombres complexes a_i sont les coefficients du polynôme ou de l'équation. Si z_0 est un nombre tel que $p(z_0) = 0$, alors z_0 est appelé une **racine** du polynôme $p(z)$ ou une **solution** de l'équation $p(z) = 0$.

EXEMPLE 1

$z^2 + 1$ est un polynôme de degré 2; i et $-i$ sont des racines de ce polynôme.

EXEMPLE 2

$z^3 - (2+2i)z^2 + (-1+4i)z + 2 = 0$ est une équation polynomiale de degré 3; le nombre 2 est une solution de cette équation.

Théorème fondamental de l'algèbre

Toute équation algébrique

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

à coefficients complexes et de degré $n \geq 1$ a au moins une solution dans l'ensemble des nombres complexes. En d'autres termes, tout polynôme

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

à coefficients complexes de degré $n \geq 1$ a au moins une racine dans l'ensemble des nombres complexes.

Remarque

Si z_1 est une racine de $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, alors la division du polynôme $p(z)$ par $(z - z_1)$ n'a pas de reste (le reste est nul), et on a donc

$$p(z) = (z - z_1)q(z),$$

où $q(z)$ est un polynôme de degré $n - 1$. Le théorème fondamental s'applique alors à $q(z)$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que $p(z)$ soit entièrement décomposé en un produit de n facteurs de degré 1 et un facteur de degré 0.

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)a_n$$

Dans cette décomposition, certains facteurs peuvent être identiques (des racines peuvent se répéter) et le facteur de degré 0 est forcément le coefficient de z^n dans le polynôme $p(z)$.

EXEMPLE

Selon le théorème fondamental, le polynôme $z^3 - iz^2 - z + i$ devrait avoir trois racines: on peut vérifier que ces trois racines sont i , -1 et 1 . La décomposition en facteurs de ce polynôme est donc

$$z^3 - iz^2 - z + i = (z - i)(z + 1)(z - 1).$$

8.3.2 LES POLYNÔMES À COEFFICIENTS RÉELS

Soit $p(z) = az^2 + bz + c$, un polynôme en z , où a , b et c sont des coefficients **réels**. À l'aide des propriétés de la conjugaison (voir l'exercice 13 de la section *Exercices 8.2*), on montre facilement que $p(z) = p(\bar{z})$; de cette dernière égalité, on déduit que si z_0 est une solution complexe de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients réels, alors le conjugué $\bar{z}_0$ de z_0 est aussi une solution de cette équation. En effet, dans ce cas, si $p(z_0) = 0$, alors $p(\bar{z}_0) = \overline{p(z_0)} = \overline{0} = 0$. Le même raisonnement s'applique à tout polynôme de degré arbitraire à coefficients réels.

Les racines complexes d'un polynôme à coefficients réels viennent toujours par paires de conjuguées.

EXEMPLE 1

Les racines du polynôme $1 + z + z^2 + z^3$ sont 1 , i et $-i$; on constate que les deux racines complexes i et $-i$ sont conjuguées l'une de l'autre.

EXEMPLE 2

Tout polynôme à coefficients réels de degré impair a au moins une racine réelle, car le nombre de racines complexes d'un polynôme à coefficients réels est pair d'après la proposition.

EXERCICES 8.3

1. Sachant que $z = -1$ est une solution de l'équation $z^3 - z^2 + 3z + 5 = 0$, trouvez les deux autres solutions prévues par le théorème fondamental en divisant d'abord $z^3 - z^2 + 3z + 5$ par $z - (-1)$.
2. Trouvez deux polynômes distincts de degré 3 ayant $1 + 2i$ comme racine.
3. Trouvez l'unique solution réelle de l'équation $z^5 + 3z^4 + 5z^3 + 15z^2 + 4z + 12 = 0$, sachant que i et $2i$ sont deux solutions complexes de cette équation. Trouvez d'abord un facteur de degré 4 à coefficients réels à partir des deux racines complexes du polynôme $z^5 + 3z^4 + 5z^3 + 15z^2 + 4z + 12$.
4. Le théorème fondamental prévoit n solutions de l'équation $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n = 0$.
Montrez que ces n solutions sont les n racines $(n+1)$ -ièmes de l'unité autres que 1. Par exemple, les deux solutions de $1 + z + z^2 = 0$ sont les deux racines cubiques de l'unité autres que 1. (*Coup de pouce* : $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$ est une progression géométrique dont la somme est $a \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$ pour $r \neq 1$.)
5. À partir de l'exercice 4, trouvez toutes les solutions de :
a) $1 + z + z^2 + z^3 = 0$; b) $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.
6. En suivant un raisonnement semblable à celui qui est proposé à l'exercice 4, trouvez toutes les solutions de l'équation $1 - z + z^2 - z^3 + z^4 = 0$.
7. Donnez, sous la forme cartésienne, toutes les solutions de l'équation $z^3 + z = 10$.
8. Soit $p(z) = z^3 + az^2 + bz + c$, un polynôme en z à coefficients réels. Sachant que $p(3+i) = 0$ et $p(1) = -1$, trouvez toutes les racines de $p(z)$.



LES TRANSFORMATIONS AFFINES AVEC LES NOMBRES COMPLEXES

Le but de cette section est de montrer comment les nombres complexes permettent de représenter les transformations linéaires et affines dans $\mathbb{R}^2$ par de simples opérations arithmétiques. On obtient ainsi une équivalence entre le point de vue matriciel (voir le chapitre 7) et le point de vue complexe sur les transformations linéaires et affines du plan.

8.4.1 L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA MULTIPLICATION ET DE L'ADDITION

Si l'on multiplie tous les points z du plan d'Argand par $\text{cis } \theta$, où θ est un angle donné, alors, selon la définition de la multiplication complexe, tous ces points verront leur argument augmenter de θ et subiront donc une rotation d'angle θ autour de l'origine. En ce sens, la **rotation** d'angle θ autour de l'origine est la transformation R du plan d'Argand définie par

$$R(z) = (\text{cis } \theta)z \quad (\text{voir la figure 8.11}).$$

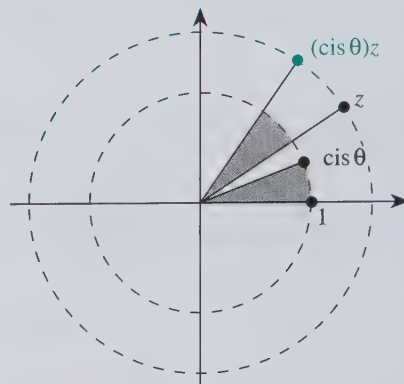


FIGURE 8.11 La rotation $R(z) = (\text{cis } \theta)z$.

EXEMPLE 1

$R(z) = iz$ représente une rotation de $\frac{\pi}{2}$ radian (90°) autour de l'origine, car $i = \text{cis } \frac{\pi}{2}$.

EXEMPLE 2

$R(z) = (\text{cis } \frac{2\pi}{3})z$ représente une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ radians (120°) autour de l'origine.

Si l'on multiplie tous les points z du plan d'Argand par a , où a est un nombre complexe donné de module $\|a\|$ et d'argument θ , alors, en plus de tourner autour de l'origine d'un angle θ , tous les points verront leur module multiplié par le facteur $\|a\|$. On obtient donc la proposition suivante.

Soit a , un nombre complexe non nul. Alors, la transformation T du plan d'Argand définie par

$$T(z) = az$$

est une **similitude directe** de rapport $\|a\|$ et d'angle $\text{Arg}(a)$ centrée à l'origine.

EXEMPLE 1

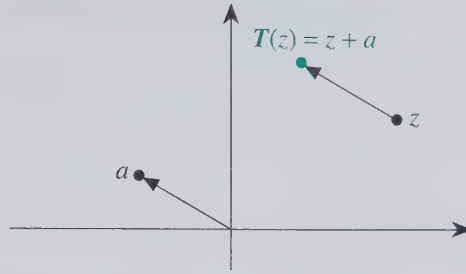
La similitude directe de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{4}$ centrée à l'origine est représentée par $T(z) = az$, où a est le nombre complexe de module 3 et d'argument $\frac{\pi}{4}$.

$$T(z) = \left(3 \text{cis } \frac{\pi}{4} \right) z = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \right) z$$

EXEMPLE 2

La transformation T définie par $T(z) = rz$, où r est un nombre réel positif, est une similitude directe de rapport r et d'angle 0 centrée à l'origine, c'est-à-dire une homothétie de rapport r centrée à l'origine.

L'addition complexe coïncidant avec l'addition vectorielle dans $\mathbb{R}^2$, la transformation T définie par $T(z) = z + a$, où a est un nombre complexe donné, représente une **translation** dans le plan d'Argand (voir la figure 8.12).

FIGURE 8.12 La translation $T(z) = z + a$.

En composant les similitudes autour de l'origine avec les translations, on parvient à décrire très simplement les similitudes directes de rapport r , d'angle α et de centre c arbitraires.

$$z \xrightarrow{\text{Translation}} (z - c) \xrightarrow{\text{Similitude directe}} r \operatorname{cis} \alpha (z - c) \xrightarrow{\text{Translation inverse}} r \operatorname{cis} \alpha (z - c) + c$$

EXEMPLE 1

La rotation de 60° autour du centre $1 + i$ est donnée par

$$\begin{aligned} T(z) &= \left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{3} \right) [z - (1 + i)] + (1 + i) \\ &= \left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{3} \right) z - \left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{3} \right) (1 + i) + (1 + i) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i \right) \quad [\text{Après avoir effectué les calculs.}] \end{aligned}$$

EXEMPLE 2

La similitude directe de rapport 2, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre -3 est donnée par

$$\begin{aligned} T(z) &= 2i[z - (-3)] + (-3) \\ &= 2iz - 3 + 6i. \end{aligned}$$

Pour caractériser la transformation T du plan d'Argand définie par $T(z) = az + b$, on observe d'abord que, pour $a \neq 1$,

$$az + b = a \left(z - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} = a(z - c) + c, \text{ où } c = \frac{b}{1-a},$$

de telle sorte qu'on obtient la proposition suivante.

Soit a et b , des nombres complexes, avec $a \neq 0$. Alors la transformation T du plan d'Argand définie par

$$T(z) = az + b$$

représente une similitude directe de rapport $\|a\|$ et d'angle $\operatorname{Arg}(a)$ centrée en $\frac{b}{1-a}$ si $a \neq 1$.

Si $a = 1$, alors $T(z) = z + b$ et T est une translation.

EXEMPLE

La transformation T définie par $T(z) = (1 - i\sqrt{3})z + i$ est une similitude directe de rapport $\|1 - i\sqrt{3}\| = 2$, d'angle $\operatorname{Arg}(1 - i\sqrt{3}) = -60^\circ$ et de centre $c = \frac{i}{1 - (1 - i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

8.4.2 L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA CONJUGAISON

La transformation T définie par $T(z) = \bar{z}$ est une réflexion autour de l'axe réel (axe des x) dans le plan d'Argand. On peut obtenir la réflexion autour d'une droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine et formant un angle θ avec l'axe réel en effectuant d'abord une rotation d'angle $-\theta$ (pour amener l'axe de réflexion sur l'axe réel), puis une réflexion autour de l'axe réel et enfin, une rotation d'angle θ (pour replacer l'axe de réflexion dans sa position initiale).

$$z \xrightarrow{\text{Rotation d'angle } -\theta} \text{cis}(-\theta)z \xrightarrow{\text{Réflexion (conjugaison)}} \overline{\text{cis}(-\theta)z} \xrightarrow{\text{Rotation d'angle } +\theta} \text{cis}(\theta)\overline{\text{cis}(-\theta)z} = \text{cis}(2\theta)\bar{z}$$

Ainsi, la transformation T définie par

$$T(z) = \text{cis}(2\theta)\bar{z}$$

est une réflexion autour de la droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine et formant un angle θ avec l'axe réel.

EXEMPLE 1

La droite d'équation $y = x$ fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe réel ; la réflexion autour de cette droite est donc décrite par $T(z) = \text{cis}\left(2\frac{\pi}{4}\right)\bar{z} = i\bar{z}$.

EXEMPLE 2

On peut décrire la réflexion autour de la droite d'équation $y = 3x$ en calculant la valeur de l'angle θ que fait cette droite avec l'axe réel. Cependant, on peut éviter de calculer la valeur de l'angle θ lui-même en procédant comme suit : on choisit d'abord un nombre complexe représentant un point sur cette droite autre que le point origine, par exemple le nombre $1 + 3i$. Ensuite, on élève ce nombre au carré (pour doubler son argument) et on divise le résultat par son module pour obtenir un nombre d'argument 2θ situé sur le cercle trigonométrique (voir la figure 8.13) :

$$(1 + 3i)^2 = -8 + 6i$$

et donc,

$$\text{cis} 2\theta = \frac{-8 + 6i}{\| -8 + 6i \|} = \frac{1}{10}(-8 + 6i) = \frac{1}{5}(-4 + 3i);$$

par suite,

$$T(z) = \frac{1}{5}(-4 + 3i)\bar{z}.$$

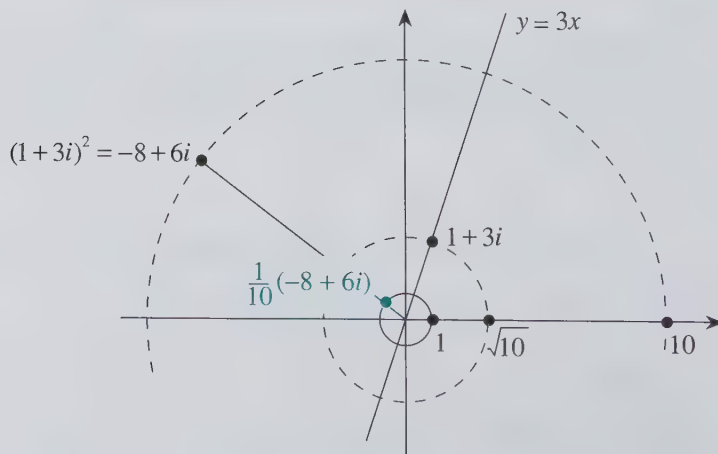


FIGURE 8.13

Si on compose l'homothétie de rapport r centrée à l'origine avec la réflexion autour de la droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine et formant un angle θ avec l'axe réel, on obtient la similitude indirecte de rapport r et d'angle θ centrée à l'origine :

$$T(z) = (r \operatorname{cis} 2\theta) \bar{z}.$$

Soit a , un nombre complexe non nul. Alors, la transformation T du plan d'Argand définie par

$$T(z) = a \bar{z}$$

est une **similitude indirecte** de rapport $\|a\|$ et d'angle $\frac{1}{2} \operatorname{Arg}(a)$ centrée à l'origine.

EXEMPLE

La transformation T définie par $T(z) = (1+i)\bar{z}$ est une similitude indirecte de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{8}$ centrée à l'origine.

On peut aussi décrire les réflexions autour de droites ne passant pas par l'origine en utilisant les translations ; c'est ce que montre l'exemple suivant.

EXEMPLE

La réflexion T autour de la droite d'équation $y = x + 1$ se fait en trois étapes.

1^{re} étape On fait une translation T_1 qui amène la droite d'équation $y = x + 1$ sur une droite parallèle passant par l'origine.

2^e étape On fait la réflexion T_2 autour de cette nouvelle droite.

3^e étape On fait la translation T_3 inverse de T_1 .

On peut choisir la translation T_1 à partir d'un point arbitraire sur l'axe de réflexion ; par exemple, dans ce cas-ci, puisque la droite passe par le point qui correspond au nombre complexe i , on peut choisir $T_1(z) = z - i$. On aura alors

$$z \xrightarrow{T_1} z - i \xrightarrow{T_2} \left(\operatorname{cis} 2\frac{\pi}{4} \right) \overline{(z - i)} \xrightarrow{T_3} \left(\operatorname{cis} 2\frac{\pi}{4} \right) \overline{(z - i)} + i,$$

ce qui donne

$$T(z) = \left(\operatorname{cis} 2\frac{\pi}{4} \right) \overline{(z - i)} + i = i \bar{z} - 1 + i.$$

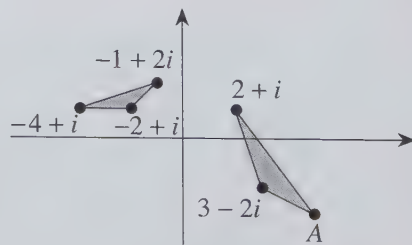
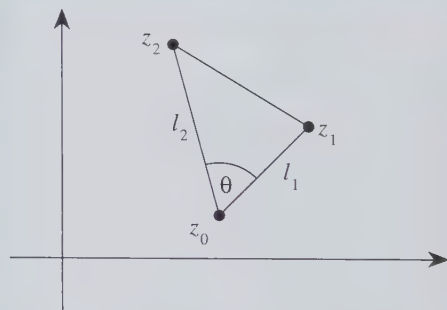
Les translations permettent aussi de décrire les similitudes indirectes centrées ailleurs qu'à l'origine. Par définition, une similitude indirecte de rapport r et d'angle θ centrée en c est une homothétie de rapport r et de centre c composée avec une réflexion autour de la droite qui passe par c et qui fait un angle θ avec l'axe réel.

Les transformations T du plan d'Argand définies par $T(z) = az + b\bar{z}$ sont précisément les transformations linéaires vues au chapitre 7 et alors représentées par les matrices carrées d'ordre 2 (voir les exercices 10 et 11 à la fin de cette section). Le fait que l'on puisse représenter toute transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ par $T(z) = az + b\bar{z}$ montre que toute

transformation linéaire de $\mathbb{R}^2$ est la somme d'une similitude directe et d'une similitude indirecte centrées à l'origine. On peut conclure que les transformations T du plan d'Argand définies par $T(z) = az + b\bar{z} + c$ sont précisément les transformations affines du plan, car une transformation affine est la somme d'une transformation linéaire et d'une translation (voir le chapitre 7).

EXERCICES 8.4

- Quel est le rapport r et l'angle α de la similitude directe T définie par :
 - $T(z) = (1 + 2i)z$?
 - $T(z) = -3z$?
 - $T(z) = -iz$?
- Trouvez les nombres complexes a et b sous la forme cartésienne pour lesquels la transformation T du plan d'Argand définie par $T(z) = az + b$ représente :
 - une rotation de 30° autour du point $3 + 4i$;
 - une homothétie de rapport 5 centrée en $-2 + i$;
 - une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ centrée en i ;
 - une translation qui déplace le point $1 - i$ sur le point $3 + 4i$.
- Déterminez le rapport, l'angle et le centre de chacune des similitudes directes T définies par chacune des égalités. [Note : Le centre c est un point fixe : $T(c) = c$.]
 - $T(z) = -2z + i$
 - $T(z) = (2 - 2i)z + 1$
- Montrez que, dans le triangle illustré ci-contre, le quotient $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$ est un nombre complexe dont le module est le rapport $\frac{l_2}{l_1}$ des longueurs des deux côtés issus du sommet z_0 et dont l'argument est l'angle θ entre ces deux côtés. Ce rapport et cet argument resteront les mêmes si le triangle subit une rotation et/ou une homothétie et/ou une translation, de telle sorte que le quotient $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$ représente la forme du triangle, indépendamment de ses dimensions et de sa position.
- Les deux triangles illustrés ci-contre sont directement semblables (ils s'obtiennent l'un de l'autre par une rotation et/ou une homothétie et/ou une translation). Déterminez le nombre complexe z qui représente le sommet A à partir du résultat décrit à l'exercice 4.



6. Pour déplacer sans trop d'effort un objet très lourd, par exemple un réfrigérateur, on le fait pivoter légèrement sur un coin, on le dépose, puis on le fait pivoter à nouveau en sens inverse sur un autre coin, et ainsi de suite. Ce petit truc bien connu illustre la proposition suivante : une rotation d'angle θ et de centre c_1 suivie d'une autre rotation d'angle $-\theta$ et de centre c_2 donne une translation si $c_1 \neq c_2$.

a) Démontrez cette proposition.

- b) Quelle est la translation qui résulte d'une rotation autour de l'origine de $\frac{\pi}{4}$ radian suivie d'une rotation de $-\frac{\pi}{4}$ radian autour du point $2i$?

7. Une homothétie de rapport r et de centre c_1 suivie d'une autre homothétie de rapport $\frac{1}{r}$ et de centre c_2 donne une translation si $c_1 \neq c_2$ et $r \neq 1$. (C'est le moyen de locomotion des chenilles !)

a) Démontrez cette proposition.

- b) Quelle est la translation qui résulte d'une homothétie de rapport 10 centrée à l'origine suivie d'une homothétie de rapport 0,1 centrée en $4 + 4i$?

8. Quels sont le rapport et l'angle de la similitude indirecte T du plan d'Argand définie par :

a) $T(z) = -\frac{1}{2}\bar{z}$?

b) $T(z) = (3 - 4i)\bar{z}$?

c) $T(z) = -3i\bar{z}$?

9. Déterminez les nombres complexes a et b pour lesquels la transformation T définie par $T(z) = a\bar{z} + b$ représente une réflexion autour de la droite d'équation $y = -2x + 4$.

10. Montrez que la transformation linéaire T dans $\mathbb{R}^2$ représentée par la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, où a, b, c et d sont des nombres réels, est la même que la transformation T' du plan d'Argand représentée par

$$T'(z) = \left(\frac{a+d}{2} + i \frac{b-c}{2} \right) z + \left(\frac{a-d}{2} + i \frac{b+c}{2} \right) \bar{z}.$$

(Coup de pouce : Il suffit de montrer que $T\left(\frac{1}{0}\right)$ et $T'(1)$, de même que $T\left(\frac{1}{0}\right)$ et $T'(i)$, représentent le même point.)

11. Montrez que la transformation T définie dans le plan d'Argand par $T(z) = az + b\bar{z}$, où a et b sont des nombres complexes, est la même que la transformation T' dans $\mathbb{R}^2$ représentée par la matrice 2×2

$$T' = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(a+b) & -\operatorname{Im}(a-b) \\ \operatorname{Im}(a+b) & \operatorname{Re}(a-b) \end{pmatrix}.$$

(Coup de pouce : Il suffit de montrer que $T(1)$ et $T'\left(\frac{1}{0}\right)$, de même que $T(i)$ et $T'\left(\frac{0}{1}\right)$, représentent le même point.)

POUR ALLER PLUS LOIN

Dans cette section, nous donnons d'abord quelques indications sur les formules de résolution par radicaux des équations algébriques de degrés 3 et 4. Nous présentons ensuite une démonstration heuristique (informelle) du théorème fondamental de l'algèbre. Nous concluons par un bref commentaire sur les quaternions.

8.5.1 LES FORMULES DE RÉOLUTION PAR RADICAUX DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES DE DEGRÉS 3 ET 4

Les équations

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{et} \quad ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

sont résolubles par des formules ne faisant intervenir que des radicaux de degré entier. La formule pour le degré 3 est attribuée à Scipione del Ferro (1465-1526) et à Niccolò Fontana di Tartaglia (1499-1557); la formule pour le degré 4, connue sous le nom de formule de Cardan, serait attribuable à Ludovico Ferrari (1522-1565), un élève de Cardan. Ceux qui s'intéressent à ces formules ou à la petite histoire entourant ces découvertes pourront consulter la *Petite Encyclopédie des mathématiques* à la rubrique des équations algébriques⁴, ou l'un des nombreux sites sur le sujet dans Internet.

8.5.2 L'HEURISTIQUE DE LA PREUVE DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

Soit $p(z)$, le polynôme de degré n ($n \geq 1$) à coefficients complexes défini par

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

dans lequel on suppose que $a_n \neq 0$. Le théorème fondamental de l'algèbre affirme que l'équation $p(z) = 0$ a au moins une solution dans l'ensemble des nombres complexes. Sans donner une preuve formelle et détaillée de ce théorème, nous pouvons tout de même le justifier de façon **heuristique**, c'est-à-dire par un argument informel⁵.

On suppose d'abord que $a_0 \neq 0$, car autrement le nombre 0 est une solution de l'équation $p(z) = 0$ et il n'y a alors rien à démontrer.

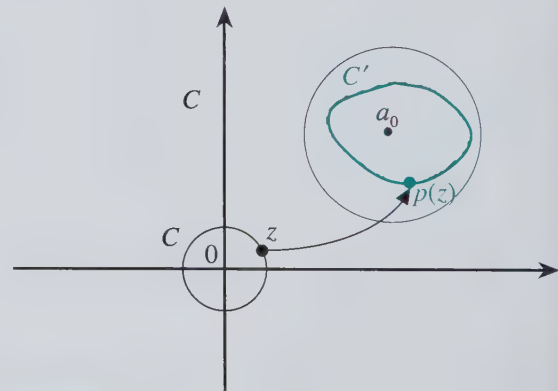


FIGURE 8.14

Dans un premier temps, on voit que, lorsque z parcourt une fois un cercle C de rayon r suffisamment petit (beaucoup plus petit que $\|a_0\|$), alors l'image de z par le polynôme $p(z)$, considéré comme une transformation dans le plan d'Argand, est une courbe fermée C' (voir la figure 8.14). Cette courbe entoure le point a_0 et est entièrement contenue dans un disque centré en a_0 et de rayon strictement inférieur à $\|a_0\|$. C'est là une conséquence de la **continuité** des fonctions polynomiales.

4. *Petite Encyclopédie des mathématiques*, Paris, Éditions K. Pagoulatos, 1980.

5. Cet argument heuristique a été proposé par Gilbert Labelle, professeur à l'UQAM, dans un-texte intitulé *Introduction aux nombres complexes et applications*, publié en 1974 par l'Association mathématique du Québec.

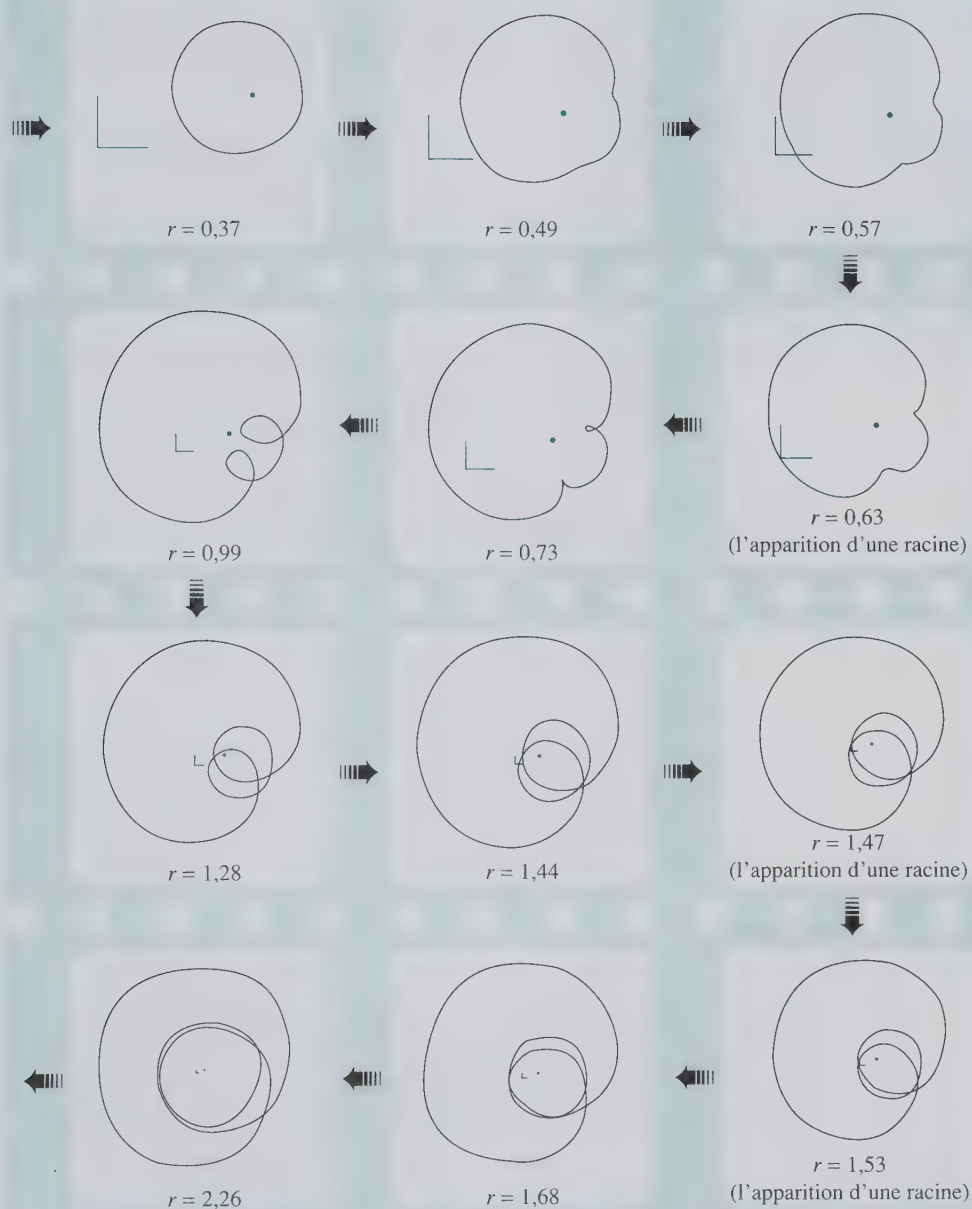


FIGURE 8.15 Les images⁶ d'un cercle de rayon r centré à l'origine par le polynôme $p(z) = (2+i)z^3 + (1+2i)z^2 + (-1+3i)z + (3+i)$ pour différentes valeurs de r (les images ne sont pas toutes à la même échelle).

Dans un deuxième temps, on peut augmenter progressivement le rayon r du cercle C et provoquer ainsi une déformation continue de la courbe fermée C' décrite par $p(z)$ (voir la figure 8.15). Cette déformation transformera progressivement C' en une courbe fermée qui

6. Merci à François Trottier du Collège Jean-de-Brébeuf qui nous a fourni ces images.

finira par encercler n fois un disque centré à l'origine de rayon aussi grand que désiré (en choisissant r suffisamment grand); en effet, la factorisation

$$p(z) = a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_2}{a_n z^{n-2}} + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n} \right)$$

montre que

$$\lim_{\|z\| \rightarrow \infty} \|p(z)\| = \lim_{\|z\| \rightarrow \infty} \|a_n z^n\| = \infty$$

et que

$$\text{Arg } p(z) = \text{Arg } a_n + n \text{Arg } z + \text{Arg}(1 + w)$$

où $1 + w$ est confiné à un secteur d'autant plus petit que $\|z\|$ est grand, de sorte que $\text{Arg}(1 + w)$ est négligeable et que l'argument de $p(z)$ varie de $2n\pi$ radians lorsque z parcourt une fois un cercle de rayon suffisamment grand autour de l'origine.

En effet, lorsque $\|z\|$ est très grand, $\|w\|$ est très petit et alors l'argument de $1 + w$ est inférieur à θ en valeur absolue et $\lim_{\|z\| \rightarrow \infty} \theta = 0$ (voir la figure 8.16).

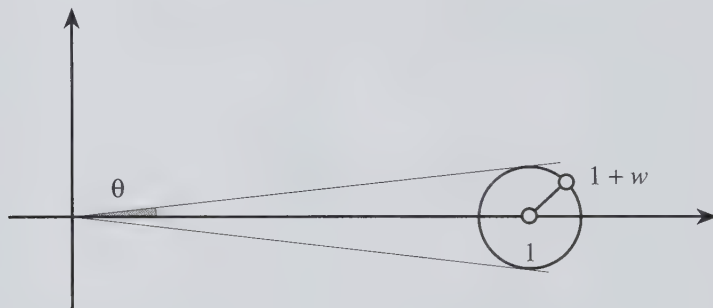


FIGURE 8.16

Puisque la déformation de C' est continue, il y aura forcément au moins une valeur de r pour laquelle C' touchera le point origine, c'est-à-dire une valeur de z pour laquelle $\|z\| = r$ et $p(z) = 0$. Cette valeur de r sera intermédiaire entre la valeur (petite) de r pour laquelle C' est contenue dans un petit disque centré en a_0 et la valeur (grande) de r pour laquelle C' encercle un disque centré en 0 (revoir la figure 8.15 à la page 315).

8.5.3 LES NOMBRES COMPLEXES ANIMÉS

Il existe maintenant de nombreux outils informatiques pour visualiser les opérations sur les nombres complexes et les transformations du plan à l'aide des fonctions complexes. Le mathématicien français Adrien Douady (1935-2006) qui a consacré une bonne partie de sa vie à l'étude de l'analyse complexe, et plus particulièrement aux ensembles de Gaston Julia (1893-1978) et à l'ensemble de Benoît Mandelbrot (1924-2010), nous a laissé en héritage de magnifiques animations sur les transformations élémentaires du plan et des images spectaculaires de ces lieux géométriques dans le plan d'Argand, offertes gratuitement sur Internet. On consultera, par exemple, le site http://www.dailymotion.com/video/xg835n_dimensions-6-9-nombres-complexes-2-2-documentaire-math_tech. Voici (voir la figure 8.17) un exemple d'une des

nombreuses images, libres de droits, qu'on peut trouver facilement sur Internet. Il s'agit de l'image d'un ensemble de Julia réalisé à partir d'un programme rédigé par Solkoll, et nommé *Julia dream*, d'après une mélodie de Pink Floyd.

8.5.4 LES QUATERNIONS

On peut se demander s'il est possible d'étendre la multiplication complexe à $\mathbb{R}^3$ ou même à $\mathbb{R}^n$ et d'obtenir éventuellement de nouveaux nombres hypercomplexes qui prolongeraient ainsi les nombres réels et les nombres complexes. Les intéressés trouveront une réponse complète à

cette question dans un article de Jacques Labelle, « Les Quaternions », article qui aurait pu s'intituler, au dire même de l'auteur, « Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur les quaternions mais que vous n'avez jamais osé demander⁷ ». Notons simplement que la réponse est positive dans le cas $n = 4$. Les lecteurs curieux sont invités à faire une recherche dans Internet, à la rubrique « Quaternions ».

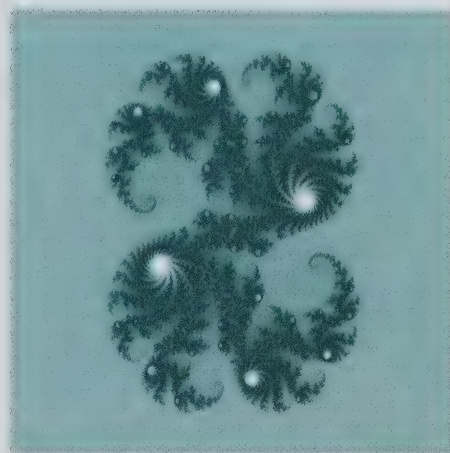


FIGURE 8.17

7. LABELLE, Jacques. « Les Quaternions », *La Gazette des sciences mathématiques du Québec*, vol. XII, n° 3, 1988, p. 34-44.

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES GROUPES

LES ENTIERS MODULO n

LA STRUCTURE DE GROUPE

POUR ALLER PLUS LOIN

Ce dernier chapitre est une modeste introduction à la **théorie des groupes**. On s'y familiarisera avec l'arithmétique **modulo n** , les groupes de symétries et les groupes de transformations. Il s'agit en fait d'une initiation à l'étude des structures abstraites en mathématiques et d'un complément utile à ceux et celles qui désirent poursuivre leurs études à un niveau supérieur en mathématiques. Les lecteurs intéressés trouveront des références bibliographiques dans la section *Pour aller plus loin*.

Pour permettre une première lecture plus rapide, nous ne donnons dans le texte que les démonstrations qui sont essentielles pour comprendre la théorie ; nous espérons que les lecteurs à qui s'adresse ce chapitre sauront retrouver avec profit les démonstrations à faire dans les exercices.

LES ENTIERS MODULO n

Dans cette section, nous définissons les congruences modulo n et les opérations d'addition et de multiplication modulo n . L'arithmétique modulo n conduit naturellement aux axiomes de la théorie des groupes à la section 9.2.

9.1.1 LA CONGRUENCE MODULO n

La congruence modulo n est une relation entre les nombres entiers ; on la définit de la façon suivante.

$$a \equiv b \pmod{n}$$

Soit n , un nombre entier positif, et a et b , deux autres nombres entiers quelconques. On dit que a et b sont **congrus modulo n** et on écrit

$$a \equiv b \pmod{n}$$

si a et b ont le même reste après avoir été divisés par n .

Remarque

$a \equiv b \pmod{n}$ si et seulement si n divise $a - b$. Ou, encore, $a \equiv b \pmod{n}$ si et seulement si $a - b$ est un multiple de n . Aussi, $a \equiv b \pmod{n}$ si et seulement s'il existe un nombre entier r et deux entiers k_1 et k_2 tels que $0 \leq r < n$, $a = k_1n + r$ et $b = k_2n + r$; r est le reste de la division de a et b par n .

EXEMPLES

1. $5 \equiv 3 \pmod{2}$, car 5 et 3 ont le même reste, 1, après la division par 2.
2. Si a est un entier, alors a est pair $\Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{2}$, et a est impair $\Leftrightarrow a \equiv 1 \pmod{2}$.
3. $49 \equiv 4 \pmod{5}$, car $49 - 4$ est un multiple de 5.
4. $27 \equiv 15 \pmod{4}$, car 27 et 15 ont le même reste, 3, après la division par 4.
5. $33 \equiv 3 \pmod{10}$, car $33 - 3$ est un multiple de 10.

Soit n , un entier positif. Alors la relation de congruence modulo n parmi l'ensemble des entiers a les propriétés suivantes (a, b, c et d désignent des entiers arbitraires).

CG1 La relation de congruence mod n est réflexive :

$$a \equiv a \pmod{n}.$$

CG2 La relation de congruence mod n est symétrique :

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow b \equiv a \pmod{n}.$$

CG3 La relation de congruence mod n est transitive :

$$\text{si } a \equiv b \pmod{n} \text{ et } b \equiv c \pmod{n}, \text{ alors } a \equiv c \pmod{n}.$$

CG4 La relation de congruence mod n est compatible avec l'addition :

$$\text{si } a \equiv b \pmod{n} \text{ et } c \equiv d \pmod{n}, \text{ alors } (a + c) \equiv (b + d) \pmod{n}.$$

CG5 La relation de congruence mod n est compatible avec la multiplication :

$$\text{si } a \equiv b \pmod{n} \text{ et } c \equiv d \pmod{n}, \text{ alors } ac \equiv bd \pmod{n}.$$

CG6 $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow (a - b) \equiv 0 \pmod{n}.$

La démonstration de chacune de ces propriétés est à faire dans les exercices.

Remarque

Une relation qui est réflexive, symétrique et transitive est une **relation d'équivalence** ; la relation d'égalité est aussi une relation d'équivalence.

9.1.2 L'ARITHMÉTIQUE MODULO n

Lorsqu'on divise un nombre entier positif arbitraire par le nombre entier positif n , le reste de la division est l'un des nombres suivants : 0, 1, 2, ..., $n - 1$.

 $\mathbb{Z}_n$ et $\mathbb{Z}_n^*$

Soit n , un nombre entier positif. L'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$, noté $\mathbb{Z}_n$, est appelé l'**ensemble des entiers modulo n** .

Si $n > 1$, l'ensemble $\{1, 2, \dots, n - 1\}$, noté $\mathbb{Z}_n^*$, est appelé l'**ensemble des entiers modulo n non nuls**.

L'addition modulo n

Dans $\mathbb{Z}_n$, de même que dans $\mathbb{Z}_n^*$, on appelle **addition modulo n** l'addition ordinaire dont on donne le résultat sous la forme du reste de la division par n ; par exemple, la table d'addition modulo 5 dans $\mathbb{Z}_5$ est

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Dans cet exemple, $4 + 3 = 7 \equiv 2 \pmod{5}$, car 7 divisé par 5 donne un reste de 2.

Les propriétés de l'addition modulo n dans $\mathbb{Z}_n$

Le signe + désigne l'addition modulo n dans ce qui suit.

1 $\mathbb{Z}_n$ est fermé pour l'addition modulo n :

si $a, b \in \mathbb{Z}_n$, alors $(a + b) \in \mathbb{Z}_n$.

2 L'addition modulo n est associative :

si $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$, alors $a + (b + c) = (a + b) + c$.

3 L'addition modulo n est commutative :

si $a, b \in \mathbb{Z}_n$, alors $a + b = b + a$.

4 Le nombre 0 est neutre dans l'addition modulo n :

si $a \in \mathbb{Z}_n$, alors $a + 0 = 0 + a = a$.

5 Tout élément possède un inverse relativement à l'addition modulo n :

si $a \in \mathbb{Z}_n$, alors il existe $b \in \mathbb{Z}_n$ tel que $a + b = 0 = b + a$.

La vérification de ces propriétés est laissée dans les exercices.

La multiplication modulo n

Dans $\mathbb{Z}_n^*$, de même que dans $\mathbb{Z}_n$, on appelle **multiplication modulo n** la multiplication ordinaire dont on donne le résultat sous la forme du reste de la division par n ; par exemple, la table de multiplication modulo 5 dans $\mathbb{Z}_5^*$ est

•	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Dans cet exemple, $4 \cdot 2 = 8 \equiv 3 \pmod{5}$, car 8 divisé par 5 donne un reste de 3.

Les propriétés de la multiplication modulo n dans $\mathbb{Z}_n$

Dans ce qui suit, $a \cdot b$ est noté simplement ab .

1 $\mathbb{Z}_n$ est fermé pour la multiplication modulo n :

si $a, b \in \mathbb{Z}_n$, alors $ab \in \mathbb{Z}_n$.

2 La multiplication modulo n est associative :

si $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$, alors $a(bc) = (ab)c$.

3 La multiplication modulo n est commutative :

si $a, b \in \mathbb{Z}_n$, alors $ab = ba$.

4 Le nombre 1 est neutre dans la multiplication modulo n :

si $a \in \mathbb{Z}_n$, alors $a1 = 1a = a$.

Remarque

Dans les tables de multiplication modulo n , il arrive que tous les éléments non nuls soient inversibles pour certaines valeurs de n (par exemple pour $n = 5$); cependant, pour d'autres valeurs de n , les éléments non nuls ne sont pas tous inversibles. Par exemple, dans la table de multiplication modulo 4 dans $\mathbb{Z}_4$, on constate que 2 n'est pas inversible relativement à l'élément neutre 1 de la multiplication modulo 4.

•	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

La proposition suivante donne un critère d'inversibilité dans $\mathbb{Z}_n$ relativement à la multiplication modulo n et à l'élément neutre 1 de cette multiplication.

Proposition

Soit $a \in \mathbb{Z}_n$, $a \neq 0$. Alors a est inversible relativement à la multiplication modulo n et à l'élément neutre 1 de cette multiplication si et seulement si a et n n'ont pas de facteur commun autre que 1 (on dit alors que a et n sont **relativement premiers**).

On trouvera une démonstration de cette proposition dans la sous-section 9.3.2 de la section *Pour aller plus loin*.

Comme conséquence immédiate de cette proposition, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire

Les éléments de $\mathbb{Z}_n^*$ sont tous inversibles relativement à la multiplication modulo n si et seulement si n est un nombre premier.

EXEMPLE

Dans $\mathbb{Z}_5^*$, tous les éléments sont inversibles relativement à la multiplication modulo 5 : l'inverse de 1 est 1, l'inverse de 2 est 3, l'inverse de 3 est 2 et l'inverse de 4 est 4 lui-même.

EXERCICES 9.1

- Parmi les congruences suivantes, identifiez celles qui sont vraies.

a) $27 \equiv 3 \pmod{9}$	c) $99 \equiv 0 \pmod{11}$
b) $327 \equiv 102 \pmod{25}$	d) $12\,345 \equiv 54\,321 \pmod{41\,976}$
- Pour chacune des valeurs suivantes de n , trouvez un entier a tel que $0 \leq a < n$ et $294 \equiv a \pmod{n}$.

a) $n = 2$	b) $n = 3$	c) $n = 5$	d) $n = 12$
------------	------------	------------	-------------
- En supposant que votre montre indique présentement 16 h, quelle heure indiquera-t-elle dans exactement 1000 heures ?
- Démontrez les propriétés CG1 à CG6 de la relation de congruence modulo n .
- Donnez les tables d'addition et de multiplication modulo 3 dans $\mathbb{Z}_3$.
- Donnez la table d'addition modulo 4 dans $\mathbb{Z}_4$; cherchez l'inverse additif de chacun des éléments de $\mathbb{Z}_4$.
- Donnez la table de multiplication modulo 6 dans $\mathbb{Z}_6^*$; identifiez tous les éléments de $\mathbb{Z}_6^*$ qui sont inversibles relativement à la multiplication modulo 6.
- Quel est l'inverse de 6 relativement à la multiplication modulo 23 ?

LA STRUCTURE DE GROUPE

L'opération d'addition modulo n dans $\mathbb{Z}_n$ et l'opération de multiplication modulo p dans $\mathbb{Z}_p^*$, lorsque p est un nombre premier, ont les mêmes propriétés qui définissent sur ces ensembles ce qu'on appelle une **structure de groupe**. Nous donnons dans cette section la définition axiomatique du concept de groupe, de même que plusieurs exemples. Nous démontrons le théorème de Lagrange pour les groupes finis et nous définissons le concept d'isomorphisme entre deux groupes.

9.2.1 LES AXIOMES DE LA STRUCTURE DE GROUPE

Groupe $\langle G, \bullet \rangle$

Un groupe $\langle G, \bullet \rangle$ est un ensemble G muni d'une opération $\bullet$ qui satisfait les quatre axiomes suivants.

G1 L'ensemble G est **fermé** sous l'opération $\bullet$:

si $a, b \in G$, alors $a \bullet b \in G$.

G2 L'opération $\bullet$ est **associative** :

si $a, b, c \in G$, alors $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$.

G3 G contient un **élément neutre** e pour l'opération $\bullet$:

si $a \in G$, alors $a \bullet e = e \bullet a = a$.

G4 Tout élément a de G a un **inverse** a^* dans G relativement à l'opération $\bullet$ et à l'élément neutre e :

si $a \in G$, alors il existe a^* dans G tel que $a \bullet a^* = e = a^* \bullet a$.

De plus, un groupe $\langle G, \bullet \rangle$ dont l'opération $\bullet$ est commutative est appelé **groupe commutatif** ou **groupe abélien**¹.

Voici plusieurs exemples de groupes qui montrent que cette structure se retrouve naturellement dans plusieurs contextes des mathématiques. La liste est loin d'être exhaustive.

EXEMPLE 1

$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$, $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ et $\langle \mathbb{C}, + \rangle$ sont des groupes commutatifs infinis.

EXEMPLE 2

$\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ et $\langle \mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ sont des groupes commutatifs infinis.

EXEMPLE 3

$\langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$ et $\langle \mathbb{Z}_p^*, \cdot \rangle$, où n est un entier arbitraire, et p , un nombre premier, sont des groupes commutatifs finis.

EXEMPLE 4

$\langle M_{inv}, \circ \rangle$, $\langle M_{\perp}, \circ \rangle$ et $\langle M_{rot}, \circ \rangle$, où M_{inv} désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 inversibles, $M_{\perp}$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 orthogonales, et M_{rot} , l'ensemble des matrices de rotation d'ordre 2, et où l'opération $\circ$ est la multiplication matricielle, sont des groupes infinis non commutatifs dans les deux premiers cas et un groupe infini commutatif dans le dernier cas.

EXEMPLE 5

$\langle S_n, \circ \rangle$, où S_n est l'ensemble des permutations des n premiers nombres naturels et où l'opération $\circ$ est la composition des fonctions, est un groupe fini contenant $n!$ éléments; il est non commutatif pour $n \geq 3$.

EXEMPLE 6

$\langle Sym_F, \circ \rangle$, où Sym_F est l'ensemble des symétries d'une figure plane F donnée et où l'opération $\circ$ est la composition des transformations, est un groupe généralement fini et généralement non commutatif. Par exemple, si F est un carré, alors $\langle Sym_F, \circ \rangle$ est un groupe non commutatif contenant huit éléments; si F est un cercle, alors $\langle Sym_F, \circ \rangle$ coïncide avec le groupe infini $\langle M_{\perp}, \circ \rangle$ des matrices orthogonales d'ordre 2 muni de la multiplication matricielle.

Remarques

1. Un groupe $\langle G, \bullet \rangle$ n'a qu'un seul élément neutre. En effet, si m et n sont des éléments neutres du groupe, alors on a à la fois $e \bullet f = f$ (puisque e est neutre) et $e \bullet f = e$ (puisque f est neutre), d'où forcément $e = f$.

1. Cette appellation a été adoptée en l'honneur de Niels Henrik Abel (1802-1829).

2. Dans tout groupe $\langle G, \bullet \rangle$ l'équation $x \bullet a = x \bullet b$ entraîne que $a = b$. En effet, si $x \bullet a = x \bullet b$, alors,

$$x^* \bullet (x \bullet a) = x^* \bullet (x \bullet b) \quad (\text{où } x^* \text{ est un inverse de } x),$$

$$(x^* \bullet x) \bullet a = (x^* \bullet x) \bullet b \quad (\text{par associativité}),$$

$$e \bullet a = e \bullet b \quad (\text{où } e \text{ est l'élément neutre du groupe}),$$

$$a = b.$$

De même, l'équation $a \bullet x = b \bullet x$ entraîne que $a = b$.

3. Chaque élément d'un groupe $\langle G, \bullet \rangle$ n'a qu'un seul inverse. Soit e , l'élément neutre du groupe, soit $x \in G$ et u et v , deux inverses présumés de x :

$$x \bullet u = u \bullet x = e \text{ et } x \bullet v = v \bullet x = e.$$

Il s'ensuit que $x \bullet u = x \bullet v$, d'où, en vertu de la remarque 2, $u = v$.

Il arrive que deux groupes aient exactement la même structure tout en étant distincts; la définition suivante donne un critère précis pour reconnaître cette situation.

Définition Groupes isomorphes

Deux groupes $\langle G, \bullet \rangle$ et $\langle H, \circ \rangle$ sont dits **isomorphes** s'il existe une fonction bijective f de l'ensemble G dans l'ensemble H telle que

$$f(a \bullet b) = f(a) \circ f(b)$$

pour toute paire d'éléments a, b de G .

Dans ce cas, f est appelée un isomorphisme².

Exemple 1

Tout isomorphisme f de $\langle G, \bullet \rangle$ à $\langle H, \circ \rangle$ applique l'élément neutre m de G sur l'élément neutre n de H .

Prouve

Nous voulons montrer que $f(m) = n$. Soit x , un élément quelconque de G . On a

$$f(x) \circ f(m) = f(x \bullet m) = f(x) = f(x) \circ n,$$

$$f(x) \circ f(m) = f(x) \circ n,$$

$$f(m) = n.$$

EXEMPLE 1

L'ensemble des nombres réels strictement positifs $\mathbb{R}^+$ muni de la multiplication ordinaire est un groupe que l'on note $\langle \mathbb{R}^+, \bullet \rangle$ et qui est isomorphe au groupe $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ de l'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les réels muni de l'addition ordinaire. L'isomorphisme f entre ces deux groupes est la fonction $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \ln x.$$

2. Du grec : *iso* qui signifie « égal » et *morphe* qui signifie « forme ».

En effet, la fonction logarithme est une bijection entre l'ensemble des nombres réels positifs et l'ensemble de tous les réels, et cette fonction a la propriété caractéristique d'un isomorphisme :

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$, quels que soient $a, b \in \mathbb{R}^+$; la fonction logarithme transforme les produits en sommes.

On constate aussi que l'élément neutre 1 de $\langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$ est appliqué sur l'élément neutre 0 de $\langle \mathbb{R}, + \rangle$, puisque $\ln 1 = 0$.

EXEMPLE 2

Le groupe $\langle \text{Sym}_\Delta, \circ \rangle$ des symétries du triangle isocèle illustré à la figure 9.1 est constitué de deux éléments qui sont la transformation identité I et la réflexion S autour de l'axe de symétrie du triangle. L'opération de ce groupe est la composition des transformations, et l'élément neutre est I . Il est facile de vérifier que ce groupe est isomorphe au groupe additif des entiers modulo 2, $\langle \mathbb{Z}_2, + \rangle$.

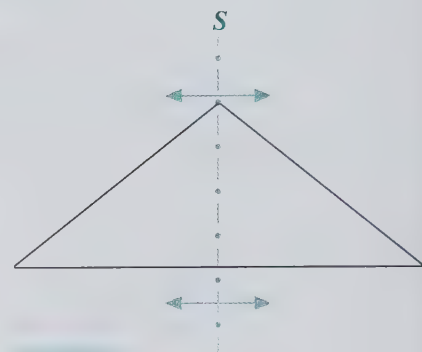


FIGURE 9.1

9.2.2 LES SOUS-GROUPES D'UN GROUPE

Sous-groupe d'un groupe

Soit $\langle G, \cdot \rangle$, un groupe, et H , un sous-ensemble de G . Alors, $\langle H, \cdot \rangle$ est un **sous-groupe** de $\langle G, \cdot \rangle$ si $\langle H, \cdot \rangle$ est lui-même un groupe relativement à l'opération $\cdot$ de G .

Si de plus $H \neq G$, alors $\langle H, \cdot \rangle$ est appelé **sous-groupe propre** de $\langle G, \cdot \rangle$.

EXEMPLE 1

$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ est un sous-groupe propre de $\langle \mathbb{R}, + \rangle$.

EXEMPLE 2

$\langle \{0, 2\}, + \rangle$, où $+$ est l'addition modulo 4, est un sous-groupe propre de $\langle \mathbb{Z}_4, + \rangle$.

Dans les applications de la théorie des groupes finis, il faut souvent identifier tous les sous-groupes d'un groupe donné; les définitions et les propositions qui suivent aident à faire cette identification.

$a \cdot H$

Soit $\langle G, \cdot \rangle$, un groupe, et $\langle H, \cdot \rangle$, un sous-groupe de $\langle G, \cdot \rangle$: soit aussi a , un élément quelconque de G . Alors, l'ensemble $a \cdot H$ défini par

$$a \cdot H = \{a \cdot h : h \in H\}$$

est appelé le **coensemble** de H relativement à a dans G .

EXEMPLE

Si $\langle G, \cdot \rangle = \langle \mathbb{Z}_4, + \rangle$ et si $\langle H, \cdot \rangle = \langle \{0, 2\}, + \rangle$, où $+$ désigne l'addition modulo 4, alors, en utilisant $a = 3$ dans la définition précédente, on aura

$$3 + H = 3 + \{0, 2\} = \{3 + 0, 3 + 2\} = \{1, 3\}.$$

PROPOSITION

Soit $\langle G, \bullet \rangle$, un groupe fini, et $\langle H, \bullet \rangle$, un sous-groupe de $\langle G, \bullet \rangle$; soit aussi a , un élément quelconque de G . Alors,

- 1) l'ensemble $a \bullet H$ comprend le même nombre d'éléments que H ;
- 2) quels que soient $a, b \in G$, de deux choses l'une: ou bien $a \bullet H = b \bullet H$ ou bien $a \bullet H \cap b \bullet H = \emptyset$.

La démonstration de cette proposition fait l'objet d'un exercice à la fin de cette section (voir l'exercice 12 ci-après).

Comme conséquence directe de cette proposition, on obtient le théorème de Lagrange³ sur les sous-groupes d'un groupe fini.

THÉORÈME DE LAGRANGE

Soit $\langle G, \bullet \rangle$, un groupe fini, et $\langle H, \bullet \rangle$, un sous-groupe de $\langle G, \bullet \rangle$. Alors, le nombre d'éléments dans H est un diviseur du nombre d'éléments dans G .

EXEMPLE 1

En vertu du théorème de Lagrange, le groupe $\langle \mathbb{Z}_{17}, + \rangle$ des entiers modulo 17 avec l'addition modulo 17 n'a pas de sous-groupe propre autre que le sous-groupe trivial, qui ne contient que l'élément neutre 0, car $\mathbb{Z}_{17}$ contient 17 éléments et 17 n'a pas d'autre diviseur que 1 et lui-même.

EXEMPLE 2

Les sous-groupes propres de $\langle \mathbb{Z}_6, + \rangle$ ne peuvent être que d'ordre 1, 2 ou 3.

EXERCICES 9.2

1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des groupes? Lorsque l'ensemble n'est pas un groupe, dites pourquoi.
 - a) L'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 et de déterminant 1, muni de la multiplication matricielle.
 - b) L'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 et de déterminant -1 , muni de la multiplication matricielle.
 - c) L'ensemble $\mathbb{Z}^*$ de tous les entiers naturels non nuls muni de la multiplication ordinaire.
 - d) Pour un nombre naturel n non nul, l'ensemble des racines n -ièmes (réelles et complexes) de l'unité, avec la multiplication complexe.
 - e) L'ensemble de toutes les matrices de format 3×4 avec l'addition matricielle.
2. Trouvez la valeur du nombre x pour laquelle $\langle \{1, 5, 11, x\}, \circ \rangle$, où $\circ$ désigne la multiplication modulo 12, est un groupe.
3. Montrez que, dans la table d'opération d'un groupe fini $\langle G, \bullet \rangle$, chaque élément de G doit apparaître une seule fois sur chaque ligne et dans chaque colonne de la table.

3. Joseph Louis de Lagrange (1736-1813).

4. Trouvez toutes les façons de compléter la table d'opération suivante de manière qu'elle soit la table d'opération d'un groupe, avec e comme élément neutre.

$\bullet$	e	a	b	c
e				
a				
b				
c				

5. Trouvez tous les sous-groupes du groupe $\langle \mathbb{Z}_7^*, \bullet \rangle$ des entiers non nuls modulo 7, muni de la multiplication modulo 7.
6. Trouvez tous les sous-groupes du groupe additif $\langle \mathbb{Z}_8, + \rangle$ des entiers modulo 8.
7. Le groupe $\langle \mathbb{Z}_4, + \rangle$ est-il isomorphe à $\langle \mathbb{Z}_5^*, \bullet \rangle$? Si oui, décrivez l'isomorphisme.
8. Décrivez le groupe des symétries du triangle équilatéral et identifiez ses sous-groupes.
9. Trouvez une figure plane dont le groupe des symétries est isomorphe au groupe G des matrices d'ordre 2 de l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

muni de la multiplication matricielle.

10. Trouvez une figure plane dont le groupe des symétries est isomorphe à $\langle \mathbb{Z}_5, + \rangle$.
11. Soit $\langle G, \bullet \rangle$, un groupe fini d'ordre impair. Montrez comment le théorème de Lagrange permet de déduire qu'aucun élément de G n'est son propre inverse, à l'exception de l'élément neutre.
12. Démontrez la proposition qui apparaît dans le texte juste avant le théorème de Lagrange.



POUR ALLER PLUS LOIN

Dans cette section, nous proposons quelques lectures complémentaires sur la théorie des groupes.

9.3.1 DES SUGGESTIONS DE LECTURE

1. *Ah! Les beaux groupes*, Ian Stewart, Éditions Belin, 1986. L'auteur réussit le tour de force de présenter la théorie des groupes par le biais de la bande dessinée. À lire et à relire avec plaisir.

2. *Algèbre*, tome 1, S. Mac Lane et G. Birkhoff, Gauthier-Villars Éditeur, 1970. Ce classique contient un chapitre admirable sur la théorie des groupes ; il s'adresse cependant à des lecteurs déjà conquis par le sujet.
3. *Géométrie*, Marcel Berger, CEDIC/Fernand Nathan, 1977. En plus d'examiner la géométrie sous toutes les coutures (en cinq tomes), l'auteur présente de façon complète et détaillée plusieurs applications de la théorie des groupes à la géométrie. En particulier, on trouve dans le tome 1 une théorie explicite des groupes de pavage du plan, qui sont à l'origine des dessins périodiques de l'artiste M. C. Escher. L'auteur s'adresse à des lecteurs avertis.
4. *Les mathématiques aujourd'hui*, Bibliothèque Pour la Science, Éditions Belin, 1986. Dans cet ouvrage collectif, on trouve, entre autres, trois articles très intéressants sur les congruences modulo n et la théorie des groupes : « La recherche des nombres premiers » de Carl Pomerance, « Les mathématiques de la cryptographie à clef révélée », de Martin Hellmann, et « Le théorème géant », de Daniel Gorenstein. À lire absolument.

9.3.2 UN CRITÈRE D'INVERSIBILITÉ DANS $\mathbb{Z}_n$ RELATIVEMENT À LA MULTIPLICATION MODULO n

Nous rappelons et démontrons ici la proposition de la sous-section 9.1.2 qui donne un critère d'inversibilité dans $\mathbb{Z}_n$ relativement à la multiplication modulo n .

Soit $a \in \mathbb{Z}_n$, $a \neq 0$. Alors a est inversible relativement à la multiplication modulo n et à l'élément neutre 1 de cette multiplication si et seulement si a et n sont relativement premiers (ils n'ont aucun autre facteur commun que 1).

Preuve

1. Montrons que si a est inversible relativement à la multiplication modulo n dans $\mathbb{Z}_n$, alors 1 est le seul facteur commun de a et n .

Si a a un inverse multiplicatif b dans $\mathbb{Z}_n$, alors le produit de a par b en tant qu'entiers ordinaires est congru à 1 modulo n :

$$ab \equiv 1 \pmod{n},$$

c'est-à-dire qu'il existe un certain entier q tel que

$$\begin{aligned} ab &= qn + 1, \\ (1) \quad ab - qn &= 1. \end{aligned}$$

Soit c , un quelconque facteur commun de a et n . Voyons que c est nécessairement 1. En effet, soit $a = ca'$ et $n = cn'$ (où a' et n' sont des entiers). L'équation (1) peut alors être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} ca'b - qcn' &= 1, \\ c(a'b - qn') &= 1. \end{aligned}$$

Comme tous les nombres qui apparaissent dans la dernière équation sont des entiers, le nombre c ne peut être que 1.

2. Montrons que si a et n sont relativement premiers, alors a a un inverse multiplicatif dans $\mathbb{Z}_n$.

Cela revient à montrer que si a n'est pas inversible, alors a et n ont nécessairement un facteur commun supérieur à 1.

Supposons donc $ax \neq 1$, quel que soit x dans $\mathbb{Z}_n$, où ax désigne le résultat de la multiplication modulo n de a par x . Remarquons que cela entraîne que a , qui est non nul, est différent de 1, tout en étant inférieur à n . Il s'ensuit que $n > 2$, ce qui nous sera utile par la suite.

Considérons l'ensemble P_a de tous les produits de a avec tous les éléments de $\mathbb{Z}_n$:

$$P_a = \{ax \mid x \in \mathbb{Z}_n\} \subset \mathbb{Z}_n.$$

Puisque $ax \neq 1$, quel que soit x dans $\mathbb{Z}_n$, on peut affirmer que $1 \notin P_a$. L'ensemble P_a a donc moins de n éléments. Forcément, il doit donc exister deux éléments distincts x et y dans $\mathbb{Z}_n$ tels que

$$ax = ay,$$

$$a(x - y) = 0,$$

$$ab = 0 \text{ (où } b = x - y \text{ est un élément non nul de } \mathbb{Z}_n, \text{ puisque } x \neq y).$$

Si l'on considère a et b comme des entiers normaux, cela veut dire que

$$ab \equiv 0 \pmod{n},$$

c'est-à-dire que

$$(2) \quad ab = qn \text{ (pour un certain entier } q).$$

Nous avons noté que $n > 2$. Le nombre n est soit un nombre premier, soit un produit d'au moins deux nombres premiers. À cause de (2), les facteurs premiers de n se retrouvent parmi ceux de a et de b . Ils ne se retrouvent pas tous parmi ceux de b , car $b < n$ du fait que $b \in \mathbb{Z}_n$. Au moins un facteur premier p de n est donc aussi un facteur premier de a . Autrement dit, a et n ont un facteur commun supérieur à 1.

Note : Merci à François Lorrain d'avoir proposé cette démonstration.

CONIQUES

Pourquoi explorer les coniques, objets non linéaires, dans un manuel d'algèbre linéaire ? L'étude des coniques remonte au traité des sections coniques d'Apollonius de Perge (v. 262-v. 190 av. J.-C.). Une conique peut être vue comme l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan (voir la figure A.1 c)). Mais, comme nous le verrons, on peut aussi voir les coniques comme des lieux géométriques. Ces deux conceptions des coniques sont équivalentes et peuvent être reliées l'une à l'autre au moyen des **sphères de Dandelin**. Les coniques ont été l'objet d'innombrables études depuis l'Antiquité. Toutefois, l'utilisation de l'algèbre pour décrire les coniques est relativement récente. C'est justement en entreprenant une étude algébrique des coniques que Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a été amené à formuler plusieurs des grandes idées de l'algèbre linéaire. Les coniques et l'algèbre linéaire sont en fait étroitement liées.

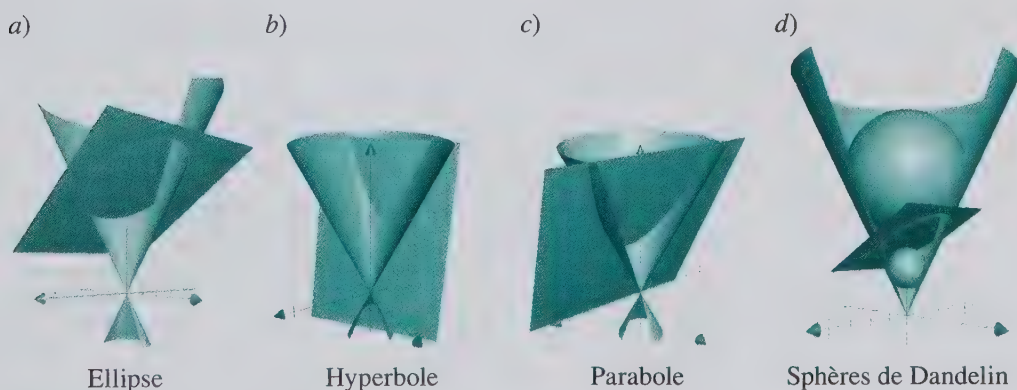


FIGURE A.1 Sections coniques.

A.1 LES ÉQUATIONS CANONIQUES DES TROIS FORMES

Dans cette section, nous verrons comment on peut obtenir les équations des coniques en partant de leurs définitions comme lieux géométriques et des concepts de l'algèbre linéaire vus précédemment.

A.1.1 LE TYPE PARABOLE

Une parabole est l'ensemble des points P dont la distance à une droite $\mathcal{D}$ donnée est la même que la distance à un point F donné. On nomme ce point le **foyer**. Pour obtenir une expression algébrique d'une parabole donnée, on doit fixer un repère. Puisqu'on a une certaine liberté dans le choix du repère, aussi bien en choisir un qui va simplifier les expressions. Lorsque les axes de coordonnées concordent avec certains axes de symétrie d'un lieu géométrique, il arrive très souvent que l'équation décrivant ce lieu soit plus simple. On voit dans la figure A.2 que la droite $\mathcal{D}$ passant par F et perpendiculaire à la droite est un axe de symétrie pour la parabole. De plus, le point O au milieu du segment reliant le foyer et la droite $\mathcal{D}$ est sur la parabole ; ce point est un excellent choix pour être l'origine.

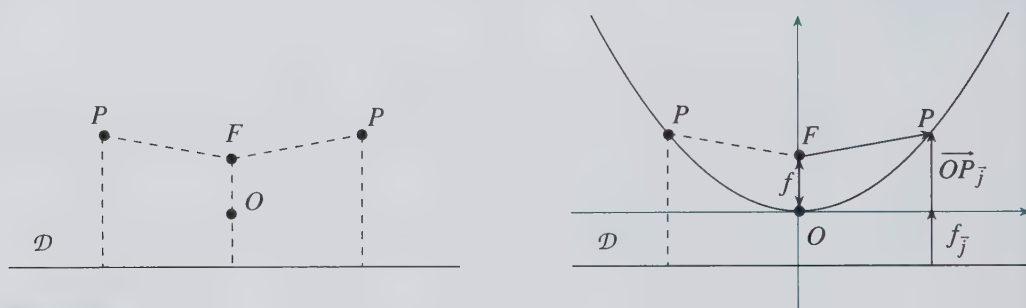


FIGURE A.2

Soit f , la distance entre l'origine et le foyer. Les coordonnées de F sont alors $(0, f)$. On peut maintenant décrire les points $P(x, y)$ de la parabole $\mathcal{P}$ comme l'ensemble des points qui satisfont à la condition suivante :

$$\begin{aligned}
 P(x, y) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow d(F, P) = d(\mathcal{D}, P) \\
 &\Leftrightarrow \|\overrightarrow{FP}\| = \|\overrightarrow{OP_j} + f\vec{j}\| \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-f)^2} = \sqrt{0^2 + (y+f)^2} \\
 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2yf + f^2 = y^2 + 2yf + f^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 = 4fy \\
 &\Leftrightarrow y = \frac{1}{4f}x^2
 \end{aligned}$$

Pour faire ressortir la nature du lien algébrique entre les variables, la constante $1/4f$ peut être remplacée par une constante α . On obtient ainsi l'**équation canonique** d'une parabole, soit

$$y = \alpha x^2.$$

A.1.2 LE TYPE ELLIPSE

Une ellipse est une courbe dans un plan, constituée de l'ensemble des points $P(x, y)$ dont la somme σ des distances à deux points fixes F_1 et F_2 est constante. On nomme ces deux points les **foyers**. La définition de l'ellipse implique que $\text{dist}(F_1, F_2) \leq \sigma$ et que, si l'on a l'égalité $\text{dist}(F_1, F_2) = \sigma$, alors l'ellipse est dégénérée en un segment de droite de F_1 à F_2 en un seul point¹. Comme nous l'avons fait pour la parabole, choisissons un repère permettant de traduire une symétrie géométrique en une symétrie algébrique. La droite passant par F_1 et F_2 est un axe de symétrie pour l'ellipse², ainsi que la droite perpendiculaire à cette dernière passant par le point milieu de F_1 et F_2 (voir la figure A.3).

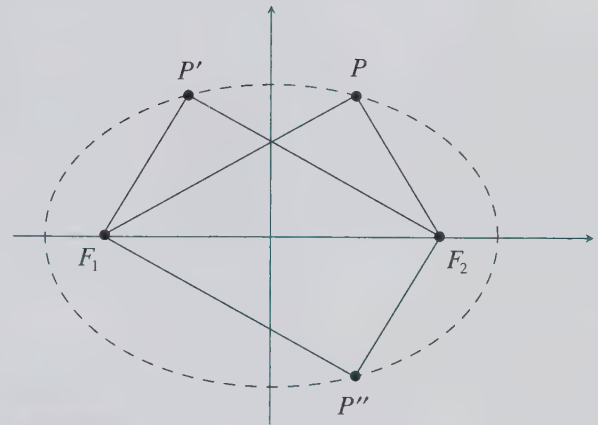


FIGURE A.3

Prenons l'intersection de ces deux droites comme origine, et plaçons les deux foyers sur l'axe des x : $F_1(-f, 0)$ et $F_2(f, 0)$. On peut ainsi obtenir une équation pour l'ellipse ε :

$$\begin{aligned} P(x, y) \in \varepsilon &\Leftrightarrow d(F_1, P) + d(F_2, P) = \sigma \\ &\Leftrightarrow \| \overrightarrow{F_1P} \| + \| \overrightarrow{F_2P} \| = \sigma \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = \sigma. \end{aligned}$$

Reprenons l'équation qui décrit l'ellipse et essayons d'en obtenir une forme plus simple:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+f)^2 + y^2} &= \sigma - \sqrt{(x-f)^2 + y^2} \Leftrightarrow (x+f)^2 + y^2 = \sigma^2 - 2\sigma\sqrt{(x-f)^2 + y^2} + (x-f)^2 + y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2xf + f^2 = \sigma^2 - 2\sigma\sqrt{(x-f)^2 + y^2} + x^2 - 2xf + f^2 \\ &\Leftrightarrow 2xf = \sigma^2 - 2\sigma\sqrt{(x-f)^2 + y^2} - 2xf \\ &\Leftrightarrow 2\sigma\sqrt{(x-f)^2 + y^2} = \sigma^2 - 4xf \\ &\Leftrightarrow 4\sigma^2(x^2 - 2xf + f^2 + y^2) = \sigma^4 - 8xf\sigma^2 + 16x^2f^2 \\ &\Leftrightarrow 4\sigma^2x^2 + 4\sigma^2f^2 + 4\sigma^2y^2 = \sigma^4 + 16x^2f^2 \\ &\Leftrightarrow x^2(4\sigma^2 - 16f^2) + 4\sigma^2y^2 = \sigma^2(\sigma^2 - 4f^2) \\ &\Leftrightarrow x^2 + \frac{\sigma^2y^2}{\sigma^2 - 4f^2} = \frac{\sigma^2(\sigma^2 - 4f^2)}{4\sigma^2 - 16f^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{y^2}{\sigma^2 - 4f^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

On pourrait très bien se satisfaire de cette équation, légèrement plus simple que la première.

1. Cette affirmation équivaut à la suivante : la somme des longueurs de deux côtés d'un triangle est toujours supérieure ou égale à la longueur du troisième.
2. On peut le voir à l'aide d'un argument démontrant que les triangles ΔF_1PF_2 et $\Delta F_1P''F_2$ sont semblables.

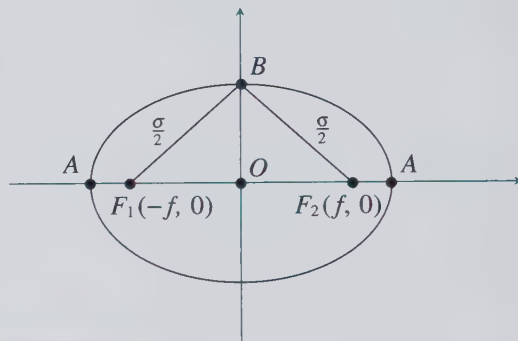
Or, si l'on pose $\alpha = \frac{\sigma}{2}$, l'équation devient

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 - f^2} = 1.$$

Finalement, puisque α et f sont des constantes, on peut remplacer $\alpha^2 - f^2$ par β^2 (car de $\sigma \geq 2f$, il vient $\alpha \geq f$), d'où

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Voici comment on peut interpréter géométriquement les constantes $\alpha = \frac{\sigma}{2}$ et $\beta = \sqrt{\alpha^2 - f^2}$. Soit A et B , les points d'intersection entre l'ellipse et respectivement l'axe des x positif et l'axe des y positif. Soit A' , le symétrique de A par rapport à l'origine (voir la figure A.4). On a



$$\sigma = \| \overrightarrow{F_2 A} \| + \| \overrightarrow{F_1 A} \|$$

(par construction)

FIGURE A.4

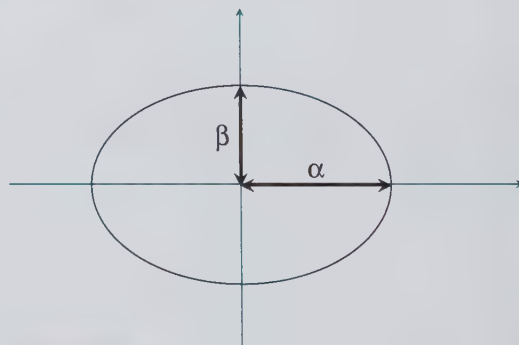
$$= \| \overrightarrow{A' F_1} \| + \| \overrightarrow{F_1 A} \|$$

(par symétrie)

$$= \| \overrightarrow{A' A} \| \quad (\text{les points } A', F \text{ et } A \text{ étant colinéaires})$$

$$= 2 \| \overrightarrow{OA} \|$$

(par symétrie)



D'où $\| \overrightarrow{OA} \| = \frac{\sigma}{2} = \alpha$. La constante α est la

longueur du demi-grand axe.

FIGURE A.5

Le triangle ΔOBF_2 étant rectangle en O , on a, en vertu du théorème de Pythagore,

$$\| \overrightarrow{OB} \| = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 - f^2} = \sqrt{\alpha^2 - f^2} = \beta.$$

La longueur du demi-petit axe est donc β .

En résumé, l'équation canonique de l'ellipse s'écrit comme suit :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

où α et β sont les longueurs des deux demi-axes (voir la figure A.5).

A.1.3 LE TYPE HYPERBOLE

Une hyperbole est une courbe dans un plan, constituée de l'ensemble des points $P(x, y)$ dont la différence des distances à deux points fixes F_1 et F_2 est constante. On nomme ces deux points les **foyers**. La démarche pour obtenir l'équation d'une hyperbole est similaire à celle qui mène à l'équation d'une ellipse, mais légèrement plus compliquée. L'équation canonique de l'hyperbole est

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (\text{voir la figure A.6}).$$

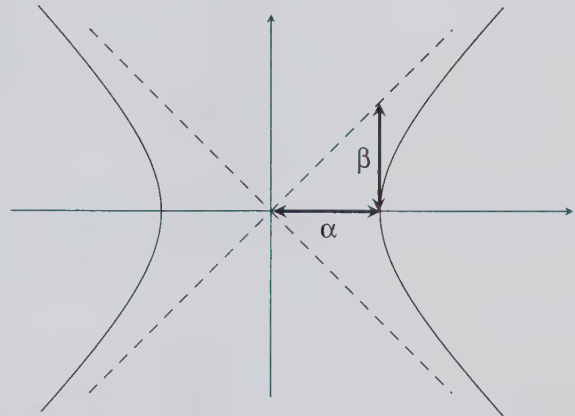


FIGURE A.6

A.2 L'ÉQUATION GÉNÉRALE D'UNE CONIQUE

On peut trouver les équations des coniques translatées à partir des équations canoniques des trois formes de conique. Chaque point $\tilde{P}$ de la conique translatée est de la forme

$$\tilde{P} = P + \vec{v},$$

où P est un point de la conique initiale, et $\vec{v}$, le vecteur de la translation. La conique translatée est l'ensemble des points $\tilde{P}(x, y)$ tels que $\tilde{P} - \vec{v} = P$ appartient à la conique initiale. Autrement dit, si $\vec{v} = (x_0, y_0)$, les points de la conique translatée sont les points $\tilde{P}(x, y)$ tels que le point $P(x - x_0, y - y_0)$ appartient à la conique initiale (voir la figure A.7).

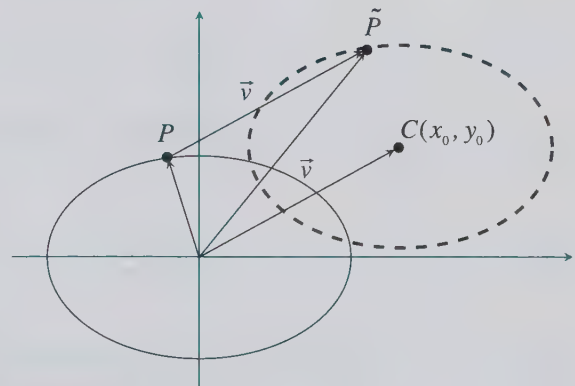


FIGURE A.7

Si la conique initiale est l'une des coniques canoniques, centrées à l'origine, étudiées à la section A.1, alors l'équation de la conique translatée par le vecteur $\vec{v} = (x_0, y_0)$ sera,

- pour la parabole, $y - y_0 = \alpha(x - x_0)^2$,
- pour l'ellipse, $\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y - y_0)^2}{\beta^2} = 1$,
- pour l'hyperbole, $\frac{(x - x_0)^2}{\alpha^2} - \frac{(y - y_0)^2}{\beta^2} = 1$.

La forme de ces équations a l'avantage de mettre en évidence certaines informations géométriques, comme le centre. En développant ces expressions polynomiales, on obtient

- pour la parabole $y - y_0 = \alpha(x - x_0)^2$, l'équation $ax^2 + 0y^2 + cx + dy + e = 0$,

■ pour l'ellipse $\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\beta^2} = 1$, l'équation $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$,

■ pour l'hyperbole $\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} - \frac{(y-y_0)^2}{\beta^2} = 1$, l'équation $ax^2 - by^2 + cx + dy + e = 0$.

Dans ces expressions, a et b sont des constantes positives, et c , d et e , des constantes quelconques.

Pour faire le processus inverse, c'est-à-dire partir de la forme $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ et retrouver la forme canonique de la conique, il suffit de faire une complétion de carré.

EXEMPLE

Pour savoir quel type de conique est représenté par l'équation $2x^2 - 4y^2 + 6x - 16y = 12$, on doit faire une complétion de carré :

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4y^2 + 6x - 16y - 12 &= 2(x^2 + 3x) - 4(y^2 + 4y) - 12 \\ &= 2\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) - 4(y^2 + 4y + 4 - 4) - 12 \\ &= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 4(y + 2)^2 - \frac{9}{2} + 16 - 12 \\ &= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 4(y + 2)^2 - \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Si l'on met cette dernière équation sous la forme canonique

$$\frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{(y + 2)^2}{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = 1,$$

il devient plus clair que la conique est une hyperbole centrée en $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$.

Si on a une équation de la forme $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$, on ne peut pas décrire précisément la conique sans faire la complétion de carré comme dans l'exemple précédent. Par contre, on peut quand même y lire directement le type de la conique. Pour bien voir ceci, regardons ce qui se passe après la complétion de carré, dans le cas où $ab \neq 0$:

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 + C = 0.$$

La constante C est difficile à déterminer sans faire la complétion de carré. Par contre, si on met cette dernière équation sous la forme canonique, on obtient dans le cas $C \neq 0$,

$$\frac{a(x - x_0)^2}{-C} + \frac{b(y - y_0)^2}{-C} = 1.$$

Si a et b sont de signes différents, on a une hyperbole. Si a et b sont de même signe, on a deux possibilités. Si $-\frac{a}{C}$ est positif, on a une ellipse et si $-\frac{a}{C}$ est négatif, on a l'ensemble vide³. C'est pour cette raison que le type ellipse inclut l'ensemble vide.

3. Car la somme de deux nombres négatifs ne peut pas donner 1.

En résumé, en tenant compte du fait que la réflexion par rapport à l'axe d'équation $x = y$ ne change pas la forme de la conique⁴, on peut conclure comme suit :

si une conique est décrite par une équation de la forme

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0,$$

alors,

- si $ab = 0$, la conique est de type parabole ;
- si $ab > 0$, la conique est de type ellipse ;
- si $ab < 0$, la conique est de type hyperbole.

A.2.1 LE PROBLÈME

Dans notre démarche pour la mise en équation des coniques, nous avons choisi des repères dont les axes de coordonnées étaient des axes de symétrie des coniques. Outre la symétrie de l'équation obtenue pour chaque type de conique, ce choix de repère fait en sorte que l'équation obtenue ne possède pas de terme en xy . Or, la forme générale d'un polynôme du deuxième degré est

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$$

A priori, cela pourrait vouloir dire que certains polynômes du deuxième degré représentent autre chose qu'une conique. Dans les faits, ce n'est pas le cas et nous verrons bientôt pourquoi.

Si l'on veut utiliser les résultats de la section A.2 pour caractériser les coniques à l'aide du signe du coefficient de x^2 et de celui de y^2 , il faudra trouver un changement de repère qui va faire disparaître le terme en xy .

A.3 FORME QUADRATIQUE

À la suite de notre petite exploration des coniques et de leurs équations, on peut remarquer que la partie du deuxième degré du polynôme semble contenir de l'information sur la forme de la conique. Pour le moment, cette information est un peu floue en raison du terme en xy , et l'objectif de cette section est de la clarifier.

DÉFINITION Forme quadratique

Une **forme quadratique** est un polynôme homogène du deuxième degré, c'est-à-dire un polynôme dont tous les monômes ont un degré total de 2.

EXEMPLE

Les polynômes suivants sont des formes quadratiques.

- $x^2 + y^2$
- $4x^2 - 5xy + 8y^2$
- $\pi xy - y^2$
- $4xy - zy + z^2 + 7y^2$

4. Cela revient à dire que si on remplace x par y et y par x dans les équations, on ne change pas la forme de la conique.

La forme la plus générale d'une forme quadratique à deux variables est $ax^2 + bxy + cy^2$, et on peut écrire ceci matriciellement comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax + \frac{b}{2}y \\ \frac{b}{2}x + cy \end{pmatrix} \\ &= \left(x \left(ax + \frac{b}{2}y \right) + y \left(\frac{b}{2}x + cy \right) \right) \\ &= (ax^2 + bxy + cy^2). \end{aligned}$$

EXEMPLE

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ est la matrice associée à la forme quadratique $2x^2 + 12xy - 5y^2$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x + 6y \\ 6x - 5y \end{pmatrix} \\ &= (x(2x + 6y) + y(6x - 5y)) \\ &= (2x^2 + 12xy - 5y^2). \end{aligned}$$

On peut donc associer à une forme quadratique une matrice 1×1 de la forme $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$, où la matrice $\mathbf{X}_{2 \times 1}$ est la matrice des variables et la matrice $\mathbf{A}_{2 \times 2}$, une matrice symétrique. Si la matrice $\mathbf{A}$ était diagonale, la forme quadratique associée n'aurait pas de terme en xy et nous serions en mesure de déterminer la conique représentée. Pour résoudre ce problème, il va donc falloir diagonaliser la matrice $\mathbf{A}$, et cela, sans pour autant changer la forme de la conique.

Comment faire pour changer l'équation d'une conique sans toutefois en changer la forme ? On a vu à la section A.1 que l'équation d'une conique est étroitement liée au choix du repère. Il suffirait donc de faire subir une transformation linéaire à la base pour obtenir l'équation de la conique dans un nouveau repère. Idéalement, on devrait choisir une transformation linéaire qui ne change pas la forme, c'est-à-dire une similitude.

Avant de voir les changements de variables, il convient de noter que, à l'instar de la forme quadratique, on peut modéliser une expression polynomiale $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ du deuxième degré comme suit :

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (f).$$

On peut écrire cette expression de manière plus compacte, soit $\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{B} \mathbf{X} + C$.

A.3.1 CHANGEMENT DE VARIABLE

Regardons maintenant comment faire un changement de variable à l'aide d'une matrice. Considérons la base standard $\mathcal{S} = \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle$, ainsi que la nouvelle base $\mathcal{B} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. Supposons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'écrivent dans la base standard comme $\vec{u} = (u_1, u_2)_{\mathcal{S}}$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)_{\mathcal{S}}$. Soit les coordonnées d'un point $(x, y)_{\mathcal{S}}$ écrit dans la base $\mathcal{S}$. Cherchons les coordonnées de ce point dans la nouvelle base, c'est-à-dire

$$(x, y)_{\mathcal{S}} = \tilde{x}\vec{u} + \tilde{y}\vec{v} = (\tilde{x}, \tilde{y})_{\mathcal{B}}.$$

En développant légèrement cette dernière équation, on voit naturellement apparaître le calcul matriciel⁵:

$$\begin{aligned} (x, y)_{\mathcal{S}} &= \tilde{x}\vec{u} + \tilde{y}\vec{v} \\ &= \tilde{x}(u_1, u_2) + \tilde{y}(v_1, v_2) \\ &= (\tilde{x}u_1 + \tilde{y}v_1, \tilde{x}u_2 + \tilde{y}v_2) \\ &= \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En écrivant matriciellement le changement de base, on obtient

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{S}}$, $\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$, on peut récrire le changement de base,

ou si on veut, le changement de variable, de manière plus compacte :

$$X = M\tilde{X}.$$

Revenons à la forme quadratique et observons ce qui se passe lorsqu'on fait le changement de variable $X = M\tilde{X}$:

$$\begin{aligned} X^T A X &= (M\tilde{X})^T A M\tilde{X} \\ &= \tilde{X}^T M^T A M\tilde{X} \\ &= \tilde{X}^T (M^T A M) \tilde{X}. \end{aligned}$$

Si $X^T A X = (1)$ est l'équation de la conique dans le repère $\mathcal{S}$, son équation dans le nouveau repère est $\tilde{X}^T (M^T A M) \tilde{X} = (1)$. La matrice $M^T A M$ représente la forme quadratique de la conique à la suite du changement de variable. La vérification que cette matrice est symétrique est laissée en exercice.

5. Il y a un abus de notation à la dernière égalité pour éviter que des subtilités techniques n'alourdissent inutilement le texte.

EXEMPLE

Considérons la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, qui s'écrit aussi $xy = 1$, faisant apparaître la forme quadratique $xy = 1$ (voir la figure A.8). Appliquons à cette forme le changement de variable

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}_B$$

correspondant à une rotation de 45° . L'équation $xy = 1$ s'écrit matriciellement

$$X^T A X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1).$$

Après le changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{X}^T (M^T A M) \tilde{X} &= \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = (1). \end{aligned}$$

Dans ce nouveau repère, la conique s'écrit $\frac{\tilde{x}^2}{2} - \frac{\tilde{y}^2}{2} = 1$ et est une hyperbole.

A.3.2 DIAGONALISATION

Notre objectif est de trouver un changement de variable pour lequel la matrice associée à la forme quadratique est diagonale.

$$M^T A M = D$$

En d'autres termes, on cherche un changement de variable qui va faire disparaître le terme en xy . Dans l'exemple précédent, la rotation d'un angle de 45° pouvait se déduire de la connaissance de $y = \frac{1}{x}$. Dans un contexte où l'on ne connaît pas nécessairement la forme de la conique, comment faire pour trouver la matrice M qui diagonalisera la matrice A ? On cherche M telle que

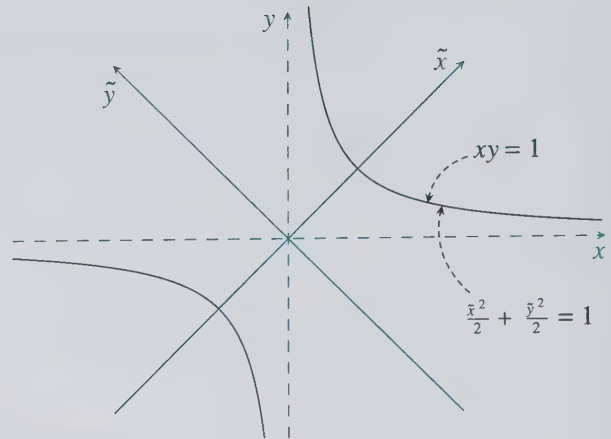


FIGURE A.8

$$\mathbf{M}^T \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \mathbf{M} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Pour s'assurer que le changement de variable ne change pas la forme de la conique, on s'en tient aux rotations puisqu'elles sont des isométries⁶. On cherche donc une matrice de rotation $\mathbf{R}_\theta$ telle que

$$\mathbf{R}_\theta^T \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Comme nous l'avons vu à la fin de la section A.2, on peut déterminer la forme de la conique à l'aide du produit $d_1 d_2$ des coefficients de $\tilde{x}^2$ et de $\tilde{y}^2$. On peut calculer ce produit, sans même trouver l'angle qui détermine le changement de variable, à l'aide du déterminant. Pour voir ceci, il suffit de calculer le déterminant de chaque côté de la dernière égalité :

$$\begin{aligned} d_1 d_2 &= \begin{vmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{vmatrix} = \det \left(\mathbf{R}_\theta^T \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \mathbf{R}_\theta \right) \\ &= \det(\mathbf{R}_\theta^T) \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} \det(\mathbf{R}_\theta) \\ &= \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = \frac{4ac - b^2}{4}. \end{aligned}$$

Puisque c'est le signe de ce produit, $\frac{4ac-b^2}{4}$, qui nous intéresse, on peut le multiplier par 4 pour obtenir $4ac - b^2$, qu'on appelle **discriminant**. On peut récrire le critère établi à la section A.2 à l'aide du discriminant :

- si $4ac - b^2 = 0$, la conique est de type parabole ;
- si $4ac - b^2 > 0$, la conique est de type ellipse ;
- si $4ac - b^2 < 0$, la conique est de type hyperbole.

EXEMPLE

L'équation du deuxième degré $4x^2 - 5xy + 2y^2 = 8$ représente une ellipse, car

$$4ac - b^2 = 4(4)(2) - (-5)^2 = 7 > 0.$$

6. Une isométrie est une transformation qui préserve les distances.

Trouvons maintenant la matrice de rotation qui diagonalisera la forme quadratique. Pour simplifier l'écriture, prenons un vecteur unitaire $\vec{u} = (u, v) = (\cos \theta, \sin \theta)$. On a alors

$$\begin{aligned} R_{\theta}^T A R_{\theta} &= \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} au + \frac{b}{2}v & -av + \frac{b}{2}u \\ \frac{b}{2}u + cv & -\frac{b}{2}v + cu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} au^2 + buv + cv^2 & -auv + \frac{b}{2}(u^2 - v^2) + cuv \\ -auv + \frac{b}{2}(u^2 - v^2) + cuv & av^2 - buv + cu^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour que cette matrice soit diagonale, il suffit que $-auv + \frac{b}{2}(u^2 - v^2) + cuv = 0$.

En modifiant légèrement cette dernière équation, on obtient $2uv(a - c) = (u^2 - v^2)b$.

Puisque les constantes a , b et c sont données par la forme quadratique et qu'on peut supposer que $b \neq 0$, car sinon la matrice est déjà diagonale, on peut retrouver l'angle du changement de variable par

$$\frac{a - c}{b} = \frac{u^2 - v^2}{2uv} = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{2 \cos \theta \sin \theta} = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \cot 2\theta.$$

Comme n'importe quel angle 2θ dont la cotangente égale $\frac{a-c}{b}$ fera l'affaire, on peut toujours choisir un angle 2θ dans l'intervalle $]0, \pi[$. Les valeurs 0 et π sont exclues car, puisque $b \neq 0$, la cotangente en cause est toujours un nombre réel bien défini. Et, si $2\theta \in]0, \pi[$, il s'ensuit que $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $u, v > 0$.

À ce stade, on est en mesure de trouver la matrice de rotation qui diagonalise la matrice associée à la forme quadratique en isolant θ dans l'égalité $\cot 2\theta = \frac{a-c}{b}$. Bien qu'on soit en mesure de trouver l'angle à l'aide des fonctions trigonométriques inverses, nous allons opter pour une approche plus vectorielle. Une représentation de $\cot 2\theta$ est illustrée à la figure A.9, et nous permet de construire le vecteur $\vec{w} = (\cot 2\theta, 1)$. Si on trouve le vecteur $\vec{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$, on obtiendra indirectement la matrice de rotation. Utilisons le fait que les diagonales d'un losange correspondent aux bissectrices du losange. Le vecteur $\vec{s}$ défini par

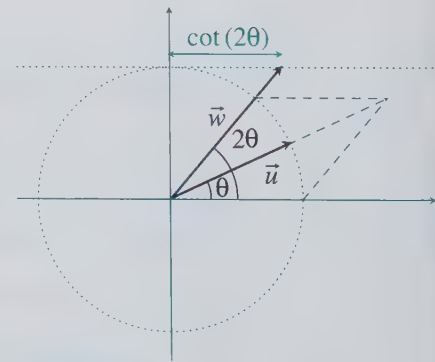


FIGURE A.9

$$\vec{s} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} + \vec{i}$$

bissecte l'angle 2θ , et par suite, $\vec{u} = \frac{\vec{s}}{\|\vec{s}\|}$. Si on prend $\vec{w} = \left(\frac{a-c}{b}, 1\right)$, on obtient

$$\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \left(\frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}} \right) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$$

et, finalement, l'on trouve⁷

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \left(\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}, \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}}}, \sqrt{1 - \frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}}} \right) \\ &= (\cos \theta, \sin \theta). \end{aligned}$$

Étant donné une équation polynomiale de la forme $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.

Si l'on veut obtenir l'équation canonique translatée de cette conique, il suffit de faire le changement de variable défini par la rotation qu'on vient de voir :

$$(\mathbf{R}_\theta \tilde{\mathbf{X}})^T \mathbf{A}(\mathbf{R}_\theta \tilde{\mathbf{X}}) + \mathbf{B}(\mathbf{R}_\theta \tilde{\mathbf{X}}) + \mathbf{C} = (0).$$

Puis, on fait la complétion de carré comme à la section A.2.

A.3.3 ROTATION ET TRANSLATION DE CONIQUES

À la sous-section précédente, on ne s'est attardé qu'à la forme quadratique d'un polynôme du deuxième degré. Géométriquement, les formes quadratiques représentent des coniques centrées à l'origine. Si on veut obtenir, à l'aide des matrices, l'équation d'une conique décentrée, on peut soit translater la conique, soit translater le repère. On peut voir à la figure A.10 comment on obtient le même résultat avec ces deux approches.

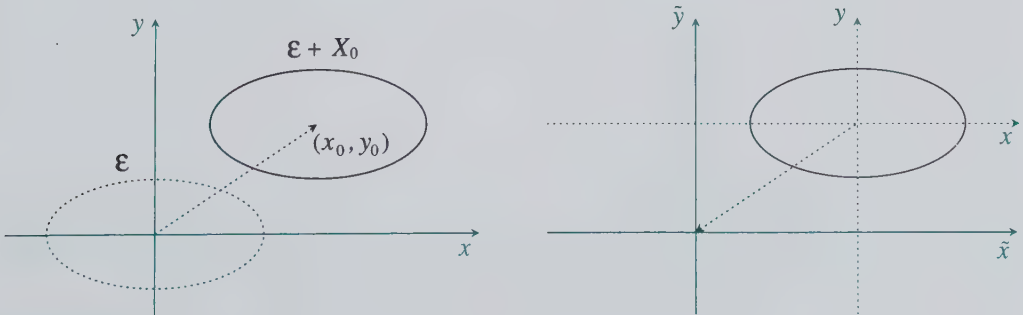


FIGURE A.10

7. Voir l'exercice 6 de la section 2.1 du chapitre 2.

Pour obtenir une conique centrée en (x_0, y_0) , il suffit de faire le changement de repère

$$X = \tilde{X} - X_0.$$

EXEMPLE

Pour trouver l'équation de l'hyperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ centrée en $(2, -3)$, il suffit de faire le changement de repère $(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y}) - (2, -3) = (\tilde{x} - 2, \tilde{y} + 3)$. D'où

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{x} - 2 & \tilde{y} + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} - 2 \\ \tilde{y} + 3 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{(\tilde{x} - 2)^2}{9} - \frac{(\tilde{y} + 3)^2}{4} \right) = (1). \end{aligned}$$

On peut aussi faire subir une rotation à une conique. Encore une fois, on peut soit faire tourner la conique, soit faire tourner le repère. La figure A.11 illustre le fait que pour tourner une conique d'un angle θ , il faut tourner le repère de $-\theta$.

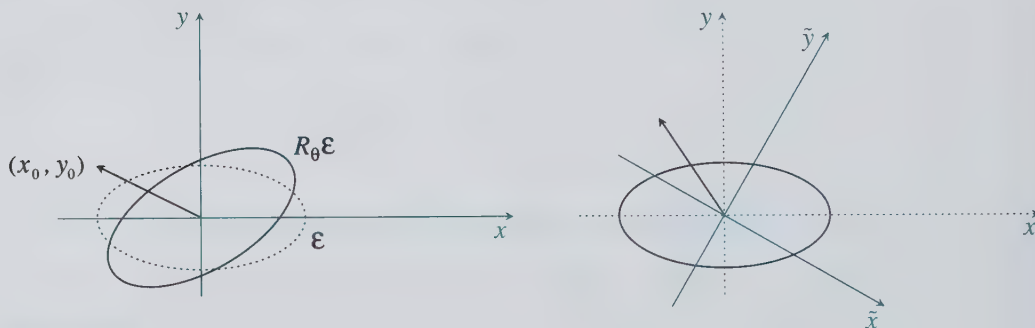


FIGURE A.11

À partir d'une conique donnée sous la forme canonique, on peut obtenir l'équation (non canonique) de cette conique tournée d'un angle θ et centrée en (x_0, y_0) . Pour effectuer le changement de repère approprié, il faut remarquer que la translation aussi doit subir la rotation (voir la figure A.11). Le changement de repère est donc

$$X = R_{(-\theta)}(\tilde{X} - X_0).$$

EXEMPLE

Pour trouver l'équation de l'ellipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ tournée d'un angle de 30° et centrée en $(-1, 5)$ (voir la figure A.12), on peut faire le changement de variable $X = R_{(-30^\circ)}(\tilde{X} - X_0)$ et on obtient que la conique dans le nouveau repère satisfait l'équation

$$\begin{aligned} X^T M X &= \left(R_{(-30^\circ)}(\tilde{X} - X_0) \right)^T M \left(R_{(-30^\circ)}(\tilde{X} - X_0) \right) \\ &= (\tilde{X} - X_0)^T \left(R_{(-30^\circ)}^T M R_{(-30^\circ)} \right) (\tilde{X} - X_0) \\ &= (\tilde{X} - X_0)^T \tilde{M} (\tilde{X} - X_0) = (1). \end{aligned}$$

Commençons par trouver la matrice $\tilde{M}$:

$$\begin{aligned}\tilde{M} &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 13 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Donc, l'équation de l'ellipse est

$$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} \tilde{x}+1 & \tilde{y}-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}+1 \\ \tilde{y}-5 \end{pmatrix} = (1),$$

c'est-à-dire, en développant,

$$13(\tilde{x}+1)^2 + 6\sqrt{3}(\tilde{x}+1)(\tilde{y}-5) + 7(\tilde{y}-5)^2 = 16.$$

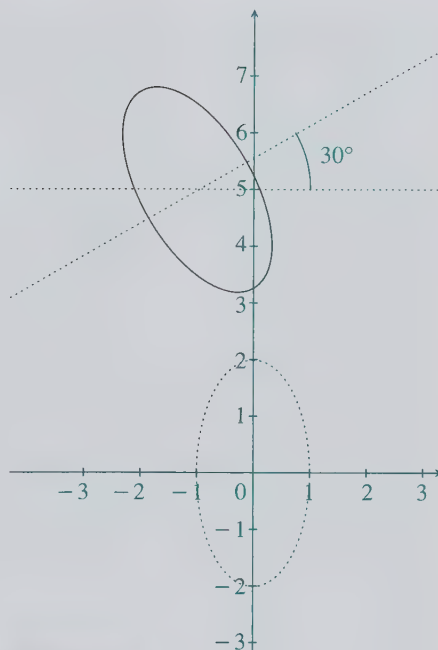


FIGURE A.12

EXERCICES

1. Faites les complétions de carrés pour déterminer la conique représentée par l'équation donnée.

- a) $2x^2 - 5y^2 + 4x - 3y + 7 = 0$
- b) $3x^2 + 2y^2 + x - 8y + 2 = 0$
- c) $4y^2 - 5x + 3y - 6 = 0$

2. Écrivez les équations du deuxième degré suivantes sous forme matricielle.

- a) $3x^2 - 4xy + 5y^2 + 3x - 5y + 11 = 0$
- b) $8x^2 + 12xy - 7y^2 + 8x + 6y - 3 = 0$
- c) $16x^2 + 8xy + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$

3. Utilisez le discriminant pour déterminer quels types de coniques les équations de la question 2 représentent.

4. Trouvez l'équation polynomiale de la conique obtenue de l'intersection du cône d'équation $C : z^2 = x^2 + y^2$ et du plan d'équation $P : 2x + 5y - z = 10$, et utilisez le discriminant pour déterminer le type de conique.

5. Démontrez que si A est une matrice symétrique et M , une matrice quelconque, alors $B = M^T A M$ est une matrice symétrique.

6. Pour chaque matrice symétrique suivante, trouvez une rotation R_θ telle que la matrice $R_\theta^T A R_\theta$ est diagonale.

$$a) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 5\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

7. Montrez qu'un changement de variable défini par une rotation de 45° fait disparaître le terme en xy d'une forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$ si et seulement si $a = c$.

8. Diagonaliser une matrice a d'autres applications que celle vue dans ce chapitre. L'une d'elles est de simplifier le calcul des puissances d'une matrice.

a) Utilisez le fait que les matrices de rotation sont des matrices orthogonales pour démontrer que si $R_\theta^T A R_\theta = D$, où D est une matrice diagonale et $n \in \mathbb{N}$, alors $R_\theta^T A^n R_\theta = D^n$.

b) Démontrez que si $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale, alors $D^n = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 \\ 0 & d_2^n \end{pmatrix}$.

c) Utilisez les résultats obtenus en a) et b) pour calculer A^{10} si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

9. On a vu à la section A.3.2 comment trouver la matrice de rotation qui diagonalise la matrice associée à une forme quadratique. Nous allons voir comment trouver cette matrice de rotation, mais à l'aide des vecteurs propres.

a) Soit A , une matrice symétrique, et R_θ , telle que $R_\theta^T A R_\theta = D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ soit diagonale. Utilisez le fait

que les matrices de rotation sont des matrices orthogonales pour démontrer que $A R_\theta = R_\theta D$.

b) À l'aide du résultat obtenu en a), démontrez que les vecteurs $\vec{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $\vec{u}_\perp = (-\sin \theta, \cos \theta)$ sont des vecteurs propres pour la matrice A et trouvez les valeurs propres associées.

c) La diagonalisation de matrices à l'aide des vecteurs propres n'est pas restreinte aux matrices symétriques. Inspirez-vous des questions a) et b) pour démontrer l'affirmation suivante :

Soit $A_{2 \times 2}$, une matrice ayant pour vecteurs propres $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ de valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement, alors

$$M^{-1} A M = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}.$$

10. Trouvez l'équation des coniques décrites.

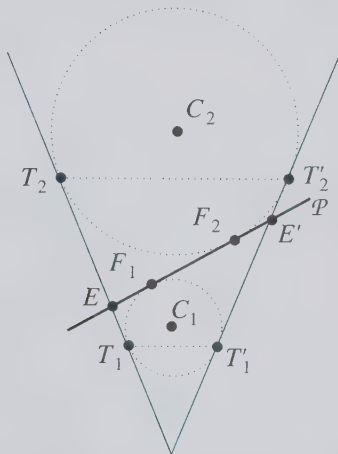
a) Une ellipse pour laquelle $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, centrée en $(-2, 5)$, et dont l'axe des foyers fait un angle de 45° avec l'axe des x .

b) Une hyperbole pour laquelle $\alpha = 3$ et $\beta = 2$, centrée en $(2, -3)$, et dont l'axe des foyers fait un angle de 30° avec l'axe des x .

11. a) Trouvez la matrice associée à une forme quadratique représentant un cercle de rayon 1 centré à l'origine.
- b) Trouvez le changement de base qui transformera ce cercle en l'ellipse $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.
- c) Utilisez la question b) pour déduire que l'aire de l'ellipse en cause est $\pi\alpha\beta$.
- d) Si $4ac - b^2 > 0$, l'équation $ax^2 + bxy + cy^2$ est celle d'une ellipse. Montrez que l'aire de cette ellipse est

$$\frac{2\pi}{\sqrt{4ac - b^2}}.$$

12. La figure ci-dessous illustre une coupe transversale, passant par l'axe de symétrie, d'un cône (en vert), coupé par un plan $\mathcal{P}$ (en noir) perpendiculaire au plan de la coupe, ainsi que les deux sphères de Dandelin (en pointillé), sphères tangentes au cône (en T_1, T'_1, T_2, T'_2) et au plan $\mathcal{P}$ (en F_1, F_2). Les points E et E' sont les points du plan de la coupe où le plan $\mathcal{P}$ rencontre le cône. Montrez que $\|\overrightarrow{EF_1}\| + \|\overrightarrow{EF_2}\| = \|\overrightarrow{E'F_1}\| + \|\overrightarrow{E'F_2}\|$: la somme des distances aux points F_1 et F_2 est la même autant pour E que pour E' . Avec un argument analogue, on peut démontrer que l'intersection du cône et du plan dans $\mathbb{R}^3$ est une ellipse dont les foyers sont les points de tangence de $\mathcal{P}$ avec les sphères de Dandelin.



CORRIGÉ

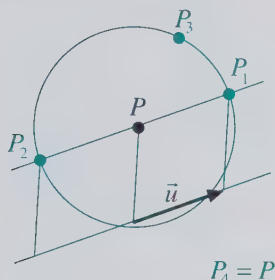
POINTS ET VECTEURS

EXERCICES 1.1

1. $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$; $\|\vec{w}\| = \sqrt{3}$

2. $\|\vec{u}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\|\vec{v}\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3.



4. a) Cercle de centre P et de rayon 2.
 b) Anneau circulaire de rayon extérieur 4 et de rayon intérieur 2.
 c) Droite parallèle à $\vec{u}$ et passant par P à laquelle on enlève le point P .
 d) Demi-droite issue de P dans la direction et le sens de $\vec{u}$ à laquelle on enlève le point P .
 e) Les deux points d'intersection du cercle de centre P et de rayon 1 avec la droite parallèle à $\vec{u}$ passant par P .
 f) Disque circulaire de rayon 1 centré en P .
5. a) Extrémités du segment de droite de longueur 6 centré en A .
 b) Cercle de rayon 3 centré en A .
 c) Sphère de rayon 3 centrée en A .
6. a) Le point milieu du segment AB .
 b) Tous les points situés sur le plan médiateur du segment AB (perpendiculaire au segment AB et passant par le point milieu entre A et B).
7. a) La règle A4 appliquée au vecteur $\overrightarrow{AA}$ donne $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$; en soustrayant $\overrightarrow{AA}$ de chaque côté de cette égalité on obtient $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
 b) Pour montrer que $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, il faut montrer que $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$; mais $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB}$ d'après la règle A4 et $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$, comme on l'a montré en a).
 c) On suppose que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; alors

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad (\text{règle A4})$$

$$= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{BD} \quad (\text{règle A4}).$$

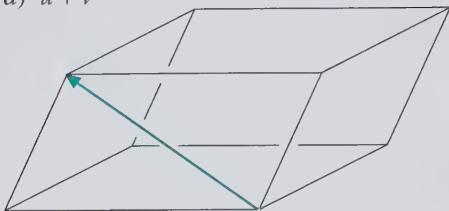
8. $k = \pm \|\vec{v}\|$

9. $t = -\frac{3}{4}$

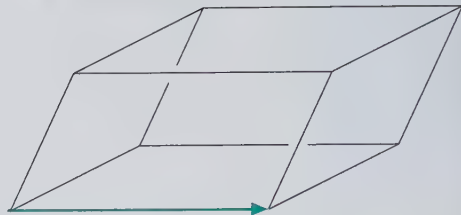
10. a) Oui. b) Non. c) Non.

11. Tous les énoncés sont vrais.

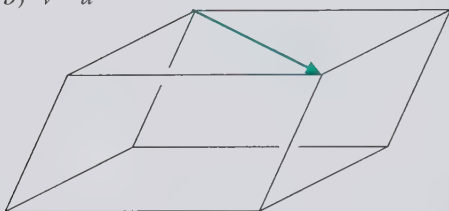
12. a) $\vec{u} + \vec{v}$



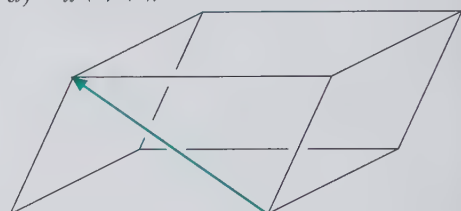
c) $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$



b) $\vec{v} - \vec{u}$



d) $-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$



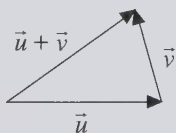
13. Les énoncés b) et d) sont faux. Tous les autres sont vrais.

14. $\vec{s} = \vec{0}$

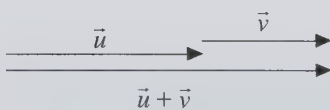
15. Vrai: $\vec{u} - \vec{a} = \vec{b} - \vec{v}$.

16. d) $\overline{CE}$

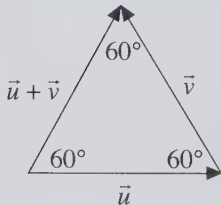
17. a)



b)



c)



EXERCICES 1.2

1. a) $\overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$$b) \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BD}$$

$$c) \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$$

2. Dans la figure de l'exercice 1, où P est le milieu de AB , on a $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CP}$, où $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{AP}$; il s'ensuit que $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PD}$.

3. Les vecteurs sont linéairement dépendants en $b)$, $d)$ et $g)$.

$$4. \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{RQ} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}$$

$$5. \overrightarrow{PQ} = (1, 0, 0) \quad \overrightarrow{AQ} = (1, 0, 1) \quad \overrightarrow{SB} = (1, -1, -1)$$

$$6. a) \vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v} \quad b) (2, -3); (-3, 2) \quad c) (0, 1)$$

$$7. (1, 2)$$

$$8. \text{D'une part, } \begin{cases} \vec{s} = k\vec{t} \Rightarrow a = kc \text{ et } b = kd \\ \Rightarrow ad - bc = kcd - kdc = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'autre part, } ad - bc = 0 \Rightarrow d(a, b) - b(c, d) = (0, 0).$$

9. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles en $b)$ et $c)$.

10.

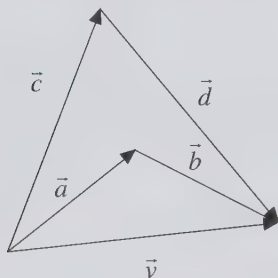
	Famille	Libre	Génératrice	Base
a)	F_1	Non	Oui	Non
b)	F_2	Oui	Oui	Oui
c)	F_3	Oui	Non	Non
d)	F_4	Oui	Oui	Oui
e)	F_5	Oui	Non	Non

11. On prend par exemple la combinaison linéaire $\vec{u} + \vec{v} = (1, 2, 3) + (3, 2, 1)$ et dans le résultat $(4, 4, 4)$ on change une composante, par exemple la dernière, et on obtient ainsi, entre autres possibilités : $\vec{w} = (4, 4, 0)$.

12.

	(Base) $3\vec{u} - 2\vec{v}$	(Pas une base) dépendants	(Pas une base) non-générateurs
$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$	$(-2, 3)$		
$\langle \vec{u}, -\vec{v} \rangle$	$(3, 2)$		
$\langle \vec{u}, 2\vec{u} \rangle$		*	*
$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{v} \rangle$	$(3, -5)$		
$\langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle$	$(5/2, 1/2)$		
$\langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{v} \rangle$		*	
$\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle$		*	*
$\langle \vec{u} + \vec{v} \rangle$			*

13. $\vec{v} = (1, 1)_{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}$ et $\vec{v} = (1, 1)_{\langle \vec{c}, \vec{d} \rangle}$.



14. a) $\vec{u} \parallel \vec{v}$; $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment alors un ensemble de vecteurs linéairement dépendants.
 b) $\vec{w} = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$; $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment alors un ensemble de vecteurs linéairement dépendants.
 c) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forment un ensemble de vecteurs linéairement indépendants (famille libre): $\vec{u}$ n'est pas parallèle à $\vec{v}$ et l'équation $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ n'a pas de solution pour a et b .

EXERCICES 1.3

1. a) $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ b) $P\left(0, \frac{1}{2}\right)$ c) $P\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ d) $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

2. $P(-4, 0)$

3. $A(8, -2)$ et $B(6, 6)$; $A = C + \left(\frac{1}{2}\overline{CD} + \frac{1}{2}\overline{BA}\right)$

4. $\vec{w} = (1, 3)$

5. $A(-3, -1)$ $B(7, -7)$ $C(-1, 11)$

6. $A(2, 3, 3)$ $C(4, 4, 4)$ $P(2, 5, -3)$

$R(2, 8, 2)$ $A = D + \left(\frac{1}{2}\overline{DB} + \frac{1}{2}\overline{SQ}\right)$

7. Les points sont colinéaires en a) seulement.

8. $\overline{AB} = (1, -1, 4)$, $\overline{AC} = (2, -3, 2)$, $\overline{AD} = (3, -4, 6)$; on voit que $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$ et donc $ABCD$ est un parallélogramme (A, B, C, D sont alors coplanaires); les côtés sont AB, AC, BD, CD et les diagonales sont AD et BC .

9. a) $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ b) $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ c) $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

10. $P(9, -2, 23)$

11. $P(1, 2, 3)$

12. $C\left(1, \frac{6}{7}, \frac{29}{7}\right)$

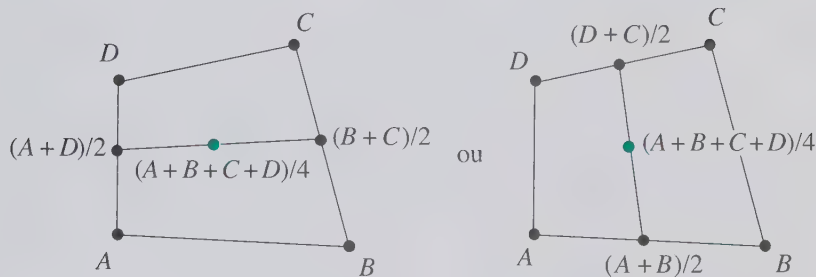
13. a) $\overline{OG} = \frac{1}{n}(\overline{OA_1} + \cdots + \overline{OA_k} + \overline{OA_{k+1}} + \cdots + \overline{OA_n})$
 $= \frac{1}{n}\left(\frac{k}{k}(\overline{OA_1} + \cdots + \overline{OA_k}) + \frac{n-k}{n-k}(\overline{OA_{k+1}} + \cdots + \overline{OA_n})\right)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n} (k \overrightarrow{OP} + (n-k) \overrightarrow{OQ}) \\
 &= \frac{k}{n} \overrightarrow{OP} + \frac{n-k}{n} \overrightarrow{OQ}
 \end{aligned}$$

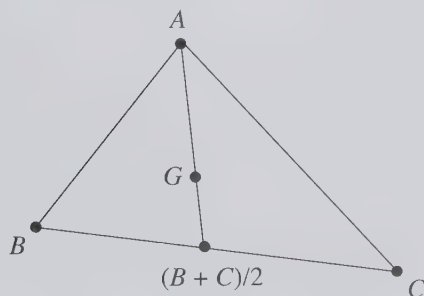
$$\begin{aligned}
 b) \overrightarrow{OG} &= \frac{k}{n} \overrightarrow{OP} + \frac{n-k}{n} \overrightarrow{OQ} - \frac{n-k}{n} \overrightarrow{OP} + \frac{n-k}{n} \overrightarrow{OP} \\
 &= \overrightarrow{OP} + \frac{n-k}{n} \overrightarrow{PQ}
 \end{aligned}$$

$$\text{ce qui donne } G = P + \frac{n-k}{n} \overrightarrow{PQ}.$$

14.



$$15. G = A + \frac{2}{3} \left(\frac{B+C}{2} \right) \text{ (voir l'exercice 13 b)}$$



$$16. \vec{v} = \left(-\frac{31}{4}, \frac{9}{4}, -\frac{29}{4} \right)$$

17. Dans l'expression qui donne le barycentre G en fonction de A, B, C, D, E, F , remplacez D par $A + \overrightarrow{AD}$, E par $B + \overrightarrow{AD}$ et F par $C + \overrightarrow{AD}$. Vous pourrez ainsi calculer $\overrightarrow{AD}$, puis obtenir :

$$D(3, -4, 13), E(-3, -5, 8), F(3, -6, 15).$$

$$18. E \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$19. C \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

$$20. a) \overrightarrow{AC} = (1/2, -1/2, 0), \overrightarrow{AD} = (1/2, 1/2, 0), \\ \overrightarrow{AE} = (1/2, 0, -1/2), \overrightarrow{AF} = (1/2, 0, 1/2).$$

$$b) B(3, 7, 9), C(5/2, 9/2, 5), D(3/2, 9/2, 7), \\ E(1/2, 11/2, 4), F(7/2, 7/2, 8).$$

LONGUEURS, DISTANCES ET ANGLES

EXERCICES 2.1

1. a) 3 b) 300 c) 7
2. a) 3 b) $5\sqrt{2}$
3. $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right); \vec{w} = \left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right).$
4. $B\left(1 - \frac{10}{\sqrt{59}}, 2 + \frac{6}{\sqrt{59}}, 3 + \frac{10}{\sqrt{59}}\right)$
5. $\vec{s} = \frac{1}{\sqrt{26}}(1, -3, 4); \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, -1, 0).$
6. $\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$ pour $-\pi \leq \theta \leq \pi.$
7. $\cos \frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}$
8. a) Cercle de rayon 4 centré en $C(-3, 2).$
 b) Sphère de rayon 4 centrée en $C(-3, 2, 0).$
 c) Droite parallèle à l'axe des y et passant par le point $A(16, 0).$
 d) Deux droites parallèles à l'axe des y et passant respectivement par le point $A(4, 0)$ et le point $B(-4, 0).$
 e) Plan perpendiculaire à l'axe des x et passant par le point $A(16, 0, 0).$
 f) Droite parallèle à l'axe des y et passant par le point $A(16, 0, 5).$
 g) Plan passant par l'axe des z et par le point $A(1, 1, 0).$
 h) Droite passant par les points $A(0, 0, 1)$ et $B(1, -1, 1).$
 i) Cercle de centre $C(-3, 1)$ et de rayon 2.
9. a) Cylindre circulaire de rayon 4 dont l'axe de symétrie est une droite parallèle à l'axe des x qui passe par le point $A(0, -3, 2).$
 b) Cylindre sinusoïdal (plaque ondulée).
 c) Cylindre parabolique (feuille parabolique).
 d) Cylindre circulaire de rayon 1 dont l'axe de symétrie est une droite qui est parallèle à l'axe des y et passe par le point $A(1, 0, -1).$
10. a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -2\}$
 b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25\}$
 c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 100\}$
11. $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 9$

EXERCICES 2.2

1.

$\vec{u} \cdot \vec{v}$	$\vec{k}$	$\vec{i} \cdot \vec{j}$	$\vec{i} \cdot \vec{i}$	$\vec{i} \cdot \vec{j} + \vec{k}$
$\vec{i}$	0	1	1	1
$\vec{i} + \vec{j}$	0	2	0	2
$\vec{k}$	1	0	0	1

2. Vous devez retrouver ces démonstrations par vous-même.

3. 180 unités d'énergie.

4. Non. Par exemple, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k}$, mais $\vec{j} \neq \vec{k}$ dans $\mathbb{R}^3$.

5. L'expression se simplifie en un scalaire qui vaut 0.

6. Si l'on désigne la moyenne pondérée par m , alors

$$m = (62; 73; 80; 58; 90) \cdot (0,10; 0,15; 0,20; 0,10; 0,45) = 79,45.$$

7. 120°

8. a) $r = 6$ b) $r = -8$ et $s = 7$

9. Angle en A : $147,53^\circ$; angle en B : $13,23^\circ$; angle en C : $19,24^\circ$

10. $c = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{73}}{6}}$

11. a) 60° b) $70,53^\circ$ c) 120°

12. $\|(\overline{AB})_{\overline{CD}}\| = \frac{24}{\sqrt{106}}$

13. $\vec{F}_1 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ et $\vec{F}_2 = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

14. $\vec{a}_t = (2, -4, 4)$ et $\vec{a}_r = (2, 6, 5)$.

15. a) $C^*(-4, 1, 3)$ b) $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{26}}(1, 3, 4)$

16. a) $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

b) $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

17. a) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$; $\cos \beta = \frac{2}{3}$; $\cos \gamma = \frac{1}{3}$.

b) Angle avec $\vec{i}$: $\alpha \approx 131,8^\circ$.

c) Angle avec $\vec{k}$: $\gamma \approx 70,53^\circ$.

18. $C = M + 10 \frac{\overline{AB}_\perp}{\|AB_\perp\|}$, où M est le barycentre de A et B; $C(3 + 4\sqrt{5}, 3 + 2\sqrt{5})$.

19. On choisit $\|\vec{u}\|$ comme unité de mesure temporaire et on considère le repère orthonormé $\langle O; \vec{u}, \vec{u}_\perp \rangle$. Dans ce repère, la pointe P du vecteur $\vec{v}$ est le point $P(\cos \theta, \sin \theta)$ (par définition du cosinus et du sinus) et le vecteur $\vec{v}$ lui-même est $(\cos \theta, \sin \theta)$, ce qui signifie que $\vec{v} = \vec{u} \cos \theta + \vec{u}_\perp \sin \theta$. Une telle égalité entre vecteurs est évidemment indépendante de l'unité choisie.

$$20. a) \overrightarrow{AC} = \cos 60^\circ \overrightarrow{AB} + \sin 60^\circ \overrightarrow{AB}_\perp; C\left(\frac{6+\sqrt{3}}{2}, \frac{5+4\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$b) C = M + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}_\perp, \text{ où } M \text{ est le barycentre de } A \text{ et } B; C\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right).$$

$$c) \overrightarrow{AC} = 6 \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \text{ où } \vec{u} = \cos 45^\circ \overrightarrow{AB} + \sin 45^\circ \overrightarrow{AB}_\perp; C\left(1 + \frac{30}{\sqrt{34}}, 3 + \frac{18}{\sqrt{34}}\right).$$

21. a) Droite passant par le point origine $O(0, 0)$ et perpendiculaire au vecteur $(\cos \theta, \sin \theta)$.

b) Droite passant par le point $P(\cos \theta, \sin \theta)$ et perpendiculaire au vecteur $(\cos \theta, \sin \theta)$.

22. L'équation s'obtient en développant l'égalité

$$\frac{\overrightarrow{OP} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})}{\|\overrightarrow{OP}\| \|\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\|} = \cos 30^\circ.$$

23. On a $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{CB} = \vec{u} - \vec{v}$; on montre ensuite que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

24. $\theta \approx 1,34$ rad ou $\theta \approx 3,66$ rad.

25. Sphère dont le centre est le barycentre des points A et B , et dont le diamètre est $\|\overrightarrow{AB}\|$.

26. Dans la figure du haut, on a (en suivant à rebours les instructions du plan original):

$$\begin{aligned} T &= \frac{P_1 + P_2}{2} = \frac{E - \overrightarrow{BE}_\perp + C + \overrightarrow{BC}_\perp}{2} \\ &= \frac{E + C}{2} + \frac{(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BE})_\perp}{2} \\ &= \frac{E + C}{2} + \frac{\overrightarrow{EC}_\perp}{2}, \end{aligned}$$

ce qui correspond au plan de la figure du bas et qui ne dépend pas du point B .

AIRES ET VOLUMES

EXERCICES 3.1

1. a) Négative. b) Positive. c) Négative.

2. a) 4,5 b) 12,5

3. -40

4. a), b), c) L'aire de l'hexagone est de 178 dans les trois cas.

5. a) Non parallèles. b) Parallèles.

6. a) Non colinéaires. b) Colinéaires.
7. La suite ordonnée $\langle (x, y), (2, 3) \rangle$ génère un parallélogramme dont l'aire orientée demeure constante lorsque le point $P(x, y)$ se déplace parallèlement au vecteur $(2, 3)$ (voir la propriété P6).
- a) Droite parallèle au vecteur $(2, 3)$ et passant par l'origine.
 b) Droite parallèle au vecteur $(2, 3)$ et passant par le point $P(4, 0)$.
 c) Droite parallèle au vecteur $(2, 3)$ et passant par le point $P(-4, 0)$.
8. a) On pose d'abord $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$; les égalités sont alors faciles à vérifier.
 b) On fait un dessin et on observe que $\|\vec{v}\| \sin \theta$ représente la hauteur du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
9. $\vec{s} \cdot \vec{t} = \Delta \langle \vec{t}, \vec{s}_\perp \rangle =$ aire orientée du parallélogramme engendré par la suite ordonnée $\langle \vec{t}, \vec{s}_\perp \rangle$.
10. a) $x = 0$ et $y = 1$.
 b) $x = -\frac{52}{9}$ et $y = -\frac{50}{9}$.
 c) $x = \frac{2}{11}$ et $y = -\frac{1}{11}$.
 d) $x = y = 0$
11. $\vec{s} = (-2, 5)_{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}$
12. a) Orientation positive. b) Orientation négative.
13. 22 unités de volume.
14. 7 unités de volume.
15. 26 unités de volume.
16. a) Non, ils sont linéairement dépendants.
 b) Oui, ils sont linéairement indépendants.
17. a) Non, ils ne sont pas coplanaires, car $\Delta \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = 5 \neq 0$.
 b) Non, ils ne sont pas coplanaires, car $\Delta \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle = 7 \neq 0$.
18. a) $k = 3$ ou $k = 0, 5$. b) Aucune valeur de k .
19. 8
20. a) $17 \text{ m}^3/\text{s}$ b) 1020 m^3
21. On pose d'abord $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ et
 $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.
22. a) Montrons, par exemple, que $\Delta \langle \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC} \rangle = \Delta \langle \overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB} \rangle$:
 $\Delta \langle \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC} \rangle = \Delta \langle \overrightarrow{GB}, -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} \rangle = \Delta \langle \overrightarrow{GB}, -\overrightarrow{GA} \rangle + \Delta \langle \overrightarrow{GB}, -\overrightarrow{GB} \rangle = \Delta \langle \overrightarrow{GB}, -\overrightarrow{GA} \rangle = \Delta \langle \overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB} \rangle$.
 b) Semblable à a).
23. a) $\frac{1}{3}c^3$
 b) $c = \frac{a}{\sqrt{2}}$; le volume du tétraèdre est de $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.
 c) Environ 11,9 cm.

$$24. a) x = \frac{36}{11}; y = -\frac{16}{11}; z = -\frac{35}{11}.$$

$$b) x = \frac{5}{15}; y = -\frac{6}{15}; z = -\frac{1}{15}.$$

$$25. a) r_1 + r_2 = 6; r_1 + r_3 = 4; r_2 + r_3 = 5.$$

$$b) r_1 = \frac{5}{2}$$

$$26. a) r_1 + r_3 = 6; -r_1 + r_2 = 3; r_2 - r_3 = 5.$$

$$b) r_1 = 4$$

$$27. 0 = \Delta \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \quad [\text{D2}]$$

$$= \Delta \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \Delta \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \Delta \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \Delta \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \quad [\text{D4}]$$

$$= \Delta \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \Delta \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \quad \text{CQFD}$$

28. L'aire du triangle ABC est la valeur absolue de $\frac{1}{2} \Delta \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$\text{Or, } \frac{1}{2} \Delta \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}. \text{ Il est facile de vérifier (par simple calcul des}$$

$$\text{déterminants) l'égalité } \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

$$\text{On pourrait aussi voir dans } \mathbb{R}^3 \text{ le déterminant } \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \text{ comme le volume d'un}$$

prisme triangulaire d'une unité de hauteur, dont la valeur coïncide alors numériquement avec l'aire de sa base triangulaire.

EXERCICES 3.2

1. a) Non définie.

d) Nombre.

g) Non définie.

b) Nombre.

e) Nombre.

h) Nombre.

c) Vecteur.

f) Vecteur.

i) Non définie.

2. a) Non parallèles.

b) Parallèles.

$$3. \vec{u}_1 = \frac{1}{7}(6, 3, 2); \vec{u}_2 = -\frac{1}{7}(6, 3, 2).$$

$$4. E(5, 4, 7)$$

$$5. 5\sqrt{3}$$

$$6. \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$7. \frac{1}{2}$$

8. L'aire de l'hexagone : $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ unités d'aire.

9. La hauteur h du tétraèdre est la même que la hauteur du parallépipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$, à partir du sommet A :

$$h = \frac{\text{volume du parallépipède}}{\text{aire de la base du parallépipède}} = \frac{156}{5\sqrt{22}}.$$

10. $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, 1)$ et $u_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, 1)$.

11. C'est la droite passant par l'origine et parallèle à $\vec{v}_0$.

12. C'est la droite passant par (x_0, y_0, z_0) et parallèle à $\vec{v}_0$.

13. a) $\sqrt{14}$ unités d'aire. b) 15 unités de volume.

14. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2 \theta = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{u} & \vec{u} \cdot \vec{v} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} & \vec{v} \cdot \vec{v} \end{vmatrix}$

15. $\vec{X} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 3, 0)$, $\vec{Y} = -\frac{1}{7}(6, 2, 3)$, $\vec{Z} = \frac{1}{7\sqrt{10}}(-9, -3, 20)$.

16. L'aire S du triangle ABC est de $S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \|(bc, ac, ab)\|$. D'où l'on en déduit que :

$$S^2 = \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ac}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab}{2}\right)^2 \quad \text{CQFD}$$

17. a) Mis bout à bout, ces trois vecteurs forment une boucle (c'est le triangle de départ tourné de 90°) : la somme des vecteurs d'une boucle est nulle.

b) Dans l'équation $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_2 + \vec{n}_3 \cdot \vec{n}_3 - 2(-\vec{n}_2) \cdot \vec{n}_3$, on observe que $(-\vec{n}_2) \cdot \vec{n}_3 = \|\vec{n}_2\| \|\vec{n}_3\| \cos \theta$, où θ est l'angle situé entre $-\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ qui coïncide avec l'angle au sommet opposé à l'hypoténuse. De plus, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_1$ est le carré de la longueur de l'hypoténuse et $\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_2$ et $\vec{n}_3 \cdot \vec{n}_3$ sont les carrés des longueurs des deux autres côtés.

18. a) $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4 = (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}) + ((\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \wedge (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})) + (\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) = \dots = \vec{0}$.

b) $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_1$ est le carré de l'aire S_1 de la face ABC , tandis que $\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_2$, $\vec{n}_3 \cdot \vec{n}_3$ et $\vec{n}_4 \cdot \vec{n}_4$ sont les carrés des aires S_2 , S_3 et S_4 des trois autres faces triangulaires. D'autre part, $-2(-\vec{n}_2) \cdot \vec{n}_3 = -2\|\vec{n}_2\| \|\vec{n}_3\| \cos \theta_{23} = -2S_2 S_3 \cos \theta_{23}$, où θ_{23} est l'angle dièdre entre les faces de vecteurs normaux $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$; $-2(-\vec{n}_2) \cdot \vec{n}_4 = -2\|\vec{n}_2\| \|\vec{n}_4\| \cos \theta_{24} = -2S_2 S_4 \cos \theta_{24}$, où θ_{24} est l'angle dièdre entre les faces de vecteurs normaux $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_4$; $-2(-\vec{n}_3) \cdot \vec{n}_4 = -2\|\vec{n}_3\| \|\vec{n}_4\| \cos \theta_{34} = -2S_3 S_4 \cos \theta_{34}$, où θ_{34} est l'angle dièdre entre les faces de vecteurs normaux $\vec{n}_3$ et $\vec{n}_4$. L'équation

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_2 + \vec{n}_3 \cdot \vec{n}_3 + \vec{n}_4 \cdot \vec{n}_4 - 2(-\vec{n}_2) \cdot \vec{n}_3 - 2(-\vec{n}_2) \cdot \vec{n}_4 - 2(-\vec{n}_3) \cdot \vec{n}_4$$

s'écrit donc $S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2S_2 S_3 \cos \theta_{23} - 2S_2 S_4 \cos \theta_{24} - 2S_3 S_4 \cos \theta_{34}$, ce qui est la (jolie) loi des cosinus, version 3D.

DROITES ET PLANS

EXERCICES 4.1

1. a) $(x, y) = (-1, 4) + t(4, -3)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$b) \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-3}$$

$$c) 3x + 4y = 13$$

$$2. a) \vec{n} = (3, -2) \quad b) \vec{v} = (2, 3)$$

$$3. a) \vec{n} = (a, b)$$

$$b) \vec{v} = (-b, a)$$

c) $\mathcal{D}$ est transformée en une droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$.

$$4. a) i) p = 2 \quad ii) \text{Aucune valeur.} \quad iii) p \neq 2 \quad iv) p = -2$$

$$b) i) \text{Aucune valeur.} \quad ii) p = \frac{1}{7} \quad iii) p \neq \frac{1}{7} \quad iv) p = -7$$

5. $n_1 = (5, 1)$ et $n_2 = (1, 3)$, si θ désigne l'angle entre ces deux droites, alors

$$\cos \theta = \frac{(5, 1) \cdot (1, 3)}{\sqrt{26}\sqrt{10}} \approx 0,496$$

et donc, $\theta \approx 60,26^\circ$.

$$6. a) \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad b) \frac{11\sqrt{17}}{17} \quad c) \frac{3\sqrt{26}}{13}$$

7. Il suffit de faire les substitutions appropriées.

$$8. a) \mathcal{D}_1: -x + y = 2; \mathcal{D}_2: x + y = 18.$$

$$b) G(8, 10)$$

$$c) F = G + t\overrightarrow{BA}_\perp, \text{ où } t \text{ est positif et est tel que } \|\overrightarrow{AF}\| = \|\overrightarrow{AD}\|; \text{ cela donne } F(7, 32; 3, 90).$$

$$d) \sqrt{20}$$

$$9. \text{Équation vectorielle: } (x, y, z) = (2, 1, -1) + t(-1, -1, 6), t \in \mathbb{R}.$$

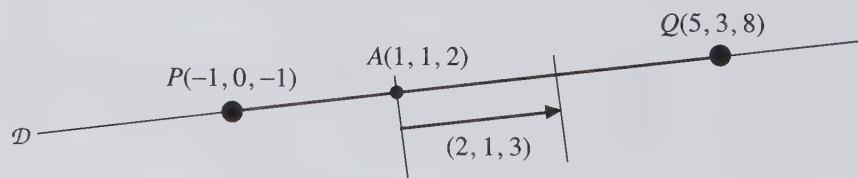
$$\text{Équations paramétriques: } \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Équations symétriques: } \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{6}.$$

10. a) En posant $k = 0$, puis $k = 1$, on obtient les points $A(1, 1, 2)$ et $B(3, 2, 5)$.

b) Par exemple: $C(3, 1, 2)$ et $D(1, 0, 2)$.

c) On obtient un segment de droite allant du point $P(-1, 0, 1)$ au point $Q(5, 3, 8)$.



d) $\mathcal{D}$ rencontre le plan des x et des y en $E\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$; $\mathcal{D}$ rencontre le plan des x et des z en

$F(-1, 0, -1)$; $\mathcal{D}$ rencontre le plan des y et des z en $G\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

e) $\mathcal{D}$ ne rencontre aucun des trois axes de coordonnées.

$$11. \frac{x-1}{2} = y-1 = \frac{z-2}{3}$$

$$12. \quad a) \frac{x+1}{3} = \frac{y-1/2}{-1} \quad b) \frac{y-1/2}{-1} = \frac{z-2}{5} \quad c) \frac{x+1}{3} = \frac{z-2}{5}$$

13. Deux droites parallèles distinctes.

14. $P(1, -2, 5)$

15. a) $m = -6$ et $n = 3$. b) $n = 2m - 3$, où $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3/2\}$.

$$16. \sqrt{\frac{69}{14}}$$

17. $d(O, \mathcal{D}) = \sqrt{\frac{165}{29}}$; le point situé le plus près de l'origine est $P\left(\frac{38}{29}, -\frac{46}{29}, \frac{35}{29}\right)$.

$$18. \sqrt{\frac{53}{29}}$$

19. $A(4, 2, 4)$

20. Les vitesses vectorielles de P et de Q sont respectivement

$$\vec{v}_P = 4 \frac{\overrightarrow{P_0 Q_0}}{\|\overrightarrow{P_0 Q_0}\|} = \frac{4}{7}(-6, -3, 2) \text{ et } \vec{v}_Q = 6 \frac{\overrightarrow{Q_0 P_0}}{\|\overrightarrow{Q_0 P_0}\|} = \frac{6}{7}(6, 3, -2),$$

où P_0 et Q_0 sont les positions des points P et Q à l'instant $t = 0$.

a) Le point de collision est $A\left(-\frac{1}{5}, -\frac{8}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

b) La collision a lieu lorsque $P_0 + t\vec{v}_P = Q_0 + t\vec{v}_Q$, ce qui donne $t = \frac{28}{5}$ secondes.

21. a) Le point M est sur la droite d'équation $(x, y, z) = \left(1, 3, \frac{7}{2}\right) + t\left(0, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Oui.

c) Non.

$$22. (2y + 2z - 10)^2 + (z - 2x - 1)^2 + (2x + y - 4)^2 = 144$$

23. a) $P_1(-1, 4, 4)$, $P_2(-8, 0, -2)$, $P_3(10, 5, 0)$.

$$b) \|\vec{v}_1\| = \sqrt{14}, \|\vec{v}_2\| = \sqrt{21}, \|\vec{v}_3\| = \sqrt{14}.$$

$$c) 3\sqrt{2}$$

d) P_1 et P_3 suivent des trajectoires parallèles.

$$e) 9\sqrt{\frac{3}{2}}$$

f) Les trajectoires de P_2 et de P_3 sont gauches; la distance entre ces trajectoires est de $\frac{3\sqrt{6}}{10}$.

g) Elles sont sécantes au point $A(-5, 6, 10)$.

h) Non: P_1 passe par le point d'intersection à l'instant $t = 2$, tandis que P_2 passe par ce point à l'instant $t = 3$.

i) Si l'on désigne l'angle recherché par θ , alors $\cos \theta = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ et $\theta = 45,58^\circ$.

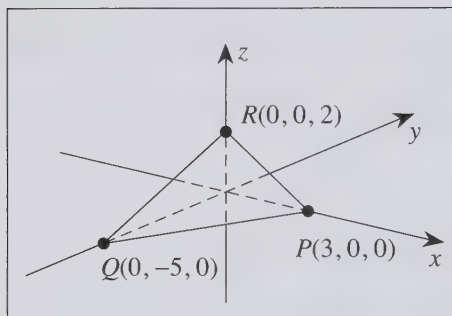
j) À $t = 5,36$ secondes.

24. En $P(-2, 3, 6)$ et $Q(6, 2, 3)$.

25. En $P(3, 4, -1)$ et $Q(0, -5, 4)$.

EXERCICES 4.2

1. a) Le point $A(1, 2, -1)$.
 b) La droite qui est parallèle au vecteur $\vec{v} = (-3, 4, -4)$ et qui passe par le point $B(-3, 5, -1)$.
 c) Le segment de droite allant du point $C(11, -9, 7)$ au point $B(-3, 5, -1)$.
 d) La région comprenant l'intérieur et la frontière du parallélogramme de sommets $P(4, -2, 3)$, $Q(-10, 12, -5)$, $R(-13, 16, -9)$ et $S(1, 2, -1)$.
2. a) Par exemple, avec $k = 0$ et $m = 0$, on aura $A(-3, -5, 2)$, puis avec $k = 1$ et $m = 1$, on aura $B(6, 10, 2)$.
 b) Par exemple : $\vec{u} = (6, 5, -2)$, $\vec{v} = (3, 10, 2)$ et $\vec{w} = (3, 5, 0)$.
 c) $\vec{n} = (10, -6, 15)$
 d) Non.
 e) Non.
 f) $P(3, 0, 0)$, $Q(0, -5, 0)$ et $R(0, 0, 2)$.



3. $2x + 6y - 5z = -1$
4. a) $\vec{n} = (2, -3, 1)$
 b) Par exemple : $\vec{u} = (3, 2, 0)$ et $\vec{v} = (0, 1, 3)$.
5. Une équation normale de $\mathcal{P}$: $y = 2$.
6. a) On observe simplement que les coordonnées des points $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$ satisfont l'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
 b) $\vec{n} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right)$
 c) Dans $\mathbb{R}^2$, l'équation réduite de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $P(a, 0)$ et $Q(0, b)$ est $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ si $ab \neq 0$.
 d) $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$
 e) L'équation réduite est $\frac{x}{-2/3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-6} = 1$. Ce plan coupe l'axe des x en $x = -\frac{2}{3}$, l'axe des y en $y = 1$, l'axe des z en $z = -6$.
7. $2x + y + 2z = 5$

8. a) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont parallèles.

b) $\mathcal{D}$ est contenue dans $\mathcal{P}$.

c) $\mathcal{D}$ est sécante à $\mathcal{P}$ au point $A\left(-\frac{28}{5}, -\frac{17}{5}, \frac{16}{5}\right)$.

9. a) $k = \frac{29}{3}$

b) $k = -3$

10. a) $P\left(-\frac{8}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{24}{7}\right)$

b) $49,79^\circ$

11. a) Plans parallèles.

b) Plans sécants selon la droite d'équation vectorielle $(x, y, z) = (1, 2, 0) + t(2, -3, -2)$, $t \in \mathbb{R}$.

12. $x + y + 2z = 2$

13. a) $x + y + z = 2$

b) $2x + 3y + 4z = 4$

14. Soit $\mathcal{P}$, un plan contenant $\mathcal{D}$, et $P(x_0, y_0, z_0)$, un point de $\mathcal{D}$. Le vecteur normal de $\mathcal{P}$ est alors une combinaison linéaire des vecteurs normaux de $\mathcal{P}_1$ et de $\mathcal{P}_2$: $\vec{n} = \lambda(a, b, c) + \mu(A, B, C)$. L'équation de $\mathcal{P}$ est donc

$$[\lambda(a, b, c) + \mu(A, B, C)] \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Après calculs et en tenant compte des équations $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ et $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$, qui découlent du fait que $P(x_0, y_0, z_0)$ est un point commun aux deux plans, on obtient

$$\lambda(ax + by + cz) + \mu(Ax + By + Cz) = \lambda d + \mu D$$

pour l'équation de $\mathcal{P}$.

15. $80,72^\circ$

16. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

17. $\frac{3\sqrt{14}}{7}$

18. $A\left(\frac{18}{11}, \frac{32}{11}, 0\right)$

19. $C\left(\frac{2}{33}, -\frac{146}{33}, -\frac{179}{33}\right)$

20. $x^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = \frac{50}{7}$

21. $\theta = \arccos \frac{1}{3} \approx 70,53^\circ$

22. $c = \sqrt{\frac{12}{5}}$

QUESTIONNAIRE SUR LA PERCEPTION SPATIALE

- | | | |
|-----------------------|------------------------|------------------------|
| 1. Généralement faux. | 7. Toujours vrai. | 13. Toujours vrai. |
| 2. Généralement vrai. | 8. Généralement faux. | 14. Toujours faux. |
| 3. Généralement vrai. | 9. Toujours vrai. | 15. Généralement faux. |
| 4. Toujours vrai. | 10. Généralement faux. | 16. Toujours vrai. |
| 5. Toujours faux. | 11. Généralement vrai. | 17. Généralement faux. |
| 6. Toujours vrai. | 12. Toujours faux. | |

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

EXERCICES 5.1

- Les opérations a) et c) sont élémentaires ou équivalentes à une séquence d'opérations élémentaires.
- Pour que la transformation (iii) – (i) donne un système d'équations équivalent, il faut soustraire de l'équation (iii) la nouvelle équation (i) telle qu'elle a été modifiée et non l'équation (i) initiale. Ainsi on aura (iii) – (i) : $x + 0y = 1$.

$$3. a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } a, b \in \mathbb{R}.$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } a \in \mathbb{R}.$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } a, b \in \mathbb{R}.$$

$$4. a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{rang } 4.$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{rang } 1.$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{rang } 2.$$

$$d) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{rang } 3.$$

5. a) Non l -équivalentes. b) Non l -équivalentes. c) l -équivalentes.
6. Ces vecteurs ne sont pas générateurs de $\mathbb{R}^3$, car le rang de la matrice A est $2 < 3$.
7. a) $k = 6$
 b) i) Rang = 1 pour $k = 1$; ii) rang = 2 pour $k = -2$; iii) rang = 3 pour $k \neq 1$ et $k \neq -2$.
8. a) Deux droites distinctes sécantes.
 b) Deux droites distinctes parallèles.
 c) Deux droites confondues.
 d) Trois droites distinctes sécantes 3 à 3.
 e) Trois droites distinctes sécantes 2 à 2, mais non 3 à 3.
 f) Deux droites confondues, sécantes à une troisième.
9. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$
10. $x = -\frac{1}{9} - \frac{14}{9}k$, $y = -\frac{2}{9} - \frac{1}{9}k$ et $z = k$, $k \in \mathbb{R}$.
11. $a = 2$, $b = 3$, $c = 6$ et $d = 1$.
12. $(x, y, z) = (6, 2, -2)$ ou $\left(\frac{584}{123}, \frac{92}{123}, \frac{-356}{123}\right)$.
13. a) Si P_1 , P_2 et P_3 sont confondus, alors $A \sim \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 1.

b) Si P_1 , P_2 et P_3 sont colinéaires sans être confondus, alors on peut supposer sans perte de généralité que $P_1 \neq P_2$. Puisque P_1 , P_2 et P_3 sont colinéaires, on a $(x_3, y_3) = (x_1, y_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ 0 & t(x_2 - x_1) & t(y_2 - y_1) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où les deux premières lignes sont non nulles. Le rang de A est alors 2.

c) On a $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ 0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$, où la sous-matrice $\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$ est dans ce cas

de rang 2, car ses vecteurs lignes $\overrightarrow{P_1P_2}$ et $\overrightarrow{P_1P_3}$ sont non nuls et non parallèles.

Les points $P_1(1, 2)$, $P_2(3, 4)$ et $P_3(5, 6)$ sont colinéaires.

14. Semblable à l'exercice 13.

15. a) $-2x - 4y + x^2 + y^2 + 5 = r^2$; $-6x - 2y + x^2 + y^2 + 10 = r^2$; $-4x - 12y + x^2 + y^2 + 40 = r^2$.

b) $-2x - 4y + t = -5$; $-6x - 2y + t = -10$; $-4x - 12y + t = -40$; $x = \frac{55}{18}$, $y = \frac{65}{18}$ et $r = \frac{\sqrt{2210}}{18}$.

16. a) En utilisant z comme paramètre, on obtient $x = 5 - z$ et $y = 1 + z$.
 b) Puisque $x = a^2$, $y = ab$ et $z = b^2$, on doit avoir $xz = y^2$, ce qui équivaut à $(5 - z)z = (1 + z)^2$; cette dernière équation a pour solution $z = 1$ ou $z = \frac{1}{2}$. Ainsi, avec $z = 1$, on trouve deux solutions du système de départ: $(a, b) = \pm(2, 1)$. Puis, avec $z = \frac{1}{2}$, on trouve deux autres solutions: $(a, b) = \pm\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

EXERCICES 5.2

- Les trois plans se rencontrent 2 à 2 selon trois droites parallèles, mais ne se rencontrent pas 3 à 3.
- Les trois plans se rencontrent 3 à 3 selon la droite définie par les équations paramétriques

$$x = 1 + 2k \quad y = -1 + k \quad z = 4k \quad (k \in \mathbb{R}).$$
- Un plan est sécant à deux autres plans parallèles et distincts.
- Les trois plans sont sécants en un point: $A(1, 2, 3)$.
- a) $k \neq 2$; b) aucune valeur; c) $k = 2$.
- Les trois plans se rencontrent 2 à 2 selon trois droites parallèles, mais ne se rencontrent pas 3 à 3.
- $a = 3$ et $b = -1$; $x = 3 + 2k$, $y = 1 + k$, $z = k$ ($k \in \mathbb{R}$).

MATRICES

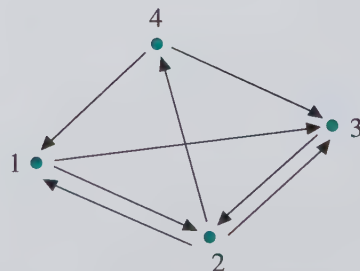
EXERCICES 6.1

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, en suivant l'ordre alphabétique des sommets.

2. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3. a) 6 b) 5 c) -1 d) -4

4. a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b)



5. a) 4×3 b) 4×2 c) 4×2

6. Pour montrer que $X + X^T$ est une matrice symétrique, il suffit de vérifier que $(X + X^T)^T = X + X^T$ et pour montrer que $X - X^T$ est une matrice antisymétrique, il suffit de vérifier que $(X - X^T)^T = X - X^T$. Pour montrer que toute matrice X est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, il suffit d'observer que

$$X = \frac{1}{2}(X + X^T) + \frac{1}{2}(X - X^T).$$

7. Par la définition de la transposée A^T de A , le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de A^T , ce qui nous assure que A et A^T sont compatibles dans l'ordre AA^T . De même, le nombre de colonnes de A^T est égal au nombre de lignes de A , ce qui nous assure que A et A^T sont compatibles dans l'ordre $A^T A$.

8. a) $\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) (45) d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

9. Vrai.

10. a) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

11. a) $x_1 = 2$ et $x_2 = 1$. b) $x_1 = -1$ et $x_2 = -3$. c) $x_1 = \frac{k}{2}$ et $x_2 = k$, $k \in \mathbb{R}$.

12. Faux. Par exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13. a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. c) Même exemple qu'en a).

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. d) Même exemple qu'en b).

14. a) Si $A_{m \times r}$ et $B_{s \times n}$ sont compatibles dans l'ordre AB , alors $r = s$. Or, B^T est de format $n \times s$ et A^T est de format $r \times m$. Donc B^T et A^T sont compatibles pour la multiplication dans l'ordre $B^T A^T$.

- b) Si A est de format $m \times p$ et B est de format $p \times n$, alors AB est de format $m \times n$ et $(AB)^T$ est de format $n \times m$; de même, $B^T A^T$ est de format $n \times m$.

- c) L'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice $(AB)^T$
 = l'élément situé sur la ligne j et la colonne i de la matrice AB ,
 = le produit scalaire de la ligne j de A et de la colonne i de B ,
 = le produit scalaire de la colonne j de A^T et de la ligne i de B^T ,
 = le produit scalaire de la ligne i de B^T et de la colonne j de A^T ,
 = l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice $B^T A^T$.

On montre que l'élément de la i -ième ligne et de la j -ième colonne de $(AB)^T$ est le même que celui de la matrice $B^T A^T$: l'élément de la i -ième ligne et de la j -ième colonne de $(AB)^T$

est, par la définition de la transposée, l'élément de la j -ième ligne et de la i -ième colonne de $\mathbf{AB}$, ce qui est le produit scalaire de la j -ième ligne de $\mathbf{A}$ avec la i -ième colonne de $\mathbf{B}$. Par ailleurs, l'élément de la i -ième ligne et de la j -ième colonne de $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ est le produit scalaire de la i -ième ligne de $\mathbf{B}^T$ avec la j -ième colonne de $\mathbf{A}^T$. Or, la i -ième ligne de $\mathbf{B}^T$ est la i -ième colonne de $\mathbf{B}$ et la j -ième colonne de $\mathbf{A}^T$ est la j -ième ligne de $\mathbf{A}$.

15. E_2 et E_3 ont la meilleure note : 72,5.

16.
$$\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$$

17. a) $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0,8500 & 0,6000 \\ 0,1500 & 0,4000 \end{pmatrix}$, où 0,8500 est la probabilité qu'il fasse soleil le surlendemain

d'une journée ensoleillée, 0,6000 est la probabilité qu'il fasse soleil le surlendemain d'une journée pluvieuse, 0,1500 est la probabilité qu'il pleuve le surlendemain d'une journée ensoleillée et 0,4000 est la probabilité qu'il pleuve le surlendemain d'une journée pluvieuse.

b)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$$

c) 0,8

18. a) $x = \frac{27}{52}$, $y = \frac{11}{52}$ et $1 - (x + y) = \frac{7}{26}$.

b) Il y aura 54 autos en E_1 , 22 en E_2 et 28 en E_3 .

19.
$$\mathbf{A}^{16} \approx \begin{pmatrix} 0,51923213 & 0,51922738 & 0,51923080 \\ 0,21153759 & 0,21154063 & 0,21153844 \\ 0,26923028 & 0,26923198 & 0,26923076 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 27/52 & 27/52 & 27/52 \\ 11/52 & 11/52 & 11/52 \\ 14/52 & 14/52 & 14/52 \end{pmatrix}.$$

EXERCICES 6.2

1. a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}.$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},$
 $\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix},$
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}.$

2. Seule la matrice donnée en c) est élémentaire.

3. Par exemple: $\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; ces matrices ne sont pas uniques.

$$4. a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5. a) \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$$

$$6. \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8. a) X = A^{-1}(D - C)B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) X = (A - I)^{-1}(-B) = -\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c) X = -B(A - I)^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$9. a) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICES 6.3

$$1. a) 0$$

$$b) 0$$

$$c) -16$$

$$d) -1$$

$$2. a) -18$$

$$b) \frac{6}{7}$$

$$3. a) \text{ Vrai.}$$

$$c) \text{ Vrai.}$$

$$e) \text{ Vrai.}$$

$$g) \text{ Vrai.}$$

$$b) \text{ Faux.}$$

$$d) \text{ Faux.}$$

$$f) \text{ Faux.}$$

$$h) \text{ Vrai.}$$

4. Ce système a toujours une et une seule solution, quel que soit k .

$$5. a) \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$b) \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$6. \operatorname{adj} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$7. a) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. a) L'élément situé dans la ligne i et la colonne j de AA^T est le produit scalaire $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j$ qui vaut 1 lorsque $i = j$ et qui vaut $\cos \theta_{ij}$ autrement.

$$b) \det B = \det(AA^T) = \det A \det A^T = 0$$

c) On choisit pour $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ les quatre vecteurs normaux aux quatre faces du tétraèdre, unitaires, et pointant vers l'extérieur du tétraèdre. Dans ce cas, l'angle θ_{ij} entre les vecteurs $\vec{v}_i$ et $\vec{v}_j$ est supplémentaire à l'angle α_{ij} entre la face i et la face j du tétraèdre, et alors $\cos \theta_{ij} = -\cos \alpha_{ij}$. Il s'ensuit que

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos \alpha_{12} & -\cos \alpha_{13} & -\cos \alpha_{14} \\ -\cos \alpha_{21} & 1 & -\cos \alpha_{23} & -\cos \alpha_{24} \\ -\cos \alpha_{31} & -\cos \alpha_{32} & 1 & -\cos \alpha_{34} \\ -\cos \alpha_{41} & -\cos \alpha_{42} & -\cos \alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} -1 & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} & \cos \alpha_{14} \\ \cos \alpha_{21} & -1 & \cos \alpha_{23} & \cos \alpha_{24} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & -1 & \cos \alpha_{34} \\ \cos \alpha_{41} & \cos \alpha_{42} & \cos \alpha_{43} & -1 \end{vmatrix}.$$

d) Dans ce cas, tous les angles α_{ij} sont égaux à l'angle α et on trouve la valeur de $\cos \alpha$ en résolvant l'équation

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos \alpha & \cos \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -1 & \cos \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & \cos \alpha & -1 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & \cos \alpha & \cos \alpha & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

EXERCICES 6.4

1.

Ventes
(milliards de \$)

à de	Secteur 1	Secteur 2	Ventes intermédiaires Y	Ventes externes X	Ventes totales T
Secteur 1	8,152	2,779	10,95	40	50,95
Secteur 2	6,114	5,559	11,69	30	41,69

2.

Ventes (milliards de \$)	à de	Secteur 1	Secteur 2	Ventes intermédiaires Y	Ventes externes X	Ventes totales T
	Secteur 1	8	3	11	39	50
	Secteur 2	6	6	12	33	45

3. a)

Ventes (milliards de \$)	à de	Secteur 1	Secteur 2	Ventes intermédiaires Y	Ventes externes X	Ventes totales T
	Secteur 1	3	5	8	7	15
	Secteur 2	5	1	6	4	10

b) Les coûts du secteur 1 s'élèvent à 8 milliards de dollars; ceux du secteur 2 s'élèvent à 6 milliards de dollars.

$$c) C = \begin{pmatrix} 3/15 & 5/10 \\ 5/15 & 1/10 \end{pmatrix}$$

d) c_{21} représente l'augmentation (en milliards de dollars) des ventes du secteur 2 au secteur 1 occasionnée par une augmentation totale de un milliard de dollars des ventes totales du secteur 1.

$$e) E = \frac{1}{83} \begin{pmatrix} 135 & 75 \\ 50 & 120 \end{pmatrix}$$

f) Dans le secteur 2.

g) Les ventes intermédiaires du secteur 1 augmenteraient de $\frac{127}{83}$ milliard de dollars et celles du secteur 2 de $\frac{87}{83}$ milliard de dollars.

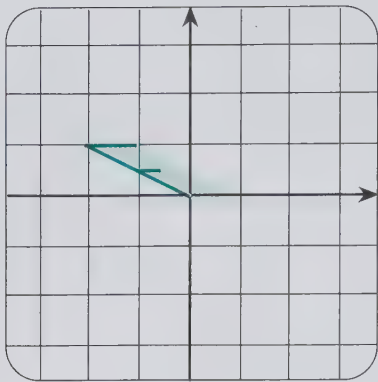


TRANSFORMATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}^2$

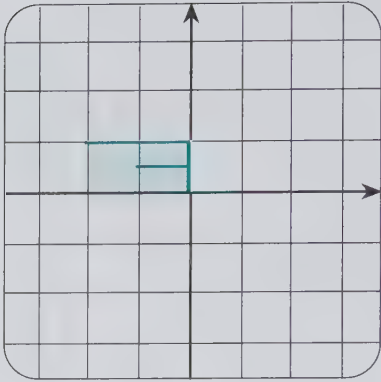
EXERCICES 7.1

1. Seule la transformation en b) est linéaire.

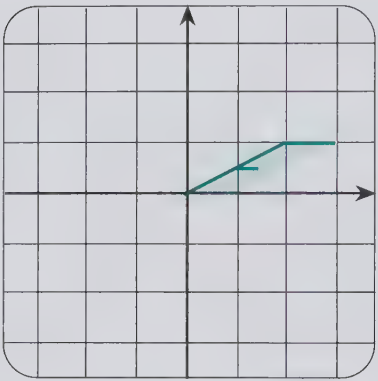
2. a)



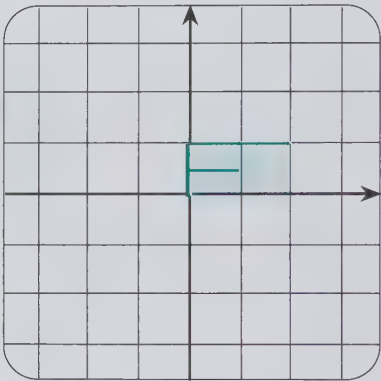
e)



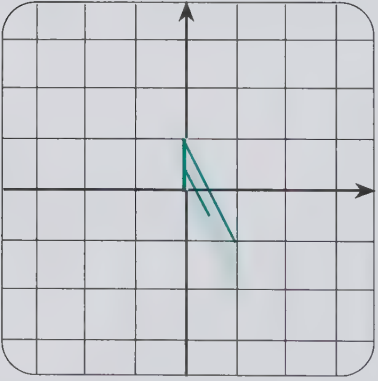
b)



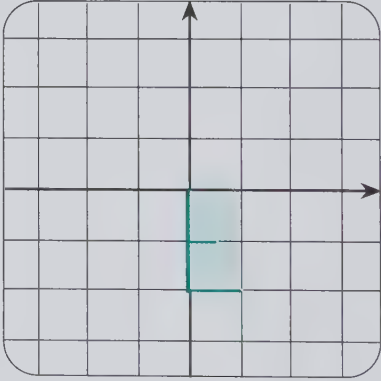
f)



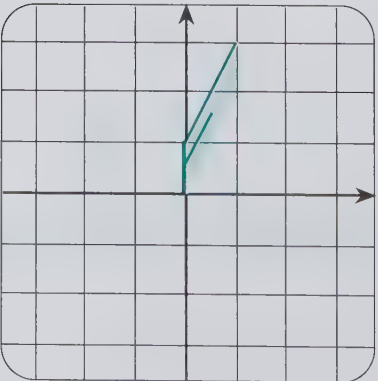
c)



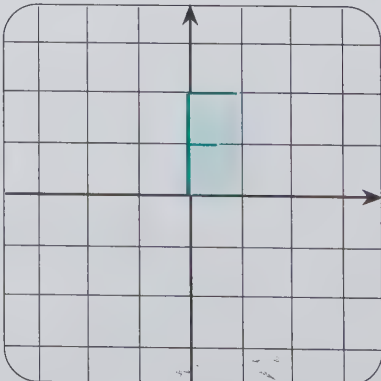
g)

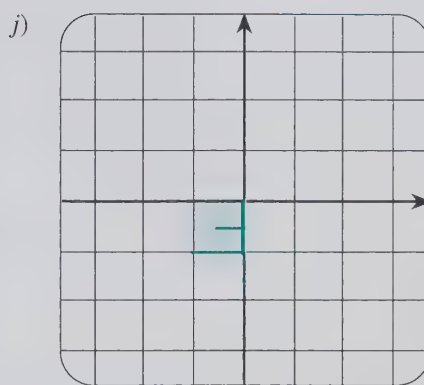
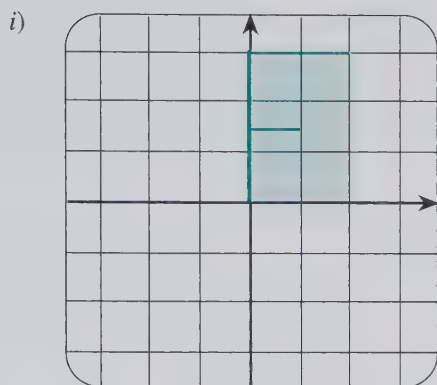


d)



h)





3. Seule T_3 pourrait être linéaire.

4. $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$M_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

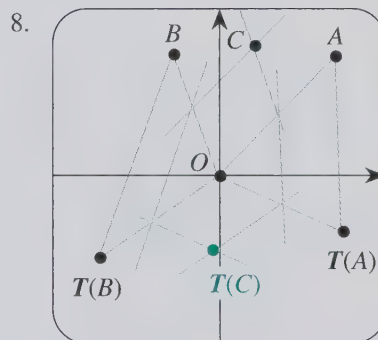
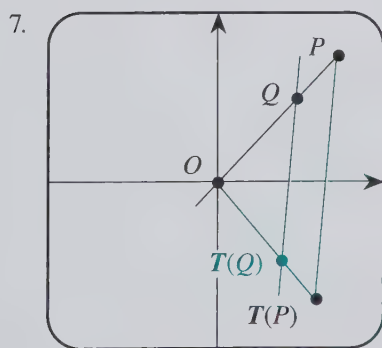
$M_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

5. a) $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$



9. $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

EXERCICES 7.2

1. a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}$

2. On suppose que M représente un étirement de facteur k dans la direction $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Alors, $M \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & -b \\ kb & a \end{pmatrix}$ et, en utilisant les déterminants des deux membres de cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned} (\det M) \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} ka & -b \\ kb & a \end{pmatrix} \\ &= k \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Après la simplification, cela donne $\det M = k$.

3. On peut écrire en fonction de k , a et b la matrice M d'étirement de facteur k dans la direction $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de même que la matrice N d'étirement de facteur $\frac{1}{k}$ dans cette direction; on peut vérifier ensuite que $MN = I$. Ces calculs sont cependant très longs. Voici un autre raisonnement: puisque $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, on a $M^{-1} \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $M^{-1} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, d'où l'on tire que $M^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/k \\ b/k \end{pmatrix}$ et $M^{-1} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, ce qui montre que M^{-1} est bien un étirement de facteur $\frac{1}{k}$ dans la direction $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

4. Il suffit de voir que $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix} = I$.

5. $\det \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k^2 - 0 = k^2$

6. $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

7. a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

8. a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

9. a) Réflexion autour de la droite qui forme un angle de $54,22^\circ$ avec l'axe des x et qui passe par l'origine.
 b) Rotation de $36,87^\circ$ autour de l'origine.
 c) Ni une rotation ni une réflexion.
10.
$$B \begin{pmatrix} \frac{5+2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5\sqrt{3}-2}{2} \end{pmatrix}$$
11. a) $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ b) $Q \begin{pmatrix} -1,6 \\ -1,2 \end{pmatrix}$
12.
$$S = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$$
13. a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
 b) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
14. a) Une même réflexion répétée un nombre pair de fois équivaut à la transformation identité ; une même réflexion répétée un nombre impair de fois équivaut à elle-même appliquée une seule fois.
 b) Tourner n fois de suite autour de l'origine d'un même angle θ équivaut à tourner une seule fois d'un angle $n\theta$.
 c) Pour effectuer une réflexion autour d'une droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine et formant un angle θ avec l'axe des x , on peut procéder ainsi : on effectue d'abord une rotation d'angle $-\theta$ autour de l'origine ($R_{-\theta} = R_\theta^{-1}$) qui amène $\mathcal{D}$ sur l'axe des x , puis on fait la réflexion autour de l'axe des x et ensuite, on refait la rotation initiale en sens inverse (R_θ), ce qui replace $\mathcal{D}$ dans sa position initiale.
 d) On peut écrire d'abord les matrices S_α , S_β et $R_{2(\beta-\alpha)}$, puis calculer le produit $S_\beta S_\alpha$ et constater qu'on obtient $R_{2(\beta-\alpha)}$.
15. a) $(R_{2\pi/k})^k = R_{k(2\pi/k)} = R_{2\pi} = I$
 b) $R_{2\pi/3} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$
 c) $R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
16. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
17. a) $Z_{r,\theta} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$; semblable pour $Z_{r,\theta}^*$.
 b) $Z_{r,\theta} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, où $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$.
 c) On procède comme en a) et en b).

18. a) Ce n'est pas une similitude.
 b) Similitude **indirecte** de rapport $\sqrt{5}$; l'axe de réflexion fait un angle de $76,72^\circ$ avec l'axe des x .
 c) Similitude **indirecte** de rapport 3; l'axe de réflexion fait un angle de 135° avec l'axe des x .
 d) Similitude **directe** de rapport 2 et d'angle -30° .
19. a) $y = x$ b) $y = 7x$ c) $y = \frac{1}{3}x$ d) $y = \frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+3}x$ ou, encore, $y = \frac{-6+5\sqrt{3}}{3}x$.
20. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -22 & -4 \\ 8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, ce qui donne $A' \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$, $B' \begin{pmatrix} -22 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C' \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.
21. a) 1 b) -1 c) k d) k^2 e) $-(k^2)$
22. 4 cm^2

EXERCICES 7.3

1. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
2. Soit M_1 , la matrice de cisaillement de facteur k dans la direction $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, et M_2 , la matrice de cisaillement de facteur k dans la direction $\vec{v} = t\vec{u} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \end{pmatrix}$. Alors, on aura
- $$M_1 \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b+ka \\ b & a+kb \end{pmatrix} \text{ et } M_2 \begin{pmatrix} ta & -tb \\ tb & ta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta & -tb+kt a \\ tb & ta+kt b \end{pmatrix}, \text{ ce qui donne } M_1 = M_2 \text{ en}$$
- factorisant puis en éliminant t dans la deuxième équation.
3. a) $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) $M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$
4. a) Appliquer n fois de suite un cisaillement de facteur k dans la direction $\vec{i}$ équivaut à appliquer une seule fois un cisaillement de facteur nk dans la direction $\vec{i}$.
 b) Appliquer n fois de suite un cisaillement de facteur k dans la direction $\vec{j}$ équivaut à appliquer une seule fois un cisaillement de facteur nk dans la direction $\vec{j}$.
 c) L'application d'un cisaillement de facteur k dans la direction $\vec{j}$ suivie (ou précédée) d'un cisaillement de facteur $-k$ dans la direction $\vec{j}$ équivaut à l'application de la transformation identité.
 d) L'application d'un cisaillement de facteur k dans la direction $\vec{i}$ suivie (ou précédée) d'un cisaillement de facteur $-k$ dans la direction $\vec{i}$ équivaut à l'application de la transformation identité.

$$\begin{aligned}
 5. \ a) \quad \mathbf{M}(\overrightarrow{OP}) - \overrightarrow{OP} &= [a\mathbf{M}(\vec{u}) + b\mathbf{M}(\vec{u}_\perp)] - [a\vec{u} + b\vec{u}_\perp] \\
 &= a\vec{u} + b(\vec{u}_\perp + k\vec{u}) - a\vec{u} - b\vec{u}_\perp \\
 &= bk\vec{u} \\
 &\parallel \vec{u} \text{ si } bk \neq 0.
 \end{aligned}$$

$$b) \quad \mathbf{M}(\vec{v}) = \mathbf{M}(k\vec{u}) = k\mathbf{M}(\vec{u}) = k\vec{u} = \vec{v}$$

$$6. \ a) \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}; \text{ on peut donc utiliser le vecteur } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ pour représenter la direction du cisaillement.}$$

$$b) \quad \mathbf{M} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et par la suite, } \mathbf{M} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$c) \quad \mathbf{M} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}; \text{ l'équation } \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donne } k = -3.$$

$$7. \ a) \quad \text{Pour faire un cisaillement de facteur } k \text{ dans la direction } \vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \text{ on effectue d'abord une rotation qui rend } \vec{u} \text{ parallèle à } \vec{i}; \text{ on applique ensuite un cisaillement de facteur } k \text{ dans la direction } \vec{i} \text{ et enfin la rotation contraire à celle du début.}$$

$$b) \quad \det \mathbf{M} = \det \left[\mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_\theta^{-1} \right] = (\det \mathbf{R}_\theta) \det \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\det \mathbf{R}_\theta^{-1}) = (1)(1)(1) = 1$$

$$c) \quad \mathbf{M}^{-1} = \left[\mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_\theta^{-1} \right]^{-1} = (\mathbf{R}_\theta^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} (\mathbf{R}_\theta)^{-1} = \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_\theta^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad \mathbf{M}^n &= \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_\theta^{-1} \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_\theta^{-1} \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_\theta^{-1} \dots \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_\theta^{-1} \\
 &= \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \mathbf{R}_\theta^{-1} \\
 &= \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} 1 & nk \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R}_\theta^{-1} \quad (\text{voir l'exercice 4 a}).
 \end{aligned}$$

$$8. \ a) \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad c) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$9. \text{ Soit } \mathbf{M}, \text{ la matrice de la projection oblique de direction } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ sur la droite } \mathcal{D} \text{ de direction } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors, } \mathbf{M} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ et donc, } \det \mathbf{M} \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ et par suite,}$$

$$\det \mathbf{M} = 0, \text{ car } \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

10. Appliquer deux fois de suite une même projection équivaut à l'appliquer une seule fois.

11. Supposons $M(\vec{u}) = \vec{u}$ et $M(\vec{u}_\perp) = \vec{0}$, où $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a alors $M \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$,

d'où l'on tire $M = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$, qui est une matrice symétrique.

EXERCICES 7.4

1. a) Le point origine O .
 b) La droite d'équation $y = mx$.
 c) La droite de direction $\vec{u}_\perp$ passant par l'origine.
 d) Le point origine O .
 e) La droite de direction $\vec{u}$ passant par l'origine.
 f) La droite $\mathcal{D}$.
2. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$ et $k = 4$.
3. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $k = 3$.
4. a) Le déterminant est 1 ; il n'y a aucune direction invariante et aucune valeur propre.
 b) Le déterminant est 1 ; tout vecteur non nul est un vecteur propre (de direction invariante) ; l'unique valeur propre est -1 .
 c) Le déterminant est -1 ; il y a deux directions invariantes : celle de l'axe de réflexion (valeur propre 1) ainsi que celle de l'axe perpendiculaire à l'axe de réflexion (valeur propre -1).
 d) Le déterminant est k ; il y a deux directions invariantes : celle de $\vec{u}$ (valeur propre k) et celle de $\vec{u}_\perp$ (valeur propre 1).
 e) Le déterminant est k^2 ; toutes les directions sont invariantes, car ici tout vecteur non nul est un vecteur propre ; l'unique valeur propre est k .
 f) Le déterminant est 1 ; seule la direction de $\vec{u}$ est invariante (valeur propre 1).
 g) Le déterminant est 0 ; il y a deux directions invariantes : celle de $\vec{u}$ (valeur propre 1) et celle de $\vec{v}$ (valeur propre 0).
5. a) Le déterminant est -1 ; le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de valeur propre -1 , et le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de valeur propre 1 ; l'axe des y constitue l'ensemble des points fixes. Cette matrice représente une **réflexion** autour de l'axe des y .
 b) Le déterminant est -9 ; le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de valeur propre 3, et le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de valeur propre -3 ; le point origine est le seul point fixe. Cette matrice représente une **similitude indirecte** de rapport 3 et d'angle nul.

- c) Le déterminant est 1 ; le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de valeur propre 1 ; l'ensemble des points fixes est l'axe des y . Cette matrice représente un cisaillement de facteur 3 dans la direction de l'axe des y .
- d) Le déterminant est 0 ; le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de valeur propre 0 et le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de valeur propre 1. La droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ constitue l'ensemble des points fixes. Cette matrice représente une projection oblique de direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$.
- e) Le déterminant est 1 ; il n'y a aucun vecteur propre, aucune valeur propre. Cette matrice représente une rotation de $\frac{3\pi}{4}$ radian autour de l'origine. Le seul point fixe est l'origine.
- f) Le déterminant est -6 ; le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de valeur propre -2 , et le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de valeur propre 3. Le point origine est le seul point fixe. Cette matrice représente une réflexion autour de la droite d'équation $y = -x$ composée avec un étirement de facteur 3 dans la direction de cette droite et un étirement de facteur 2 dans la direction orthogonale à cette même droite.
- g) Le déterminant est 1 ; le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de valeur propre 1 ; la droite d'équation $y = -x$ constitue l'ensemble des points fixes. Cette matrice représente un cisaillement de facteur -1 dans la direction $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- h) Le déterminant est -169 ; le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de valeur propre 13, et le vecteur $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de valeur propre -13 . Le point origine est le seul point fixe. Cette matrice représente une similitude indirecte de facteur 13 et d'angle $\arctan 5 \approx 78,69^\circ$.
6. a) Identité.
 b) Projection oblique de direction $\begin{pmatrix} k \\ -1 \end{pmatrix}$ sur l'axe des x .
 c) Projection orthogonale sur l'axe des y , suivie de la réflexion autour de la droite d'équation $y = x$.
 d) Projection sur le point origine.
7. a) Étirement de facteur k dans la direction de l'axe des x .
 b) Étirement de facteur k dans la direction de l'axe des y .
 c) Cisaillement de facteur k dans la direction de l'axe des x .
 d) Cisaillement de facteur $-k$ dans la direction de l'axe des y .
 e) Réflexion autour de la droite d'équation $y = x$.
8. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; la rotation de 90° autour de l'origine est donc la composée des transformations élémentaires suivantes : une réflexion autour de l'axe des x , suivie d'une réflexion autour de la droite d'équation $y = x$.

9. a) $\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: projection oblique de direction $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur l'axe des x , suivie d'un cisaillement de facteur -1 dans la direction de l'axe des y et d'un étirement de facteur 3 dans la direction de l'axe des x .
- b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: projection oblique de direction $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur l'axe des x , suivie d'un cisaillement de facteur -2 dans la direction de l'axe des y .
- c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: cisaillement de facteur 2 dans la direction de l'axe des x , suivi d'un étirement (y compris un retournement) de facteur -2 dans la direction de l'axe des y et d'un cisaillement de facteur -3 dans la direction de l'axe des y .
- d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$: étirement (y compris un retournement) de facteur -2 dans la direction de l'axe des y , suivi d'un étirement de facteur 3 dans la direction de l'axe des x et d'une réflexion autour de la droite d'équation $y = x$.

NOMBRES COMPLEXES

EXERCICES 8.1

1. a) $\operatorname{Re}(i) = 0$; $\operatorname{Im}(i) = 1$; $\|i\| = 1$; $\operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$
- b) $\operatorname{Re}(-i) = 0$; $\operatorname{Im}(-i) = -1$; $\|-i\| = 1$; $\operatorname{Arg}(-i) = \frac{3\pi}{2}$
- c) $\operatorname{Re}(1-i) = 1$; $\operatorname{Im}(1-i) = -1$; $\|1-i\| = \sqrt{2}$; $\operatorname{Arg}(1-i) = \frac{7\pi}{4}$
- d) $\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\right] = \frac{1}{2}$; $\operatorname{Im}\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\left\|\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\right\| = 1$; $\operatorname{Arg}\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\right] = \frac{\pi}{3}$
- e) $\operatorname{Re}(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i) = -\sqrt{2}$; $\operatorname{Im}(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i) = -\sqrt{2}$;
 $\|(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i)\| = 2$; $\operatorname{Arg}(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i) = \frac{5\pi}{4}$
- f) $\operatorname{Re}(-4) = -4$; $\operatorname{Im}(-4) = 0$; $\|-4\| = 4$; $\operatorname{Arg}(-4) = \pi$
- g) $\operatorname{Re}(5i) = 0$; $\operatorname{Im}(5i) = 5$; $\|5i\| = 5$; $\operatorname{Arg}(5i) = \frac{\pi}{2}$
- h) $\operatorname{Re}(4-3i) = 4$; $\operatorname{Im}(4-3i) = -3$; $\|4-3i\| = 5$; $\operatorname{Arg}(4-3i) \approx 5,64$ radians.
2. a) Demi-plan situé à droite de la droite d'équation $x = 1$ et incluant cette dernière.
- b) Bande horizontale limitée en haut par la droite d'équation $y = 1$ et limitée en bas par la droite d'équation $y = -1$, et incluant ces deux droites.
- c) Anneau circulaire fermé de centre 0 , de rayon intérieur 1 et de rayon extérieur 2 .
- d) Région du plan d'Argand comprise entre la droite d'équation $y = x$ et la droite d'équation $y = -x$ dans le premier et le quatrième quadrant.
- e) L'axe réel.
- f) L'axe imaginaire.
3. a) Cercle de centre 1 et de rayon 2 .
- b) Disque circulaire fermé de centre $-i$ et de rayon 1 .

c) Anneau circulaire fermé de centre $1 - 2i$, de rayon intérieur 1 et de rayon extérieur 2.

d) Droite médiatrice du segment d'extrémités 1 et $-i$.

n	1	2	3	4	5
i^n	i	-1	$-i$	1	i
i^{-n}	$-i$	-1	i	1	$-i$

5. a) $4 - 3i$ d) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

b) $\frac{1}{25}(-6 - 17i)$ e) $-1 - i$

c) $-\frac{1}{2}$

6. $\frac{8}{3} + \frac{7}{3}i$

7. $z_4 = z_1 + (z_3 - z_2)$

8. $z = 3 - i$

9. $z = 2 - 3i$ et $w = 1 + 4i$.

10. En a), b) et c), on remplace z par $x + iy$ et on vérifie les égalités.

11. $y = x + 1$

12. $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \text{Arg}(2 + i) + \text{Arg}(3 + i) = \text{Arg}[(2 + i)(3 + i)] = \text{Arg}(5 + 5i) = \frac{\pi}{4}$

EXERCICES 8.2

1. a) $2 \text{cis} \frac{\pi}{3}$ b) $\sqrt{2} \text{cis} \frac{5\pi}{4}$ c) $10 \text{cis} \pi$ d) $3 \text{cis} \frac{3\pi}{2}$

2. a) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ b) $-10i$ c) -3 d) $-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

3. a) $-3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$ b) 10 c) $-1 + \sqrt{3}i$ d) $0,105 + 0,994i$

4. a) -2^6 b) i c) i d) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

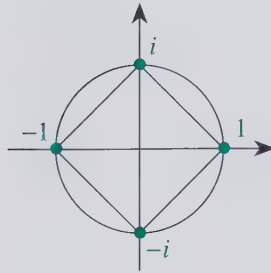
$$5. \begin{cases} \tan(\alpha + \beta) = \tan \text{Arg}[(1 + 2i)(3 + 4i)] \\ \quad = \tan \text{Arg}(-5 + 10i) \\ \quad = \frac{10}{-5} \\ \quad = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} \tan(\alpha - \beta) = \tan \text{Arg} \frac{1 + 2i}{3 + 4i} \\ \quad = \tan \text{Arg} \left[\frac{1}{25} (11 + 2i) \right] \\ \quad = \frac{2}{11} \end{cases}$$

6. $\cos 2\theta + i \sin 2\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + i(2 \cos \theta \sin \theta)$. Par suite, $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ et $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$.

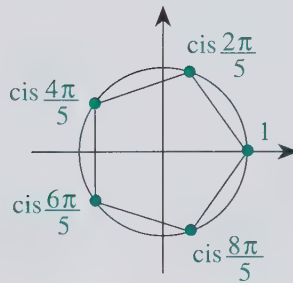
7. a) $4 \text{cis} \frac{5\pi}{6}$ et $4 \text{cis} \frac{11\pi}{6}$. b) $\frac{1}{2} \text{cis} \frac{\pi}{2}$ et $\frac{1}{2} \text{cis} \frac{3\pi}{2}$.

8. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. c) $3i$ et $-3i$.
 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$. d) $1-2i$ et $-1+2i$.

9.



10.



11. a) $(x-2i)(x+2i)$
 b) $(x-2+3i)(x-2-3i)$
 c) $(x+3+i)(x+3-i)$
 d) $(iz+1)(z+1)$
12. a) $x = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
 b) $z = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}i\right)$ ou $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}i\right)$.
 c) $z = -i$ ou $3i$, ou $-3i$.
 d) $z = 0$ ou $-i$, ou i .
13. a) et b) Ces propriétés sont immédiates sous la forme cartésienne.
 c) $r \operatorname{cis} \theta = r \cos \theta + ri \sin \theta = r \cos \theta - ri \sin \theta = r \operatorname{cis}(-\theta)$
 d), e) et f) On utilise la forme polaire et le résultat obtenu en c).

EXERCICES 8.3

1. $1+2i$ et $1-2i$.
 2. $p(z) = z^2(z-1-2i)$, $q(z) = (z^2+1)(z-1-2i)$
 3. $z = -3$
 4. Le *Coup de pouce* devrait suffire pour répondre à cette question.

5. a) $i, -1, -i$

b) $\operatorname{cis} \frac{2\pi}{5}, \operatorname{cis} \frac{4\pi}{5}, \operatorname{cis} \frac{6\pi}{5}, \operatorname{cis} \frac{8\pi}{5}$

6. $\operatorname{cis} \frac{\pi}{5}, \operatorname{cis} \frac{3\pi}{5}, \operatorname{cis} \frac{7\pi}{5}, \operatorname{cis} \frac{9\pi}{5}$

7. $2, -1+2i, -1-2i$

8. $3+i, 3-i, \frac{6}{5}$

EXERCICES 8.4

1. a) $r = \sqrt{5}, \alpha = \arctan 2 \approx 63,4^\circ$

b) $r = 3, \alpha = 180^\circ$

c) $r = 1, \alpha = 270^\circ$

2. a) $T(z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)z + \left(5 - 3\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{5}{2} - 2\sqrt{3} \right)i$

b) $T(z) = 5z + 8 - 4i$

c) $T(z) = (-1 + \sqrt{3}i)z + \sqrt{3} + 2i$

d) $T(z) = z + 2 + 5i$

3. a) $r = 2, \alpha = 180^\circ, c = \frac{1}{3}i$

b) $r = 2\sqrt{2}, \alpha = -45^\circ, c = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

4. Sous la forme polaire, on pose $z_2 - z_0 = l_2 \operatorname{cis} \alpha$ et $z_1 - z_0 = l_1 \operatorname{cis} \beta$; on aura ainsi

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{l_2 \operatorname{cis} \alpha}{l_1 \operatorname{cis} \beta} = \frac{l_2}{l_1} \operatorname{cis}(\alpha - \beta) = \frac{l_2}{l_1} \operatorname{cis} \theta.$$

5. Le nombre z qui représente le sommet A est une solution de l'équation

$$\frac{z - (3 - 2i)}{(2 + i) - (3 - 2i)} = \frac{(-1 + 2i) - (-2 + i)}{(-4 + i) - (-2 + i)},$$

d'où l'on trouve $z = 5 - 3i$.

6. a)
$$\begin{cases} T(z) = \operatorname{cis}(-\theta)[(\operatorname{cis} \theta)(z - c_1) + c_1 - c_2] + c_2 \\ \quad = z + (c_2 - c_1)[1 - \operatorname{cis}(-\theta)] \end{cases}$$

b) $T(z) = z - \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})i$

7. a)
$$\begin{cases} T(z) = \frac{1}{r}[(r(z - c_1) + c_1) - c_2] + c_2 \\ \quad = z + (c_2 - c_1)\left(1 - \frac{1}{r}\right) \end{cases}$$

b) $T(z) = z + 3,6 + 3,6i$

8. a) $r = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}$

b) $r = 5, \theta \approx 333,43^\circ$

c) $r = 3, \theta = 135^\circ$

9. En observant que $T(2) = 2$ et $T(4i) = 4i$ (ces points se trouvent sur l'axe de réflexion), on obtient $2a + b = 2$ et $-4ai + b = 4i$, ce qui donne $a = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ et $b = \frac{16}{5} + \frac{8}{5}i$.

10. Le *Coup de pouce* devrait suffire pour répondre à cette question.
 11. Le *Coup de pouce* devrait suffire pour répondre à cette question.

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES GROUPES

EXERCICES 9.1

1. a) Faux. b) Vrai. c) Vrai. d) Vrai.
 2. a) $a = 0$ b) $a = 0$ c) $a = 4$ d) $a = 6$
 3. $(16 + 1000) \equiv 8 \pmod{24}$; la montre indiquera donc 8 h.

4. Les propriétés CG1, CG2 et CG3 sont des conséquences directes de la définition de congruence modulo n .

Démonstration de la propriété CG4

Si $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$, alors

$$a = k_1n + r \text{ et } b = k_2n + r, \text{ avec } 0 \leq r < n,$$

et

$$c = k_3n + s \text{ et } d = k_4n + s, \text{ avec } 0 \leq s < n.$$

Il s'ensuit que $a + c = (k_1 + k_3)n + (r + s)$ et donc que $(a + c) \equiv (r + s) \pmod{n}$. De même, $b + d = (k_2 + k_4)n + (r + s)$ et donc $(b + d) \equiv (r + s) \pmod{n}$. Puisque $a + c$ et $b + d$ sont tous deux congrus à $r + s$ modulo n , on obtient $(a + c) \equiv (b + d) \pmod{n}$.

La démonstration de la propriété CG5 est semblable à celle de la propriété CG4.

Démonstration de la propriété CG6

- 1) On montre d'abord que $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow (a - b) \equiv 0 \pmod{n}$.

Si $a \equiv b \pmod{n}$ alors $a = k_1n + r$ et $b = k_2n + r$, avec $0 \leq r < n$. On aura donc $a - b = (k_1 - k_2)n + 0$ et donc $(a - b) \equiv 0 \pmod{n}$.

- 2) On montre ensuite que $(a - b) \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$.

Si $(a - b) \equiv 0 \pmod{n}$, alors $a - b = kn$. Soit r , le reste après la division de b par n ; alors, $b = pn + r$ et l'équation $a - b = kn$ devient $a - (pn + r) = kn$, c'est-à-dire $a = (k + p)n + r$; a et b ont donc le même reste après la division par n , soit r , et alors $a \equiv b \pmod{n}$.

5.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

et

•	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

6.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

L'inverse de 0 est 0.
 L'inverse de 1 est 3.
 L'inverse de 2 est 2.
 L'inverse de 3 est 1.

7.

•	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

Les éléments inversibles sont 1 et 5.

8. 4

EXERCICES 9.2

1. a) C'est un groupe.
 b) Ce n'est pas un groupe, car le produit matriciel de deux matrices de déterminants -1 et -1 est une matrice dont le déterminant n'est pas -1 .
 c) Ce n'est pas un groupe, car l'inverse multiplicatif d'un entier non nul autre que 1 n'est pas un entier.
 d) C'est un groupe.
 e) C'est un groupe.
2. 7
3. Supposons que $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$; sur la i -ième ligne de la table d'opération de G , on trouve :

•	a_1	a_2	$\dots$	a_n
a_i	$a_i \cdot a_1$	$a_i \cdot a_2$	$\dots$	$a_i \cdot a_n$

Pour montrer que tous les éléments de G apparaissent une seule et unique fois sur cette ligne, il suffit de montrer que $a_i \cdot a_k \neq a_i \cdot a_l$ dès que $k \neq l$. Si $a_i \cdot a_k = a_i \cdot a_l$, alors, puisque G est un groupe, on peut écrire $a'_i \cdot (a_i \cdot a_k) = a'_i \cdot (a_i \cdot a_l)$, où a'_i est l'inverse de a_i dans G , et alors, puisque l'opération $\cdot$ est associative, on obtient nécessairement $a_k = a_l$ et donc $k = l$. On procède de façon semblable pour les colonnes.

4.

•	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(Ce groupe est isomorphe au groupe des symétries d'un losange non carré.)

et

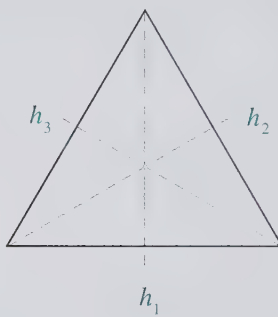
•	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

•	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

•	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e

(Ces trois groupes sont isomorphes à $\langle \mathbb{Z}_4, + \rangle$.)

5. $\langle \{1\}, \bullet \rangle$, $\langle \{1, 6\}, \bullet \rangle$, $\langle \{1, 2, 4\}, \bullet \rangle$ et $\langle \mathbb{Z}_7^*, \bullet \rangle$.
6. $\langle \{0\}, + \rangle$, $\langle \{0, 4\}, + \rangle$, $\langle \{0, 2, 4, 6\}, + \rangle$ et $\langle \mathbb{Z}_8, + \rangle$.
7. Il y a deux isomorphismes, f et g , de $\langle \mathbb{Z}_4, + \rangle$ à $\langle \mathbb{Z}_5^*, \bullet \rangle$: f est défini par $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 3$, tandis que g est défini par $g(0) = 1$, $g(1) = 3$, $g(2) = 4$ et $g(3) = 2$.
8. Le groupe des symétries du triangle équilatéral contient six éléments (six transformations) :
- I la transformation identité (rotation de 0° autour du centre du triangle);
 - R_1 la rotation de 120° autour du centre du triangle;
 - R_2 la rotation de 240° autour du centre du triangle;
 - S_1 la réflexion autour de la hauteur h_1 ;
 - S_2 la réflexion autour de la hauteur h_2 ;
 - S_3 la réflexion autour de la hauteur h_3 .



La table d'opération de ce groupe est

$\circ$	I	R_1	R_2	S_1	S_2	S_3
I	I	R_1	R_2	S_1	S_2	S_3
R_1	R_1	R_2	I	S_3	S_1	S_2
R_2	R_2	I	R_1	S_2	S_3	S_1
S_1	S_1	S_2	S_3	I	R_1	R_2
S_2	S_2	S_3	S_1	R_2	I	R_1
S_3	S_3	S_1	S_2	R_1	R_2	I

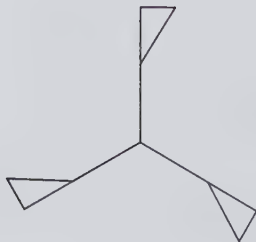
et ses sous-groupes sont

$$\langle \{I\}, \circ \rangle, \langle \{I, S_1\}, \circ \rangle, \langle \{I, S_2\}, \circ \rangle, \langle \{I, S_3\}, \circ \rangle, \langle \{I, R_1, R_2\}, \circ \rangle$$

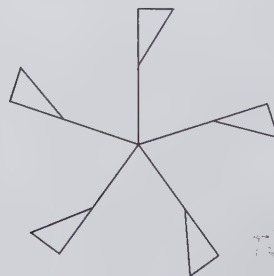
et

$$\langle \{I, R_1, R_2, S_1, S_2, S_3\} \rangle.$$

9.



10.



11. Soit a , un élément d'un groupe $\langle G, \bullet \rangle$, qui coïncide avec son propre inverse et qui est différent de l'élément neutre e de G . Alors $\langle \{e, a\}, \bullet \rangle$ est nécessairement un sous-groupe d'ordre 2 de $\langle G, \bullet \rangle$ et l'ordre de G est obligatoirement divisible par 2 (et donc pair) selon le théorème de Lagrange.
12. 1) Voir la solution de la question 3, Exercices 9.2.
 2) On montre que si $a \bullet H \cap b \bullet H \neq \emptyset$, alors $a \bullet H \subseteq b \bullet H$ et $a \bullet H \supseteq b \bullet H$.
 Soit $c \in a \bullet H \cap b \bullet H$. Alors, il y a des éléments h_1 et h_2 de H tels que $c = a \bullet h_1 = b \bullet h_2$.
 On obtient alors $a = b \bullet h_2 \bullet h_1^{-1}$, ce qui donne $a \bullet h = b \bullet h_2 \bullet h_1^{-1} \bullet h \in b \bullet H$ quel que soit $h \in H$ et donc $a \bullet H \subseteq b \bullet H$. On obtient aussi $b = a \bullet h_1 \bullet h_2^{-1}$, ce qui donne $b \bullet h = a \bullet h_1 \bullet h_2^{-1} \bullet h \in a \bullet H$ quel que soit $h \in H$ et donc $a \bullet H \supseteq b \bullet H$.

CONIQUES

EXERCICES

1. a) L'hyperbole :
$$-\frac{(x+1)^2}{\left(\sqrt{\frac{109}{40}}\right)^2} + \frac{\left(y+\frac{3}{10}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{109}{100}}\right)^2} = 1.$$
 b) L'ellipse :
$$\frac{x+\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{73}{36}}} + \frac{(y-2)^2}{\sqrt{\frac{73}{24}}} = 1.$$
 c) La parabole :
$$\left(x - \frac{21}{16}\right) = \frac{4}{5} \left(y + \frac{3}{8}\right)^2.$$
2. a)
$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (11) = (0)$$
 b)
$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-3) = (0)$$
 c)
$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-14) = (0)$$
3. a) De type ellipse. b) De type hyperbole. c) De type parabole.
4. L'hyperbole $3x^2 + 20xy + 24y^2 - 40x + 100y + 100 = 0$.
5. $(MAM^T)^T = MAM^T$
6. a) $R_{45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $R_{30^\circ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ c) $R_{75^\circ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2-\sqrt{3}} & -\sqrt{2+\sqrt{3}} \\ \sqrt{2+\sqrt{3}} & \sqrt{2-\sqrt{3}} \end{pmatrix}$
7. Utilisez l'équation $\frac{a-c}{b} = \cot(2\theta)$.
8. a) Utilisez $R_0^T = R_0^{-1}$ et démontrez l'affirmation par induction.
 b) Démontrez l'affirmation par induction.

$$c) A^{10} = 2^9 \begin{pmatrix} 1025 & 1023 \\ 1023 & 1025 \end{pmatrix}.$$

9. a) Puisque $R_\theta^T = R_\theta^{-1}$, on a :

$$\begin{aligned} R_\theta^T A R_\theta &= R_\theta^{-1} A R_\theta = D \\ A R_\theta &= R_\theta D. \end{aligned}$$

$$b) A\vec{u} = d_1\vec{u} \text{ et } A\vec{u}_\perp = d_2\vec{u}_\perp.$$

$$c) A\vec{u} = \lambda_1\vec{u} \text{ et } A\vec{v} = \lambda_2\vec{v} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 v_1 \\ \lambda_1 u_2 & \lambda_2 v_2 \end{pmatrix}$$

$$10. a) 5(\tilde{x}+2)^2 - 6(\tilde{x}+2)(\tilde{y}-5) + 5(\tilde{y}-5)^2 = 8$$

$$b) 3(\tilde{x}-2)^2 + 26\sqrt{3}(\tilde{x}-2)(\tilde{y}+3) - 23(\tilde{y}+3)^2 = 144$$

$$11. a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c) \text{Aire}_{ell} = \text{Aire}_{cer} \cdot \det M^{-1} = \pi \frac{1}{\det M} = \frac{\pi}{\frac{1}{\alpha\beta}} = \alpha\beta\pi$$

$$b) M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \quad d) \det R_\theta^T \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} \det R_\theta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta^2} \end{vmatrix} \Leftrightarrow ac - \frac{b^2}{4} = \frac{1}{\alpha^2\beta^2}$$

En isolant $\alpha\beta$ et en le substituant dans le résultat en c), on obtient le résultat recherché.

$$\begin{aligned} 12. \|\vec{EF_1}\| + \|\vec{EF_2}\| &= \|\vec{ET_1}\| + \|\vec{ET_2}\| = \|\vec{T_1T_2}\|, \\ \|\vec{E'F_1}\| + \|\vec{E'F_2}\| &= \|\vec{E'T'_1}\| + \|\vec{E'T'_2}\| = \|\vec{T'_1T'_2}\| = \|\vec{T_1T_2}\|, \end{aligned}$$

A

- Abel, Niels Henrik, 305, 324
- Abscisse, 34
- Addition affine, 11
- Adjointe, 223
- Aire(s), 128
 - facteur de changement d', 263
- Algèbre, théorème fondamental de l', 304, 306
- Algorithme de Pagerank, 233
- Al-Kashi, théorème d', 61
- Angle
 - d'élévation, 76
 - entre deux droites, 138
- Apollonius de Perge, 331
- Argand
 - Jean Robert, 286
 - plan d', 291
- Arithmétique modulo n , 320
- Axiomes, 1, 9

B

- Barycentre, 31
- Base, 15, 19, 20
 - ordonnée, 21
 - orthonormée, 33
- Bernoulli, Jean, 285
- Bolyai, Janos, 39
- Bombelli, Raffaele, 285

C

- Cavalieri
 - Bonaventura, 93
 - principe de, 93
- Cercle
 - antarctique, 77
 - polaire, 76
- Chaîne de Markov, 201
- Changement de variable, 339
- Chasles, relation de, 11
- Cisaillement, 268
 - horizontal, 282
 - vertical, 282
- Coefficients, 160
 - matrice des, 162, 163
- Coensemble, 326
- Cofacteur, 223
- Colinéarité, 128
 - test de, 85
- Combinaison linéaire, 16
 - coefficients, 16
- Composante(s)
 - d'un vecteur, 15, 21
 - efficace, 52
 - opérations sur les, 23
- Compression, 255
- Congruence modulo n , 319
- Conique(s), 331
 - équation générale d'une, 335
 - rotation de, 343
 - translation de, 343
- Continuité, 314
- Contraintes, 182
- Coordonnées, 27
 - cartésiennes, 64
 - sphériques, 64, 65

- Coplanarité, 128
 - test de la, 97
- Cosinus
 - directeurs, 48
 - loi des, 61
- Cote, 34
- Coxeter, Harold Scott MacDonald, 43, 75
- Cramer, règle de, 87, 100
- Cube, 73

D

- Dandelin, sphères de, 331
- Dépendance linéaire
 - test de la, 97
- Dessin
 - en perspective centrale, 116
 - modèle vectoriel du, 116
- Déterminant(s), 79, 217
 - 2×2 , 80
 - 3×3 , 89
 - propriétés, 220
- Diagonalisation, 340
- Différence entre deux vecteurs, 8
- Dimension, 4, 20, 21
 - finie, 20
 - théorème de la, 41
- Direction invariante, 275
- Discriminant, 341
- Distance
 - d'un point à une droite, 135
 - entre deux droites, 139
 - entre deux points, 47
- Distribution, 199
- Dodécaèdre, 73
- Douady, Adrien, 316
- Droite(s)
 - angle entre deux, 138
 - distance entre deux, 139
 - équation(s)
 - affine, 130
 - cartésienne, 134
 - linéaire, 134
 - non paramétriques, 134
 - non paramétriques dans $\mathbb{R}^3$, 134
 - normale, 133, 134
 - paramétriques dans $\mathbb{R}^3$, 132
 - paramétriques des, 129, 132
 - symétrique dans $\mathbb{R}^2$, 132, 133
 - symétrique(s), 132, 133, 135
 - symétriques dans $\mathbb{R}^3$, 135
 - vectorielle(s) des, 129, 130
 - gauches, 2, 3
 - position(s) relative(s) de deux, 137, 177
 - réelle, 286
 - sécantes, 3

E

- Égalité de deux vecteurs, 23
- Ellipse, 331, 333
 - équation canonique de l', 334
 - foyers, 333
- Ensemble de vecteurs
 - linéairement dépendants, 16
 - linéairement indépendants, 16
- Entiers modulo n , 320

Équation(s)
 algébrique(s), 305
 de degrés 3 et 4, 314
 canonique(s), 331
 de l'ellipse, 334
 de l'hyperbole, 335
 d'une parabole, 332
 caractéristique, 275
 générale d'une conique, 335
 homogène, 160
 linéaire(s), 159, 160
 le GPS et les, 185
 méthode de résolution des systèmes d', 170
 opérations élémentaires sur les, 162
 polynomiale, 305
 quadratique
 à coefficients complexes, 302
 système linéaire
 contradictoire, 160
 incohérent, 160
 incompatible, 160
 Équinoxe, 76
 Espace(s)
 affine, 40
 base d'un, 19
 euclidien, 4
 repères dans un, 27
 vectoriel(s), 1, 9, 40
 Étirement, 255
 horizontal, 282
 vertical, 282
 Euclide, 39
 Euler
 formule d', 299, 300
 Leonhard, 285

F

Famille
 génératrice, 19
 libre, 19
 Fonction objective, 182
 Forme quadratique, 337
 Fréquences, ordre des, 234

G

Galois, Évariste, 305
 Gauss, Carl Friedrich, 39, 167, 331
 Gauss-Jordan
 méthode
 de résolution de, 170
 d'inversion de, 213
 théorème de, 210
 Géométrie analytique, 24
 Groupe(s), 323
 abélien, 324
 commutatif, 314
 isomorphes, 325
 sous-groupe, 326
 propre, 326
 structure de, 323
 théorie des, 319

H

Heuristique, 314
 Hilbert, David, 39
 Homothétie, 257, 282
 Hyperbole, 331

équation canonique de l', 335
 foyers, 335

I

Icosaèdre, 73
 Identité, 282
 Imaginaire, 291
 Indépendance linéaire, 128
 Isomorphisme, 325

J

Jacobien, 265
 Julia
 ensemble de, 317
 Gaston, 318

K

Klein, Félix Christian, 39

L

Lagrange, théorème de, 327
 Laplace
 développement de, 95
 Pierre Simon de, 95
 Latitude, 64, 65
 Leontief, modèle de, 227
 Lieu géométrique, 49
 Lobatchevski, Nikolai Ivanovitch, 39
 Loi
 des cosinus, 61
 du parallélogramme, 8
 Longitude, 64, 65

M

MacLaurin, Colin, 299
 Mandelbrot, Benoît, 316
 Markov, chaîne de, 201
 Matrice(s), 188
 adjointe, 223
 algorithme de réduction de Gauss-Jordan, 167
 antisymétrique, 192
 augmentée, 162, 169
 carrée, 191
 diagonale principale d'une, 191
 colonne(s), 190
 pivot d'une, 165
 de distribution, 201
 de réflexion, 259
 de rotation, 258
 des coefficients, 162, 163
 techniques, 228
 des cofacteurs, 223
 déterminant de, 218
 de transformation, 203
 de transition, 190, 198, 201, 202, 232
 diagonale, 191
 d'impact, 228
 égalité de deux, 190
 EL, 169
 élémentaire, 208
 ERL, 164
 forme ERL d'une, 168
 idempotente, 273
 identité, 192
 inverse, 210, 211
 inversible, 211
 l-équivalentes, 165
 ligne, 190

- nulle, 191
- opérations élémentaires sur les lignes d'une, 163
- orthogonale, 262
- produit
 - matriciel de deux, 194
 - par un scalaire d'une, 193
- rang d'une, 166
- régulière, 212
- somme de deux, 193
- stochastique, 201
- symétrique, 192
- transposée d'une, 192
- triangulaire
 - inférieure, 191
 - supérieure, 191
- unicité de la forme *ERL*, 181, 184
- Méthode
 - d'élimination, 161
 - de résolution de Gauss-Jordan, 170
 - d'inversion de Gauss-Jordan, 213
- Mineur, 223
- Modulo n , 319
 - addition, 321
 - arithmétique, 320
 - congruence, 319
 - ensemble des entiers non nuls, 320
 - entiers, 320
 - multiplication, 321
- Moivre
 - Abraham de, 298
 - formule de, 298
- Moment
 - de force, 105
 - intensité du, 106
- N**
- Nombre(s)
 - complexe(s), 285, 291, 292
 - addition, 293
 - argument, 292
 - conjugué, 292
 - division, 294
 - forme d'Euler, 300
 - inversion, 294
 - module, 292
 - multiplication, 293
 - notation polaire des, 296
 - partie imaginaire, 292
 - partie réelle, 292
 - puissances des, 296
 - racines des, 296, 300
 - soustraction, 293
 - d'or, 74
 - imaginaires, 285
- Norme d'un vecteur, 45, 46
- O**
- Octaèdre, 73
- Ordonnée, 34
- Orientation(s), 34, 128
 - dans $\mathbb{R}^2$, 79
 - dans $\mathbb{R}^3$, 88
 - test d', 86
- Orthogonalité, 128
- P**
- Pagerank, algorithme de, 233
- Parabole, 331, 332
 - équation canonique d'une, 332
- Parallèle terrestre, 65
- Parallélisme, 128
 - test du, 111
- Paramètre
 - équation(s)
 - affine, 130
 - paramétriques, 132
 - vectorielle, 130
- Pixels, 248
- Plan dans $\mathbb{R}^3$
 - équation
 - affine, 144
 - vectorielle, 144
- Plan(s)
 - angle dièdre entre deux, 150
 - d'Argand, 291
 - de l'écliptique, 76
 - de projection, 119
 - distance d'un point à un, 147
 - équation(s)
 - cartésienne, 146
 - linéaire, 146
 - non paramétriques dans $\mathbb{R}^3$, 145
 - normale, 146
 - paramétriques d'un, 145
 - position(s) relative(s)
 - dans $\mathbb{R}^3$ de deux, 149
 - de trois, 177
 - vecteur normal à un, 146
- Platon, 7
 - solides de, 73
- Playfair, John, 39
- Point(s), 5
 - abscisse, 34
 - barycentre d'un ensemble, 31
 - coordonnées des, 27
 - cote, 34
 - de l'espace euclidien, 33
 - d'équilibre statique, 31
 - distance entre deux, 47
 - fixe, 274
 - ordonnée, 34
 - origine, 27, 41
- Polynôme(s), 305
 - à coefficients réels, 306
 - caractéristique, 275
 - racines d'un, 305
- Postulats, 1
- Produit
 - complexe
 - du vecteur, 288
 - propriétés du, 288
 - matriciel, 194
 - mixte, 112
 - scalaire, 4, 53
 - calcul du, 55
 - propriétés du, 54
 - vectoriel, 105, 106, 112
 - distributivité du, 125
 - propriétés du, 108
- Programmation linéaire, 182
- Projection
 - axonométrique, 1, 2
 - centrale, 2

oblique, 271
 orthogonale, 62, 63, 261, 277, 288
 plan de, 119
 Pythagore, 68
 théorème de, 68

R

Racines n -ièmes de l'unité, 301
 Réflexion(s), 259, 280, 282
 Règle
 de Cramer, 87, 100
 de la main droite, 89
 Relation
 de Chasles, 11
 d'équivalence, 320
 Repère(s)
 cartésien, 35
 géocentrique, 65
 orthonormé, 33
 Retournement, 255
 Riemann, Bernhard, 39
 Rotation(s), 257, 280, 282, 308
 de coniques, 343

S

Scalaire, 6
 Similitude
 directe, 267, 308
 indirecte, 267, 311
 Solstice, 76
 Somme vectorielle, 8
 Sphères de Dandelin, 331
 Stéréogramme, 122
 Système(s)
 d'équations linéaires, 182
 d'équations paramétriques, 132
 d'inégalités linéaires, 182

T

Taylor, Brook, 299
 Test
 de colinéarité, 85
 de coplanarité, 97
 de dépendance linéaire, 97
 d'orientation, 86
 du parallélisme, 111
 Tétraèdre, 73
 Théorème
 d'Al-Kashi, 61
 de Gauss-Jordan, 210
 de Lagrange, 327
 de Pythagore, 68
 fondamental de l'algèbre, 304, 306
 Transformation(s), 240

affine(s), 278, 279
 élémentaire(s), 278
 linéaire(s), 242
 représentable(s), 246
 Translation, 5, 308
 de coniques, 343

Travail, 52
 Triangle, inégalité du, 46
 Tropique du Cancer, 76

V

Valeur propre, 275
 Vecteur-position, 27
 Vecteur(s), 1, 5, 40
 angle entre deux, 56
 angle polaire dans $\mathbb{R}^2$ d'un, 286
 colinéaires, 8, 17
 composantes d'un, 15, 21
 coplanaires, 17
 directeur, 130, 144
 égalité de deux, 6, 23
 ensemble de
 linéairement dépendants, 16
 linéairement indépendants, 16
 linéairement
 dépendants, 16
 indépendants, 16
 norme d'un, 45, 46
 nul, 5
 opérations sur les, 10
 orthogonaux, 58
 parallèles, 8
 parallélisme de deux, 85
 produit
 complexe de deux, 288
 scalaire de deux, 53
 propres, 274, 275
 unitaire, 47
 Vecteurs-polynômes, 41
 Vitesse
 scalaire, 131
 vectorielle, 131
 Volume, 128
 d'une pyramide, 98
 d'un parallélépipède, 90
 d'un prisme, 98
 d'un tétraèdre, 98

W

Wallis, John, 285
 Wessel, Caspar, 286

Z

Zénith, 76

VECTEURS, MATRICES et NOMBRES COMPLEXES

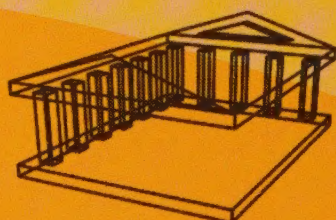
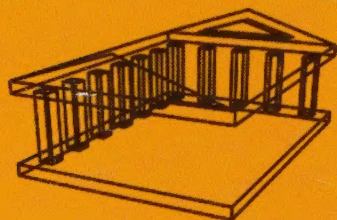
Ce manuel préserve les caractéristiques fondamentales qui ont fait le succès de la première édition. Tout d'abord, l'ordre de présentation et le traitement des sujets y suivent toujours la voie naturelle d'une approche géométrique. Ensuite, on y retrouve les chapitres sur les transformations linéaires (dans le plan), sur les nombres complexes et sur l'introduction à la théorie des groupes. Cette deuxième édition propose par ailleurs de nombreuses nouveautés et améliorations, et ce, tant sur la forme que sur le fond. En effet, non seulement l'ouvrage bénéficie d'une nouvelle maquette, mais l'auteur y tient compte des développements technologiques récents en relation avec les sujets initialement à l'étude. Enfin, une annexe sur les coniques s'ajoute également au contenu.

C'est véritablement sur un choix d'exercices savamment dosés que repose l'édifice de cet ouvrage. Ainsi, si l'étudiant n'a parfois qu'à calculer, dans d'autres cas, il lui faudra illustrer, construire, analyser, généraliser, particulariser, montrer ou prouver. Pour stimuler la créativité et favoriser l'approfondissement des connaissances, les sections « Pour aller plus loin » proposent compléments théoriques, pistes de recherches, lectures complémentaires, liens sur le web et suggestions de travaux pratiques (infographie, géopositionnement, stéréogrammes, etc.).

Sur Modulo en ligne, le professeur trouvera les solutions détaillées des exercices du livre, des exemples d'examens avec leurs solutions ainsi que des diaporamas couvrant une session complète.

Vincent Papillon a enseigné les mathématiques pendant 35 ans au Collège Jean-de-Brébeuf. Titulaire d'une maîtrise en logique mathématique de l'Université de Montréal, il a toujours été actif au sein de l'Association mathématique du Québec, comme administrateur, comme animateur de nombreux ateliers et comme auteur de plusieurs articles. Il fait partie des pionniers qui ont popularisé les *Ateliers* du groupe Mathécrit dans les années 1970 et qui ont contribué à la naissance de la maison d'édition Modulo.

Dimitri Zuchowski enseigne les mathématiques au Cégep de Saint-Laurent depuis 2004. Il est titulaire d'une maîtrise en algèbre de l'Université de Montréal.



MODULO

www.groupemodulo.com

SOMMAIRE

AVANT-PROPOS

CHAPITRE 1 POINTS ET VECTEURS

CHAPITRE 2 LONGUEURS, DISTANCES ET ANGLES

CHAPITRE 3 AIRES ET VOLUMES

CHAPITRE 4 DROITES ET PLANS

CHAPITRE 5 SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

CHAPITRE 6 MATRICES

CHAPITRE 7 TRANSFORMATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R}^2$

CHAPITRE 8 NOMBRES COMPLEXES

CHAPITRE 9 INTRODUCTION À LA THÉORIE DES GROUPES

ANNEXE

CORRIGÉ

INDEX



Modulo
en ligne

www.groupemodulo.com

ISBN 13 978-2-89650-466-4
ISBN 10 2-89650-466-4

