

M A X I

Mémento

Nom: Akhras Cloé
Classe: Secondaire I 

MATHS

6^e

5^e

4^e

3^e

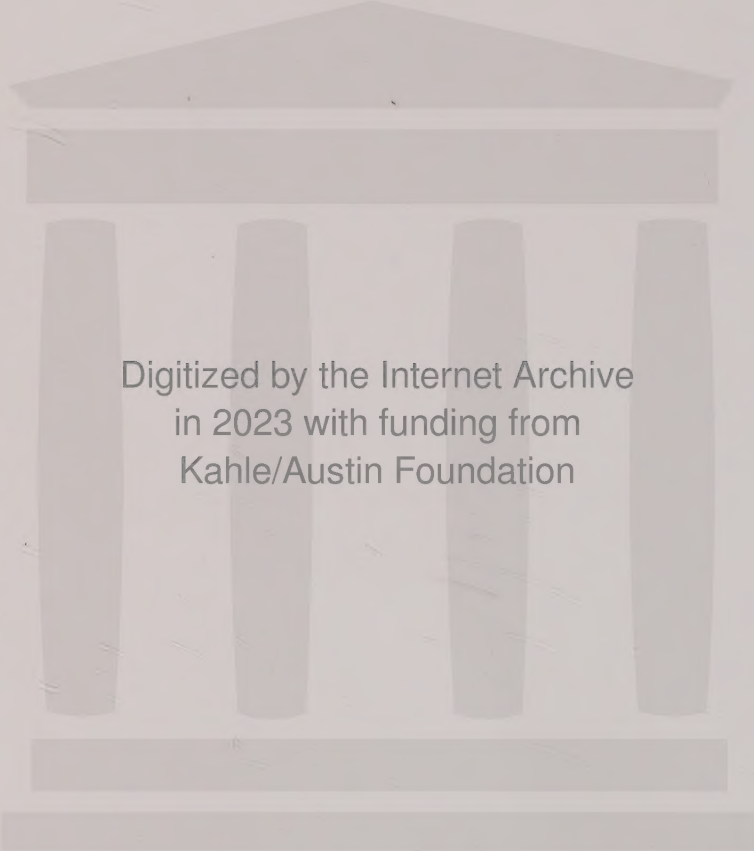
136 fiches

pour tout savoir au collège !

- ▶ TRAVAUX NUMÉRIQUES
- ▶ TRAVAUX GÉOMÉTRIQUES
- ▶ FONCTIONS
ET GESTION DE DONNÉES



HACHETTE
Éducation



Digitized by the Internet Archive
in 2023 with funding from
Kahle/Austin Foundation

MAXI
Mémento

MATHS

6^e

5^e

4^e

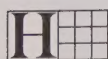
3^e

Pierre et Josyane CUREL

Paul FAUVERGUE

René RIEU

André SARNETTE



HACHETTE
Éducation

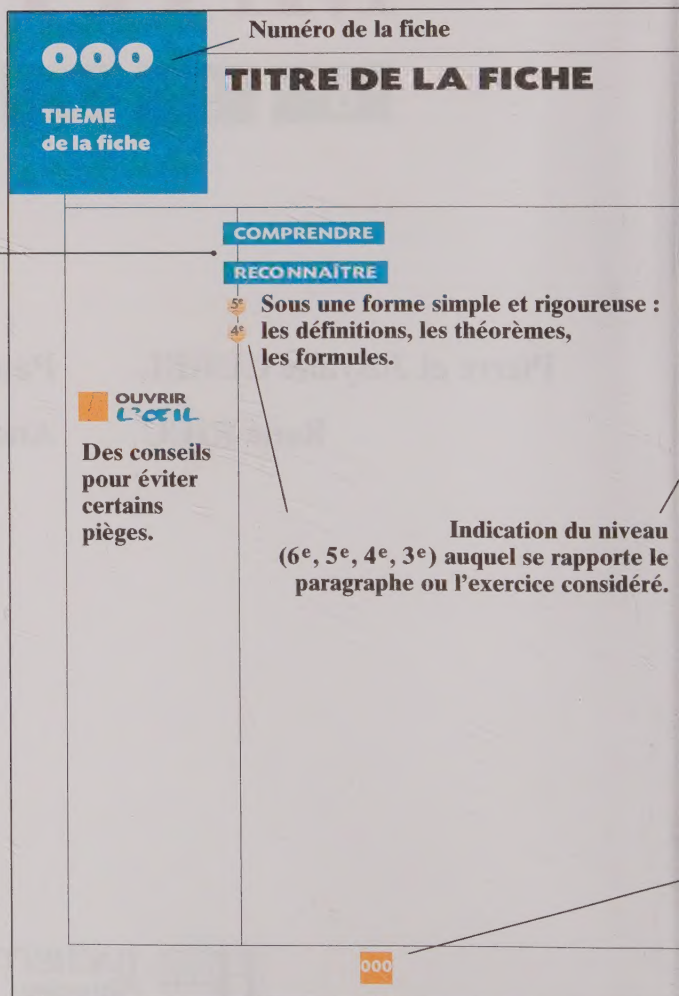
AIDE MÉMOIRE

Une difficulté ?

- Une définition ou un théorème oubliés...
- Une formule qu'on ne sait pas appliquer...
- Un mot dont on ne connaît plus le sens...

On trouve :

COMPRENDRE et RECONNAÎTRE présentent des définitions, propriétés et formules de façon claire et attrayante, ce qui permet une assimilation aisée du contenu de la fiche.



Conception graphique : Agata Miziewicz FNG
Couverture : Graphir
Illustrations : Sandra Smith
Mise en pages et schémas :
NDL Communication

ISBN : 2.01.167948.6
© HACHETTE Livre, 2001
www.hachette-education.com
43, quai de Grenelle, 75905 PARIS Cedex 15.
Tous droits de traduction, de reproduction et
d'adaptation réservés pour tous pays.

MODE D'EMPLOI

On cherche :

- Dans la liste des 136 fiches classées en 10 thèmes (pages 4 à 9).
- Dans l'index (pages 284 à 287).

Dessin ou texte présentant le contenu de la fiche.

UTILISER SES CONNAISSANCES

Les savoir-faire essentiels : chaque énoncé est accompagné d'une solution détaillée.

EN
SAVOIR
PLUS

Des
prolongements
utiles.

UTILISER SES
CONNAISSANCES
propose des exercices
variés qu'il est
préférable de chercher
à résoudre
sans regarder
immédiatement la
solution !
Celle-ci servira de
contrôle (ou d'aide, le
cas échéant) ainsi que
de guide pour la
résolution d'autres
exercices.

Numéros de pages.

VOIR AUSSI :

Renvois clairs
et précis
aux fiches
complémentaires.

000

SOMMAIRE

Ce sommaire indique le niveau (sixième, cinquième, quatrième et troisième) de chacune des fiches de cet ouvrage. Il permet de faire un point précis des connaissances exigibles tout au long du cycle en cours. Dès que la notion développée dans une fiche est acquise, l'élève peut cocher la case correspondante et visualiser ainsi sa progression (il est bien entendu que les notions des classes précédentes doivent être assimilées ; ainsi en classe de troisième, les notions mathématiques des classes de sixième, cinquième et quatrième doivent être sues).

N° TITRE DE LA FICHE

LES NOMBRES ARITHMÉTIQUES					Page
1	Décimaux - Numération décimale	6 ^e			10
2	Décimaux Multiplier ou diviser par 10 ; 100 ; ... ; 0,1 ; 0,01 ; ...	6 ^e			12
3	Décimaux Écritures décimales et fractionnaires	6 ^e			14
4	Décimaux Écritures avec puissances de 10			4 ^e	16
5	Décimaux Comparaison	6 ^e			18
6	Approximations décimales d'un résultat	6 ^e	5 ^e		20
7	Arrondis	6 ^e	5 ^e	4 ^e	22
8	Décimaux - Opérations +, -, × Écriture décimale	6 ^e			24
9	Décimaux - Opérations +, -, × Fractions décimales	6 ^e			26
10	Division euclidienne	6 ^e			28
11	Division d'un décimal par un décimal	6 ^e	5 ^e		30
12	La division dans les problèmes	6 ^e	5 ^e		32
13	Quotients de décimaux Écritures - Comparaison		5 ^e		34
14	Simplification de fractions sans calculatrice	6 ^e	5 ^e		36
15	Quotients de décimaux Addition - Soustraction		5 ^e		38
16	Quotients de décimaux Multiplication - Division		5 ^e	4 ^e	40
17	Diviseurs - P.G.C.D. - Fractions irréductibles			3 ^e	42
18	Séquences de calcul Règles-Priorités	6 ^e	5 ^e		44

19	Séquences de calcul Distributivité	5 ^e			46
20	Séquences de calcul sans quotient Usage de la calculatrice	5 ^e			48
21	Séquences de calcul avec quotients Usage de la calculatrice	5 ^e			50
22	Racines carrées Définition - Équation $x^2 = A$		4 ^e	3 ^e	52
23	Racines carrées Calculs sur les radicaux			3 ^e	54

LES NOMBRES RELATIFS

24	Sur une droite graduée	6 ^e	5 ^e		3 ^e	56
25	Repérage dans un plan	6 ^e	5 ^e	4 ^e	3 ^e	58
26	Comparaison - Inégalités		5 ^e	4 ^e	3 ^e	60
27	Addition - Soustraction		5 ^e	4 ^e		62
28	Multiplication - Puissances			4 ^e		64
29	Quotients			4 ^e		66
30	Parenthèses - Priorités de calcul		5 ^e	4 ^e		68
31	Expressions littérales - Sommes algébriques			4 ^e		70
32	Sommes algébriques Addition - Soustraction			4 ^e	3 ^e	72
33	Sommes algébriques Multiplication			4 ^e	3 ^e	74
34	Identités remarquables				3 ^e	76
35	Développer			4 ^e	3 ^e	78
36	Factoriser		5 ^e	4 ^e	3 ^e	80
37	Factoriser avec $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$				3 ^e	82
38	Factoriser avec $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$ et $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$				3 ^e	84

ÉQUATIONS - INÉQUATIONS - PROBLÈMES

39	Équations élémentaires Type : $a + x = b$	6 ^e	5 ^e	4 ^e		86
40	Équations élémentaires Type : $a \times x = b$	6 ^e	5 ^e	4 ^e		88
41	Équations du 1 ^{er} degré à une inconnue			4 ^e	3 ^e	90
42	Équations se ramenant au 1 ^{er} degré				3 ^e	92

43	Inéquations élémentaires			4 ^e	3 ^e	94
44	Inéquations du 1 ^{er} degré à une inconnue				3 ^e	96
45	Systèmes de deux équations du 1 ^{er} degré à deux inconnues Interprétation « graphique »				3 ^e	98
46	Systèmes de deux équations du 1 ^{er} degré à deux inconnues Résolution « algébrique »				3 ^e	100
47	Problèmes à une inconnue			4 ^e	3 ^e	102
48	Problèmes à deux inconnues				3 ^e	104

LES OUTILS DE LA GÉOMÉTRIE

49	Règle graduée - Longueur	6 ^e				106
50	Compas - Cercle - Disque	6 ^e	5 ^e	4 ^e	3 ^e	108
51	Périmètre et aire du disque	6 ^e	5 ^e			110
52	Équerre Droites perpendiculaires - Droites parallèles	6 ^e		4 ^e		112
53	Tangente à un cercle			4 ^e		114
54	Le rapporteur	6 ^e				116
55	Angles	6 ^e				118
56	Quelques paires d'angles		5 ^e			120
57	Angle inscrit - Angle au centre				3 ^e	122
58	Parallèles - Sécantes - Angles	6 ^e	5 ^e			124
59	Reconnaître le parallélisme avec les angles	6 ^e	5 ^e			126
60	Bissectrice d'un angle	6 ^e		4 ^e		128
61	Médiatrice d'un segment	6 ^e				130
62	Propriété des points de la médiatrice d'un segment	6 ^e				132
63	Problèmes de distance		5 ^e			134

LES TRIANGLES

64	Vocabulaire relatif aux triangles	6 ^e	5 ^e			136
65	Triangle isocèle	6 ^e	5 ^e			138
66	Triangle équilatéral	6 ^e	5 ^e		3 ^e	140

67	Constructions de triangles		5 ^e			142
68	Somme des angles d'un triangle		5 ^e			144
69	Aire d'un triangle		5 ^e			146
70	Cercle circonscrit - Cercle inscrit		5 ^e	4 ^e		148
71	Orthocentre			4 ^e		150
72	Centre de gravité			4 ^e		152
73	Droite des milieux			4 ^e		154
74	Triangles à côtés proportionnels			4 ^e	3 ^e	156
75	Théorème de Thalès				3 ^e	158
76	Réciproque du théorème de Thalès				3 ^e	160
77	Triangle rectangle	6 ^e	5 ^e	4 ^e		162
78	Théorème de Pythagore Distance de deux points			4 ^e	3 ^e	164
79	Reconnaître un triangle rectangle	6 ^e	5 ^e	4 ^e		166
80	Trigonométrie Cosinus			4 ^e		168
81	Trigonométrie Cosinus - Sinus - Tangente				3 ^e	170

LES QUADRILATÈRES

82	Quadrilatères convexes	6 ^e	5 ^e			172
83	Rectangles Angles - Côtés - Diagonales	6 ^e				174
84	Rectangles Axes de symétrie - Aire	6 ^e				176
85	Losanges Côtés - Angles	6 ^e	5 ^e			178
86	Losanges Diagonales - Axes de symétrie	6 ^e				180
87	Carrés	6 ^e				182
88	Parallélogrammes Côtés - Angles - Aire		5 ^e			184
89	Parallélogrammes Diagonales		5 ^e			186
90	Parallélogrammes Autres caractérisations		5 ^e	4 ^e		188
91	Reconnaître un rectangle	6 ^e	5 ^e	4 ^e		190
92	Reconnaître un losange	6 ^e	5 ^e	4 ^e		192

93	Reconnaître un carré	6 ^e	5 ^e	4 ^e		194
94	La famille des parallélogrammes Synthèse				3 ^e	196

TRANSFORMATIONS DE FIGURES

95	Symétrie orthogonale Axe de symétrie	6 ^e				198
96	Symétrie orthogonale Construction de figures	6 ^e				200
97	Symétrie centrale Centre de symétrie		5 ^e			202
98	Symétrie centrale Construction de figures		5 ^e			204
99	Rotation				3 ^e	206
100	Polygones réguliers				3 ^e	208
101	Translation			4 ^e		210
102	Translation - Vecteurs - Parallélogrammes				3 ^e	212
103	Translation - Vecteurs Addition vectorielle				3 ^e	214
104	Composition de deux symétries centrales				3 ^e	216
105	Coordonnées d'un vecteur				3 ^e	218
106	Coordonnées du milieu d'un segment				3 ^e	220

LES SOLIDES

107	Parallélépipède rectangle - Cube	6 ^e				222
108	Prismes droits		5 ^e			224
109	Cylindre de révolution		5 ^e		3 ^e	226
110	Cône de révolution			4 ^e	3 ^e	228
111	Pyramides			4 ^e	3 ^e	230
112	Boule et sphère				3 ^e	232
113	Aires et volumes Pavé - Prisme - Cylindre	6 ^e	5 ^e			234
114	Aires et volumes Cône - Pyramide - Boule			4 ^e	3 ^e	236
115	Pythagore et l'espace			4 ^e	3 ^e	238
116	Sections planes des cônes et des pyramides				3 ^e	240

AUTOUR DE LA PROPORTIONNALITÉ

117	Multiplier par $\frac{a}{b}$	6 ^e		242
118	Appliquer un pourcentage	6 ^e		244
119	Tableaux de proportionnalité	5 ^e	4 ^e	246
120	Reconnaître un tableau de proportionnalité	5 ^e		248
121	Échelles - Mouvement uniforme	5 ^e		250
122	Calculer un pourcentage	5 ^e		252
123	Des pourcentages pour comparer	5 ^e		254
124	Vitesse moyenne		4 ^e	256
125	Fonctions linéaires Définition - Détermination			3 ^e 258
126	Fonctions linéaires Représentation graphique			3 ^e 260
127	Fonctions linéaires Applications			3 ^e 262
128	Fonctions affines Définition - Détermination			3 ^e 264
129	Fonctions affines Représentation graphique			3 ^e 266

GRAPHIQUES ET STATISTIQUES

130	Représentation graphique	6 ^e	5 ^e		268
131	Graphiques et proportionnalité			4 ^e	270
132	Tableaux et diagrammes		5 ^e		272
133	Diagrammes circulaires et autres		5 ^e	4 ^e	274
134	Fréquences		5 ^e	4 ^e	276
135	Moyennes			4 ^e	278
136	Médiane Dispersion				3 ^e 280
	Notations - Unités				282
	Index				284
	Usage de la calculatrice				288

DÉCIMAUX

NUMÉRATION

DÉCIMALE

COMPRENDRE

OUVRIR L'ŒIL

Dans les colonnes
où il n'y a pas de chiffre,
on peut, selon les besoins,
y mettre des zéros.

6^e ● Tableau de la numération décimale

Partie entière,						Virgule	Partie décimale					
centaines de mille	dizaines de mille	unités de mille	centaines	dizaines	unités		dixièmes	centièmes	millièmes	dix-millièmes	cent-millièmes	millionnièmes
		5	0	1	7	,	4	0	3			

Une unité d'une colonne quelconque vaut 10 unités de la colonne située immédiatement à sa droite.

1 centaine vaut 10 dizaines ; 1 dizaine vaut 10 unités ;

1 unité vaut 10 dixièmes ; 1 dixième vaut 10 centièmes.

6^e ● Comment lire un décimal ?

Il existe deux façons de lire un décimal.

- 1) – Lire la partie entière et faire suivre du mot « unité » ;
– lire la partie décimale comme si elle était entière et faire suivre du nom de la colonne dans laquelle se trouve le dernier chiffre.

42,63 se lit *quarante-deux unités soixante-trois centièmes*.

3,021 se lit *trois unités vingt et un millièmes*.

0,006 se lit *zéro unité six millièmes (ou six millièmes)*.

- 2) – Lire la partie entière ;
– dire le mot « virgule » ;
– et, dans le cas où le chiffre après la virgule n'est pas 0, lire la partie décimale comme si elle était entière.

42,63 se lit *quarante-deux virgule soixante-trois*.

3,021 se lit *trois virgule zéro vingt et un*.

0,006 se lit *zéro virgule zéro zéro six*.

Les **nombre arithmétiques** sont utilisés à l'école primaire dans les calculs et en géométrie ; ce sont des **nombre sans signe**.

Plus tard, quand on connaîtra les **nombre relatifs**, on pourra confondre les **nombre arithmétiques** avec les **nombre positifs**.

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Voici des **nombre décimaux** : 312,175 ; 42,7 ; 2,09 ; 432 .

Quel est, pour chacun d'eux, le **chiffre des dizaines**, celui des **dixièmes**, celui des **centaines** et celui des **centièmes** ?

Voici les réponses dans un tableau :

nombre	chiffre des dizaines	chiffre des dixièmes	chiffre des centaines	chiffre des centièmes
312,175	1	1	3	7
42,7	4	7	0	0
2,09	0	0	0	9
432	3	0	4	0

6^e ● Compléter les phrases suivantes :

Une dizaine vaut unités.

Une unité vaut dixièmes.

Une dizaine vaut dixièmes.

Une centaine vaut unités.

Une unité vaut dixièmes.

Une centaine vaut dixièmes.

Une unité vaut centièmes.

Une centaine vaut centièmes.

Réponses :

10

10

100

100

10

1 000

100

10 000

6^e ● Lire de deux manières : 41,7 ; 41,07 ; 41,007 .

• Première façon :

– quarante et une unités sept dixièmes ;

– quarante et une unités sept centièmes ;

– quarante et une unités sept millièmes.

• Deuxième façon :

– quarante et un virgule sept ;

– quarante et un virgule zéro sept ;

– quarante et un virgule zéro zéro sept.

VOIR AUSSI

Regle graduée - Longueur, 4

DÉCIMAUX

MULTIPLIER OU DIVISER PAR

10 ; 100 ; 1 000 ; ... ;

0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ...

COMPRENDRE

6^e ● Comment multiplier par 10, 100, 1 000, ... ?

Pour multiplier un décimal par 10, 100, 1 000, ..., il faut repérer la virgule (ou l'imaginer si le nombre est entier) et la déplacer, vers la droite, de un rang ($\times 10$), de deux rangs ($\times 100$), de trois rangs ($\times 1 000$), ..., en faisant éventuellement apparaître des zéros.

$$18,72 \times 10 = 187,2 ;$$

$$18,7 \times 100 = 18 \overset{\textcircled{2}}{70} = 1\,870 ;$$

$$0,07 \times 1\,000 = 0 \overset{\textcircled{2}}{070} = 70.$$

6^e ● Comment diviser par 10, 100, 1 000, ... ?

Pour diviser un décimal par 10, 100, 1 000, ..., il faut repérer la virgule (ou l'imaginer si le nombre est entier) et la déplacer, vers la gauche, de un rang ($: 10$), de deux rangs ($: 100$), de trois rangs ($: 1 000$), ..., en faisant éventuellement apparaître des zéros.

$$232,5 : 10 = 23,25 ;$$

$$18 : 10 = 1 \overset{\textcircled{8}}{8} = 1,8 ;$$

$$18,7 : 1\,000 = 0,018 \overset{\textcircled{7}}{7} = 0,018\,7.$$

6^e ● Comment multiplier par 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ... ?

Multiplier par 0,1 c'est diviser par 10.

Multiplier par 0,01 c'est diviser par 100.

Multiplier par 0,001 c'est diviser par 1 000.

$$7,32 \times 0,1 = 7,32 : 10 = 0,732 ;$$

$$841,3 \times 0,01 = 841,3 : 100 = 8,413 .$$

6^e ● Comment diviser par 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; ... ?

Diviser par 0,1 c'est multiplier par 10.

Diviser par 0,01 c'est multiplier par 100.

Diviser par 0,001 c'est multiplier par 1 000.

$$7,32 : 0,1 = 7,32 \times 10 = 73,2 ;$$

$$841,3 : 0,01 = 841,3 \times 100 = 84\,130 .$$

OUVRIR
L'ŒIL

● Les nombres tels que 10, 100, 1 000, ... sont des

puissances de dix :

$$100 = 10 \times 10 ,$$

$$1\,000 = 10 \times 10 \times 10 .$$

● 0,1 se lit

« zéro virgule un »

ou un dixième ;

0,01 se lit

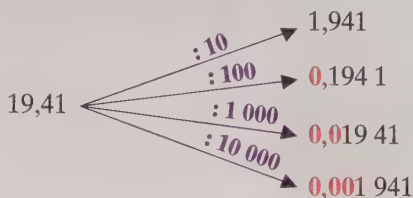
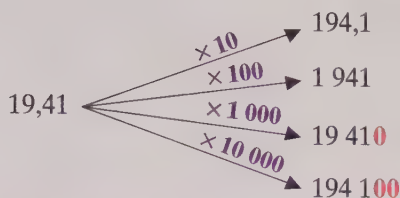
« zéro virgule zéro un »

ou un centième ;

0,001 se lit

« zéro virgule zéro zéro un »

ou un millièm ; ...



UTILISER SES CONNAISSANCES

- 6^e ● *Effectuer* : $271,5 \times 10$; $271,5 \times 100$; $69,5 \times 1\,000$;
 $0,531 \times 10$; $0,531 \times 100$; $0,531 \times 1\,000$.

Dans l'ordre, les réponses sont les suivantes :

2 715 ; 27 150 ; 69 500 ; 5,31 ; 53,1 ; 531 .

- 6^e ● *Effectuer* : $167,5 : 10$; $167,5 : 100$; $67,5 : 1\,000$;
 $441 : 10$; $441 : 100$; $441 : 1\,000$.

Dans l'ordre, les réponses sont les suivantes :

16,75 ; 1,675 ; 0,067 5 ; 44,1 ; 4,41 ; 0,441 .

- 6^e ● *Compléter* :

$\dots \times 10 = 21,5$; $\dots \times 10 = 41$; $\dots \times 100 = 21,5$;
 $\dots \times 100 = 41$; $\dots \times 1\,000 = 21,5$; $\dots \times 1\,000 = 41$;
 $\dots : 10 = 21,5$; $\dots : 10 = 41$; $\dots : 100 = 21,5$;
 $\dots : 100 = 41$; $\dots : 1\,000 = 21,5$; $\dots : 1\,000 = 41$.

Dans l'ordre, les réponses sont les suivantes :

2,15 ; 4,1 ; 0,215 ; 0,41 ; 0,021 5 ; 0,041 ; 215 ; 410 ; 2 150 ;
 4 100 ; 21 500 ; 41 000 .

- 6^e ● *Effectuer* : $23 \times 0,1$; $41,2 \times 0,01$; $57 \times 0,001$;
 $413 \times 0,01$; $4\,150 \times 0,001$; $0,07 \times 0,1$.

Dans l'ordre, les réponses sont les suivantes :

2,3 ; 0,412 ; 0,057 ; 4,13 ; 4,15 ; 0,007 .

- 6^e ● *Effectuer* : $23 : 0,1$; $41,2 : 0,01$; $63 : 0,001$; $42 : 0,01$;
 $0,07 : 0,001$; $0,15 : 0,01$; $0,7 : 0,1$.

Dans l'ordre, les réponses sont les suivantes :

230 ; 4 120 ; 63 000 ; 4 200 ; 70 ; 15 ; 7 .

VOIR AUSSI :

Longueurs, 49

Encadré 1

DÉCIMAUX

ÉCRITURES DÉCIMALES ET FRACTIONNAIRES

COMPRENDRE

6^e ● Qu'appelle-t-on fraction décimale ?

Quand on divise 423 par 100, le quotient se note $423 : 100$.

– Il se note aussi 4,23 (écriture décimale).

– Il se note également $\frac{423}{100}$ (écriture fractionnaire).

$\frac{423}{100}$ est une **fraction décimale** ; $\frac{423}{100}$ ← **numérateur**
← **trait de fraction**
← **dénominateur**

Elle se lit 423 sur 100 ou encore 423 centièmes.

OUVRIR L'ŒIL

Colonne des
centièmes

	4	,	2	3
--	---	---	---	---

4,23 se lit :

« 4 unités 23 centièmes »

mais c'est aussi :

« 423 centièmes »

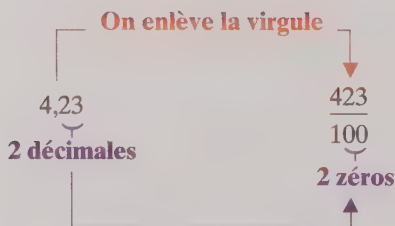
car une unité vaut

100 centièmes ...

6^e ● Comment passer de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale ?

On effectue la division : $\frac{4\ 132}{10} = 4\ 132 : 10 = 413,2$.

6^e ● Comment passer de l'écriture décimale à l'écriture fractionnaire ?



6^e ● Comment obtenir des fractions décimales égales ?

À partir d'une fraction décimale, on en obtient d'autres qui lui sont égales en multipliant ou en divisant (quand c'est possible) le numérateur et le dénominateur par une même puissance de 10 (par 10 ; 100 ; 1 000 ; etc.) :

$$\frac{17}{10} = \frac{170}{100} ; \frac{17}{10} = \frac{1\ 700}{1\ 000} ; \frac{1\ 800}{10\ 000} = \frac{18}{100}$$

On enlève la virgule.

3,14

$\frac{314}{100}$

On place la virgule.

$\frac{421}{1\ 000}$

0,421

Deux décimales → Deux zéros Trois zéros → Trois décimales

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Voici des nombres en écriture décimale :

17,18 ; 3,2 ; 0,4 ; 1,012 ; 0,05 ; 3,005 ; 0,01 .

En donner une écriture fractionnaire.

Dans l'ordre, les réponses sont les suivantes :

$\frac{1\ 718}{100}$; $\frac{32}{10}$; $\frac{4}{10}$; $\frac{1\ 012}{1\ 000}$; $\frac{5}{100}$; $\frac{3\ 005}{1\ 000}$; $\frac{1}{100}$.

6^e ● Voici des nombres en écriture fractionnaire :

$\frac{23}{10}$; $\frac{517}{100}$; $\frac{17}{1\ 000}$; $\frac{130}{10}$; $\frac{302}{10}$; $\frac{1}{10}$.

En donner une écriture décimale.

Dans l'ordre, les réponses sont les suivantes :

2,3 ; 5,17 ; 0,017 ; 13 ; 30,2 ; 0,1 .

6^e ● Écrire avec le même dénominateur 100 tous les nombres suivants :

$\frac{8}{10}$; 0,06 ; 17,3 ; $\frac{37}{10}$; $\frac{1\ 300}{1\ 000}$; 27 ; 4,62 .

Dans l'ordre, les réponses sont les suivantes :

$\frac{80}{100}$; $\frac{6}{100}$; $\frac{1\ 730}{100}$; $\frac{370}{100}$; $\frac{130}{100}$; $\frac{2\ 700}{100}$; $\frac{462}{100}$.

6^e ● Écrire avec le même dénominateur 1 000 tous les nombres suivants :

$\frac{7}{10}$; $\frac{42}{100}$; 19,7 ; 0,01 ; 0,001 ; 47 ;

$\frac{1}{10}$; $\frac{4\ 320}{10\ 000}$; $\frac{523}{100}$; $\frac{92}{10}$; 0,1 ; 1 .

Dans l'ordre, les réponses sont les suivantes :

$\frac{700}{1\ 000}$; $\frac{420}{1\ 000}$; $\frac{19\ 700}{1\ 000}$; $\frac{10}{1\ 000}$; $\frac{1}{1\ 000}$; $\frac{47\ 000}{1\ 000}$;

$\frac{100}{1\ 000}$; $\frac{432}{1\ 000}$; $\frac{5\ 230}{1\ 000}$; $\frac{9\ 200}{1\ 000}$; $\frac{100}{1\ 000}$; $\frac{1\ 000}{1\ 000}$.

VOIR AUSSI :

Numération décimale, 1
Décimaux, 2-4

DÉCIMAUX

ÉCRITURES

AVEC PUISSANCES DE 10

COMPRENDRE

4^e ● Que sont les puissances de dix ?

■ Voici quelques puissances de dix et leurs écritures avec exposants :

$$\dots ; 1\,000 = 10^3 ; 100 = 10^2 ; 10 = 10^1 ; 1 = 10^0 ; \\ 0,1 = 10^{-1} ; 0,01 = 10^{-2} ; 0,001 = 10^{-3} ; \dots$$

■ $10^n = \underbrace{10\dots 0}_n$; $10^{-n} = \underbrace{0,0\dots 01}_n$ (n entier naturel)

n zéros

n zéros et aussi n décimales

$$10^n \times 10^{-n} = 1$$

10^n et 10^{-n} sont inverses l'un de l'autre.

■ $10^k \times 10^p = 10^{k+p}$; $(10^k)^p = 10^{k \times p}$; k et p sont entiers relatifs.

OUVRIR

L'ŒIL

La notation scientifique permet un encadrement immédiat par des puissances

de 10 :

$$10^4 < 1,38 \times 10^4 < 10^5 ;$$

$$10^{-3} < 8,76 \times 10^{-3} < 10^{-2}.$$

4^e ● Comment utiliser les écritures $a \times 10^p$?

Tout décimal peut s'écrire d'une infinité de manières, sous la forme de produit d'un décimal par une puissance de 10 ; ce sont des *écritures scientifiques*.

$$32,2 = 3,22 \times 10^1 = 32,2 \times 10^0 = 322 \times 10^{-1} = \dots$$

$$0,008\,76 = 8,76 \times 10^{-3} = 87,6 \times 10^{-4} = 876 \times 10^{-5} = \dots$$

$$13\,800 = 138 \times 10^2 = 13,8 \times 10^3 = 1,38 \times 10^4 = \dots$$

On utilise le plus souvent :

- la notation scientifique (en rouge) : produit d'un décimal d vérifiant $1 \leq d < 10$ par une puissance de 10,
- le produit d'un entier par une puissance de 10 (en mauve).

4^e ● Comment utiliser la touche **EE** ?

(On considère la calculatrice galaxy 40 - Texas Instruments.)

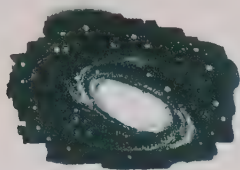
■ $3\,400$ **=** **EE** amène **3.4 00** ; ce qui veut dire :

$3,4 \times 10^3$ qui est la notation scientifique de 3 400.

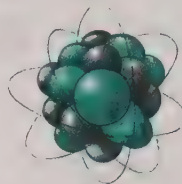
■ On veut entrer le nombre 355×10^{-3} ; on opère comme suit :

355 **EE** 3 **-X** **=** ; il apparaît **3.55 -01** ; ce qui veut dire :

$3,55 \times 10^{-1}$ qui est la notation scientifique.



De l'infiniment grand ...
à l'infiniment petit.



Diamètre d'une galaxie : 10^{21} m environ.

Noyau atomique : 10^{-14} m environ.

■ La séquence 300 000 $\times$ 36 000 $=$ inscrit $1.08 \ 10$ qui signifie $1,08 \times 10^{10}$; le nombre est trop « grand » pour entrer à l'affichage et la machine donne la notation scientifique.

UTILISER SES CONNAISSANCES

4^e ● Écrire sous forme :

- décimale : 10^{-3} ; 10^2 ; 10^{-2} ; 10^3 ; 10^{-1} ; 10^6 ;
- de puissance de 10 : 0,000 1; 10 000; 100 000.

Dans l'ordre, les réponses sont :

0,001; 100; 0,01; 1000; 0,1; 1 000 000; puis 10^{-4} ; 10^4 ; 10^5 .

4^e ● Effectuer : $10^3 \times 10^2$; $10^{-1} \times 10^{-4}$; $10^3 \times 10^{-2}$; $10^6 \times 10^{-3}$.

Dans l'ordre, les réponses sont : 10^5 ; 10^{-5} ; 10^1 (ou 10); 10^3 .

4^e ● Donner l'écriture décimale de :

3×10^3 ; $34\,751 \times 10^{-3}$; $45,37 \times 10^{-2}$; 35×10^{-5} ; 6×10^{-6} .

Dans l'ordre, les réponses sont :

3 000; 34,751; 0,453 7; 0,000 35; 0,000 006.

4^e ● Donner la notation scientifique de :

4 376; 5,46; 47,35; 134 000; 0,001 23.

Dans l'ordre, les réponses sont : $4,376 \times 10^3$; $5,46 \times 10^0$; $4,735 \times 10^1$; $1,34 \times 10^5$; $1,23 \times 10^{-3}$. (Contrôler avec la calculatrice.)

4^e ● La distance de la Terre au Soleil est en moyenne de

149,6 millions de km. La lumière parcourt 300 000 km en 1 seconde.

Combien de temps met-elle pour nous parvenir du Soleil ?

(Calculatrice : utiliser la notation scientifique.)

$149,6 \times 10^6 = 1,496 \times 10^8$; $300\,000 = 3 \times 10^5$.

$1,496 \times 10^8 : 3 \times 10^5$ donne $4,986\,67 \times 10^2$.

Le temps mis est approximativement de 499 s ou 8 min 19 s.

OUVRIR L'ŒIL

En cas de difficulté, on peut vérifier avec la calculatrice.

Par exemple :

35 EE 5 $\text{(-}\times\text{)}$ =

donne $3,5 \text{ -} 04$

puis 2nd EE

amène 0.00035 .

VOIR AUSSI :

Ordre de grandeur, 2

Puissance, 18

DÉCIMAUX

COMPARAISON

COMPRENDRE

6^e Il s'agit de comparer deux décimaux, donc de savoir dire quel est le plus grand des deux et de savoir le noter.

● Lorsque les parties entières sont différentes

Le plus grand est celui qui a *la plus grande partie entière*.

On compare 15,77 et 17,3 ; le plus grand est 17,3.

On note :

$17,3 > 15,77$; $>$ se lit « est strictement supérieur à » ,

ou $15,77 < 17,3$; $<$ se lit « est strictement inférieur à ».

● Lorsque les parties entières sont les mêmes

On veut comparer 17,29 et 17,3.

Il est conseillé d'écrire ces nombres sous forme de fraction décimale, avec le même dénominateur.

$$17,29 = \frac{1\,729}{100} ; 17,3 = \frac{173}{10} = \frac{1\,730}{100}$$

$$1\,729 < 1\,730 ; \text{ donc } \frac{1\,729}{100} < \frac{1\,730}{100} \text{ et } 17,29 < 17,3.$$

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Voici les réponses (en rouge) fournies lors d'un test d'évaluation par un élève.

Dire si la réponse est exacte et corriger dans le cas contraire en justifiant.

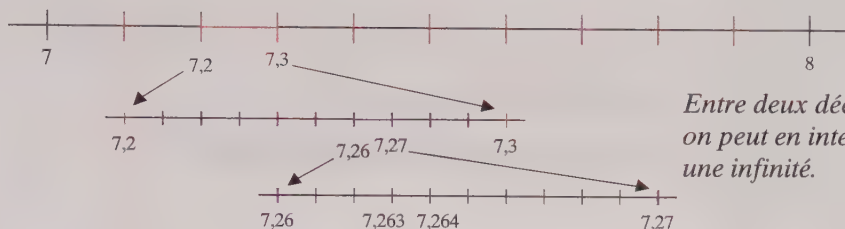
a) Sur chaque ligne, entourer le plus petit nombre :

203,95	204,25
4 253,2	425,32
150,75	150,8

b) Compléter en choisissant parmi les nombres :

0,12 ; 45,2 ; 58 ; 0,2 ; 95 ; 45,02 celui qui convient :

$0,75 < 95$; $45,20 = 45,02$; $0,17 > 0,2$.



Entre deux décimaux,
on peut en intercaler
une infinité.

a) Les deux premières réponses sont justes.

La troisième est fautive ; il fallait répondre 150,75.

En effet : $150,75 = \frac{15\,075}{100}$; $150,8 = \frac{1\,508}{10} = \frac{15\,080}{100}$.

b) Réponses : $75 < 95$; $45,20 = 45,2$ et non $45,02$; $0,17 > 0,12$ et non $0,2$ qui est plus grand que $0,17$.

6^e ● a) 7,1 est un décimal à une décimale, compris entre 7 et 8.
Quels sont les huit autres décimaux à une décimale, compris entre 7 et 8 ? (Remplacer 7 par $\frac{70}{10}$ et 8 par $\frac{80}{10}$.)

b) $7,2 = 7,20 = \frac{720}{100}$; $7,3 = 7,30 = \frac{730}{100}$. Citer les neuf décimaux

à deux décimales, compris entre 7,2 et 7,3.

a) En plus de 7,1, il y a : 7,2 ; 7,3 ; 7,4 ; 7,5 ; 7,6 ; 7,7 ; 7,8 ; 7,9 qui sont compris entre 7 et 8.

b) Entre 7,2 et 7,3, il y a neuf décimaux à deux décimales : 7,21 ; 7,22 ; 7,23 ; 7,24 ; 7,25 ; 7,26 ; 7,27 ; 7,28 ; 7,29.

6^e ● Placer un décimal à une décimale entre 2 et 3.
Placer un décimal à deux décimales entre 4,1 et 4,2.

– Les décimaux à une décimale ont une écriture fractionnaire avec dénominateur égal à 10.

$2 = \frac{20}{10}$; $3 = \frac{30}{10}$; entre 2 et 3, il y a : $\frac{21}{10}$; $\frac{22}{10}$; ... ; $\frac{29}{10}$.

Voici donc l'une des réponses : $2 < 2,7 < 3$.

– De même voici une réponse à la seconde question : $4,1 < 4,16 < 4,2$.

6^e ● Ranger par ordre croissant les décimaux suivants : 7,9 ; 7,99 ; 7,999 ; 8 ; 8,1 ; 8,01 ; 8,001.

La réponse est : $7,9 < 7,99 < 7,999 < 8 < 8,001 < 8,01 < 8,1$.



● $7,8 = \frac{78}{10}$

et $\frac{70}{10} < \frac{78}{10} < \frac{80}{10}$.

(Ordre **croissant** :
du plus petit jusqu'au
plus grand.)

● $7,23 = \frac{723}{100}$

et $\frac{730}{100} > \frac{723}{100} > \frac{720}{100}$.

(Ordre **décroissant** :
du plus grand jusqu'au
plus petit.)

VOIR AUSSI :

Décimaux - Numération
décimale, 1

Décimaux, écritures, 3

APPROXIMATIONS DÉCIMALES D'UN RÉSULTAT

COMPRENDRE

6^e ● Qu'est-ce que l'ordre de grandeur ?

Pour éviter des erreurs en utilisant une calculatrice, il faut :

- évaluer l'**ordre de grandeur** du résultat avant le calcul. Par exemple, avant de calculer $2,83 \times 4,4$ (qui est égal à 12,452), il est bien de se dire que ce produit est proche de 3×4 (ou 12) ;
- contrôler pas à pas l'introduction de la séquence de calcul (nombres ; signes opératoires ; parenthèses ; ...).

6^e ● Quel est le principe des approximations décimales ?

Voici deux résultats obtenus avec une calculatrice :

$$a = 42,537\,241\,29 \text{ et } b = 59,292\,549\,12.$$

■ Approximation à 1 près par défaut

On « coupe » après le chiffre des unités.

42 et 59 sont les approximations de a et de b à 1 près par défaut.

■ Approximation à 1 près par excès

On ajoute 1 à l'approximation à 1 près par défaut.

43 et 60 sont les approximations de a et de b à 1 près par excès.

a est compris entre 42 et 43.

b est compris entre 59 et 60.

5^e ■ Approximation à 0,1 près par défaut

On « coupe » après le chiffre des dixièmes.

42,5 et 59,2 sont les approximations de a et de b à 0,1 près par défaut.

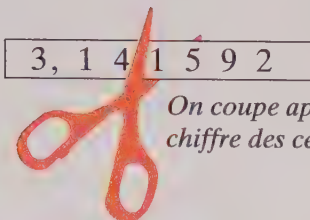
■ Approximation à 0,1 près par excès

On ajoute 0,1 à l'approximation à 0,1 près par défaut.

42,6 et 59,3 sont les approximations de a et de b à 0,1 près par excès.

a est compris entre 42,5 et 42,6.

b est compris entre 59,2 et 59,3.



On coupe après le
chiffre des centièmes.

3, 1 4 / 1 5 9 2

« Troncature » au centième
ou « approximation décimale
à 0,01 près par défaut ».

5^e ■ Approximation à 0,01 près par défaut

On « coupe » après le chiffre des centièmes. 42,53 et 59,29
sont les approximations de a et de b à 0,01 près par défaut.

■ Approximation à 0,01 près par excès

On ajoute 0,01 à l'approximation à 0,01 près par défaut.
42,54 et 59,30 sont les approximations de a et de b
à 0,01 près par excès.

a est compris entre 42,53 et 42,54

b est compris entre 59,29 et 59,30.

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Parmi les nombres 300, 600 et 800, quel est le plus proche de la somme $224,7 + 372,43$?

Parmi les nombres 100, 200 et 300, quel est le plus proche de la
différence $412,5 - 199,1$?

Parmi les nombres 1 000, 10 000 et 20 000, quel est le plus
proche du produit $417,3 \times 25,7$?

Contrôler les réponses avec la calculatrice.

On utilise un ordre de grandeur, puis la calculatrice.

$200 + 400$ donc 600 ; $224,7 + 372,43$ donne 597,13 .

$400 - 200$ donc 200 ; $412,5 - 199,1$ donne 213,4 .

400×25 donc 10 000 ; $417,3 \times 25,7$ donne 10 724,61 .

5^e ● Donner les approximations décimales à 1 près, puis celles à 0,1 près de $(71 \times 5) : 113$. À l'aide des deux dernières approximations écrites, donner un encadrement de $(71 \times 5) : 113$.

• Avec $71 \times 5 : 113$ la calculatrice affiche 3,14159292 .

• Les approximations à 1 près par défaut et par excès sont 3 et 4 ($4 = 3 + 1$).

• Les approximations à 0,1 près par défaut et par excès sont 3,1 et 3,2
($3,2 = 3,1 + 0,1$).

D'où l'encadrement : $3,1 < (71 \times 5) : 113 < 3,2$.

VOIR AUSSI :

Numération décimale, 1

ARRONDIS

COMPRENDRE

6^e ● Qu'est-ce que l'arrondi à l'unité la plus proche ?

On se sert du chiffre des *dixièmes*.

– Si le chiffre des dixièmes est **0, 1, 2, 3** ou **4**, on prend l'approximation à 1 près par **défaut**.

– Si le chiffre des dixièmes est **5, 6, 7, 8** ou **9**, on prend l'approximation à 1 près par **excès**.

$a = 42,537\dots$ On veut l'arrondi à l'unité près la plus proche. Le chiffre des dixièmes est 5 ; on prend l'approximation à 1 près par excès ; l'arrondi à l'unité la plus proche est 43.

5^e ● Qu'est-ce que l'arrondi au dixième le plus proche ?

On se sert du chiffre des *centièmes*.

– Si le chiffre des centièmes est **0, 1, 2, 3** ou **4**, on prend l'approximation à 0,1 près par **défaut**.

– Si le chiffre des centièmes est **5, 6, 7, 8** ou **9**, on prend l'approximation à 0,1 près par **excès**.

On veut l'arrondi au dixième le plus proche de $a = 42,537\dots$ Le chiffre des centièmes est 3 ; on prend l'approximation à 0,1 près par défaut ; l'arrondi de a au dixième le plus proche est 42,5.

On pourrait continuer...

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● 7 amis déjeunent ensemble ; le repas revient à 145 €.

L'un d'eux paie ; les autres le remboursent en décidant d'arrondir à l'euro le plus proche.

Combien paient-ils ?

Le prix d'un repas est $\frac{145}{7}$ € ou 20,714 285 71 € (calculatrice).

L'arrondi à l'euro le plus proche est 21 €.



5^e ● On achète un gigot de 2,650 kg au prix de 9,75 € le kg.

Quel est le prix ?

Arrondir ensuite au dixième d'euro le plus proche.

– Prix du gigot : $9,75 \times 2,65 = 25,8375$ €.

– L'arrondi au dixième le plus proche est 25,8 €.

(25,8375 ; le chiffre des centièmes est 3 ; l'arrondi au dixième le plus proche est 25,8.)

5^e ● (Cet exercice n'est possible que si votre calculatrice possède la touche de représentation des décimaux en virgule fixe, (FIX).)

a) Introduire la séquence : 1249 $\div$ 19 $=$.

Noter l'affichage. Demander à la calculatrice d'afficher le résultat avec 0 décimale.

Que peut-on remarquer ?

b) Éteindre la calculatrice, réintroduire la même séquence et demander un affichage avec 1 décimale.

Que peut-on remarquer ?

c) Éteindre de nouveau, réintroduire la séquence et demander un affichage avec 2 décimales.

Que peut-on remarquer ?

La solution est donnée avec la Galaxy 40 de Texas Instruments ; il faut adapter à la calculatrice utilisée.

a) 1249 $\div$ 19 $=$ amène $\boxed{65.73684211}$.

$\boxed{2nd}$ $\boxed{FIX}$ 0 amène $\boxed{66}$; c'est l'arrondi du résultat précédent à l'unité la plus proche.

b) $\boxed{2nd}$ $\boxed{FIX}$ 1 amène $\boxed{65.7}$; c'est l'arrondi au dixième le plus proche.

c) $\boxed{2nd}$ $\boxed{FIX}$ 2 amène $\boxed{65.74}$; c'est l'arrondi au centième le plus proche.

Remarque

Il est possible de répondre aux mêmes questions sans éteindre la calculatrice ni réintroduire la séquence initiale de division.

VOIR AD351
Approximations
décimales, à

DÉCIMAUX

OPÉRATIONS +, -, ×

ÉCRITURE DÉCIMALE

OUVRIR L'ŒIL

● Pour l'addition et la soustraction, imaginer les nombres dans un tableau et mettre les chiffres des différentes unités les uns en dessous des autres ; les virgules s'alignent verticalement.

$$\begin{array}{r} 37,28 \\ + 7,9 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 37,28 \\ + 7,9 \\ \hline \end{array}$$

mauvais alignement **bon alignement**

● Pour la multiplication, il faut compter le nombre de décimales de chaque facteur et les additionner pour avoir le nombre de décimales du produit.

$$\begin{array}{r} 37,28 \leftarrow 2 \text{ décimales} \\ \times 7,9 \leftarrow 1 \text{ décimale} \\ \hline 33552 \\ 26096 \\ \hline 294512 \leftarrow 3 \text{ décimales} \end{array}$$

décalage de 1 rang

COMPRENDRE

6^e ● Quel est le vocabulaire relatif à ces trois opérations ?

■ Addition

$$\begin{array}{r} 2,7 \quad + \quad 1,2 \quad = \quad 3,9 \\ \hline \text{1^{er} terme} \quad \text{2^e terme} \quad \text{somme} \\ \text{somme non effectuée} \quad \text{effectuée} \end{array}$$

■ Soustraction

$$\begin{array}{r} 3,9 \quad - \quad 2,7 \quad = \quad 1,2 \\ \hline \text{1^{er} terme} \quad \text{2^e terme} \quad \text{différence} \\ \text{différence non effectuée} \quad \text{effectuée} \end{array}$$

■ Multiplication

$$\begin{array}{r} 2,7 \quad \times \quad 1,2 \quad = \quad 3,24 \\ \hline \text{1^{er} facteur} \quad \text{2^e facteur} \quad \text{produit} \\ \text{produit non effectué} \quad \text{effectué} \end{array}$$

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Pour chacune des opérations suivantes, préciser si elles sont, ou non, bien posées ; si oui, les effectuer ; si non, les poser correctement et les effectuer.

$$\begin{array}{r} 27,5 \\ + 3,45 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2,75 \\ \times 1,3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 37,5 \\ - 27 \end{array} \quad \begin{array}{r} 27,6 \\ + 19 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3,7 \\ \times 12 \end{array}$$

Les multiplications sont toujours bien posées.

La première addition est mal posée, ainsi que la soustraction.

Voici la bonne disposition :

$$\begin{array}{r} 27,5 \\ + 3,45 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 37,5 \\ - 27 \\ \hline \end{array}$$

Dans l'ordre, les réponses sont :

30,95 ; 3,575 ; 10,5 ; 46,6 ; 44,4.

Attention aux retenues, à leur signification !

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1} \ 7, \overset{0}{0} \ 0 \\ + \overset{0}{0} \ 5, \ 8 \ 2 \\ \hline 2 \ 2, \ 8 \ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{1} \ 8 \ 7, \overset{1}{2} \ \overset{1}{0} \\ - \overset{0}{0} \ 9 \ 2, \overset{1}{6} \ \overset{1}{3} \\ \hline \overset{0}{0} \ 9 \ 4, \ 5 \ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times \quad 7 \ 3, \ 8 \\ \quad 4, \ 0 \ 7 \\ \hline \quad 5 \ 1 \ 6 \ 6 \\ \quad \overset{1}{0} \ 0 \ 0 \ . \\ 2 \ 9 \ 5 \ 2 \ . \ . \\ \hline 3 \ 0 \ 0, \ 3 \ 6 \ 6 \end{array}$$

- 6^e ● Lors d'un test, les élèves devaient faire quatre soustractions. Tous les résultats ci-dessous sont faux et présentent la même erreur de méthode.

$$\begin{array}{r} 84 \\ - 57 \\ \hline 33 \end{array} \quad \begin{array}{r} 427 \\ - 143 \\ \hline 324 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9,5 \\ - 4,6 \\ \hline 5,1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 53,52 \\ - 17,16 \\ \hline 44,44 \end{array}$$

Donner l'erreur, puis les résultats justes.

Les opérations sont bien posées, mais l'élève retranche toujours le « chiffre » le plus petit du « chiffre » le plus grand. Il évite ainsi les retenues, mais il tombe dans l'erreur.

$$\begin{array}{r} \overset{1}{8} \ 4 \\ - \overset{1}{5} \ 7 \\ \hline 2 \ 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{1}{4} \ 2 \ 7 \\ - \overset{1}{1} \ 4 \ 3 \\ \hline 2 \ 8 \ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{1}{9}, \ 5 \\ - \overset{1}{4}, \ 6 \\ \hline 4, \ 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{1}{5} \ 3, \ \overset{1}{5} \ 2 \\ - \overset{1}{1} \ 7, \ \overset{1}{1} \ 6 \\ \hline 3 \ 6, \ 3 \ 6 \end{array}$$

- 6^e ● Calculer $39,85 \times 4,27$, puis indiquer sans nouveau calcul les produits $3 \ 985 \times 4,27$; $39,85 \times 427$; $3,985 \times 42,7$.

Pour le premier produit, il y a 4 chiffres après la virgule ; on a : 170,159 5 .

Pour le second et le troisième produit, il y a deux chiffres après la virgule ; ils sont égaux à 17 015,95. Le quatrième est 170,159 5 car il y a 4 chiffres (3 + 1) après la virgule.

- 6^e ● Voici un nombre : 143,523.

a) De combien augmente-t-il si on déplace la virgule de deux rangs vers la droite ?

b) De combien diminue-t-il si on déplace la virgule d'un rang vers la gauche ?

a) Il devient 14 352,3. Il augmente de $14 \ 352,3 - 143,523 = 14 \ 208,777$.

b) Il devient 14,352 3. Il diminue de $143,523 - 14,352 \ 3 = 129,170 \ 7$.

VOIR AUSSI :

Écriture des décimaux, 3-4
Opérations - écriture fractionnaire, 9

DÉCIMAUX

OPÉRATIONS $+$, $-$, $\times$

FRACTIONS DÉCIMALES

COMPRENDRE

6^e ● Comment effectuer la somme de deux fractions décimales de même dénominateur ?

$$\frac{32}{100} + \frac{127}{100} = \frac{32 + 127}{100} = \frac{159}{100}$$

← On **ajoute** les numérateurs.
 ← On **garde** le dénominateur.

● Comment effectuer la différence de deux fractions décimales de même dénominateur ?

$$\frac{127}{100} - \frac{32}{100} = \frac{127 - 32}{100} = \frac{95}{100}$$

← On **retranche** les numérateurs.
 ← On **garde** le dénominateur.

Comment effectuer le produit de deux fractions décimales ?

$$\frac{7}{10} \times \frac{32}{100} = \frac{7 \times 32}{10 \times 100} = \frac{224}{1\,000}$$

← On **multiplie** les numérateurs.
 ← On **multiplie** les dénominateurs.

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Calculer $a + b$, $a - b$, $a \times b$ avec :

a) $a = \frac{211}{10}$ et $b = \frac{73}{10}$;

b) $a = \frac{7}{10}$ et $b = \frac{41}{100}$.

$$\text{a) } a+b = \frac{211}{10} + \frac{73}{10} = \frac{284}{10} \quad ; \quad a-b = \frac{211}{10} - \frac{73}{10} = \frac{138}{10} ;$$

$$a \times b = \frac{211}{10} \times \frac{73}{10} = \frac{15\,403}{100}.$$

$$\text{b) } a + b = \frac{7}{10} + \frac{41}{100} = \frac{70}{100} + \frac{41}{100} = \frac{111}{100}$$

$$a - b = \frac{7}{10} - \frac{41}{100} = \frac{70}{100} - \frac{41}{100} = \frac{29}{100}$$

$$a \times b = \frac{7}{10} \times \frac{41}{100} = \frac{7 \times 41}{10 \times 100} = \frac{287}{1\,000}$$

On doit écrire a et b
avec le même dénominateur :
ici c'est 100.

Dans le cas du produit, les fractions n'ont pas besoin d'avoir le même dénominateur. Il est au contraire impératif d'avoir le même dénominateur lorsqu'on effectue une somme ou une différence.

OUVRIR L'ŒIL

$$1,7 + 2,5 = 4,2$$

$$5 - 3,8 = 1,2$$

$$1,2 \times 0,05 = 0,06$$

$$\frac{17}{10} + \frac{25}{10} = \frac{42}{10}$$

$$\frac{50}{10} - \frac{38}{10} = \frac{12}{10}$$

$$\frac{12}{10} \times \frac{5}{100} = \frac{60}{1\,000} = \frac{6}{100}$$

Deux écritures pour une même opération !

6^e ● 12,73 s'écrit $12 + 0,73$ et aussi $12 + \frac{73}{100}$.

Décomposer de la même manière les nombres :

31,3 ; 42,27 ; 4,072 ; 0,07.

$$31,3 = 31 + 0,3 \quad \text{et} \quad 31,3 = 31 + \frac{3}{10}.$$

$$42,27 = 42 + 0,27 \quad \text{et} \quad 42,27 = 42 + \frac{27}{100}.$$

$$4,072 = 4 + 0,072 \quad \text{et} \quad 4,072 = 4 + \frac{72}{1\,000}.$$

$$0,07 = 0 + 0,07 \quad \text{et} \quad 0,07 = 0 + \frac{7}{100} \left(\text{ou} \frac{7}{100} \right).$$

6^e ● 21,73 s'écrit $21 + 0,7 + 0,03$ et aussi $21 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100}$.

Noter de la même manière les nombres : 17,3 ; 5,41 ; 0,042.

$$17,3 = 17 + 0,3 \quad \text{et} \quad 17,3 = 17 + \frac{3}{10}.$$

$$5,41 = 5 + 0,4 + 0,01 \quad \text{et} \quad 5,41 = 5 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100}.$$

$$0,042 = 0,04 + 0,002 \quad \text{et} \quad 0,042 = \frac{4}{100} + \frac{2}{1\,000}.$$

6^e ● $1 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100}$ c'est aussi $1 + 0,7 + 0,03$ ou 1,73.

Écrire sous forme décimale :

a) $8 + \frac{7}{100}$; b) $6 + \frac{2}{10} + \frac{3}{1\,000}$.

a) $8 + \frac{7}{100} = 8 + 0,07 = 8,07$.

b) $6 + \frac{2}{10} + \frac{3}{1\,000} = 6 + 0,2 + 0,003 = 6,203$.



Un tableau peut aider...

dizaines	unités	dixièmes	centièmes
2	1,	7	3
2	1 0, 0,	7 0	3

VOIR AUSSI :

Écriture des décimaux, 3

Opérations - écriture

55cm114, 8

DIVISION EUCLIDIENNE

COMPRENDRE

6^e • Qu'est-ce qu'une division euclidienne ?

Dans une **division euclidienne**, tous les nombres sont **entiers**.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{dividende} & \rightarrow & 200 \\
 & & 60 \\
 \text{reste} & \rightarrow & 4
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 7 \\
 \hline
 28
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \leftarrow \text{diviseur} \\
 \leftarrow \text{quotient} \\
 \text{euclidien}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 200 = 7 \times 28 + 4 \\
 \text{et } 4 < 7.
 \end{array}$$

– On peut encadrer le dividende par deux multiples consécutifs du diviseur : $7 \times 28 < 200 < 7 \times 29$.

– Si la calculatrice possède la touche $\boxed{\div}$ (Galaxy 40), alors on obtient en une fois le quotient euclidien et le reste :

$$200 \boxed{\div} 7 \boxed{=} \text{amène} \quad \begin{array}{|c|} \hline 28 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

$\boxed{\text{Q}}$ $\boxed{\text{R}}$

6^e • Comment faire une division euclidienne ?

■ Premier exemple

1) On sépare à gauche du dividende autant de chiffres qu'il faut pour avoir le plus petit nombre qui soit supérieur au diviseur.

Ici c'est 75.

2) On pose la question : en 75 combien de fois 57 ou en 7 combien de fois 5 ? 1 fois.

On écrit 1 au quotient et on multiplie 57 par 1 ; le produit est écrit sous 75.

On le retranche de 75 ; il reste 18.

3) On abaisse le 2 ; en 182 combien de fois 57 ou en 18 combien de fois 5 ? 3 fois. On écrit 3 au quotient et on multiplie 57 par 3 ; le produit est écrit sous 182. On le retranche de 182 ; il reste 11.

4) On abaisse le 8 ; en 118 combien de fois 57 ou en 11 combien de fois 5 ? 2 fois. On écrit 2 au quotient et on multiplie 57 par 2 ; le produit est écrit sous 118. On le retranche de 118 ; il reste 4.

5) Dans la division de 7 528 par 57, le quotient euclidien est 132 et le reste 4 ; on vérifie : $57 \times 132 + 4 = 7\,528$.

OUVRIR

L'ŒIL

• Dans une division, la disposition est la suivante :

Dividende	Diviseur
	Quotient

• Chaque reste intermédiaire ou final (ici 18, 11 et 4) est inférieur au diviseur (ici 57). Il doit toujours en être ainsi.

$$\begin{array}{r}
 \overline{)7528} \quad 57 \\
 \underline{- 57} \quad 132 \\
 \quad \underline{182} \\
 \quad \underline{- 171} \\
 \quad \quad 118 \\
 \quad \quad \underline{- 114} \\
 \quad \quad \quad 4
 \end{array}$$



Dans une boîte, il y a 6 œufs.
Combien de boîtes pleines
avec 100 œufs ?

100	6
40	16
4	boîtes
œufs	

■ Deuxième exemple (présentation plus succincte)

1) Il faut séparer 3 chiffres à gauche du dividende pour avoir le plus petit nombre supérieur au diviseur.

$$\begin{array}{r}
 \overline{6181} \quad 72 \\
 - 576 \\
 \hline
 421 \\
 - 432 \\
 \hline
 - 360 \\
 \hline
 61
 \end{array}$$

2) En 618 combien de fois 72 ou en 61 combien de fois 7 ? 8 fois. On écrit 8 au quotient et on multiplie 72 par 8 ; le produit 576 est écrit sous 618. On le retranche de 618 ; il reste 42.

3) On abaisse le 1 ; en 421 combien de fois 72 ou en 42 combien de fois 7 ? 6 fois. 6 fois 72 égale 432 ; c'est trop. On barre 6 et on barre 432. Puis on essaie 5. 5 fois 72 égale 360 que l'on écrit sous 421. On le retranche ; il reste 61.

4) Dans la division de 6 181 par 72, le quotient euclidien est 85 et le reste 61. On vérifie : $72 \times 85 + 61 = 6\,181$.

UTILISER SES CONNAISSANCES

6° ● Calculer :

$$\begin{array}{r}
 \text{a) } 13\,548 \quad 21 \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \text{b) } 21\,738 \quad 36 \\
 \hline
 \end{array}$$

Vérifier, puis donner dans chaque cas un encadrement du dividende par deux multiples consécutifs du diviseur.

$$\begin{array}{r}
 \text{a) } 13\,548 \quad 21 \\
 - 12\,6 \quad 645 \\
 \hline
 0\,94 \\
 - 84 \\
 \hline
 108 \\
 - 105 \\
 \hline
 03
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \text{b) } 21\,738 \quad 36 \\
 - 21\,6 \quad 6043 \\
 \hline
 0\,138 \\
 - 144 \\
 \hline
 - 108 \\
 \hline
 30
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 21 \times 645 + 3 &= 13\,548 \text{ et } 3 < 21 ; \\
 21 \times 645 &< 13\,548 < 21 \times 646 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 36 \times 603 + 30 &= 21\,738 \text{ et } 30 < 36 ; \\
 36 \times 603 &< 21\,738 < 36 \times 604 .
 \end{aligned}$$

OUVRIR

Avec de l'entraînement, on n'écrit plus les produits partiels (126, 84 et 105) ; on effectue les soustractions au fur et à mesure qu'on calcule les produits.

$$\begin{array}{r}
 13\,548 \quad 21 \\
 94 \quad 645 \\
 108 \\
 3
 \end{array}$$

VOIR AUSSI :
Comparaison, 3
Opérations 8

La division dans les problèmes, 12

DIVISION D'UN DÉCIMAL PAR UN DÉCIMAL

COMPRENDRE

OUVRIR L'ŒIL

Dans une division,
la disposition est la suivante :

dividende	diviseur
	quotient

6^e ● La division avec un diviseur entier

■ Technique de division

La technique est la même que pour la division euclidienne. Quand on rencontre la virgule au *dividende*, on en met une au *quotient*.

Quand il n'y a plus de décimale écrite à abaisser au dividende et que l'on veut continuer, on abaisse un zéro sous-entendu ; ainsi 13 devient 130...

$$\begin{array}{r} 423,7 \quad | \quad 32 \\ 103 \quad | \quad 13,24 \\ 77 \quad | \quad \\ 130 \quad | \quad \\ 2 \quad | \end{array}$$

■ Approximations décimales du quotient

(Cf. Approximations décimales, 6)

13 est l'approximation à 1 près par défaut du quotient,

14 est l'approximation à 1 près par excès du quotient,

13,2 est l'approximation à 0,1 près par défaut,

13,3 est l'approximation à 0,1 près par excès...

5^e ● La division avec un diviseur décimal (non entier)

On rend le diviseur entier par application de la règle :

« Dans une division, si on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre, on ne change pas le quotient. »

$$14,32 \quad | \quad 8,1 \quad \text{devient} \quad 143,2 \quad | \quad 81 \quad \text{ou} \quad 143,2 \quad | \quad 81$$

Pour passer de la première écriture à la troisième, on a multiplié dividende et diviseur par 10 ; le quotient et toutes ses approximations décimales sont inchangés.

6^e ● La division avec la calculatrice

On utilise la touche $\div$.

La séquence $14,32 \div 8,1 =$ amène $1,767901235$,

tout comme la séquence $143,2 \div 81 =$.

Les approximations à 1 près par défaut et par excès du quotient de 14,32 par 8,1 sont respectivement 1 et 2 ; celles à 0,1 près sont respectivement 1,7 et 1,8 ; etc.

$423,7 : 32$; ce quotient est proche de $420 : 30$ donc de $42 : 3$.

La recherche (par le calcul mental) d'un **ordre de grandeur** du résultat (ici $42 : 3 = 14$) permet d'éviter des erreurs, avec ou sans calculatrice.

UTILISER SES CONNAISSANCES

● Effectuer les divisions suivantes en s'arrêtant lorsqu'on a écrit deux décimales au quotient.

a) $29,4 \overline{) 27}$ b) $14 \overline{) 0,11}$ c) $10,7 \overline{) 3,33}$

Ces divisions « ne tombent pas juste ». Pourquoi ?

6^e a) $29,4 \overline{) 27}$ Chaque fois le chiffre écrit au quotient est 8
 $240 \overline{) 1,08}$ et le reste partiel 24 ; cela ne s'arrête jamais.
 24

5^e b) $14 \overline{) 0,11}$ devient $1400 \overline{) 11}$; on a : $1400 \overline{) 11}$
 $30 \overline{) 127,27}$
 80
 Les restes partiels se répètent : 3, 8, 3, 8, ...
 et au quotient on écrit alors : 2, 7, 2, 7, ...
 30
 La division ne tombe pas juste. 80
 3

5^e c) $10,7 \overline{) 3,33}$ devient $1070 \overline{) 333}$; on a : $1070 \overline{) 333}$
 $710 \overline{) 3,21}$
 440
 Si on continuait, il faudrait diviser 1 070 par 333 ;
 on est revenu au départ. 107

5^e ● 6 personnes déjeunent au restaurant. La note est de 151 €. Une calculatrice donne $\boxed{25,16666667}$ pour le prix moyen d'un repas. Pour s'amuser, elles décident de faire chacune un chèque d'un montant différent. Sur les 6 chèques, on lit : 25 € ; 26 € ; 25,1 € ; 25,2 € ; 25,16 € ; 25,17 €. À quoi correspond chacun de ces nombres ? La note est-elle acquittée ?

On a six approximations décimales du prix moyen. Dans l'ordre, ce sont les approximations à 1 près par défaut et par excès, celles à 0,1 près par défaut et par excès, puis à celles à 0,01 près par défaut et par excès. Le total des chèques fait 151,63 €. La note est donc acquittée avec un excédent de 63 cents.

VOIR AUSSI :

Approximations

décimales, 4

Ordre de grandeur, 10

La division

dans les problèmes, 13

LA DIVISION DANS LES PROBLÈMES

COMPRENDRE

6^e ● Quand faire une division ?

■ On fait une division pour chercher le facteur *inconnu* dans un produit *connu*.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \times x = B & & \\
 & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \\
 \text{connu différent de 0} & & \text{inconnu} & & \text{connu}
 \end{array}$$

On veut calculer x ; B devient le dividende et A , le diviseur.
 x s'appelle le quotient de B par A et se note $B : A$ ou $\frac{B}{A}$.

■ On fait une division dans des *situations de partage* :

- pour chercher la valeur d'une part,
- pour chercher le nombre de parts,
- éventuellement, pour avoir un reste ou un manque.

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● L'aire d'un rectangle est 500 cm^2 . Une dimension est 17 cm ; quelle est l'autre ?

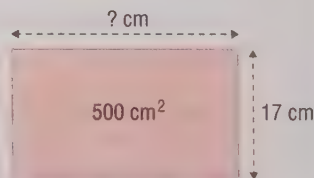
La formule donnant l'aire S
 d'un rectangle en fonction des dimensions
 a et b est : $S = a \times b$.

On connaît S (500 cm^2) et a (17 cm) ;
 il faut calculer b ; on divise 500 par 17 :

$500 \div 17 =$ amène $29,41176471$.

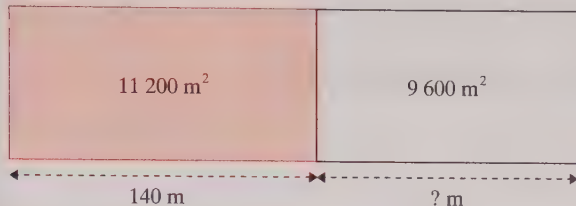
La précision du millimètre suffit.

La dimension inconnue est $29,4 \text{ cm}$ à 1 mm près par défaut.



6^e ● Un collège reçoit 200 calculatrices à répartir entre 7 classes de sixième ; chaque classe en aura autant ; il en restera le moins possible.

Combien chaque classe reçoit-elle de calculatrices ?



Quelle est la longueur
du deuxième champ ?

Dans le premier champ :

$$11\,200 : 140 = 80$$

80 m est la largeur des deux champs.

$$9\,600 : 80 = 120$$

C'est 120 m.

C'est une situation de partage.

On divise 200 par 7 (division euclidienne).

Chaque classe recevra 28 calculatrices.

Il reste 4 calculatrices non réparties.

$$\begin{array}{r|l} 200 & 7 \\ \hline 60 & 28 \\ 4 & \end{array}$$

6^e 5^e ● Un jus de fruits est vendu en cartons de 12 bouteilles
pour 3,84 €.

a) Quel est le prix d'une bouteille ?

b) Sachant qu'une bouteille contient 0,21 litre, à combien
revient le litre de jus de fruits ?

a) Prix d'une bouteille :

$$3,84 : 12 = 0,32.$$

Le prix d'une bouteille est 0,32 €.

b) Calcul du prix du litre de jus de fruits

Si on multiplie le prix de revient p (inconnu) du litre de jus de fruits
par la contenance (connue) de la bouteille, on obtient le prix (connu)
de la bouteille :

$$p \times 0,21 = 0,32.$$

Il s'agit donc de trouver le facteur inconnu d'un produit connu ;
on fait une division.

$$0,32 \div 0,21 = \text{amène } 1,523809524.$$

Le prix de revient du litre de jus de fruits est environ de 1,52 €.

5^e ● On a 25 m³ de gravats à transporter. Un camion peut
transporter à chaque voyage 3,4 m³.
Combien de voyages seront nécessaires pour tout transporter ?

$$\begin{array}{r|l} 25 & 3,4 \\ \hline \end{array} \quad \text{devient} \quad \begin{array}{r|l} 250 & 34 \\ \hline \end{array} \quad \text{puis} \quad \begin{array}{r|l} 250 & 34 \\ \hline 12 & 7 \end{array}$$

7 voyages permettraient de transporter $(3,4 \times 7) \text{ m}^3$ ou 23,8 m³.

Il resterait alors 1,2 m³ de gravats $(25 - 23,8 = 1,2)$.

Un huitième voyage est nécessaire, soit 8 voyages en tout.

VOIR AUSSI :

Approximations

décimales, 6

Arrondis, 7

Division, 10-11

QUOTIENTS DE DÉCIMAUX

ÉCRITURES - COMPARAISON

COMPRENDRE

5^e ● Qu'est-ce que le quotient de deux décimaux ?
Qu'est-ce qu'une fraction ?

■ Le quotient du décimal a par le décimal b ($b \neq 0$) est le nombre par lequel il faut multiplier b pour avoir a .

Il se note $a : b$ ou $\frac{a}{b}$ ← **numérateur**
dividende diviseur dénominateur

■ $\frac{a}{b}$ est une **écriture fractionnaire** du quotient de a par b ;
cette écriture peut se modifier :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times m}{b \times m} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} b \neq 0, m \neq 0, k \neq 0 \text{ et} \\ \text{les divisions de } a \text{ et de} \\ b \text{ par } k \text{ tombent juste.} \end{cases}$$

■ **Application**

Tout quotient de décimaux est aussi un quotient d'entiers.

$$\frac{3,77}{4,3} = \frac{3,77 \times 100}{4,3 \times 100} = \frac{377}{430} ; \quad \frac{377}{430} \text{ est une } \mathbf{fraction} \text{ car}$$

le numérateur et le dénominateur sont entiers.

5^e ● **Comment comparer des quotients ?**

$\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$ ayant même dénominateur, sont rangés comme a et c .

$$\frac{2,8}{3,7} > \frac{2,79}{3,7} \quad \text{car} \quad 2,8 > 2,79.$$

OUVRIR L'ŒIL

● Simplifier une fraction,
c'est l'écrire avec des termes
plus petits.

● Quand cela ne peut se faire,
on dit que la fraction
est **irréductible**.

UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e *Noter à l'aide d'une fraction :* $\frac{6,51}{13,95} ; \frac{57,12}{3,76} ; \frac{77,7}{37,74}$.

*Si la calculatrice utilisée possède la touche de simplification,
écrire la fraction irréductible égale.*

Dans l'ordre, les résultats sont les suivants :

$$\frac{6,51}{13,95} = \frac{651}{1395} ; \quad \frac{57,12}{3,76} = \frac{5712}{376} ; \quad \frac{77,7}{37,74} = \frac{7770}{3774}$$

Quotients de décimaux

$$\frac{2,83}{3,7} = \frac{2,83 \times 100}{3,7 \times 100} = \frac{283}{370}$$

Fraction
(deux entiers)

Voici la solution avec la Galaxie 40 - TI. On veut simplifier $\frac{651}{1395}$.

651 $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)$ 1395 $\left(\text{SIMP}\right)$ $\left(=\right)$ amène $\left[\text{N/D} \rightarrow \text{n/d} \quad 217/465\right]$.

Cela signifie que l'on peut encore simplifier ($\text{N/D} \rightarrow \text{n/d}$)

et que $\frac{651}{1395} = \frac{217}{465}$.

On continue par $\left(\text{SIMP}\right)$ $\left(=\right)$; on a $\left[7/15\right]$.

Cela signifie que $\frac{217}{465} = \frac{7}{15}$ et que l'on ne peut plus simplifier

(il n'y a plus rien à gauche) ; $\frac{7}{15}$ est une fraction irréductible.

On obtient : $\frac{651}{1395} = \frac{217}{465} = \frac{7}{15}$.

De même, on trouve : $\frac{5712}{376} = \frac{714}{47}$ et $\frac{7770}{3774} = \frac{35}{17}$.

5^e ● Comparer $\frac{27}{10}$ et $\frac{13}{10}$; $\frac{1,4}{2,3}$ et $\frac{1,38}{2,3}$; $\frac{1,71}{0,7}$ et $\frac{1,8}{0,7}$.

$\frac{27}{10} > \frac{13}{10}$ car $27 > 13$; $\frac{1,4}{2,3} > \frac{1,38}{2,3}$ car $1,4 > 1,38$;

$\frac{1,71}{0,7} < \frac{1,8}{0,7}$ car $1,71 < 1,8$.

5^e ● Ranger par ordre croissant : $\frac{1,3}{1,7}$; $\frac{1,29}{1,7}$; $\frac{1,28}{1,7}$ et $\frac{1,279}{1,7}$.

On a : $1,279 < 1,28 < 1,29 < 1,3$.

Donc : $\frac{1,279}{1,7} < \frac{1,28}{1,7} < \frac{1,29}{1,7} < \frac{1,3}{1,7}$.

5^e ● Comparer $\frac{7}{8}$ et $\frac{5}{6}$.

$\frac{7}{8} = \frac{7 \times 3}{8 \times 3} = \frac{21}{24}$; $\frac{5}{6} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{20}{24}$; $\frac{20}{24} < \frac{21}{24}$. Donc $\frac{5}{6} < \frac{7}{8}$.



Pour savoir
par quel nombre
la calculatrice a simplifié,
on pourrait, bien sûr,
effectuer la division de 651
par 217 ou celle de 1395
par 465. Il vaut mieux,
après la séquence
651 $\left(\frac{\quad}{\quad}\right)$ 1395 $\left(\text{SIMP}\right)$ $\left(=\right)$,
utiliser $\left(2^{\text{nd}}\right)$ $\left(\text{DIV}\right)$;
on obtient à l'écran $\left[3\right]$.
C'est la réponse.
Alors pour revenir à
 $\left[\text{N/D} \rightarrow \text{n/d} \quad 217/465\right]$,
on appuie sur $\left(x/y\right)$.
Ceci est général.

VOIR AUSSI :

Décimaux, 2
Comparaison
des décimaux, 5
Simplification
de fractions, 14

SIMPLIFICATION
DE FRACTIONS
SANS CALCULATRICE

COMPRENDRE

6^e ● Lorsque la division euclidienne « tombe juste »

$$\begin{array}{r|l} 204 & 17 \\ 34 & 12 \\ 0 & \end{array}$$

est synonyme de

$$\begin{cases} 204 = 17 \times 12. \\ 204 : 17 = 12. \\ 204 : 12 = 17. \end{cases}$$

204 est un multiple de 17.

204 est un multiple de 12.

204 est multiple de 17.

204 est multiple de 12.

204 est divisible par 17.

204 est divisible par 12.

17 est un **diviseur** de 204.12 est un **diviseur** de 204.6^e ● Quelques critères de divisibilité

Ce sont des règles simples permettant de savoir si un nombre est divisible ou non par un autre ; en voici quatre :

- le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6, 8 : le nombre est divisible par **2** ;
- le chiffre des unités est 0 ou 5 : le nombre est divisible par **5** ;
- la somme des chiffres qui composent le nombre est divisible par 3 : le nombre est divisible par **3** ;
- la somme des chiffres qui composent le nombre est divisible par 9 : le nombre est divisible par **9** (et donc divisible par 3).

5^e ● Comment simplifier une fraction ?

- Un principe à respecter : avant de simplifier, écrire le numérateur et le dénominateur sous forme de produits.

$$\frac{75}{35} = \frac{5 \times 15}{5 \times 7} = \frac{15}{7} \quad \text{On a simplifié par 5 ;}$$

on ne peut plus simplifier. La fraction obtenue est **irréductible**.

- Pour écrire numérateur et dénominateur sous forme de produits, on utilise d'abord les critères de divisibilité ; si cela ne suffit pas, on essaie de savoir s'ils sont multiples de 7, 11, 13, 17, 19, ...

■ *Exemple*

$$\text{On veut simplifier } \frac{182}{154}.$$

Numérateur et dénominateur sont multiples de 2.

EN
SAVOIR
PLUS2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 sont
des nombres premiers.Un nombre premier est
un nombre entier qui n'a que
deux diviseurs :
1 et lui-même.

Un exemple de simplification de fraction.

$$\frac{15\ 400}{51\ 800} = \frac{154}{518} = \frac{77 \times 2}{259 \times 2} = \frac{77}{259} = \frac{11 \times 7}{37 \times 7} = \frac{11}{37}$$

La simplification par
100 est immédiate.

154 et 518 sont
divisibles par 2.

Il faut essayer
de diviser... par 7...

Donc $\frac{182}{154} = \frac{2 \times 91}{2 \times 77} = \frac{91}{77}$.

91 et 77 ne sont pas des multiples de 3 ou de 5.

On essaie 7 ; $91 = 7 \times 13$ et $77 = 7 \times 11$.

Donc $\frac{91}{77} = \frac{7 \times 13}{7 \times 11} = \frac{13}{11}$. On ne peut plus simplifier.

Conclusion : $\frac{182}{154} = \frac{13}{11}$.

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● 4 572 est-il divisible par 2 ? par 3 ? par 9 ? par 5 ?

- Terminé par 2, le nombre 4 572 est divisible par 2.
- $4 + 5 + 7 + 2 = 18$; 18 est divisible par 3 et par 9, donc : 4 572 est divisible par 3 et aussi par 9.
- Terminé par 2, le nombre 4 572 n'est pas divisible par 5.

5^e ● Noter les quotients suivants sous forme de fraction irréductible :

a) $\frac{2,6}{0,7}$; b) $\frac{0,2}{7}$; c) $\frac{7,6}{3}$; d) $\frac{0,15}{2,1}$; e) $\frac{0,44}{0,33}$.

a) $\frac{2,6}{0,7} = \frac{2,6 \times 10}{0,7 \times 10} = \frac{26}{7}$.

b) $\frac{0,2}{7} = \frac{0,2 \times 10}{7 \times 10} = \frac{2}{70}$ et $\frac{2}{70} = \frac{2 \times 1}{2 \times 35} = \frac{1}{35}$.

c) $\frac{7,6}{3} = \frac{7,6 \times 10}{3 \times 10} = \frac{76}{30}$ et $\frac{76}{30} = \frac{2 \times 38}{2 \times 15} = \frac{38}{15}$;

$\frac{38}{15}$ ne peut être simplifiée car $38 = 2 \times 19$ et $15 = 3 \times 5$.

d) $\frac{0,15}{2,1} = \frac{0,15 \times 100}{2,1 \times 100} = \frac{15}{210}$; $\frac{15}{210} = \frac{3 \times 5}{3 \times 70} = \frac{5}{70}$ et $\frac{5}{70} = \frac{5 \times 1}{5 \times 14} = \frac{1}{14}$.

(On a aussi : $\frac{15}{210} = \frac{1 \times 3 \times 5}{3 \times 5 \times 14} = \frac{1}{14}$.)

e) $\frac{0,44}{0,33} = \frac{0,44 \times 100}{0,33 \times 100} = \frac{44}{33}$ et $\frac{44}{33} = \frac{11 \times 4}{11 \times 3} = \frac{4}{3}$.

VOIR AUSSI :

Décimaux, 2

Division euclidienne, 10

Quotients de décimaux, 13

Opérations

sur quotients, 15-16

PGCD, 17

$$\begin{array}{c} \text{■} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} \text{■} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \text{■} + \text{■} \\ \hline \end{array} ; \quad \begin{array}{c} \text{■} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{c} \text{■} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \text{■} - \text{■} \\ \hline \end{array}$$

Il faut toujours le même dénominateur.

5^e ● Calculer $a + b$ et $a - b$ avec :

a) $a = 4,7$ et $b = \frac{24}{10}$;

b) $a = 7$ et $b = \frac{2}{3}$.

a) On peut choisir entre l'écriture décimale et l'écriture fractionnaire.
Voici les deux façons de faire :

• $a + b = 4,7 + 2,4 = 7,1$ et $a - b = 4,7 - 2,4 = 2,3$:

• $a + b = \frac{47}{10} + \frac{24}{10} = \frac{47+24}{10} = \frac{71}{10}$ et $a - b = \frac{47}{10} - \frac{24}{10} = \frac{23}{10}$.

b) $7 + \frac{2}{3} = \frac{7}{1} + \frac{2}{3} = \frac{7 \times 3}{1 \times 3} + \frac{2}{3} = \frac{21}{3} + \frac{2}{3} = \frac{21+2}{3} = \frac{23}{3}$.

$7 - \frac{2}{3} = \frac{7}{1} - \frac{2}{3} = \frac{7 \times 3}{1 \times 3} - \frac{2}{3} = \frac{21}{3} - \frac{2}{3} = \frac{21-2}{3} = \frac{19}{3}$.

5^e ● Effectuer l'addition et les soustractions suivantes et donner le résultat sous forme de fraction irréductible ou de décimal :

a) $\frac{2,7}{3,4} + \frac{3,9}{3,4}$; b) $\frac{4}{3,5} - \frac{1,5}{3,5}$; c) $\frac{5,3}{0,4} - \frac{4,8}{0,4}$.

a) $\frac{2,7}{3,4} + \frac{3,9}{3,4} = \frac{2,7+3,9}{3,4} = \frac{6,6}{3,4}$; $\frac{6,6}{3,4} = \frac{6,6 \times 10}{3,4 \times 10} = \frac{66}{34}$

et $\frac{66}{34} = \frac{2 \times 33}{2 \times 17} = \frac{33}{17}$.

b) $\frac{4}{3,5} - \frac{1,5}{3,5} = \frac{4-1,5}{3,5} = \frac{2,5}{3,5}$; $\frac{2,5}{3,5} = \frac{2,5 \times 2}{3,5 \times 2} = \frac{5}{7}$.

c) $\frac{5,3}{0,4} - \frac{4,8}{0,4} = \frac{5,3-4,8}{0,4} = \frac{0,5}{0,4}$ et $\frac{0,5}{0,4} = \frac{0,5 \times 10}{0,4 \times 10} = \frac{5}{4}$ (ou 1,25).

VOIR AUSSI :

Écriture des quotients, 13

Simplification

des quotients, 14

Opérations

sur les quotients, 16

PGCD, 17

QUOTIENTS DE DÉCIMAUX

MULTIPLICATION - DIVISION

COMPRENDRE

5^e ● Comment calculer le produit de deux quotients ?

Quels que soient les décimaux a , b , c , et d ($b \neq 0$; $d \neq 0$), on a :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{produit des numérateurs} \\ \leftarrow \text{produit des dénominateurs} \end{array}$$

$$\frac{0,2}{7} \times \frac{3}{0,5} = \frac{0,2 \times 3}{7 \times 0,5} = \frac{0,6}{3,5} \quad \text{et} \quad \frac{0,6}{3,5} = \frac{0,6 \times 10}{3,5 \times 10} = \frac{6}{35}.$$

$$\text{Cas particulier : } d \times \frac{a}{b} = \frac{d}{1} \times \frac{a}{b} = \frac{d \times a}{b}.$$

4^e ● Comment calculer le quotient de deux quotients ?

Quels que soient les décimaux a , b , c , et d ($b \neq 0$; $d \neq 0$ et $c \neq 0$), on a :

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \left(\text{inverse } \frac{c}{d} \right) = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

$$\frac{3}{7} : \frac{5}{7} = \frac{3}{7} \times \left(\text{inverse } \frac{5}{7} \right) = \frac{3}{7} \times \frac{7}{5} = \frac{3 \times 7}{7 \times 5} = \frac{3}{5} \quad (\text{ou } 0,6).$$

UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● Effectuer les multiplications et donner les résultats sous la forme la plus simple possible :

$$\text{a) } \frac{4}{7} \times \frac{5}{8}; \quad \text{b) } \frac{35}{18} \times \frac{9}{28}; \quad \text{c) } \frac{1,2}{11} \times \frac{22}{2,1}.$$

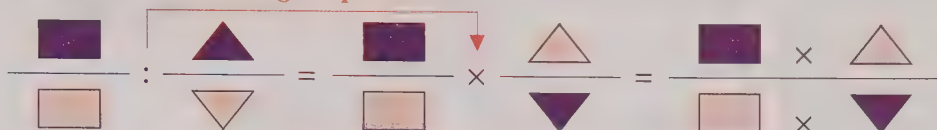
$$\text{a) } \frac{4}{7} \times \frac{5}{8} = \frac{4 \times 5}{7 \times 8} = \frac{4 \times 5}{7 \times 4 \times 2} = \frac{5}{7 \times 2} = \frac{5}{14}.$$

$$\text{b) } \frac{35}{18} \times \frac{9}{28} = \frac{35 \times 9}{18 \times 28} = \frac{5 \times 7 \times 9}{2 \times 9 \times 4 \times 7} = \frac{5}{2 \times 4} = \frac{5}{8} \quad (\text{ou } 0,625).$$

$$\text{c) } \frac{1,2}{11} \times \frac{22}{2,1} = \frac{1,2 \times 22}{11 \times 2,1} = \frac{1,2 \times 2 \times 11}{11 \times 2,1} = \frac{1,2 \times 2}{2,1} = \frac{2,4}{2,1};$$

$$\frac{2,4}{2,1} = \frac{2,4 \times 10}{2,1 \times 10} = \frac{24}{21} \quad \text{et} \quad \frac{24}{21} = \frac{3 \times 8}{3 \times 7} = \frac{8}{7}.$$

On change l'opération.



On inverse le deuxième quotient.

5^e ● L'arête d'un cube est $\frac{5}{3}$ dm. Quelle est son aire ?

(Valeur exacte ; puis arrondi au cm^2 le plus proche.)

• Un cube a six faces de même aire.

$$\text{Aire d'une face (en dm}^2\text{)} : \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{9}.$$

$$\text{Aire totale (en dm}^2\text{)} : \frac{25}{9} \times 6 = \frac{25 \times 6}{9} = \frac{150}{9} = \frac{50 \times 3}{3 \times 3} = \frac{50}{3}.$$

$$\text{L'aire totale est } \frac{50}{3} \text{ dm}^2 \text{ ou } \frac{5\,000}{3} \text{ cm}^2 \text{ (arrondi : } 1667 \text{ cm}^2\text{)}.$$

4^e ● Effectuer les divisions et donner les résultats sous la forme la plus simple possible :

$$\text{a) } \frac{9}{8} : \frac{63}{16} ; \quad \text{b) } \frac{25}{36} : \frac{5}{9} ; \quad \text{c) } \frac{21}{22} : \frac{35}{9} ; \quad \text{d) } \frac{0,5}{0,7} : \frac{3}{11} ;$$

$$\text{e) } \frac{12}{11} : 21 ; \quad \text{f) } 0,9 : \frac{1}{8} ; \quad \text{g) } 5 : \frac{3}{7}.$$

$$\text{a) } \frac{9}{8} : \frac{63}{16} = \frac{9}{8} \times \frac{16}{63} = \frac{9 \times 16}{8 \times 63} = \frac{9 \times 8 \times 2}{8 \times 7 \times 9} = \frac{2}{7}.$$

$$\text{b) } \frac{25}{36} : \frac{5}{9} = \frac{25}{36} \times \frac{9}{5} = \frac{25 \times 9}{36 \times 5} = \frac{5 \times 5 \times 9}{9 \times 4 \times 5} = \frac{5}{4} \text{ (ou } 1,25\text{)}.$$

$$\text{c) } \frac{21}{22} : \frac{35}{9} = \frac{21}{22} \times \frac{9}{35} = \frac{21 \times 9}{22 \times 35} = \frac{3 \times 7 \times 9}{22 \times 5 \times 7} = \frac{3 \times 9}{22 \times 5} = \frac{27}{110}.$$

$$\text{d) } \frac{0,5}{0,7} : \frac{3}{11} = \frac{0,5}{0,7} \times \frac{11}{3} = \frac{0,5 \times 11}{0,7 \times 3} = \frac{5,5}{2,1} = \frac{55}{21}.$$

$$\text{e) } \frac{12}{11} : 21 = \frac{12}{11} : \frac{21}{1} = \frac{12}{11} \times \frac{1}{21} = \frac{12}{11 \times 21} = \frac{4 \times 3}{11 \times 3 \times 7} = \frac{4}{77}.$$

$$\text{f) } 0,9 : \frac{1}{8} = 0,9 \times \frac{8}{1} = 0,9 \times 8 = 7,2.$$

$$\text{g) } 5 : \frac{3}{7} = 5 \times \frac{7}{3} = \frac{5 \times 7}{3} = \frac{35}{3}.$$

VOIR AUSSI :

Écriture des quotients, 13

Simplification

des quotients, 14

Opérations

sur les quotients, 15

PGCD, 17

DIVISEURS – P.G.C.D. FRACTIONS IRRÉDUCTIBLES

COMPRENDRE

OUVRIR L'ŒIL

144	78	78	66
66	1	12	1
66	12	12	6
6	5	0	2

● Il ne faut pas confondre
le mot « diviseur »
dans une division euclidienne
et l'expression
« diviseur d'un nombre ».

3^e ● Calcul du P.G.C.D. de deux entiers naturels

■ Soient $A = 144$ et $B = 78$.

Ces nombres ont chacun des diviseurs ; certains sont communs aux deux ; quel est le plus grand d'entre eux ?

L'Algorithme d'Euclide basé sur des divisions euclidiennes permet de le déterminer.

$$144 = 78 \times 1 + 66$$

$$78 = 66 \times 1 + 12$$

$$66 = 12 \times 5 + 6$$

$$12 = 6 \times 2 + 0$$

← On divise le plus grand par le plus petit.

← On divise chaque fois le diviseur de la division précédente par le reste de cette division.

■ Lorsque le reste est 0, le diviseur de la division correspondante est le plus grand commun diviseur aux deux nombres. On écrit : $\text{PGCD}(144 ; 78) = 6$.

3^e ● Fractions irréductibles

■ $\frac{144}{78}$ et $\frac{78}{144}$ peuvent être simplifiées en divisant numérateurs et dénominateurs par leur P.G.C.D. qui est 6.

$$\frac{144}{78} = \frac{144 : 6}{78 : 6} = \frac{24}{13} \quad \text{et} \quad \frac{78}{144} = \frac{78 : 6}{144 : 6} = \frac{13}{24}$$

■ Les nouvelles fractions obtenues sont **irréductibles**, car si on divise les deux termes d'une fraction par leur P. G. C. D., la fraction obtenue est irréductible.
 $\text{PGCD}(24 ; 13) = 1$; 24 et 13 sont **premiers entre eux**.

3^e ● Calcul du P.P.C.M. de deux entiers naturels

Soient $A = 15$ et $B = 21$.

Multiples de 15 : 0 ; 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ; 90 ; 105 ; 120...

Multiples de 21 : 0 ; 21 ; 42 ; 63 ; 84 ; 105 ; 126 ; 147...

Le plus petit (non nul) commun aux deux listes est 105.

On écrit : $\text{PPCM}(15 ; 21) = 105$.

Diviseurs de 24 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; **12** ; 24
 Diviseurs de 36 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; **12** ; 18 ; 36

$$\text{PGCD}(24 ; 36) = \mathbf{12}$$

Multiples de 24 : 0 ; 24 ; 48 ; **72** ; 96 ; 120 ; 144
 Multiples de 36 : 0 ; 36 ; **72** ; 108 ; 144...

$$\text{PPCM}(24 ; 36) = \mathbf{72}$$

On a : $24 \times 36 = 864$ et $\text{PGCD}(24 ; 36) \times \text{PPCM}(24 ; 36) = \mathbf{12 \times 72 = 864}$.

UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● Calculer PGCD (462 ; 546).

Écrire $\frac{462}{546}$ sous forme de fraction irréductible.

$$\begin{array}{r|l} 546 & 462 \\ 084 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 462 & 84 \\ 42 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 84 & 42 \\ 0 & 2 \end{array}$$

$$\text{PGCD}(462 ; 546) = 42.$$

$$\bullet \frac{462}{546} = \frac{462 : 42}{546 : 42} = \frac{11}{13}, \frac{11}{13} \text{ est une fraction irréductible.}$$

3^e ● Montrer que les fractions $\frac{4}{15}$ et $\frac{4}{21}$ sont irréductibles.

Calculer $\frac{4}{15} + \frac{4}{21}$ et $\frac{4}{15} - \frac{4}{21}$ en utilisant comme

dénominateur commun le PPCM des nombres 15 et 21.

Donner les réponses sous forme de fractions irréductibles.

• 4 est divisible par 1, 2 et 4 ; 15 et 21 ne le sont que par le nombre 1 de cette liste ; les deux fractions sont irréductibles.

Remarque : on aurait pu calculer PGCD(4 ; 15) et PGCD(4 ; 21), on aurait trouvé 1 pour les deux.

• Le plus petit commun multiple de 15 et 21 est 105 (voir page 42) ; on va prendre 105 comme dénominateur commun.

$$105 : 15 = 7 \text{ et } 105 : 21 = 5.$$

$$\frac{4}{15} = \frac{4 \times 7}{15 \times 7} = \frac{28}{105} \text{ et } \frac{4}{21} = \frac{4 \times 5}{21 \times 5} = \frac{20}{105}.$$

$$\frac{4}{15} + \frac{4}{21} = \frac{28}{105} + \frac{20}{105} = \frac{48}{105} \text{ et } \frac{4}{15} - \frac{4}{21} = \frac{28}{105} - \frac{20}{105} = \frac{8}{105}.$$

• $105 = 48 \times 2 + 9$; $48 = 9 \times 5 + 3$; $9 = 3 \times 3 + 0$. PGCD(105 ; 48) = 3.

$$\frac{48}{105} = \frac{48 : 3}{105 : 3} = \frac{16}{35}, \quad \frac{4}{15} + \frac{4}{21} = \frac{16}{35}.$$

• $\frac{8}{105}$ est irréductible car le numérateur est divisible par 1 ; 2 ; 4 et 8 et le dénominateur ne l'est que par le nombre 1 de cette liste. $\frac{4}{15} - \frac{4}{21} = \frac{8}{105}.$



Pour additionner ou soustraire deux fractions de dénominateurs différents, il faut les écrire avec le même dénominateur.

On a souvent intérêt à les rendre d'abord irréductibles, puis calculer le plus petit des multiples communs aux nouveaux dénominateurs.

VOIR AUSSI :

Simplification des fractions, 14

Addition, soustraction de fractions, 15

SÉQUENCES DE CALCUL

RÈGLES - PRIORITÉS

COMPRENDRE

6^e ● Additionner et multiplier à répétition

■ Dans une suite d'additions, on peut, sans modifier le résultat, changer l'ordre des termes et les regrouper comme on le désire pour faciliter les calculs.

$$1,1 + 2,5 + 6 + 7,5 + 4 + 0,9 = (1,1 + 0,9) + (2,5 + 7,5) + (6 + 4) \\ = 2 + 10 + 10 = 22.$$

■ Dans une suite de multiplications, on peut, sans modifier le résultat, changer l'ordre des facteurs et les regrouper comme on le désire pour faciliter les calculs.

$$0,5 \times 8 \times 10 \times 2,5 \times 125 \times 4 = (0,5 \times 10) \times (8 \times 125) \times (2,5 \times 4) \\ = 5 \times 1\,000 \times 10 = 50\,000.$$

5^e ● Les suites de calculs avec parenthèses

Dans une suite de calculs où figurent des parenthèses, les calculs entre parenthèses doivent être effectués avant les autres ; ils sont **prioritaires**.

$$6,5 + (21,7 - 3,2) = 6,5 + 18,5 = 25 ; \\ 4 \times (1,3 + 8,7) = 4 \times 10 = 40.$$

5^e ● Les suites de calculs sans parenthèses

$$\blacksquare 8,5 - 2,7 + 3,2 - 4$$

Il n'y a pas de multiplication ni de division ; les calculs se font de gauche à droite, dans l'ordre (à condition de ne pas rencontrer une soustraction « impossible ») :

$$8,5 - 2,7 + 3,2 - 4 = 5,8 + 3,2 - 4 = 9 - 4 = 5.$$

$8 + 7 - 20 + 12 = 15 - 20 + 12$. En arithmétique, on ne peut pas aller plus loin !

$$\blacksquare 10 + 7 \times 2,1 - 2,4$$

On effectue la multiplication en premier :

$$10 + 7 \times 2,1 - 2,4 = 10 + 14,7 - 2,4 = 24,7 - 2,4 = 22,3.$$

De même pour une division :

$$3,5 + 4,5 : 10 - 2,7 = 3,5 + 0,45 - 2,7 = 3,95 - 2,7 = 1,25.$$

Règle : en l'absence de parenthèses, multiplication et division ont priorité sur addition et soustraction.

OUVRIR

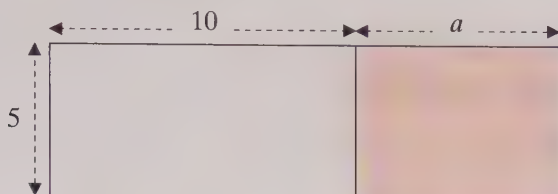
L'ŒIL

La séquence de calcul
(Galaxy 40 - TI) :

$$10 \quad (+) \quad 7 \quad (\times) \quad 2,1 \quad (-) \quad 2,4$$

$$= \text{donne } \boxed{22,3}.$$

Il est conseillé de regarder
l'affichage au fur
et à mesure,
et de le comparer au calcul
fait à la main.



Aire totale : $50 + 5a$.

Si $a = 6,7$ alors
aire totale : $50 + (5 \times 6,7)$.

Avant de faire le calcul,
on rétablit ce qui était
sous-entendu.

5^e Règle concernant le signe de multiplication

Excepté le cas où deux nombres sont écrits avec des chiffres, le signe de multiplication peut être supprimé.

Mais avant tout calcul il faut le réintégrer.

$5(17 - 12)$ veut dire $5 \times (17 - 12)$; $5a$ c'est $5 \times a$;

$(12 - 2,5)(5,2 + 3,1)$ veut dire $(12 - 2,5) \times (5,2 + 3,1)$;

ab c'est $a \times b$; $a + bc$ c'est $a + b \times c$.

UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e Calculer : a) $1,6 + 4,5 \times 3,2$; b) $63 : 0,7 - 50 + 10,6$.

La multiplication et la division ont priorité sur l'addition et la soustraction lorsqu'il n'y a pas de parenthèses.

a) $1,6 + 4,5 \times 3,2 = 1,6 + 14,4 = 16$;

b) $63 : 0,7 - 50 + 10,6 = 90 - 50 + 10,6 = 40 + 10,6 = 50,6$.

5^e Calculer : a) $4,2 \times 10 - 6 \times 1,2$; b) $4,2 \times (10 - 6) \times 1,2$;

c) $(4,2 \times 10 - 6) \times 1,2$; d) $4,2 \times (10 - 6 \times 1,2)$.

a) $4,2 \times 10 - 6 \times 1,2 = 42 - 7,2 = 34,8$;

b) $4,2 \times (10 - 6) \times 1,2 = 4,2 \times 4 \times 1,2 = 16,8 \times 1,2 = 20,16$;

c) $(4,2 \times 10 - 6) \times 1,2 = (42 - 6) \times 1,2 = 36 \times 1,2 = 43,2$;

d) $4,2 \times (10 - 6 \times 1,2) = 4,2 \times (10 - 7,2) = 4,2 \times 2,8 = 11,76$.

5^e Calculer : a) $15 + 10a$ pour $a = 2,3$;

b) $(b + 7)(b - 5)$ pour $b = 11$.

a) $15 + 10a = 15 + (10 \times a) = 15 + 10 \times a$.

Pour $a = 2,3$, on a : $15 + 10 \times 2,3 = 15 + 23 = 38$.

b) $(b + 7)(b - 5) = (b + 7) \times (b - 5)$.

Pour $b = 11$, on a : $(11 + 7) \times (11 - 5) = 18 \times 6 = 108$.



Avec les mêmes nombres, les mêmes signes opératoires mais pas les mêmes positions des parenthèses, on obtient généralement des résultats différents.

VOIR AUSSI :

Opérations

sur les décimaux, 8

SÉQUENCES DE CALCUL

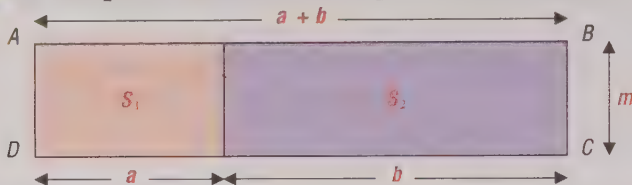
DISTRIBUTIVITÉ

COMPRENDRE

OUVRIR L'ŒIL

Sur la figure ci-contre :
 aire $ABCD : (a + b) \times m$;
 aire $ABCD = S_1 + S_2$ avec
 $S_1 = (a \times m)$ et
 $S_2 = (b \times m)$.
 D'où l'égalité :
 $(a + b) \times m = (a \times m) + (b \times m)$.

5^e ● La multiplication est distributive par rapport à l'addition



Quels que soient les nombres a , b et m , on a :

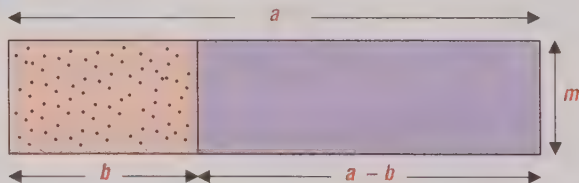
$$m \times (a + b) = (m \times a) + (m \times b) .$$

$$(a + b) \times m = (a \times m) + (b \times m) .$$

Écriture simplifiée : $m(a + b) = ma + mb$.

$$(a + b)m = am + bm .$$

5^e ● La multiplication est distributive par rapport à la soustraction



Quels que soient les nombres a , b et m ($a > b$), on a :

$$m \times (a - b) = (m \times a) - (m \times b) .$$

$$(a - b) \times m = (a \times m) - (b \times m) .$$

Écriture simplifiée : $m(a - b) = ma - mb$.

$$(a - b)m = ma - mb .$$

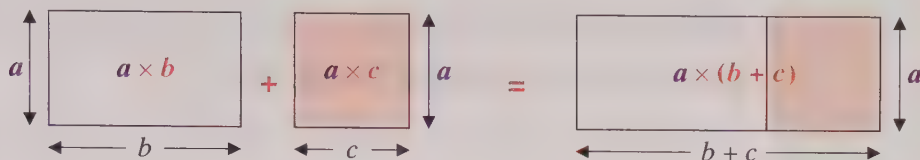
UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● a) Calculer de deux manières $(35 + 1,25) \times 4$.

b) Calculer de deux manières $24 \times 19 + 76 \times 19$.

a) « La multiplication est distributive par rapport à l'addition. »

Donc : $(35 + 1,25) \times 4 = 35 \times 4 + 1,25 \times 4$.



D'où les deux manières de calculer :

$$(35 + 1,25) \times 4 = 36,25 \times 4 = 145 ; 35 \times 4 + 1,25 \times 4 = 140 + 5 = 145 .$$

b) « La multiplication est distributive par rapport à l'addition. »

$24 \times 19 + 76 \times 19$ provient de $(24 + 76) \times 19$.

D'où les deux manières de calculer :

$$24 \times 19 + 76 \times 19 = 456 + 1\,444 = 1\,900 ; (24 + 76) \times 19 = 100 \times 19 = 1\,900 .$$

5^e ● Calculer de deux manières $(35 - 1,25) \times 4$.

« La multiplication est distributive par rapport à la soustraction. »

Donc $(35 - 1,25) \times 4 = 35 \times 4 - 1,25 \times 4$.

D'où les deux manières de calculer :

$$(35 - 1,25) \times 4 = 33,75 \times 4 = 135 ; 35 \times 4 - 1,25 \times 4 = 140 - 5 = 135 .$$

5^e ● Compléter, puis calculer :

a) $57 \times 19,5 - 57 \times 15,5 = 57 \times (\dots - \dots)$.

b) $3,15 \times 187 + 3,15 \times 113 = \dots \times (\dots + \dots)$.

a) $57 \times 19,5 - 57 \times 15,5 = 57 \times (19,5 - 15,5) = 57 \times 4 = 228$.

b) $3,15 \times 187 + 3,15 \times 113 = 3,15 \times (187 + 113) = 3,15 \times 300 = 945$.

5^e ● Calculer le plus simplement possible :

a) 43×101 ; b) 58×99 ; c) $4,5 \times 19$; d) $57 \times 27 + 57 \times 73$;

e) $158 \times 4,8 - 4,8 \times 58$.

a) $43 \times 101 = 43 \times (100 + 1) = 43 \times 100 + 43 \times 1 = 4\,300 + 43 = 4\,343$.

b) $58 \times 99 = 58 \times (100 - 1) = 58 \times 100 - 58 \times 1 = 5\,800 - 58 = 5\,742$.

c) $4,5 \times 19 = 4,5 \times (20 - 1) = 4,5 \times 20 - 4,5 \times 1 = 90 - 4,5 = 85,5$.

d) $57 \times 27 + 57 \times 73 = 57 \times (27 + 73) = 57 \times 100 = 5\,700$.

e) $158 \times 4,8 - 4,8 \times 58 = 4,8 \times (158 - 58) = 4,8 \times 100 = 480$.

VOIR AUSSI :

Opérations

sur les décimaux, 8

Priorités, suppression

du signe multiplie, 78

SÉQUENCES DE CALCUL SANS QUOTIENT

USAGE DE LA CALCULATRICE

COMPRENDRE

5^e ● Comment utiliser une formule ?

La formule $S = \pi (R^2 - r^2)$ donne l'aire d'une couronne.
Avant tout calcul, il faut rétablir les signes opératoires
sous-entendus : $S = \pi \times (R \times R - r \times r)$.

Si on fait un calcul à la main, il faut établir l'ordre des
opérations à effectuer en tenant compte des priorités :
en premier : $R \times R$ et $r \times r$; en second : $R \times R - r \times r$;
en troisième : $\pi \times (R \times R - r \times r)$.

Si on utilise la calculatrice, il faut taper la séquence :

$\pi \times (R \times^2 - r \times^2) =$

en remplaçant R et r par leurs valeurs.

UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● Si on désigne respectivement par r , h , S , S' et V , le rayon de base, la hauteur, la surface latérale, la surface totale et le volume d'un cylindre droit, on a les formules :

$$S = 2\pi rh, \quad S' = 2\pi r(r+h) \quad \text{et} \quad V = \pi r^2 h.$$

a) Rétablir dans les formules les signes $\times$ supprimés.

b) Écrire les séquences permettant le calcul de S , S' et V
quand on connaît r et h .

c) Effectuer les calculs pour $r = 43$ mm et $h = 125$ mm.

Pour les aires, arrondir au dixième de cm^2 le plus proche.

Pour le volume, arrondir au dixième de cm^3 le plus proche.

a) $S = 2 \times \pi \times r \times h$; $S' = 2 \times \pi \times r \times (r + h)$; $V = \pi \times r \times r \times h$.

b) Pour S : $2 \times \pi \times r \times h =$

Pour S' : $2 \times \pi \times r \times (r + h) =$

Pour V : $\pi \times r \times r \times h =$

ou $\pi \times r \times^2 \times h =$

c) Pour S , on a 33772.12103 . $S \approx 33772 \text{ mm}^2$; $S \approx 337,7 \text{ cm}^2$.

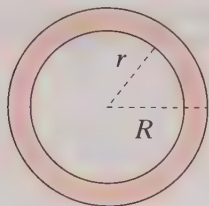
Pour S' , on a 45389.73066 . $S' \approx 45390 \text{ mm}^2$; $S' \approx 453,9 \text{ cm}^2$.

Pour V , on a 726100.6021 . $V \approx 726101 \text{ mm}^3$; $V \approx 726,1 \text{ cm}^3$.

OUVRIR L'ŒIL

- Les unités d'aire vont
de 100 en 100 ;
 $1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$.

- Les unités de volume vont
de 1 000 en 1 000 ;
 $1 \text{ cm}^3 = 1\,000 \text{ mm}^3$.



La formule permettant de calculer l'aire S de la couronne rouge est :

$$S = \pi (R^2 - r^2).$$

La séquence de la calculatrice est :

$$\pi \times (R \times^2 - r \times^2) = .$$

5^e ● Analyser les quatre formules :

$$A = a + bc ; B = (a + b) c ; C = a - bc ; D = (a - b) c .$$

Après avoir établi les séquences de calcul permettant de trouver A , B , C et D avec la calculatrice, recopier et compléter le tableau :

a	b	c	A	B	C	D
197,2	15,9	10,3				
415,2	27,3	14,8				
712,3	9,8	70,2				

• A est une somme.

Le premier terme est a ; le second terme est le produit bc .

B est un produit.

Le premier facteur est la somme $a + b$; le second facteur est c .

C est une différence.

Le premier terme est a ; le second terme est le produit bc .

D est un produit.

Le premier facteur est la différence $a - b$; le second facteur est c .

• Pour A : a $(+)$ b $(\times)$ c $(=)$.

Pour B : $()$ a $(+)$ b $()$ $(\times)$ c $(=)$
ou a $(+)$ b $(=)$ $(\times)$ c $(=)$.

Pour C : a $(-)$ b $(\times)$ c $(=)$.

Pour D : $()$ a $(-)$ b $()$ $(\times)$ c $(=)$
ou a $(-)$ b $(=)$ $(\times)$ c $(=)$.

a	b	c	A	B	C	D
197,2	15,9	10,3	360,97	2 194,93	33,43	1 867,39
415,2	27,3	14,8	819,24	6 549	11,16	5 740,92
712,3	9,8	70,2	1 400,26	50 691,42	24,34	49 315,5

VOIR AUSSI :

Aires et volumes, 113

Arrondis, 7

Priorités dans les calculs, 18

Tableau de conversion, p. 204

SÉQUENCES DE CALCUL AVEC QUOTIENTS

USAGE DE LA CALCULATRICE

COMPRENDRE

OUVRIR

Le trait de fraction représente une division mais cache des parenthèses. Lorsqu'on le remplace par : (ou par $\div$ de la calculatrice), il faut réintroduire ces parenthèses.

5^e $a + \frac{b}{c}$ est la somme de a et du quotient $\frac{b}{c}$.

C'est une autre écriture de $a + (b : c)$; comme la division a priorité sur l'addition, cela s'écrit aussi $a + b : c$.

$\frac{a}{b + c}$ est le quotient de a par la somme $b + c$.

C'est une autre écriture de $a : (b + c)$; les parenthèses sont indispensables.

$\frac{a + b}{c}$ est le quotient de la somme $a + b$ par le nombre c .

C'est une autre écriture de $(a + b) : c$; les parenthèses sont indispensables.

● Tout ce qui a été dit avec le signe $+$ est valable avec le signe $-$;

$$a - \frac{b}{c} = a - b : c ; \quad \frac{a}{b - c} = a : (b - c) ; \quad \frac{a - b}{c} = (a - b) : c .$$

UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e a) Calculer $\frac{a}{b + c}$ en utilisant :

$$a \quad (+) \quad (\quad b \quad (+) \quad c \quad) \quad (=)$$

et avec les nombres ci-contre.

a	21	2 000	9 494
b	2,3	50	47
c	0,7	17,2	47

b) Que permet de calculer la séquence $a \quad (+) \quad b \quad (+) \quad c \quad (=)$?

Faire les calculs avec les valeurs ci-dessus.

(Résultat exact ou arrondi au dixième le plus proche.)

a) Les réponses sont : 7 ; 29,8 (arrondi) et 101.

b) La division a priorité sur l'addition ; cela revient à ajouter le nombre c au quotient de a par b .

Les réponses sont : 9,8 (arrondi) ; 57,2 et 249.

$$a + \frac{b}{c} = a + (b : c)$$

$$\frac{a}{b + c} = a : (b + c)$$

$$\frac{a + b}{c} = (a + b) : c$$

Le trait de fraction indique une division ;
lorsqu'on le remplace par $:$ il faut réintroduire les parenthèses.

5^e ● Reprendre l'énoncé précédent en remplaçant le signe $+$ par le signe $-$.

a) Les réponses sont 13,125 (résultat exact que l'on pourrait arrondir à 13,1) ; 61,0 (arrondi) ; impossible (division par 0).

Remarque

Dans le premier cas, on divise 21 par 2,3 - 0,7 soit 1,6 et on obtient 13,125 ; si on multiplie 13,125 par 1,6 on retrouve 21 ; 13,125 est bien un résultat exact.

b) La division a priorité sur la soustraction ; on retranche c au quotient de a par b . On obtient : 8,4 (arrondi) ; 22,8 ; 155.

5^e ● a) Calculer $\frac{a+b}{c}$ en utilisant

() a (+) b () (÷) c (=)

et avec les nombres ci-contre :

a	33,6	106,4	392,7
b	14,7	43,7	346,8
c	21	1,9	17

b) Comparer () 33,6 (+) 14,7 () (+) 21 (=)

et 33,6 (+) 14,7 (=) (÷) 21 (=) .

c) Que permet de calculer a (+) b (÷) c (=) ?

Faire les calculs avec les valeurs ci-dessus.

a) Les réponses sont : 2,3 ; 79 ; 43,5 .

b) On a les mêmes résultats.

c) La division a priorité sur l'addition ; on ajoute au nombre a , le quotient de b par c . On obtient : 34,3 ; 129,4 ; 413,1 .

5^e ● Reprendre l'énoncé précédent en remplaçant le signe $+$ par le signe $-$.

a) On obtient : 0,9 ; 33 ; 2,7 .

b) On a les mêmes résultats.

c) La division a priorité sur la soustraction ; on retranche à a le quotient de b par c . On obtient : 32,9 ; 83,4 ; 372,3 .

VOIR AUSSI :

Arrondis, 7

Priorités dans les calculs, 10

RACINES CARRÉES

DÉFINITION

ÉQUATION $x^2 = A$

COMPRENDRE

4^e ● Qu'est-ce qu'une racine carrée ?

3^e A étant un nombre positif, le nombre **positif** dont le carré est A s'appelle **la racine carrée** de A et se note $\sqrt{A}$.

Le symbole $\sqrt{\quad}$ s'appelle **le radical**.

Les unités
de longueur
et d'aire se
correspondent.



A et a sont positifs ; $(\sqrt{A})^2 = A$ et $\sqrt{a^2} = a$.

3^e ● Résoudre l'équation $x^2 = A$

■ A étant un nombre strictement positif, l'équation $x^2 = A$ a deux solutions ; ce sont les nombres opposés $\sqrt{A}$ et $-\sqrt{A}$.

■ $x^2 = 0$ a pour solution 0.

■ $x^2 = -3$ n'a pas de solution car un carré est toujours positif.

UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● Calculer la racine carrée, si elle existe, des nombres :

a) 25 ; b) 0,25 ; c) -47 ; d) 47.

a) La racine carrée de 25 est $\sqrt{25}$ ou 5. (En effet : $5^2 = 25$.)

b) La racine carrée de 0,25 est $\sqrt{0,25}$ ou 0,5. (En effet : $0,5^2 = 0,25$.)

c) -47 n'a pas de racine carrée car c'est un nombre négatif.

d) La racine carrée de 47 est $\sqrt{47}$; 47 $\sqrt{x}$ amène à l'affichage

$\boxed{6.855\ 654\ 6}$; donc $\sqrt{47} \approx 6,86$ (arrondi au centième le plus proche).

Remarque : observer ce que donne la séquence 47 $\sqrt{-x}$ $\sqrt{x}$.

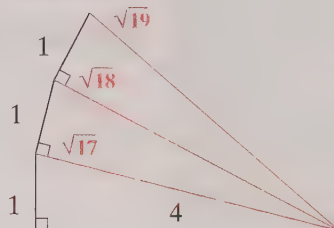
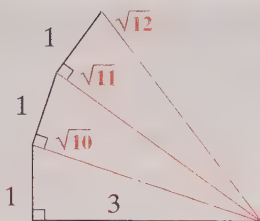
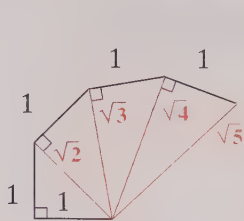
OUVRIR L'ŒIL

Aire : 3 cm^2 .

Côté : $\sqrt{3}\text{ cm}$

Aire : $(2,5)^2\text{ cm}^2$
ou $6,25\text{ cm}^2$

Côté : 2,5 cm
ou $\sqrt{(2,5)^2}\text{ cm}$
ou $\sqrt{6,25}\text{ cm}$



3^e ● Écrire plus simplement :

a) $\sqrt{5,2^2}$; b) $\sqrt{(-5,2)^2}$; c) $(\sqrt{5,2})^2$; d) $(\sqrt{5,2})^4$.

a) Lorsque a est positif, $\sqrt{a^2} = a$; donc $\sqrt{5,2^2} = 5,2$.

b) Pour $\sqrt{(-5,2)^2}$, on ne peut pas appliquer la formule précédente.

Mais $(-5,2)^2$ est égal à $5,2^2$; donc $\sqrt{(-5,2)^2} = \sqrt{5,2^2} = 5,2$.

c) On sait que $(\sqrt{A})^2 = A$; donc $(\sqrt{5,2})^2 = 5,2$.

d) $(\sqrt{5,2})^4 = (\sqrt{5,2})^2 \times (\sqrt{5,2})^2 = 5,2 \times 5,2 = 27,04$.

3^e ● a) Compléter : $100 = \dots^2$; $0,01 = \dots^2$; $\frac{25}{36} = \left(\frac{\dots}{\dots}\right)^2$.

b) Écrire plus simplement : $\sqrt{100}$; $\sqrt{0,01}$ et $\sqrt{\frac{25}{36}}$.

a) $100 = 10^2$; $0,01 = 0,1^2$; $\frac{25}{36} = \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

b) $\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$; $\sqrt{0,01} = \sqrt{0,1^2} = 0,1$;

$\sqrt{\frac{25}{36}} = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5}{6}$.

3^e ● Résoudre les équations :

a) $x^2 = 43$; b) $x^2 - 81 = 0$; c) $x^2 + 49 = 0$.

a) L'équation $x^2 = 43$ a deux solutions : $\sqrt{43}$ et $-\sqrt{43}$.

b) $x^2 - 81 = 0$ peut s'écrire $x^2 = 81$.

L'équation $x^2 = 81$ a deux solutions : $\sqrt{81}$ (ou 9) et $-\sqrt{81}$ (ou -9).

c) $x^2 + 49 = 0$ peut s'écrire $x^2 = -49$; elle n'a pas de solution.

3^e ● Résoudre les équations :

a) $x^2 - 4 = 45$; b) $x^2 + 7 = 32$; c) $x^2 - 5 = -1$.

a) $x^2 - 4 = 45$; donc $x^2 = 45 + 4$; $x^2 = 49$.

Les solutions sont 7 et -7.

b) $x^2 + 7 = 32$; donc $x^2 = 32 - 7$; $x^2 = 25$.

Les solutions sont 5 et -5.

c) $x^2 - 5 = -1$; $x^2 = -1 + 5$; $x^2 = 4$; les solutions sont 2 et -2.

VOIR AUSSI :

Pythagore, 78

Calcul sur les radicaux, 23

Équations se ramenant au

1^{er} degré, 42

RACINES CARRÉES

CALCULS SUR LES RADICAUX

COMPRENDRE

3^e ● A et B sont positifs.

$$\sqrt{A} \times \sqrt{B} = \sqrt{A \times B} \quad ; \quad \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}} \quad (B \neq 0).$$

Cela permet d'écrire avec un seul radical, soit un produit de radicaux, soit un quotient de radicaux.

Attention !

Il n'y a pas de formule pour $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ et pour $\sqrt{A + B}$.

Il n'y a pas de formule pour $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ et pour $\sqrt{A - B}$.

UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● Calculer (calculs exacts).

- a) $\sqrt{7} \times \sqrt{5}$; b) $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$;
c) $2\sqrt{3} + \sqrt{75}$; d) $\sqrt{18} + \sqrt{32}$.

On sait que $\sqrt{A} \times \sqrt{B} = \sqrt{A \times B}$.

a) $\sqrt{7} \times \sqrt{5} = \sqrt{7 \times 5} = \sqrt{35}$.

b) $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$.

c) $2\sqrt{3} + \sqrt{75}$. On peut penser que 75 peut s'écrire sous la forme $a\sqrt{3}$, avec a entier.

$$\sqrt{75} = \sqrt{3 \times 25} = \sqrt{3} \times \sqrt{25} = \sqrt{3} \times 5 = 5\sqrt{3}.$$

$$\text{Donc } 2\sqrt{3} + \sqrt{75} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}.$$

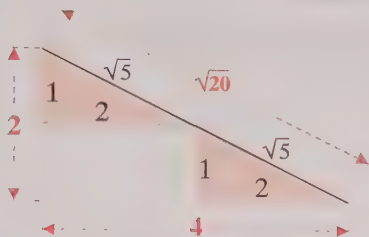
d) $\sqrt{18} + \sqrt{32}$. Il n'y a pas de formule.

Dans ce cas, on peut transformer les deux radicaux.

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} ;$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2} ;$$

$$\sqrt{18} + \sqrt{32} = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (3 + 4)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}.$$



$$\sqrt{5} + \sqrt{5} = \sqrt{20}$$

$$\sqrt{5} + \sqrt{5} \neq \sqrt{5+5}$$

3^e ● Montrer que $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75} = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} \\ \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3 \times \sqrt{3} \\ \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5 \times \sqrt{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \\ \text{ou } (2+3-5)\sqrt{3} \\ \text{ou } 0 \times \sqrt{3} \text{ ou } 0. \end{array}$$

3^e ● Écrire autrement : a) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$; c) $\sqrt{\frac{2}{9}}$; d) $\sqrt{\frac{0,3}{1,6}}$
(calculs exacts).

On sait que : $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}}$.

a) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4$;

b) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$;

c) $\sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$;

d) $\sqrt{\frac{0,3}{1,6}} = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

3^e ● Écrire sans radical au dénominateur : $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $\frac{-1}{\sqrt{5}}$.

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} ; \quad \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{-1 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5}.$$

3^e ● a) Multiplier les deux termes du quotient $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ par $\sqrt{2}-1$.

b) Multiplier les deux termes de $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ par $\sqrt{5}+2$.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1 \times (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$.

b) $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{1 \times (\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5})^2-2^2} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2$.

OUVRIR

L'ŒIL

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$(\sqrt{2})^2 = 2 ;$$

$$(\sqrt{5})^2 = 5 .$$

VOIR AUSSI :

Racines carrées, 22

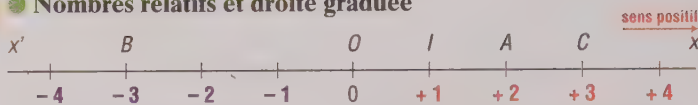
SUR UNE DROITE
GRADUÉE

COMPRENDRE

OUVRIRE
L'ŒIL

Un nombre relatif est toujours composé de deux parties :

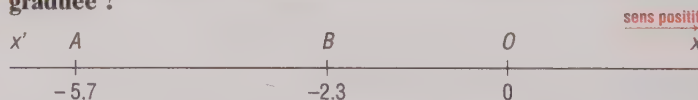
- un **signe + ou -** (le signe + pouvant être sous-entendu) ;
- un **nombre arithmétique** qui peut indiquer la valeur d'une distance, le montant d'un gain ou d'une perte, une température, une durée...

6^e ● Nombres relatifs et droite graduée

Points repérés à partir de l'origine O avec les **nombres négatifs**.

Points repérés à partir de l'origine O avec les **nombres positifs**.

- A est repéré par $+2$; $+2$ est l'abscisse de A .
La distance de O à A est 2. De O à A , on va dans le sens positif.
- B est repéré par -3 ; -3 est l'abscisse de B .
La distance de O à B est 3. De O à B , on va dans le sens négatif.
- B et C sont deux points symétriques par rapport à O ; leurs abscisses -3 et $+3$ sont des nombres opposés.

5^e ● Comment calculer la distance de deux points sur une droite graduée ?

Sur une droite graduée, la distance de deux points A et B est :

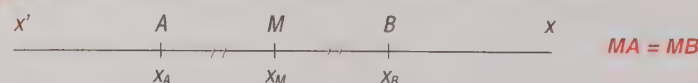
$$AB = \text{abscisse la plus grande} - \text{abscisse la plus petite.}$$

Une distance est toujours positive.

Calcul de la distance de $A(-5,7)$ à $B(-2,3)$:

$$-2,3 > -5,7 ; \text{ on a : } AB = -2,3 - (-5,7) = -2,3 + 5,7 = 3,4 .$$

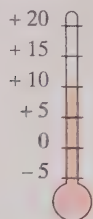
La distance de A à B (ou de B à A) est 3,4.

3^e ● Comment calculer l'abscisse du milieu d'un segment ?

L'abscisse du milieu M du segment $[AB]$ est donnée par :

$$x_M = \frac{1}{2} (x_A + x_B) ;$$

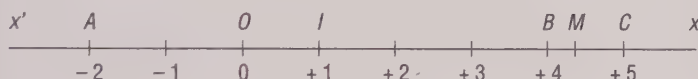
x_M est la moyenne arithmétique de x_A et de x_B .



Le thermomètre repère la température avec des nombres relatifs.
La graduation zéro indique la température de la glace fondante et
la graduation +100, celle de la vapeur d'eau bouillante
(échelle centésimale ou Celsius).

UTILISER SES CONNAISSANCES

- 6^e ● Graduer une droite $x'x$ et placer les points A , B et C d'abscisses respectives -2 , $+4$ et $+5$. Que peut-on dire de l'abscisse d'un point M situé entre B et C ?



L'abscisse de M est comprise entre $+4$ et $+5$.

- 5^e ● Placer sur une droite graduée les points A , B et C d'abscisses respectives $-2,8$, $+1,7$ et $+4,1$.
Calculer les distances de A à B , de B à C et de C à A .



$+1,7 > -2,8$. La distance de A à B est : $+1,7 - (-2,8) = +4,5$; $AB = 4,5$.
 $+4,1 > +1,7$. La distance de B à C est : $+4,1 - (+1,7) = +2,4$; $BC = 2,4$.
 $+4,1 > -2,8$. La distance de C à A est : $+4,1 - (-2,8) = +6,9$; $CA = 6,9$.

- 3^e ● Sur une droite graduée, on a les points A , B et C d'abscisses respectives $-\frac{5}{6}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{7}{6}$. Quelles sont les abscisses des milieux M , N et P de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$?

$$x_M = \frac{1}{2} (x_A + x_B) = \frac{1}{2} \left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{6} \right) = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

$$x_N = \frac{1}{2} (x_B + x_C) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{7}{6} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{6} \right) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

$$x_P = \frac{1}{2} (x_A + x_C) = \frac{1}{2} \left(-\frac{5}{6} + \frac{7}{6} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{6} \right) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

P et B ont même abscisse, ils sont confondus. B est le milieu de $[AC]$.

VOIR A2551

Repérage dans le plan, 22

Addition, soustraction, 27

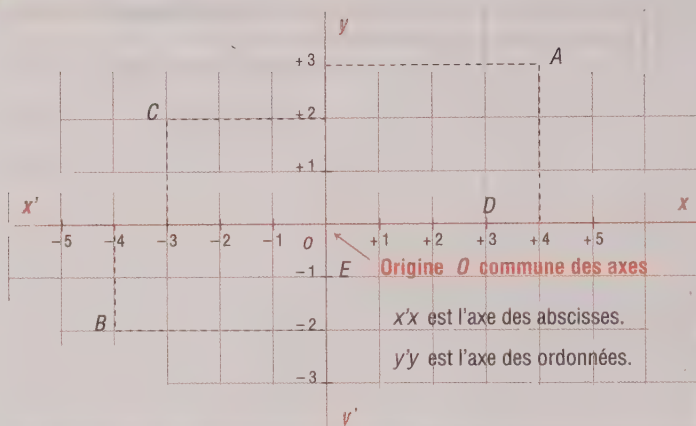
Milieu d'un segment, 49, 106

Comparaison, Inégalités, 78

REPÉRAGE DANS UN PLAN

COMPRENDRE

6^e ● Comment se repérer dans le plan ?



OUVRIR

L'ŒIL

Dans un plan muni
d'un repère :

- à tout point correspond un couple de nombres qui sont ses coordonnées,
- à tout couple de nombres correspond un point du plan.

A est repéré par ses coordonnées $+4$ et $+3$.
 $+4$ est l'abscisse de A ; elle est lue sur $x'x$.
 $+3$ est l'ordonnée de A ; elle est lue sur $y'y$.
 $(+4 ; +3)$ est le couple de coordonnées de A .

On note $A (+4 ; +3)$: l'abscisse, en premier,
l'ordonnée, en second.

B a pour coordonnées -4 et -2 ;

C a pour coordonnées -3 et $+2$;

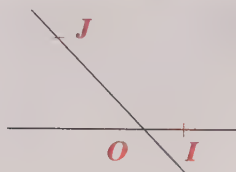
D a pour coordonnées $+3$ et 0 ;

E a pour coordonnées 0 et -1 ;

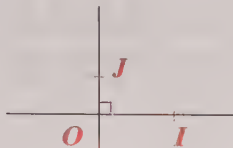
O a pour coordonnées 0 et 0 .

4^e ● Qu'est-ce qu'un repère ?

3^e Si, dans un plan, on a tracé deux axes de coordonnées (droites sécantes graduées, avec la même origine), on dit que le plan est muni d'un repère. Si les deux axes sont **perpendiculaires**, on dit que le repère est **orthogonal**. Si les deux axes du repère orthogonal sont gradués avec **la même unité** on dit que le repère est **orthonormé**.

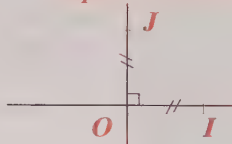


Repère quelconque



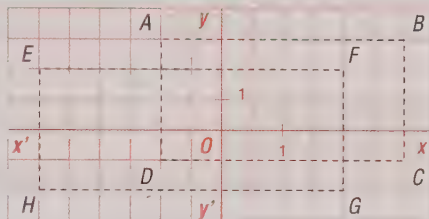
Chaque repère est orthogonal.

Repère orthonormé



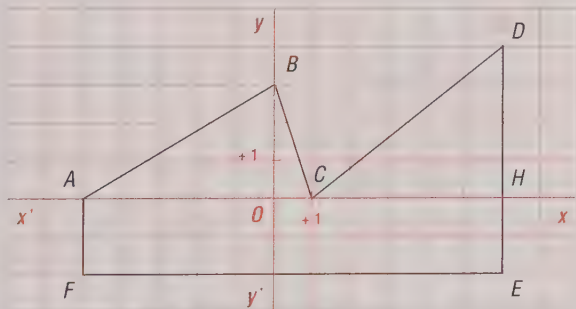
UTILISER SES CONNAISSANCES

- 6° ● Quelles sont les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H dans le repère constitué par les axes de coordonnées $x'x$ et $y'y$?



	A	B	C	D	E	F	G	H
Abscisses	-1	+3	+3	-1	-3	+2	+2	-3
Ordonnées	+3	+3	-1	-1	+2	+2	-2	-2

- 5° ● Les axes de coordonnées sont perpendiculaires et gradués en centimètre. Placer les points : A(-5 ; 0), B(0 ; +3), C(+1 ; 0), D(+6 ; +4), E(+6 ; -2) et F(-5 ; -2). Tracer : [AB], [BC], [CD], [DE], [EF] et [FA]. Quelle est l'aire de l'hexagone ABCDEF ?



L'aire de l'hexagone est la somme de trois aires :

aire ABC, aire CDH, aire AHEF.

Aire ABC : $(AC \times BO) : 2 = (6 \times 3) : 2 = 9$.

Aire CHD : $(CH \times HD) : 2 = (5 \times 4) : 2 = 10$.

Aire AHEF : $AH \times AF = 11 \times 2 = 22$.

Donc l'aire ABCDEF vaut $9 + 10 + 22 = 41$. L'aire de l'hexagone est 41 cm^2 .



L'échelle du dessin est $\frac{1}{2}$
mais on fait tous les calculs
avec les vraies dimensions ;
celles-ci étant en cm,
les aires sont en cm^2 .

VOIR AUSSI :

Aire d'un triangle, 69

Droite graduée, 24

Graphiques, 130

COMPARAISON
INÉGALITÉS*Attention !*

À partir de cette fiche, les nombres positifs seront assimilés aux nombres arithmétiques ; ils seront écrits avec ou sans signe + .

COMPRENDRE

5^e ● Comment comparer deux nombres relatifs ?4^e

■ S'ils sont tous deux positifs

(Voir comparaison des nombres arithmétiques.)

En cinquième : cf. Comparaison de deux décimaux, 5 ;

en quatrième : cf. Comparaison de deux décimaux, 5

et Comparaison de deux nombres en écriture fractionnaire, 13.

■ S'ils sont tous deux négatifs

Ils sont rangés en sens contraire de leurs opposés (qui sont positifs).

■ Si l'un est positif et l'autre négatif

Tout nombre négatif non nul est inférieur à n'importe quel nombre positif.

OUVRIR
L'ŒIL

On suppose que $a < b$.

- Quel que soit k positif ou négatif

$$a + k < b + k.$$

- Si k est positif

$$a \times k < b \times k.$$

- Si k est négatif

$$a \times k > b \times k.$$

4^e ● Les inégalités et les opérations3^e

■ $a + k$ et $b + k$ sont rangés comme a et b , quel que soit k .

■ Si k est un nombre positif :

$a \times k$ et $b \times k$ sont rangés comme a et b .

■ Si k est un nombre négatif :

$a \times k$ et $b \times k$ sont rangés en sens contraire de a et b .

UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● Comparer : a) -7 et $+8$; b) -4 et $-3,7$; c) $+9,7$ et $+9,63$.

a) -7 est négatif ; $+8$ est positif. Donc $-7 < +8$.

b) -4 et $-3,7$ sont tous deux négatifs ; ils sont rangés en sens contraire de leurs opposés. Comme $3,7 < 4$; on a : $-3,7 > -4$.

c) $+9,7$ et $+9,63$ sont positifs. Donc $+9,7 > +9,63$.



+1 c'est plus chaud que -5 : $+1 > -5$.

+6 c'est plus chaud que +4 : $+6 > +4$.

-2 c'est plus chaud que -5 : $-2 > -5$.

5^e ● Ranger par ordre croissant (du plus petit au plus grand) :

$-7,2$; $+6,4$; $+5,19$; -12 ; $-1,5$; $+10$; 0 .

$$\underline{-12 < -7,2 < -1,5 < 0 < 5,19 < 6,4 < 10.}$$

en sens contraire des opposés

4^e ● Ranger par ordre décroissant (du plus grand au plus petit) :

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5} \text{ et } 0.$$

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{4} > 0 > -\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$$

car $\frac{4}{12} > \frac{3}{12}$ $-\frac{1}{5} = -\frac{2}{10}$ et $-\frac{1}{2} = -\frac{5}{10}$;
 $\frac{2}{10} < \frac{5}{10}$ donc $-\frac{2}{10} > -\frac{5}{10}$.

3^e ● Sachant que $a > -1$ que peut-on affirmer pour :

a) $a + 0,6$; b) $a \times 0,6$; c) $a + (-0,6)$; d) $a \times (-0,6)$?

a) $a + 0,6$ et $-1 + 0,6$ (ou $-0,4$) sont rangés comme a et -1 .

Donc $a + 0,6 > -0,4$.

b) $a \times 0,6$ et $-1 \times 0,6$ (ou $-0,6$) sont rangés comme a et -1 .

Donc $a \times 0,6 > -0,6$.

c) $a + (-0,6)$ et $-1 + (-0,6)$ (ou $-1,6$) sont rangés comme a et -1 .

Donc $a + (-0,6) > -1,6$.

d) $a \times (-0,6)$ et $-1 \times (-0,6)$ (ou $0,6$) sont rangés en sens contraire de a et -1 car on multiplie par un nombre négatif.

Donc $a \times (-0,6) < 0,6$.



Le sens du signe d'une inégalité ne change que dans un seul cas :

lors d'une multiplication (ou d'une division) des deux membres par un même nombre négatif.

VOIR AUSSI :

Comparaison de deux décimaux, 1

Comparaison de deux nombres en écriture

fractionnaire, 11

Addition, soustraction, 27

Multiplication, 27-28

ADDITION SOUSTRACTION

COMPRENDRE

OUVRIR L'ŒIL

Si on assimile nombres positifs et nombres arithmétiques, on a :

- $3 + 7 = 10$;
- $3 + (-7) = -4$;
- $-3 + 7 = 4$.

5^e 4^e ● Comment additionner deux nombres relatifs ?

■ S'ils sont de même signe :

$$\begin{array}{ccc} \text{même signe } + & & \text{même signe } - \\ \downarrow & & \downarrow \\ (+3) + (+7) = +10 & & (-3) + (-7) = -10 \end{array}$$

$10 = 3 + 7$ 10 est la somme des distances à l'origine ou bien la somme des montants des gains ou des pertes.

■ S'ils sont de signes contraires :

signe de l'abscisse du point le plus éloigné de l'origine ou signe associé au montant du gain ou de la perte le plus élevé.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ (+3) + (-7) = -4 & & (-3) + (+7) = +4 \end{array}$$

$4 = 7 - 3$ 4 est la différence des distances à l'origine ou bien la différence des montants du gain ou de la perte.

5^e 4^e ● Effectuer la somme de plusieurs nombres relatifs

La somme de plusieurs nombres relatifs ne dépend ni de l'ordre des termes ni des regroupements.

5^e 4^e ● Qu'est-ce que deux nombres opposés ?

Deux nombres relatifs dont la somme est 0 sont opposés ; chacun est l'opposé de l'autre.

L'opposé de $-2,3$ est $2,3$; l'opposé de $2,3$ est $-2,3$.

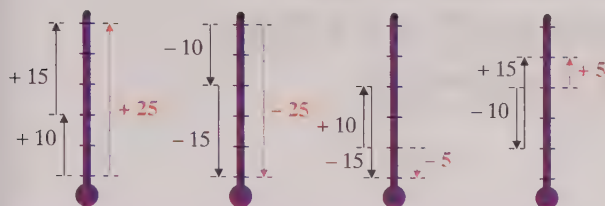
L'opposé d'un nombre relatif x quelconque se note $-x$.

5^e 4^e ● Comment effectuer une soustraction ?

Elle se ramène à une addition ; on ajoute au premier terme l'opposé du second :

$$18 - (+15) = 18 + (-15) = 3 .$$

$$a - b = a + \text{opposé de } b = a + (-b) .$$



Deux variations de température successives...

$$(+10) + (+15) = +25;$$

$$(-10) + (-15) = -25;$$

$$(+10) + (-15) = -5;$$

$$(-10) + (+15) = +5.$$

UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● Calculer : $7 + (-13)$; $-1,4 + (-7,5)$; $7 + 2,5$; $0 + (-4)$.

On applique les règles et on obtient : -6 ; $-8,9$; $9,5$; -4 .

5^e ● Calculer S tel que $S = -7 + (+12) + (-8) + (+7) + (-12)$:

a) en opérant dans l'ordre,

b) en regroupant les positifs et les négatifs,

c) en faisant des groupements simplificateurs.

a) $-7 + (+12) = 5$; $5 + (-8) = -3$; $-3 + (+7) = 4$ et $4 + (-12) = -8$.

Donc $S = -8$.

b) $S = (+12) + (+7) + (-7) + (-8) + (-12) = 19 + (-27) = -8$.

c) $S = -7 + (+7) + (+12) + (-12) + (-8) = 0 + 0 + (-8) = -8$.

5^e ● Que représente $-x$ lorsque $x = 7$? Lorsque $x = -3$?

$-x$ représente toujours l'opposé de x .

Si $x = 7$ alors $-x = -7$.

Si $x = -3$ alors $-x = +3$.

5^e ● Calculer $a - b$, $b - c$ et $c - a$ avec $a = -3,2$; $b = +5$ et $c = -7$.

$$a - b = -3,2 - (+5) = -3,2 + (-5) = -8,2.$$

$$b - c = +5 - (-7) = 5 + (+7) = 12.$$

$$c - a = -7 - (-3,2) = -7 + (+3,2) = -3,8.$$

4^e ● Calculer $A = a - b$, $B = b - c$ et $C = c - a$, puis $A + B + C$

avec $a = \frac{3}{4}$, $b = -\frac{2}{3}$ et $c = \frac{7}{12}$.

$$A = \frac{3}{4} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12}.$$

$$B = -\frac{2}{3} - \frac{7}{12} = -\frac{8}{12} - \frac{7}{12} = -\frac{15}{12}.$$

$$C = \frac{7}{12} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12} - \frac{9}{12} = -\frac{2}{12}.$$

$$A + B + C = \frac{17}{12} + \left(-\frac{15}{12}\right) + \left(-\frac{2}{12}\right) = \frac{17}{12} + \left(-\frac{17}{12}\right) = 0.$$

VOIR AUSSI :

Addition et soustraction de quotients, 15

Parenthèses, priorités, 30

MULTIPLICATION
PUISSANCES

COMPRENDRE

4^e ● Comment effectuer le produit de deux nombres relatifs ?

■ S'ils sont de *même signe*, le produit est *positif*.

$$+ 4 \times (+3) = + (4 \times 3) = + 12 \quad \text{ou} \quad 4 \times 3 = 12 ;$$

$$- 4 \times (-3) = + (4 \times 3) = + 12 \quad \text{ou} \quad - 4 \times (-3) = 12 .$$

■ S'ils sont de *signes contraires*, le produit est *négatif*.

$$- 4 \times (+3) = - (4 \times 3) = - 12 \quad \text{ou} \quad - 4 \times 3 = - 12 .$$

Cas particuliers : $a \times 0 = 0$; $a \times 1 = a$; $a \times (-1) = -a$.

4^e ● Produit de plusieurs nombres relatifs

Le produit de plusieurs nombres relatifs ne dépend ni de l'ordre des facteurs, ni des regroupements.

4^e ● Qu'est-ce que deux nombres inverses ?

Deux nombres relatifs dont le produit est 1 sont *inverses* ; chacun est l'inverse de l'autre.

$$-\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad -\frac{3}{2} \quad \text{sont inverses, car} \quad \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = +\left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}\right) = 1 .$$

De façon générale, l'**inverse de** a ($a \neq 0$) se note $\frac{1}{a}$ ou a^{-1} .

4^e ● Puissances d'un nombre relatif a

On suppose a et b différents de 0.

■ $a^n = \underbrace{a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$ (n : entier naturel tel que $n \geq 2$).

a^n se lit « a exposant n » ; c'est une puissance de a .

$$a^1 = a \quad \text{et} \quad a^0 = 1 .$$

■ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (n entier naturel) ; a^{-n} et a^n sont inverses.

■ n et p étant des entiers relatifs :

$$a^n \times a^p = a^{n+p} ; \quad (a^n)^p = a^{n \times p} ; \quad (ab)^n = a^n \times b^n .$$

↑
somme des exposants ↑
produit des exposants

OUVRIR

L'ŒIL

● Ne pas confondre :

$$(-3)^2 \quad \text{et} \quad -3^2 .$$

Le premier est le carré de -3 ; c'est

$$(-3) \times (-3) \quad \text{ou} \quad 9 .$$

Le second est l'opposé de 3^2 et vaut -9 .

● Ne pas confondre :

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad \text{et}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} .$$

● Cas particulier

0^n (avec n entier naturel différent de 0) est égal à 0 .

		1 ^{er} facteur	
		+	-
2 ^e facteur	+	+	-
	-	-	+

Signe
du produit

		Exposant	
		Pair	Impair
Nombre	+	+	+
	-	+	-

Signe de
la puissance

UTILISER SES CONNAISSANCES

4^e ● Calculer : $3,2 \times (-2,1)$; $-4 \times 7,2$; $-2 \times (-3,7)$; $4 \times 2,5$.

On cherche d'abord le signe, puis on multiplie les valeurs.

On obtient : $-6,72$; $-28,8$; $7,4$; 10 .

4^e ● Calculer, en faisant des regroupements intéressants, A tel que :

$$A = \frac{5}{7} \times (-2) \times \left(-\frac{4}{3}\right) \times (-7) \times \left(-\frac{3}{4}\right).$$

$$A = \left[\frac{5}{7} \times (-7)\right] \times (-2) \times \left[-\frac{4}{3} \times \left(-\frac{3}{4}\right)\right] = -5 \times (-2) \times 1 = 10.$$

4^e ● a) Montrer que $-\frac{3}{7}$ et $-\frac{7}{3}$ sont inverses, ainsi que -6 et $-\frac{1}{6}$.

b) Quels sont les inverses de $\frac{3}{7}$; -3 et $\frac{1}{6}$?

$$a) -\frac{3}{7} \times \left(-\frac{7}{3}\right) = +\left(\frac{3}{7} \times \frac{7}{3}\right) = 1 ; -6 \times \left(-\frac{1}{6}\right) = +\left(6 \times \frac{1}{6}\right) = 1.$$

b) Les inverses de $\frac{3}{7}$; -3 et $\frac{1}{6}$ sont respectivement $\frac{7}{3}$; $-\frac{1}{3}$ et 6 .

4^e ● Calculer : a^2 (le carré de a) ; a^3 (le cube de a) et a^{-2} pour $a = -2$.

$$(-2)^2 = -2 \times (-2) = 4 ;$$

$$(-2)^3 = -2 \times (-2) \times (-2) = -8 ;$$

a^{-2} est l'inverse de a^2 ; $(-2)^{-2}$ est l'inverse de $(-2)^2$ ou 4 ; c'est $\frac{1}{4}$ ou $0,25$.

4^e ● Effectuer : a) $x^2 \times x^3$; b) $x^4 \times x$; c) $(x^2)^3$; d) $(x \times y)^2$; e) $(2x)^3$; f) $(-3x)^2$.

$$a) x^2 \times x^3 = x^{2+3} = x^5 ; \quad b) x^4 \times x = x^{4+1} = x^5 ;$$

$$c) (x^2)^3 = x^{2 \times 3} = x^6 ; \quad d) (x \times y)^2 = x^2 \times y^2 ;$$

$$e) (2x)^3 = 2x \times 2x \times 2x = 8x^3 \quad \text{ou} \quad (2x)^3 = (2 \times x)^3 = 2^3 \times x^3 = 8x^3 ;$$

$$f) (-3x)^2 = (-3 \times x)^2 = (-3)^2 \times x^2 = 9x^2.$$

VOIR AUSSI

Puissances de dix, 4

Quotients -

multiplication, 16

QUOTIENTS

COMPRENDRE

4^e ● Qu'est-ce qu'un quotient de deux nombres relatifs ?

■ a et b étant deux nombres relatifs ($b \neq 0$), le quotient de a par b est le nombre relatif q tel que $a = b \times q$.

Il se note $a : b$ ou $\frac{a}{b}$ et on a $\frac{a}{b} = a \times \text{inverse } b = a \times \frac{1}{b}$.

■ Le quotient de deux nombres de même signe est positif.
Le quotient de deux nombres de signes contraires est négatif.

OUVRIR L'ŒIL

● Il est important de se rappeler qu'on ne peut pas diviser par 0.

● Pour l'addition et la soustraction, il faut penser à ramener les quotients au même dénominateur.

4^e ● Comment calculer avec les quotients de nombres relatifs ?

■ On peut transformer leur écriture :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times m}{b \times m} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k} \quad (b \neq 0, m \neq 0 \text{ et } k \neq 0).$$

■ On peut additionner, soustraire, multiplier et diviser :

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}; \quad \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d} \quad (d \neq 0).$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad (b \neq 0, c \neq 0 \text{ et } d \neq 0).$$

■ Quotients et puissances :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (a \neq 0, b \neq 0, n \text{ et } m \text{ entiers naturels}).$$

UTILISER SES CONNAISSANCES

4^e ● Écrire plus simplement les quotients suivants :

$$a) -4 : \left(-\frac{1}{3}\right); \quad b) -5 : (-3); \quad c) -5,5 : 0,33; \quad d) \frac{13}{7} : \left(\frac{26}{7}\right).$$

$$a) -4 : \left(-\frac{1}{3}\right) = -4 \times (-3) = 12;$$

$$b) -5 : (-3) = -5 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = +\left(5 \times \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3};$$

$$\frac{a}{d} \text{ et } \frac{b}{d} \left\{ \begin{array}{l} \text{somme : } \frac{a+b}{d} \\ \text{différence : } \frac{a-b}{d} \end{array} \right. \quad \frac{a}{b} \text{ et } \frac{c}{d} \left\{ \begin{array}{l} \text{produit : } \frac{a \times c}{b \times d} \\ \text{quotient : } \frac{a \times d}{b \times c} \end{array} \right.$$

$$c) -5,5 : 0,33 = -\frac{5,5}{0,33} = -\frac{550}{33} = -\frac{11 \times 50}{11 \times 3} = -\frac{50}{3};$$

$$d) \frac{13}{7} : \left(-\frac{26}{7}\right) = \frac{13}{7} \times \left(-\frac{7}{26}\right) = -\left(\frac{13}{7} \times \frac{7}{26}\right) = -\frac{13 \times 7}{7 \times 26} = -\frac{13}{26}$$

$$\text{et } -\frac{13}{26} = -\frac{13 \times 1}{13 \times 2} = -\frac{1}{2} \text{ (ou } -0,5).$$

4^e ● Ranger par ordre croissant : $-\frac{4}{7}$, $-\frac{5}{7}$ et $\frac{6}{-7}$.

$$\text{On a : } -\frac{4}{7} = \frac{-4}{7} \text{ et } \frac{6}{-7} = \frac{-6}{7}, \text{ puis } \frac{-6}{7} < \frac{-5}{7} < \frac{-4}{7}.$$

4^e ● Calculer : a) $\frac{-3}{+7} \times \frac{-14}{-27}$; b) $-\frac{4}{7} + \left(-\frac{11}{7}\right)$;

c) $\frac{2}{-3} - \left(-\frac{1}{2}\right)$; d) $\frac{-3}{+7} : \frac{-6}{-7}$.

$$a) \frac{-3}{+7} \times \frac{-14}{-27} = \frac{-3 \times (-14)}{+7 \times (-27)} = \frac{+(3 \times 14)}{-(7 \times 27)} = -\frac{3 \times 2 \times 7}{7 \times 3 \times 9} = -\frac{2}{9};$$

$$b) -\frac{4}{7} + \left(-\frac{11}{7}\right) = -\left[\frac{4}{7} + \frac{11}{7}\right] = -\frac{4+11}{7} = -\frac{15}{7};$$

$$c) \frac{2}{-3} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{4}{6} + \frac{3}{6} = -\frac{1}{6};$$

$$d) \frac{-3}{+7} : \frac{-6}{-7} = \frac{-3}{+7} \times \frac{-7}{-6} = \frac{-3 \times (-7)}{+7 \times (-6)} = \frac{+(3 \times 7)}{-(7 \times 6)} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

4^e ● Simplifier : a) $\frac{4^5}{4^2}$; b) $\frac{-3^6}{-3^3}$; c) $\frac{2^3}{2^5}$; d) $\frac{(-5)^3}{(-5)^4}$.

$$a) \frac{4^5}{4^2} = 4^{5-2} = 4^3 \text{ (ou } 64);$$

$$b) \frac{-3^6}{-3^3} = \frac{3^6}{3^3} = 3^{6-3} = 3^3 \text{ (ou } 27);$$

$$c) \frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4};$$

$$d) \frac{(-5)^3}{(-5)^4} = (-5)^{3-4} = (-5)^{-1} = \frac{1}{-5} = -0,2.$$

VOIR AUSSI :

Simplification de quotients
et opérations, 13-14-15-16
Addition, soustraction, 27
Puissances, 28

PARENTHÈSES PRIORITÉS DE CALCUL

COMPRENDRE

5^e ● Effectuer une suite d'additions et de soustractions avec parenthèses

On veut calculer A tel que :

$$A = 32 - [(37 + (-19)) - (-25 - (+3))]$$

La structure de A est : $A = 32 - [(...) - (...)]$.

Il y a des parenthèses, autres que celles entourant les nombres relatifs, à l'intérieur de crochets. Il faut commencer par l'intérieur : les parenthèses (en rouge), puis les crochets.

$$\begin{array}{lcl} 37 + (-19) = 18 & & \\ -25 - (+3) = -25 + (-3) = -28 & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} & \text{les parenthèses} \\ 18 - (-28) = 18 + (+28) = 46 & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} & \text{les crochets} \\ A = 32 - 46 = 32 + (-46) = -14 & & A = -14 \end{array}$$

5^e ● Effectuer une suite d'additions et de soustractions sans parenthèses de priorité

$B = -27 + (-41) - (+13) + (-8) - (-27)$. On peut :

■ soit faire le calcul en respectant l'ordre :

$$\begin{array}{rcl} B = -27 + (-41) - (+13) + (-8) - (-27) & & \\ \quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{-68} & & \\ \quad \quad \quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{-81} & & \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{-89} & & \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{-62} & & B = -62 \end{array}$$

■ soit remplacer chaque soustraction par une addition :

$B = -27 + (-41) + (-13) + (-8) + (+27)$; on a à calculer une somme de nombres relatifs (cf. Addition, soustraction, 27).

4^e ● Utiliser les conventions de priorité

Ce sont les mêmes que pour les nombres arithmétiques.

■ La multiplication a priorité sur l'addition et la soustraction :

$a + bc$ et $a - bc$ signifient $a + (b \times c)$ et $a - (b \times c)$.

■ Le calcul de la puissance a priorité sur celui du produit :

ab^n signifie $a \times (b^n)$.



Ne pas confondre
 $(ab)^n$ égal à $a^n \times b^n$
et ab^n .

● Dans un programme de calcul, les parenthèses et les crochets indiquent des calculs prioritaires, sauf dans le cas des parenthèses employées dans l'écriture des nombres : (-18) ou $(+7)$.

● En l'absence de parenthèses, il peut y avoir des priorités sous-entendues, fixées par des règles, comme dans les calculs sur les nombres arithmétiques.

UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● Calculer C tel que $C = (-32 - (+29)) - (47 + (-29))$.

$$-32 - (+29) = -32 + (-29) = -61 \text{ et } 47 + (-29) = +18;$$

$$C = -61 - (+18) = -61 + (-18) = -79; C = -79.$$

5^e ● Calculer D tel que $D = -2,7 + (+7,9) - (+12) - (-6,4)$.

Voici deux méthodes (voir ci-contre, deuxième paragraphe) :

$$a) -2,7 + (+7,9) = 5,2; 5,2 - (+12) = 5,2 + (-12) = -6,8;$$

$$-6,8 - (-6,4) = -6,8 + (+6,4) = -0,4. D = -0,4.$$

$$b) D = -2,7 + (+7,9) + (-12) + (+6,4) = -2,7 + (-12) + (+7,9) + (+6,4);$$

$$D = -14,7 + (+14,3) = -0,4.$$

Remarque : avec la calculatrice Galaxy 40 - TI, ces méthodes correspondent

l'une à : $2,7 \text{ } (-x) \text{ } (+) \text{ } 7,9 \text{ } (-) \text{ } 12 \text{ } (-) \text{ } 6,4 \text{ } (-x) \text{ } (=)$;

l'autre à : $2,7 \text{ } (-x) \text{ } (+) \text{ } 7,9 \text{ } (+) \text{ } 12 \text{ } (-x) \text{ } (+) \text{ } 6,4 \text{ } (=)$.

4^e ● Tester $(-x + 9)(2x - 4) = -2x^2 + 22x - 36$ en remplaçant successivement x par 10 ; -10 ; 2 et -2.

$$\text{Posons } A = (-x + 9)(2x - 4) \text{ et } B = -2x^2 + 22x - 36.$$

$$a) \text{ Pour } x = 10: A = (-10 + 9)(2 \times 10 - 4) = -1 \times (20 - 4) = -16;$$

$$B = -2 \times 10^2 + 22 \times 10 - 36 = -2 \times 100 + 220 - 36 = -16.$$

$$b) \text{ Pour } x = -10: A = (10 + 9)[2 \times (-10) - 4] = 19(-20 - 4) = -456;$$

$$B = -2 \times (-10)^2 + 22 \times (-10) - 36 = -2 \times 100 - 220 - 36 = -456.$$

$$c) \text{ Pour } x = 2: A = (-2 + 9)(2 \times 2 - 4) = 7 \times 0 = 0;$$

$$B = -2 \times 2^2 + 22 \times 2 - 36 = -8 + 44 - 36 = 0.$$

$$d) \text{ Pour } x = -2: A = (2 + 9)[2 \times (-2) - 4] = 11[-4 - 4] = -88;$$

$$B = -2 \times (-2)^2 + 22 \times (-2) - 36 = -8 + (-44) - 36 = -88.$$

VOIR AUSSI :

Addition, soustraction, 27

Multiplication,

puissances, 28

EXPRESSIONS LITTÉRALES SOMMES ALGÈBRIQUES

COMPRENDRE

4^e ● Qu'est-ce qu'une expression littérale ?

C'est l'indication d'opérations à effectuer sur des nombres dont certains sont représentés par des lettres.

$3x + 7$; $(2x - 5)(-x + 3)$; $\frac{2x}{x+3}$ sont des expressions

littérales à une **variable** x .

$3a - b^2$ est une expression littérale à deux **variables** a et b .

4^e ● Calculer la valeur numérique d'une expression littérale

Pour $x = 3$, $3x + 7$ est égal à $3 \times 3 + 7$ ou $9 + 7$ ou 16.

Pour $x = 3$, $\frac{2x}{x+3}$ est égal à $\frac{2 \times 3}{3+3}$ ou $\frac{6}{6}$ ou 1.

Pour $a = 5$ et $b = -2$, $3a - b^2$ est égal à $3 \times 5 - (-2)^2$ ou 11.

OUVRIR L'ŒIL

■ $-a$ désigne l'opposé du nombre a .

Il n'est pas nécessairement négatif.

● $+b$ désigne le même nombre que b .

Il n'est pas nécessairement positif.

4^e ● Qu'est-ce qu'une somme algébrique ?

■ Une expression littérale telle que $-5 - a + b - 4x^2$ peut s'appeler une **somme algébrique**. On peut l'interpréter comme une somme de quatre termes : -5 ; $-a$; $+b$ et $-4x^2$.

On a : $\underbrace{-5 - a + b - 4x^2}_{\text{somme algébrique}} = \underbrace{(-5) + (-a) + (+b) + (-4x^2)}_{\text{somme}}.$

■ Dans une somme algébrique, on peut changer l'ordre des termes puisque c'est une somme de nombres relatifs.

$-5 - a + b - 4x^2 = -5 - 4x^2 - a + b = b - a - 4x^2 - 5 \dots$

4^e ● Comment réduire une somme algébrique ?

Il s'agit de l'écrire avec le moins de termes possibles.

■ $S = a - b + 3,2 - a + b - 7 + c$

$S = \underbrace{a - a}_{0} - \underbrace{b + b}_{0} + \underbrace{3,2 - 7}_{-3,8} + c$

$S = -3,8 + c$ ou $S = c - 3,8$.

De sept termes on passe à deux ; $c - 3,8$ est la forme réduite de S .

Divers visages d'une même expression littérale

- Suite d'additions et de soustractions :
- Somme :
- Somme algébrique de quatre termes :

$$\begin{array}{ccccccc} 2x^3 & - & x^2 & + & 5x & - & 9. \\ 2x^3 & + & (-x^2) & + & (+5x) & + & (-9). \\ 2x^3 & - & x^2 & + & 5x & - & 9. \end{array}$$

Les quatre termes sont $2x^3$, $-x^2$, $+5x$ et -9 .

$$T = x^3 - 2x^2 - 3x^3 - x^2.$$

On regroupe les termes ayant le même exposant :

$$T = x^3 - 3x^3 - 2x^2 - x^2 = 1 \times x^3 - 3 \times x^3 - 2 \times x^2 - 1 \times x^2.$$

$$1 \times x^3 - 3 \times x^3 = (1 - 3) x^3 = -2x^3 \text{ et}$$

$$-2 \times x^2 - 1 \times x^2 = (-2 - 1) x^2 = -3x^2.$$

On a :

$$T = -2x^3 - 3x^2 \quad \text{ou} \quad T = -3x^2 - 2x^3.$$

T a été réduite et ordonnée selon les puissances décroissantes de x .
 T a été réduite et ordonnée selon les puissances croissantes de x .

OUVRIR

L'ŒIL

On ne peut additionner ou soustraire deux puissances de x que si elles ont le **même exposant**. Cela revient à mettre en facteur cette puissance de x .

UTILISER SES CONNAISSANCES

- 4^e ● Voici une suite d'additions et de soustractions de nombres relatifs (cf. Parenthèses, priorités de calcul, 30) :

$$S = (-3) - (+5) + (-a) - (-b).$$

L'écrire sous forme de somme de nombres relatifs ; la réduire.

$$S = (-3) + (-5) + (-a) + (+b).$$

On devait soustraire $(+5)$; on ajoute (-5) .
 On devait soustraire $(-b)$; on ajoute son opposé $(+b)$.

$$S = -8 + (-a) + (+b) ; \text{ on peut écrire : } S = -8 - a + b.$$

- 4^e ● Réduire T tel que : $T = 3x^3 - 5x^2 + 3x - 7x^3 + 7x^2 - 4x + 5$.

Ordonner suivant les puissances décroissantes de x , puis suivant les puissances croissantes de x .

$$\begin{array}{ccccccc} T = & 3x^3 & - & 7x^3 & - & 5x^2 & + & 7x^2 & + & 3x & - & 4x & + & 5 \\ & \underbrace{(3-7)x^3}_{-4x^3} & & \underbrace{(-5+7)x^2}_{+2x^2} & & \underbrace{(3-4)x}_{-x} & & & & & & & & \end{array}$$

$$T = -4x^3 + 2x^2 - x + 5 \text{ (puissances décroissantes).}$$

$$T = 5 - x + 2x^2 - 4x^3 \text{ (puissances croissantes).}$$

VOIR AUSSI

Addition, soustraction, 27

Multiplication, puissances, 28

Facteuriel, 36

SOMMES
ALGÈBRIQUES

ADDITION - SOUSTRACTION

COMPRENDRE

4^e ● Comment additionner deux sommes algébriques ?

$$A = -x^2 + 2x + 7; B = 2x^2 - 5x - 5.$$

La somme S de A et de B se calcule comme suit :

– on écrit les termes de A ;

– on écrit ensuite ceux de B ; ici pour éviter la juxtaposition de 7 et de $2x^2$, on réintroduit le signe + dans l'écriture du premier terme de B .

$$\text{On a : } -x^2 + 2x + 7 + 2x^2 - 5x - 5.$$

On regroupe les termes de même exposant :

$$\begin{array}{rcc} \underbrace{-x^2 + 2x^2} & \underbrace{+ 2x - 5x} & \underbrace{+ 7 - 5} \\ \underbrace{(-1 + 2)x^2} & \underbrace{(+ 2 - 5)x} & + 2 \\ + 1x^2 & - 3x & + 2 \end{array}$$

$$S = x^2 - 3x + 2$$

4^e ● Qu'est-ce que deux sommes algébriques opposées ?

$x - y - 5$ et $-x + y + 5$ sont deux sommes algébriques constituées de termes respectivement opposés.

Leur somme est :

$$x - y - 5 - x + y + 5 = x - x - y + y - 5 + 5 = 0.$$

Elles sont **opposées**. Si l'une est notée X , l'autre se note $-X$.

4^e ● Comment soustraire deux sommes algébriques ?

Pour soustraire deux sommes algébriques, on additionne la première et l'opposée de la seconde.

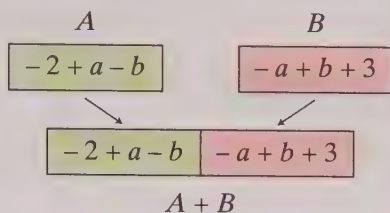
$$E = -a + x - 7; F = -a + y + 5.$$

On veut calculer $E - F$.

$$E - F = E + (-F) = (-a + x - 7) + (+a - y - 5);$$

$$E - F = -a + x - 7 + a - y - 5 = \underbrace{-a + a}_{0} + \underbrace{x - y}_{-12} - 7 - 5;$$

$$E - F = x - y - 12.$$



← Somme de A et de B.

On réduit : $A + B = 1$.

UTILISER SES CONNAISSANCES

4^e ● On a : $A = -3 + b - c$; $B = d - e + 7$; $C = 3 - x + y$.

Écrire l'opposée de chacune de ces sommes algébriques.

$$-A = 3 - b + c ; -B = -d + e - 7 ; -C = -3 + x - y.$$

4^e ● On a : $A = a - b + c + d$; $B = -a + b - c$; $C = -b + c + d$.

Calculer et réduire : a) $A + B$; b) $A - C$.

a) $A + B = a - b + c + d - a + b - c = a - a - b + b + c - c + d = d$.

b) $A - C = (a - b + c + d) - (-b + c + d) = (a - b + c + d) + (b - c - d)$;

$$A - C = a - b + c + d + b - c - d = a - b + b + c - c + d - d = a.$$

4^e ● Simplifier l'écriture de D tel que : $D = (x - 3) - [5 - (7 - x)]$.

3^e

Le calcul entre crochets est prioritaire :

$$[5 - (7 - x)] = [5 + (-7 + x)] = [5 - 7 + x] = [-2 + x].$$

$$D = (x - 3) - [-2 + x] = (x - 3) + [2 - x] = x - 3 + 2 - x ;$$

$$D = x - x - 3 + 2 = 0 - 1 = -1.$$

$$D = -1.$$

4^e ● On a : $S = 3x^2 - 5x + 2$; $S' = -2x^2 - 2x - 3$;

3^e $S'' = -x^3 + x^2 - 5$.

Calculer sous forme réduite et ordonnée :

a) $S - S'$; b) $S' + S''$; c) $-S - S''$.

a) $S - S' = (3x^2 - 5x + 2) - (-2x^2 - 2x - 3) = 3x^2 - 5x + 2 + 2x^2 + 2x + 3 ;$

$$S - S' = 3x^2 + 2x^2 - 5x + 2x + 2 + 3 = 5x^2 - 3x + 5.$$

b) $S' + S'' = (-2x^2 - 2x - 3) + (-x^3 + x^2 - 5) = -2x^2 - 2x - 3 - x^3 + x^2 - 5 ;$

$$S' + S'' = -x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 3 - 5 = -x^3 - x^2 - 2x - 8.$$

c) $-S - S'' = -(3x^2 - 5x + 2) - (-x^3 + x^2 - 5) = -3x^2 + 5x - 2 - x^3 + x^2 + 5 ;$

$$-S - S'' = x^3 - 3x^2 - x^2 + 5x - 2 + 5 = x^3 - 4x^2 + 5x + 3.$$

VOIR AUSSI :

Addition, soustraction, 27

Multiplication,

division, 24

Potences, 10

Produit en 36

SOMMES
ALGÈBRIQUES
MULTIPLICATION

COMPRENDRE

4^e ● Règle des signes

- $(+a) \times (+b) = +ab$
- $(-a) \times (-b) = +ab$
- $(+a) \times (-b) = -ab$
- $(-a) \times (+b) = -ab$

Se rappeler que :

- $+a = a$
- $-a$ = opposé de a
- $+1 \times a = +a = a$
- $-1 \times a = -a$.

OUVRIR

L'ŒIL

Le produit d'une somme algébrique par un nombre généralise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et par rapport à la soustraction :

$$k(a + b) = ka + kb$$

$$k(a - b) = ka - kb$$

vue dans l'étude des nombres arithmétiques
(cf. Séquences de calcul, distributivité, 19).

4^e ● Produit d'une somme algébrique par un nombre

$$(b - c + d) \times (-a) = -ba + ca - da.$$

On multiplie chaque terme de la somme algébrique par le nombre en respectant la règle des signes ; on écrit les produits les uns à la suite des autres.

4^e ● Produit de deux sommes algébriques

$$\blacksquare (a + b - c) \times (d - e) = \underbrace{ad + bd - cd}_{\text{On a multiplié tous les termes de la première somme par } d \text{ (ou } +d\text{)}} - \underbrace{ae - be + ce}_{\text{On a multiplié tous les termes de la première somme par } -e\text{}}.$$

On a multiplié tous les termes de la première somme par d (ou $+d$).

On a multiplié tous les termes de la première somme par $-e$.

■ Pour multiplier deux sommes algébriques, on multiplie **tous** les termes de l'une respectivement par **chaque** terme de l'autre ; on écrit tous les produits les uns à la suite des autres ; on réduit éventuellement.

On veut calculer : $P = (7x - 5)(2x - 3)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 P = & 14x^2 & & -10x & & -21x & & +15 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & 7x \times 2x & & -5 \times 2x & & 7x \times (-3) & & -5 \times (-3)
 \end{array}$$

On réduit : $P = 14x^2 - 31x + 15$.

■ Avant réduction, le nombre de termes de la somme algébrique obtenue est égal au produit du nombre de termes de la première par le nombre de termes de la seconde.

$$\begin{array}{r} 2x 3 \\ \times x -4 \\ \hline 2x^2 -8x -12 \\ +3x -12 \\ \hline 2x^2 -5x -12 \end{array}$$

On additionne $\left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \text{On multiplie } 2x+3 \text{ par } -4 \\ \leftarrow \text{On multiplie } 2x+3 \text{ par } x \\ \leftarrow \text{Produit } (2x+3)(x-4) \end{array} \right.$

UTILISER SES CONNAISSANCES

4^e ● Calculer :

a) $-b(c+d)$; b) $(a-3)(b-2)$; c) $(x-1)(x+2)$.

a) $-b(c+d) = -bc - bd$;

b) $(a-3)(b-2) = ab - 3b - 2a + 6$;

c) $(x-1)(x+2) = x^2 - x + 2x - 2 = x^2 + x - 2$.

4^e ● Calculer : $(a-b)(c-d-e)$; $(x-1)(1+x)$.

$(a-b)(c-d-e) = ac - bc - ad + bd - ae + be$;

$(x-1)(1+x) = x - 1 + x^2 - x = x^2 - 1$.

4^e ● Effectuer et réduire : a) $A = (3x-7)(6x+2)$;

b) $B = (x^3 + 2x^2 - 3x)(2x-1)$.

a) $A = (3x-7)(6x+2)$;

$A = 18x^2 - 42x + 6x - 14$;

$A = 18x^2 - 36x - 14$.

On peut également
effectuer
la multiplication
comme ceci ▶

$$\begin{array}{r} 3x -7 \\ \times 6x +2 \\ \hline +6x -14 \\ 18x^2 -42x \\ \hline 18x^2 -36x -14 \end{array}$$

b) $B = \underbrace{(x^3 + 2x^2 - 3x)}_{\text{3 termes}} \underbrace{(2x-1)}_{\text{2 termes}}$;

$B = 2x^4 + 4x^3 - 6x^2 - x^3 - 2x^2 + 3x$; ← 6 termes (3×2)

$B = 2x^4 + 4x^3 - x^3 - 6x^2 - 2x^2 + 3x$;

$B = 2x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 3x$.

4^e ● Développer, puis réduire : $5(a-b+3) - 3(a+b+5)$.

On considère que c'est la somme de $5(a-b+3)$ et de $-3(a+b+5)$.

$5(a-b+3) = 5a - 5b + 15$; $-3(a+b+5) = -3a - 3b - 15$.

On additionne les deux sommes algébriques obtenues :

$5a - 5b + 15 - 3a - 3b - 15 = 5a - 3a - 5b - 3b + 15 - 15 = 2a - 8b$.

OUVRIR L'ŒIL

Poser la multiplication de deux sommes algébriques peut s'avérer utile : cela permet d'aligner verticalement les puissances de x de même exposant.

VOIR AUSSI :

Multipliation, puissances,

28

Priorités, 30

Sommes algébriques, 31-32

Factoriser, 36

IDENTITÉS
REMARQUABLES

COMPRENDRE

$$3^{\text{e}} \bullet (A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Produit d'une somme
de deux termes $A + B$

par leur différence $A - B$.

Différence des carrés

A^2 et B^2 des deux
termes A et B .

Application

$$(3x + 7)(3x - 7) = (3x)^2 - 7^2 = 9x^2 - 49.$$

OUVRIR
L'ŒIL

$$(A + B)^2 \neq A^2 + B^2.$$

Par exemple :

si $A = 1$ et $B = 2$, alors

$$A + B = 3 \text{ et } (A + B)^2 = 9;$$

$$A^2 = 1, B^2 = 4 \text{ et}$$

$$A^2 + B^2 = 5.$$

3^e ●

Carré d'une somme
de deux termes

Carré du
1^{er} terme

Carré du
2^e terme

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

Carré d'une différence
de deux termes

↑
Carré du
1^{er} terme

↑
Carré du
2^e terme

AB est le produit des deux termes A et B .

$2AB$ est le double-produit des deux termes.

Application

$$\blacksquare (5x + 8)^2 = 25x^2 + 80x + 64.$$

On peut faire ce calcul au brouillon ou mentalement :

$$(5x + 8)^2; \text{ on va appliquer } (A + B)^2 = \dots;$$

$$A = 5x; B = 8. A^2 = (5x)^2 = 25x^2; B^2 = 8^2 = 64;$$

$$AB = 5x \times 8 = 40x; 2AB = 80x.$$

$$\blacksquare (3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25.$$

On peut faire ce calcul au brouillon ou mentalement :

$$(3x - 5)^2; \text{ on va appliquer } (A - B)^2 = \dots;$$

$$A = 3x; B = 5. A^2 = (3x)^2 = 9x^2; B^2 = 5^2 = 25;$$

$$AB = 3x \times 5 = 15x; 2AB = 30x.$$

$$\blacksquare (-2x - 1)^2 = [-1(2x + 1)]^2 = (-1)^2(2x + 1)^2 = 1(2x + 1)^2 \\ = (2x + 1)^2 \text{ et } (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1.$$

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

Toutes ces égalités sont appelées des « identités remarquables ».
Elles sont à connaître sans défaillance !

UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● Effectuer : a) $(0,5x + 7)^2$; b) $\left(\frac{2}{3}x - 1\right)\left(\frac{2}{3}x + 1\right)$;

c) $(-0,1x + 5)^2$; d) 101^2 ou $(100 + 1)^2$; e) 99^2 ou $(100 - 1)^2$.

a) $(0,5x + 7)^2 = (0,5x)^2 + 2 \times 0,5x \times 7 + 7^2 = 0,25x^2 + 7x + 49$;

b) $\left(\frac{2}{3}x - 1\right)\left(\frac{2}{3}x + 1\right) = \left(\frac{2}{3}x\right)^2 - 1^2 = \frac{4}{9}x^2 - 1$;

c) $(-0,1x + 5)^2 = (5 - 0,1x)^2 = 25 - x + 0,01x^2$;

d) $101^2 = (100 + 1)^2 = 10\,000 + 200 + 1 = 10\,201$;

e) $99^2 = (100 - 1)^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801$.

3^e ● Effectuer : a) $(3x - 2y)^2$; b) $(7x + 5y)(7x - 5y)$.

a) $(3x - 2y)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2y + (2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$;

b) $(7x + 5y)(7x - 5y) = (7x)^2 - (5y)^2 = 49x^2 - 25y^2$.

3^e ● Effectuer : a) $(3x^2 + 2x)^2$; b) $(2x^3 - 1)^2$;

c) $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$.

a) $(3x^2 + 2x)^2 = (3x^2)^2 + 2 \times 3x^2 \times 2x + (2x)^2 = 9x^4 + 12x^3 + 4x^2$;

b) $(2x^3 - 1)^2 = (2x^3)^2 - 2 \times 2x^3 \times 1 + 1^2 = 4x^6 - 4x^3 + 1$;

c) $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x^2)^2 - 1^2 = x^4 - 1$.

3^e ● Un carré a pour côté $5 - 2\sqrt{3}$ (en cm).

a) Quelle est la mesure exacte de son aire (en cm²) ?

b) Quel est l'arrondi de cette aire au mm² le plus proche ?

a) Aire = $(5 - 2\sqrt{3})^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 = 25 - 20\sqrt{3} + 12$
= $37 - 20\sqrt{3}$ (en cm²).

b) 37 $\left[\text{---} \right]$ 20 $\left[\text{---} \right]$ 3 $\left[\text{---} \right]$ $\left[\sqrt{x} \right]$ $\left[= \right]$ donne $\left[2.358\,983\,849 \right]$.

L'arrondi au mm² le plus proche est 236 mm².

VOIR AUSSI :

Calcul sur les radicaux, 23

Puissances, 26

Priorités, 30

Développer, 33

Factoriser, 36-37-38

DÉVELOPPER

COMPRENDRE

3^e ● Qu'est-ce que développer ?

■ On veut développer (on dit aussi calculer ou effectuer) :

$$3a(a-1)^2 \quad \text{ou} \quad 3a \underset{\substack{\uparrow \\ \text{multiplication}}}{(a-1)} \overset{\substack{\uparrow \\ \text{élévation au carré}}}{2}$$

On calcule d'abord la puissance !

$$\begin{aligned} 3a(a-1)^2 &= 3a(a^2 - 2a + 1) \\ &= 3a^3 - 6a^2 + 3a. \end{aligned}$$

3^e ■ On veut développer : $7(3a-2)^2 - a(3a-4)$, qui a pour forme générale : $A - B$.

$$\begin{aligned} \text{Calcul de } A : \quad 7(3a-2)^2 &= 7(9a^2 - 12a + 4) \\ &= 63a^2 - 84a + 28. \end{aligned}$$

$$\text{Calcul de } B : \quad a(3a-4) = 3a^2 - 4a.$$

$$\begin{aligned} \text{Calcul de } A - B : \quad 63a^2 - 84a + 28 - (3a^2 - 4a) \\ A - B = 63a^2 - 84a + 28 + (-3a^2 + 4a) \\ = 60a^2 - 80a + 28. \end{aligned}$$

3^e ● Pour éviter des erreurs quand on développe

Il faut :

- 1 - voir la forme générale ;
- 2 - effectuer les calculs entre parenthèses, s'il y en a ;
- 3 - veiller à l'ordre des priorités des opérations :
 - les puissances d'abord,
 - les multiplications et les divisions ensuite
 (diviser par a revient à multiplier par $\frac{1}{a}$) ;
 - les additions et les soustractions enfin
 (soustraire a revient à ajouter $-a$).

Même si ce n'est pas explicitement demandé, il faut toujours réduire et ordonner.

On développe

$$k(a + b) = ka + kb$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Selon le sens d'utilisation
des formules, on développe
ou on factorise !

On factorise

UTILISER SES CONNAISSANCES

- 4^e ● Développer, réduire et ordonner : a) $-3(x+4)$; b) $(x-2) \times x$;
3^e c) $(x-3)(x-6)$; d) $4-2x-[-2(x+1)+7]$.

a) $-3(x+4) = -3x-12$;

b) $(x-2) \times x = x^2-2x$;

c) $(x-3)(x-6) = x^2-3x-6x+18 = x^2-9x+18$;

d) Pour la dernière expression, on calcule d'abord l'intérieur des crochets :

$[-2(x+1)+7] = [-2x-2+7] = [-2x+5]$, puis :

$4-2x-[-2x+5] = 4-2x+2x-5 = -1$.

- 3^e ● Développer : a) $3(x-7)-(2x+1)^2$;

b) $(5x-2)^2-(20x^2-20x)$.

a) $3x-21-(4x^2+4x+1) = 3x-21-4x^2-4x-1 = -4x^2-x-22$;

b) $25x^2-20x+4-20x^2+20x = 5x^2+4$.

- 3^e ● Développer, réduire et ordonner :

a) $A = 3x(x-2)^2 - (x\sqrt{2}-1)(x\sqrt{2}+1)$;

b) $B = (x-2)(2x+1)^2 - (x+2)(2x-1)^2$.

a) $A = 3x(x^2-4x+4) - (2x^2-1) = 3x^3-12x^2+12x-2x^2+1$;
 $A = 3x^3-14x^2+12x+1$.

b) Pour B , on effectue d'abord $(2x+1)^2$ et $(2x-1)^2$;

$B = (x-2)(4x^2+4x+1) - (x+2)(4x^2-4x+1)$;

$B = 4x^3-8x^2+4x^2-8x+x-2 - (4x^3+8x^2-4x^2-8x+x+2)$;

$B = 4x^3-4x^2-7x-2 - (4x^3+4x^2-7x+2)$;

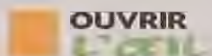
$B = 4x^3-4x^2-7x-2-4x^3-4x^2+7x-2 = -8x^2-4$.

- 3^e ● Développer A tel que $A = (2x-1)^2 - 2[(x+2)^2-5]$.

Calcul du crochet : $[(x+2)^2-5] = [x^2+4x+4-5] = x^2+4x-1$

$A = (2x-1)^2 - 2[x^2+4x-1] = 4x^2-4x+1 - [2x^2+8x-2]$

$A = 4x^2-4x+1-2x^2-8x+2 = 2x^2-12x+3$.



Attention aux calculs avec
des radicaux ! Ainsi :

$$(x\sqrt{2})^2 = x^2 \times (\sqrt{2})^2$$

$$= x^2 \times 2 = 2x^2.$$

VOIR AUSSI :

► Chapitre 35

Calculer une somme

algébrique, 31

Calculer remarquable, 38

► Chapitre 36

FACTORISER

COMPRENDRE

5^e 4^e ● Factoriser, c'est le contraire de développer

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\text{on développe}} \\
 k(a+b) = ka + kb \\
 \\
 a(b+c-d) = ab + ac - ad \\
 \xleftarrow{\text{on factorise}}
 \end{array}$$

● Comment factorise-t-on ?

On veut factoriser : $3x + xy - ax$.

C'est une somme algébrique dont chaque terme est un produit ; chaque produit contient le **même facteur** x .

On met x en commun !

$$3x + xy - ax = x(3 + y - a).$$

On peut vérifier en développant.

UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● Factoriser, puis calculer : a) $45 \times 107 + 45 \times 93$;
b) $23,5 \times 8,5 - 3,5 \times 8,5$; c) $99 \times 0,7 + 0,7$; d) $101 \times 0,3 - 0,3$.

On applique les égalités traduisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction.

$$a) 45 \times 107 + 45 \times 93 = 45 \times (107 + 93) = 45 \times 200 = 9\,000 ;$$

$$b) 23,5 \times 8,5 - 3,5 \times 8,5 = 8,5 \times (23,5 - 3,5) = 8,5 \times 20 = 170 ;$$

$$c) 99 \times 0,7 + 0,7 = 99 \times 0,7 + 1 \times 0,7 = 0,7 \times (99 + 1) = 0,7 \times 100 = 70 ;$$

$$d) 101 \times 0,3 - 0,3 = 101 \times 0,3 - 1 \times 0,3 = 0,3 \times (101 - 1) = 0,3 \times 100 = 30 .$$

4^e ● Factoriser : a) $2x - x^2$; b) $2y^2 + 3y$; c) $27a + 18$;
d) $18x + 9$; e) $27x - 9$; f) $7y^2 + 7y + 14$; g) $2y^3 + y^2$.

$$a) 2x - x^2 = 2 \times x - x \times x = x(2 - x) ;$$

$$b) 2y^2 + 3y = 2y \times y + 3 \times y = y(2y + 3) ;$$

Factoriser dérive du mot facteur (milieu du XX^e siècle). Factoriser c'est « transformer une expression en un produit de facteurs ».

$$18y^3 - 45y^2 - 27y = 9(2y^3 - 5y^2 - 3y) \quad 2 \text{ facteurs : factorisation inachevée.}$$

$$9(2y^3 - 5y^2 - 3y) = 9y(2y^2 - 5y - 3) \quad 3 \text{ facteurs : } 9, y \text{ et } 2y^2 - 5y - 3.$$

$$c) 27a + 18 = 9 \times 3a + 9 \times 2 = 9(3a + 2);$$

$$d) 18x + 9 = 9 \times 2x + 9 \times 1 = 9(2x + 1);$$

$$e) 27x - 9 = 9 \times 3x - 9 \times 1 = 9(3x - 1);$$

$$f) 7y^2 + 7y + 14 = 7 \times y^2 + 7 \times y + 7 \times 2 = 7(y^2 + y + 2);$$

$$g) 2y^3 + y^2 = 2y \times y^2 + 1 \times y^2 = y^2(2y + 1).$$

3^e ● Factoriser : a) $5x(x - 1) - 7(x - 1);$

b) $(x + 2)(x + 1) - 5(x + 2)$

$$a) 5x(x - 1) - 7(x - 1) = 5x \times (x - 1) - 7 \times (x - 1) \\ = (x - 1) \times (5x - 7) = (x - 1)(5x - 7).$$

Remarque

Pour vérifier, on peut développer l'expression donnée et la factorisation trouvée :

$$5x(x - 1) - 7(x - 1) = (5x^2 - 5x) - (7x - 7) = 5x^2 - 12x + 7.$$

$$(x - 1)(5x - 7) = 5x^2 - 5x - 7x + 7 = 5x^2 - 12x + 7. \text{ Juste !}$$

$$b) (x + 2)(x + 1) - 5(x + 2) = (x + 2)[(x + 1) - 5] = (x + 2)(x - 4).$$

On peut tester le résultat avec $x = 10$:

$$12 \times 11 - 5 \times 12 = 132 - 60 = 72 \text{ et } 12 \times 6 = 72.$$

3^e ● Factoriser : $A = (5x - 7)(3x + 4) - (5x - 7)^2;$

$$B = (2x + 1)^2 + (2x + 1)(x - 3).$$

$$A = (5x - 7)(3x + 4) - (5x - 7)(5x - 7) = (5x - 7)[(3x + 4) - (5x - 7)];$$

$$A = (5x - 7)[3x + 4 - 5x + 7] = (5x - 7)(-2x + 11).$$

Vérification

$$(5x - 7)(3x + 4) - (5x - 7)^2 = (15x^2 - 21x + 20x - 28) - (25x^2 - 70x + 49);$$

$$A = 15x^2 - x - 28 - 25x^2 + 70x - 49 = -10x^2 + 69x - 77.$$

$$(5x - 7)(-2x + 11) = -10x^2 + 14x + 55x - 77 = -10x^2 + 69x - 77.$$

$$B = (2x + 1)(2x + 1) + (2x + 1)(x - 3) = (2x + 1)[(2x + 1) + (x - 3)];$$

$$B = (2x + 1)[2x + 1 + x - 3] = (2x + 1)(3x - 2).$$

On peut vérifier en développant les deux expressions ; on trouve $6x^2 - x - 2$.

VOIR AUSSI !

Distributivité, 19

Multiplication

de sommes algébriques, 33

Identités remarquables, 34

Développer, 35

Factorisation, 37-38

FACTORISER

$$\text{AVEC } A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

RECONNAÎTRE

$$3^{\text{e}} \quad A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

↑

2 carrés ; 1 signe - .

Pour appliquer cette identité, il est nécessaire d'avoir une différence de deux carrés.

$A^2 + B^2$ ne se factorise pas.

UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● Factoriser lorsque c'est possible :

a) $x^2 - 9$; b) $9 - x^2$; c) $x^2 + 9$; d) $-9 + x^2$; e) $-x^2 + 9$.

a) $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$;

b) $9 - x^2 = 3^2 - x^2 = (3 + x)(3 - x)$;

c) $x^2 + 9$ est une somme de deux carrés ; on ne la factorise pas.

d) $-9 + x^2 = x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$;

e) $-x^2 + 9 = 9 - x^2 = (3 + x)(3 - x)$.

Remarque

On peut tester chaque résultat en donnant à x une valeur particulière.

3^e ● Sans calculatrice, calculer le plus vite possible $103^2 - 97^2$.

$103^2 - 97^2$ est de la forme $A^2 - B^2$ avec $A = 103$ et $B = 97$.

Donc $103^2 - 97^2 = (103 + 97)(103 - 97) = 200 \times 6 = 1\,200$.

3^e ● Factoriser lorsque c'est possible :

a) $x^2 - 2$; b) $x^2 + 2$; c) $x^2 - 12$.

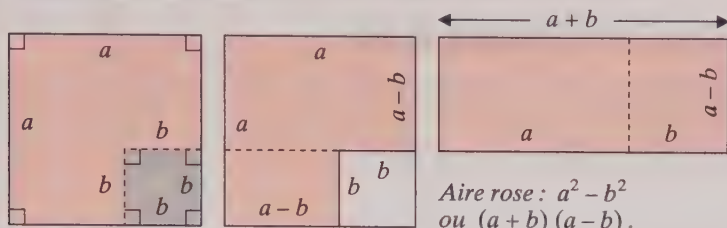
a) $x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$;

b) $x^2 + 2$ est une somme de deux carrés ; on ne la factorise pas.

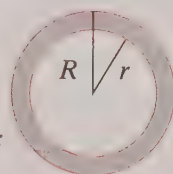
c) $x^2 - 12 = x^2 - (\sqrt{12})^2 = (x + \sqrt{12})(x - \sqrt{12})$;

$\sqrt{12}$ peut s'écrire $\sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Donc $x^2 - 12 = (x + 2\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3})$.



Aire rose : $a^2 - b^2$
ou $(a+b)(a-b)$.



Aire couronne :
 $\pi R^2 - \pi r^2$
ou $\pi(R+r)(R-r)$.

3^e ● Factoriser : a) $x^4 - 16$; b) $x^4 - y^4$; c) $x^4 - y^2$; d) $x^4 - 4$.

$$a) x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 4).$$

$$\text{Comme } x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2);$$

$$\text{on obtient : } x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x+2)(x-2).$$

$$b) x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x+y)(x-y).$$

$$c) x^4 - y^2 = (x^2)^2 - y^2 = (x^2 + y)(x^2 - y);$$

$$d) x^4 - 4 = (x^2)^2 - 2^2 = (x^2 + 2)(x^2 - 2) = (x^2 + 2)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}),$$

$$\text{car } x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}).$$

3^e ● Factoriser : $E = (2x - 3)^2 - 49$.

$$E = (2x - 3)^2 - 7^2; \text{ c'est une différence de deux carrés.}$$

$$\text{On pose } A = 2x - 3 \text{ et } B = 7; \text{ comme } A^2 - B^2 = (A + B)(A - B),$$

$$\text{on a } E = [(2x - 3) + 7][(2x - 3) - 7].$$

$$\text{Cela donne } E = [2x - 3 + 7][2x - 3 - 7] = (2x + 4)(2x - 10).$$

On peut mettre 2 en facteur dans chacun des facteurs du produit :

$$E = 2(x + 2) \times 2(x - 5) = 2 \times 2 \times (x + 2)(x - 5) = 4(x + 2)(x - 5).$$

3^e ● Factoriser : $F = (3x - 5)^2 - (2x + 3)^2$.

F est une différence de deux carrés.

$$\text{On pose } A = 3x - 5 \text{ et } B = 2x + 3; \text{ comme } A^2 - B^2 = (A + B)(A - B),$$

$$\text{on a } F = [(3x - 5) + (2x + 3)][(3x - 5) - (2x + 3)].$$

On effectue les calculs entre crochets car ils sont prioritaires :

$$F = [3x - 5 + 2x + 3][3x - 5 - 2x - 3] = [5x - 2][x - 8];$$

$$F = [5x - 2][x - 8].$$

Remarque

Sous cette forme, on voit que F égale 0 pour $x = 8$;
on reporte dans l'expression donnée : $19^2 - 19^2 = 0$.

Et pour $x = \frac{2}{5}$?

VOIR AUSSI :

Racines carrées, 22-23

Identités remarquables, 34

Développer, 35

Factorisation, 36-38

FACTORISER

AVEC $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$

AVEC $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$

RECONNAÎTRE

3^e ● $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$; $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$

Pour appliquer l'une ou l'autre des identités, il est nécessaire d'avoir :

- trois termes dont deux carrés ;
- le signe + devant les carrés ;
- le troisième terme égal au double-produit (au signe près).

● Premier exemple : factoriser $4x^2 + 12x + 9$

Les deux premières conditions sont remplies :

$4x^2$ est le carré de $2x$ et 9 est le carré de 3.

Le produit est $2x \times 3$ ou $6x$; le double-produit est $12x$.

C'est bien ce qui est donné.

Donc $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$.

● Deuxième exemple : factoriser $-4x^2 + 12x - 9$

On a trois termes, deux carrés ($4x^2$ et 9) mais le signe - devant ces carrés ; on met - 1 en facteur :

$$-4x^2 + 12x - 9 = -1 \times (4x^2 - 12x + 9) = -(4x^2 - 12x + 9).$$

Il faut factoriser $4x^2 - 12x + 9$.

$4x^2$ est le carré de $2x$; 9 est le carré de 3.

Le produit est $2x \times 3$ ou $6x$; le double-produit est $12x$.

C'est ce qui est donné, mais avec le signe - devant.

Donc $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$

et $-4x^2 + 12x - 9 = -(2x - 3)^2$.

UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● Factoriser : a) $9x^2 + 48x + 64$; b) $64 - 48x + 9x^2$;
 c) $9x^2 - 4,8x + 0,64$.

a) $9x^2 = (3x)^2$; $64 = 8^2$; $2 \times 3x \times 8 = 48x$;

Donc $9x^2 + 48x + 64 = (3x + 8)^2$.

OUVRIR L'ŒIL

Pour contrôler, on peut développer les réponses trouvées ou utiliser une valeur particulière de x .

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

$$x^2 + 6x - 9 = ?$$

$$x^2 - 6x - 9 = ?$$

Ce n'est qu'après la classe de troisième que l'on apprend à factoriser ces expressions !

$$b) 64 - 48x + 9x^2 = (8 - 3x)^2;$$

$$c) 9x^2 = (3x)^2; 0,64 = 0,8^2; 2 \times 3x \times 0,8 = 4,8x.$$

$$\text{Donc } 9x^2 - 4,8x + 0,64 = (3x - 0,8)^2.$$

3^e ● Compléter pour avoir des identités remarquables :

$$a) 9x^2 - 24x + \dots = \dots;$$

$$b) \dots + 16 + 40x = \dots$$

a) Il manque un carré au premier membre.

$9x^2$ est le carré de $3x$; $24x$ est un double-produit; le produit est donc

$12x$; $12x = 3x \times$ facteur inconnu; le facteur inconnu est 4.

Le terme manquant est 4^2 ou 16.

$$9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2.$$

b) Un raisonnement analogue donne :

$$25x^2 + 16 + 40x = (5x + 4)^2.$$

3^e ● Factoriser : $E = 3x^3 - 18x^2 + 27x$.

Il y a bien trois termes mais on ne voit pas de carrés !

Par contre, le coefficient numérique de chaque terme est multiple de 3 ;

de plus chaque terme contient x en facteur car :

$$x^3 = x \times x^2; x^2 = x \times x \text{ et } x = x \times 1.$$

On peut mettre $3x$ en facteur :

$$E = 3x (x^2 - 6x + 9).$$

On factorise $x^2 - 6x + 9$.

x^2 est le carré de x ;

$$9 = 3^2; 2 \times x \times 3 = 6x.$$

$$\text{Donc } x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2.$$

$$E = 3x(x - 3)^2.$$

On vérifie en développant :

$$3x (x - 3)^2 = 3x (x^2 - 6x + 9) = 3x^3 - 18x^2 + 27x.$$

VOIR AUSSI :

Multiplication de sommes algébriques, 33

Identités remarquables, 34

Développer, 35

Factoriser, 36-37

ÉQUATIONS
ÉLÉMENTAIRESTYPE : $a + x = b$

COMPRENDRE

$$\begin{array}{ccccccc}
 7 & + & x & = & 20 & \leftarrow \text{équation} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{terme} & & \text{terme} & & \text{somme} \\
 \text{connu} & & \text{inconnu} & & \text{connue} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 a & + & x & = & b & \leftarrow \text{équation}
 \end{array}$$

 x est le terme inconnu dans une addition.

On le calcule à l'aide d'une soustraction.

OUVRIR

• Avec des nombres arithmétiques, il y a une condition : $b \geq a$.

• Avec des nombres relatifs, il n'y a pas de condition. $a - b = a + \text{opposé } b$.

• Comment résoudre l'équation avec des nombres arithmétiques ?

6^e L'équation $a + x = b$ (avec $b \geq a$) a une solution ; c'est $b - a$. $4 + x = 7,2$ a une solution ; c'est $7,2 - 4$ soit $3,2$. $4 + x = 3,3$ n'a pas de solution car $3,3 < 4$.5^e $\frac{2}{3} + x = \frac{7}{3}$ a une solution ; c'est $\frac{7}{3} - \frac{2}{3}$ soit $\frac{5}{3}$. $\frac{8}{9} + x = \frac{7}{9}$ n'a pas de solution car $\frac{7}{9} < \frac{8}{9}$.5^e • Comment résoudre l'équation avec des décimaux relatifs ?L'équation $a + x = b$ a une solution ; c'est $b - a$. $+4 + x = +3,3$ a une solution ; c'est $+3,3 - (+4)$ soit $-0,7$. $-5 + x = -2,3$ a une solution ; c'est $-2,3 - (-5)$ soit $+2,7$.4^e • Comment résoudre l'équation avec des nombres relatifs ?L'équation $a + x = b$ a une solution ; c'est $b - a$. $-2,5 + x = -7$ a une solution ; c'est $-7 - (-2,5)$ soit $-4,5$. $-\frac{1}{7} + x = \frac{2}{7}$ a une solution ; c'est $\frac{2}{7} - \left(-\frac{1}{7}\right)$ soit $\frac{3}{7}$. $-\frac{2}{3} + x = -\frac{5}{6}$ a une solution ; c'est $-\frac{5}{6} - \left(-\frac{2}{3}\right)$ soit $-\frac{1}{6}$.

Une équation c'est une question !

$13 + x = 17$ c'est : « Que peut-on mettre à la place de x pour avoir une égalité ? »

Ici une seule réponse : 4, car $\underline{13 + 4 = 17}$.

C'est une égalité.

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Résoudre les équations (x désigne un nombre arithmétique) :

a) $x + 30,09 = 30,1$; b) $x + 17 = 16,99$; c) $x + 12,3 = 41,29$.

a) $x + 30,09 = 30,1$; la solution est $30,1 - 30,09$ soit 0,01 ;

b) $x + 17 = 16,99$; il n'y a pas de solution car $17 > 16,99$;

c) $x + 12,3 = 41,29$; la solution est $41,29 - 12,3$ soit 28,99.

5^e ● Résoudre les équations (x désigne un décimal relatif) :

a) $x + (-3,5) = -5,7$; b) $+4 + x = -1,2$; c) $-3,5 + x = -3,5$.

a) $x + (-3,5) = -5,7$; la solution est $-5,7 - (-3,5)$ soit -2,2 ;

b) $+4 + x = -1,2$; la solution est $-1,2 - (+4)$ soit -5,2 ;

c) $-3,5 + x = -3,5$; la solution est $-3,5 - (-3,5)$ soit 0.

5^e ● Résoudre les équations (x désigne un nombre arithmétique) :

a) $\frac{4}{3} + x = \frac{8}{3}$; b) $x + \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$.

a) $\frac{4}{3} + x = \frac{8}{3}$; la solution est $\frac{8}{3} - \frac{4}{3}$ ou $\frac{8-4}{3}$ ou $\frac{4}{3}$;

b) $x + \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$; il n'y a pas de solution car $\frac{2}{3} < \frac{5}{3}$.

4^e ● Résoudre les équations (x désigne un nombre relatif) :

a) $-\frac{5}{7} + x = -\frac{9}{7}$; b) $-\frac{3}{11} + x = \frac{7}{22}$.

a) $x = -\frac{9}{7} - \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{9}{7} + \frac{5}{7} = -\frac{4}{7}$;

b) $x = \frac{7}{22} - \left(-\frac{3}{11}\right) = \frac{7}{22} + \frac{3}{11} = \frac{7}{22} + \frac{6}{22} = \frac{13}{22}$.

VOIR AUSSI :

Décimaux - Opérations, 8-9

Quotients, 15

Relatifs, 27

Quotients

de nombres relatifs, 29

ÉQUATIONS
ÉLÉMENTAIRESTYPE : $a \times x = b$

COMPRENDRE

$$\begin{array}{ccccccc}
 7 & \times & x & = & 21 & \leftarrow \text{équation} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{facteur} & & \text{facteur} & & \text{produit} \\
 \text{connu} & & \text{inconnu} & & \text{connu} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 a & \times & x & = & b & \leftarrow \text{équation}
 \end{array}$$

x est le facteur inconnu dans une multiplication ;
on le calcule à l'aide d'une division.

OUVRIR
L'ŒIL

● La division ne tombe pas juste (cas de 7 divisé par 3) :
on donne la réponse sous
forme fractionnaire.

● La division tombe juste
(cas de 7 divisé par 4) :
on peut donner la réponse
sous forme fractionnaire
ou sous forme décimale.

● Comment résoudre l'équation avec des nombres arithmétiques ?

L'équation $a \times x = b$ (avec $a \neq 0$) a une solution ; c'est $b : a$
que l'on note aussi $\frac{b}{a}$.

- 6^e $7 \times x = 21$ a une solution ; c'est $21 : 7$ soit 3.
 $23 \times x = 471,5$ a une solution ; c'est $471,5 : 23$ soit 20,5.
- 5^e $3 \times x = 7$ a une solution ; c'est $\frac{7}{3}$.
 $4 \times x = 7$ a une solution ; c'est $\frac{7}{4}$ soit 1,75.

4^e ● Comment résoudre l'équation avec des nombres relatifs ?

L'équation $ax = b$ (avec $a \neq 0$) a une solution ; c'est $\frac{b}{a}$.

$$1,5x = 5 ; \frac{5}{1,5} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3} ; \text{ la solution est } \frac{10}{3}.$$

$$4x = -7 ; \frac{-7}{4} = -1,75 ; \text{ la solution est } -1,75.$$

$$-5x = \frac{2}{3} ; \frac{2}{3} : (-5) = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{2}{15} ; \text{ la solution est } -\frac{2}{15}.$$

$$-x = \frac{2}{3} ; \frac{2}{3} : (-1) = \frac{2}{3} \times (-1) = -\frac{2}{3} ; \text{ la solution est } -\frac{2}{3}.$$

On peut dire aussi : l'opposé de x est $\frac{2}{3}$; donc $x = -\frac{2}{3}$.

Une équation c'est une question !

$13 \times x = 143$ c'est : « Que peut-on mettre à la place de x pour avoir une égalité ? »

Ici une seule réponse : 11, car $13 \times 11 = 143$.

C'est une égalité.

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Résoudre les équations (x désigne un nombre arithmétique) :

a) $45,9 \times x = 123,93$; b) $x \times 7,4 = 3,7$; c) $x \times 3,6 = 0,9$.

a) $45,9 \times x = 123,93$; la solution est $123,93 : 45,9$ soit 2,7 ;

b) $x \times 7,4 = 3,7$; la solution est $3,7 : 7,4$ soit 0,5 ;

c) $x \times 3,6 = 0,9$; la solution est $0,9 : 3,6$ soit 0,25.

5^e ● Résoudre les équations (x désigne un nombre arithmétique) :

a) $11 \times x = 7$; b) $0,5x = 0,72$; c) $4,5x = 1,5$.

a) $11 \times x = 7$; la solution est $\frac{7}{11}$;

b) $0,5x = 0,72$; la solution est $\frac{0,72}{0,5}$ ou $\frac{72}{50}$ ou 1,44 ;

c) $4,5x = 1,5$; la solution est $\frac{1,5}{4,5}$ ou $\frac{15}{45}$ ou $\frac{1}{3}$.

4^e ● Résoudre les équations (x désigne un nombre relatif) :

a) $-7x = \frac{14}{3}$; b) $-\frac{1}{3}x = \frac{4}{3}$; c) $-\frac{3}{7}x = \frac{2}{3}$.

a) $-7x = \frac{14}{3}$; $\frac{14}{3} : (-7) = \frac{14}{3} \times \left(-\frac{1}{7}\right) = -\left(\frac{14}{3} \times \frac{1}{7}\right)$; la solution est $-\frac{2}{3}$;

b) $-\frac{1}{3}x = \frac{4}{3}$; $\frac{4}{3} : \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \times (-3) = -\left(\frac{4}{3} \times 3\right)$; la solution est -4 ;

c) $-\frac{3}{7}x = \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} : \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{7}{3}\right)$

et $\frac{2}{3} \times \left(-\frac{7}{3}\right) = -\left(\frac{2}{3} \times \frac{7}{3}\right) = -\frac{14}{9}$; la solution est $-\frac{14}{9}$.

OUVRIR L'ŒIL

● Pour diviser par a ,
on multiplie par l'inverse
de a .

● L'inverse d'un nombre
négatif est un nombre
négatif :

• l'inverse de -7 est $-\frac{1}{7}$

car $-7 \times \left(-\frac{1}{7}\right) = 1$;

• l'inverse de $-\frac{3}{7}$ est

$-\frac{7}{3}$ car $-\frac{3}{7} \times \left(-\frac{7}{3}\right) = 1$.

Voir aussi

Décimaux - Opérations, 8-9

Quotients, 16

Relatifs, 28

Quotients

Les nombres relatifs, 29

ÉQUATIONS DU 1^{ER} DEGRÉ À UNE INCONNUE

COMPRENDRE

4^e ● Qu'est-ce qu'une équation du 1^{er} degré à une inconnue ?

$$\underbrace{4x + 20}_{1^{\text{er}} \text{ membre}} = \underbrace{75 - 7x}_{2^{\text{e}} \text{ membre}} \leftarrow \text{équation à une inconnue, } x.$$

1^{er} membre 2^e membre

Les transformations d'écriture que l'on va faire ont un but très précis : arriver à une équation de la forme $ax = b$. Pour cela, on va faire passer tous les termes en x dans le premier membre et tous les autres dans le second.

4^e ● Résolution de l'équation $4x + 20 = 75 - 7x$

On ajoute -20 aux deux membres de l'équation ; elle devient :

$$4x + 20 - 20 = 75 - 7x - 20 \text{ puis } 4x = 55 - 7x.$$

On ajoute $7x$ aux deux membres de l'équation ; elle devient :

$$4x + 7x = 55 - 7x + 7x \text{ puis } 11x = 55.$$

C'est une équation de la forme $ax = b$.

Elle a pour solution $55 : 11$ soit 5 .

La solution de l'équation $4x + 20 = 75 - 7x$ est 5 .

Remarque

On peut s'assurer que la valeur trouvée convient en remplaçant x par cette valeur :

$$4x + 20 \text{ devient } 4 \times 5 + 20 \text{ soit } 40$$

$$75 - 7x \text{ devient } 75 - 7 \times 5 \text{ soit } 40.$$

UTILISER SES CONNAISSANCES

4^e ● Résoudre l'équation $5x + 3(x - 1) = 4(x - 2) + x$.

On effectue les produits dans chaque membre :

$$5x + 3x - 3 = 4x - 8 + x.$$

On réduit chaque membre : $8x - 3 = 5x - 8$.

OUVRIR L'ŒIL

● Pour faire disparaître un terme dans un membre on ajoute aux deux membres l'opposé de ce terme.

● Chaque transformation doit être précédée d'une explication.

● Au début, il est préférable de n'effectuer qu'une transformation à la fois afin d'éviter les erreurs de calcul.

Une équation du premier degré à une inconnue est une équation qui, **après transformation**, s'écrit : $a \times x = b$.

$$\text{Ainsi : } \left. \begin{array}{l} 6x + 1 = 10 - x \\ 3(x - 1) = 2(3 - 2x) \\ \frac{4x + 3}{2} = \frac{31,5 - 15x}{3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{peuvent toutes} \\ \text{se transformer en : } 7 \times x = 9. \end{array}$$

On ajoute +3 et -5x aux deux membres :

$$8x - 3 + 3 - 5x = 5x - 8 + 3 - 5x.$$

On réduit chaque membre : $3x = -5$.

$$\text{La solution est : } \frac{-5}{3} \text{ ou } -\frac{5}{3}.$$

3° ● Résoudre l'équation $9 - \frac{x+4}{3} = x - \frac{5-2x}{6}$.

Un dénominateur est 3 ; l'autre est 6. Le dénominateur commun est 6 ; on multiplie chaque membre par 6.

$$6 \times \left(9 - \frac{x+4}{3} \right) = 6 \times \left(x - \frac{5-2x}{6} \right).$$

$$54 - \frac{6(x+4)}{3} = 6x - \frac{6(5-2x)}{6}.$$

$$54 - 2(x+4) = 6x - (5-2x).$$

On développe : $54 - 2x - 8 = 6x - 5 + 2x$.

On réduit : $46 - 2x = 8x - 5$.

On ajoute : -46 et -8x aux deux membres de l'équation :

$$46 - 2x - 46 - 8x = 8x - 5 - 46 - 8x.$$

On réduit : $-10x = -51$;

$$\text{la solution est } \frac{-51}{-10} \text{ ou } 5,1.$$

3° ● Résoudre l'équation $5x + 2(x+1) = 7x - 5$

On développe : $5x + 2x + 2 = 7x - 5$.

On réduit : $7x + 2 = 7x - 5$.

On ajoute -2 et -7x aux deux membres de l'équation :

$$7x + 2 - 2 - 7x = 7x - 5 - 2 - 7x.$$

On réduit : $0x = -7$.

Quel que soit x le premier membre est 0.

L'équation n'a pas de solution.



Ne pas oublier qu'un trait de fraction remplace des parenthèses :

• $\frac{x+4}{3}$ c'est

• $\frac{1}{3}(x+4)$ ou

• $(x+4) \times \frac{1}{3}$ ou

• $(x+4) : 3$...

VOIR AUSSI :

Distributivité, 19

Séquences de calcul, 21

Réduction, 31

Développer, 35

Équations élémentaires, 40

ÉQUATIONS
SE RAMENANT
AU 1^{ER} DEGRÉ

COMPRENDRE

3^e ● Comment résoudre une équation-produit ?

$(2x - 6)(0,4x + 10) = 0$ est une équation-produit.

Le premier membre est un produit de facteurs, chacun étant de la forme $Ax + B$ et le second membre est 0.

Chaque valeur de x qui annule un facteur est solution de l'équation ; on résout $2x - 6 = 0$, puis $0,4x + 10 = 0$.

- $2x - 6 = 0$; $2x = 6$; $x = 3$.
 - $0,4x + 10 = 0$; $0,4x = -10$; $x = -10 : 0,4$; $x = -25$.
- Donc $(2x - 6)(0,4x + 10) = 0$ a deux solutions : 3 et -25.

OUVRIR

L'ŒIL

Une bonne connaissance des identités remarquables peut permettre de transformer l'écriture d'une équation. On utilise fréquemment $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ pour ramener une équation au 1^{er} degré.

3^e ● Comment résoudre une équation de la forme $x^2 = k$?

■ On peut appliquer le cours (fiche 22) :

- si $k > 0$, l'équation $x^2 = k$ a deux solutions $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$;
- si $k = 0$, $x^2 = 0$ a pour solution 0 ;
- si $k < 0$, l'équation $x^2 = k$ n'a pas de solution.

Ainsi :

$x^2 = 7$ a pour solutions $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$;

$x^2 = 25$ a pour solutions $\sqrt{25}$ et $-\sqrt{25}$, soit 5 et -5 ;

$x^2 = -3$ n'a pas de solution.

■ On peut tenter de la transformer en équation-produit :

$x^2 = 25$ devient $x^2 - 25 = 0$ ou $(x + 5)(x - 5) = 0$;

$x + 5 = 0$ a pour solution -5 ;

$x - 5 = 0$ a pour solution 5 ;

$x^2 = 25$ a deux solutions -5 et 5.

Remarque

On a appliqué $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.

Ramener au premier degré :

$4x^2 - 9 = 0$ devient $(2x - 3)(2x + 3) = 0$ puis $2x + 3 = 0$ ou $2x - 3 = 0$.

2^e degré

produit nul

deux équations du 1^{er} degré

UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● Résoudre l'équation $(2x + 7)(10 - 14x) = 0$.

Chaque valeur de x qui annule un facteur est solution.

• $2x + 7 = 0$; $2x = -7$; $x = -7 : 2$; $x = -3,5$.

• $10 - 14x = 0$; $-14x = -10$; $x = -10 : (-14)$; $x = \frac{10}{14}$; $x = \frac{5}{7}$.

L'équation a deux solutions : $-3,5$ et $\frac{5}{7}$.

3^e ● Résoudre l'équation $(2x + 5)^2 = (x - 3)^2$.

L'équation s'écrit : $(2x + 5)^2 - (x - 3)^2 = 0$.

On utilise : $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ avec $A = 2x + 5$ et $B = x - 3$.

L'équation devient : $[(2x + 5) + (x - 3)][(2x + 5) - (x - 3)] = 0$.

On réduit chaque crochet : $[3x + 2][x + 8] = 0$.

Chaque valeur de x qui annule un facteur est solution.

• $3x + 2 = 0$; $3x = -2$; $x = \frac{-2}{3}$; $x = -\frac{2}{3}$.

• $x + 8 = 0$; $x = -8$.

L'équation a deux solutions $-\frac{2}{3}$ et -8 .

3^e ● Résoudre les équations : a) $x^2 = 49$ et b) $x^2 = 48$.

a) $x^2 = 49$ a deux solutions $\sqrt{49}$ et $-\sqrt{49}$, soit 7 et -7;

b) $x^2 = 48$ a deux solutions $\sqrt{48}$ et $-\sqrt{48}$.

$48 = 16 \times 3$; $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Les solutions se notent aussi : $4\sqrt{3}$ et $-4\sqrt{3}$.

**OUVRIR
L'ŒIL**

On peut vérifier
en remplaçant x par l'une
ou l'autre des solutions

VOIR AUSSI :

Racine carrée, 23

Développer, 35

Factoriser, 16-17-18

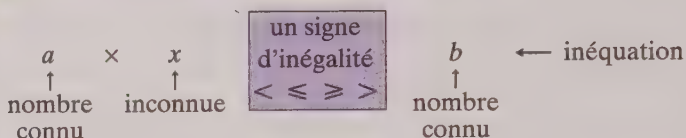
Formule du binôme, 29

Formule du trinôme, 40

INÉQUATIONS
ÉLÉMENTAIRES

COMPRENDRE

- Qu'est-ce qu'une inéquation élémentaire ?

4^e Résolution avec a strictement positif

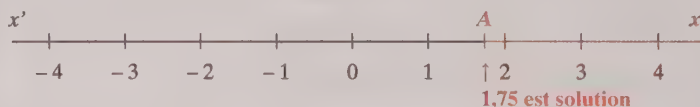
Résolution de l'inéquation $2x \geq 3,5$.

$2x$ est le premier membre ; $3,5$ est le second membre.

On divise les deux membres de l'inéquation par le coefficient de x qui est positif sans rien changer au signe d'inégalité.

$2x \geq 3,5$ devient $x \geq 3,5 : 2$ ou $x \geq 1,75$.

$1,75$ et tous les nombres qui lui sont strictement supérieurs sont solutions de l'inéquation ; on ne peut les citer toutes mais on peut les représenter sur un axe :



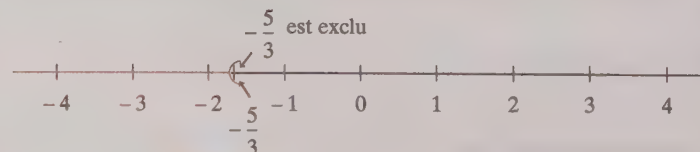
La demi-droite $\overrightarrow{Ax}$ est constituée de tous les points dont les abscisses sont solutions de l'inéquation.

Résolution de l'inéquation $3x < -5$.

On divise chaque membre de l'inéquation par 3.

$3x < -5$ devient $x < -\frac{5}{3}$.

Tous les nombres qui sont strictement inférieurs à $-\frac{5}{3}$ sont solutions de l'inéquation ; on peut les représenter sur un axe :

OUVRIR
L'ŒIL

- Remplacer x par quelques valeurs peut permettre de déceler une erreur de calcul.

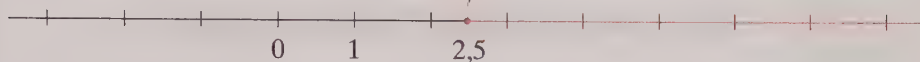
Ainsi, pour $3x < -5$,

si $x = -2$; $3x = -6$
et $-6 < -5$;

si $x = 0$; $3x = 0$,
mais 0 n'est pas
inférieur à -5 .

Solutions de $x < 2,5$
mais aussi de $4x < 10$.

Solutions de $x \geq 2,5$
mais aussi de $2x \geq 5$.



3^e ● Résolution avec a strictement négatif

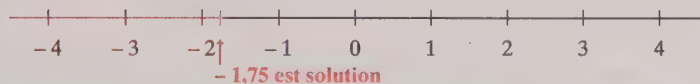
Résolution de l'inéquation $-2x \geq 3,5$.

On divise les deux membres de l'inéquation par le coefficient de x qui est **négatif** et on **change** le sens du signe d'inégalité ($<$ devient $>$, $\leq$ devient $\geq$, $>$ devient $<$, $\geq$ devient $\leq$).

$-2x \geq 3,5$ devient $x \leq \frac{3,5}{-2}$ ou $x \leq -1,75$.

$-1,75$ et tous les nombres qui lui sont strictement inférieurs sont toutes les solutions de l'inéquation.

On peut les représenter sur un axe :



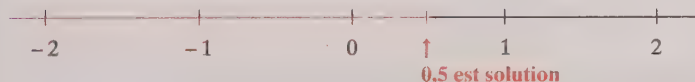
UTILISER SES CONNAISSANCES

4^e ● Résoudre les inéquations a) $5x \leq 2,5$; b) $7x > -3$.

Représenter graphiquement les solutions.

a) On divise les deux membres de l'inéquation par 5.

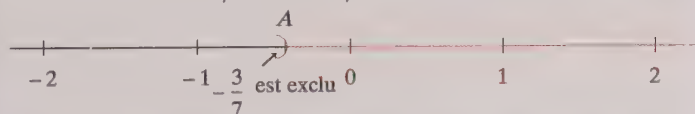
$5x \leq 2,5$ devient $x \leq 2,5 : 5$ ou $x \leq 0,5$.



Les abscisses des points de la demi-droite coloriée en rouge sont les solutions de l'inéquation $5x \leq 2,5$.

b) On divise les deux membres de l'inéquation par 7.

$7x > -3$ devient $x > -\frac{3}{7}$ ou $x > -\frac{3}{7}$ ($\approx 0,43$).



Les abscisses des points de la demi-droite coloriée en rouge (A exclu) sont les solutions de l'inéquation $7x > -3$.

VOIR AUSSI :

Droite graduée 24

Comparaison

et Inéquation 71

INÉQUATIONS DU 1^{ER} DEGRÉ À UNE INCONNUE

COMPRENDRE

OUVRIR

L'OUTIL

On peut contrôler en donnant à x différentes valeurs dans l'inéquation initiale.

● Pour $x = 0$, le 1^{er} membre vaut 9 et le second 12.
 $9 < 12$; 0 est solution.

● Pour $x = -\frac{3}{13}$,

le 1^{er} membre vaut

$$\frac{9}{13} + 9 \text{ ou } \frac{126}{13}.$$

Le second vaut

$$12 + \frac{-30}{13} \text{ ou } \frac{126}{13};$$

$-\frac{3}{13}$ est solution.

3^e ● Comment résoudre une inéquation ?

$$\underbrace{-3x + 9}_{1^{\text{er}} \text{ membre}} \leq \underbrace{12 + 10x}_{2^{\text{e}} \text{ membre}} \leftarrow \text{inéquation à une inconnue } x.$$

Toutes les transformations ont pour but d'arriver à une inéquation de la forme $ax \leq b$.

Résolution

On ajoute -9 aux deux membres ; on obtient :

$$-3x + 9 - 9 \leq 12 + 10x - 9 \text{ puis } -3x \leq 3 + 10x.$$

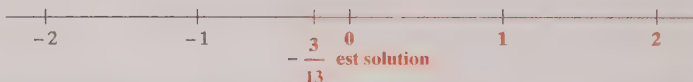
On ajoute $-10x$ aux deux membres ; on obtient :

$$-3x - 10x \leq 3 + 10x - 10x \text{ puis } -13x \leq 3.$$

On divise les deux membres de l'inéquation par -13 .

$$-13x \leq 3 \text{ devient } x \geq -\frac{3}{13} \text{ ou } x \geq -\frac{3}{13} \text{ car } -13 \text{ est négatif.}$$

$-\frac{3}{13}$ et tous les nombres qui lui sont supérieurs strictement sont solutions de l'inéquation ; on les représente sur un axe :



UTILISER SES CONNAISSANCES

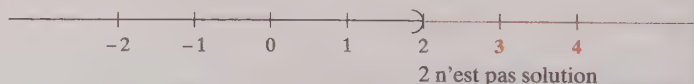
3^e ● Résoudre l'inéquation $-5x + 3 < 6x - 19$.

On ajoute $-6x - 3$ aux deux membres de l'inéquation pour avoir tous les termes en x dans le premier membre et les autres dans le second :

$$-5x + 3 + (-6x - 3) < 6x - 19 + (-6x - 3).$$

On réduit chaque membre et on a : $-11x < -22$.

On divise les deux membres par -11 ; on a : $x > 2$.



On peut contrôler : pour $x = 3$, on obtient $-12 < -1$ et 3 est bien solution.



solutions de $x \geq -1,5$
mais aussi de $2x + 3 \geq x + 1,5 \dots$;



solutions de $x \leq 2,5$
mais aussi de $-3x + 4 \leq -4x + 6,5 \dots$.

UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● Résoudre l'inéquation $4(x + 1) - x > -5x + 3(x - 2)$.

On effectue les produits dans chaque membre de l'inéquation :

$$4x + 4 - x > -5x + 3x - 6.$$

On réduit chaque membre : $3x + 4 > -2x - 6$.

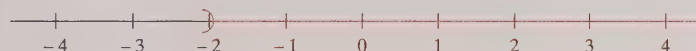
On ajoute -4 et $2x$ aux deux membres, puis on réduit :

$$3x + 4 - 4 + 2x > -2x - 6 - 4 + 2x \text{ ou } 5x > -10.$$

On divise les deux membres par 5 :

$$5x > -10 \text{ devient } x > -10 : 5 \text{ ou } x > -2.$$

Tout nombre strictement supérieur à -2 est solution.



3^e ● Résoudre les deux inéquations :

$$5x - 3 \leq 7(x - 1) - 2 \quad (1)$$

$$4(1 + x) < 2x - 3 \quad (0,5 + x) \quad (2)$$

Inéquation (1)

$$5x - 3 \leq 7x - 7 - 2$$

$$5x - 3 \leq 7x - 9$$

$$5x - 3 + 3 - 7x \leq 7x - 9 + 3 - 7x$$

$$-2x \leq -6$$

$$x \geq -6 : (-2)$$

$$x \geq 3.$$

Inéquation (2)

$$4 + 4x < 2x - 1,5 - 3x$$

$$4 + 4x < -x - 1,5$$

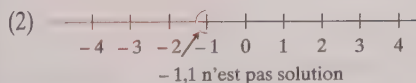
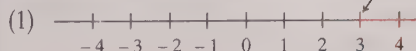
$$4 + 4x - 4 + x < -x - 1,5 - 4 + x$$

$$5x < -5,5$$

$$x < -5,5 : 5$$

$$x < -1,1.$$

Représentation graphique des solutions :



VOIR AUSSI :

Droite graduée, 24

Comparaison, 25

Développer, 35

Inéquations

élémentaires, 43

SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS DU 1^{ER} DEGRÉ À DEUX INCONNUES

INTERPRÉTATION « GRAPHIQUE »

COMPRENDRE

3^e ● Qu'est-ce que l'interprétation « graphique » d'un système de deux équations du 1^{er} degré à deux inconnues ?

$\begin{cases} 3x - 4y = 23 \\ -2x + 3y = -4 \end{cases}$ Voici un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y ou, plus précisément, à un couple inconnu $(x; y)$.

Résoudre le système, c'est déterminer tous les couples $(x; y)$ qui vérifient en même temps les deux équations.

Pour interpréter **graphiquement** un tel système, on l'écrit sous la forme $\begin{cases} y = \dots \\ y = \dots \end{cases}$ en exprimant y en fonction de x dans

chaque équation ; on obtient deux fonctions affines ; dans un repère, on construit alors les représentations graphiques correspondantes qui sont des droites.

Le couple de coordonnées du point d'intersection est le couple solution du système.

UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● Interpréter graphiquement le système

$$\begin{cases} 2x - y = 2,4 \\ 6x + 5y = 12 \end{cases}$$

On exprime y en fonction de x dans chaque équation.

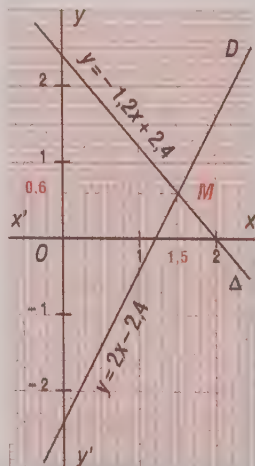
Le système devient : $\begin{cases} y = 2x - 2,4 \\ y = -1,2x + 2,4 \end{cases}$

Dans un repère, on construit les droites D et Δ représentations graphiques respectives des fonctions affines :

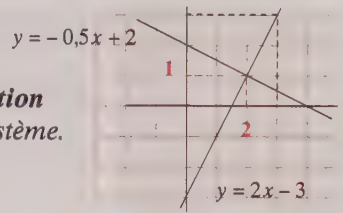
$$y = 2x - 2,4 \text{ et } y = -1,2x + 2,4.$$

D passe par les points de coordonnées $(0; -2,4)$ et $(1,2; 0)$ et Δ , par les points de coordonnées $(0; 2,4)$ et $(2; 0)$.

Elles se coupent en $M(1,5; 0,6)$; le couple $(1,5; 0,6)$ est la solution graphique du système.



$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -0,5x + 2 \end{cases} \rightarrow \mathbf{(2; 1) \text{ est la solution graphique du syst\`eme.}}$$



Remarque

Le couple $(1,5; 0,6)$ est-il la solution du syst\`eme ?

$$2 \times 1,5 - 0,6 = 3 - 0,6 = 2,4; \quad 6 \times 1,5 + 5 \times 0,6 = 9 + 3 = 12.$$

$(1,5; 0,6)$ est la solution du syst\`eme.

3° ● **Interpr\`eter graphiquement le syst\`eme :**
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1,5 & (1) \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{6} = 0,25 & (2) \end{cases}$$

On multiplie les deux membres de l'\`equation (1) par 3 :

$$3 \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \right) = 1,5 \times 3; \quad 1,5x + y = 4,5 \quad (3).$$

On multiplie les deux membres de l'\`equation (2) par 6 :

$$6 \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{6} \right) = 0,25 \times 6; \quad 1,5x - y = 1,5 \quad (4).$$

Dans les \`equations (3) et (4), on exprime  $y$  en fonction de  $x$  de mani\`ere \`a avoir deux fonctions affines :

$$y = -1,5x + 4,5 \text{ et } y = 1,5x - 1,5.$$

Dans un rep\`ere orthogonal, on trace les droites  $D$  et  $\Delta$  repr\`esentations graphiques respectives des fonctions affines :

$$y = -1,5x + 4,5 \text{ et } y = 1,5x - 1,5.$$

(Pour D , on a pris les points

$A(0; 4,5)$ et $B(3; 0)$;

pour Δ , $E(0; -1,5)$ et $F(3; 3)$.)

D et Δ se coupent en M ;

on lit les coordonn\`ees de M : 2 et 1,5.

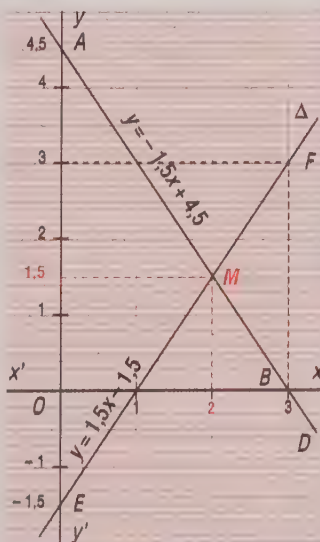
La solution graphique du syst\`eme est $(2; 1,5)$.

Remarque

Le couple $(2; 1,5)$ est-il la solution du syst\`eme ?

$$\frac{2}{2} + \frac{1,5}{3} = 1,5; \quad \frac{2}{4} - \frac{1,5}{6} = 0,25.$$

Le couple $(2; 1,5)$ est la solution du syst\`eme.



OUVRIR L'ŒIL

● Lorsque les coefficients sont fractionnaires, multiplier les deux membres de l'\`equation par un m\`eme nombre pour ne plus avoir de d\`enominateurs ; cela facilite la t\`ache.

● La solution graphique d'un syst\`eme n'est pas toujours la solution du syst\`eme. (Voir fiche 48.)

VOIR AUSSI :

\`Equations \`a une inconnue, 41

Syst\`emes d'\`equations, 46

Fonctions affines, 128-129

SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS DU 1^{ER} DEGRÉ À DEUX INCONNUES

RÉSOLUTION « ALGÈBRIQUE »

COMPRENDRE

3^e ● Qu'est-ce que la méthode de substitution ?

- On calcule, dans l'une des équations, une des inconnues en fonction de l'autre et on reporte la valeur trouvée dans l'autre équation.
- Cette méthode peut être choisie lorsque l'une des inconnues a pour coefficient 1 ou -1 (1^{er} et 2^e exercices).

● Qu'est-ce que la méthode de combinaison ?

On multiplie les deux membres de chaque équation par des nombres choisis de telle manière qu'en additionnant membre à membre les nouvelles équations obtenues, l'une des inconnues disparaisse (3^e et 4^e exercices).

OUVRIR L'ŒIL

Une fois le couple $(x; y)$ trouvé, on peut vérifier en reportant les valeurs de x et de y dans le système initial. (on peut utiliser : le calcul mental, le calcul à la main ou la calculatrice.)

UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● Résoudre le système
$$\begin{cases} 6x - 7y = 5 \\ 11x - y = 21 \end{cases}$$

On a intérêt à calculer y en fonction de x dans la seconde équation ; on obtient : $y = 11x - 21$.

On substitue à y , dans la première équation, sa valeur en fonction de x :

$$6x - 7(11x - 21) = 5 \quad \text{ou} \quad 6x - 77x + 147 = 5$$

$$-71x + 147 = 5; \quad -71x = -142; \quad x = 2.$$

Donc $y = 11 \times 2 - 21 = 1$. Le couple $(2; 1)$ est la solution du système.

Vérification : $6 \times 2 - 7 \times 1 = 12 - 7 = 5;$

$$11 \times 2 - 1 = 22 - 1 = 21.$$

Le couple $(2; 1)$ est bien la solution du système.

3^e ● Résoudre le système
$$\begin{cases} x - 5y = 7 \\ 4x - 7y = 2 \end{cases}$$

On a intérêt à calculer x en fonction de y dans la première équation, on a : $x = 5y + 7$.

$$2x + 3y = 67$$

$$3x + 2y = 73$$

$$-4x - 6y = -134$$

$$9x + 6y = 219$$

$$5x = 85$$

$$x = 17$$

On combine !

Solution : (17 ; 11).

$$6x + 9y = 201$$

$$-6x - 4y = -146$$

$$5y = 55$$

$$y = 11$$

On substitue cette valeur à x , dans la seconde équation :

$$4(5y + 7) - 7y = 2 \text{ ou } 20y + 28 - 7y = 2 ;$$

cela s'écrit : $13y = -26$; $y = -26 : 13 = -2$.

Donc $x = 5 \times (-2) + 7x = -3$.

Le couple $(-3 ; -2)$ est la solution du système.

3^e ● Résoudre le système $\begin{cases} 3x + 4y = 5 & (1) \\ 6x - 7y = 1 & (2) \end{cases}$

On multiplie les deux membres de l'équation (1) par 2 et ceux de l'équation (2) par -1 ; on obtient :

$$\begin{array}{l} \times 2 \quad \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 6x + 7y = 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 6x + 8y = 10 & (3) \\ -6x - 7y = -1 & (4) \end{cases} \end{array}$$

On additionne membre à membre (3) et (4) ; on obtient : $y = 9$.

On reporte cette valeur dans l'équation (1) :

$$3x + 4 \times 9 = 5 ; 3x + 36 = 5 ; 3x = -31 ; x = -\frac{31}{3}.$$

Le couple $\left(-\frac{31}{3} ; 9\right)$ est la solution du système.

3^e ● Résoudre le système $\begin{cases} 2x - 3y = 7 & (1) \\ 5x + 2y = 8 & (2) \end{cases}$

On multiplie les deux membres de l'équation (1) par 2 et ceux de l'équation (2) par 3 ; on obtient :

$$\begin{array}{l} \times 2 \quad \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 4x - 6y = 14 & (3) \\ 15x + 6y = 24 & (4) \end{cases} \end{array}$$

On additionne membre à membre les équations (3) et (4) :

$$4x - 6y + 15x + 6y = 14 + 24 \text{ ou } 19x = 38 \text{ ou } x = 2.$$

On reporte cette valeur dans (1) : $4 - 3y = 7$; $-3y = 3$; $y = -1$.

Le couple $(2 ; -1)$ est la solution du système.

OUVRIR

L'OEIL

● Numéroté les équations peut faciliter la rédaction.

● « Membre à membre » signifie que l'on additionne, d'une part, les termes des deux premiers membres et, d'autre part, ceux des seconds membres pour former une troisième équation (à une inconnue).

VOIR AUSSI :

Équations

À une inconnue, 41

Système d'équations, 45

PROBLÈMES À UNE INCONNUE

COMPRENDRE

4^e ● Quelles sont les quatre étapes de la résolution algébrique
3^e d'un problème ?

1. Choix de l'inconnue

On se sert de lettres (x en général) ; on précise bien les unités choisies et les conditions imposées.

2. Mise en équation

On traduit les renseignements fournis dans l'énoncé par des expressions algébriques et on écrit selon les cas : une équation, une inéquation, un système...

3. Résolution algébrique

On résout ce qui a été « mis en équation ».

4. Retour à l'énoncé

Le retour à l'énoncé permet d'interpréter ce qu'on a obtenu.

UTILISER SES CONNAISSANCES

4^e ● Jacques a acheté 30 timbres, les uns à 0,50 €, les autres à 0,80 €.
3^e Il a dépensé 17,40 €.

Combien a-t-il acheté de timbres de chaque sorte ?

1. On désigne par x le nombre de timbres à 0,50 €.

x est un entier positif.

2. Le prix des timbres à 0,50 € est $0,5x$.

Il y a $(30 - x)$ timbres à 0,8 € ; ils coûtent $0,8(30 - x)$.

La dépense totale est 17,40 ou aussi $0,5x + 0,8(30 - x)$.

D'où l'équation : $0,5x + 0,8(30 - x) = 17,40$.

3. On développe : $0,5x + 24 - 0,8x = 17,40$.

Cela donne : $-0,3x + 24 = 17,4$ ou $0,3x = 6,6$.

Il en résulte : $x = 22$.

4. Jacques a acheté 22 timbres à 0,50 € et 8 timbres à 0,80 €.

OUVRIR L'ŒIL

On distingue les quatre étapes
mais on n'écrit pas
nécessairement les titres.

« Ajouter 2 à son triple est
la même chose qu'ajouter
3 à son double.
Quel est ce nombre ? ».

$$3x + 2 = 2x + 3$$

Le nombre cherché
est 1.

- 3^e ● Une boule et un cylindre ont tous deux un rayon de 6 cm.
Calculer la hauteur du cylindre pour qu'ils aient même volume.

On désigne par x la hauteur (en cm) du cylindre, $x > 0$.

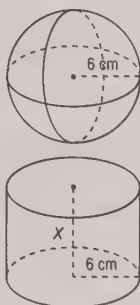
Volume de la boule (en cm^3) : $\frac{4}{3} \pi \times 6^3$ ou 288π .

Volume du cylindre (en cm^3) : $\pi \times 6^2 \times x$ ou $36 \pi x$.

On cherche x pour qu'ils soient égaux :
d'où l'équation : $36 \pi x = 288 \pi$.

$$x = 288 \pi : 36 \pi ; x = 8.$$

Pour que la boule et le cylindre aient le même volume,
il faut que la hauteur du cylindre soit de 8 cm.



- 3^e ● Un carré $ABCD$ a 30 cm de côté ; on joint A à un point M de $[BC]$ distinct de B et de C .
Quelle doit être la position de M sur $[BC]$ pour que l'aire du triangle ABM soit inférieure ou égale au tiers de celle du trapèze $AMCD$?

• On pose $BM = x$ (en cm) ; $x > 0$ et $x < 30$.

Aire ABM (en cm^2) : $15x$.

Aire du trapèze (en cm^2) : $900 - 15x$.

On a l'inéquation : $15x \leq \frac{1}{3} (900 - 15x)$.

En effectuant, on a :

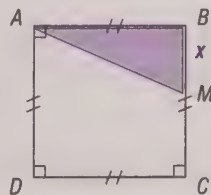
$$15x \leq 300 - 5x \text{ ou } 15x + 5x \leq 300 \text{ ou } 20x \leq 300.$$

Il vient $x \leq 15$.

Pour que l'aire du triangle ABM soit inférieure ou égale au tiers de celle du trapèze $AMCD$, il faut que l'on ait :

BM inférieur ou égale à 15 cm.

(On peut contrôler par un dessin pour $x = 15$.)



Aire du carré :
 900 cm^2



π représente un nombre dont
on connaît diverses
approximations :
3,14 ; 3,1416...
Dans les calculs, il ne faut pas
confondre π et x ;
 x est l'inconnue.

VOIR AUSSI :

Triangle rectangle, 77

Volumes, 113-114

Équations, 39-40-41

Inéquations, 43-44

PROBLÈMES À DEUX INCONNUES

COMPRENDRE

OUVRIR

La méthode de résolution est rappelée dans un exemple. Observer les quatre points.

3^e ● Comment résoudre un problème à deux inconnues ?

On a 200 € pour acheter des livres de deux séries A et B . Si on prend 4 livres de série A et 5 livres de série B , il manque 6 € ; si on prend 5 livres de série A et 3 livres de série B , il reste 1 €. Calculer le prix d'un livre de chaque série.

1. Choix des inconnues

Soit x le prix d'un livre de série A , et y celui d'un livre de série B en euros.

2. Mise en équation :

On a le système
$$\begin{cases} 4x + 5y = 206 & (1) \\ 5x + 3y = 199 & (2) \end{cases}$$

3. Résolution du système

De (1) on tire : $4x = 206 - 5y$ ou $x = 51,5 - 1,25y$ (3).

On porte cette valeur de x dans l'équation (2) ; on a :

$5(51,5 - 1,25y) + 3y = 199$, puis $257,5 - 6,25y + 3y = 199$, d'où $-3,25y = -58,5$ et $y = 18$.

On reporte dans (3) ; on a : $x = 51,5 - 1,25 \times 18$ et $x = 29$.

4. Retour à l'énoncé

Un livre de série A coûte 29 € ; un livre de série B coûte 18 €.

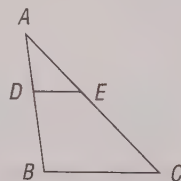
UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● Pour la figure ci-contre, on sait que :

$AB = 4$ dm, $BC = 3$ dm, $AE = 2$ dm et $(DE) \parallel (BC)$.

De plus, le périmètre de ADE est égal à 5 dm.

- On veut calculer AD et DE ; pour cela, après avoir mis le problème en équation, résoudre le système obtenu, d'abord graphiquement, puis algébriquement.
- Calculer AC .





$$2x + 3y = 9,4$$

$$x = 1,1 \text{ et } y = 2,4.$$

Prix d'un café : 1,1 €.

$$x + 5y = 13,1$$

Prix d'un soda : 2,4 €.

a) Soit x la longueur AD et y la longueur DE (en dm); x et y sont positifs.

■ Les triangles ADE et ABC sont à côtés proportionnels ; par suite :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \text{ ou } \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{2}{AC}. \text{ On en tire : } 3x = 4y.$$

On sait que le périmètre de ADE est 5 dm : $x + y + 2 = 5$.

$$x \text{ et } y \text{ vérifient le système : } \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ x + y = 3. \end{cases}$$

■ Interprétation graphique

On exprime y en fonction de x dans chaque équation du système :

$$y = 0,75x \text{ et } y = -x + 3.$$

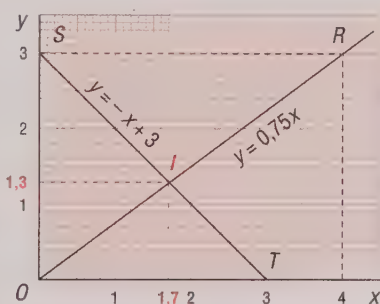
Dans un repère (limité à un angle droit car x et y sont positifs), on construit la droite représentative de la fonction linéaire $y = 0,75x$

[points $O(0;0)$ et $R(4;3)$]

et celle de la fonction affine $y = -x + 3$ [points $S(0;3)$ et $T(3;0)$].

On lit les coordonnées de leur point d'intersection $I: 1,7$ et $1,3$.

$(1,7; 1,3)$ est la solution graphique du système.



■ Résolution algébrique

On peut évaluer les deux expressions de y en fonction de x ;

on obtient une équation à une inconnue : $0,75x = -x + 3$ ou $1,75x = 3$.

$$\frac{3}{1,75} = \frac{300}{175} = \frac{12}{7} ; x = \frac{12}{7}. \text{ Il en résulte : } y = 0,75 \times \frac{12}{7} ; \text{ d'où } y = \frac{9}{7}.$$

$\left(\frac{12}{7}; \frac{9}{7}\right)$ est la solution algébrique du système.

■ Interprétation

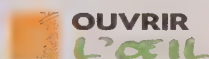
$$AD = \frac{12}{7} \text{ dm } (\approx 1,7 \text{ dm}) ; DE = \frac{9}{7} \text{ dm } (\approx 1,3 \text{ dm}).$$

On a bien $AD < AB$ et $DE < BC$; ces valeurs conviennent.

b) Calcul de AC

$$\frac{y}{3} = \frac{2}{AC} ; AC \times \frac{9}{7} = 6 ; AC = 6 : \frac{9}{7} = 6 \times \frac{7}{9} = \frac{6 \times 7}{9} = \frac{14}{3}.$$

$AC = \frac{14}{3}$ dm, soit 467 mm (en arrondissant au mm le plus proche).



Un graphique donne des résultats **approchés** (même si ça « tombe » bien !); le calcul donne des résultats **exacts**. C'est pour cela que l'on parle de solution graphique et de solution algébrique.

VOIR AUSSI :

TRIANGLES À CÔTÉS

proportionnels, 74

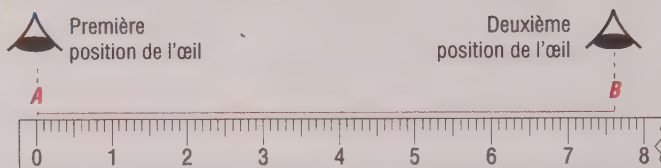
Equations, 81

Résolution

d'un système, 14, 86

RÈGLE GRADUÉE
LONGUEUR

COMPRENDRE

6^e ● Comment mesurer une longueur ?

La longueur du segment $[AB]$ est 7,6 cm ; $AB = 7,6$ cm .

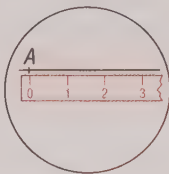
A et B sont les **extrémités** du segment.

On dit aussi que la **distance de A à B** est 7,6 cm.

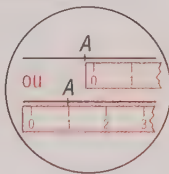
OUVRIR
L'ŒIL

● Il est essentiel de bien
placer le zéro de la graduation.

Faites :



Ne faites pas :

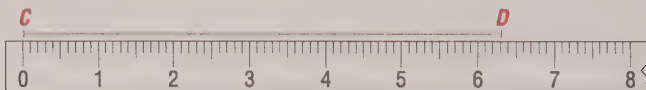


● Il faut faire attention aux
notations :

- $[AB]$ désigne le segment ;
- AB désigne sa longueur.

6^e ● Comment construire un segment de longueur donnée ?

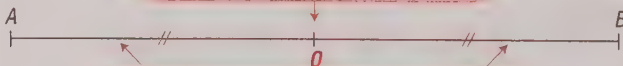
On veut construire un segment $[CD]$ tel que $CD = 6,3$ cm .



On pose la règle graduée sur la feuille ; on pointe C en face de la graduation 0, puis D en face de la graduation correspondant à 6,3 cm ; on joint C à D .

6^e ● Savoir distinguer milieu et moitié

Le point O est le milieu
du segment $[AB]$



Chaque segment $[AO]$ ou $[OB]$ est
la moitié du segment $[AB]$

Noter la convention $//$ pour indiquer que $OA = OB$.

Dire que O est le **milieu** de $[AB]$,

c'est dire que O appartient à $[AB]$ et $OA = OB$.

La **moitié** du mur de clôture est en béton.

La **moitié** du mur de clôture est en pierre.



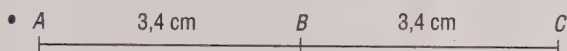
Le cyprès est au **milieu** de la clôture ; il est équidistant des extrémités.

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e • Dessiner un segment $[AB]$ de longueur égale à 3,4 cm.

Dessiner le segment $[AC]$ vérifiant les deux conditions :

- AC est le double de AB ;
- B est le milieu de $[AC]$.



- $AC = 6,8$ cm et le point B est le milieu du segment $[AC]$.

6^e • Convertir en mètre les longueurs suivantes :

7 732 cm, 87 mm et 16,7 hm.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
		7	7,	3	2	
			0,	0	8	7
1	6	7	0,			

7 732 cm = 77,32 m ; 87 mm = 0,087 m ; 16,7 hm = 1 670 m.

• Dans un premier temps, on construit le tableau, puis on place dans la colonne qui convient le chiffre qui sert de repère :

- le 2 de 7 732 cm dans la colonne cm ;
- le 7 de 87 mm dans la colonne mm ;
- le 6 de 16,7 hm dans la colonne hm.

Pour finir, on s'occupe de la virgule et des zéros nécessaires.

VOIR AUSSI :

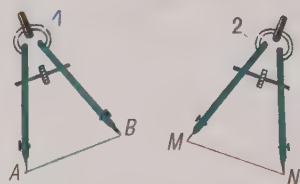
Médiatrice, 61-62

Symétrie centrale, 97-98

Milieu d'un segment, 106

COMPAS
CERCLE
DISQUE

COMPRENDRE

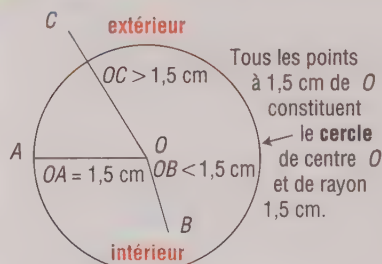
6^e ● Comment reporter une longueur avec le compas ?

1. On place la pointe sèche sur l'une des extrémités du segment (A par exemple) et le crayon sur l'autre. Cela donne une ouverture de compas équivalente au segment $[AB]$ et donc de longueur AB .

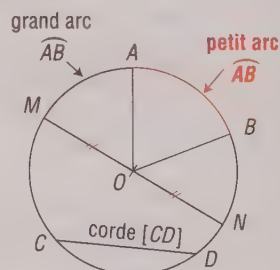
2. On reporte cette ouverture. Ce qui donne $MN = AB$, sans mesurer.

OUVRIR
L'ŒIL

Avant de tracer un cercle, il faut s'assurer de la position exacte du centre pour pouvoir le retrouver en cas de glissement de la pointe.

6^e ● Vocabulaire relatif au cercle et au disque

Tous les points du cercle et ceux de l'intérieur constituent le **disque** de centre O et de rayon $1,5$ cm.



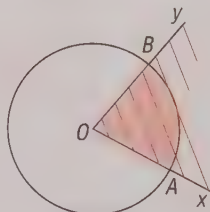
$[OM]$ et $[ON]$ sont des **rayons**.

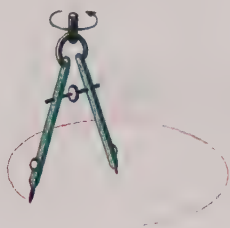
$[MN]$ est un **diamètre**.
Chaque arc $\widehat{MN}$ est un **demi-cercle**.

5^e 4^e ● Qu'est-ce qu'un angle au centre ? Qu'est-ce qu'un secteur de disque ?

L'angle $\widehat{xOy}$ est un **angle au centre** ; son sommet est en O .

L'arc $\widehat{AB}$ est intercepté par l'angle $\widehat{xOy}$. La partie du disque limitée par les rayons $[OA]$ et $[OB]$ et l'arc $\widehat{AB}$ est un **secteur de disque**.





Le compas est un instrument important.

Il permet de :

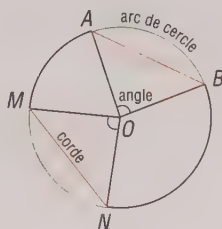
- reporter des longueurs sans avoir à mesurer,
- tracer des cercles ou des arcs de cercle.

4^e 3^e ● Propriétés des cordes et des arcs

Voici trois égalités :

- $\widehat{AOB} = \widehat{MON}$;
- $AB = MN$;
- longueur arc $\widehat{AB}$ = longueur arc $\widehat{MN}$.

Dans un cercle, dès que l'une est vraie, les deux autres le sont aussi.



UTILISER SES CONNAISSANCES

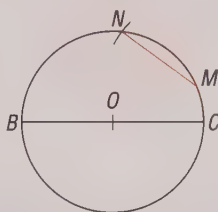
6^e ● Dessiner un segment $[BC]$ de 2,4 cm et de milieu O .

Construire le cercle de centre O et de rayon 1,2 cm.

Construire une corde $[MN]$ de longueur égale au rayon.

• On construit $[BC]$ de 2,4 cm, puis le point O tel que $OB = OC = 1,2$ cm (règle graduée) et le cercle.

• Pour construire la corde, on place la pointe sèche en un point M quelconque du cercle et pour obtenir N , on trace un arc de cercle de rayon 1,2 cm.

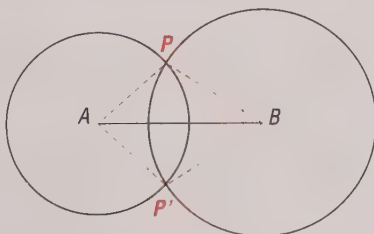


6^e ● Un segment $[AB]$ de 2,1 cm étant donné, construire un point à 1,2 cm de A et à 1,5 cm de B .

• On trace le cercle de centre A et de rayon 1,2 cm ; on a ainsi tous les points à 1,2 cm de A .

• On trace le cercle de centre B et de rayon 1,5 cm ; on a tous les points à 1,5 cm de B .

• Les points P et P' , communs aux deux cercles, sont les points à 1,2 cm de A et à 1,5 cm de B .



VOIR AUSSI :

Triangle équilatéral, 66
Polygones réguliers, 100

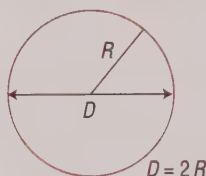
PÉRIMÈTRE ET AIRE DU DISQUE

COMPRENDRE

6^e ● Longueur du cercle. Périmètre du disque

Si on envisage le cercle comme un fil, on parle de **longueur**.

Si on l'envisage comme le pourtour d'un disque, alors on parle plutôt de **périmètre** du disque.



$$L = \pi \times D = \pi D$$

ou

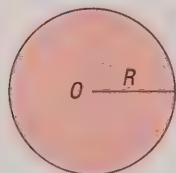
$$L = 2 \times \pi \times R = 2\pi R$$

OUVRIR L'ŒIL

Il faut toujours veiller
à la concordance des unités
de longueur et d'aire :

- si R est en cm
alors $\mathcal{A}$ est en cm^2 ;
- si R est en m
alors $\mathcal{A}$ est en m^2 ; ...

5^e ● Aire du disque



$$\mathcal{A} = \pi \times R \times R$$

ou

$$\mathcal{A} = \pi R^2$$

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Calculer le périmètre d'un « disque compact » de diamètre 12 cm et celui du rond central d'un terrain de football de rayon 9,15 m.

• Formule : $L = \pi \times D$ donne $3,14 \times 12 = 37,68$.

Le périmètre du « disque compact » est environ 37,7 cm.

• Formule : $L = 2\pi R$ donne $2 \times 3,14 \times 9,15 = 57,462$.

Le périmètre du rond central est environ 57,5 m.

Remarque : 3,14 est une approximation de π ; on a arrondi les résultats au dixième le plus proche (cf. Arrondis, 7).

3,1415926535897932384626433...

Dans les calculs ordinaires, on remplace π par 3,14.

Dans les calculs précis, on remplace π par 3,141 6 ou on utilise la touche π de la calculatrice.

6^e ● Le périmètre d'une pelouse circulaire a été calculé avec 3,14 pour π et on a trouvé 31,4 m.

Quel est le diamètre de la pelouse ?

• La formule reliant le diamètre D au périmètre P est : $P = \pi \times D$.

On a : $31,4 = 3,14 \times D$; par suite : $D = 31,4 : 3,14 = 10$.

Le diamètre de la pelouse est 10 m.

5^e ● Une pièce de 1 € est constituée de deux parties ; sur le dessin :

– le diamètre de la partie centrale est de 18 mm ;

– le diamètre extérieur est de 28 mm.

a) Quelle est l'aire du disque central ?

b) Quelle est l'aire de la couronne ?



a) Le rayon du disque central est $(18 : 2)$ mm ou 9 mm.

L'aire $\mathcal{A}$ d'un disque est donnée par la formule $\mathcal{A} = \pi \times R \times R$.

On a : $3,14 \times 9 \times 9$ soit 254,34.

L'aire du disque central est environ 254 mm².

b) Le rayon du cercle extérieur est $(28 : 2)$ mm ou 14 mm.

On a : $3,14 \times 14^2 = 615,44$. L'aire totale est environ 615 mm².

L'aire de la couronne s'obtient en retranchant l'aire de la partie centrale de l'aire totale : $615,44 - 254,34 = 361,1$.

L'aire de la couronne est environ 361 mm².

5^e ● L'aire d'une pelouse circulaire a été calculée avec 3,14 pour π et on a trouvé 78,5 m².

Quel est le rayon de la pelouse ?

• La formule reliant l'aire $\mathcal{A}$ au rayon R est : $\mathcal{A} = \pi \times R^2$.

On a : $78,5 = 3,14 \times R^2$; par suite : $R^2 = 78,5 : 3,14 = 25$.

$R \times R = 25$; $5 \times 5 = 25$; $R = 5$.

Le rayon de la pelouse est 5 m.



Le périmètre d'un cercle, πD , ou l'aire d'un disque, πR^2 , est un produit de facteurs dont l'un, le nombre π , est connu. Pour calculer l'autre facteur inconnu (D ou R^2), on fait une division. (Cf. La division dans les problèmes, 12.)

VOIR AUSSI :

Aires et volumes, 113-114

Longueur d'un arc,

aire d'un secteur, 119

Diagrammes

circulaires, 132-133

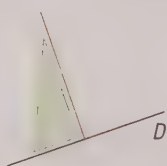


ÉQUERRE DROITES PERPENDICULAIRES DROITES PARALLÈLES

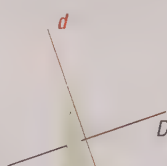
COMPRENDRE

6^e ● Comment tracer des droites perpendiculaires ?

Étant donné une droite D , pour tracer une droite d perpendiculaire à la droite D , on opère en deux temps :



1^{re} étape :
l'équerre donne
l'angle droit



2^e étape : l'équerre
sert de règle



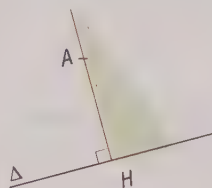
d est **perpendiculaire** à D .
On note : $d \perp D$

On dit aussi que d et D sont **perpendiculaires**.

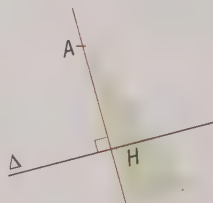
Lorsque deux droites se coupent (sont sécantes), si l'un des angles est droit, les trois autres le sont aussi.

4^e ● Distance d'un point à une droite

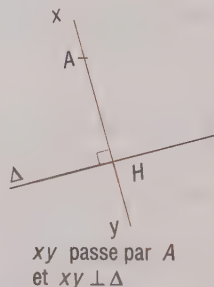
Étant donné une droite Δ et un point A , pour tracer la droite xy perpendiculaire à Δ et passant par A , on opère en deux temps :



1^{re} position
de l'équerre



2^e position
de l'équerre



xy passe par A
et $xy \perp \Delta$

La **longueur** du segment $[AH]$ est la **distance** du point A à la droite Δ .

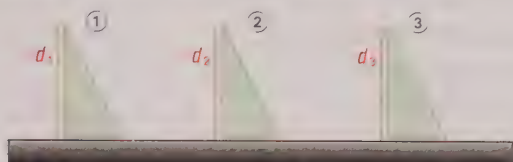


L'équerre est un angle droit transportable.

Elle permet d'obtenir :

- des droites perpendiculaires ;
- des droites parallèles ;
- la distance d'un point à une droite.

6^e ● Comment tracer des droites parallèles ?



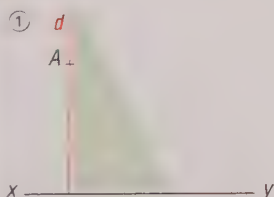
En faisant glisser une équerre le long d'une règle fixe, on trace des droites parallèles ; d_1 , d_2 et d_3 sont parallèles car elles sont, toutes les trois, perpendiculaires au bord de la règle. En effet, on sait que :

Si des droites sont perpendiculaires à une même droite alors elles sont parallèles.

On écrit : $d_1 \parallel d_2$; $d_2 \parallel d_3$; $d_1 \parallel d_3$.

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Étant donné une droite xy et un point A en dehors de la droite, tracer la droite D passant par A et parallèle à xy .



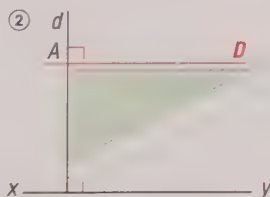
Construction de la droite d passant par A et perpendiculaire à xy .

On a : $xy \perp d$.

D et xy sont toutes deux perpendiculaires à d .

Donc D et xy sont parallèles.

D est la droite demandée, car elle passe par A et elle est parallèle à xy .



Construction de la droite D passant par A et perpendiculaire à d .

On a : $D \perp d$.

OUVRIR L'ŒIL

● Faites attention aux notations :

$\perp$: est perpendiculaire à ;

$\parallel$: est parallèle à.

● L'utilisation de ces signes est limitée au langage mathématique :

« $(AB) \parallel (CD)$ » est correct, mais « (AB) et (CD) sont $\parallel$ » ne l'est pas.

● On rappelle que (AB) désigne la droite contenant les points A et B .

VOIR AUSSI :

Angle, 50

Médiatrice, 51

Hauteurs, 64

Triangle rectangle, 77

Symétrie orthogonale, 95

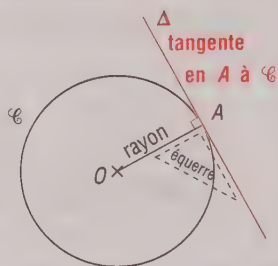
TANGENTE À UN CERCLE

COMPRENDRE

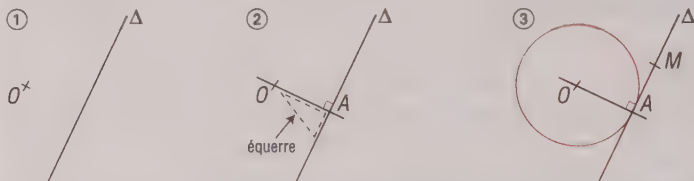
4^e Définition et construction

A est un point du cercle $\mathcal{C}$.
 Δ est perpendiculaire en A
 au rayon $[OA]$ (équerre).

Δ est la tangente en A au cercle $\mathcal{C}$.



4^e Étant donné une droite Δ et un point O , comment construire le cercle de centre O et tangent à Δ ? Voici les différentes étapes de la construction :



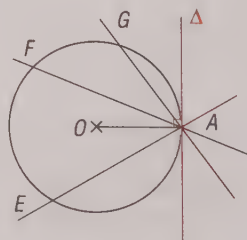
Quel que soit le point M de Δ , distinct de A , on a :

$$OM > OA.$$

OA est la **distance** de O à Δ .

RECONNAÎTRE

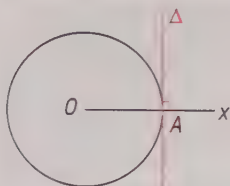
4^e Parmi toutes les droites qui passent par A , il n'en existe qu'une qui ait un seul point commun avec le cercle : c'est la tangente en A au cercle.



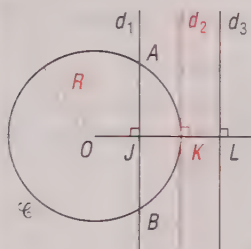
● Positions relatives d'un cercle et d'une droite

On compare deux nombres :

- le rayon du cercle ;
- la distance du centre du cercle à la droite.



La tangente en A à un cercle est unique parmi toutes les droites passant par A et aussi parmi toutes les droites perpendiculaires à la demi-droite $[Ox]$.



$OJ < R$ d_1 est sécante à $\mathcal{C}$,
deux points communs.

$OK = R$ d_2 est tangente à $\mathcal{C}$,
un point commun.

$OL > R$ d_3 est extérieure à $\mathcal{C}$,
pas de point commun.

UTILISER SES CONNAISSANCES

4^e ● Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et une corde $[AB]$ non diamétrale.

Tracer les tangentes en A et B au cercle $\mathcal{C}$; elles se coupent en I .

a) Prouver que $IA = IB$ en utilisant le théorème de Pythagore.

b) En déduire que (OI) est médiatrice de $[AB]$.

a) xy est la tangente en A au cercle ;
il en résulte que le triangle IAO est rectangle en A .

On applique le théorème de Pythagore :

$$OI^2 = OA^2 + IA^2 \quad (1).$$

De même, avec le triangle IBO on obtient :

$$OI^2 = OB^2 + IB^2 \quad (2).$$

Comme $OA = OB$ (rayons du cercle $\mathcal{C}$),

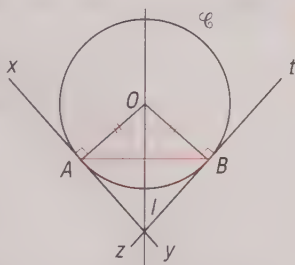
on en déduit, en utilisant les égalités (1) et (2) que $IA^2 = IB^2$; il en résulte :

$$IA = IB.$$

b) $OA = OB$ et $IA = IB$. Ainsi O et I sont équidistants de A et de B .

Or, si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice du segment.

Donc, O et I appartiennent à la médiatrice de $[AB]$ et, par suite (OI) est la médiatrice de $[AB]$.



Le cas échéant, il ne faut pas oublier d'indiquer sur la figure les angles droits et les longueurs égales.

VOIR AUSSI :

Distance d'un point à une droite, 52

Propriétés des points de la médiatrice, 62

Cercle inscrit, 70

Théorème

de Pythagore, 78

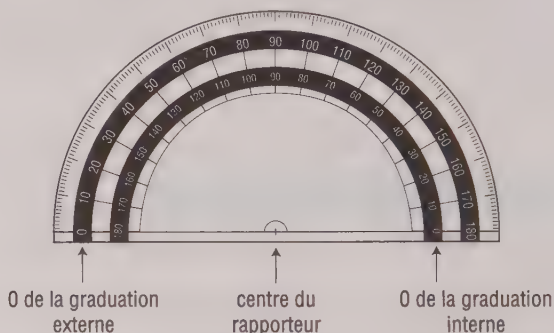
LE RAPPORTEUR

COMPRENDRE

- 6^e Un rapporteur est gradué en degré. Il y a toujours une graduation externe de 0 à 180 dans un sens (ci-dessous : sens de rotation des aiguilles d'une montre), et il y a souvent une graduation interne, de 10 en 10, dans l'autre sens.



- Il faut faire précéder chaque lecture d'une évaluation rapide : l'angle est aigu ou obtus, rentrant ou saillant.



UTILISER LE RAPPORTEUR

- Lorsqu'on évalue un angle obtus, on sait qu'il est supérieur à 90°. Il faut donc faire attention à la graduation choisie pour la lecture afin de ne pas annoncer un angle inférieur à 90°.

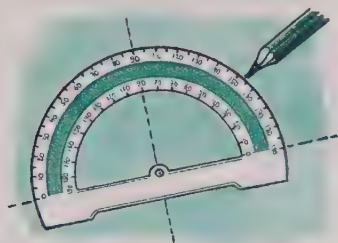
6^e ● Comment mesurer un angle saillant ?

$$\widehat{xOy} = 150^\circ.$$

Pour mesurer :

- on place le centre du rapporteur sur le sommet O de l'angle ;
- on place la graduation externe 0 sur le côté de l'angle choisi pour que tout l'angle soit sous le rapporteur ;
- on lit la graduation externe qui est sur l'autre côté (ou les deux graduations qui l'encadrent).

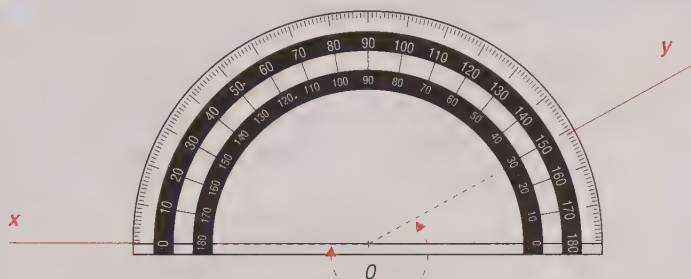
$\widehat{xOy}$ est obtus :
il vaut plus de 90°.



Le rapporteur est un instrument indispensable, d'utilisation délicate à cause :

- des deux graduations en sens contraires entre lesquelles il faut choisir ;
- des difficultés pour placer correctement le centre et le zéro de la graduation choisie.

6^e ● Comment évaluer un angle rentrant ?

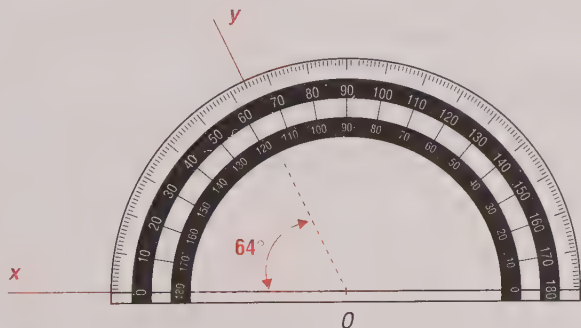


Pour évaluer l'angle rentrant $\widehat{xOy}$:

- on commence par mesurer l'angle saillant $\widehat{xOy}$: 151° ,
- on le retranche de 360° (l'angle plein) : $360^\circ - 151^\circ = 209^\circ$,
- on conclut : $\widehat{xOy}$ rentrant vaut 209° .

6^e ● Comment construire un angle ?

On veut construire un angle de 64° .

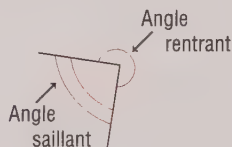


Dans l'ordre, il faut :

- tracer le côté $[Ox]$;
- placer le rapporteur, son centre en O et la graduation externe 0 sur $[Ox]$;
- marquer un trait en face de la graduation externe 64 ;
- enlever le rapporteur et tracer $[Oy]$.



Un angle saillant ($< 180^\circ$)
et un angle rentrant ($> 180^\circ$)
qui ont les mêmes côtés,
ont pour somme l'angle plein,
soit 360° .

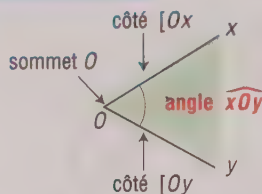


VOIR AUSSI :

Angles, 55

ANGLES

COMPRENDRE

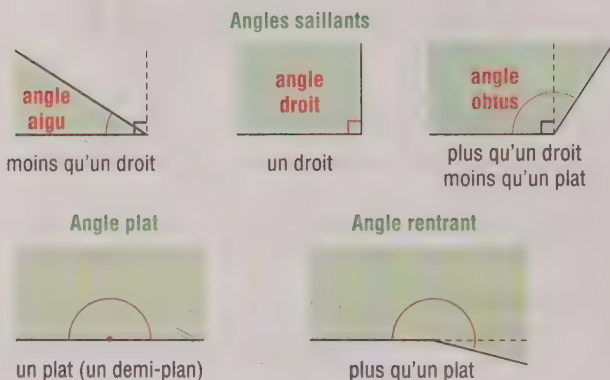
6^e

L'unité d'angle est
le degré (symbole : °)
1 angle droit = 90°
1 angle plat = 180°

OUVRIR
L'ŒIL

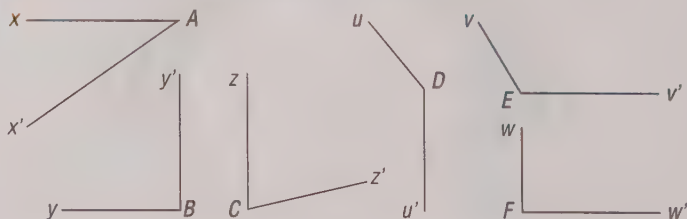
● Le mot « angle » désigne aussi bien la partie du plan limitée par les demi-droites que l'écartement de celles-ci.

● Le côté d'un angle est une demi-droite ; bien observer la notation d'une demi-droite (page 282).



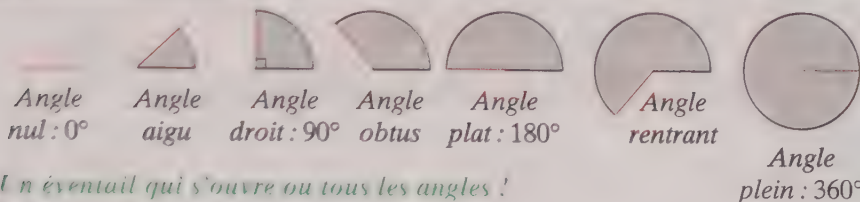
UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Voici quelques angles saillants :



Indiquer ceux qui sont aigus, droits ou obtus (utiliser une équerre).

• $\widehat{yBy'}$ et $\widehat{wFw'}$ sont droits ; $\widehat{uDu'}$ et $\widehat{vEv'}$ sont obtus ;
 $\widehat{xAx'}$ et $\widehat{zCz'}$ sont aigus.

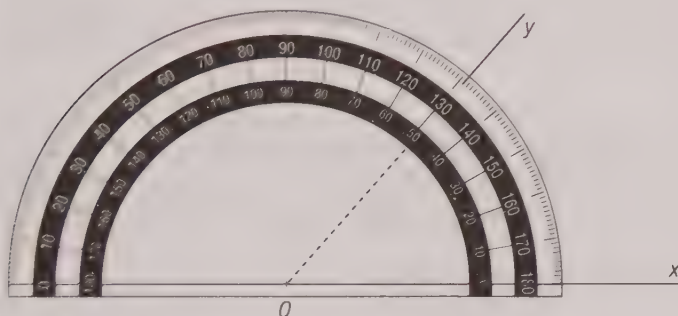


6° Jacques, à qui on a demandé de mesurer l'angle $\widehat{xOy}$, a disposé le rapporteur comme sur la figure ci-dessous, puis a répondu : $\widehat{xOy} = 131^\circ$.

Est-ce possible ?

Quelle erreur a-t-il commise ?

Quelle est la réponse correcte ?



• Non, ce n'est pas possible : *a priori* Jacques s'est trompé car l'angle $\widehat{xOy}$ étant manifestement aigu, la réponse doit être inférieure à 90° .

• Il a bien placé le centre du rapporteur au sommet de l'angle ; il a bien mis l'angle sous le rapporteur et le zéro de la **graduation interne** sur l'un des côtés : tout cela est correct, mais il a lu sur la **graduation externe**.

• La bonne réponse est 49° .

Pour la trouver, il existe deux méthodes :

– par lecture directe : 40 lu sur la graduation interne plus 9 subdivisions lues sur la graduation externe ;

– par soustraction à partir de l'angle plat et de la lecture 131 :

$$180 - 131 = 49.$$

VOIR AUSSI :
Le rapporteur, 34

QUELQUES PAIRES D'ANGLES

COMPRENDRE

5^e ● Qu'est-ce que deux angles adjacents ?

$\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ ont :

- le même sommet O ;
- un côté commun $[Oy$;

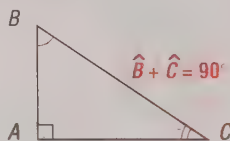
et sont de part et d'autre de ce côté commun ; on dit que $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ sont deux **angles adjacents**.



5^e ● Qu'est-ce que deux angles complémentaires ?

Deux angles dont la somme est 90° sont appelés **angles complémentaires**.

Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.



5^e ● Qu'est-ce que deux angles supplémentaires ?

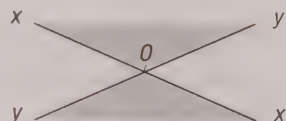
Deux angles dont la somme est 180° sont appelés **angles supplémentaires**.

5^e ● Qu'est-ce que deux angles opposés par le sommet ?

Deux angles ayant le même sommet et tels que les côtés de l'un soient opposés aux côtés de l'autre sont appelés **angles opposés par le sommet**.

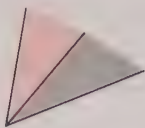
$\widehat{xOy}$ et $\widehat{x'Oy'}$ sont opposés par le sommet.

$\widehat{x'Oy}$ et $\widehat{xOy'}$ sont opposés par le sommet.

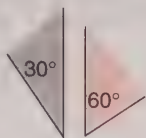


Deux angles opposés par le sommet sont égaux :

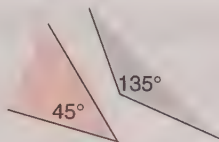
$$\widehat{xOy} = \widehat{x'Oy'} \text{ et } \widehat{x'Oy} = \widehat{xOy'}.$$



Deux angles adjacents



Deux angles complémentaires



Deux angles supplémentaires



Deux paires d'angles opposés par le sommet

UTILISER SES CONNAISSANCES

5° ● Compléter le tableau ci-dessous pour que, dans chaque colonne, les angles $\widehat{iOx}$ et $\widehat{xOy}$ soient complémentaires et $\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOz}$ supplémentaires.

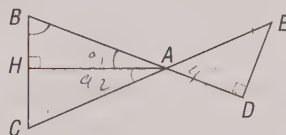
$\widehat{iOx}$						
$\widehat{xOy}$	25°	38°	62°	72°	79°	88°
$\widehat{yOz}$						

$\widehat{iOx}$	65°	52°	28°	18°	11°	2°
$\widehat{xOy}$	25°	38°	62°	72°	79°	88°
$\widehat{yOz}$	155°	142°	118°	108°	101°	92°

5° ● On sait que :

$$\widehat{BAH} = 19,3^\circ ; \widehat{CAH} = 25,7^\circ$$

Calculer les angles du triangle ABC , puis ceux de ADE .



$$\bullet \widehat{BAC} = \widehat{BAH} + \widehat{HAC} = 19,3^\circ + 25,7^\circ = 45^\circ$$

Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires. Donc :

$$\widehat{B} + \widehat{BAH} = 90^\circ ; \widehat{B} = 90^\circ - \widehat{BAH} = 90^\circ - 19,3^\circ = 70,7^\circ$$

$$\widehat{C} + \widehat{CAH} = 90^\circ ; \widehat{C} = 90^\circ - \widehat{CAH} = 90^\circ - 25,7^\circ = 64,3^\circ$$

• $\widehat{DAE}$ et $\widehat{BAC}$ sont opposés par le sommet.

Or, deux angles opposés par le sommet sont égaux.

$$\text{Donc : } \widehat{DAE} = \widehat{BAC} = 45^\circ$$

Le triangle ADE est rectangle en D .

$$\text{Par suite } \widehat{E} + \widehat{DAE} = 90^\circ$$

$$\text{D'où : } \widehat{E} = 90^\circ - \widehat{DAE} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

Le triangle DAE est un triangle rectangle isocèle.

VOIR AUSSI :

Triangle isocèle, 65

Somme des angles

d'un triangle, 68

Triangle rectangle, 77

ANGLE INSCRIT

ANGLE AU CENTRE

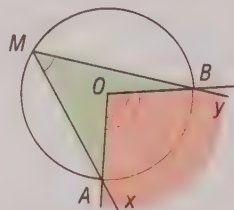
COMPRENDRE

3^e ● Qu'est-ce qu'un angle inscrit dans un cercle ?

L'angle $\widehat{xMy}$ a les deux propriétés suivantes :

- son sommet est sur le cercle ;
- ses côtés coupent le cercle.

On dit que $\widehat{xMy}$ est inscrit dans le cercle.



3^e ● Angle inscrit dans un cercle et angle au centre associé

L'arc $\widehat{AB}$ (rouge) est intercepté par l'angle inscrit $\widehat{xMy}$ il est aussi intercepté par l'angle au centre $\widehat{AOB}$.

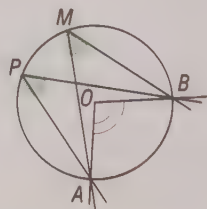
3^e ● Propriété de l'angle inscrit dans le cercle

Un angle inscrit dans un cercle est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc : $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$.

3^e ● Conséquence de cette propriété

Deux angles inscrits dans un même cercle interceptant le même arc sont égaux :

$$\widehat{AMB} = \widehat{APB}.$$



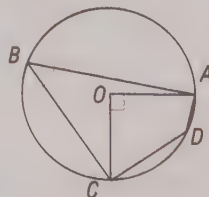
UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● Dans le cercle ci-contre l'angle au centre $\widehat{AOC}$ est droit. Calculer les angles inscrits $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$.

$$\bullet \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} = \frac{1}{2} (90^\circ) = 45^\circ.$$

$$\bullet \widehat{AOC} \text{ rentrant} = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ ;$$

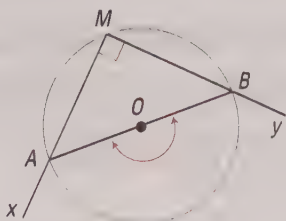
$$\widehat{ADC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC} \text{ rentrant} = \frac{1}{2} (270^\circ) = 135^\circ.$$



Un cas particulier :

$$\widehat{AOB} = 180^\circ ;$$

$$\widehat{AMB} = 90^\circ = \frac{1}{2} \widehat{AOB} .$$

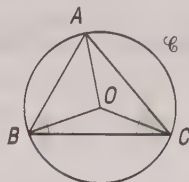


3^e • Dans un triangle ABC :

$$\widehat{ABC} = 60^\circ \text{ et } \widehat{ACB} = 50^\circ .$$

Le cercle circonscrit $\mathcal{C}$ a pour centre O .

Calculer les angles $\widehat{AOC}$, $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$.



• L'angle inscrit $\widehat{ABC}$ et l'angle au centre $\widehat{AOC}$ interceptent le même arc $\widehat{AC}$.

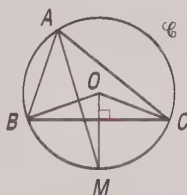
$$\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} = 120^\circ .$$

• De même $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB} = 100^\circ$.

• $\widehat{BOC} = 360^\circ - (\widehat{AOB} + \widehat{AOC}) = 360^\circ - (120^\circ + 100^\circ) = 140^\circ$.

3^e • Soient un triangle ABC , son cercle circonscrit $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $[OM]$ perpendiculaire au côté $[BC]$.

Prouver que la demi-droite $[AM)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.



• $OB = OC$ (rayons du cercle).

Le triangle BOC est isocèle de base $[BC]$. La hauteur principale $[OM]$ est aussi bissectrice de l'angle au sommet $\widehat{BOC}$.

Par suite $\widehat{BOM} = \widehat{MOC}$.

• L'angle inscrit $\widehat{BAM}$ et l'angle au centre $\widehat{BOM}$ interceptent le même arc $\widehat{BM}$.

$$\text{Donc : } \widehat{BAM} = \frac{1}{2} \widehat{BOM} .$$

$$\text{De même : } \widehat{MAC} = \frac{1}{2} \widehat{MOC} .$$

Comme $\widehat{BOM} = \widehat{MOC}$, on a : $\widehat{BAM} = \widehat{MAC}$.

La demi-droite $[AM)$ est la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

VOIR AUSSI :

Compas, cercle, disque, 50

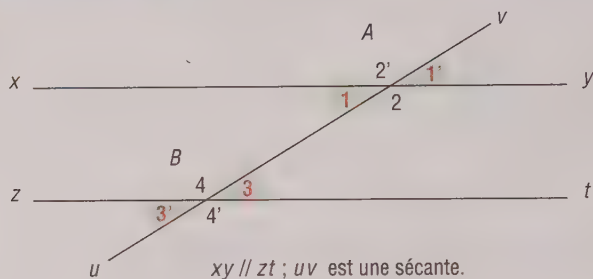
Bissectrice d'un angle, 60

Cercle circonscrit, 70

PARALLÈLES SÉCANTES ANGLES

COMPRENDRE

5^e ● Un peu de vocabulaire...



• Dans les paires d'angles dont on va parler, l'un est de sommet A et l'autre de sommet B .

• $\hat{1}$ et $\hat{3}$ sont des **angles alternes-internes**.

de part et d'autre de uv

entre les parallèles

$\hat{2}$ et $\hat{4}$ sont aussi des angles alternes-internes.

• $\hat{1'}$ et $\hat{3}$, $\hat{2}$ et $\hat{4'}$, $\hat{2'}$ et $\hat{4}$, $\hat{1}$ et $\hat{3'}$ sont des **angles correspondants**.

Ils sont chaque fois d'un même côté de la sécante ; l'un est interne et l'autre externe.

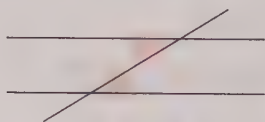
5^e ● Quelles sont les propriétés de ces angles ?

Si deux droites parallèles sont coupées par une troisième droite **alors** :

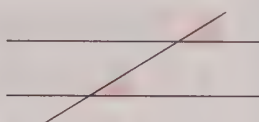
- deux angles alternes-internes sont égaux ;
- deux angles correspondants sont égaux.

Cas particulier

6^e Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.



Deux angles
alternes-internes

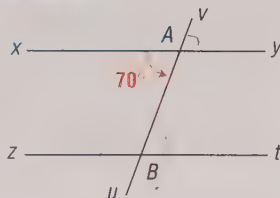


Deux angles
correspondants

UTILISER SES CONNAISSANCES

- 5^e ● La figure ci-contre représente deux droites parallèles xy et zt coupées par la droite uv en A et B de telle manière que :

$$\widehat{xAu} = 70^\circ.$$



Calculer tous les angles de la figure.

- Les angles $\widehat{xAu}$ et $\widehat{yAv}$ sont opposés par le sommet.

Ils sont donc égaux : $\widehat{yAv} = 70^\circ$.

$\widehat{tBv}$ et $\widehat{xAu}$ sont alternes-internes donc égaux : $\widehat{tBv} = 70^\circ$.

$\widehat{uBz}$ et $\widehat{tBv}$ sont opposés par le sommet, donc : $\widehat{uBz} = \widehat{tBv} = 70^\circ$.

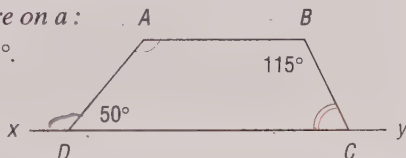
Tous les autres angles sont supplémentaires d'angles de 70° .

Ils sont tous égaux à $180^\circ - 70^\circ$ soit 110° .

- 5^e ● Dans le trapèze ci-contre on a :

$$\widehat{D} = 50^\circ \text{ et } \widehat{B} = 115^\circ.$$

Calculer $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$,
puis la somme
des angles de ce trapèze.



- Pour les droites parallèles (AB) et xy , et la sécante (AD) , les angles $\widehat{xDA}$ et $\widehat{BAD}$ sont alternes-internes.

Ils sont donc égaux : $\widehat{BAD} = \widehat{xDA} = 180^\circ - \widehat{ADC} = 130^\circ$; d'où $\widehat{A} = 130^\circ$.

- Pour les droites parallèles (AB) et xy , et la sécante (BC) , les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{yCB}$ sont alternes-internes.

Ils sont donc égaux : $\widehat{yCB} = \widehat{ABC} = 115^\circ$.

D'où : $\widehat{yCB} = 115^\circ$; $\widehat{C} + \widehat{yCB} = 180^\circ$; donc $\widehat{C} = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$.

- $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 130^\circ + 115^\circ + 65^\circ + 50^\circ$;

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ.$$

VOIR AUSSI :

Quelques paires d'angles,

56

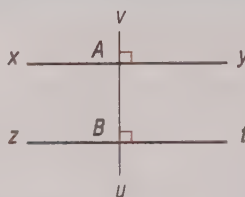
Parallélogrammes, 88

RECONNAÎTRE LE PARALLÉLISME AVEC LES ANGLES

RECONNAÎTRE

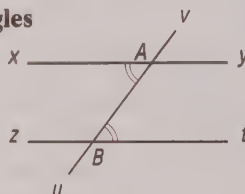
6^e ● Deux droites parallèles avec des angles droits

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors ces deux droites sont parallèles.



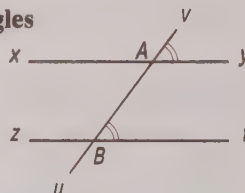
5^e ● Deux droites parallèles avec deux angles alternes-internes égaux

Si deux droites sont coupées par une troisième de telle manière que deux angles alternes-internes soient égaux, alors ces deux droites sont parallèles.



5^e ● Deux droites parallèles avec deux angles correspondants égaux

Si deux droites sont coupées par une troisième de telle manière que deux angles correspondants soient égaux, alors ces deux droites sont parallèles.

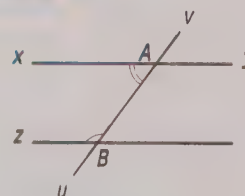


UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● Sur la figure ci-contre on sait que :

$$\widehat{xAu} + \widehat{zBv} = 180^\circ.$$

Prouver que les droites xy et zt sont parallèles.

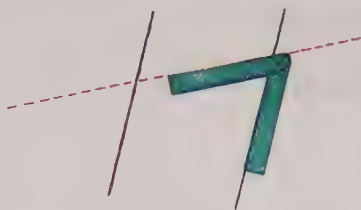


• On a $\widehat{xAu} = 180^\circ - \widehat{zBv}$ d'après l'énoncé.

Les angles $\widehat{zBv}$ et $\widehat{tBv}$ sont supplémentaires ; $\widehat{tBv} = 180^\circ - \widehat{zBv}$.

Il en résulte : $\widehat{xAu} = \widehat{tBv}$; ces angles sont alternes-internes pour les droites xy et zt coupées par la droite uv .

On peut affirmer que les droites xy et zt sont parallèles.

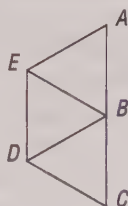


Il existe différents moyens de reconnaître le parallélisme de deux droites à l'aide de paires d'angles bien choisies...
Ce sont autant de moyens de construire des parallèles.

5° ● La figure ci-contre a été obtenue en juxtaposant trois triangles équilatéraux.

a) Prouver que A , B et C sont alignés.

b) Prouver que les droites (ED) et (AC) sont parallèles.



a) Dans un triangle équilatéral les angles valent 60° .

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABE} + \widehat{EBD} + \widehat{DBC} = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Les points A , B et C sont alignés.

b) $\widehat{ABE} = \widehat{DEB} = 60^\circ$;

de plus, pour les droites (AC) et (ED) , coupées par la droite (BE) , $\widehat{ABE}$ et $\widehat{DEB}$ sont alternes-internes.

Or, si deux droites sont coupées par une troisième droite de manière que deux angles alternes-internes soient égaux, alors ces deux droites sont parallèles.

Donc (AC) et (ED) sont parallèles.

5° ● Soient une droite xy et un point A en dehors de xy .
À l'aide d'un rapporteur et en utilisant des angles alternes-internes égaux, construire la parallèle à xy passant par A .

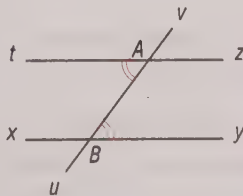
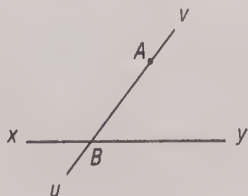
• Dans l'ordre :

– on construit uv passant par A et coupant xy en B ;

– on mesure $\widehat{vBy}$;

– on construit $\widehat{uAt}$ égal à $\widehat{vBy}$ et en position d'angle alterne-interne avec lui.

On est ainsi assuré que tz est parallèle à xy .



Il faut retenir cette façon de prouver que trois points sont alignés en prouvant que l'on a un angle plat.

VOIR AUSSI :

Quelques paires d'angles, 56

Triangle équilatéral, 66

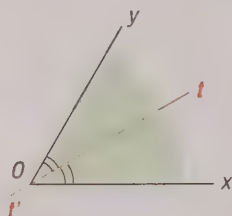
Parallélogrammes, 88

BISSECTRICE D'UN ANGLE

COMPRENDRE

6^e ● Qu'est-ce que la bissectrice d'un angle ?

La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage l'angle en deux angles égaux.



$[Ot$ est bissectrice de $\widehat{xOy}$;
cela veut dire : $\widehat{xOt} = \widehat{tOy}$.

La droite $t't'$ est axe de symétrie de l'angle $\widehat{xOy}$.



● Les deux énoncés sont bâtis avec :

Si... alors...

Après **Si**, il y a ce que l'on *sait*.

Après **alors**, il y a ce que l'on *en déduit*.

● On passe d'un énoncé à l'autre en échangeant « *ce que l'on sait* » et « *ce que l'on en déduit* ».

On dit que ce sont des énoncés **réciroques**.

(Cf. Propriété des points de la médiatrice d'un segment, 62.)

4^e ● Deux énoncés réciproques concernant les points de la bissectrice d'un angle (saillant) $\widehat{xOy}$

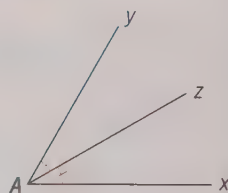
1. Si un point est **sur la bissectrice de $\widehat{xOy}$**
alors il est **équidistant de $[Ox$ et de $[Oy$.**
2. Si un point est **équidistant de $[Ox$ et de $[Oy$**
alors il est **sur la bissectrice de $\widehat{xOy}$.**

RECONNAÎTRE UNE BISSECTRICE

6^e ● En utilisant la définition

On sait que $[Az$ partage $\widehat{xAy}$
en deux angles égaux.

On peut affirmer, d'après la définition, que $[Az$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{xAy}$.

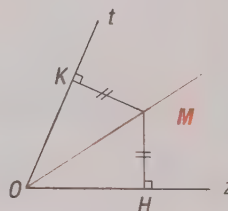


4^e ● En utilisant l'énoncé 2. ci-dessus

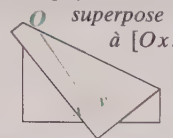
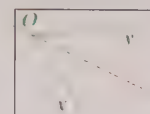
On sait que $MH = MK$.

M est **équidistant** des côtés.

On en déduit que la demi-droite d'origine O et contenant le point M est la bissectrice de l'angle $\widehat{zOt}$.



La bissectrice d'un angle, axe de symétrie de cet angle.

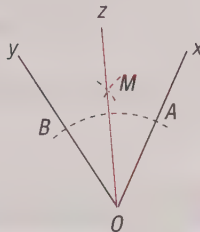
- ① 
- ② On calque. 
- ③ On plie le calque. [Oy se superpose à [Ox. 
- ④ On déplie le calque et on marque le pli tz. 
- ⑤ 

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e • Étant donné un angle $\widehat{xOy}$, construire avec le compas et la règle, la bissectrice de cet angle.

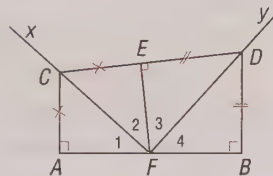
• Dans l'ordre :

- on construit un arc de cercle de centre O coupant $[Ox$ et $[Oy$ respectivement en A et B ;
 - on construit deux arcs de cercle de rayons égaux, de centres respectifs A et B , se coupant en M ;
 - on trace $[Oz$ contenant M .
- $[Oz$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.



4^e • Observer la figure ci-contre.

- a) Que représente $[Fx$ pour $\widehat{AFE}$?
- b) Que représente $[Fy$ pour $\widehat{BFE}$?
- c) Prouver que $\widehat{xFy}$ est droit.



- a) D'après la figure : $CA = CE$ et $\widehat{A} = \widehat{E} = 90^\circ$;
 C est équidistant des côtés de $\widehat{AFE}$.

C, E et D sont alignés.
 A, F et B sont alignés.

Or, si un point est équidistant des côtés d'un angle, alors il appartient à la bissectrice de cet angle.

Donc C appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{AFE}$.

Par suite : $[Fx$ est bissectrice de l'angle $\widehat{AFE}$.

b) À partir de $DB = DE$ et avec un raisonnement analogue, on arrive à la conclusion suivante : $[Fy$ est bissectrice de $\widehat{BFE}$.

c) $[Fx$ est bissectrice de $\widehat{AFE}$; donc $\widehat{F_1} = \widehat{F_2}$.

$[Fy$ est bissectrice de $\widehat{BFE}$; donc $\widehat{F_3} = \widehat{F_4}$.

$\widehat{AFB}$ est plat ; donc $\widehat{F_1} + \widehat{F_2} + \widehat{F_3} + \widehat{F_4} = 180^\circ$.

Avec les trois égalités, on obtient :

$$\widehat{F_2} + \widehat{F_2} + \widehat{F_3} + \widehat{F_3} = 180^\circ \text{ ou } 2\widehat{F_2} + 2\widehat{F_3} = 180^\circ.$$

Il en résulte : $\widehat{F_2} + \widehat{F_3} = 90^\circ$ ou $\widehat{xFy} = 90^\circ$.



Lors de la résolution d'un exercice dont les questions s'enchaînent, il ne faut pas oublier que les résultats démontrés au a) et au b) sont utilisables pour la question c) !

VOIR AUSSI :

Distance d'un point à une droite, 52

Triangle isocèle, 65

Cercle inscrit, 70

Axes de symétrie, 95

MÉDIATRICE D'UN SEGMENT

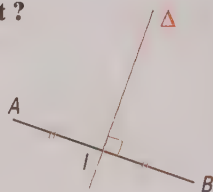
COMPRENDRE

6^e ● Qu'est-ce que la médiatrice d'un segment ?

Δ est la médiatrice de $[AB]$ signifie :

- Δ passe par le milieu I de $[AB]$;
- Δ est perpendiculaire à la droite (AB) .

Δ est axe de symétrie du segment $[AB]$.



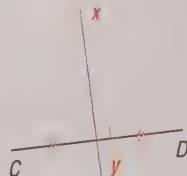
RECONNAÎTRE UNE MÉDIATRICE

6^e ● En utilisant la définition de la médiatrice

On sait que xy :

- passe par le milieu de $[CD]$;
- est perpendiculaire à (CD) .

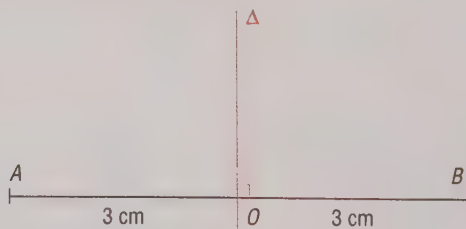
On peut affirmer, d'après la définition, que xy est la médiatrice de $[CD]$.



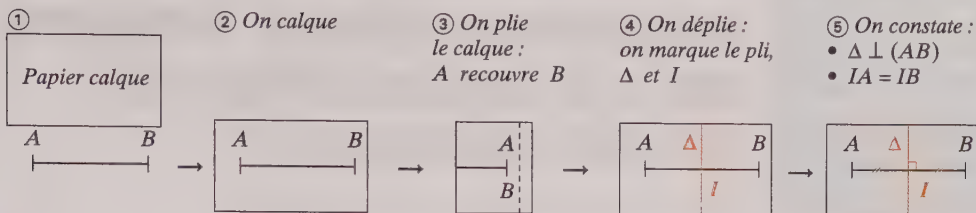
UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Construire avec la règle graduée et l'équerre la médiatrice d'un segment $[AB]$ de 6 cm.

- L'angle droit est construit avec l'équerre.



$AB = 6 \text{ cm}$
 $AO = OB = 3 \text{ cm}$
 (règle graduée)



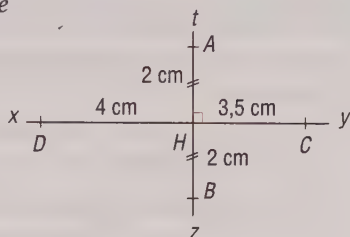
6^e ● Reproduire la figure ci-contre en vraie grandeur.

Répondre ensuite

aux questions suivantes :

a) xy est-elle médiatrice de $[AB]$? Pourquoi ?

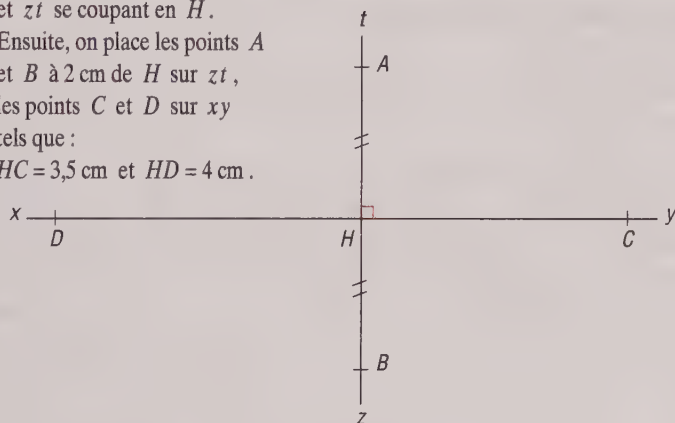
b) zt est-elle médiatrice de $[DC]$? Pourquoi ?



• À l'aide de l'équerre, on construit les deux droites perpendiculaires xy et zt se coupant en H .

Ensuite, on place les points A et B à 2 cm de H sur zt , les points C et D sur xy tels que :

$HC = 3,5$ cm et $HD = 4$ cm.



a) xy est la médiatrice de $[AB]$ car :

- d'une part, elle passe par H milieu de $[AB]$;
- d'autre part, elle est perpendiculaire à la droite (AB) .

b) En revanche, zt n'est pas médiatrice de $[CD]$. Elle est bien perpendiculaire à la droite (CD) , mais elle ne passe pas par le milieu de $[CD]$ car $HC \neq HD$.

Remarques

- A et B sont symétriques par rapport à la droite xy (cf. Symétrie orthogonale, 95).
- ACB est un triangle dans lequel la médiatrice de $[AB]$ passe par C . ACB est isocèle de base $[AB]$ (cf. Triangle isocèle, 65) ; il en résulte : $CA = CB$. De même, ADB est isocèle et $DA = DB$.

VOIR AUSSI :

Triangle isocèle, 65

Cercle circonscrit, 70

Rectangles, 84

Losanges, 86

Symétrie orthogonale, 95

PROPRIÉTÉ DES POINTS DE LA MÉDIATRICE D'UN SEGMENT

OUVRIR L'ŒIL

● Ces deux énoncés sont bâtis avec :

Si... alors...

Après **Si**, il y a ce que l'on sait.

Après **alors**, il y a ce que l'on en déduit.

● On passe d'un énoncé à l'autre en intervertissant « ce que l'on sait » et « ce que l'on en déduit ».

On dit que ce sont des énoncés **réciroques**.

(Cf. Bissectrice d'un angle, 60.)

COMPRENDRE

6^e ● Deux énoncés concernant les points de la médiatrice d'un segment $[AB]$

1. Si un point est **sur la médiatrice** de $[AB]$ alors il est **équidistant** de A et de B .
2. Si un point est **équidistant** de A et de B alors il est **sur la médiatrice** de $[AB]$.

6^e ● Comment utiliser ces énoncés ?

Le premier :

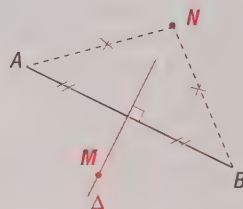
On sait que M est sur la médiatrice de $[AB]$.

On en déduit : $MA = MB$.

Le deuxième :

On sait que $NA = NB$.

On en déduit que le point N appartient à la médiatrice $[AB]$.



RECONNAÎTRE UNE MÉDIATRICE

6^e ● En utilisant l'énoncé 2. ci-dessus

On sait que :

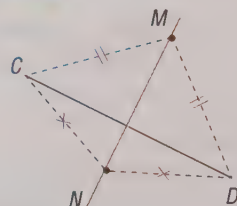
$$MC = MD \text{ et } NC = ND.$$

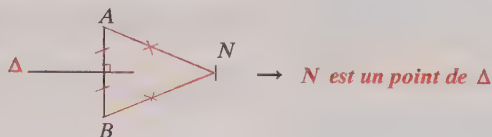
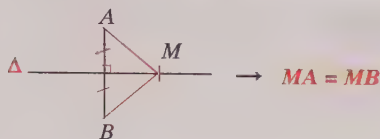
On en déduit que :

- M est sur la médiatrice de $[CD]$;
- N est sur la médiatrice de $[CD]$.

Or, par deux points, il ne passe qu'une droite.

La droite (MN) et la médiatrice de $[CD]$ sont confondues.
 (MN) est la **médiatrice** de $[CD]$.





Dans les deux figures, Δ est médiatrice de $[AB]$

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Construire avec le compas et la règle (non graduée) la médiatrice d'un segment.

● Par construction :

$MA = MB$ et $NA = NB$.

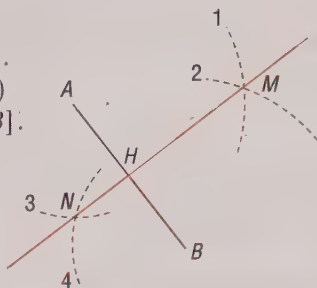
Par suite, la droite (MN) est la médiatrice de $[AB]$.

Remarque

Il en résulte

$(MN) \perp (AB)$

et $HA = HB$.



Arcs 1 et 2 :
centres A et B,
même rayon
 $MA = MB$.

Arcs 3 et 4 :
centres A et B,
même rayon
 $NA = NB$.

OUVRIR L'ŒIL

Notations :

– $[AB]$: segment
d'extrémités A et B.

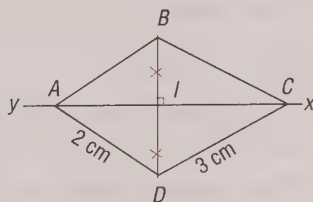
– (AB) : droite déterminée
par A et B.

– AB : longueur de $[AB]$
ou distance de A à B.

6^e ● Voici une figure réalisée à main levée et sur laquelle on a noté toutes les propriétés qu'elle possède.

a) Prouver que la droite (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$.

b) Calculer le périmètre du quadrilatère ABCD.



a) D'après la figure :

- (AC) passe par le milieu I du segment $[BD]$;
- (AC) est perpendiculaire à la droite (BD) .

Par définition, la droite (AC) est la médiatrice de $[BD]$.

b) A est donc un point de la médiatrice de $[BD]$.

Or, si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment. Donc :

$$AB = AD = 2 \text{ cm.}$$

De même, on prouve : $CB = CD = 3 \text{ cm.}$

$$2 + 2 + 3 + 3 = 10.$$

Le périmètre de ABCD est égal à 10 cm.

VOIR AUSSI :

Triangle isocèle, 65

Cercle circonscrit, 70

PROBLÈMES
DE DISTANCE

COMPRENDRE

OUVRIR
L'ŒIL

Ne confondons pas les deux énoncés suivants :

- si $M \in [AB]$
alors $MA + MB = AB$;
- si $MA + MB = AB$
alors $M \in [AB]$.

Ce sont deux énoncés
réciproques l'un de l'autre.

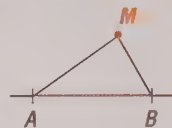
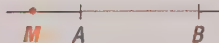
5^e ● Qu'est-ce que l'inégalité triangulaire ?

Soient trois points A , B et M dans un plan.

- Si $M \in [AB]$
alors on a : $MA + MB = AB$.



- Si $M \notin [AB]$



alors on a : $MA + MB > AB$.

Étant donné trois points quelconques A , B et M d'un plan,
on a toujours $MA + MB \geq AB$; c'est l'**inégalité triangulaire**.

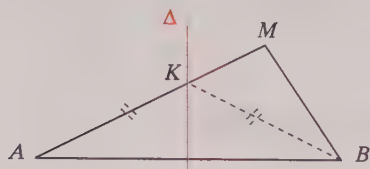
5^e ● Conséquences

- Étant donné deux points quelconques A et B , si M est un point tel que $MA + MB = AB$ alors M appartient au segment $[AB]$.
- Dans un triangle chaque côté est inférieur à la somme des deux autres.
- Trois nombres positifs ne peuvent être les longueurs des côtés d'un triangle que si le plus grand est inférieur à la somme des deux autres (dans le cas où il y a un plus grand).

UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● Pour les valeurs suivantes des nombres a , b et c , indiquer s'il existe un triangle ayant ces nombres pour mesures des côtés (en centimètre). Si oui, construire le triangle.

- $a = 1,5$; $b = 2,3$; $c = 4$.
- $a = 1,8$; $b = 4,1$; $c = 3,3$.
- $a = 2,5$; $b = 3,2$; $c = 5,7$.



Δ est médiatrice de $[AB]$

$$MB < MK + KB$$

$$MB < MK + KA$$

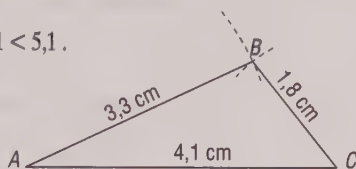
$$MB < MA$$

a) On a : $a + b = 1,5 + 2,3 = 3,8$.

Le plus grand nombre est supérieur à la somme des deux autres ; il n'existe pas de triangle ayant pour longueurs des côtés 1,5 cm ; 2,3 cm et 4 cm.

b) On a : $a + c = 1,8 + 3,3 = 5,1$ et $4,1 < 5,1$.

Le triangle existe ; sa construction est classique (cf. Constructions de triangles, 67).



c) On a : $a + b = 2,5 + 3,2 = 5,7 = c$.

On ne peut pas tracer un triangle mais on a trois points alignés.



5^e ● Les points A , B et C sont alignés ; lequel de ces points est situé entre les deux autres ?

a) $AB = 5$ cm ; $BC = 1$ cm et $AC = 4$ cm ;

b) $AB = 3,2$ cm ; $BC = 5,7$ cm et $AC = 2,5$ cm ;

c) $AB = 17,4$ cm ; $BC = 12,9$ cm et $AC = 30,3$ cm .

a) On a : $AB = AC + BC = AC + CB$ car $5 = 1 + 4$; donc C est entre A et B .

b) On a : $BC = AB + AC = BA + AC$ car $5,7 = 3,2 + 2,5$; donc A est entre B et C .

c) On a : $AC = AB + BC$ car $30,3 = 17,4 + 12,9$; donc B est entre A et C .

5^e ● Dans un cercle de centre O , montrer qu'une corde CD ne passant pas par O est inférieure à un diamètre AB .

• Dans un triangle un côté est inférieur à la somme des deux autres.

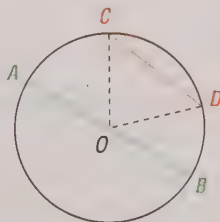
Donc dans le triangle COD , on a :

$$CD < OC + OD.$$

Mais OC et OD sont des rayons comme OA et OB , on peut écrire :

$$OC + OD = OA + OB = AB.$$

Par suite, $CD < OC + OD$ peut s'écrire : $CD < AB$.



VOIR AUSSI :

Médiatrice, 61-62

Triangle équilatéral, 66

Constructions

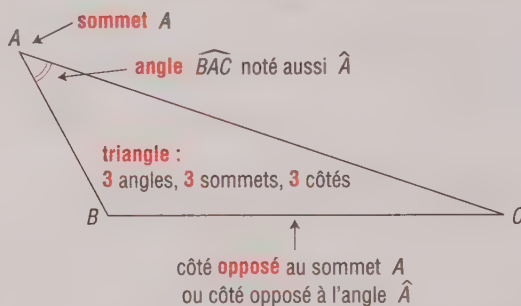
de triangles, 67

VOCABULAIRE RELATIF AUX TRIANGLES

COMPRENDRE

6^e ● Vocabulaire commun à tous les triangles

Trois points non alignés sont les sommets d'un triangle.

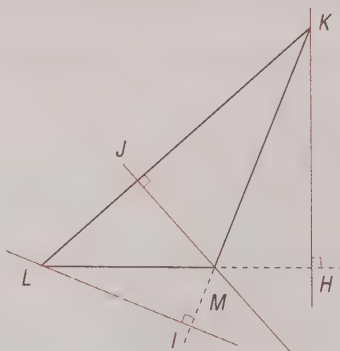


● Selon le contexte, le mot **côté** désigne un segment, une longueur ou une droite.

● Selon le contexte, le mot **hauteur** désigne une droite, un segment ou une longueur.

5^e ● Qu'est-ce qu'une hauteur dans un triangle ?

Dans un triangle, la droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé est une **hauteur**.

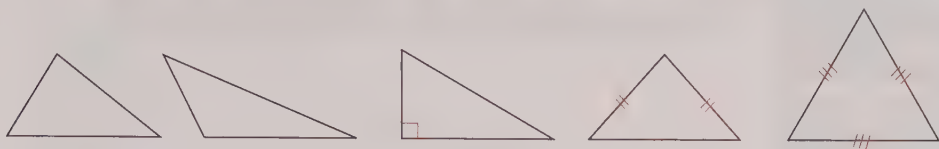


Un triangle a trois hauteurs.

Pour parler, par exemple, de la hauteur (MJ) on peut dire :

- c'est la hauteur passant par le sommet M ;
- c'est la hauteur relative au côté $[LK]$.

Le segment $[MJ]$ ainsi que sa longueur MJ sont aussi appelés **hauteur** ; J est le **pied** de la hauteur $[MJ]$.



Triangles quelconques et triangles particuliers

UTILISER SES CONNAISSANCES

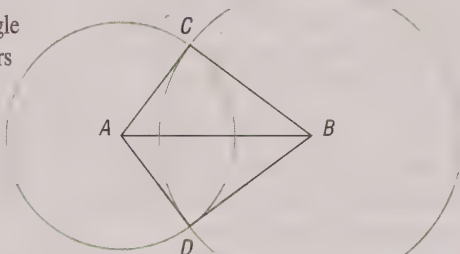
- 6^e ● Tracer un segment $[AB]$ de 2,5 cm. Construire le cercle de centre A et de rayon 1,5 cm et le cercle de centre B et de rayon 2 cm. Ces cercles se coupent en C et D . Dessiner les triangles ABC et ABD . Quel est leur périmètre ?

- Le périmètre d'un triangle est la somme des longueurs des côtés.

$$2,5 + 2 + 1,5 = 6.$$

Périmètre ABC : 6 cm.

Périmètre ABD : 6 cm.



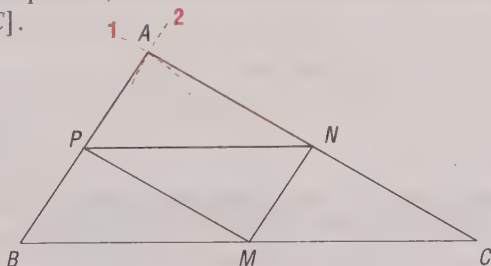
- 6^e ● Construire un triangle ABC tel que :

$$AB = 3 \text{ cm}, AC = 5 \text{ cm} \text{ et } BC = 6 \text{ cm}.$$

Placer M , N et P les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Mesurer les côtés du triangle MNP .

- On a tracé dans l'ordre :

- le segment $[BC]$ de 6 cm de long,
- l'arc 1, de centre B et de rayon 3 cm, et l'arc 2, de centre C et de rayon 5 cm pour avoir le point A ,
- $[AB]$ et $[AC]$.



- Avec la règle graduée, on place M , N et P , puis on mesure MN , NP et PM ; on a : $MN = 1,5 \text{ cm}$; $NP = 3 \text{ cm}$; $PM = 2,5 \text{ cm}$.



L'expression :

« M , N et P sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ »

signifie :

- M est milieu de $[BC]$;
- N est milieu de $[CA]$;
- P est milieu de $[AB]$;

on respecte l'ordre !

VOIR AUSSI :

Règle graduée, longueur, 49

Compas, cercle, disque, 50

Équerre, droites

perpendiculaires, droites

parallèles, 52

TRIANGLE ISOCÈLE

COMPRENDRE

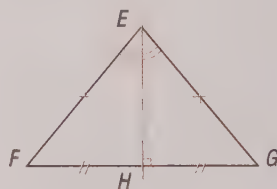
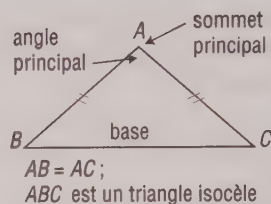
6^e ● Définition du triangle isocèle

Par définition, un triangle qui a deux côtés de même longueur est un triangle **isocèle**.

● Dans un triangle isocèle, les angles à la base sont **égaux**.

Dans le triangle isocèle ABC de base $[BC]$, on a : $\hat{B} = \hat{C}$.

● Dans un triangle isocèle, la médiatrice de la base passe par le sommet principal ; c'est un **axe de symétrie** du triangle et le support de la bissectrice de l'angle principal.



RECONNAÎTRE

On peut reconnaître un triangle isocèle en utilisant :

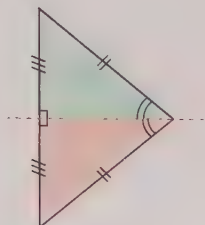
- 6^e – soit la définition :
un triangle qui a **deux côtés de même longueur** est isocèle ;
- 6^e – soit une propriété de symétrie :
un triangle dans lequel **la médiatrice d'un côté passe par le sommet opposé** est isocèle ;
- 6^e – soit une propriété angulaire :
- 5^e un triangle qui a **deux angles égaux** est isocèle.

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Construire un triangle isocèle ABC tel que :

$$BC = 4 \text{ cm et } AB = AC = 3 \text{ cm.}$$

Mesurer ses angles.



Isocèle : origine grecque « isoskelès » ;
signifie : « qui a les jambes égales ».

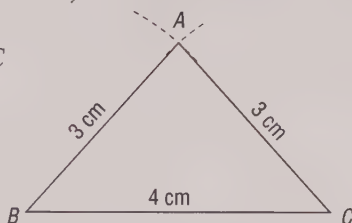
Par pliage suivant l'**axe de symétrie** la
partie rose et la partie verte se superposent.

• Dans l'ordre on a tracé :

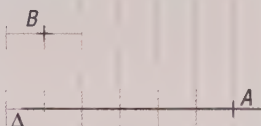
- la base $[BC]$ de 4 cm de long,
- les arcs de cercle, de centres B et C
et de rayon 3 cm, pour avoir A
et les segments $[AB]$ et $[AC]$.

$$\widehat{B} = \widehat{C} (\approx 48^\circ).$$

$$\widehat{A} \approx 84^\circ.$$



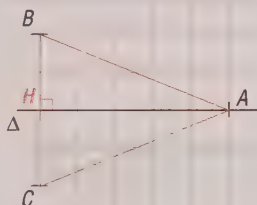
6^e • Reproduire la figure ci-contre
sur papier quadrillé, puis construire
le triangle isocèle ABC admettant
 Δ pour axe de symétrie.



- Δ est la médiatrice de la base $[BC]$;
il suffit de construire le symétrique C
du point B par rapport à Δ en suivant
la ligne du quadrillage passant par B
et perpendiculaire à Δ , puis, en comptant
les carreaux, placer C tel que :

$$HC = HB.$$

On trace ensuite $[AB]$ et $[AC]$.



6^e • Dans un triangle isocèle ABC , de base $[BC]$, les angles à la
5^e base valent 70° chacun. Leurs bissectrices se coupent en I .
Prouver que le triangle BCI est isocèle.

- $[Bx]$ étant la bissectrice de $\widehat{CBA}$,
on a : $\widehat{CBI} = 70^\circ : 2 = 35^\circ$.
De même $\widehat{BCI} = 35^\circ$.
 BCI a deux angles égaux à 35° ;
 BCI est un triangle isocèle.



VOIR AUSSI :

Bissectrice d'un angle, 60

Médiatrice d'un segment, 61

Propriétés des points
de la médiatrice d'un
segment, 62

Axes de symétrie, 95

TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

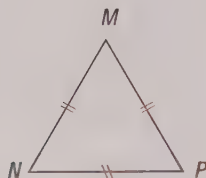
COMPRENDRE

6^e Définition

Un triangle qui a ses côtés de même longueur est équilatéral :

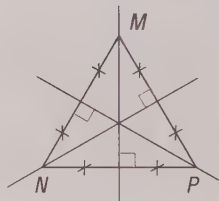
$$MN = NP = PM.$$

MNP est un triangle équilatéral.



6^e Axes de symétrie

Un triangle équilatéral a trois axes de symétrie : les médiatrices des côtés. Chacune d'elles peut se construire en joignant un sommet au milieu du côté opposé.



5^e Propriété sur les angles

Dans un triangle équilatéral, chaque angle vaut 60° :

$$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = 60^\circ.$$

RECONNAÎTRE

On peut reconnaître un triangle équilatéral en utilisant :

6^e – soit la définition :

un triangle qui a ses côtés de même longueur est équilatéral.

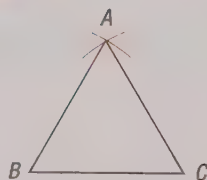
5^e – soit la propriété angulaire :

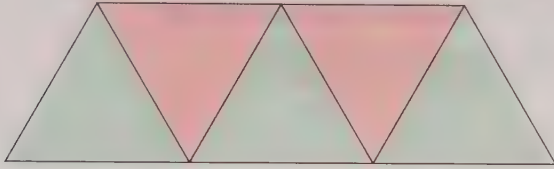
un triangle qui a au moins deux angles de 60° est équilatéral.

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e Construire un triangle équilatéral de côtés 2 cm.

On a construit dans l'ordre : $[BC]$ de 2 cm ; les arcs de centres B et C , et de rayon 2 cm pour avoir A ; les segments $[AB]$ et $[AC]$.

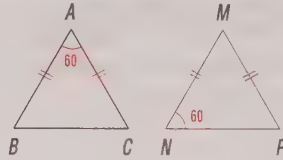




Équilatéral :

origine latine « æquilateralis » ;
signifie : « qui a ses côtés égaux ».

5^e ● Prouver que les deux triangles ci-contre sont équilatéraux.



• ABC a deux côtés de même longueur :

$AB = AC$; il est donc isocèle et $\widehat{B} = \widehat{C}$.

$\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Il en résulte : $\widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$. ABC ayant trois angles de 60° est équilatéral.

• MNP a deux côtés de même longueur ($MN = MP$) ; il est donc isocèle.

Il en résulte : $\widehat{P} = \widehat{N} = 60^\circ$; MNP ayant deux angles de 60° est équilatéral.

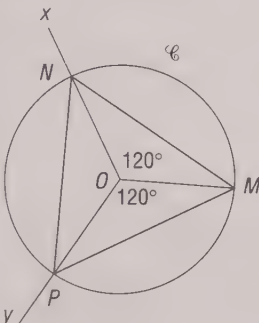
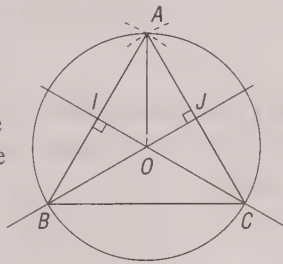
3^e ● a) Construire un triangle équilatéral ABC de 2,6 cm de côté et son cercle circonscrit de centre O .

Prouver que $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^\circ$.

b) Sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1,5 cm, placer un point M . Construire, avec le rapporteur et la règle, le triangle équilatéral de sommet M et dont le cercle circonscrit est $\mathcal{C}$.

a) Dans un cercle, si des cordes sont de même longueur, alors les angles au centre correspondants sont égaux.

Les cordes $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ ont même longueur puisque ce sont les côtés du triangle équilatéral ABC . Les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COA}$ sont donc égaux. L'angle plein valant 360° , chacun d'eux est égal à 120° .



b) On construit $\widehat{MOx}$ et $\widehat{MOy}$ égaux à 120° ; on obtient les points N et P et on trace les segments $[MN]$, $[NP]$ et $[PM]$. On a :

$$\widehat{NOP} = 360^\circ - (120^\circ \times 2) = 120^\circ.$$

Les trois angles au centre sont égaux ;
les trois cordes ont même longueur ;
 MNP est équilatéral.

OUVRIR L'ŒIL

● Dans un triangle équilatéral, la construction des médiatrices peut se faire en joignant le sommet au milieu du côté opposé.

● Deux médiatrices suffisent pour avoir le centre du cercle circonscrit.

VOIR AUSSI :

Compas, cercle, disque, 50
Bissectrice d'un angle, 60
Médiatrice d'un segment, 61
Propriété des points de la médiatrice d'un segment, 62
Axes de symétrie, 95
Polygones réguliers, 100

CONSTRUCTIONS
DE TRIANGLES

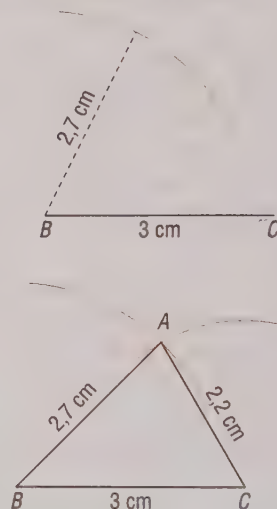
COMPRENDRE

5^e • Comment construire un triangle connaissant les longueurs des trois côtés ?*Exemple* $BC = 3 \text{ cm}$; $BA = 2,7 \text{ cm}$; $CA = 2,2 \text{ cm}$.

- On trace $[BC]$ et un arc de cercle de centre B et de rayon $2,7 \text{ cm}$.

- On trace un arc de cercle de centre C et de rayon $2,2 \text{ cm}$ qui coupe le premier arc en A .

- On trace $[AB]$ et $[AC]$.

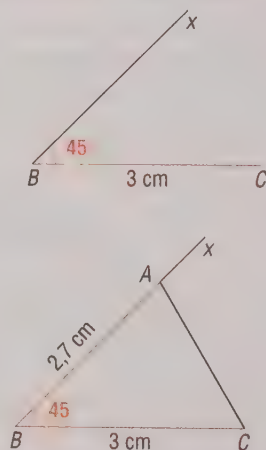
5^e • Comment construire un triangle connaissant les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces côtés ?*Exemple* : $BC = 3 \text{ cm}$; $BA = 2,7 \text{ cm}$ et $\hat{B} = 45^\circ$.

- On trace $[BC]$ de 3 cm .

- On construit $[Bx]$ telle que :
 $\widehat{CBx} = 45^\circ$.

- On place A sur $[Bx]$ tel que :
 $BA = 2,7 \text{ cm}$.

- On trace $[AC]$.



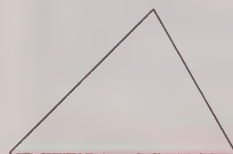
On sait construire un triangle quand on a :



trois côtés



deux côtés et un angle

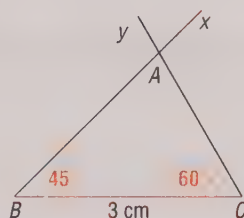
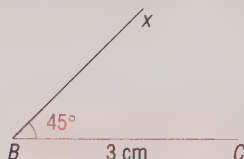


un côté et deux angles

5^e ● Comment construire un triangle connaissant la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents

Exemple : $BC = 3 \text{ cm}$;
 $\hat{B} = 45^\circ$ et $\hat{C} = 60^\circ$.

- On trace $[BC]$ de 3 cm.
- On construit $[Bx]$ telle que :
 $\widehat{CBx} = 45^\circ$.
- On construit $[Cy]$ telle que :
 $\widehat{BCy} = 60^\circ$.
- On obtient A .

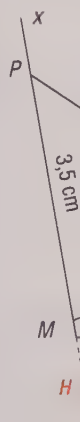


UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e Construire un triangle MNP tel que :

$MN = 4,5 \text{ cm}$; $MP = 3,5 \text{ cm}$ et $\widehat{NMP} = 100^\circ$.

Construire la hauteur passant par N .



Dans l'ordre :

- on trace $[MN]$ tel que $MN = 4,5 \text{ cm}$;
- on construit $[Mx]$ telle que $\widehat{NMx} = 100^\circ$;
- on place P sur $[Mx]$ tel que $MP = 3,5 \text{ cm}$;
- on trace $[PN]$.

Avec l'équerre, on construit
la droite passant par N

et perpendiculaire à (PM) :
c'est la hauteur (NH) .

VOIR AUSSI :

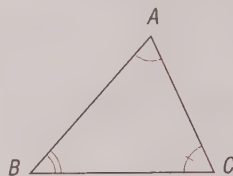
Règle graduée, longueur, 49
Compas, cercle, disque, 50
Équerre, angle droit,
distance point-droite, 52
Le rapporteur, 54
Vocabulaire relatif
aux triangles, 64

SOMME DES ANGLES
D'UN TRIANGLE

CONNAÎTRE

5^e ● La somme des angles d'un triangle est 180° .

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$



UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● Dans un triangle MNP , $\hat{M} = 51^\circ$ et $\hat{N} = 105^\circ$. Que vaut $\hat{P}$?

La somme des angles d'un triangle est 180° . Donc $\hat{M} + \hat{N} + \hat{P} = 180^\circ$.

Comme $\hat{M} + \hat{N} = 51^\circ + 105^\circ = 156^\circ$, il en résulte :

$$\hat{P} = 180^\circ - 156^\circ = 24^\circ.$$

$$\hat{P} = 24^\circ.$$

5^e ● a) Soit un triangle ABC dans lequel $\hat{B} = 25^\circ$ et $\hat{C} = 65^\circ$.
Que vaut $\hat{A}$?

b) On sait que dans un triangle deux angles sont complémentaires. Que vaut le troisième angle et que peut-on dire de ce triangle ?

a) La somme des angles d'un triangle est 180° . Donc $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

$\hat{B} + \hat{C} = 25^\circ + 65^\circ = 90^\circ$. Il en résulte :

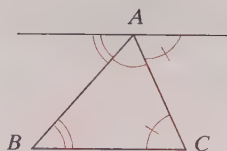
$$\hat{A} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ;$$

$$\hat{A} = 90^\circ.$$

Le triangle ABC est rectangle en A .

b) Dans un triangle, si deux angles sont complémentaires, c'est-à-dire s'ils ont pour somme 90° , alors le troisième angle vaut $180^\circ - 90^\circ$ ou 90° .

Donc, si dans un triangle deux angles sont complémentaires, le troisième angle vaut 90° et le triangle est rectangle.



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

Cette propriété est très importante ;
on passe des mesurages avec rapporteur
à des calculs sur les angles.

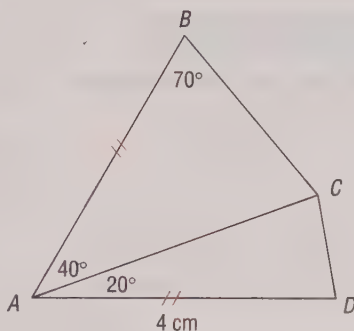
5° a) Faire l'inventaire de
ce que l'on sait à propos
de la figure ci-contre.

b) Prouver que le triangle
 ABC est isocèle.

Que vaut AC ?

c) Prouver que le triangle
 ACD est isocèle.

Calculer les angles
 $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ACD}$.



a) $AB = AD = 4 \text{ cm}$; $\widehat{DAC} = 20^\circ$; $\widehat{CAB} = 40^\circ$; $\widehat{ABC} = 70^\circ$;
 B et D sont de part et d'autre de la droite (AC) .

b) Dans le triangle ABC , deux angles sont connus ; on peut calculer
le troisième :

$$\widehat{ACB} = 180^\circ - (70^\circ + 40^\circ) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ.$$

Le triangle ABC a deux angles égaux : $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. Or, si un triangle a
deux angles égaux alors il est isocèle.

Donc ABC est un triangle isocèle de base $[BC]$.

Il en résulte : $AC = AB = 4 \text{ cm}$ et $AC = 4 \text{ cm}$.

c) D'après l'énoncé, $AD = 4 \text{ cm}$; et d'après la question b), $AC = 4 \text{ cm}$.

Il en résulte : $AD = AC$.

Par définition le triangle ADC est isocèle de base $[CD]$. Or, dans un triangle
isocèle les angles à la base sont égaux. Donc $\widehat{ADC} = \widehat{ACD}$.

Ces deux angles ont pour somme $180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$.

Chacun vaut $160^\circ : 2 = 80^\circ$. Donc $\widehat{ADC} = \widehat{ACD} = 80^\circ$.

Remarque

Le triangle ABD est isocèle et a un angle de 60° ; il est équilatéral
(cf. Triangle équilatéral, 66, deuxième exercice).

Il en résulte que $BD = 4 \text{ cm}$; $ABCD$ a des diagonales de même longueur.



**OUVRIR
L'ŒIL**



Ne pas confondre
les deux raisonnements
suivants.

● Un triangle a deux angles
égaux ; par suite il est isocèle ;
il en résulte une égalité
de longueurs.
(Question b), ci-contre.)

● Un triangle a deux côtés
de même longueur ; par suite
il est isocèle ; il en résulte
une égalité d'angles.
(Question c), ci-contre.)

VOIR AUSSI :

Triangle isocèle, 65

Triangle équilatéral, 66

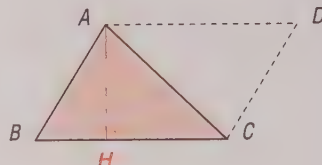
Triangle rectangle, 77

AIRE D'UN TRIANGLE

COMPRENDRE

- 5^e ● L'aire du parallélogramme $ABCD$ est :

$$BC \times AH.$$



- L'aire du triangle ABC

est la moitié de celle du parallélogramme ; elle est égale à :
 $(BC \times AH) : 2$.

C'est le demi-produit d'un côté par la hauteur relative à ce côté.

OUVRIR L'ŒIL

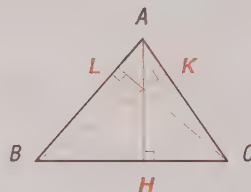
Il faut bien associer
un côté et la hauteur
relative à ce côté.

- 5^e ● Il y a trois hauteurs, donc trois possibilités de calculs :

$$- \text{aire } ABC = (BC \times AH) : 2 ;$$

$$- \text{aire } ABC = (CA \times BK) : 2 ;$$

$$- \text{aire } ABC = (AB \times CL) : 2 .$$



UTILISER SES CONNAISSANCES

- 5^e ● Il faut savoir convertir ! Compléter les égalités suivantes :

$$23,752 \text{ m}^2 = \dots\dots\dots \text{ dm}^2 = \dots\dots\dots \text{ cm}^2.$$

$$127,3 \text{ m}^2 = \dots\dots\dots \text{ dam}^2 = \dots\dots\dots \text{ hm}^2.$$

$$70\,540 \text{ dm}^2 = \dots\dots\dots \text{ m}^2 = \dots\dots\dots \text{ dam}^2.$$

$$3\,050 \text{ cm}^2 = \dots\dots\dots \text{ dm}^2 = \dots\dots\dots \text{ m}^2.$$

$$23,752 \text{ m}^2 = 2\,375,2 \text{ dm}^2 = 237\,520 \text{ cm}^2.$$

$$127,3 \text{ m}^2 = 1,273 \text{ dam}^2 = 0,012\,73 \text{ hm}^2.$$

$$70\,540 \text{ dm}^2 = 705,4 \text{ m}^2 = 7,054 \text{ dam}^2.$$

$$3\,050 \text{ cm}^2 = 30,5 \text{ dm}^2 = 0,305 \text{ m}^2.$$

(Voir page 177 « Ouvrir l'œil » et dernier exercice.)

Aire
du rectangle



$$S_1 = b \times h$$

Aire

du parallélogramme



$$S_2 = b \times h$$

Aire
du triangle



$$S_3 = (b \times h) : 2$$

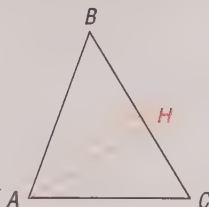
5^e ● Calculer l'aire d'un triangle ABC , de hauteur $[AH]$ avec :

- a) $BC = 7,4 \text{ cm}$ et $AH = 6 \text{ cm}$.
b) $BC = 92 \text{ mm}$ et $AH = 2,5 \text{ cm}$.

$[AH]$ est la hauteur relative au côté $[BC]$;
il en résulte : aire $ABC = (BC \times AH) : 2$.

- a) $(7,4 \times 6) : 2 = 22,2$.
Aire $ABC = 22,2 \text{ cm}^2$.

- b) $BC = 92 \text{ mm} = 9,2 \text{ cm}$; $(9,2 \times 2,5) : 2 = 11,5$.
Aire $ABC = 11,5 \text{ cm}^2$.



5^e ● Dans un triangle ABC d'aire 50 cm^2 , la longueur du côté $[BC]$ est égale à 12 cm .

- a) Calculer la hauteur AH relative au côté $[BC]$.
b) M est le milieu de $[AH]$. Quelle est l'aire du triangle BMC ?

- a) L'aire du triangle ABC est égale à :
 $(BC \times AH) : 2$.

L'aire de ABC est aussi 50 cm^2 . Le double de cette aire est $BC \times AH$; c'est aussi 100 cm^2 . Donc :

$$BC \times AH = 100 \text{ ou } AH = 100 : 12.$$

On a : $AH \approx 8,3 \text{ cm}$ (arrondi au mm le plus proche).

- b) Comparons $BC \times AH$ et $BC \times MH$.

MH est la moitié de AH ; donc $BC \times MH$ est la moitié de $BC \times AH$.

Il en résulte : $BC \times MH = 100 : 2 = 50$, d'où :

$$\text{aire } BMC = (BC \times MH) : 2 = 25 \text{ (en cm}^2\text{)}.$$

L'aire du triangle BMC est 25 cm^2 .

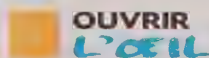
Remarque

On a aussi : aire $BMC = (BC \times MH) : 2$.

Comme AH vaut environ $8,3 \text{ cm}$, MH vaut environ $4,15 \text{ cm}$.

Donc l'aire BMC vaut environ $24,9 \text{ cm}^2$ [car $(12 \times 4,15) : 2 = 24,9]$.

On aurait ainsi un résultat approché !



Le double de l'aire d'un triangle est égal au produit d'un côté par la hauteur relative à ce côté ; cela est utile pour calculer une des longueurs connaissant l'aire et l'autre longueur.

VOIR AUSSI :

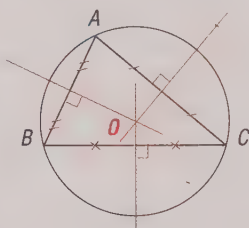
Tableau des unités, p. 282-283
Hauteur, 64
Aire du parallélogramme, 88

CERCLE CIRCONSCRIT
CERCLE INSCRIT

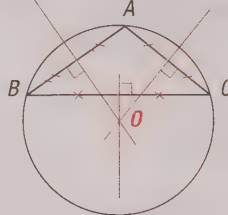
COMPRENDRE

5^e ● Qu'est-ce-que le cercle circonscrit à un triangle ?

3 angles aigus



1 angle obtus

OUVRIR
L'ŒIL

● Deux médiatrices suffisent pour déterminer le centre du cercle circonscrit.

● Deux bissectrices suffisent pour déterminer le centre du cercle inscrit. Pour avoir son rayon, il faut tracer au moins une droite perpendiculaire à un côté et passant par son centre.

- Les **médiatrices** des côtés se coupent en un même point O .
- Ce point commun est équidistant des trois sommets :

$$OA = OB = OC.$$

- Ce point O est le centre d'un cercle **passant par les trois sommets**, appelé **cercle circonscrit** au triangle.

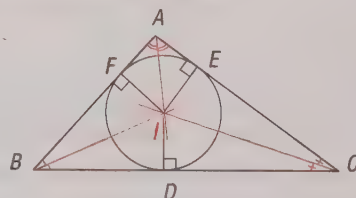
4^e ● Qu'est-ce-que le cercle inscrit dans un triangle ?

- Les bissectrices des angles d'un triangle se coupent en un même point I .

- Ce point commun est équidistant des trois côtés :

$$ID = IE = IF.$$

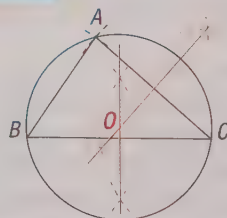
- Ce point I est le centre d'un cercle **tangent aux trois côtés**, appelé **cercle inscrit** dans le triangle.



UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● Construire un triangle ABC de côtés 3 cm, 2 cm et 2,5 cm, puis son cercle circonscrit de centre O .

Pour avoir le centre du cercle circonscrit, il suffit de tracer deux médiatrices.



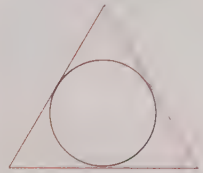
Cercle circonscrit

« fait le tour
à l'extérieur ».
Il passe par les
trois sommets.



Cercle inscrit

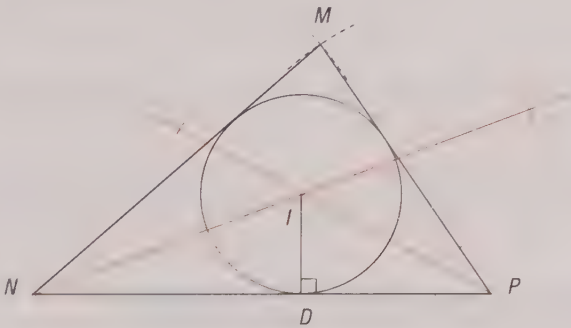
« est à l'intérieur
du triangle ».
Il est tangent
aux côtés.



- 4^e ● Construire un triangle MNP de côtés 6 cm, 5 cm et 4 cm,
puis son cercle inscrit de centre I .

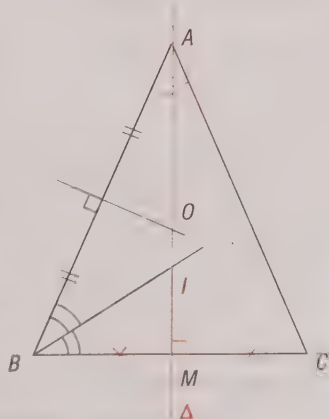
On a construit dans l'ordre :

- le triangle MNP (voir fiche 67) ;
- les bissectrices de $\hat{N}$ et $\hat{P}$ (voir fiche 60) ;
- le segment $[ID]$ perpendiculaire à un côté ;
- le cercle inscrit de centre I et de rayon ID .



- 4^e ● Prouver que dans un triangle isocèle ABC de base $[BC]$,
les centres O du cercle circonscrit et I du cercle inscrit sont
alignés avec le sommet principal A du triangle et avec le milieu
 M de la base.

Dans le triangle isocèle ABC ,
la médiatrice Δ de la base $[BC]$ passe
par le milieu M de cette base
et par le sommet principal A ;
de plus elle est le support
de la bissectrice de l'angle principal $\hat{A}$.
Le centre O du cercle circonscrit
appartient à Δ , médiatrice de $[BC]$.
Le centre I du cercle inscrit appartient
à Δ , support de la bissectrice de $\hat{A}$.
Donc A , O et I et M sont alignés.

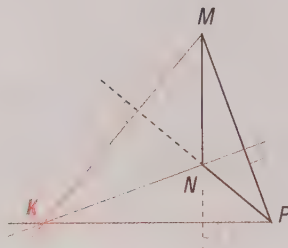
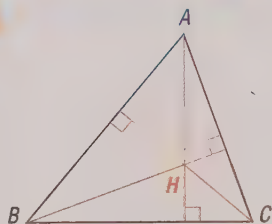


VOIR AUSSI :

Équerre, angle droit, 52
Distance point-droite, 52
Tangente à un cercle, 53
Bissectrice d'un angle, 60
Médiatrice d'un segment, 61
Propriété des points de la
médiatrice d'un segment, 62
Triangle isocèle, 63
Constructions de triangles, 67

ORTHOCENTRE

COMPRENDRE

4^e

Les hauteurs d'un triangle se coupent en un même point. Leur point commun est appelé **orthocentre du triangle**.

ABC a trois angles aigus ; l'orthocentre H est intérieur.
 MNP a un angle obtus ; l'orthocentre K est extérieur.

OUVRIRE
L'ŒIL

Deux hauteurs suffisent pour déterminer l'orthocentre.

UTILISER SES CONNAISSANCES

4^e • Construire un triangle ABC rectangle en A et tel que :
 $AB = 4 \text{ cm}$ et $AC = 3 \text{ cm}$.

Quel est l'orthocentre du triangle ABC ?

La construction est classique.

- La hauteur passant par C et relative au côté $[AB]$ est la droite (AC) .

- La hauteur passant par B et relative au côté $[AC]$ est la droite (AB) .

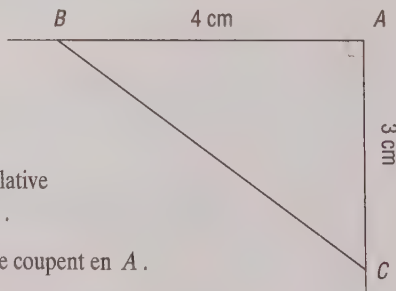
- Les hauteurs (AB) et (AC) se coupent en A .

A est l'orthocentre du triangle ABC rectangle en A .

Remarque

L'orthocentre est confondu avec le sommet de l'angle droit.

Ceci est vrai quel que soit le triangle rectangle.





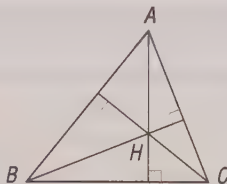
Le mot orthocentre est constitué de « ortho » (qui vient du grec et qui veut dire « droit ») et de « centre ».

C'est le point commun aux trois hauteurs d'un triangle.

4^e ● H est l'orthocentre du triangle ABC .

a) Quelles sont les hauteurs du triangle HBC ?

b) Quel est l'orthocentre de HBC ?



a) La hauteur relative au côté $[BC]$ est la droite (HA) .

La hauteur relative au côté $[HB]$ est la droite (CA) .

La hauteur relative au côté $[HC]$ est la droite (BA) .

b) Les hauteurs se coupent en A ; A est l'orthocentre de HBC .

4^e ● Soit MNP un triangle non rectangle. Le cercle de diamètre $[NP]$ coupe les droites (MN) et (MP) respectivement en A et B . Les droites (NB) et (PA) se coupent en H .

a) Prouver : $(AP) \perp (MN)$ et $(NB) \perp (MP)$.

b) Que représente H pour le triangle MNP ?

c) Prouver : $(MH) \perp (NP)$.

a) $[NP]$ est un diamètre. Or, si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre, on obtient alors un triangle rectangle.

Donc les deux triangles NAP et NBP sont respectivement rectangles en A et B .

Il en résulte :

$$(AP) \perp (MN) \text{ et } (NB) \perp (MP).$$

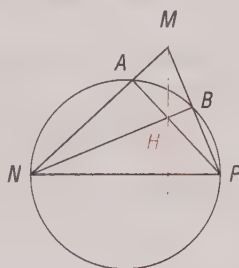
b) Dans le triangle MNP , (NB) est la hauteur relative au côté $[MP]$ et (PA) est la hauteur relative au côté $[MN]$.

Donc, l'intersection H de (NB) et de (PA) est l'orthocentre de MNP .

Remarque

On peut ainsi construire l'orthocentre avec le compas et la règle.

c) Puisque H est l'orthocentre de MNP , (MH) est la troisième hauteur ; donc : $(MH) \perp (NP)$.



Il faut connaître

le raisonnement « classique » de ce dernier exercice.

Deux hauteurs déterminent l'orthocentre. En utilisant la troisième hauteur, on peut prouver que deux droites sont perpendiculaires.

VOIR AUSSI :

Vocabulaire

relatif aux triangles, 64

Reconnaître

un triangle rectangle, 79

CENTRE DE GRAVITÉ

OUVRIR
L'ŒIL

- Selon le contexte, le mot « médiane » désigne une droite (AM) , un segment $[AM]$ ou une longueur AM .

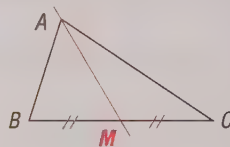
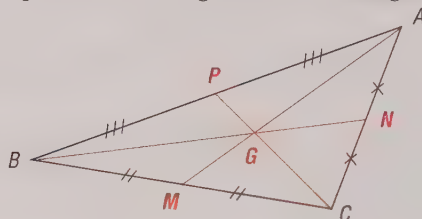
- Deux médianes suffisent pour déterminer le centre de gravité.

COMPRENDRE

4^e ● Qu'est-ce-qu'une médiane dans un triangle ?

Dans un triangle, toute droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé est une **médiane**.

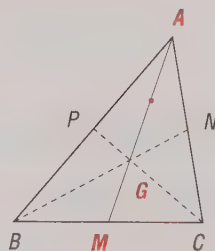
Dans le triangle ABC , (AM) est une médiane.

4^e ● Qu'est-ce-que le centre de gravité d'un triangle ?

- Les médianes d'un triangle se coupent en un même point.
- Leur point commun est appelé centre de gravité du triangle.

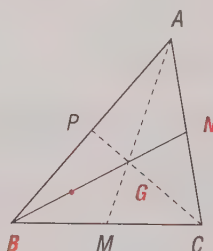
4^e ● Quelle est la position du centre de gravité sur chaque médiane ?

Sur chaque médiane, le centre de gravité est situé aux deux tiers de sa longueur à partir du sommet et au tiers de sa longueur à partir du milieu du côté.



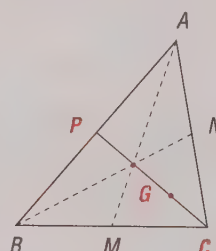
$$AG = \frac{2}{3} AM.$$

$$GM = \frac{1}{3} AM.$$



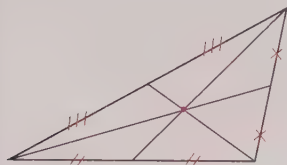
$$BG = \frac{2}{3} BN.$$

$$GN = \frac{1}{3} BN.$$



$$CG = \frac{2}{3} CP.$$

$$GP = \frac{1}{3} CP.$$



Les médianes d'un triangle se coupent en un même point ; ce point commun est le **centre de gravité** du triangle.

Le centre de gravité est le point d'application de la résultante des actions de la pesanteur sur toutes les parties d'un corps.

UTILISER SES CONNAISSANCES

4^e ● Soit un segment $[BC]$ de milieu M . Construire la médiatrice de $[BC]$, puis un triangle ABC tel que : $AB > AC$.
(voir bandeau page 135.)

Tracer la hauteur (AH) et la médiane (AM) toutes deux relatives au côté $[BC]$.

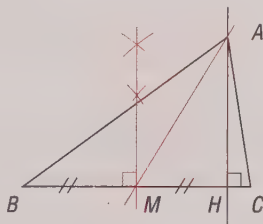
Prouver que les triangles AMB et AMC ont la même aire.

M est le milieu de $[BC]$, donc $MB = MC$.

L'aire du triangle AMB est :
 $(MB \times AH) : 2$.

L'aire du triangle AMC est :
 $(MC \times AH) : 2$.

Comme $MB = MC$, on a :
aire AMB = aire AMC .



4^e ● Soit un parallélogramme $ABCD$ de centre O .

Placer un point M non situé sur (AC) ou sur (BD) .

Prouver que les triangles AMC et BMD ont même centre de gravité

O est le milieu commun aux diagonales du parallélogramme $ABCD$.

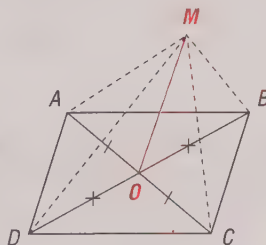
$[MO]$ est une médiane commune aux triangles AMC et BMD .

Le centre de gravité de AMC est sur $[OM]$ au tiers à partir de O .

Le centre de gravité de BMD est sur $[OM]$ au tiers à partir de O .

Il n'y a qu'un point sur $[OM]$, situé au tiers à partir de O .

Les deux triangles ont le même centre de gravité.



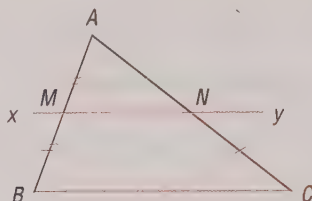
VOIR AUSSI :

Médiatrice d'un segment, 61
 Propriété des points de la
 médiatrice d'un segment, 62
 Problèmes de distance, 63
 Vocabulaire relatif
 aux triangles, 64
 Aire d'un triangle, 69
 Parallélogrammes, 88-89

DROITE
DES MILIEUX

COMPRENDRE

- 4^e ● Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.



On sait que :

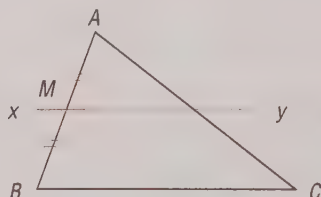
$$MA = MB \text{ et } NA = NC.$$

On peut affirmer que :

$$(MN) \parallel (BC).$$

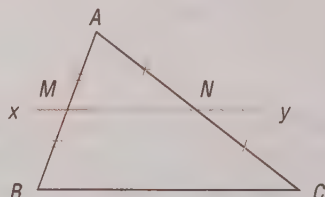
La droite (MN) est souvent appelée « droite des milieux ».

- 4^e ● Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.



On sait que :

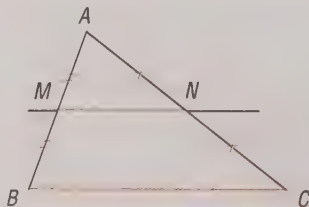
$$MA = MB \text{ et } xy \parallel (BC).$$



On peut affirmer que :

$$NA = NC.$$

- 4^e ● Dans un triangle, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de celle du troisième côté.

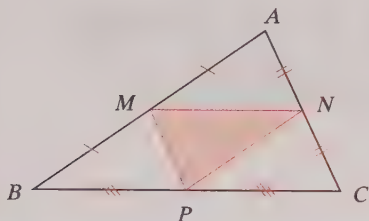


On sait que :

$$MA = MB \text{ et } NA = NC.$$

On peut affirmer que :

$$MN = \frac{1}{2} BC.$$



MNP est le **triangle des milieux** :

- ses côtés sont parallèles à ceux de ABC ;
- ses angles sont égaux à ceux de ABC ;
- son périmètre est la moitié de celui de ABC ;
- son aire est le quart de celle de ABC .

UTILISER SES CONNAISSANCES

4^e ● Soit un triangle ABC représenté ci-contre.

Calculer la longueur de $[DE]$, compte tenu des indications portées sur la figure.

- Les symboles d'égalité sur $[BE]$ et $[EC]$ indiquent que E est le milieu de $[BC]$.

Les symboles d'angle droit indiquent que l'on a :

$$(AC) \perp (AB) \text{ et } (DE) \perp (AB).$$

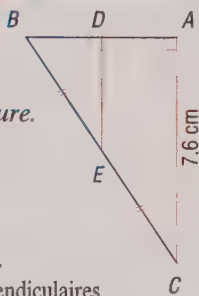
Par suite les droites (AC) et (DE) , toutes deux perpendiculaires à (AB) , sont parallèles.

Dans le triangle ABC , (DE) passe par le milieu E de $[BC]$ et est parallèle au côté (AC) ; elle coupe donc le troisième côté $[AB]$ en son milieu.

Donc D est le milieu de $[AB]$.

- Dans le triangle ABC , $[DE]$ joint les milieux des deux côtés $[AB]$ et $[BC]$. Sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté $[AC]$.

Comme $AC = 7,6 \text{ cm}$, on en déduit : $DE = 3,8 \text{ cm}$.



4^e ● Soit un triangle quelconque ABC et M , le milieu de $[BC]$.

La parallèle à (AB) passant par M coupe $[AC]$ en I .

La parallèle à (AC) passant par M coupe $[AB]$ en J .

- Que représente I pour $[AC]$ et J pour $[AB]$?
- Que représente (IJ) pour (BC) et IJ pour BC ?

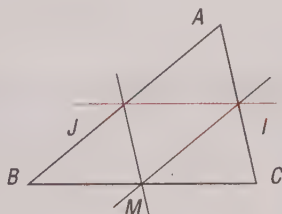
- Dans un triangle, si par le milieu d'un côté on trace la parallèle à un autre côté, alors cette parallèle coupe le troisième en son milieu.

Il en résulte que I est le milieu de $[AC]$ et que J est le milieu de $[AB]$.

- I est le milieu de $[AC]$ et J celui de $[AB]$.

D'après les propriétés de la droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, il en résulte :

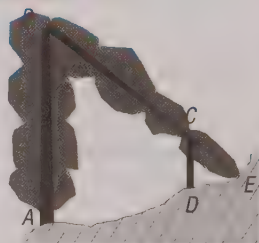
$$(IJ) \parallel (BC) \text{ et } IJ = \frac{BC}{2}.$$

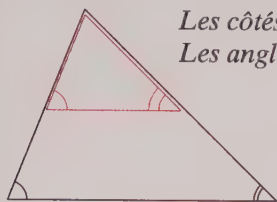


VOIR AUSSI :

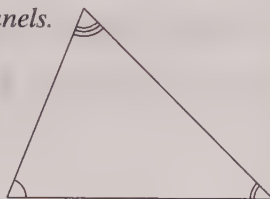
Milieu d'un segment, 49

Droites parallèles, 52-58-59





Les côtés sont proportionnels.
Les angles sont égaux.



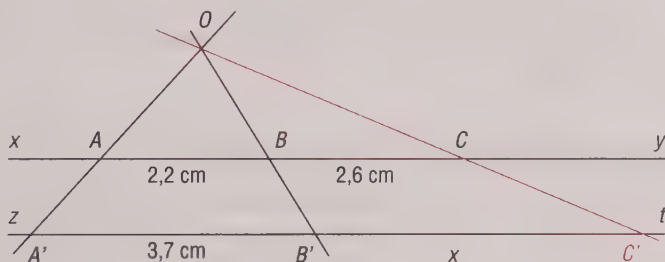
Dans le triangle EAB , (DC) est parallèle à (AB) . Les deux triangles sont à côtés proportionnels. Donc :

$$\frac{EC}{EB} = \frac{ED}{EA} = \frac{CD}{BA} \quad \text{ou} \quad \frac{3,5}{EB} = \frac{3}{12} = \frac{2,5}{AB}.$$

Il en résulte : $EB \times 3 = 3,5 \times 12$; $EB \times 3 = 42$; $EB = 14$.
 $3 \times AB = 2,5 \times 12$; $3 \times AB = 30$; $AB = 10$.

La hauteur de l'arbre était : $10 \text{ m} + 14 \text{ m}$ ou 24 m .

3^e ● Construire un segment dont la longueur x vérifie : $\frac{2,2}{3,7} = \frac{2,6}{x}$, en utilisant les triangles à côtés proportionnels.
(On dit que l'on construit une quatrième proportionnelle.)



Dans l'ordre, on a :

- tracé les parallèles xy et zt ;
- placé A , B et C tels que $AB = 2,2 \text{ cm}$ et $BC = 2,6 \text{ cm}$;
- placé A' et B' tels que $A'B' = 3,7 \text{ cm}$;
- tracé (AA') et (BB') ; cela a donné O ;
- tracé (OC) ; cela a donné C' .

OAB et $OA'B'$ sont à côtés proportionnels ainsi que OBC et $OB'C'$.

$$\text{On a : } \frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'} \quad \text{et} \quad \frac{OB}{OB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{OC}{OC'}.$$

$$\text{Il en résulte : } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \quad \text{ou} \quad \frac{2,2}{3,7} = \frac{2,6}{B'C'}.$$

$[B'C']$ a pour longueur x ; c'est le segment cherché.



Proportion

a , b , c et d
sont différents de 0.

● $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ est une proportion ;

a , b , c et d sont les quatre termes de la proportion ;
 a et d sont les termes extrêmes ; b et c sont les termes moyens.

● Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors :
 $ad = bc$.

■ Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors :

- $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (on a échangé les moyens) ;
- $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ (on a échangé les extrêmes) ;
- $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ (on a échangé les moyens et les extrêmes).

VOIR AUSSI :

Théorème de Thalès, 75

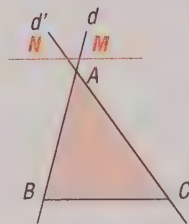
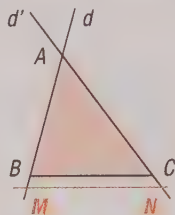
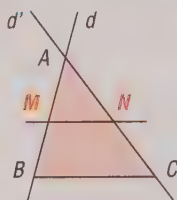
Tableaux de

proportionnalité, 119

Fonctions linéaires, 127

THÉORÈME
DE THALÈS

COMPRENDRE

3^e ● Qu'est-ce-que le théorème de Thalès ?

Soient deux droites d et d' sécantes en A , deux points B et M de d et deux points C et N de d' .

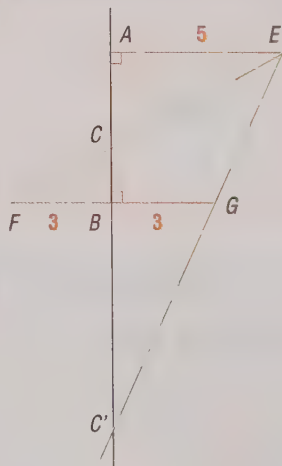
Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Les triangles AMN et ABC sont à côtés proportionnels.
(Voir fiche 74.)

OUVRIR
L'ŒIL

C'est par commodité que l'on a tracé (AE) et (FG) toutes deux perpendiculaires à (AB) [usage de l'équerre]. Il suffit qu'elles soient parallèles.

3^e ● Construire le point C de (AB) sachant que $\frac{CA}{CB} = \frac{5}{3}$.

- Sur la perpendiculaire en A à (AB) , on porte $[AE]$ de 5 cm et sur la perpendiculaire en B à (AB) , on porte $[BF]$ et $[BG]$ de 3 cm. (EF) et (EG) coupent (AB) respectivement en C et C' .
- $(AE) \parallel (FG)$; en appliquant le théorème de Thalès, aux triangles CAE et $C'BG$, on a :

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{AE}{BG} = \frac{5}{3}.$$

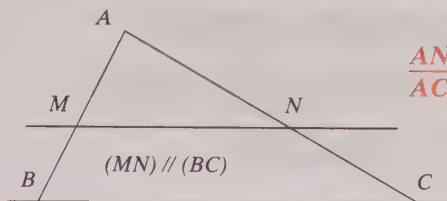
- De même, avec les triangles CAE et CBF , on a :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AE}{BF} = \frac{5}{3}.$$

Deux points répondent à la question : C sur $[AB]$ et C' sur le prolongement.

$$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{MN}{BC} = \frac{3}{5}$$

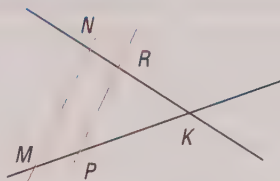


$$\frac{AN}{AC} = \frac{3}{5}$$

Thalès de Milet est le premier géomètre grec connu ; il serait né vers 640 avant J.-C.

UTILISER SES CONNAISSANCES

- 3^e ● Sur la figure ci-contre, dans laquelle on n'a pas respecté les dimensions, on a en réalité : $(MN) \parallel (PR)$, $KN = 44$ mm, $KR = 32$ mm, $KP = 40$ mm, Calculer KM .



On a le triangle KPR et la droite (MN) qui est parallèle à (PR) . On peut écrire d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{KM}{KP} = \frac{KN}{KR} \quad \text{ou} \quad \frac{KM}{40} = \frac{44}{32}$$

On en tire : $KM \times 32 = 40 \times 44 = 1\,760$. Donc : $KM = 1\,760 : 32 = 55$.

La longueur du segment $[KM]$ est 55 mm.

- 3^e ● Un pylône vertical est planté sur un terrain en pente. Un boulon est situé sur le pylône à 2 m du sol. L'ombre du pylône mesure 4,9 m et celle du boulon est à 0,7 m du pied du pylône. Calculer la hauteur du pylône.

On schématise : $[AC]$ est le pylône, B est le boulon. Les rayons du soleil sont parallèles. Donc (BB') et (AA') sont parallèles. On peut écrire d'après le théorème de Thalès dans le triangle CAA' :

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CB'}{CA'} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{CA} = \frac{0,7}{4,9}$$

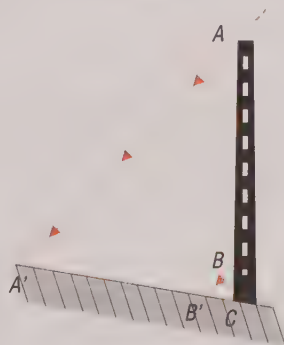
On en tire :

$$2 \times 4,9 = CA \times 0,7 \quad \text{ou} \quad CA \times 0,7 = 9,8$$

Donc :

$$CA = 9,8 : 0,7 = 14$$

La hauteur du pylône est 14 mètres.



Quand on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (\text{avec } b \neq 0 \text{ et } d \neq 0) ;$$

on a aussi :

$$a \times d = b \times c$$

C'est l'égalité des produits en croix (fiche 119).

VOIR AUSSI :

Triangles à côtés proportionnels, 74
Tableaux de proportionnalité, 119

RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS

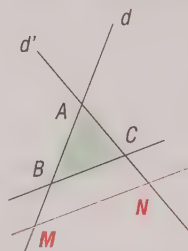
RECONNAÎTRE

3^e ● Réciproque du théorème de Thalès

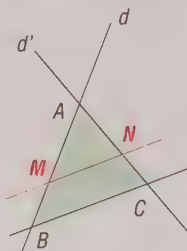
Soient deux droites d et d' sécantes en A , deux points B et M de d et deux points C et N de d' .

Si les points A, B, M et les points A, C, N sont dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

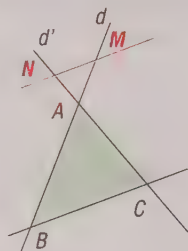
Trois cas de figures peuvent se présenter.



Sur d on a :
 A, B et M ;
sur d' on a :
 A, C et N .



Sur d on a :
 A, M et B ;
sur d' on a :
 A, N et C .



Sur d on a :
 M, A et B ;
sur d' on a :
 N, A et C .

OUVRIR L'ŒIL

Quand on pense que deux droites pourraient être parallèles et que cela pourrait se prouver à l'aide de la réciproque du théorème de Thalès alors il faut :

- s'assurer que les points à utiliser sont dans le même ordre ;
- calculer les deux quotients utiles.

Si les quotients sont égaux alors la réciproque s'applique et les droites sont parallèles. Si les quotients sont inégaux alors les droites ne sont pas parallèles.

3^e ● Porter son attention sur l'ordre des points

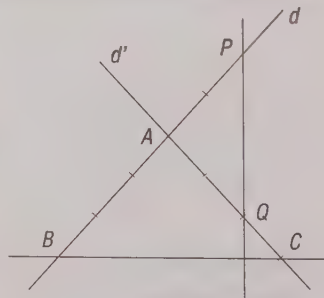
L'égalité de deux quotients ne suffit pas pour prouver que des droites sont parallèles. Par exemple sur la figure ci-contre, on a :

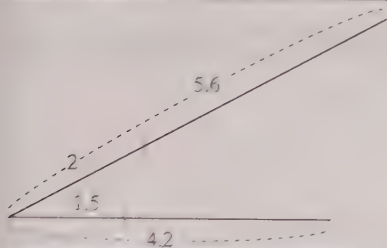
$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{2}{3}.$$

Et pourtant, les droites (PQ) et (BC) ne sont pas parallèles.

Les points A, B, P et A, C, Q ne sont pas dans le même ordre :

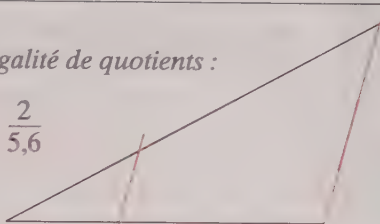
$P \notin [AB]$ et $Q \in [AC]$.





Une égalité de quotients :

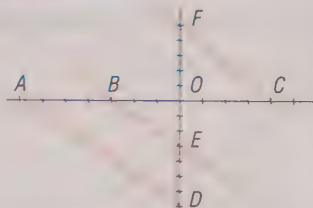
$$\frac{1,5}{4,2} = \frac{2}{5,6}$$



et une bonne disposition des points donnent des droites parallèles.

UTILISER SES CONNAISSANCES

- 3^e • En utilisant les graduations des droites (AC) et (EF), étudier le parallélisme des droites (BE) et (AD), puis celui des droites (FC) et (BE).



- Les points O, B, A et O, E, D sont dans le même ordre et comme :

$$\frac{OB}{OA} = \frac{3}{7} \quad \text{et} \quad \frac{OE}{OD} = \frac{3}{7}, \quad \text{on a} \quad \frac{OB}{OA} = \frac{OE}{OD}.$$

La réciproque du théorème de Thalès autorise à conclure : (BE) // (AD).

- Les points O, F, E et O, C, B sont dans le même ordre ; mais :

$$\frac{OF}{OE} = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad \frac{OC}{OB} = \frac{4}{3}. \quad \text{Par suite :} \quad \frac{OF}{OE} \neq \frac{OC}{OB}.$$

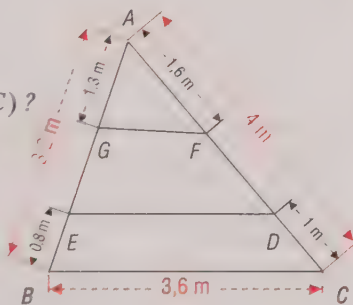
(FC) n'est pas parallèle à (BE).

- 3^e • a) Sur le plan ci-contre, les droites (GF) et (BC) sont-elles parallèles ?
b) Et les droites (ED) et (BC) ?

- a) Les points A, G, B et les points A, F, C sont dans le même ordre.

$$\frac{AG}{AB} = \frac{1,3}{3,2} = 0,40625$$

$$\frac{AF}{AC} = \frac{1,6}{4} = 0,4$$



Les droites (GF) et (BC) ne sont pas parallèles.

- b) Les points A, E, B et les points A, D, C sont dans le même ordre.
 $AE = 3,2 \text{ m} - 0,8 \text{ m} = 2,4 \text{ m}$; $AD = 4 \text{ m} - 1 \text{ m} = 3 \text{ m}$.

$$\frac{AE}{AB} = \frac{2,4}{3,2} = 0,75 ; \quad \frac{AD}{AC} = \frac{3}{4} = 0,75 ; \quad \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}.$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut dire que (ED) et (BC) sont parallèles.

VOIR AUSSI :

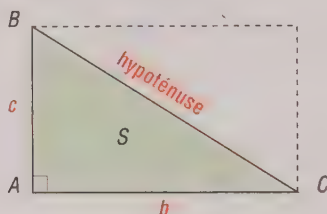
Théorème de Thalès, 71

TRIANGLE RECTANGLE

COMPRENDRE

6^e ● Définitions et premières propriétés

Triangle rectangle



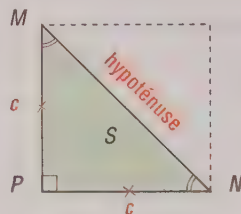
Un triangle dont l'un des angles est droit est un **triangle rectangle**.

C'est la *moitié d'un rectangle*.

$$S = (b \times c) : 2$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

Triangle rectangle isocèle



Un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont même longueur est un **triangle rectangle isocèle**. C'est la *moitié d'un carré*.

$$S = (c \times c) : 2$$

$$\hat{M} = \hat{N} = 45^\circ$$

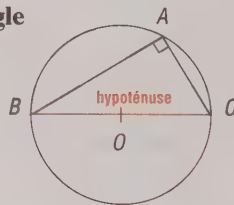


● Attention à l'orthographe du mot **hypoténuse**.

● $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont complémentaires ; $\hat{M}$ et $\hat{N}$ aussi. (Cf. Quelques paires d'angles, 56.)

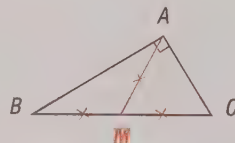
5^e 4^e ● Cercle circonscrit à un triangle rectangle

Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse de ce triangle.

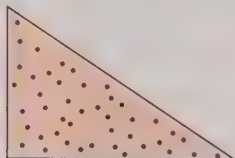
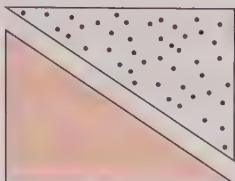
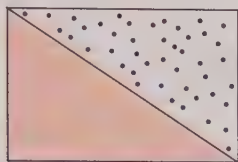
4^e ● Médiane relative à l'hypoténuse

ABC rectangle,

$$AM = \frac{1}{2} BC.$$



Si un triangle est rectangle, alors la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de l'hypoténuse.



Un triangle rectangle c'est la moitié d'un rectangle.

UTILISER SES CONNAISSANCES

6° ● Construire un triangle ABC rectangle en A et tel que :

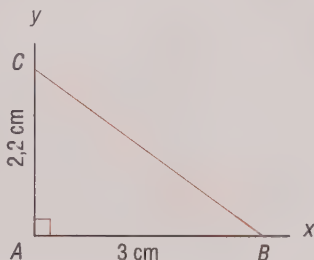
$$AB = 3 \text{ cm et } AC = 2,2 \text{ cm.}$$

Calculer son aire.

On construit un angle droit $\widehat{xAy}$ avec l'équerre, puis on place B et C l'un sur $[Ax]$ et l'autre sur $[Ay]$ tels que $AB = 3 \text{ cm}$ et $AC = 2,2 \text{ cm}$.

$$(3 \times 2,2) : 2 = 3,3.$$

L'aire de ABC est $3,3 \text{ cm}^2$.



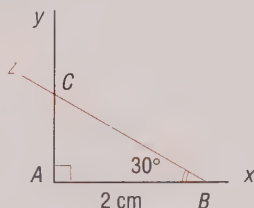
5° ● Construire un triangle ABC rectangle en A et tel que :

$$AB = 2 \text{ cm et } \widehat{B} = 30^\circ. \text{ Que vaut } \widehat{C} ?$$

On construit un angle droit $\widehat{xAy}$;
on place B sur $[Ax]$ tel que $AB = 2 \text{ cm}$.
On construit $\widehat{ABz}$ de 30° ; on obtient C .

Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires. Donc :

$$\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ ; \widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 90^\circ - 30^\circ ; \widehat{C} = 60^\circ.$$



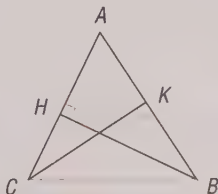
4° ● $[BH]$ et $[CK]$ sont deux hauteurs d'un triangle ABC .

Prouver que B, H, C et K sont sur un même cercle.

Le cercle circonscrit au triangle rectangle BHC a pour diamètre l'hypoténuse $[BC]$.

Le cercle circonscrit au triangle rectangle BKC a pour diamètre l'hypoténuse $[BC]$.

B, C, K et H sont sur le cercle de diamètre $[BC]$.



VOIR AUSSI :

Angles complémentaires, 56

Triangle isocèle, 63

Cercle circonscrit, 70

Médiane, 72

Rectangles, 83-84

Carrés, 87

THÉORÈME
DE PYTHAGORE

DISTANCE DE DEUX POINTS

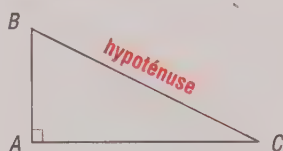
OUVRIR
L'ŒIL

Attention à l'orthographe
de *Pythagore*.

COMPRENDRE

4^e ● Théorème de Pythagore

On sait :

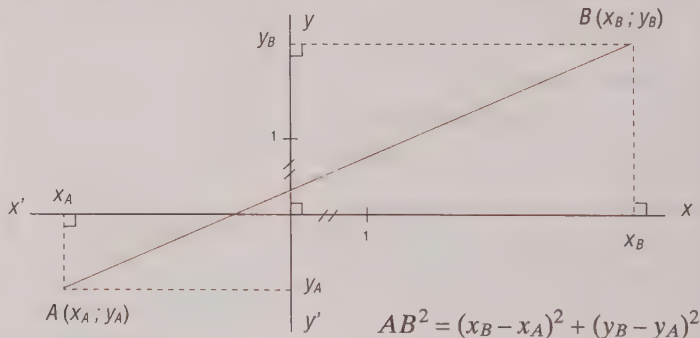


On peut affirmer :

$$BC^2 = \underbrace{AB^2 + AC^2}_{\substack{\text{somme} \\ \text{des carrés} \\ \text{des côtés} \\ \text{perpendiculaires}}}$$

carré de l'hypoténuse (le plus grand côté)

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés perpendiculaires.

3^e ● Distance de deux points dans un repère orthonormé

UTILISER SES CONNAISSANCES

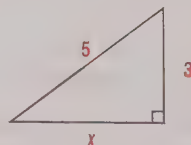
4^e ● Dans un triangle rectangle l'hypoténuse a 5 cm ; un des côtés perpendiculaires a 3 cm.

Quelle est la longueur de l'autre ?

D'après le théorème de Pythagore : $5^2 = 3^2 + x^2$.

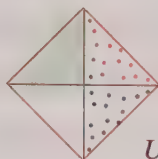
$$25 = 9 + x^2 ; x^2 = 16 ; x = 4.$$

Le troisième côté a une longueur de 4 cm.





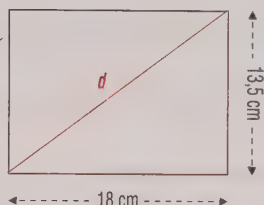
Deux carrés d'aire 1
et de diagonale $\sqrt{2}$.



Un carré d'aire 2
et de côté $\sqrt{2}$.

4^e ● Est-il possible de poser une fine baguette de 22 cm au fond d'une boîte rectangulaire de côtés 13,5 cm et 18 cm ?

Et si elle avait 23 cm de long ?



Il faut calculer la diagonale d . Appliquons le théorème de Pythagore :

$$d^2 = 13,5^2 + 18^2 = 506,25$$

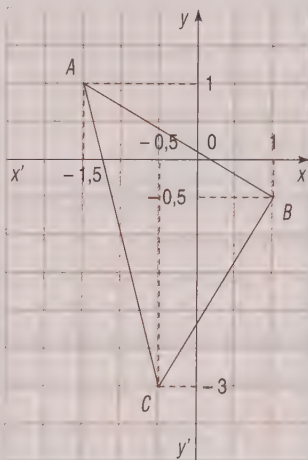
La séquence 506,25 ($\sqrt{x}$) amène à l'affichage 22,5 ; $d = 22,5$ cm.

On peut placer une baguette de 22 cm de long au fond de la boîte. Ce n'est pas possible pour une baguette de 23 cm.

3^e ● Dans un repère orthonormé (unité : le centimètre), on a trois points $A(-1,5; 1)$, $B(1; -0,5)$ et $C(-0,5; -3)$.

a) Calculer les distances AB , BC et CA .

b) Prouver que le triangle ABC est rectangle isocèle.



$$a) AB^2 = [1 - (-1,5)]^2 + [-0,5 - 1]^2$$

$$AB^2 = 6,25 + 2,25 = 8,5$$

$$AB = \sqrt{8,5} \text{ cm } (\approx 2,9 \text{ cm}).$$

$$BC^2 = [-0,5 - 1]^2 + [-3 - (-0,5)]^2$$

$$= 2,25 + 6,25 = 8,5.$$

$$BC = \sqrt{8,5} \text{ cm } (\approx 2,9 \text{ cm}).$$

$$CA^2 = [-1,5 - (-0,5)]^2 + [1 - (-3)]^2 = 1 + 16 = 17.$$

$$CA = \sqrt{17} \text{ cm } (\approx 4,1 \text{ cm}).$$

$$b) AB^2 + BC^2 = 8,5 + 8,5 = 17; AC^2 = 17; AB^2 + BC^2 = AC^2.$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore (fiche 79), le triangle ABC est rectangle en B .

$BA = BC = \sqrt{8,5}$; ABC est un triangle rectangle isocèle.



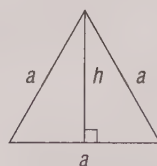
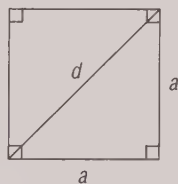
Les formules :

$$d = a\sqrt{2}$$

(diagonale du carré de côté a)
et

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

(hauteur du triangle équilatéral de côté a) gagnent à être connues.



VOIR AUSSI :

Triangle équilatéral, 66

Rectangles, 83-84

Carrés, 87

Racines carrées, 22-23

Repérage dans un plan, 25

Triangle rectangle, 77

Reconnaître un triangle rectangle, 79

RECONNAÎTRE UN TRIANGLE RECTANGLE

RECONNAÎTRE

6^e ● Par la définition

Un triangle qui a un angle droit est rectangle.

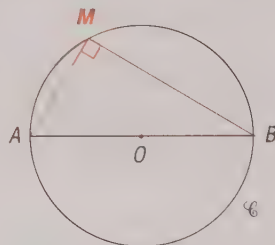
5^e ● Par deux angles

Un triangle qui a deux angles complémentaires est rectangle.

4^e ● Par une propriété du cercle

Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre, alors on obtient un triangle rectangle.

($\mathcal{C}$, cercle de diamètre $[AB]$;
 M point de $\mathcal{C}$;
 AMB rectangle en M .)



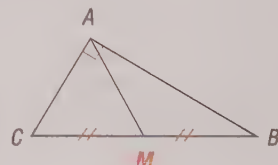
4^e ● Par la propriété d'une médiane

On sait : $AM = MB = MC$.

On peut affirmer :

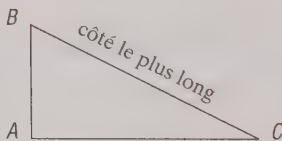
ABC rectangle en A .

Si, dans un triangle, une médiane est égale à la moitié du côté correspondant, alors ce triangle est rectangle.



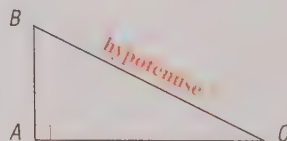
4^e ● Par la réciproque du théorème de Pythagore

On sait :



$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

On peut affirmer :



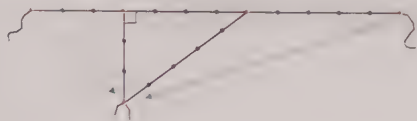
ABC rectangle en A .

Si dans un triangle, le carré du côté le plus long est égal à la somme des carrés des deux autres alors le triangle est rectangle.

OUVRIR L'ŒIL

Si le carré du côté le plus long est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle et le côté le plus long devient l'hypoténuse.

Si l'égalité n'a pas lieu alors le triangle n'est pas rectangle.



Une corde ayant 13 nœuds et 12 intervalles de même longueur permet de tracer des angles droits (fondations de constructions ; allées de jardin) ; la propriété de Pythagore permet de l'expliquer.

La corde à 13 nœuds et 12 intervalles.

UTILISER SES CONNAISSANCES

4^e • Construire un triangle ABC tel que $BC = 3,2$ cm, $AB = 2$ cm et $AC = 2,5$ cm. Est-il rectangle ? (avec l'œil, puis avec l'équerre). Vérifier par le calcul.

• Avec l'équerre, on voit le triangle ABC rectangle.

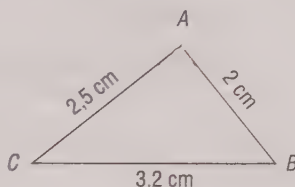
• Vérifions par le calcul :

$$BC^2 = 3,2^2 = 10,24 ;$$

$$AB^2 = 2^2 = 4 ;$$

$$AC^2 = 2,5^2 = 6,25 ; AB^2 + AC^2 = 10,25 .$$

Comme $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$, le triangle ABC n'est pas rectangle.



4^e • On sait que :

– A est un point du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[BC]$;

– $BC = 8$ cm ;

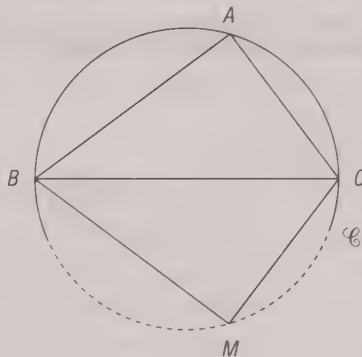
– $MB = 6,4$ cm ;

– $MC = 4,8$ cm .

Prouver que :

a) BAC est rectangle,

b) M appartient à $\mathcal{C}$.



a) Si on joint un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre alors on obtient un triangle rectangle.

Donc, le triangle ABC est rectangle en A .

$$b) BC^2 = 8^2 = 64 ; MC^2 = 4,8^2 = 23,04 ; MB^2 = 6,4^2 = 40,96 .$$

$$MB^2 + MC^2 = 40,96 + 23,04 = 64 . \text{ Donc } BC^2 = MB^2 + MC^2 .$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BMC est rectangle en M .

Le cercle circonscrit au triangle BMC a pour diamètre $[BC]$; c'est le cercle $\mathcal{C}$. M appartient à $\mathcal{C}$.

VOIR AUSSI :

Cercle circonscrit, 70

Médiane, 72

Triangle rectangle, 77

Théorème

de Pythagore, 78

TRIGONOMÉTRIE

COSINUS

COMPRENDRE

4^e ● Qu'est-ce que le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ?

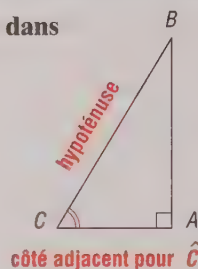
- Le cosinus de l'angle $\hat{C}$ se note $\cos \hat{C}$.

$$\cos \hat{C} = \frac{\text{côté adjacent pour } \hat{C}}{\text{hypoténuse}} = \frac{CA}{CB}$$

Le cosinus d'un angle aigu est un nombre compris entre 0 et 1.

- Deux variantes de la formule donnant $\cos \hat{C}$:

$$CA = CB \times \cos \hat{C} \quad \text{et} \quad CB = \frac{CA}{\cos \hat{C}}$$



UTILISER SA CALCULATRICE

4^e On prend ici l'exemple d'une TI-Galaxy 40.

- Touche $\boxed{\cos}$.

Calculer $\cos 25,2^\circ$.

25,2 $\boxed{\cos}$ donne $\boxed{0.904827052}$; $\cos 25,2^\circ \approx 0,905$.

- Touches $\boxed{2nd}$ $\boxed{\cos^{-1}}$.

Avec ces touches, en tapant un nombre compris entre 0 et 1, on trouve l'angle dont ce nombre est le cosinus.

On cherche $\hat{A}$ tel que $\cos \hat{A} = 0,8$.

Avec 0,8 $\boxed{2nd}$ $\boxed{\cos^{-1}}$, on a $\boxed{36.86989765}$, donc $\hat{A} \approx 36,9^\circ$.

UTILISER SES CONNAISSANCES

4^e ● Dans le triangle ABC on sait que :

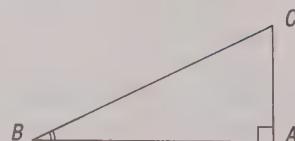
$$\hat{A} = 90^\circ ; BC = 7 \text{ cm} ; \cos \hat{B} = 0,9.$$

Calculer BA.

On sait que $BA = BC \times \cos \hat{B}$;

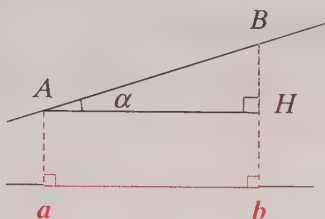
donc $BA = 7 \times 0,9 = 6,3$;

$BA = 6,3 \text{ cm}$.



OUVRIR L'ŒIL

Avant de commencer les calculs, il faut s'assurer que la calculatrice travaille en degrés décimaux.



$$ab = AH = AB \times \cos \alpha$$

4^e ● Dans un triangle EDF rectangle en D, on a :

$$DE = 6 \text{ cm} ; DF = 2,5 \text{ cm} .$$

a) Calculer EF .

b) Donner l'arrondi au millième le plus proche de $\cos \hat{E}$;
Donner l'arrondi au dixième de degré le plus proche de $\hat{E}$.

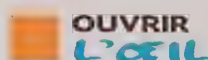
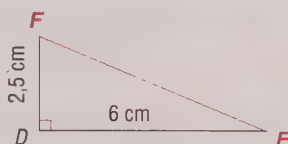
a) On applique le théorème de Pythagore au triangle EDF .

$$EF^2 = DE^2 + DF^2 = 36 + 6,25 = 42,25 ;$$

$$EF = \sqrt{42,25} \text{ cm} = 6,5 \text{ cm} .$$

$$b) \cos \hat{E} = \frac{\text{côté adjacent pour } \hat{E}}{\text{hypoténuse}} = \frac{ED}{EF} = \frac{6}{6,5} ; \cos \hat{E} \approx 0,923 .$$

Pour calculer $\hat{E}$, on utilise la séquence : 6 $\div$ 6,5 $=$ 2 nd $\cos^{-1}$;
elle donne 22.61986495 ; $\hat{E} \approx 22,6^\circ$.



Pour calculer l'angle $\hat{E}$ avec une calculatrice, on ne prend pas la valeur approchée de $\cos \hat{E}$ mais sa **valeur exacte** (un quotient le cas échéant).

4^e ● Sur la figure ci-contre, on a :

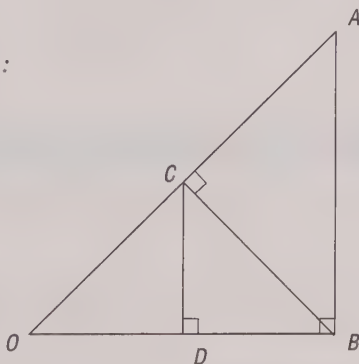
– OA = 5 cm ;

– OB = 4 cm .

a) Calculer $\cos \hat{O}$.

b) Calculer OC, puis OD .

a) Le triangle OBA est rectangle en B . Donc :



$$\cos \hat{O} = \frac{\text{côté adjacent pour } \hat{O}}{\text{hypoténuse}} = \frac{OB}{OA} = \frac{4}{5} = 0,8 .$$

b) Dans le triangle OBC rectangle en C, on a :

$$OC = OB \times \cos \hat{O} = 4 \times 0,8 = 3,2 ; \text{ donc } OC = 3,2 \text{ cm} .$$

Dans le triangle ODC rectangle en D, on a :

$$OD = OC \times \cos \hat{O} = 3,2 \times 0,8 = 2,56 ; \text{ donc } OD \approx 2,6 \text{ cm} .$$

VOIR AUSSI :

Triangle rectangle, 77

Théorème

de Pythagore, 78

Racines carrées, 22

TRIGONOMÉTRIE

COSINUS - SINUS - TANGENTE

OUVRIR L'ŒIL

● Le sinus d'un angle aigu est un nombre compris entre 0 et 1.

● La tangente d'un angle aigu est un nombre positif quelconque.

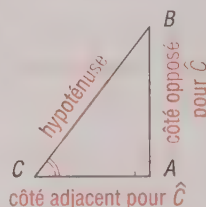
● $\sin^2 \hat{C}$ se lit « sinus carré $\hat{C}$ » et est égal à $\sin \hat{C} \times \sin \hat{C}$.
● $\cos^2 \hat{C}$ se lit « cosinus carré $\hat{C}$ » et est égal à $\cos \hat{C} \times \cos \hat{C}$.

COMPRENDRE

3^e ● Qu'est-ce que le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ?

Le sinus de l'angle $\hat{C}$ se note $\sin \hat{C}$.

$$\sin \hat{C} = \frac{\text{côté opposé pour } \hat{C}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BA}{BC}$$



3^e ● Qu'est-ce que la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle ?

La tangente de l'angle $\hat{C}$ se note $\tan \hat{C}$.

$$\tan \hat{C} = \frac{\text{côté opposé pour } \hat{C}}{\text{côté adjacent pour } \hat{C}} = \frac{AB}{AC}$$

3^e ● Relations trigonométriques

$$\tan \hat{C} = \frac{\sin \hat{C}}{\cos \hat{C}} \quad \text{et} \quad \sin^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{C} = 1.$$

UTILISER SA CALCULATRICE

3^e Les calculs sont effectués avec une TI-Galaxy 40.

● Touches $\boxed{\sin}$ et $\boxed{\tan}$.

Calculer $\sin 25,2^\circ$ et $\tan 25,2^\circ$.

25,2 $\boxed{\sin}$ donne $\boxed{0.425779292}$; $\sin 25,2^\circ \approx 0,426$;

25,2 $\boxed{\tan}$ donne $\boxed{0.470564281}$; $\tan 25,2^\circ \approx 0,471$.

● Touches $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\tan^{-1}}$ et $\boxed{2nd}$.

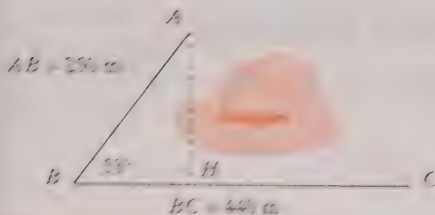
– Étant donné un nombre compris entre 0 et 1, en utilisant $\boxed{2nd} \boxed{\sin^{-1}}$, on trouve l'angle dont ce nombre est le sinus.

$\sin \hat{A} = 0,8$; avec 0,8 $\boxed{2nd} \boxed{\sin^{-1}}$, on obtient : $\hat{A} \approx 53,1^\circ$.

– Étant donné un nombre positif quelconque, en utilisant

$\boxed{2nd} \boxed{\tan^{-1}}$, on trouve l'angle dont ce nombre est la tangente.

$\tan \hat{B} = 3$; avec 3 $\boxed{2nd} \boxed{\tan^{-1}}$, on obtient : $\hat{B} \approx 71,6^\circ$.



On connaît deux distances et un angle.
Grâce à la trigonométrie on sait calculer la distance entre A et C.

$$\begin{aligned} AH &= AB \times \sin 53^\circ ; \quad BH = AB \times \cos 53^\circ ; \\ AH &\approx 200 \text{ m} ; \quad BH \approx 150 \text{ m} ; \quad HC \approx 290 \text{ m} . \\ AC^2 &= HA^2 + HC^2 ; \quad AC \approx 352 \text{ m} . \end{aligned}$$

UTILISER SES CONNAISSANCES

3° • Dans un triangle ABC rectangle en A, soit H le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse.

a) Dans le triangle ABC calculer $\tan \hat{B}$ et $\tan \hat{C}$ en fonction des côtés ; que vaut leur produit ?

b) Calculer $\tan \hat{B}$ dans le triangle AHB et $\tan \hat{C}$ dans le triangle AHC. En utilisant le produit $\tan \hat{B} \times \tan \hat{C}$, prouver que :

$$AH^2 = HB \times HC .$$

a) Dans ABC rectangle en A, on a :

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{AB}{AC}$$



$$\text{Donc } \tan \hat{B} \times \tan \hat{C} = \frac{AC}{AB} \times \frac{AB}{AC} = \frac{AC \times AB}{AB \times AC} = 1 .$$

$$\text{b) Dans AHB on a } \tan \hat{B} = \frac{AH}{HB} \quad ; \quad \text{dans AHC on a } \tan \hat{C} = \frac{AH}{HC} .$$

$$\text{Comme } \tan \hat{B} \times \tan \hat{C} = 1 \quad \text{donc} \quad \frac{AH}{HB} \times \frac{AH}{HC} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{AH^2}{HB \times HC} = 1 .$$

$$\text{Il en résulte : } AH^2 = HB \times HC .$$

3° • On sait que $\cos x = 0,7$.

a) Calculer x (arrondi au degré le plus proche).

b) Calculer $\sin x$, puis $\tan x$ (valeurs exactes, puis arrondies au millième le plus proche).

$$\text{a) } 0,7 \quad \left(\cos \right) \quad \left(\cos^{-1} \right) \quad \text{donne } x \text{, soit } x \approx 46^\circ .$$

$$\text{b) } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - 0,49 = 0,51 \quad ; \quad \sin x \text{ est positif.}$$

$$\text{Donc } \sin x = \sqrt{0,51} \text{, soit } \sin x \approx 0,714 .$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{0,51}}{0,7} = \frac{\sqrt{0,51}}{\sqrt{0,49}} = \sqrt{\frac{0,51}{0,49}} = \sqrt{\frac{51}{49}} \text{, soit } \tan x \approx 1,020 .$$

VOIR AUSSI :

Cosinus, 80

Racines carrées, 11-21

QUADRILATÈRES CONVEXES



OUVRIR L'ŒIL

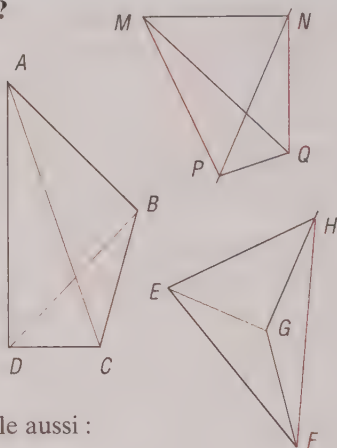
Le mot *côté* peut désigner une droite, un segment ou sa longueur.

COMPRENDRE

6^e ● Qu'est-ce qu'un quadrilatère ?

Un quadrilatère possède :

- 4 sommets,
- 4 côtés (en noir),
- 2 diagonales (en rouge).



6^e ● Comment nommer un quadrilatère ?

Pour nommer un quadrilatère, on lit les sommets, à partir de l'un d'eux, dans l'ordre où on les rencontre en suivant les côtés.

Le quadrilatère $ABCD$ s'appelle aussi : $BCDA$, $CDAB$, ..., $ADCB$, ...

6^e ● Qu'est-ce qu'un quadrilatère convexe ?

Pour $ABCD$, on peut dire que, pour chacun de ses côtés, il est tout entier d'un même côté de la droite support de ce côté ; on dit que $ABCD$ est un quadrilatère convexe ; ce n'est pas vrai pour $MNPQ$ et $EFGH$ qui ne sont pas des quadrilatères convexes. Cela se voit sur les figures.

6^e ● Sommets, côtés, angles opposés ou consécutifs

Les extrémités d'un côté sont des *sommets consécutifs*.

Les extrémités d'une diagonale sont des *sommets opposés*.

On a des *côtés consécutifs* :

$[AB]$ et $[BC]$, $[BC]$ et $[CD]$, ...

et des *côtés opposés* :

$[AB]$ et $[DC]$, $[AD]$ et $[BC]$.

On a des *angles consécutifs* :

$\hat{A}$ et $\hat{B}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$, ...

et des *angles opposés* :

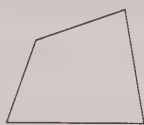
$\hat{A}$ et $\hat{C}$, $\hat{B}$ et $\hat{D}$.



La somme des angles d'un quadrilatère convexe est 360° .

Quadrilatère :

ce mot d'origine latine est composé de « quadri » (quatre) et de « latère » (côté).



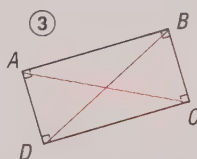
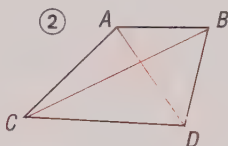
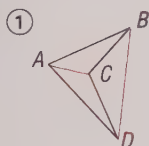
Convexe



Non convexe

UTILISER SES CONNAISSANCES

- 6^e ● On demande à trois élèves de dessiner un quadrilatère convexe $ABCD$, puis de tracer les diagonales en rouge. Voici les trois dessins : sont-ils exacts ?



- ① Faux. $ABCD$ n'est pas convexe.
 ② Faux. Le dessin est celui d'un quadrilatère convexe mais les sommets sont mal placés ; il suffira d'échanger D et C pour que le schéma soit correct.
 ③ Exact mais on a ajouté des conditions qui ne figurent pas dans l'énoncé (quatre angles droits) ; cela peut être dangereux dans un problème.

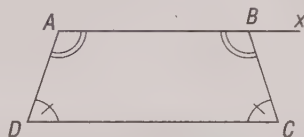
- 5^e ● Dans un quadrilatère convexe $ABCD$, on a $\hat{A} = \hat{B}$ et $\hat{C} = \hat{D}$. Que peut-on dire de $\hat{B} + \hat{C}$ et des droites (AB) et (DC) ?

- $ABCD$ étant convexe, on a :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ.$$

Dans cette égalité, on remplace :

$$\hat{A} \text{ par } \hat{B} \text{ et } \hat{D} \text{ par } \hat{C}.$$



On obtient $\hat{B} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{C} = 360^\circ$ ou $(\hat{B} + \hat{C}) + (\hat{B} + \hat{C}) = 360^\circ$. Donc :
 $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

- On en déduit $\hat{C} = 180^\circ - \hat{B}$.

De plus, $\widehat{CBx} = 180^\circ - \hat{B}$. Il en résulte :

$$\hat{C} = \widehat{CBx}.$$

Les angles égaux $\hat{C}$ et $\widehat{CBx}$ occupent la position d'angles alternes-internes pour les deux droites (AB) et (DC) coupées par la droite (BC) .

Donc $(AB) \parallel (DC)$; $ABCD$ est un trapèze.

VOIR AUSSI :

Reconnaître

le parallélisme, 59

Parallélogrammes, 90-94

RECTANGLES

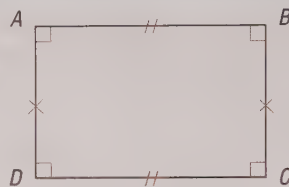
ANGLES - CÔTÉS

DIAGONALES

COMPRENDRE

6^e ● Angles et côtés du rectangle

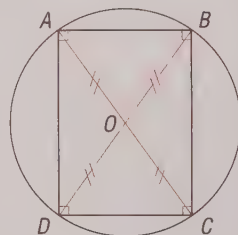
Un rectangle a quatre angles droits.
Les côtés opposés sont deux à deux parallèles et de même longueur.
 $(AB) \parallel (DC)$ et $AB = DC$;
 $(AD) \parallel (BC)$ et $AD = BC$.



6^e ● Diagonales du rectangle

• Les diagonales ont même longueur et se coupent en leur milieu.
 $AC = BD$.
 $OA = OB = OC = OD$.

• Le cercle de centre O et de rayon OA passe par A , B , C , et D ;
il est *circonscrit* au rectangle $ABCD$.



RECONNAÎTRE

6^e ● Comment reconnaître un rectangle par ses angles ?

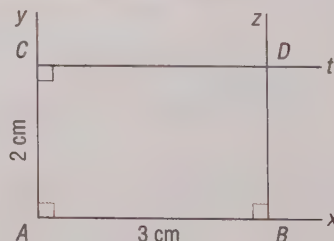
Un quadrilatère qui a **trois angles droits** est un rectangle.
(Il en résulte que le quatrième angle est droit.)

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Construire un rectangle de dimensions 2 cm et 3 cm.

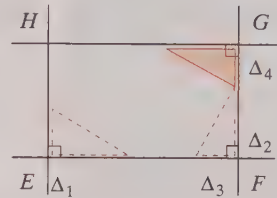
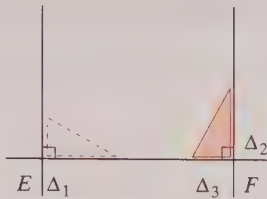
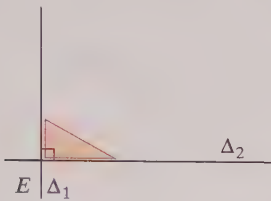
Dans l'ordre, on a :
– construit l'angle droit $\widehat{xAy}$;
– placé B et C ;
– construit les angles droits $\widehat{ABz}$
et $\widehat{ACt}$ pour avoir D .

$ABDC$ a trois angles droits. C'est un rectangle de dimensions 2 cm et 3 cm.

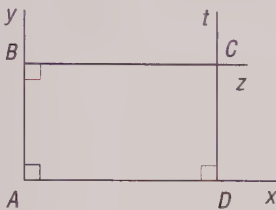


OUVRIR L'ŒIL

« Un rectangle de dimensions a et b » indique que deux côtés opposés ont pour longueur a et les deux autres ont pour longueur b .



- 6° Compléter, après l'avoir reproduite, la figure ci-contre, pour avoir un rectangle $ABCD$.



On construit l'angle droit $\widehat{xAy}$; on place B et D , puis on construit $[Bz$ et $[Dt$ pour avoir C .

Les angles droits sont construits avec l'équerre; $ABCD$ a trois angles droits; par définition, c'est un rectangle.

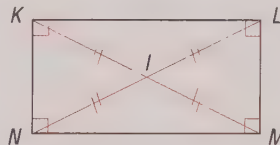
- 6° Dessiner un rectangle $KLMN$, puis ses diagonales qui se coupent en I . Nommer les triangles rectangles et les triangles isocèles de la figure.

$KLMN$ est un rectangle;

$$\widehat{K} = \widehat{L} = \widehat{M} = \widehat{N} = 90^\circ.$$

Les triangles rectangles sont:

NKL ; KLM ; LMN et MNK .



Les diagonales ont même longueur et se coupent en leur milieu; donc on a:

$$IK = IL = IM = IN;$$

d'où les triangles isocèles: KIL , LIM , MIN et NIK .

- 6° La figure ci-contre a été construite avec l'équerre.

Justifier: il y a trois rectangles et $AF = BE = CD$.

$ABEF$ a trois angles droits; par définition, c'est un rectangle.

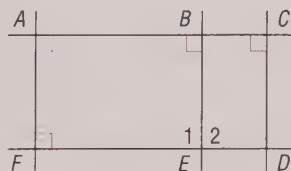
Il en résulte: $\widehat{E}_1 = 90^\circ$ et $BE = AF$.

$ACDF$ a trois angles droits; c'est un rectangle. D'où $\widehat{D} = 90^\circ$; $CD = AF$.

Les angles de sommet E sont tous droits; $\widehat{E}_2 = 90^\circ$.

$\widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E}_2 = 90^\circ$; $BCDE$ est un rectangle.

De $BE = AF$ et $CD = AF$, on tire $BE = AF = CD$.



VOIR AUSSI:

Règle graduée, longueur, 49

Équerre, 51

Triangle isocèle, 65

Triangle rectangle, 77

Quadrilatères, 82

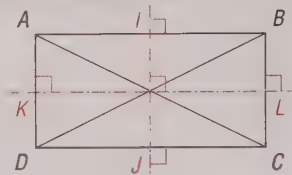
RECTANGLES

AXES DE SYMÉTRIE - AIRE

COMPRENDRE

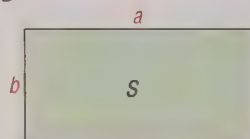
6^e ● Quels sont les axes de symétrie du rectangle ?

- La droite (IJ) passant par les milieux des côtés opposés $[AB]$ et $[CD]$ est un **axe de symétrie**. De même pour (KL) .



- Chaque axe est médiatrice de deux côtés opposés.

- Les deux axes sont perpendiculaires et se coupent au même point que les diagonales.

6^e ● Comment calculer le périmètre et l'aire du rectangle ? a et b sont les dimensions du rectangle.– Demi-périmètre : $a + b$.– Périmètre : $(a + b) \times 2$.– Aire : $S = a \times b$.OUVRIR
L'ŒIL

Veiller à la correspondance

entre les unités :

– longueurs en cm,

aire en cm^2 ;

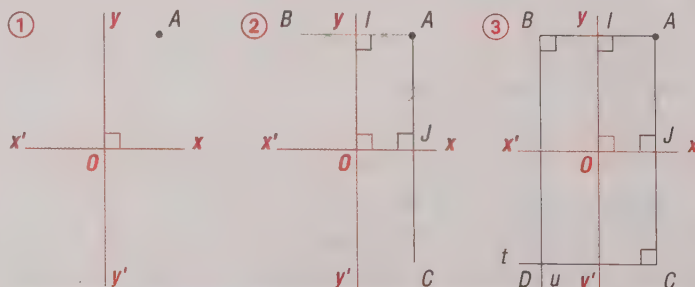
– longueurs en m,

aire en m^2 ; ...

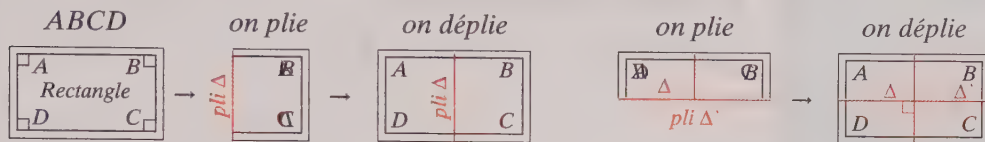
UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Tracer deux droites xx' et yy' perpendiculaires en O .Placer un point A dans l'angle $\widehat{xOy}$ et construire le rectangle ayant un sommet en A et pour axes de symétrie les droites xx' et yy' .

Voici la construction en trois temps :



On dessine sur un calque le rectangle



On vérifie que les plis Δ et Δ' (axes de symétrie) sont les médiatrices des côtés du rectangle.

- 1^{er} temps : on trace xx' et yy' .
 - 2^e temps : $AJOI$ est un rectangle car il a trois angles droits ; il en résulte que $\hat{A}$ est droit.
 - 3^e temps : $ABDC$ est un rectangle car il a trois angles droits (les angles $\hat{B}$, $\hat{A}$ et $\hat{C}$).
- xx' , médiatrice de $[AC]$, est un axe de symétrie.
 yy' , médiatrice de $[AB]$, est un axe de symétrie.

6^e ● Un terrain rectangulaire a pour dimensions 15 m et 45 m.

- Quel est son périmètre ?
- Quelle est son aire ?

- Demi-périmètre : $15 \text{ m} + 45 \text{ m} = 60 \text{ m}$.
Périmètre : $60 \text{ m} \times 2 = 120 \text{ m}$.
- Aire : $(15 \times 45) \text{ m}^2 = 675 \text{ m}^2$.

6^e ● Un rectangle a une aire de 434 m^2 et une de ses dimensions est 35 m. Quelle est l'autre dimension ?

Désignons par la lettre x la dimension inconnue.

On a : $35 \times x = 434$. Donc : $x = 434 : 35 = 12,4$.

L'autre dimension du rectangle est 12,4 m.

(Cf. La division dans les problèmes. fiche 12.)

6^e ● Convertir en m^2 : $290\,543 \text{ dm}^2$, $4\,078 \text{ cm}^2$ et $13,7 \text{ dam}^2$.

Les unités d'aire vont de 100 en 100 ; il faut prévoir deux colonnes pour chaque unité.

dam^2	m^2	dm^2	cm^2
2	9	0	5
		0	
1	3	7	0

$290\,543 \text{ dm}^2 = 2\,905,43 \text{ m}^2$;
 $4\,078 \text{ cm}^2 = 0,4078 \text{ m}^2$;
 $13,7 \text{ dam}^2 = 1\,370 \text{ m}^2$.



● Lorsque l'on effectue une conversion d'unités, il est préférable de placer d'abord le chiffre qui sert de repère dans la bonne colonne.

● Dans le cas du dernier exercice ci-contre, on place d'abord le 3, dans la partie droite de la colonne dm^2 , pour $290\,543 \text{ dm}^2$, le 8 pour $4\,078 \text{ cm}^2$, le 3 pour $13,7 \text{ dam}^2$. Si besoin est, on complète avec des zéros et on met la virgule.

VOIR AUSSI :

Équerre, 52

Médiatrice, 61

Rectangles, 83

Axes de symétrie, 95

Unités, p. 282-283

LOSANGES

CÔTÉS - ANGLES

OUVRIR L'ŒIL

L'utilisation de $//$
est limitée au langage
mathématique :

– « $(AB) // (CD)$ »

est correct ;

– « les droites (AB) et (CD)
sont $//$ » ne l'est pas.

COMPRENDRE

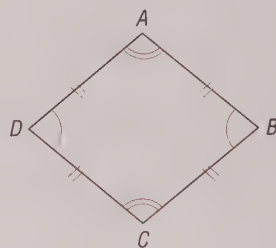
6^e ● Qu'est-ce qu'un losange ?

5^e Un losange a quatre côtés de même longueur : $AB = BC = CD = DA$.

Les côtés opposés sont parallèles :
 $(AB) // (DC)$ et $(AD) // (BC)$.

Les angles opposés sont égaux :

$$\hat{A} = \hat{C} \text{ et } \hat{B} = \hat{D}.$$



RECONNAÎTRE

6^e ● Comment reconnaître un losange par les côtés ?

Un quadrilatère qui a ses côtés de même longueur est un losange.

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Construire un rectangle de dimensions 1,5 cm et 2,5 cm.

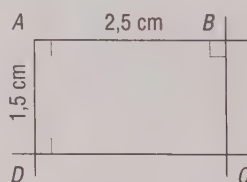
Construire un losange de même périmètre.

• La construction a été faite dans le premier exercice de la fiche 83. $ABCD$ a trois angles droits ; c'est bien un rectangle.

$BC = AD = 1,5$ cm ; $DC = AB = 2,5$ cm.

Demi-périmètre : $1,5$ cm + $2,5$ cm = 4 cm ;

périmètre : 4 cm $\times 2 = 8$ cm.



• Dans un losange, les quatre côtés ont même longueur.

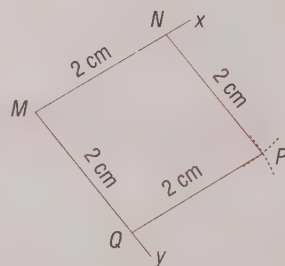
La longueur est ici (8 cm : 4) ou 2 cm.

On a construit dans l'ordre :

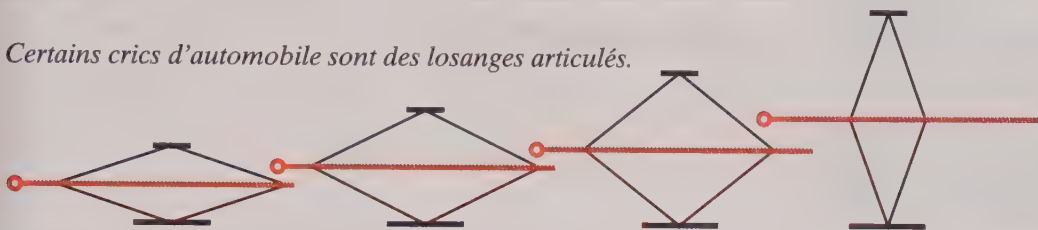
– un angle $\widehat{xMy}$ quelconque ;

– les points N et Q à 2 cm de M ;

– le point P à 2 cm de N et à 2 cm de Q
(cf. Compas, 50, dernier exercice).



Certains crics d'automobile sont des losanges articulés.

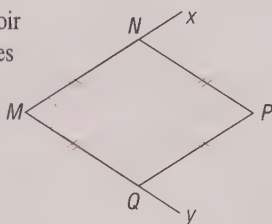


6^e • Construire un losange $MNPQ$ sachant que ses côtés ont 3 cm de longueur et que l'angle $\hat{M}$ est égal à 65° .

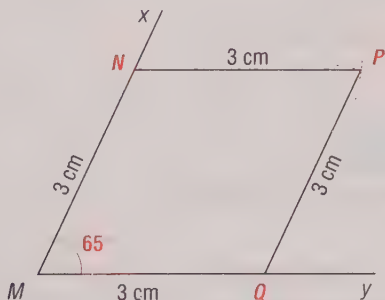
• Recherche préparatoire

On fait un croquis à main levée afin de mieux voir ce qui est demandé. On voit apparaître les étapes du programme de construction :

- construire $\widehat{xMy}$ de 65° et placer N et Q tels que $MN = MQ = 3$ cm ;
 - construire P à 3 cm de N et à 3 cm de Q .
- (Cf. Compas, 50.)



• Mise en œuvre



6^e • La figure ci-contre est constituée de deux triangles équilatéraux accolés par le côté $[BC]$.

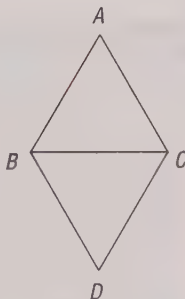
Prouver que $ABDC$ est un losange.

BAC est équilatéral. Donc : $AB = AC = BC$.

BDC est équilatéral. Donc : $BC = DC = DB$.

Il en résulte : $AB = AC = DC = DB$.

Le quadrilatère $ABDC$ a ses quatre côtés de même longueur ; c'est, par définition, un losange.



VOIR AUSSI :

Compas, 50

Équerre, 52

Rapporteur, 54

Triangle isocèle, 65

Triangle équilatéral, 66

Quadrilatères, 82

LOSANGES

DIAGONALES

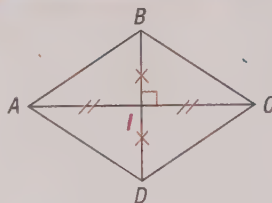
AXES DE SYMÉTRIE

**OUVRIR
L'ŒIL**

Le mot *diagonale* peut désigner :

- une droite,
- une demi-droite,
- un segment,
- une longueur.

C'est le contexte qui le précise.

COMPRENDRE
6^e • Diagonales


Les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu :

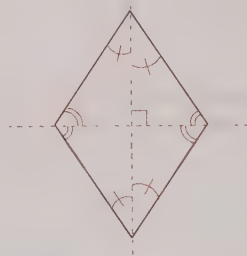
$$(AC) \perp (BD)$$

$$IA = IC \text{ et } IB = ID.$$

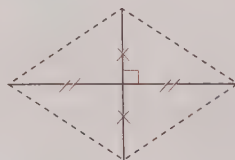
Chaque diagonale est médiatrice de l'autre.

6^e • Axes de symétrie

- Les diagonales sont les axes de symétrie du losange.
- Les diagonales sont bissectrices des angles.


RECONNAÎTRE
6^e • Comment reconnaître un losange par les diagonales ?

Les extrémités de **deux segments perpendiculaires se coupant en leur milieu** sont les sommets d'un losange.


UTILISER SES CONNAISSANCES
6^e • On a, ci-dessous, un losange et ses diagonales.

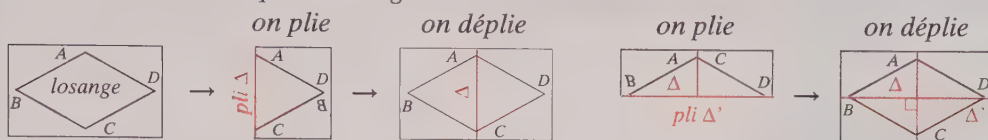
Nommer tous les triangles rectangles et tous les triangles isocèles de la figure.

- Triangles rectangles : LIK , KIN , NIM et MIL car les diagonales sont perpendiculaires.

- Triangles isocèles : LKN et LMN , KLM et KNM car les côtés ont même longueur.



On dessine sur un calque le losange $ABCD$



On vérifie que les plis Δ et Δ' (axes de symétrie) sont aussi les diagonales, qui sont médiatrices l'une de l'autre.

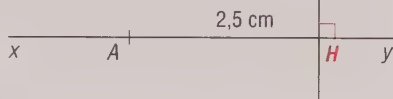
6^e ● Reproduire la figure ci-contre en vraie grandeur.

Construire le losange ayant :

un sommet en A ,

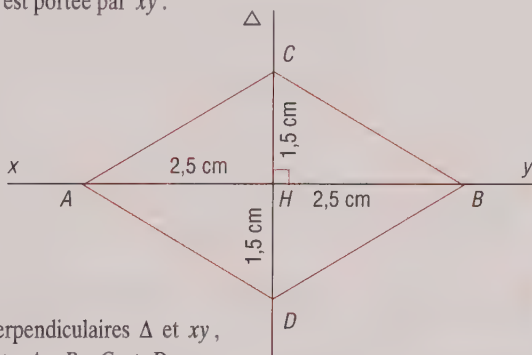
une diagonale de 3 cm

et Δ pour axe de symétrie.



La diagonale de 3 cm est portée par la droite Δ et a pour milieu H .

L'autre diagonale est portée par xy .



On a construit

les deux droites perpendiculaires Δ et xy ,
puis placé les points A , B , C et D .

Les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu ; $ACBD$ est le losange demandé.

6^e ● Les diagonales d'un losange ont pour longueurs 4 cm et 6 cm.
Quelle est son aire ?

• $AC = 4$ cm ; donc $HA = 2$ cm.

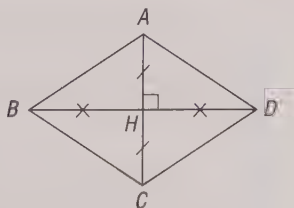
$BD = 6$ cm ; donc $HB = 3$ cm.

Le losange est composé de quatre triangles rectangles superposables ;

les côtés de l'angle droit de ces triangles ont

pour longueurs 2 cm et 3 cm. $(2 \times 3) : 2 = 3$;

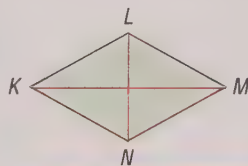
chaque triangle a une aire de 3 cm^2 et l'aire du losange est 12 cm^2 .



$KM = D$; $LN = d$.

S désigne l'aire du losange.

$S = (D \times d) : 2$.



VOIR AUSSI :

Bissectrice, 60

Médiatrice, 61

Triangle isocèle, 65

Triangle rectangle, 77

Axes de symétrie, 95

Losanges, 85

CARRÉS

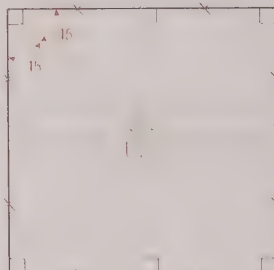
COMPRENDRE

6^e • Quelles sont les propriétés du carré ?

Le carré est à la fois un **rectangle** et un **losange** ; il a les propriétés de chacun d'eux. On repère d'un **L** les propriétés du losange et d'un **R** celles du rectangle.

- Côtés opposés parallèles ... **L R**
- Côtés de même longueur .. **L**
- Angles droits **R**
- Les diagonales :
 - ont même longueur **R**
 - sont perpendiculaires **L**
 - ont même milieu **L R**
 - chacune est médiatrice de l'autre **L**
- Quatre axes de symétrie :
 - les diagonales **L**
 - les médiatrices des côtés opposés **R**
- Les diagonales sont bissectrices des angles (Chaque moitié vaut donc 45°.) **L**
- Périmètre P et aire S d'un carré de côté c :

$$P = c \times 4; \quad S = c \times c.$$



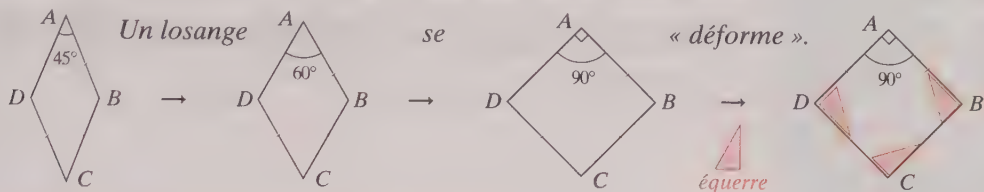
OUVRIR
L'ŒIL

$C \times C$ s'écrit aussi C^2
et se lit c au carré.

RECONNAÎTRE

6^e • Comment reconnaît-on le carré ?

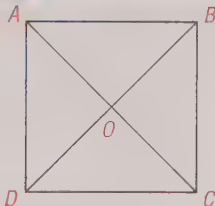
- C'est un **rectangle** particulier :
 - un rectangle qui a deux côtés consécutifs de même longueur est un carré ;
 - un rectangle qui a ses diagonales perpendiculaires est un carré.
- C'est un **losange** particulier :
 - un losange qui a un angle droit est un carré.
 - un losange qui a ses diagonales de même longueur est un carré.



Lorsqu'un losange a un angle droit, tous les autres sont droits : c'est un carré !

UTILISER SES CONNAISSANCES

- 6^e ● La figure ci-contre représente un carré et ses deux diagonales. Jean affirme : « Les diagonales d'un carré le partagent en quatre triangles rectangles isocèles. » Justifier cette affirmation.



$ABCD$ est un rectangle ; alors $OA = OC = OB = OD$.

Donc, les quatre triangles de sommet O sont isocèles.

$ABCD$ est un losange ; par conséquent, $(AC) \perp (BD)$.

Donc, les quatre triangles de sommet O sont rectangles.

AOB , BOC , COD et DOA sont rectangles isocèles.

- 6^e ● Construire un carré de 2,2 cm de côté. Quel est son périmètre ? Quelle est son aire ?

Voir la figure ci-contre.

$ABDC$ a trois angles droits ; c'est un rectangle (cf. Rectangle, 83).

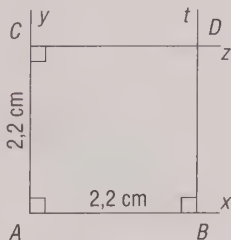
Ce rectangle a deux côtés consécutifs de même longueur :

$$AB = AC = 2,2 \text{ cm}.$$

C'est un carré.

– Périmètre : $2,2 \text{ cm} \times 4 = 8,8 \text{ cm}$.

– Aire : $(2,2 \times 2,2) \text{ cm}^2$ ou $4,84 \text{ cm}^2$.



- 6^e ● Un jardin carré a un périmètre de 140 m. Quelle est son aire ?

Si c est la mesure du côté en mètre, on a :

$$c \times 4 = 140 \text{ ou } c = 140 : 4 = 35. \text{ (cf. Fiche 12)}$$

Le côté du carré est égal à 35 m.

L'aire du jardin est : $(35 \times 35) \text{ m}^2$ ou $1\,225 \text{ m}^2$.

VOIR AUSSI :

Quadrilatères, 82

Rectangles, 83-84

Losanges, 85-86

PARALLÉLOGRAMMES

CÔTÉS - ANGLES - AIRE

COMPRENDRE

5^e ● Propriétés des côtés et des angles

• Les côtés opposés sont parallèles :
 $(AB) \parallel (DC)$ et $(AD) \parallel (BC)$.

• Les côtés opposés ont même longueur :

$$AB = DC \text{ et } AD = BC.$$

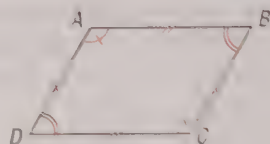
• Les angles opposés sont égaux :

$$\hat{A} = \hat{C} \text{ et } \hat{B} = \hat{D}.$$

• Les angles consécutifs sont supplémentaires :

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ ; \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ ;$$

$$\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ ; \hat{D} + \hat{A} = 180^\circ .$$



OUVRIR L'ŒIL

Lors des calculs d'aire,
il faut veiller
à la correspondance
entre les unités.

5^e ● Aire du parallélogramme

• Tous les segments
perpendiculaires à deux droites
parallèles ont la même
longueur.



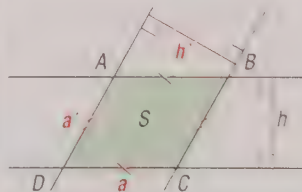
• Cela permet de parler de **hauteur associée à un côté** :

– h est la hauteur associée
aux côtés de longueur a .

– h' est la hauteur associée
aux côtés de longueur a' .

Si S désigne l'aire du
parallélogramme :

$$S = a \times h = a' \times h'.$$



RECONNAÎTRE

5^e ● Comment reconnaître un parallélogramme ?

On peut utiliser :

– **les côtés** car, par définition : « Un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles est un parallélogramme » ;

– **les angles**, et cela ramène au parallélisme.

(Cf. Parallélisme, 59.)

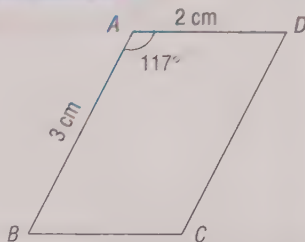


Un pantographe, parallélogramme articulé, permet de reproduire un dessin donné, réduit ou agrandi.

UTILISER SES CONNAISSANCES

- 5° ● $ABCD$ est un parallélogramme dans lequel $AB = 3$ cm, $AD = 2$ cm et $\hat{A} = 117^\circ$.

- a) Quelles sont les longueurs des autres côtés ?
b) Que valent les autres angles ?



Les côtés opposés ont même longueur :

$$DC = 3 \text{ cm et } BC = 2 \text{ cm.}$$

Les angles opposés sont égaux : $\hat{C} = \hat{A} = 117^\circ$.

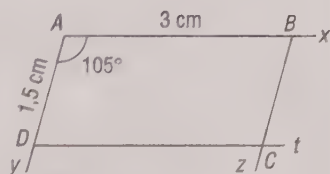
Les angles consécutifs sont supplémentaires :

$$\hat{B} = \hat{D} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ.$$

- 5° ● Construire un parallélogramme $ABCD$ dans lequel on a : $AB = 3$ cm, $AD = 1,5$ cm et $\hat{A} = 105^\circ$.

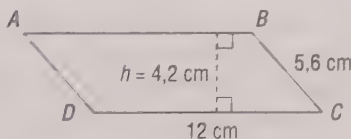
Dans l'ordre, on a :

- construit $\widehat{xAy}$ de 105° ;
- placé B sur $[Ax$ et D sur $[Ay$ tels que $AB = 3$ cm et $AD = 1,5$ cm ;
- tracé $[Bz$ parallèle à $[Ay$ et $[Dt$ parallèle à $[Ax$ pour avoir C .



$ABCD$ a ses côtés opposés parallèles ; c'est un parallélogramme.

- 5° ● Calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$. Calculer la hauteur associée au côté $[BC]$.



h est la hauteur associée au côté $[DC]$.

$12 \times 4,2 = 50,4$. L'aire de $ABCD$ est égale à $50,4 \text{ cm}^2$.

Si on désigne par x la hauteur associée au côté $[BC]$, on a : $5,6 \times x = 50,4$.

$$\text{Donc } x = \frac{50,4}{5,6} = 9.$$

La hauteur associée au côté $[BC]$ est égale à 9 cm.

VOIR AUSSI :

Rapporteur, 54

Quelques paires d'angles, 50

Parallèles,

sécantes et angles, 58

Parallélisme, 59

Unités, p.282-283

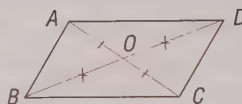
PARALLÉLOGRAMMES

DIAGONALES

COMPRENDRE

- 5^e ● Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu :

$$OA = OC ; OB = OD .$$



Le point O est **centre de symétrie** pour le parallélogramme.
 Le point O est appelé le **centre** du parallélogramme.

RECONNAÎTRE

- 5^e ● « Si un quadrilatère a ses **diagonales qui se coupent en leur milieu** alors c'est un parallélogramme. »

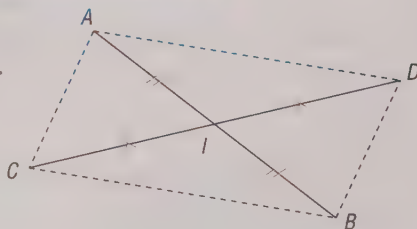
UTILISER SES CONNAISSANCES

- 5^e ● On a construit deux segments $[AB]$ et $[CD]$ se coupant en I tels que :

$$IA = IB = 2 \text{ cm}$$

$$\text{et } IC = ID = 2,5 \text{ cm} .$$

Prouver que le quadrilatère $ACBD$ est un parallélogramme.



Remarque : la lecture de l'énoncé fait penser que l'on va se servir des diagonales pour prouver que $ACBD$ est un parallélogramme. La recherche et la rédaction de la solution sont orientées dans ce sens.

- 1^{er} temps : on s'assure que les conditions sont remplies pour appliquer la propriété dont on veut se servir.

D'après l'énoncé, on sait que $IA = IB$ et $IC = ID$.

Les diagonales $[AB]$ et $[CD]$ du quadrilatère $ACBD$ se coupent en leur milieu.

- 2^e temps : on énonce la propriété.

Or, si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

- 3^e temps : on conclut.

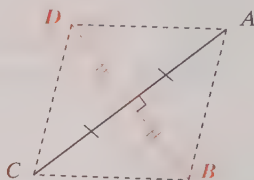
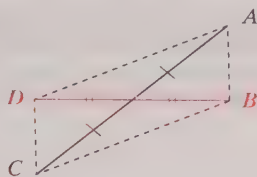
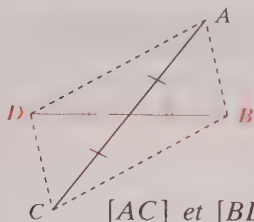
Donc $ACBD$ est un parallélogramme.

OUVRIR L'ŒIL

Le raisonnement détaillé ci-contre est en trois temps ; il est classique.

On vérifie d'abord que les conditions sont remplies pour appliquer la propriété.

On énonce cette propriété, puis on conclut.



$[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu : $ABCD$ est un parallélogramme.

- 5^e ● Soit un triangle ABC et le milieu M de $[BC]$.
Sur la droite (AM) on place D tel que $AM = MD$.
Prouver que $ABDC$ est un parallélogramme.

• 1^{er} temps

D'après l'énoncé, M est le milieu de $[BC]$.

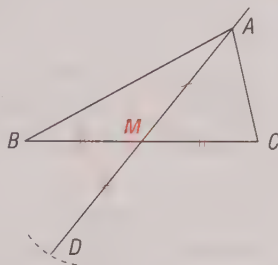
Par construction, $AM = MD$;

M est le milieu de $[AD]$.

Les diagonales $[BC]$ et $[AD]$

du quadrilatère $ABDC$

se coupent en leur milieu.

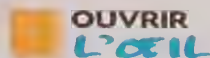


• 2^e temps

Or, si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

• 3^e temps

Donc $ABDC$ est un parallélogramme.

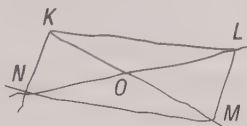


Observez bien
le raisonnement
en trois temps de l'exercice
ci-contre.

- 5^e ● On a trois points K , L et M non alignés.
Construire N pour que $KLMN$ soit un parallélogramme.

• Étude préparatoire à la construction

La figure ci-contre, faite à main levée, montre que si on connaissait le milieu O de $[KM]$, il suffirait de prolonger $[LO]$ d'une longueur égale.



• Construction

K , L et M sont donnés.

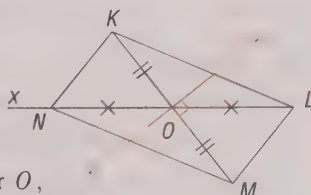
On a obtenu le milieu O de $[KM]$

en construisant la médiatrice de ce segment.

On a tracé la demi-droite $[Lx]$, passant par O ,

puis, avec le compas, placé N tel que

$ON = OL$.



Le quadrilatère $KLMN$ a ses diagonales qui se coupent en leur milieu par construction ; c'est un parallélogramme.

VOIR AUSSI :

Règle graduée, longueur, 49

Médiatrice, 61

Parallélogrammes, 88

Centre de symétrie, 97

PARALLÉLOGRAMMES

AUTRES CARACTÉRISATIONS

RECONNAÎTRE

5^e ● Comment reconnaît-on un parallélogramme ?
4^e

• Tous les moyens vus en cinquième sont à connaître en classe de quatrième (cf. Parallélogrammes, 88 et 89).

• On dispose de deux moyens supplémentaires pour reconnaître un parallélogramme :

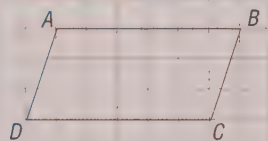
– **La convexité et deux côtés parallèles et de même longueur** car « si un quadrilatère convexe a deux côtés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme ».

– **La convexité et les côtés opposés deux à deux de même longueur** car « si un quadrilatère convexe a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme ».

Remarque : Dans ces deux énoncés le mot « convexe » peut être remplacé par « non croisé ».

UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● On a, ci-contre,
4^e une construction réalisée sur papier quadrillé.
Pourquoi $ABCD$ est-il un parallélogramme ?



• 1^{er} temps : on s'assure que les conditions sont remplies pour appliquer la propriété.

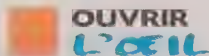
$ABCD$ est convexe. $AB = CD = 6$ carreaux. $(AB) \parallel (DC)$ car ce sont des lignes parallèles du quadrillage. $ABCD$ est un quadrilatère convexe qui a deux côtés parallèles et de même longueur.

• 2^e temps : on énonce la propriété.

Or, si un quadrilatère convexe a deux côtés parallèles et de même longueur alors c'est un parallélogramme.

• 3^e temps : on conclut.

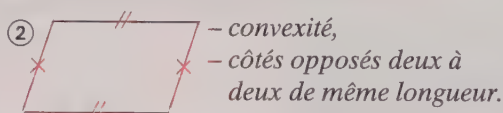
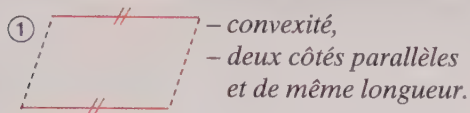
Donc $ABCD$ est un parallélogramme.



● Observez bien dans l'exercice ci-contre les trois temps du raisonnement.

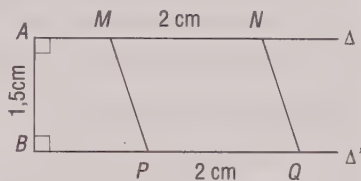
● Notez le moyen rapide que l'on a ainsi pour construire un parallélogramme sur papier quadrillé.

Cette fiche complète l'étude du parallélogramme,
et propose deux moyens supplémentaires pour reconnaître un parallélogramme :



5^e 4^e ● Construire un parallélogramme sachant qu'un de ses côtés
mesure 2 cm et la hauteur relative à ce côté est de 1,5 cm.

On trace $[AB]$ de 1,5 cm,
puis Δ et Δ' perpendiculaires
en A et B à la droite (AB) .
Toutes deux perpendiculaires à
une même droite, Δ et Δ' sont
parallèles.



On place M , N , P , et Q tels que $MN = PQ = 2$ cm.

On joint M à P et N à Q pour que $MNQP$ soit convexe.

$MNQP$ est convexe et a deux côtés parallèles et de même longueur.

Or, si un quadrilatère convexe a deux côtés parallèles et de même longueur
alors c'est un parallélogramme.

Donc $MNQP$ est un parallélogramme qui a les propriétés imposées.

Remarque

On a une infinité de parallélogrammes possibles ; leur aire est 3 cm^2 .

5^e 4^e ● Tracer deux segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que $AB = 3$ cm,
 $AC = 2$ cm et A , B et C non alignés. Construire le cercle $\mathcal{C}$
de centre B et de rayon 2 cm et le cercle $\mathcal{C}'$ de centre C et de
rayon 3 cm ; $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se coupent en E et F .

Construire les quadrilatères $ABEC$ et $ABFC$;

l'un est un parallélogramme, l'autre, pas ; pourquoi ?

$ABEC$ n'est pas convexe ;

ce n'est pas un parallélogramme.

$ABFC$ est convexe ;

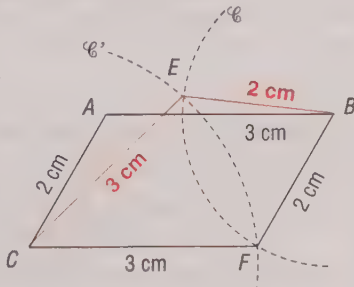
de plus, par construction :

$BF = AC = 2$ cm et $CF = AB = 3$ cm.

$ABFC$ est convexe et a ses côtés
opposés deux à deux de même
longueur.

Or, si un quadrilatère convexe a ses
côtés opposés deux à deux de même longueur alors c'est un parallélogramme.

Donc $ABFC$ est un parallélogramme.



Noter le moyen rapide
que l'on a ainsi pour construire
un parallélogramme
sur du papier blanc avec
un compas et une règle.

VOIR AUSSI :

Quadrilatères convexes, 82

Parallélogrammes, 88-89

RECONNAÎTRE
UN RECTANGLE

RECONNAÎTRE

● Comment prouver qu'un quadrilatère est un rectangle ?

Selon les circonstances, on peut :

6^e – utiliser la définition (trois angles droits) ;

5^e – opérer en deux temps :

4^e

● Premier temps

Prouver que le quadrilatère est un parallélogramme.

● Deuxième temps

Prouver que ce parallélogramme est un rectangle en utilisant l'un ou l'autre des deux théorèmes ci-dessous.

« Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle. »

« Si un parallélogramme a des diagonales de même longueur alors c'est un rectangle. »

UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● Soit $ABCD$ un parallélogramme.

4^e Tracer, passant par A , la droite Δ perpendiculaire à la droite (DC) ; Δ coupe (DC) en H . La droite passant par C et parallèle à Δ coupe la droite (AB) en K .

Prouver que :

a) (AK) et (HC) sont parallèles ;

b) $AHCK$ est un parallélogramme ;

c) $AHCK$ est un rectangle.

a) $ABCD$ est un parallélogramme.

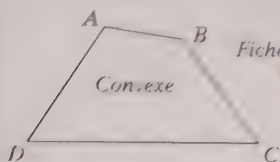
Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles.

Donc $(AB) \parallel (DC)$ et aussi $(AK) \parallel (HC)$.

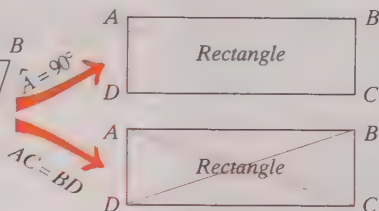
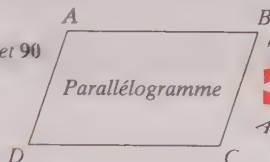
OUVRIR
L'ŒIL

Pour prouver
qu'un quadrilatère est un
parallélogramme :
voir fiches 88, 89 et 90.

Du quadrilatère convexe au rectangle



Fiches 88, 89 et 90

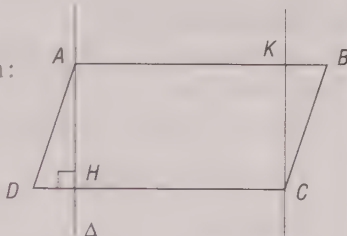


b) On vient de voir que (AK) est parallèle à (HC) .

D'après l'énoncé, on a par construction : $(CK) \parallel (HA)$.

Le quadrilatère $AHCK$ a ses côtés opposés parallèles.

Donc, par définition, $AHCK$ est un parallélogramme.



c) Par construction, Δ est perpendiculaire à (DC) : l'angle $\hat{H}$ est droit. Le parallélogramme $AHCK$ a un angle droit.

Or, si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle.

Donc, $AHCK$ est un rectangle.

5^e 4^e ● $[AC]$ et $[BD]$ sont des diamètres non perpendiculaires d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O .

a) Prouver que $ABCD$ est un parallélogramme.

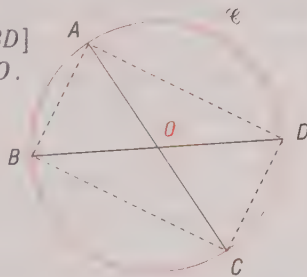
b) Prouver que $ABCD$ est un rectangle.

a) $[AC]$ et $[BD]$ sont des diamètres d'un cercle de centre O .

Il en résulte que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ ont même milieu O .

Or, si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.

Donc, le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.



b) $[AC]$ et $[BD]$ sont des diamètres ; ils ont même longueur.

Le parallélogramme $ABCD$ a des diagonales de même longueur.

Or, si un parallélogramme a des diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.

Donc $ABCD$ est un rectangle.

VOIR AUSSI :

Équerre, 52

Rectangles, 83

Parallélogrammes, 88-89-90

RECONNAÎTRE
UN LOSANGE

RECONNAÎTRE

● Comment prouver qu'un quadrilatère est un losange?

Selon les circonstances on peut :

6^e – utiliser la définition (quatre côtés de même longueur),

5^e – opérer en deux temps :

4^e • **Premier temps**

Prouver que le quadrilatère est un parallélogramme.

• **Deuxième temps**

Prouver que ce parallélogramme est un losange en utilisant l'un ou l'autre des deux théorèmes ci-dessous.

« Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un losange. »

« Si un parallélogramme a des diagonales perpendiculaires alors c'est un losange ».

UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● $[AB]$ et $[CD]$ sont deux diamètres perpendiculaires
4^e d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O .

Un autre cercle $\mathcal{C}'$, lui aussi de centre O , coupe (CD) en E et en F .

a) Prouver que $AEBF$ est un parallélogramme.

b) Prouver que $AEBF$ est un losange.

a) $[OA]$ et $[OB]$ sont deux rayons de $\mathcal{C}$; donc $OA = OB$.

$[OE]$ et $[OF]$ sont deux rayons de $\mathcal{C}'$; donc $OE = OF$.

Les diagonales $[AB]$ et $[EF]$ du quadrilatère $AEBF$ se coupent en leur milieu.

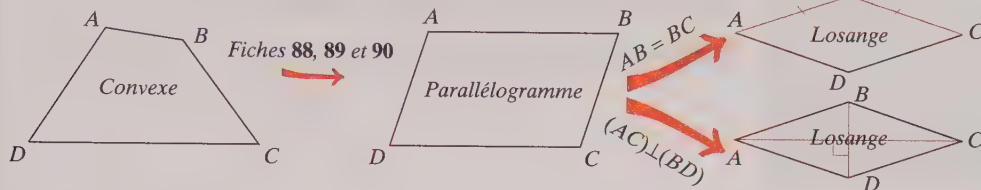
Or, si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.

Donc $AEBF$ est un parallélogramme.

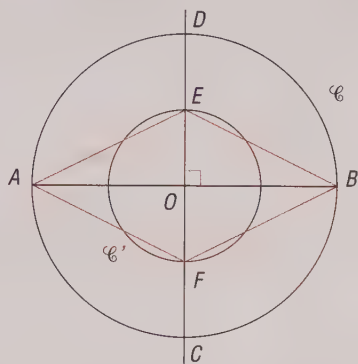
OUVRIR
L'ŒIL

Pour prouver qu'un quadrilatère est un parallélogramme : voir fiches 88, 89 et 90.

Du quadrilatère convexe au losange



b) Par construction, les diagonales $[AB]$ et $[EF]$ sont perpendiculaires.

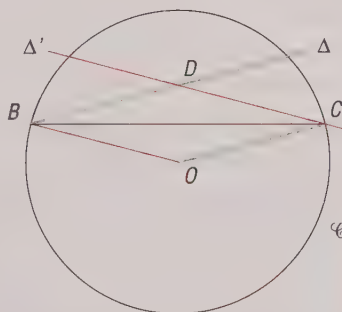


Or, si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un losange. Donc $AEBF$ est un losange.

5^e 4^e ● $[BC]$ est une corde d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O . On trace, passant par B , la parallèle Δ à la droite (OC) et, passant par C , la parallèle Δ' à la droite (OB) . Δ et Δ' se coupent en D .

- Prouver que $OBDC$ est un parallélogramme.
- Prouver que $OBDC$ est un losange.

a) D'après l'énoncé, on a :
 $(DC) \parallel (OB)$ et $(DB) \parallel (OC)$.
 Le quadrilatère $OBDC$
 a ses côtés opposés parallèles ;
 par définition,
 $OBDC$ est un parallélogramme.



b) $OB = OC$ car ce sont des rayons du cercle $\mathcal{C}$.
 Le parallélogramme $OBDC$
 a deux côtés consécutifs de même longueur.

Or, si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un losange.

Donc $OBDC$ est un losange.

VOIR AUSSI :

Parallélisme, 59

Losanges, 85-86

Parallélogrammes, 88-89-90

RECONNAÎTRE
UN CARRÉ

RECONNAÎTRE

● Comment prouver qu'un quadrilatère est un carré ?

Selon les circonstances on peut prouver que c'est :

6^e ● un rectangle particulier

- Si un rectangle a deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un carré.
- Si un rectangle a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un carré.

6^e ● un losange particulier

- Si un losange a un angle droit alors c'est un carré.
- Si un losange a ses diagonales de même longueur alors c'est un carré.

5^e ● un parallélogramme à la fois rectangle et losange

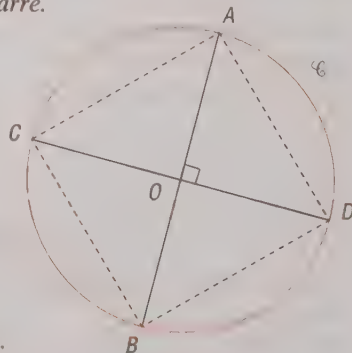
4^e (Cf. Reconnaître un rectangle, 91 et Reconnaître un losange, 92).

UTILISER SES CONNAISSANCES

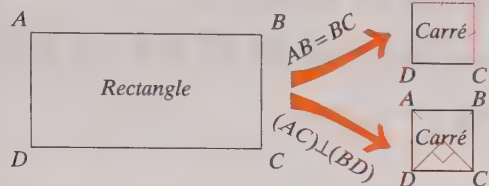
5^e ● $[AB]$ et $[CD]$ sont deux diamètres perpendiculaires d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O .

Prouver successivement que $ACBD$ est un parallélogramme, un rectangle, un losange et un carré.

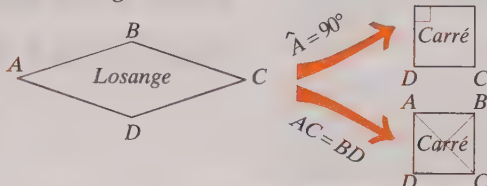
- a) $OA = OB$ et $OC = OD$
car O est le centre du cercle $\mathcal{C}$
et $[AB]$ et $[CD]$ sont des diamètres.
Le quadrilatère $ACBD$
a ses diagonales qui se coupent
en leur milieu.
Or, si un quadrilatère a ses diagonales
qui se coupent en leur milieu alors
c'est un parallélogramme.
Donc $ACBD$ est un parallélogramme.



Du rectangle au carré



Du losange au carré



b) $[AB]$ et $[CD]$ sont des diamètres de $\mathcal{C}$;
donc $AB = CD$ et le parallélogramme $ACBD$ a ses diagonales de même longueur.

Or, si un parallélogramme a des diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.

Donc $ACBD$ est un rectangle.

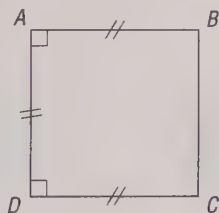
c) D'après l'énoncé $(AB) \perp (CD)$;
le parallélogramme $ACBD$ a ses diagonales perpendiculaires.

Or, si un parallélogramme a des diagonales perpendiculaires alors c'est un losange.

Donc $ACBD$ est un losange.

d) $ACBD$ est à la fois rectangle et losange ; c'est un carré.

4^e ● En utilisant les indications de la figure, prouver successivement que le quadrilatère convexe $ABCD$ est : un parallélogramme, un rectangle, un losange, un carré.



a) $ABCD$ est convexe et $AB = DC$; de plus, comme (AB) et (DC) sont toutes deux perpendiculaires à (AD) , on a : $(AB) \parallel (DC)$.

Le quadrilatère convexe $ABCD$ a deux côtés parallèles et de même longueur : c'est un parallélogramme.

b) Ce parallélogramme a un angle droit, $\hat{A}$, c'est donc un rectangle.

c) Ce parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur ($AB = AD$) ; c'est un losange.

d) $ABCD$ est à la fois rectangle et losange ; $ABCD$ est un carré.

VOIR AUSSI :

Carrés, 87

Parallélogrammes, 88-89-90

Reconnaitre un rectangle, 91

Reconnaitre un losange, 92

LA FAMILLE DES
PARALLÉLOGRAMMES
SYNTHÈSE

RECONNAÎTRE un parallélogramme par ses côtés

OUVRIR
L'ŒIL

Le tableau de 11 de haut en bas : il comporte 9 flèches qui se lisent avec des Si... alors...

Voici 4 exemples :

● Flèche (3)

Si un quadrilatère a ses côtés de même longueur alors c'est un losange.

● Flèche (4)

Si un quadrilatère convexe a 2 côtés parallèles et de même longueur alors c'est un parallélogramme.

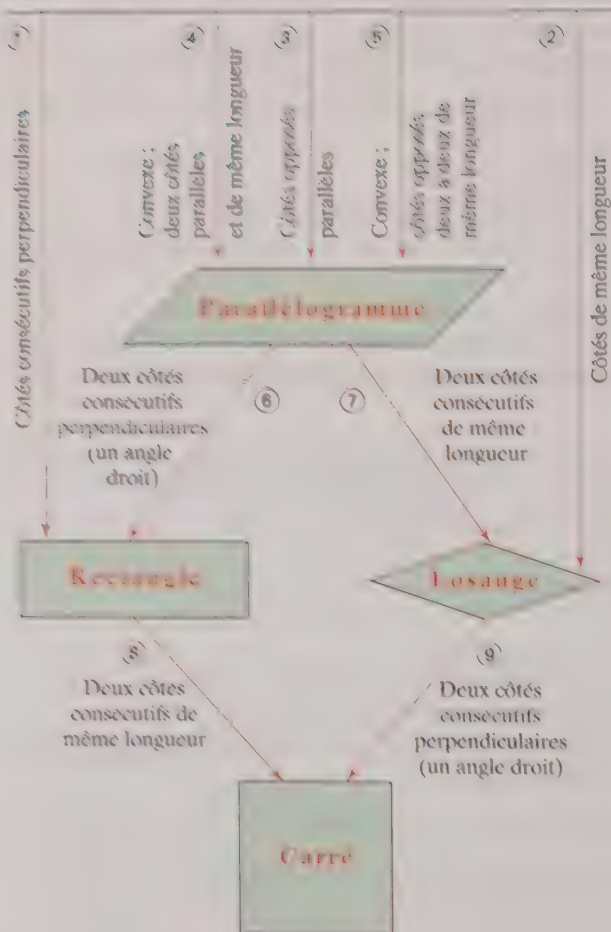
● Flèche (8)

Si un parallélogramme a 2 côtés consécutifs perpendiculaires alors c'est un rectangle.

● Flèche (9)

Si un rectangle a deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un carré.

Q u a d r i l a t è r e



On rencontre un quadrilatère : est-ce un parallélogramme et, si oui, est-il particulier ou non ?

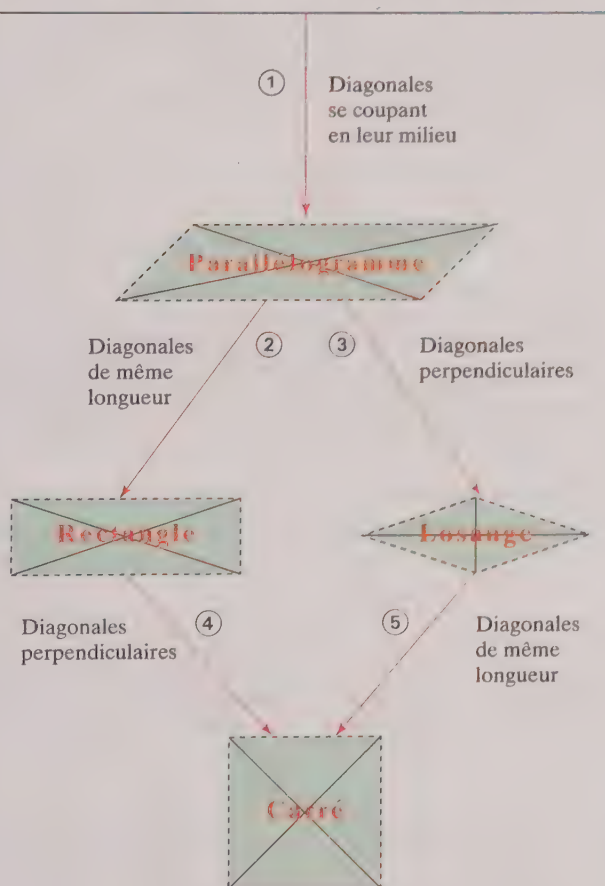
Sous forme de deux tableaux, l'un relatif aux côtés, l'autre aux diagonales, cette fiche fait le point pour le Collège et même la Seconde.

On l'emploiera avec profit en travaillant les exercices des fiches 88 à 93.

RECONNAÎTRE un parallélogramme par ses diagonales

3^e

Q u a d r i l a t è r e



- Le tableau se lit de haut en bas ; il comporte 5 flèches qui se lisent avec des Si... alors...

Voici 3 exemples :

● Flèche ①

Si un quadrilatère a ses diagonales se coupant en leur milieu alors c'est un parallélogramme.

● Flèche ③

Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un losange.

● Flèche ⑤

Si un losange a ses diagonales de même longueur alors c'est un carré.

SYMÉTRIE ORTHOGONALE

AXE DE SYMÉTRIE

OUVRIR L'ŒIL

La notion de **symétrie orthogonale** par rapport à une droite (ou symétrie axiale) est liée à celle de **médiatrice**.

COMPRENDRE

6^e ● Du vocabulaire

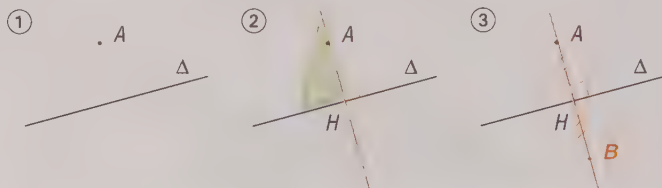
Δ est une droite donnée.

La phrase « A et B sont symétriques par rapport à la droite Δ » signifie « Δ est la médiatrice de $[AB]$ ».



6^e ● Comment construire le symétrique d'un point par rapport à une droite avec l'équerre et le compas ?

(Le compas est utile pour le report de la distance AH .)



6^e ● Axes de symétrie de quelques figures géométriques

Pour chaque figure ci-dessous, si on pliait selon une droite rouge, les parties de la figure situées de part et d'autre de cette droite se superposeraient ; la droite rouge est un **axe de symétrie**.



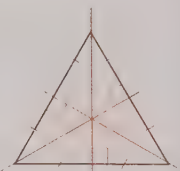
Un segment
sa médiatrice



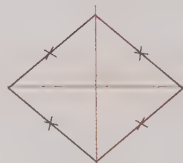
Un angle
sa bissectrice



Triangle isocèle
un axe



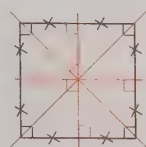
Triangle équilatéral
trois axes



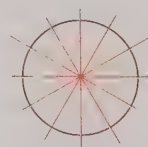
Losange
deux axes



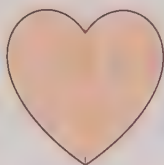
Rectangle
deux axes



Carré
quatre axes



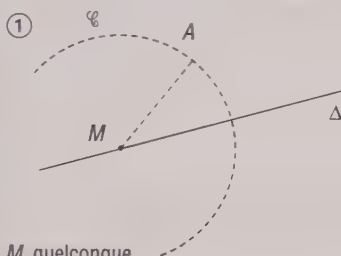
Cercle-disque
une infinité d'axes



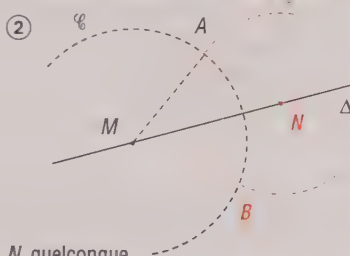
Quelques figures
avec axes de
symétrie

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Voici une construction du symétrique de A par rapport à Δ ; on demande de la reproduire, puis de la justifier.



M quelconque
sur Δ ;
cercle $\mathcal{C}$ de
centre M et de rayon MA .

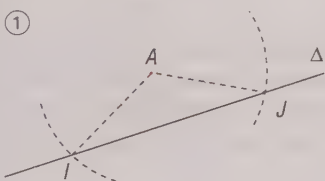


N quelconque
sur Δ ;
cercle $\mathcal{C}'$ de
centre N et de rayon NA .

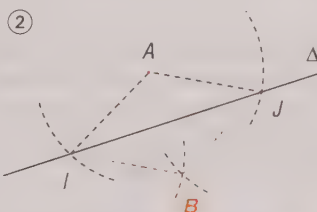
Δ est axe de symétrie pour le cercle $\mathcal{C}$ de centre M ainsi que pour le cercle $\mathcal{C}'$ de centre N . Les points d'intersection A et B de ces deux cercles sont donc symétriques par rapport à Δ .

(Par pliage autour de Δ , A irait sur B .) Par suite, B est le symétrique de A par rapport à Δ .

6^e ● Voici une autre construction du symétrique d'un point A par rapport à une droite Δ ; on demande également de la reproduire puis de la justifier.



Cercle de centre A coupant
 Δ en I et J (rayon quelconque).



Cercles de centres I et J , de rayon IA
ou JA , et se coupant en B .

Le quadrilatère $AIBJ$ a ses quatre côtés de même longueur, c'est un losange.
Dans un losange, chaque diagonale est médiatrice de l'autre.

Δ est médiatrice de $[AB]$; A et B sont symétriques par rapport à Δ .

VOIR AUSSI :

Crimpeas, 50

Equerre, 52

Médiatrice, 61

Losanges, 86

SYMÉTRIE ORTHOGONALE

CONSTRUCTION DE FIGURES

COMPRENDRE

6^e ● Quelle est la propriété fondamentale de la symétrie orthogonale ?

Une figure et sa figure symétrique par rapport à une droite sont **superposables**.

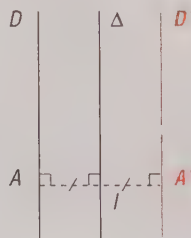
Cela entraîne, le cas échéant, des égalités de longueurs, d'angles et d'aires.

6^e ● Comment construire le symétrique d'une droite ?

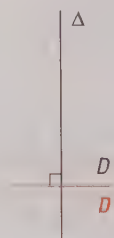
La figure symétrique d'une droite D est une droite D' .



D et Δ sont sécantes :
il suffit de construire A' ,
le symétrique de A ,
et de tracer (IA') .



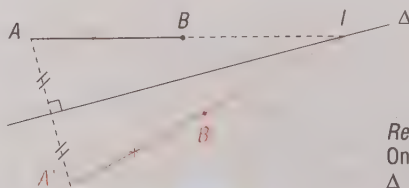
D et Δ sont parallèles :
les trois droites D ,
 Δ et D' sont parallèles.



D et Δ sont
perpendiculaires :
 D' est confondue avec D .

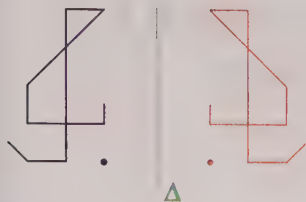
6^e ● Comment construire le symétrique d'un segment ?

La figure symétrique d'un **segment** est un **segment** de même longueur. Dans le cas ci-dessous, où (AB) coupe Δ en I , on a construit le symétrique de A , puis placé B' entre A' et I tel que $A'B' = AB$.



Remarque

On peut vérifier en traçant (BB') ;
 Δ doit être médiatrice de $[BB']$.

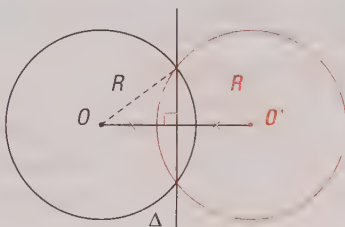


La figure rouge est la figure **symétrique** de la figure noire par rapport à Δ .

Si on pliait selon Δ , elle se superposerait à la figure noire.

6^e ● Comment construire le symétrique d'un cercle de rayon R ?

Le symétrique d'un cercle de centre O et de rayon R est le cercle de centre O' (symétrique de O) et de rayon R .



6^e ● Comment construire le symétrique d'un polygone ?

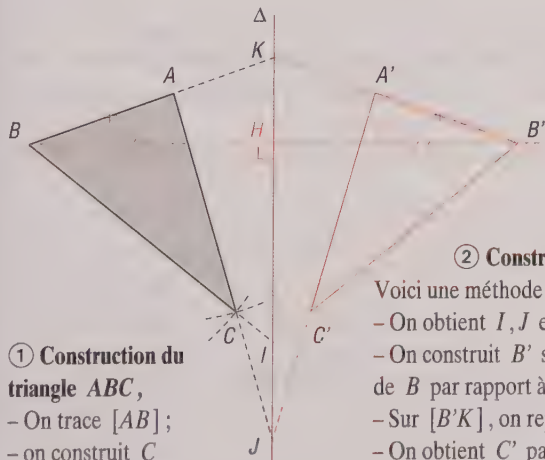
Le symétrique d'un polygone est un polygone superposable ; pour le construire, on peut construire d'abord les symétriques des sommets.

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Construire un triangle ABC tel que :

$AB = 2 \text{ cm}$, $BC = 3,5 \text{ cm}$ et $CA = 3 \text{ cm}$.

Tracer une droite Δ qui ne coupe pas les côtés du triangle et qui ne leur est pas parallèle. Construire le triangle $A'B'C'$ symétrique du triangle ABC par rapport à la droite Δ .



② Construction de $A'B'C'$

Voici une méthode ; il y en a d'autres.

- On obtient I, J et K .
- On construit B' symétrique de B par rapport à Δ .
- Sur $[B'K]$, on reporte $B'A' = BA$.
- On obtient C' par intersection des droites $(A'J)$ et $(B'I)$.

① Construction du triangle ABC ,

- On trace $[AB]$;
- on construit C (deux arcs de cercle).

VOIR AUSSI :

Compas, 50

Équerre, 52

Médiatrice, 61

Construction de triangles, 67

Symétrie orthogonale, 95

SYMÉTRIE CENTRALE

CENTRE DE SYMÉTRIE

COMPRENDRE

OUVRIR L'ŒIL

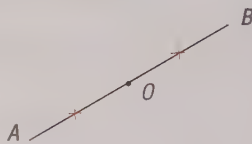
La notion de **symétrie centrale** (symétrie par rapport à un point) est liée à celle de **milieu**.

5^e ● Du vocabulaire

O est un point donné.

La phrase « A et B sont symétriques par rapport au point O » signifie

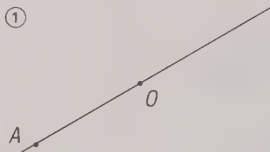
« O est le milieu du segment $[AB]$ ».



5^e ● Comment construire le symétrique d'un point A par rapport à un point O ?

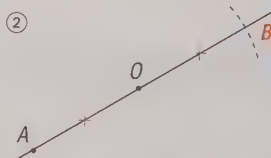
On a un point O et un point A ; il s'agit de construire B tel que O soit le milieu de $[AB]$.

①



On trace la droite (AO) .

②

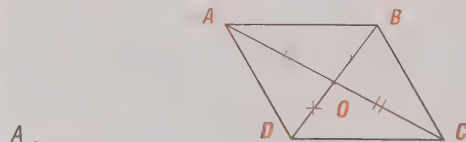


Sur cette droite, avec le compas, on place B tel que $OB = OA$.

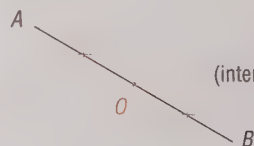
5^e ● Qu'est-ce que le centre de symétrie d'une figure ?

On a un point O et une figure $\mathcal{F}$; si la figure symétrique de $\mathcal{F}$ par rapport à O est la figure $\mathcal{F}$ elle-même, alors on dit que O est centre de symétrie pour $\mathcal{F}$.

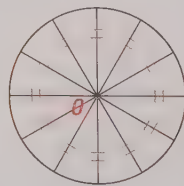
Voici quelques figures ayant un centre de symétrie :



Parallélogramme
(intersection des diagonales)



Segment
(son milieu)



Cercle
(son centre)



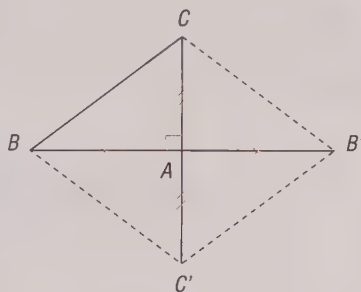
Ces figures comportent toutes un centre de symétrie.

UTILISER SES CONNAISSANCES

- 5^e ● Construire un triangle BAC rectangle en A et tel que $AB = 2$ cm et $AC = 1,5$ cm, puis les symétriques B' et C' des points B et C par rapport au point A .
- Que représente le point A pour les segments $[BB']$ et $[CC']$?
 - $BCB'C'$ est un parallélogramme. Pourquoi?
 - Ce parallélogramme est un losange. Pourquoi?

Les constructions se font avec l'équerre et la règle graduée.

- A est le milieu commun aux segments $[BB']$ et $[CC']$.
- Le quadrilatère $BCB'C'$ est un parallélogramme car les diagonales de ce quadrilatère se coupent en leur milieu.
- Ce parallélogramme est un losange car les diagonales sont perpendiculaires.

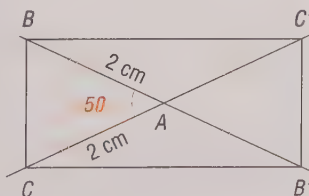


- 5^e ● Construire un triangle BAC tel que :
- $\hat{A} = 50^\circ$ et $BA = AC = 2$ cm,
- puis les symétriques B' et C' de B et C par rapport à A .
- Que peut-on dire des triangles BAC , $B'AC'$, BAC' et $B'AC$?
 - Que valent les quatre angles de sommet A ?

- $AB' = AB = 2$ cm ; $AC' = AC = 2$ cm .
Chacun de ces triangles a deux côtés de même longueur ;
ce sont des triangles isocèles.

- $\widehat{B'AC'}$ et $\widehat{BAC}$ sont opposés par le sommet ;
 $\widehat{B'AC'} = \widehat{BAC} = 50^\circ$.

$\widehat{BAC'} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$; de même, $\widehat{CAB'} = 130^\circ$.



VOIR AUSSI :

Règle graduée, longueur, 49
Paires d'angles, 56
Triangle isocèle, 65
Construction de triangles, 67
Triangle rectangle, 77
Parallélogrammes, 89
Losanges, 86

SYMÉTRIE CENTRALE

CONSTRUCTION DE FIGURES

COMPRENDRE

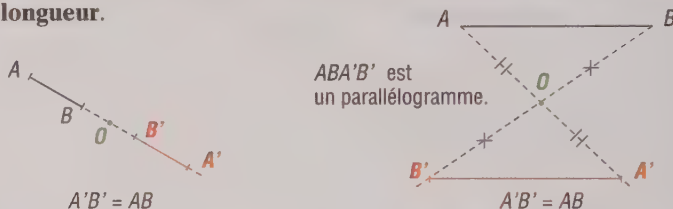
5^e • Quelle est la propriété fondamentale de la symétrie centrale ?

Une figure et sa symétrique par rapport à un point sont **superposables**.

Cela entraîne, le cas échéant, des égalités de longueurs, d'angles et d'aires.

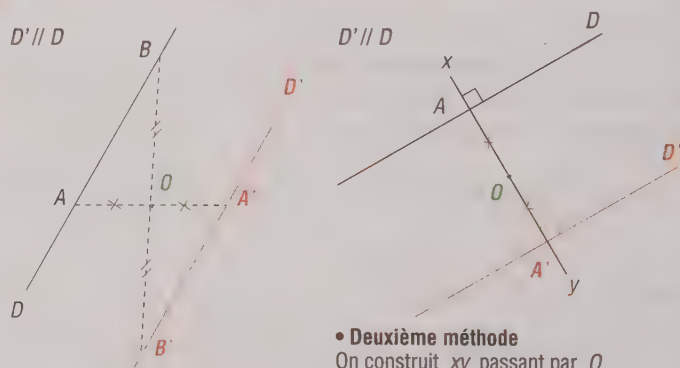
5^e • Comment construire le symétrique d'un segment ?

La figure symétrique d'un segment est un **segment de même longueur**.



5^e • Comment construire le symétrique d'une droite ?

La figure symétrique d'une droite est une droite parallèle.



• Première méthode

On construit les symétriques de deux points de D .

D' est la symétrique de D par rapport à O .

• Deuxième méthode

On construit xy passant par O et perpendiculaire à D ;
 xy et D se coupent en A .

On construit A' le symétrique de A par rapport à O , puis on trace D' perpendiculaire à xy en A' .

OUVRIR L'ŒIL

Si $O \in D$ alors D' est confondue avec D .
(D et D' ne sont pas sécantes, on peut dire qu'elles sont parallèles.)

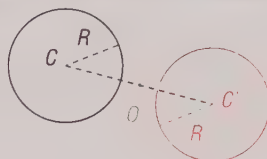


La figure noire et la figure rouge sont **symétriques par rapport à O** . On fixe un papier transparent par une pointe en O ; on décalque la figure rouge et on fait tourner le papier de 180° autour de O ; le calque de la figure rouge recouvre la figure noire.

La figure rouge et la figure noire sont **superposables**.

5^e ● Comment construire le symétrique d'un cercle de rayon R ?

La figure symétrique d'un cercle de centre C et de rayon R est le cercle de centre C' (symétrique de C) et de même rayon R .



5^e ● Comment construire le symétrique d'un polygone ?

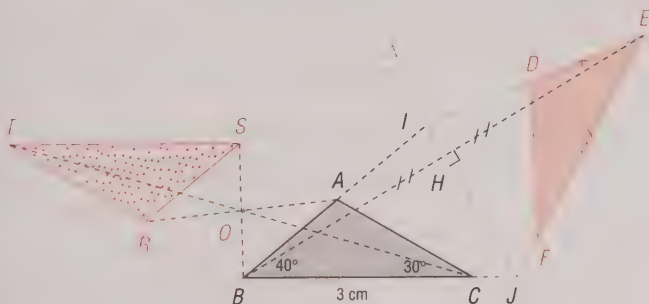
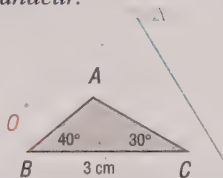
Le symétrique d'un polygone est un polygone superposable ; pour le construire, on peut construire d'abord les symétriques des sommets.

UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● Reproduire le triangle ABC en vraie grandeur.

Placer approximativement le point O et la droite Δ .

Construire DEF , symétrique de ABC par rapport à Δ et RST , symétrique de ABC par rapport à O .



- Construction de ABC : cf. Constructions de triangles, 67.
- Construction de RST : $OR = OA$; $OS = OB$; $OT = OC$.
- Construction de DEF : E symétrique de B ; $D \in [EI]$ et $ED = BA$; $F \in [EJ]$ et $EF = BC$. (Cf. exercice, page 201.)

VOIR AUSSI :

Règle graduée, longueur, 49
Construction de triangles, 67
Parallélogrammes, 89
Symétrie orthogonale, 96
Symétrie centrale, 97

ROTATION

OUVRIR
L'ŒIL

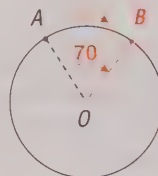
Une symétrie centrale de centre O est une **rotation** de centre O et d'angle 180° , dans un sens ou dans l'autre (demi-tour).

COMPRENDRE

3^e ● Du vocabulaire

O est un point donné. La phrase « B est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle 70° , dans le sens des aiguilles d'une montre » signifie :

- $OB = OA$ (donc B est sur le cercle de centre O , de rayon OA) ;
- $\widehat{AOB} = 70^\circ$;
- un point mobile M , partant de A , doit se déplacer sur le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre pour atteindre le point B .

3^e ● Quelle est la propriété fondamentale de la rotation ?

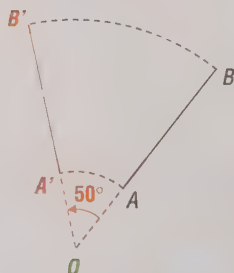
Une figure et son image par rotation sont **superposables**. Cela entraîne, le cas échéant, des égalités de longueurs, d'angles et d'aires.

UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● Construire l'image d'un segment par une rotation de centre O et d'angle 50° , dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

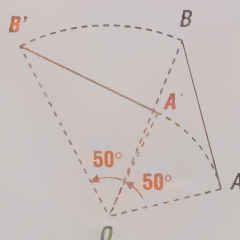
Deux cas sont à envisager :

- O appartient à (AB) .



On construit les images A' et B' de A et de B et on trace $[A'B']$;
 $A'B' = AB$.

- O n'appartient pas à (AB) .





O

La figure rouge est l'image de la figure noire dans la rotation de centre O , dans le sens des aiguilles d'une montre et d'angle 90° .

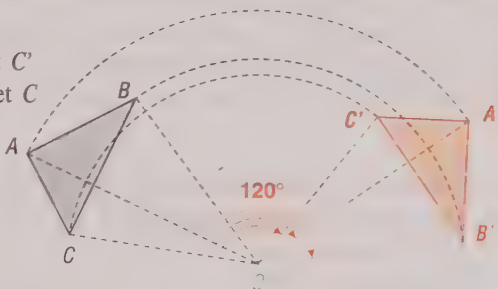
La figure rouge et la figure noire sont **superposables**.

- 3^e ● Construire l'image d'un triangle dans une rotation de 120° dans le sens des aiguilles d'une montre.

On construit :

les images A' , B' et C' des sommets A , B et C du triangle donné.

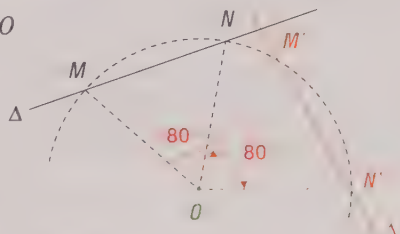
Le triangle $A'B'C'$ est l'image du triangle ABC .



- 3^e ● Construire l'image d'une droite Δ dans une rotation de centre O et d'angle :

- a) 80° dans le sens des aiguilles d'une montre,
b) 120° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
(Utiliser deux méthodes différentes.)

- a) On trace un cercle de centre O coupant Δ en M et N ;
on construit les images M' et N' de M et de N
(rotation : centre O ;
angle 80° ; sens des aiguilles d'une montre);
on trace la droite $(M'N')$; c'est Δ' l'image de Δ .



Remarque : l'image de la demi-droite $[MN)$ est la demi-droite $[M'N')$.

- b) On trace $[OH]$, perpendiculaire en H à Δ ,
puis on construit H' , image de H
dans la rotation de centre O , d'angle 120° ,
dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. La droite Δ' ,
perpendiculaire en H' à (OH')
est l'image de Δ car deux droites
perpendiculaires ont pour images
deux droites perpendiculaires.



OUVRIR L'ŒIL

- L'image d'un polygone est un polygone superposable.
- Pour construire l'image d'un cercle, il suffit de construire l'image du centre, car l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

VOIR AUSSI :

Compas, 50
Rapporteur, 54

POLYGONES
RÉGULIERSOUVRIR
L'ŒIL

Le rectangle et le losange ne sont pas des polygones réguliers sauf dans le cas particulier où ce sont des carrés..

COMPRENDRE

3^e ● Qu'est-ce qu'un polygone régulier ?

Un polygone régulier est un polygone dont les côtés ont même longueur et dont les angles sont égaux.

Un polygone régulier a **toujours** un cercle circonscrit.

3^e ● Comment construire des polygones réguliers connaissant un sommet et le cercle circonscrit ?

■ Triangle équilatéral

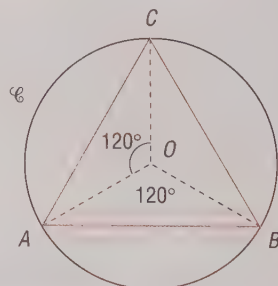
On a le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et le point A sur le cercle.

On construit B et C tels que

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 120^\circ.$$

À des angles au centre égaux correspondent des cordes égales. ABC est équilatéral.

Le triangle équilatéral coïncide avec lui-même dans toute rotation de centre O et d'angle multiple de 120° .



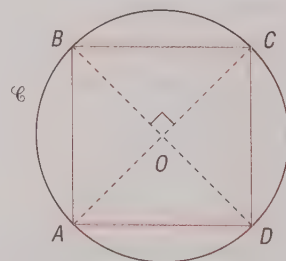
■ Carré

On a le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et le point A sur le cercle.

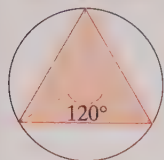
On construit C diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}$, puis B et D tels que $[AC]$ et $[BD]$ soient des diamètres **perpendiculaires**.

$ABCD$ est un carré.

Le carré coïncide avec lui-même dans toute rotation de centre O et d'angle multiple de 90° .

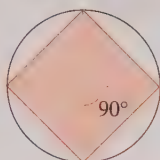


$360^\circ : 3 = 120^\circ$



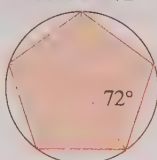
Triangle équilatéral

$360^\circ : 4 = 90^\circ$



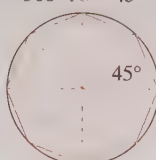
Carré

$360^\circ : 5 = 72^\circ$



Pentagone

$360^\circ : 8 = 45^\circ$



Octogone

Ces quatre figures rouges sont des **polygones réguliers**. Pour chaque polygone, les côtés ont même longueur et les angles sont égaux.

■ Hexagone régulier

On a le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R ainsi que le point A sur le cercle.

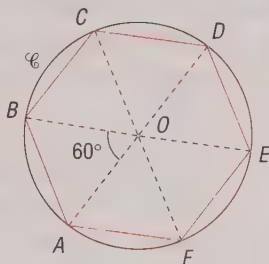
On construit B, C, D, E et F tels que

$$AB = BC = CD = DE = EF = R$$

(ouverture du compas égale à R).

$ABCDEF$ est un hexagone régulier.

L'hexagone régulier coïncide avec lui-même dans toute rotation de centre O et d'angle multiple de 60° .



UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● Sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O , placer A, D, B, E, C et F , les six sommets d'un hexagone régulier.

Joindre les points de deux en deux ; montrer que ABC et DEF sont deux triangles équilatéraux. Nommer trois rotations de centre O qui amèneraient ABC sur DEF .

Avec une ouverture de compas égale au rayon, on place A, D, B, E, C, F .

Toute corde telle que $[DF]$ est interceptée par un angle au centre de 120° ;

c'est le côté d'un triangle équilatéral.

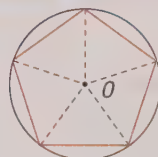
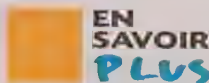
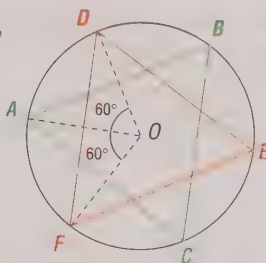
DEF et ABC sont équilatéraux.

ABC coïncide avec DEF dans une infinité de rotations de centre O ; en voici trois :

– celle de 60° dans le sens des aiguilles d'une montre et qui amène A sur D , B sur E et C sur F ;

– celle de 60° en sens contraire : A va sur F , B sur D et C sur E ;

– celle de 180° (qui est aussi la symétrie de centre O) et qui amène A sur E , B sur F et C sur D .



● Les angles au centre ont 72° ; on a un **pentagone régulier convexe**.

Si on joint les points de deux en deux, on a un **pentagone régulier étoilé**.



● L'heptagone a 7 côtés, l'octogone a 8 côtés, l'ennéagone a 9 côtés et le décagone a 10 côtés. On pourrait poursuivre cette liste...

VOIR AUSSI :

Compas, cercle, disque, 50

Triangle équilatéral, 66

Carrés, 93

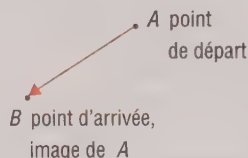
Rotation, 99

TRANSLATION

COMPRENDRE

OUVRIR L'ŒIL

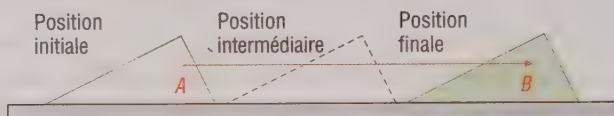
Sur un dessin,
la translation
qui amène A sur B
est indiquée par :



On a ainsi :

- la **direction** de la droite (AB) ;
- le **sens** de A vers B ;
- la **longueur** : AB .

4^e • Qu'est-ce qu'une translation ?



Dans un mouvement de translation rectiligne de l'équerre le long de la règle, tous les points de l'équerre se déplacent :

- sur des droites parallèles ou confondues,
- dans le même sens et de la même distance.

On repère la position initiale d'un point A de l'équerre ainsi que sa position finale B .

La translation qui amène A sur B est caractérisée par :

- la **direction** du déplacement : celle de la droite (AB) ,
- le **sens** du déplacement : de A (position de départ) à B (position d'arrivée),
- la **longueur** du déplacement : AB .

4^e • Quelle est la propriété fondamentale de la translation ?

Une figure et son image par translation sont **superposables**.
Cela entraîne des égalités de longueurs, d'angles et d'aires.

4^e • Construire l'image d'un point A dans la translation qui amène P sur P' .

Il y a deux cas :

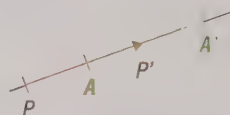
- P , P' et A ne sont pas alignés.
- P , P' et A sont alignés.



On construit le point A' tel que $APP'A'$ soit un parallélogramme.

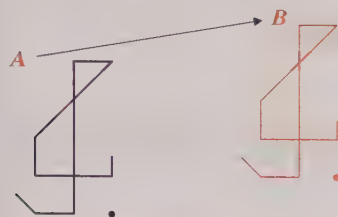
On a alors :

- $(AA') \parallel (PP')$;
- $AA' = PP'$;
- le sens de A vers A' est le même que celui de P vers P' .



On construit A' tel que :

- A' appartient à (PP') ;
- $AA' = PP'$;
- le sens de A vers A' est le même que celui de P vers P' .



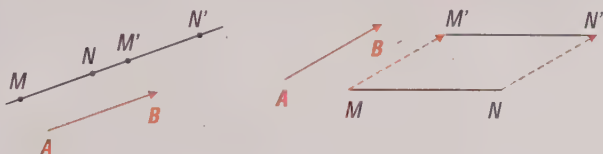
La figure rouge est l'image de la figure noire dans la **translation** qui amène A sur B .

Tout point de la figure noire et son image forment un parallélogramme avec A et B .

La figure rouge et la figure noire sont superposables.

UTILISER SES CONNAISSANCES

- 4^e ● Étant donné deux points A et B et un segment $[MN]$ construire l'image de $[MN]$ dans la translation qui amène A sur B . (Il y a deux cas de figure selon que (AB) et (MN) sont parallèles ou non.)

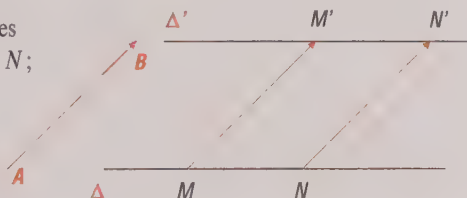


Dans les deux cas : $M'N' = MN$.

Dans le deuxième cas : $MM'N'N$ est un parallélogramme.

- 4^e ● Soit une droite Δ et deux points A et B , tels que (AB) et Δ ne sont pas parallèles. Construire l'image de Δ dans la translation qui amène A sur B .

On construit les images de deux points M et N ; on obtient M' et N' qui donnent Δ' ; $\Delta' \parallel \Delta$.



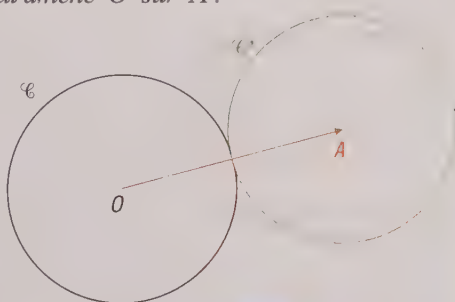
- 4^e ● Construire un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1,5 cm. Placer un point A à 3 cm de O . Construire l'image de $\mathcal{C}$ dans la translation qui amène O sur A .

O a pour image A dans cette translation.

L'image de $\mathcal{C}$ est le cercle $\mathcal{C}'$ de centre A

et de rayon 1,5 cm.

Dans ce cas particulier, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents.

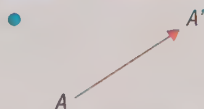


VOIR AUSSI :

Parallélogrammes, 88-89-90

TRANSLATION VECTEURS PARALLÉLOGRAMMES

OUVRIR L'ŒIL



Ce dessin représente le couple de points $(A; A')$ (origine A , extrémité A') qui permet de connaître la translation qui amène A sur A' avec :

- sa **direction**, celle de (AA') ,
- son **sens** de A vers A' ,
- sa **longueur** : AA' .

On résume cela en disant :

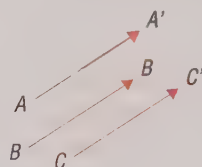
la **translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$** .

- Observer la position des lettres C et D dans l'égalité vectorielle et dans le nom du parallélogramme ci-contre.

COMPRENDRE

3^e ● De la translation au vecteur

Dans une translation les points $A, B, C, \dots$ ont pour images respectives les points $A', B', C', \dots$. Chacun des couples $(A, A'), (B, B'), (C, C'), \dots$ permet de connaître la translation.



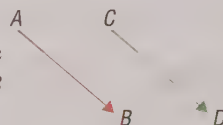
Ils déterminent **un vecteur** qui peut être noté $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AA'}$ ou $\overrightarrow{BB'}$ ou $\overrightarrow{CC'}$.

On écrit : $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

Chaque couple est un représentant de $\vec{u}$.

3^e ● Du vecteur à la translation

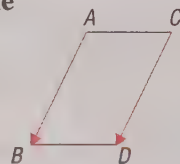
L'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D .



3^e ● De l'égalité vectorielle au parallélogramme

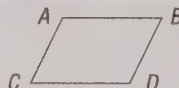
• Si A, B, C et D ne sont pas alignés et si on sait que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors on en déduit que $ABDC$ est un parallélogramme.

• Dans tous les cas, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

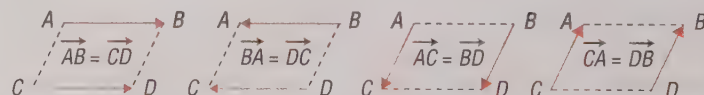


3^e ● Du parallélogramme à l'égalité vectorielle

• $ABDC$ est un parallélogramme.



On en déduit quatre égalités vectorielles.



Dans tous les cas, si les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu, alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \text{ et } \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}.$$



Pour obtenir l'image M' d'un point M dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, on construit le parallélogramme $MABM'$.



Quadrilatère convexe, avec deux côtés opposés parallèles et de même longueur.



Quadrilatère avec les diagonales qui se coupent en leur milieu.

UTILISER SES CONNAISSANCES

3° ● M, N, P et Q sont des points non alignés.

Compléter le tableau :

Égalité donnée	Parallélogramme	Autres égalités vectorielles
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$		
$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QN}$		
$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PN}$		

Il est recommandé de faire un dessin dans chaque cas.

Égalité donnée	Parallélogramme	Autres égalités vectorielles
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$	MNPQ	$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{PQ}$; $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$; $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{PN}$
$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QN}$	MPNQ	$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{NQ}$; $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PN}$; $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{NP}$
$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PN}$	MQNP	$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{NP}$; $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QN}$; $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{NQ}$

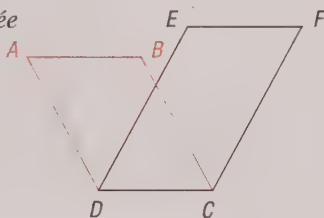
3° ● La figure ci-contre est constituée

de deux parallélogrammes $ABCD$ et $CDEF$.

Le côté $[DC]$ est commun aux deux parallélogrammes et les points A, B, E et F ne sont pas alignés.

Prouver que $EFBA$ est un parallélogramme.

Que peut-on déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$?



$ABCD$ est un parallélogramme ; donc $(AB) \parallel (CD)$ et $AB = CD$.

$CDEF$ est un parallélogramme ; donc $(CD) \parallel (EF)$ et $CD = EF$.

On en déduit : $(AB) \parallel (EF)$ et $AB = EF$.

Le quadrilatère non croisé $ABFE$ a deux côtés opposés parallèles et de même longueur ; c'est donc un parallélogramme.

Puisque $ABFE$ est un parallélogramme, on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.

VOIR AUSSI :

Parallélogrammes, 88-89-90

Translation, 101

TRANSLATION

VECTEURS

ADDITION VECTORIELLE

COMPRENDRE

OUVRIR L'ŒIL

Bien que notée avec le signe +, l'addition vectorielle n'a rien à voir avec l'addition des longueurs.

EN SAVOIR PLUS

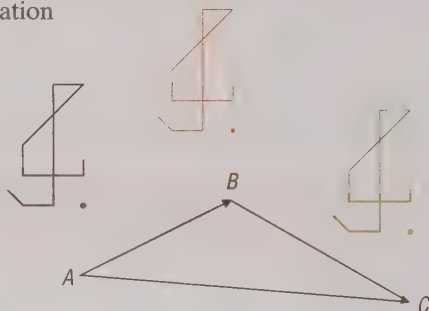
L'égalité $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ s'appelle « relation de Chasles ».

3^e • Qu'est-ce que la somme vectorielle ?

• Translations consécutives et somme vectorielle

Si on passe de la figure noire à la figure rouge par la translation de vecteur $\vec{AB}$, puis de la figure rouge à la figure verte par la translation de vecteur $\vec{BC}$, alors on passe de la figure noire à la figure verte par la translation de vecteur $\vec{AC}$.

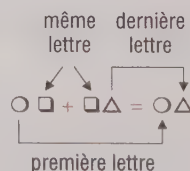
On dit que le vecteur $\vec{AC}$ est la **somme vectorielle** des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ et on écrit :

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}.$$


• Avec trois points A, B et C

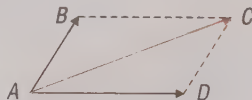
On peut écrire six additions vectorielles basées sur le schéma ci-contre :

- $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ et $\vec{CB} + \vec{BA} = \vec{CA}$.
- $\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$ et $\vec{BC} + \vec{CA} = \vec{BA}$.
- $\vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC}$ et $\vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CB}$.



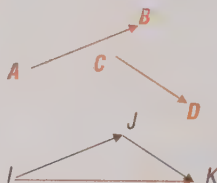
• Parallélogramme et somme de deux vecteurs

Si ABCD est un parallélogramme, alors $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$.



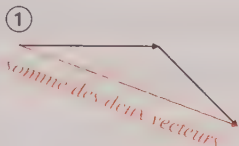
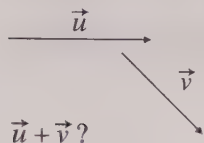
3^e • Comment construire la somme de deux vecteurs ?

On veut représenter $\vec{AB} + \vec{CD}$. On dispose de deux méthodes :



- a) On construit $\vec{IJ} = \vec{AB}$ puis $\vec{JK} = \vec{CD}$.
On a $\vec{IK} = \vec{IJ} + \vec{JK} = \vec{AB} + \vec{CD}$.
C'est la méthode des **représentants consécutifs**.

Deux constructions :



Deux représentants consécutifs.



Deux représentants de même origine.

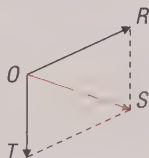
b) On construit $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{CD}$, puis le parallélogramme $ORST$.



On a :

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OT}$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

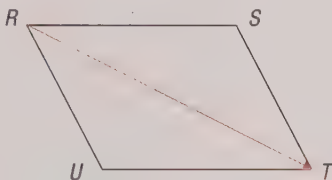


C'est la méthode du parallélogramme.

UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● $RSTU$ est un parallélogramme. Écrire $\overrightarrow{RT}$ sous forme de somme vectorielle de trois manières différentes.

- $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST}$
(représentants consécutifs).
- $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RU} + \overrightarrow{UT}$
(représentants consécutifs).
- $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RU}$
(diagonale du parallélogramme).



3^e ● A, B, C et D sont quatre points du plan. Écrire chacune des sommes sous la forme d'un seul vecteur :

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;
- b) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD}$;
- c) $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{BC}$;
- d) $\overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC})$.

Les parenthèses indiquent des priorités d'exécution.

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- b) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}$.
- c) $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- d) $\overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$.

OUVRIRE L'ŒIL

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}.$$

$\vec{0}$ se lit « vecteur nul » (origine et extrémité confondues).

$\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont deux vecteurs opposés. Si l'un se note $\vec{u}$, l'autre se note $-\vec{u}$.

VOIR AUSSI :

Parallélogrammes, 88-89-90
Translation,
Vecteurs, 101-102

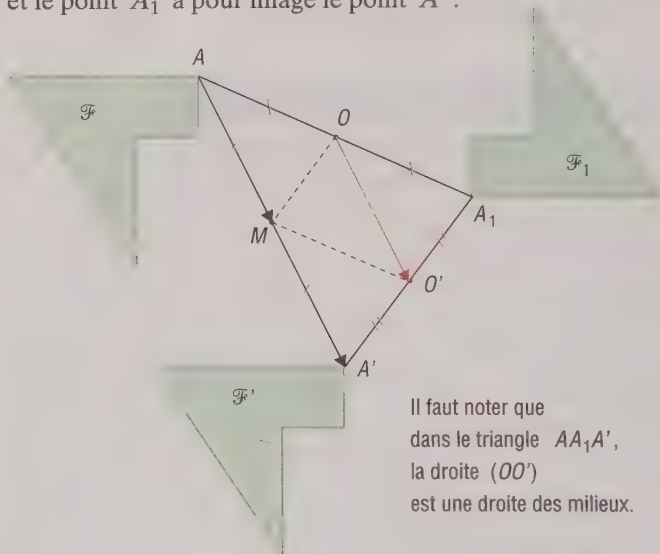
COMPOSITION
DE DEUX SYMÉTRIES
CENTRALES

COMPRENDRE

3^e ● Qu'est-ce que la composition de deux symétries centrales ?

Dans la symétrie de centre O , la figure $\mathcal{F}$ a pour image la figure $\mathcal{F}_1$ et le point A a pour image A_1 .

Dans la symétrie de centre O' , la figure $\mathcal{F}_1$ a pour image $\mathcal{F}'$ et le point A_1 a pour image le point A' .



Il faut noter que dans le triangle AA_1A' , la droite (OO') est une droite des milieux.

OUVRIR
L'ŒIL

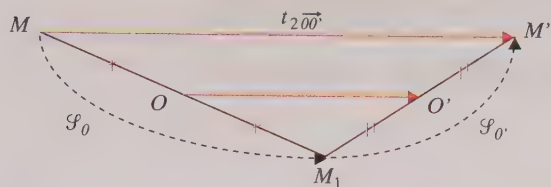
La notation $2\overrightarrow{OO'}$ désigne $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OO'}$, c'est une simple commodité d'écriture en troisième.

• Pour la symétrie de centre O suivie de la symétrie de centre O' , la figure $\mathcal{F}$ a pour image $\mathcal{F}'$ et le point A a pour image le point A' . On dit que l'on a composé deux symétries centrales.

• Pour la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ que l'on note aussi : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA'}$ ou $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OO'}$ ou $2\overrightarrow{OO'}$, la figure $\mathcal{F}$ a pour image la figure $\mathcal{F}'$.

• Conclusion

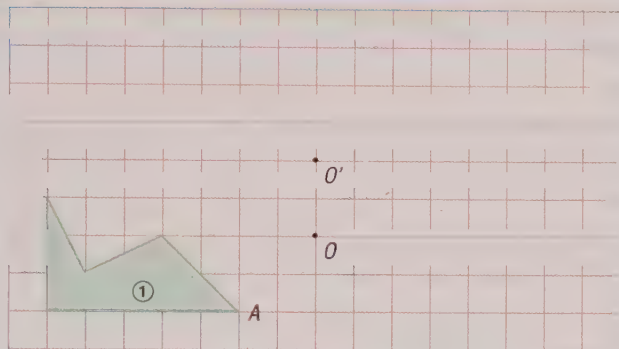
Deux symétries centrales successives de centres O et O' distincts peuvent être remplacées par une translation de vecteur $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OO'}$ ou $2\overrightarrow{OO'}$.



$$\overrightarrow{MM'} = 2 \overrightarrow{OO'}$$

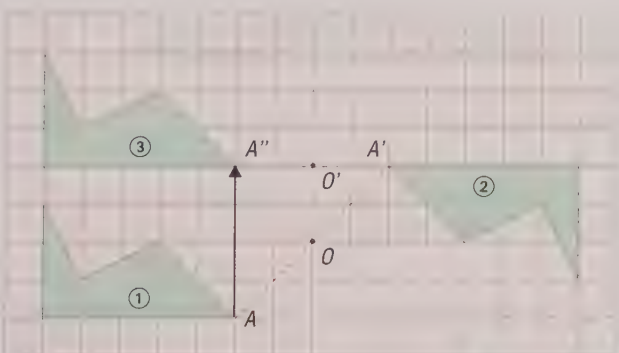
UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e



- La symétrie de centre O transforme la figure ① en figure ②.
 La symétrie de centre O' transforme la figure ② en figure ③.
 a) Dessiner en utilisant le quadrillage, les figures ② et ③.
 b) Quelle transformation permet d'obtenir la figure ③ directement à partir de la figure ① ?

a)



- b) À partir de la figure ①, on obtient la figure ③ par une suite de deux symétries de centres différents O et O' .

La figure ③ est aussi l'image de la figure ① dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AA''}$ et $\overrightarrow{AA''} = 2\overrightarrow{OO'}$.

VOIR AUSSI :

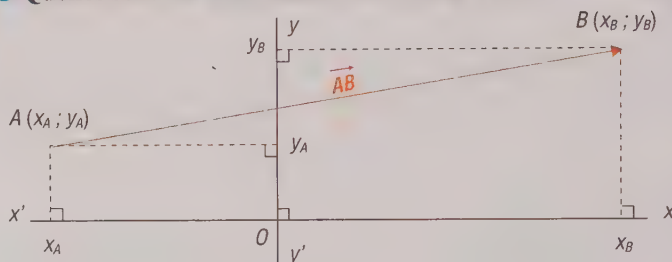
Droite des milieux, 73

Symétrie centrale, 97-98

Translation, 101-102-103

COORDONNÉES
D'UN VECTEUR

COMPRENDRE

3^e ● Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$?

Ce sont des nombres ; la première coordonnée est notée $X_{\overrightarrow{AB}}$; la seconde est notée $Y_{\overrightarrow{AB}}$:

$$X_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A \text{ et } Y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A.$$

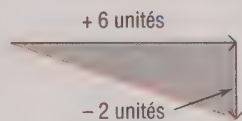
3^e ● Vecteurs égaux et coordonnées

Deux vecteurs égaux ont des coordonnées respectivement égales.

Des vecteurs qui ont des coordonnées respectivement égales sont égaux.

OUVRIR
L'ŒIL

Observer :



On va de l'origine du vecteur vers son extrémité en suivant le quadrillage, d'abord parallèlement à l'axe des abscisses, puis parallèlement à l'axe des ordonnées.

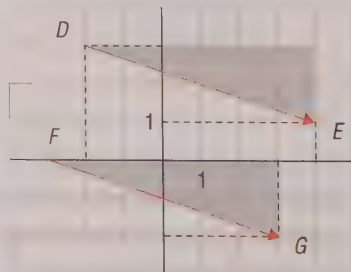
UTILISER SES CONNAISSANCES

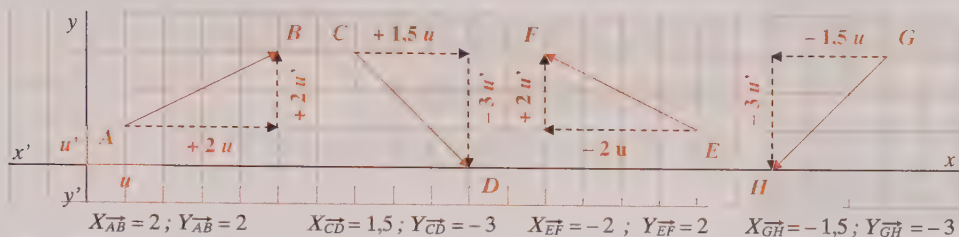
3^e ● Soit un plan muni d'un repère.a) Placer $D(-2; 3)$, $E(4; 1)$ et $F(-3; 0)$.b) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DE}$.

c) Soit G l'image de F dans la translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$. Calculer les coordonnées du point G . Placer G .

a) et b) $X_{\overrightarrow{DE}} = x_E - x_D = 4 - (-2) = 6$. $Y_{\overrightarrow{DE}} = y_E - y_D = 1 - 3 = -2$.Les coordonnées de $\overrightarrow{DE}$ sont 6 et -2.

c) Puisque G est l'image de F dans la translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$, on a l'égalité $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{DE}$.





Cette égalité vectorielle entraîne l'égalité des coordonnées des vecteurs :

$$X_{\overrightarrow{FG}} = X_{\overrightarrow{DE}} = 6 \text{ et } x_G - x_F = 6 \text{ donnent } x_G = 6 + (-3) = 3.$$

$$Y_{\overrightarrow{FG}} = Y_{\overrightarrow{DE}} = -2 \text{ et } y_G - y_F = -2 \text{ donnent } y_G = -2 + 0 = -2.$$

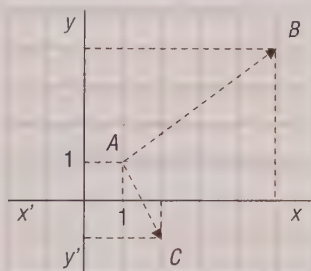
Les coordonnées du point G sont 3 et -2.

3° • Dans un plan muni d'un repère, placer $A(1; 1)$, $B(5; 4)$ et $C(2; -1)$.

a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

b) Construire la somme $\overrightarrow{AS}$ des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Lire les coordonnées de S ; calculer les coordonnées de S .



$$a) X_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = 5 - 1 = 4 ;$$

$$Y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = 4 - 1 = 3 ;$$

$$X_{\overrightarrow{AC}} = x_C - x_A = 2 - 1 = 1 ;$$

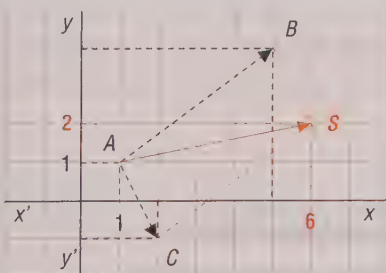
$$Y_{\overrightarrow{AC}} = y_C - y_A = -1 - 1 = -2.$$

b) Construction de $\overrightarrow{AS}$.

La somme $\overrightarrow{AS}$ est la diagonale du parallélogramme construit à partir de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

On lit : $x_S = 6$ et $y_S = 2$. Vérifions par le calcul.

On a : $\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AC}$. On en déduit : $X_{\overrightarrow{BS}} = X_{\overrightarrow{AC}} = 1$ et $Y_{\overrightarrow{BS}} = Y_{\overrightarrow{AC}} = -2$.



De $X_{\overrightarrow{BS}} = 1$, on déduit

$$x_S - x_B = 1, \text{ puis}$$

$$x_S = 1 + 5 = 6.$$

De $Y_{\overrightarrow{BS}} = -2$, on déduit

$$y_S - y_B = -2, \text{ puis}$$

$$y_S = -2 + 4 = 2.$$

Autres façons de calculer les coordonnées de S :

– on peut utiliser $\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{AB}$;

– on peut calculer les coordonnées du milieu de $[BC]$ et dire que c'est le milieu de $[AS]$.

VOIR AUSSI :

Vecteurs, 102

Addition vectorielle, 103

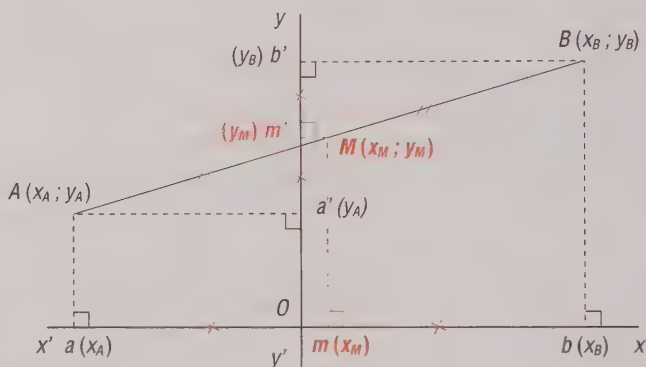
Repérage dans le plan, 25

COORDONNÉES
DU MILIEU
D'UN SEGMENT

COMPRENDRE

3^e ● Comment trouver les coordonnées du milieu d'un segment ?

Soient dans un plan muni d'un repère deux points A et B et le milieu M du segment $[AB]$.

OUVRIR
L'ŒIL

● m est le milieu de $[ab]$;
 m' est le milieu de $[a'b']$.

● x_M est la « moyenne arithmétique » de x_A et de x_B .
 y_M est la « moyenne arithmétique » de y_A et de y_B .

● Si $2x_M = x_A + x_B$
et $2y_M = y_A + y_B$
alors M est le milieu
de $[AB]$.

M étant le milieu de $[AB]$, on a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Cela entraîne l'égalité des coordonnées :

- $\overrightarrow{XAM} = \overrightarrow{XMB}$ ou $x_M - x_A = x_B - x_M$ ou $2x_M = x_A + x_B$;
- $\overrightarrow{YAM} = \overrightarrow{YMB}$ ou $y_M - y_A = y_B - y_M$ ou $2y_M = y_A + y_B$.

Par suite, les coordonnées du milieu M de $[AB]$ sont données en fonction de celles de A et de B par les formules :

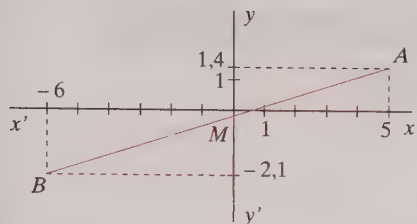
$$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B) \text{ et } y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B) .$$

UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● Dans un plan muni d'un repère, placer les points $E(-2,5; 4)$, $F(6; 6)$, $G(3,5; 1)$ et $H(-5; -1)$.

Calculer les coordonnées du milieu I de $[EG]$ et celles du milieu J de $[FH]$. Conclure.

Que dire du quadrilatère $EFGH$?



On peut trouver la position du milieu M de $[AB]$ par le calcul : $M(-0,5 ; -0,35)$,

car $\frac{-6+5}{2} = -0,5$ et $\frac{1,4-2,1}{2} = -0,35$.

• Coordonnées de I :

$$x_I = \frac{1}{2}(-2,5 + 3,5) = 0,5$$

$$y_I = \frac{1}{2}(4 + 1) = 2,5$$

• Coordonnées de J :

$$x_J = \frac{1}{2}(6 - 5) = 0,5$$

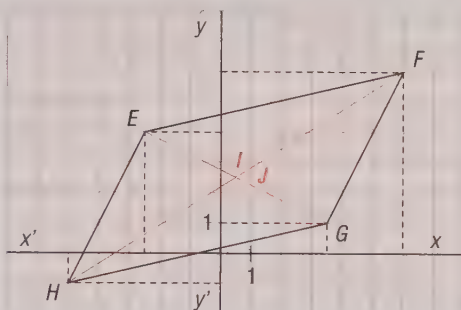
$$x_J = \frac{1}{2}(6 - 1) = 2,5$$

I et J ont les mêmes coordonnées : I et J sont confondus.

• $EFGH$ a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.

Or, si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme

Donc $EFGH$ est un parallélogramme.



Raisonnement en trois temps :

1^{er} temps

2^e temps

3^e temps

(cf. Parallélogrammes, 89)

● Dans un plan muni d'un repère placer les points :

$A(2; 5)$, $B(7; 3)$, $C(0; -4)$ et $D(-4; 4)$.

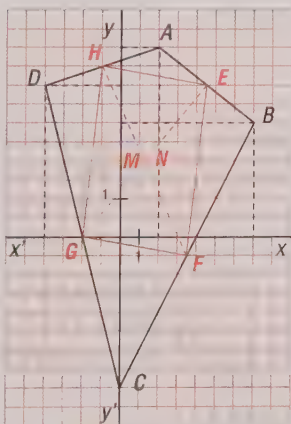
Calculer les coordonnées des points E , F , G et H , milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$, puis celles du milieu M de $[EG]$ et celles du milieu N de $[FH]$. Conclure.

$$\left. \begin{array}{l} A(2; 5) \\ B(7; 3) \\ C(0; -4) \\ D(-4; 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} E(4,5; 4) \\ G(-2; 0) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} A(2; 5) \\ B(7; 3) \\ C(0; -4) \\ D(-4; 4) \end{array}} \right\} M(1,25; 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} B(7; 3) \\ C(0; -4) \\ D(-4; 4) \\ A(2; 5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} F(3,5; -0,5) \\ H(-1; 4,5) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} B(7; 3) \\ C(0; -4) \\ D(-4; 4) \\ A(2; 5) \end{array}} \right\} N(1,25; 2)$$

M et N ont les mêmes coordonnées ; donc M et N sont confondus.

$EFGH$ a ses diagonales qui se coupent en leur milieu ; donc $EFGH$ est un parallélogramme.



VOIR AUSSI :

Règle graduée, longueur, 49

Droite des milieux, 73

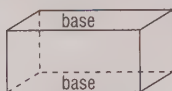
Parallélogrammes, 88-89-90

Repérage dans un plan, 25

PARALLÉLÉPIPÈDE RECTANGLE CUBE

COMPRENDRE

6^e • Qu'est-ce qu'un parallélépipède rectangle ?



Développement
ou patron

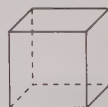


Un parallélépipède rectangle
(ou pavé droit) comporte :

- 6 faces rectangulaires (2 bases parallèles et 4 faces latérales, deux à deux parallèles),
- 12 arêtes (quatre à quatre parallèles et de même longueur),
- 8 sommets.

• Qu'est-ce qu'un cube ?

C'est un parallélépipède rectangle particulier ;
les 6 faces sont carrées ;
les 12 arêtes ont même longueur.



REPRÉSENTER

6^e • Comment le représenter en perspective cavalière ?

OUVRIR L'ŒIL

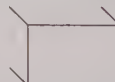
Parmi les arêtes visibles
des autres faces, trois
semblent fuir vers l'arrière
en oblique ; on les appelle
des *fuyantes*.



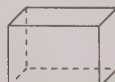
La face avant est représentée par un rectangle, en grandeur réelle ou à l'échelle ; elle n'est pas déformée.



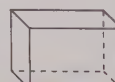
On dessine ensuite les « fuyantes » visibles, **parallèles**, de même longueur mais raccourcies.



En troisième lieu, on trace les deux arêtes visibles de la face arrière.

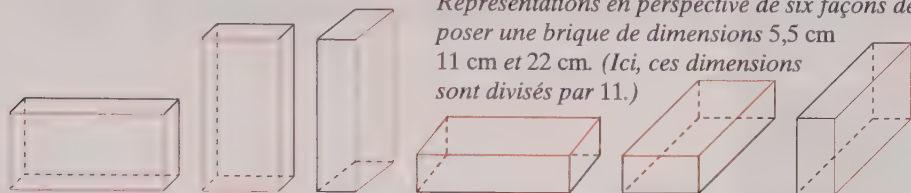


On complète enfin avec des pointillés afin que la face arrière soit superposable à la face avant.



Œil devant,
dessus et à droite.

Œil devant,
dessus et à gauche.



Représentations en perspective de six façons de poser une brique de dimensions 5,5 cm 11 cm et 22 cm. (Ici, ces dimensions sont divisés par 11.)

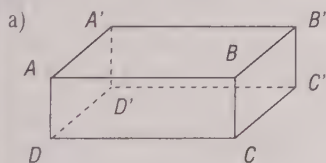
UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Voici le début de la représentation en perspective cavalière d'un pavé droit.

a) Reproduire et achever cette représentation sachant qu'on appelle les autres fuyantes $[AA']$, $[CC']$, $[DD']$.



b) Nommer les deux bases, la face arrière et trois arêtes de même longueur que $[BB']$.
c) Faire un patron de ce pavé droit sachant que $ABCD$ est en vraie grandeur et que $BB' = 14$ mm.

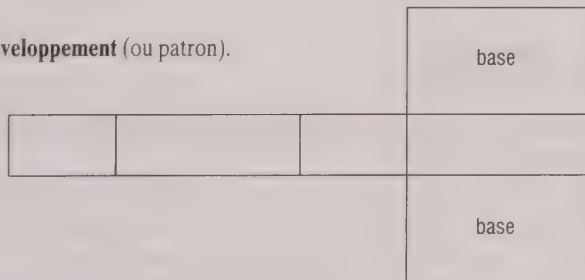


b) Bases : $DCC'D'$; $ABB'A'$.

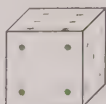
Face arrière : $A'B'C'D'$.

$[AA']$, $[CC']$, $[DD']$ ont même longueur que $[BB']$.

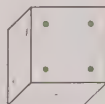
c) Développement (ou patron).



6^e ● Voici le patron d'un dé. Représenter ce cube en perspective cavalière en mettant le « quatre » en face avant.



Œil devant,
au-dessus
et à droite.



Œil devant,
au-dessous
et à gauche.



L'arête $[AD]$ (figure a)) est perpendiculaire aux deux droites (DC) et (DD') contenues dans le plan de base.

On montre qu'elle est perpendiculaire à toutes les autres droites de ce plan passant par D [en particulier à la droite (DC')].

On dit qu'elle est perpendiculaire à la base $DCC'D'$.

VOIR AUSSI :
Aires et volumes, 113

PRISMES DROITS

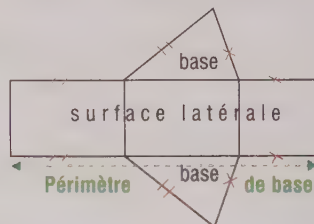
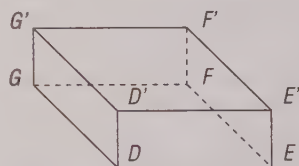
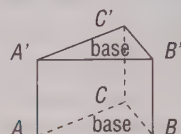
COMPRENDRE ET DÉCRIRE

5^e ● Qu'est-ce qu'un prisme droit ?

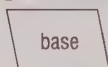
- Un prisme droit est un solide limité par :
 - deux bases (polygones superposables dans des plans parallèles ; ABC triangle et $DEFG$ parallélogramme) ;
 - des faces latérales rectangulaires (en nombre égal à celui des côtés d'une base).

- Les arêtes latérales (autant que de sommets dans chaque base) sont parallèles et ont même longueur ; cette longueur est la **hauteur** du prisme.

- Développement (ou patron) du prisme à base triangulaire.



REPRÉSENTER

5^e ● Comment représenter un prisme droit dont la base est un parallélogramme ?

Ceil devant,
dessus
et à droite.

On suppose qu'il repose sur une face latérale rectangulaire. La face avant est représentée par un parallélogramme, en grandeur réelle ou à l'échelle ; elle n'est pas déformée.



On dessine les fuyantes visibles, parallèles, et de même longueur, mais raccourcies.

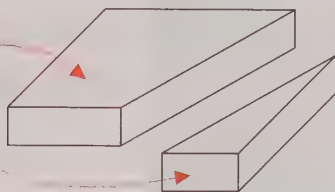


On dessine ensuite les deux arêtes visibles de la face arrière.



On complète avec des pointillés afin que la face arrière soit superposable à la face avant.

Du parallélépipède rectangle ou prisme droit à bases rectangulaires ...



... à deux autres prismes droits.

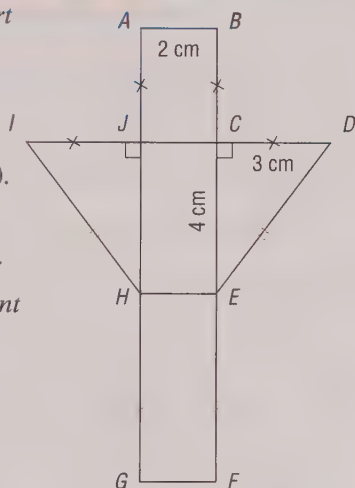
UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● Reproduire sur du papier fort le développement ci-contre d'un prisme droit à base triangulaire en respectant les dimensions (commencer par le triangle rectangle DCE).

Découper et coller (penser aux languettes pour pouvoir coller).

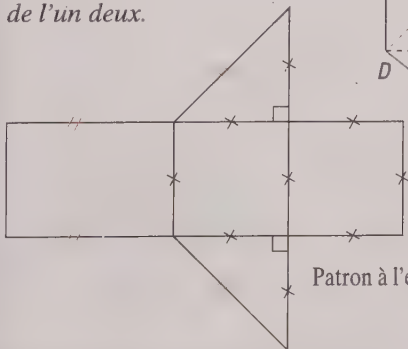
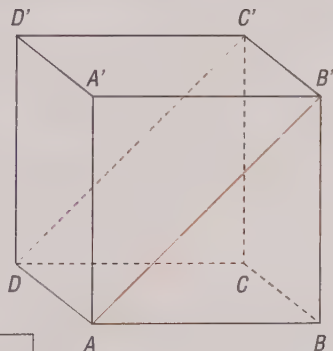
Représenter ce prisme en mettant en avant une face triangulaire.

Voici trois étapes du dessin (échelle 1/4).



5^e ● En coupant un cube d'arête 3 cm comme indiqué ci-contre, on obtient deux prismes droits.

Faire le patron de l'un deux.



Patron à l'échelle 1/2.

EN SAVOIR PLUS

● L'arête $[A'A']$ (figure ci-contre) est perpendiculaire aux droites (AB) et (AD) du plan de base $ABCD$. Elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan de base qui passent par A ; on dit que $(A'A')$ est perpendiculaire au plan de base $ABCD$.

VOIR AUSSI :

Parallélogrammes, 88-89-90
Aires et volumes, 113



CYLINDRE DE
RÉVOLUTION

COMPRENDRE ET DÉCRIRE

OUVRIR
L'ŒIL

On peut **représenter** un cylindre de révolution comme :

– sur la figure ① :

cylindre reposant sur une génératrice ;

– sur la figure ② :

cylindre reposant sur une base ; la base circulaire est représentée par une ellipse tracée à main levée, en évitant des pointes :

Oui

Non

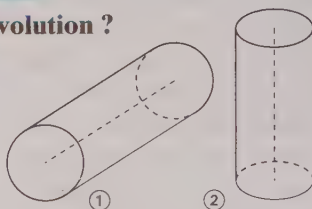
5^e ● Qu'est-ce qu'un cylindre de révolution ?

Un cylindre de révolution ou **cylindre droit à bases circulaires** est un solide limité par :

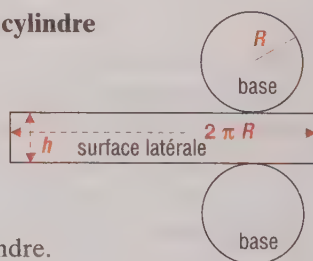
– deux disques (**bases**) de même rayon et situés dans des plans parallèles ;

– une surface latérale appelée **surface cylindrique**.

La droite (OO') joignant les centres des disques de base est l'**axe** du cylindre. Elle est perpendiculaire aux bases. Les segments $[AA']$, $[BB']$, ... de la surface cylindrique, parallèles à l'axe, sont les **génératrices** du cylindre. La longueur commune aux génératrices est la **hauteur** du cylindre.

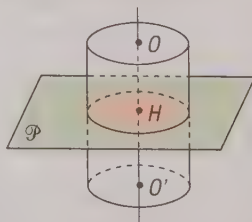
5^e ● Comment faire le patron d'un cylindre de révolution ?

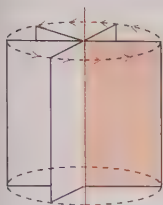
Dans le développement (ou patron) d'un cylindre de révolution, la longueur du rectangle est égale au périmètre du disque de base et sa largeur est la hauteur du cylindre.

3^e ● Intersection d'un cylindre de révolution et d'un plan perpendiculaire à son axe

L'intersection du cylindre et du plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire en H à l'axe (OO') est un disque de centre H et de même rayon que les bases.

Remarque : l'intersection par un plan parallèle à l'axe est un rectangle.





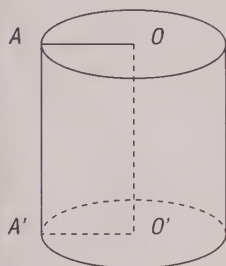
Axe

On aborde ici le cylindre **droit** (l'axe est **perpendiculaire** aux bases), appelé aussi cylindre de **révolution** (révolution signifie ici, comme en astronomie, « tour complet »). La révolution d'un rectangle autour de l'un de ses côtés engendre (donne naissance à) un cylindre ; le côté extérieur, qui devient « génératrice », engendre (génère) la surface cylindrique.

UTILISER SES CONNAISSANCES

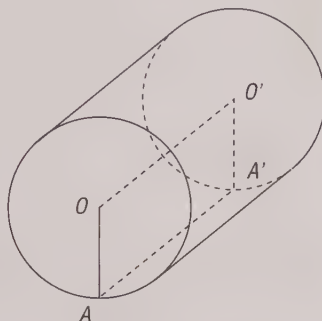
5^e ● Un tube cylindrique a une hauteur de 25 mm et un rayon de base de 12 mm.

Représenter ce tube, lorsqu'une des bases repose sur la table, puis avec une génératrice en contact avec la table.



$$OO' = AA' = 25 \text{ mm} .$$

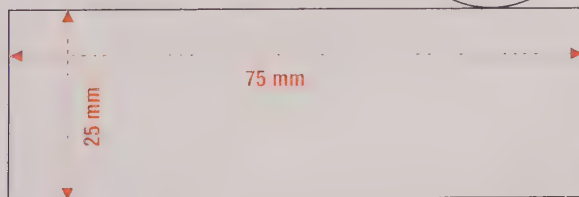
$$O'A' = OA = 12 \text{ mm} .$$



$$O'A' = OA = 12 \text{ mm} .$$

$$AA' = OO' \text{ (moins de 25 mm)} .$$

5^e ● Calculer le périmètre du disque de base du cylindre ci-dessus, puis dessiner un patron du cylindre.



On utilise $p = 2\pi R$:
 $2\pi R = 2 \times 3,14 \times 12 = 75,36$;
d'où $p \approx 75 \text{ mm}$.

EN SAVOIR PLUS

Sur la figure ci-contre : (OO') est perpendiculaire aux plans des bases. (OO') est perpendiculaire à tous les rayons des disques de base. (Cf. « En savoir plus » : Parallélépipède rectangle, cube, 107 ; Prismes droits, 108.)

VOIR AUSSI :

Cercle, disque, 51

Aires et volumes, 113

CÔNE DE RÉVOLUTION

COMPRENDRE ET DÉCRIRE

EN SAVOIR PLUS

● L'axe d'un disque est :

- la droite perpendiculaire à son plan en son centre ;
 - l'ensemble de tous les points de l'espace équidistants de tous les points du cercle.
- On dit aussi **axe du cercle**.



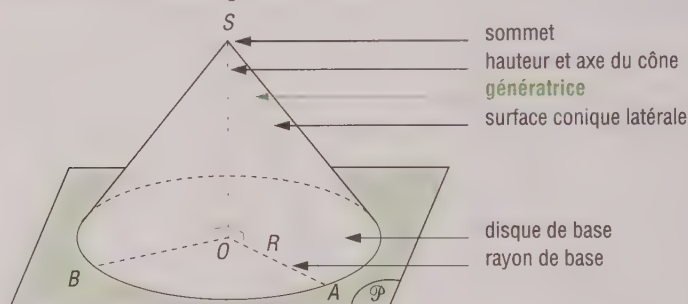
- Pour savoir si une droite et un plan sont perpendiculaires, se reporter aux rubriques

« En savoir plus » :

- Parallélépipède rectangle, cube, 107 ;
- Prismes droits, 108 ;
- Cylindre de révolution, 109 ;
- Boule et sphère, 112.

4^e 3^e ● Qu'est-ce qu'un cône de révolution ?

Un cône de révolution est limité par un disque de base et une surface latérale conique.



Ce cône de révolution peut être engendré par la rotation complète du triangle rectangle SOA autour de l'axe (SO) .

Son sommet appartient à l'axe du disque de base, c'est-à-dire à la perpendiculaire en son centre au plan qui le contient.

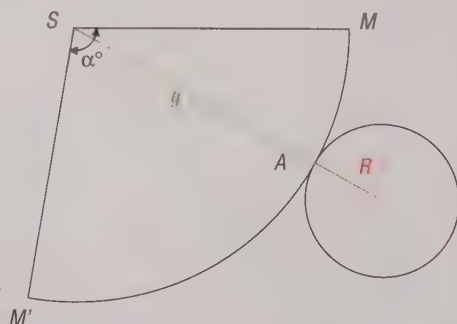
4^e 3^e ● Comment fabrique-t-on un cône de révolution ?

Le **développement** (ou patron) d'un cône de révolution se compose d'un **disque** et d'un **secteur de disque**.

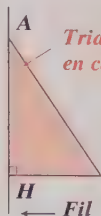
- Le disque est la base du cône ; son rayon R est connu.

- Le secteur donne la surface conique ; son rayon est la génératrice g ; la longueur de l'arc $\widehat{MM'}$ est $2\pi R$; La mesure de α° de son angle au centre est obtenue en écrivant

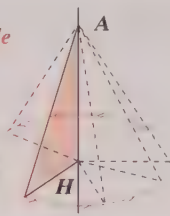
$$2\pi R = 2\pi g \times \frac{\alpha}{360}$$



$$g = 36 \text{ mm} ; R = 10 \text{ mm} ; \alpha^\circ = 360^\circ \times \frac{R}{g} = 100^\circ$$



Triangle rectangle
en carton



La révolution (tour complet) d'un triangle rectangle autour de l'un des côtés de l'angle droit engendre (donne naissance à) un **cône de révolution**.

L'hypoténuse génère (engendre) la surface conique, d'où le nom de génératrice.

UTILISER SES CONNAISSANCES

- 4^e
3^e ● La figure ci-contre représente une partie du patron d'un cône de révolution (la surface conique). Quel est le rayon du disque de base ?

Calcul de la longueur de l'arc $\widehat{AB}$.

Un cercle de 3,6 cm de rayon a une longueur égale à $(2 \times \pi \times 3,6)$ cm ou $7,2\pi$ cm.

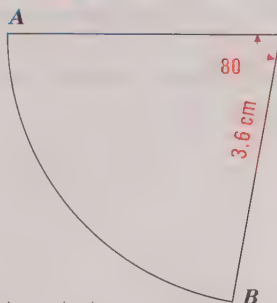
On sait que les longueurs des arcs sont proportionnelles aux angles au centre qui les interceptent (cf. Tableaux de proportionnalité, 119).

Angles au centre (en °)	360	80
Longueur des arcs (cm)	$7,2\pi$	x

$$x \times 360 = 80 \times 7,2\pi ; \text{ d'où } x = 1,6\pi.$$

La longueur de l'arc $\widehat{AB}$ est égale au périmètre du disque de base.

Le périmètre du disque de base est $1,6\pi$ cm ; si R est son rayon, c'est aussi $2\pi R$ cm. Donc $R = 0,8$. Le rayon du disque de base est 0,8 cm.



- 4^e
3^e ● Dessiner le patron d'un cône de révolution sachant que le rayon du disque de base est 3 cm et que chaque génératrice à 5 cm de long.

Découper ce patron et coller.

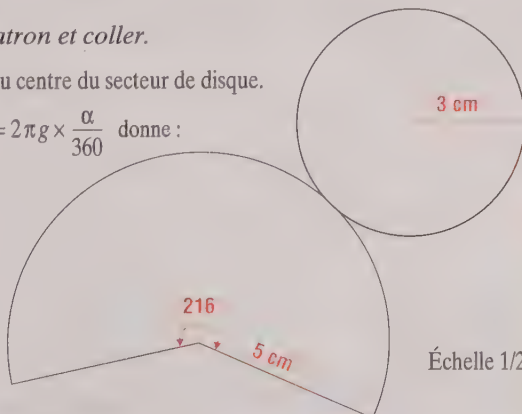
Calcul de l'angle au centre du secteur de disque.

La formule $2\pi R = 2\pi g \times \frac{\alpha}{360}$ donne :

$$\alpha = 360 \times \frac{R}{g};$$

$$\alpha = 360 \times \frac{3}{5};$$

$$\alpha = 216^\circ.$$



Échelle 1/2

VOIR AUSSI :

Aires et volumes, 114

Pythagore et l'espace, 115

Sections planes, 116

Proportionnalité, 119



TRAVAUX GÉOMÉTRIQUES

Les solides

PYRAMIDES

COMPRENDRE ET DÉCRIRE

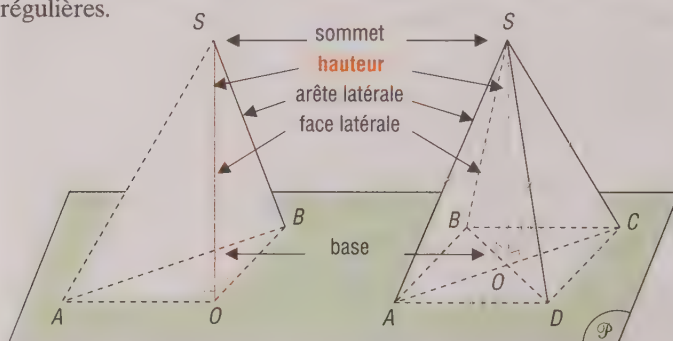


EN
SAVOIR
PLUS

L'axe d'un polygone régulier est l'axe du cercle circonscrit à sa base (cf. Cône de révolution, 110).

4^e 3^e ● Qu'est-ce qu'une pyramide ?

Toutes les pyramides ont une base polygonale et des faces latérales triangulaires ; en Troisième apparaissent les pyramides régulières.



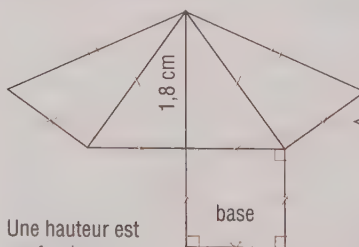
Dans cette pyramide, la base est triangulaire et la hauteur est confondue avec une arête latérale.

Cette pyramide est une pyramide **régulière** à base carrée.

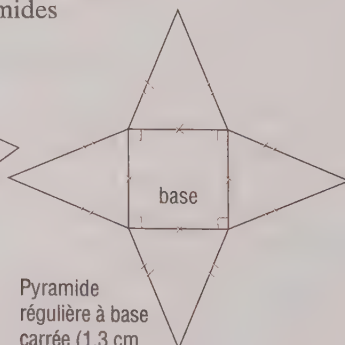
Une pyramide régulière est une pyramide qui a pour base un **polygone régulier** (cf. Polygones réguliers, 100) et dont le sommet appartient à l'axe du polygone de base.

4^e 3^e ● Comment fabrique-t-on une pyramide ?

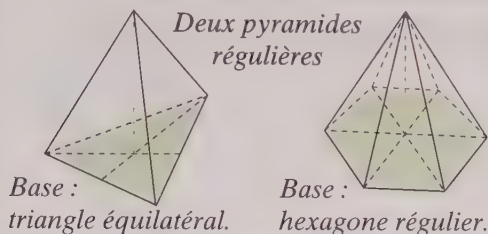
Voici les patrons de deux pyramides à bases carrées :



Une hauteur est confondue avec une arête latérale ;
base carrée : 1,3 cm de côté ;
hauteur : 1,8 cm.



Pyramide régulière à base carrée (1,3 cm de côté) ;
arête latérale : 1,7 cm.



On aborde dans cette fiche deux sortes de pyramides :

- la pyramide dont une arête latérale est une hauteur ;
- les pyramides régulières à trois, quatre ou six faces latérales.

UTILISER SES CONNAISSANCES

4^e 3^e ● Reproduire les deux patrons précédents en multipliant les dimensions données par 2.

Découper et coller (languettes ou ruban adhésif) ; placer devant vous ces deux pyramides et les dessiner.

Pour dessiner la pyramide régulière, il faut calculer la longueur SO .

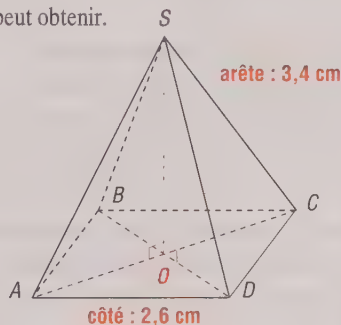
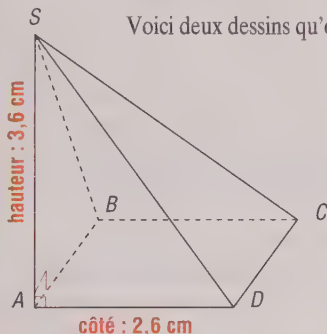
• Dans SOA : $SA^2 = SO^2 + OA^2$, d'où $SO^2 = 3,4^2 - OA^2 = 11,56 - OA^2$.

• Dans OAD : $OA = OD$ et $\widehat{AOD} = 90^\circ$;

$2OA^2 = 2,6^2$, d'où $OA^2 = 3,38$.

• $SO^2 = 11,56 - OA^2 = 11,56 - 3,38 = 8,18$; $SO \approx 2,9$.

Voici deux dessins qu'on peut obtenir.



4^e 3^e ● On étudie les faces de la pyramide de gauche (pyramide en coin). (SA) est perpendiculaire au plan de base ; les triangles SAB , SAC et SAD sont rectangles en A ; calculer SB , SC et SD . Vérifier que les triangles SDC et SBC sont rectangles.

• Dans SAB , rectangle en A , on a : $SB^2 = SA^2 + AB^2 = 3,6^2 + 2,6^2$;

il en résulte $SB^2 = 19,72$; $SB = \sqrt{19,72}$, soit $SB \approx 4,4$ cm.

• Dans SAD un calcul identique donne $SD = \sqrt{19,72}$, soit $SD \approx 4,4$ cm.

• Dans SAC , rectangle en A , on a : $SC^2 = SA^2 + AC^2 = 3,6^2 + AC^2$.

Calcul de AC^2 dans le triangle ADC rectangle en D :

$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 2,6^2 + 2,6^2 = 13,52$.

$SC^2 = 12,96 + 13,52 = 26,48$; $SC = \sqrt{26,48}$, soit $SC \approx 5,1$ cm.

• Dans le triangle SDC , $SC^2 = 26,48$ et $SD^2 + DC^2 = 19,72 + 2,6^2 = 26,48$.

SDC est rectangle en D ; de même, SBC est rectangle en B .

OUVRIR L'ŒIL

Attention aux effets de la perspective !

Sur les figures ci-contre, voici ce qui est en vraie grandeur :

– pyramide de gauche : la face SAD et $[BC]$;

– pyramide de droite : $[AD]$ et $[BC]$ ainsi que la hauteur $[SO]$.

(Pour le calcul de SO , on utilise le théorème de Pythagore.)

VOIR AUSSI :

Polygones réguliers, 100

Aires et volumes, 114

Pythagore et l'espace, 115

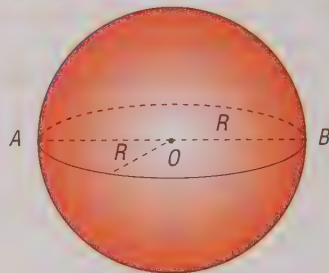
Sections planes, 116

BOULE ET SPHÈRE

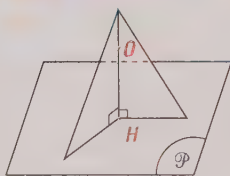
COMPRENDRE ET DÉCRIRE

3^e ● Qu'est-ce qu'une boule ?

Une boule est un **solide** (objet plein) constituée de tous les points de l'espace situés à une distance inférieure ou égale à R (rayon de la boule) d'un point fixe O appelé centre de la boule.

3^e ● Qu'est-ce qu'une sphère ?

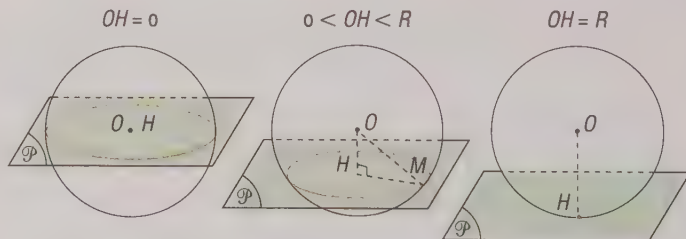
La sphère est la **surface** d'une boule. Elle est constituée de tous les points de l'espace situés à une distance égale à R (rayon de la sphère) d'un point fixe O , centre de la sphère.

OUVRIR
L'ŒIL

Avec deux équerres disposées comme ci-dessus, on obtient la distance de O au plan $\mathcal{P}$: c'est OH .

3^e ● Intersection d'une sphère et d'un plan

Cette intersection est un cercle ; elle dépend de la distance du centre O de la sphère au plan $\mathcal{P}$; elle peut être réduite à un point.



$\mathcal{P}$ coupe la sphère suivant un grand cercle.

$\mathcal{P}$ coupe la sphère suivant un cercle dont le rayon HM dépend de la distance OH .

$\mathcal{P}$ est tangent à la sphère.

(Cf. Rayon de la section plane d'une sphère, 115.)

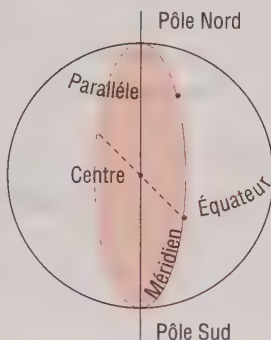


*On aborde ici la boule et sa surface : la sphère.
Le lien avec la géographie est naturel et l'observation
d'un globe terrestre aidera la lecture et la
compréhension de ces notions.*

REPRÉSENTER

3^e ● Comment représenter une sphère ou une boule ?

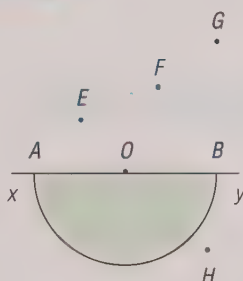
On peut se contenter d'un cercle (contour : pleine lune), ou alors d'un cercle et d'une ellipse représentant un grand cercle (premier dessin, page ci-contre) ; on peut lui donner du relief en géographie avec équateur, méridien (demi-grand cercle limité aux deux pôles) et parallèle (cercle d'intersection par un plan parallèle à celui de l'équateur).



UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● En effectuant un tour complet (révolution) autour de xy , le demi-disque de centre O et de diamètre $[AB]$, engendre une boule $\mathcal{B}$.

On a : $AB = 24$ mm, $OE = 9$ mm, $OF = 12$ mm, $OG = 21$ mm, $OH = 15$ mm.



- Préciser le centre et le rayon de la boule $\mathcal{B}$.
- Nommer des points appartenant à la boule et des points extérieurs ; y a-t-il des points sur la sphère $\mathcal{S}$ limitant $\mathcal{B}$?

- O est le centre de $\mathcal{B}$; le diamètre est AB , soit 24 mm ; donc le rayon de $\mathcal{B}$ est 12 mm.
- Les points O , A , B , E , et F appartiennent à $\mathcal{B}$. Les points G et H sont extérieurs à $\mathcal{B}$. Les points A , B et F appartiennent à $\mathcal{S}$.

VOIR AUSSI :

Aires et volumes, 114
Pythagore et l'espace, 115

AIRES ET VOLUMES

PAVÉ - PRISME - CYLINDRE

COMPRENDRE

6^e 5^e • Quelles sont les unités d'aire ?

L'unité d'aire est le **mètre carré (m²)**.

Les unités d'aire vont de 100 en 100.

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 ; 1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2 ; 1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2 \dots$$

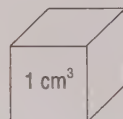
• Quelles sont les unités de volume ?

L'unité de volume est le **mètre cube (m³)**.

Les unités de volume vont de 1 000 en 1 000.

$$1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ dm}^3 ; 1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3 ;$$

$$1 \text{ cm}^3 = 1\,000 \text{ mm}^3 \dots$$



• Les unités de capacité

Les unités de volume sont reliées à celles de capacité.

Par exemple : $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$; $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$...

Les unités de capacité vont de 10 en 10.

OUVRIR L'ŒIL

• Dans une formule, il faut exprimer :

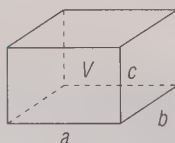
– toutes les longueurs avec la même unité ;

– longueurs, aires et volumes

avec des unités correspondantes (par exemple, cm, cm², cm³).

• $V = B \times h$ donne aussi :

$$B = \frac{V}{h} \text{ et } h = \frac{V}{B}$$

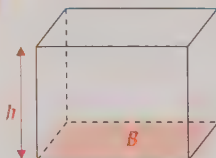


$$V = a \times b \times c$$

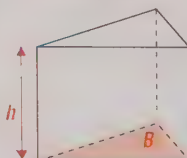
CONNAÎTRE

6^e
5^e

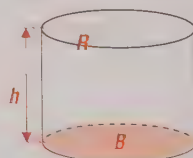
Pavé droit



Prisme droit



Cylindre de révolution



• Quel est le volume de ces trois solides ?

Volume = aire de base $\times$ hauteur :

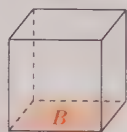
$$V = B \times h$$

• Quelle est l'aire de ces trois solides ?

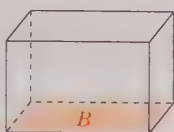
• Aire totale = aire latérale + aire des deux bases.

• Aire latérale = périmètre de base $\times$ hauteur.

Une seule formule pour tous ces solides : $\text{Volume} = \text{Base} \times \text{hauteur}$!



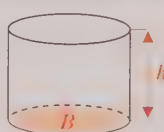
$$V = a^3$$



$$V = a \times b \times c$$



$$V = B \times h$$



$$V = \pi R^2 h$$

$$V = B \times h$$

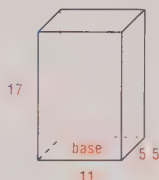
6^e 5^e ● Quelques cas particuliers de volumes ou d'aires

- Cube d'arête a : $V = a \times a \times a = a^3$ et aire totale $= 6a^2$.
- Volume du parallélépipède rectangle : $V = a \times b \times c$.
- Aire de base du cylindre : $B = \pi R^2$.
- Aire latérale du cylindre : $2\pi R h$.
- Volume du cylindre : $V = \pi R^2 h$.

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e 5^e ● Un parallélépipède rectangle (boîte de sucre en poudre) a pour dimensions 17 cm, 11 cm et 5,5 cm.

- Quelle est l'aire totale de cette boîte ?
- Quel est son volume ?

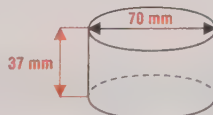


- 6^e a) Aire de base : $60,5 \text{ cm}^2$ ($5,5 \times 11$).
 Périmètre de base : 33 cm ($11 + 5,5 \times 2$).
 Aire latérale : 561 cm^2 (33×17).
 Aire totale : 682 cm^2 ($561 + 60,5 \times 2$).

- 5^e b) On utilise : $V = B \times h$; $60,5 \times 17 = 1\,028,5$.
 Le volume est de $1\,028,5 \text{ cm}^3$ (proche de 1 dm^3 ou 1 L).

5^e ● Une boîte de conserve est un cylindre de révolution de hauteur 37 mm et de diamètre de base égal à 70 mm.

- Quelle est son aire totale ?
- Quel est son volume ?



- a) Rayon de base : 35 mm ($70 : 2$).
 Aire d'une base $\approx 3\,848 \text{ mm}^2$ ($35 \times 35 \times \pi$).
 Aire latérale $\approx 8\,137 \text{ mm}^2$ ($2 \times \pi \times 35 \times 37$).
 Aire totale $\approx 15\,833 \text{ mm}^2$ ($3\,848 \times 2 + 8\,137$).
 L'aire totale est environ 158 cm^2 .

- b) On applique $V = \pi R^2 h$; on a $\pi \times 35^2 \times 37 \approx 142\,393$.
 Le volume est environ 142 cm^3 .

VOIR AUSSI :

Cercle, disque, 51
 Parallélépipède, 107
 Prismes droits, 108
 Cylindre, 109
 Unités, p. 282-283

AIRES ET VOLUMES
CÔNE, PYRAMIDE, BOULE

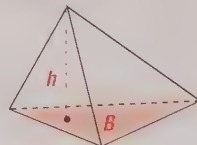
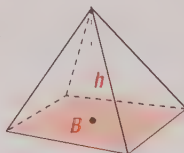
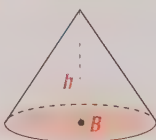
CONNAÎTRE

OUVRIR
L'ŒIL

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h \text{ donne}$$

$$3V = Bh; \text{ d'où :}$$

$$B = \frac{3V}{h} \text{ et } h = \frac{3V}{B}.$$

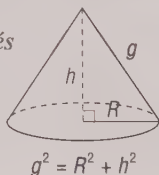
4^e ● Volume du cône de révolution et de la pyramide

$$\bullet \text{ Volume} = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur} :$$

$$V = \frac{1}{3} B \times h.$$

$$\bullet \text{ Aire totale} = \text{aire latérale} + \text{aire de la base}.$$

Particularités



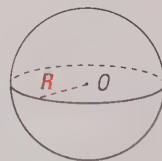
$$g^2 = R^2 + h^2$$

Pour le cône $\left\{ \begin{array}{l} \text{aire de base : } \pi R^2 \\ \text{aire latérale : } \pi Rg \end{array} \right.$

3^e ● Volume de la boule - Aire de la sphère

$$\text{Volume } V \text{ de la boule : } V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

$$\text{Aire } A \text{ de la sphère : } A = 4\pi R^2.$$



UTILISER SES CONNAISSANCES

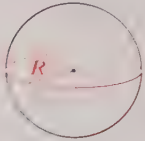
4^e ● Une pyramide à base carrée a un volume de $12,5 \text{ dm}^3$ et une hauteur de 60 cm. Quel est le côté du carré ?

Soit x le côté du carré en centimètre. $12,5 \text{ dm}^3 = 12\,500 \text{ cm}^3$.

$$V = \frac{1}{3} B \times h \text{ aboutit à : } 12\,500 = \frac{1}{3} \times x^2 \times 60.$$

$$\text{On a } 20x^2 = 12\,500; \text{ d'où } x^2 = 625 \text{ et } x = 25.$$

Le côté du carré est de 25 cm.

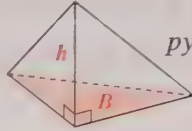


Volume de la boule :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

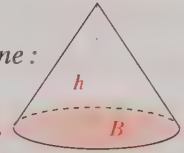
Aire de la sphère :

$$S = 4 \pi R^2.$$



Volume de la pyramide et du cône :

$$V = \frac{1}{3} B \times h.$$



- 4^e ● La pyramide du Louvre a une base carrée de 35,4 m de côté et une hauteur intérieure de 21,65 m.

Quel volume d'air contient-elle ?

$$V = \frac{1}{3} B \times h ; \quad \frac{1}{3} \times 35,4^2 \times 21,65 = 9\,043,638.$$

La pyramide contient environ 9 044 m³ d'air.

- 4^e ● Un cornet de glace a la forme d'un cône de révolution de 30 mm de rayon de base. Il a une contenance de 125 mL. Quelle est sa hauteur ?

$$125 \text{ mL} = 125 \text{ cm}^3 ; \quad 30 \text{ mm} = 3 \text{ cm}.$$

On a la formule :

$$V = \frac{1}{3} B \times h.$$

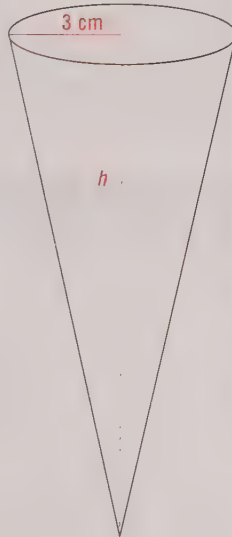
$$\text{Donc } 3V = B \times h.$$

$$3V \text{ est égal à } (125 \times 3) \text{ cm}^3 \text{ ou } 375 \text{ cm}^3.$$

$$B \text{ est égal à } (\pi \times 3^2) \text{ cm}^2 \text{ ou } 9\pi \text{ cm}^2.$$

$$\text{Donc } h = (375 : 9\pi) \text{ cm} ; \quad 375 : 9\pi \approx 13,3.$$

La hauteur du cornet est environ 13,3 cm.



- 3^e ● Une boule de pétanque a un diamètre de 74 mm. Déterminer son aire et son volume.

Le rayon de la boule est : (74 : 2) mm ou 37 mm.

On calcule l'aire avec $A = 4 \pi R^2$; on obtient $4 \times \pi \times 37^2 \approx 17\,203$.

L'aire est environ 172 cm².

On calcule le volume avec $V = \frac{4}{3} \pi R^3$; on trouve $\frac{4}{3} \pi \times 37^3 \approx 212\,175$.

Le volume est environ 212 cm³.

VOIR AUSSI :

Cercle, disque, 51

Aire d'un triangle, 69

Boule, 112

Cône, 110

Pyramides, 111

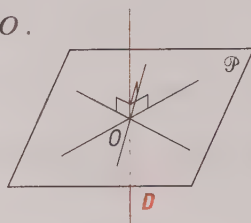
Unités, p. 282-283

PYTHAGORE
ET L'ESPACE

COMPRENDRE

3^e ● Une droite D coupe un plan $\mathcal{P}$ en O .

- Dire que D est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ en O c'est dire que D est perpendiculaire à toutes les droites du plan qui passent par O .



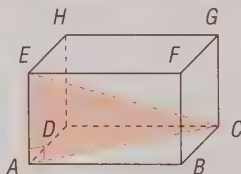
- Si une droite D , sécante en O à un plan, est perpendiculaire à deux droites du plan passant par O alors elle est perpendiculaire à toutes celles du plan qui passent par O ; elle est donc perpendiculaire au plan en O .

OUVRIR
L'ŒIL

Les quatre diagonales $[EC]$, $[FD]$, $[GA]$ et $[HB]$ du parallélépipède rectangle ont la même longueur. (Voir figure ci-contre.)

UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● Diagonale d'un parallélépipède rectangle



$(EA) \perp (AB)$ et $(EA) \perp (AD)$.

Donc (EA) est perpendiculaire à toutes les droites du plan $ABCD$ passant par A , en particulier à (AC) .

Le triangle EAC est rectangle en A ; on peut calculer EC (théorème de Pythagore).

Sachant que :

$AE = 10$ cm, $AD = 15$ cm et $AB = 30$ cm, calculer la longueur des diagonales du parallélépipède.

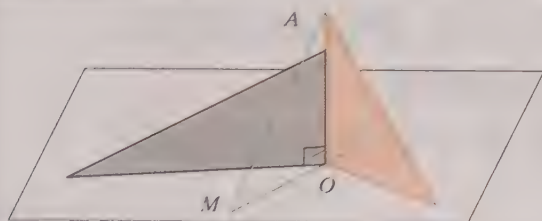
Dans le triangle EAC rectangle en A , on a : $EC^2 = AE^2 + AC^2$

Dans le triangle ABC rectangle en B , on a : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Donc $EC^2 = AE^2 + AB^2 + BC^2 = AE^2 + AB^2 + AD^2$

$EC^2 = 10^2 + 30^2 + 15^2 = 100 + 900 + 225 = 1\,225$;

d'où $EC = 35$ cm.



Le théorème de Pythagore, énoncé dans un plan, s'applique dans l'espace dès que l'on fait apparaître des triangles rectangles ; ici AOM est rectangle en O .

3° ● Rayon de la section plane d'une sphère

L'intersection d'un plan $\mathcal{P}$ et d'une sphère est un cercle.

Le diamètre de la sphère

passant par le centre H du cercle

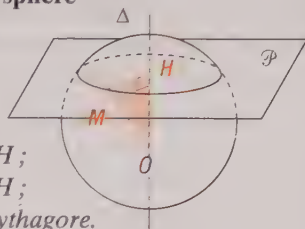
est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ en H ;

le triangle OHM est rectangle en H ;

on peut appliquer le théorème de Pythagore.

Sachant que $OH = 8$ cm et $OM = 10$ cm ,

calculer le rayon du disque d'intersection et son aire.



Dans OHM rectangle en H , on a : $OM^2 = OH^2 + HM^2$.

$HM^2 = OM^2 - OH^2 = 100 - 64 = 36$;

$HM = 6$ cm .

L'aire $\mathcal{A}$ du disque est égale à $\pi \times HM^2$. Donc $\mathcal{A} \approx 113$ cm².

4° ● Génératrice d'un cône

L'axe du cercle $\mathcal{C}$ (ou axe du cône) est perpendiculaire en H au plan de base.

Il en résulte que SHM est rectangle

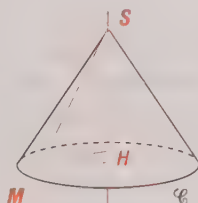
en H et on peut appliquer le théorème de Pythagore.

Déterminer la génératrice d'un cône

de révolution sachant que sa hauteur

est 12 cm et le rayon de base 5 cm.

En déduire son aire latérale.



• Dans le triangle SHM , on a : $SM^2 = SH^2 + HM^2$;

il vient $SM^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$;

d'où $SM = 13$ cm .

• L'aire latérale d'un cône de révolution est égale à πRg , soit ici :

$$\pi \times 5 \times 13 .$$

L'aire latérale est environ 204 cm².

4° ● Calculs sur les pyramides

Cf. Pyramide, 111.

VOIR AUSSI :

Parallélépipède

rectangle, 107

Boule et sphère, 112

Cône de révolution, 110

Aires et volumes, 113-114

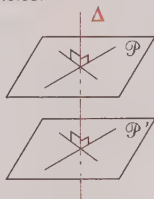
Unités, p. 202-203

SECTIONS PLANES DES CÔNES ET DES PYRAMIDES

COMPRENDRE

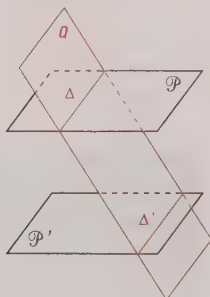
OUVRIR L'ŒIL

- Si deux plans sont perpendiculaires à une même droite alors ils sont parallèles.



- Si deux plans sont parallèles et si une droite est perpendiculaire à l'un, alors elle est perpendiculaire à l'autre.

- Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un, coupe l'autre et les intersections sont des droites parallèles.



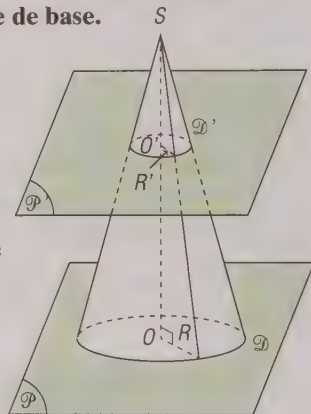
- 3^e ● L'intersection d'un cône et d'un plan parallèle à la base est un disque, réduction du disque de base.

Soit le cône de sommet S et de base $\mathcal{D}$; son axe est (SO) , son rayon de base R .
L'aire de la base est $\mathcal{A}$;
le volume du cône est $\mathcal{V}$.

Le plan $\mathcal{P}'$ est parallèle au plan de base $\mathcal{P}$; il est perpendiculaire à l'axe (SO) en O' .

R' et $\mathcal{A}'$ étant respectivement le rayon et l'aire du disque $\mathcal{D}'$, et $\mathcal{V}'$ le volume du cône de sommet S et de base $\mathcal{D}'$ on a :

$$\text{« Si } \frac{SO'}{SO} = k \text{ alors } \frac{R'}{R} = k, \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = k^2 \text{ et } \frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}} = k^3. \text{ »}$$



- 3^e ● L'intersection d'une pyramide et d'un plan parallèle à la base est un polygone, réduction du polygone de base.

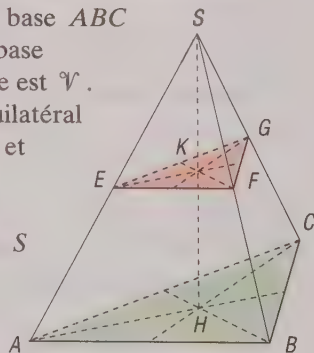
Soit la pyramide de sommet S , de base ABC (triangle équilatéral). L'aire de la base est $\mathcal{A}$, et le volume de la pyramide est $\mathcal{V}$.

- Le plan contenant le triangle équilatéral EFG est parallèle au plan de base et perpendiculaire à (SH) .

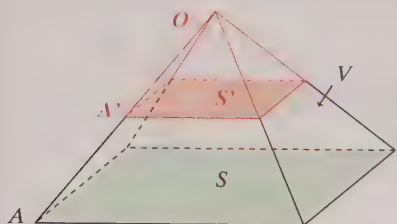
- $\mathcal{A}'$ est l'aire de EFG ; $\mathcal{V}'$ est le volume de la pyramide de sommet S et de base EFG .

On peut affirmer : $(EF) \parallel (AB)$,
 $(FG) \parallel (BC)$ et $(GE) \parallel (CA)$.

$$\text{« Si } \frac{SK}{SH} = k \text{ alors } \frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{GE}{CA} = k, \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = k^2 \text{ et } \frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}} = k^3. \text{ »}$$



Ces résultats sont valables pour toutes les pyramides.



$$\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{1}{4} \text{ et } \frac{V'}{V} = \frac{1}{8}.$$

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ et } \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

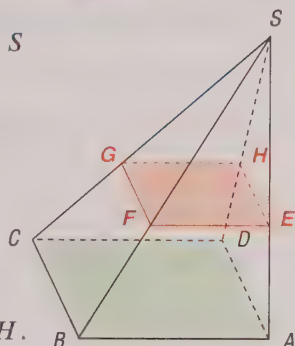
UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● La figure ci-contre (échelle 1/2) représente une pyramide de sommet S dans laquelle la base $ABCD$ est un rectangle et la hauteur $[SA]$, une des arêtes latérales.

$SA = 8 \text{ cm}$; $AB = 5 \text{ cm}$;

$AD = 3 \text{ cm}$; $SE = 5 \text{ cm}$.

Le plan passant par E , perpendiculaire à (SA) et parallèle au plan $ABCD$ coupe la pyramide selon le rectangle $EFGH$.



a) Calculer le périmètre et l'aire du rectangle $ABCD$ et le volume de la pyramide $SABCD$.

b) Calculer le périmètre et l'aire du rectangle $EFGH$ et le volume de la pyramide $SEFGH$.

a) $(5 + 3) \times 2 = 16$; le périmètre de $ABCD$ est 16 cm .

$5 \times 3 = 15$; l'aire de $ABCD$ est 15 cm^2 .

Le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3} \times B \times h$.

Ici, on trouve : $\frac{1}{3} \times 15 \times 8 = 40$; le volume de $SABCD$ est 40 cm^3 .

b) $\frac{SE}{SA} = \frac{5}{8} = 0,625$.

– Quand on passe du rectangle $ABCD$ au rectangle $EFGH$, les longueurs sont multipliées par $0,625$ et l'aire par $0,625^2$.

Le périmètre de $EFGH$ est $16 \times 0,625 \text{ cm}$ ou 10 cm .

L'aire de $EFGH$ est $15 \times 0,625^2 \text{ cm}^2$ ou $5,859 375 \text{ cm}^2$.

L'aire de $EFGH$ est environ $5,9 \text{ cm}^2$.

– Quand on passe de la pyramide $SABCD$ à la pyramide $SEFGH$ le volume est multiplié par $0,625^3$.

$40 \times 0,625^3 = 9,765 625$.

Le volume de $SEFGH$ est environ $9,8 \text{ cm}^3$.

VOIR AUSSI :

Cône de révolution, 110

Pyramides, 111

Aires et volumes, 113-114

Pythagore et l'espace, 115

Unités, p. 282-283

MULTIPLIER PAR $\frac{a}{b}$

COMPRENDRE

6^e ● Comment multiplier par $\frac{a}{b}$ (a et b entiers ; $b \neq 0$) ?

– Le produit d'un décimal d par le quotient $\frac{a}{b}$ est noté $d \times \frac{a}{b}$ (ou $\frac{a}{b} \times d$) et est égal à :

$$(d \times a) : b$$

multiplication par a division par b

– L'ordre des opérations peut être inversé ; $d \times \frac{a}{b}$ est aussi égal à $(d : b) \times a$ mais ce n'est intéressant que si la division de d par b tombe juste.

– Il va de soi que si, manifestement, la division de a par b tombe juste, on calcule d'abord le quotient.

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Calculer le plus rapidement possible :

a) $25 \times \frac{21}{7}$; b) $12 \times \frac{77}{11}$; c) $63 \times \frac{3}{7}$; d) $22,1 \times \frac{4}{17}$.

a) $25 \times \frac{21}{7} = 25 \times 3 = 75$;

b) $12 \times \frac{77}{11} = 12 \times 7 = 84$;

c) $63 \times \frac{3}{7} = (63 : 7) \times 3 = 9 \times 3 = 27$;

d) $22,1 \times \frac{4}{17} = (22,1 \times 4) : 17 = 88,4 : 17 = 5,2$.

6^e ● Un champ a une forme triangulaire. Ses dimensions sont $AB = 21$ m, $BC = 14$ m et $CA = 28$ m. On veut faire un plan de ce terrain en multipliant toutes les dimensions par $\frac{1}{700}$.

a) Déterminer les dimensions du dessin.

b) Construire le plan du champ.

$$d \times \frac{a}{b} \begin{cases} \rightarrow (d \times a) : b \\ \rightarrow d \times (a : b) \\ \rightarrow (d : b) \times a \end{cases}$$

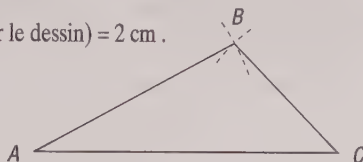
$$d \begin{cases} \times a \div b = \\ \times (a \div b) = \\ \div b \times a = \end{cases}$$

a) $21 \times \frac{1}{700} = 21 : 700 = 0,03$; AB (sur le dessin) = $0,03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$.

$14 \times \frac{1}{700} = 14 : 700 = 0,02$; BC (sur le dessin) = 2 cm .

$28 \times \frac{1}{700} = 28 : 700 = 0,04$;

AC (sur le dessin) = 4 cm .



b) On trace le segment $[AC]$, puis les arcs de cercle de centres A et C et de rayons respectifs 3 cm et 2 cm , pour avoir B ;
et enfin les segments $[AB]$ et $[BC]$.

6^e ● Avec la calculatrice, calculer :

a) $126,2 \times \frac{7}{9}$; b) $11,2 \times \frac{8}{13}$; c) $46 \times \frac{11}{19}$.

Donner les approximations à 0,1 près par défaut et par excès.

a) $126,2 \times \frac{7}{9} \approx 98,1$ amène à l'affichage **98.15555556** .

Les approximations à 0,1 près sont 98,1 et 98,2.

b) $11,2 \times \frac{8}{13} \approx 6,8$ amène à l'affichage **6.892307692** .

Les approximations à 0,1 près sont 6,8 et 6,9.

c) $46 \times \frac{11}{19} \approx 26,6$ amène à l'affichage **26.63157895** .

Les approximations à 0,1 près sont 26,6 et 26,7.

6^e ● a) Quelle est la longueur égale aux $\frac{7}{5}$ de 82 km ?

b) Quelle est la mesure en degrés d'un angle égal aux $\frac{3}{4}$ d'un angle plat ? et d'un angle égal aux $\frac{2}{3}$ d'un angle droit ?

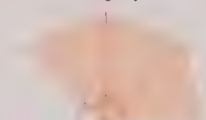
a) $82 \times \frac{7}{5} = (82 \times 7) : 5 = 574 : 5 = 114,8$; $\frac{7}{5}$ de 82 km , c'est $114,8 \text{ km}$.

b) $180^\circ \times \frac{3}{4} = (180^\circ : 4) \times 3 = 45^\circ \times 3 = 135^\circ$; $\frac{3}{4}$ de 180° , c'est 135° .

$90^\circ \times \frac{2}{3} = (90^\circ : 3) \times 2 = 30^\circ \times 2 = 60^\circ$; $\frac{2}{3}$ de 90° , c'est 60° .



3/4 d'un angle plat



2/3 d'un angle droit



VOIR AUSSI :

Constructions de triangles, 67

Approximations décimales, 6

Séquences de calcul, 18

APPLIQUER UN POURCENTAGE

COMPRENDRE

6^e ● Comment appliquer un pourcentage ?

Prendre 5 % (lire : « cinq pour cent ») d'une quantité c'est multiplier sa mesure par $\frac{5}{100}$. 5 % s'appelle un **pourcentage**.

$$N \times \frac{5}{100} \left\{ \begin{array}{l} N \times 0,05 \\ (N \times 5) : 100 \\ (N : 100) \times 5 \end{array} \right\} 5 \% \text{ de } N.$$

Exemple

5 % de 3 000 € c'est $(3\,000 \times 0,05)$ € ou 150 €.

UTILISER SES CONNAISSANCES

6^e ● Que représentent : a) 9 % de 2 000 € ; b) 7 % de 120 m ; c) 3 % de 740 kg ; d) 12 % de 7 000 litres ; e) 6 % de 18 000 habitants ?

a) $2\,000 \times \frac{9}{100} = (2\,000 : 100) \times 9 = 20 \times 9 = 180$; réponse : 180 € ;

b) $120 \times \frac{7}{100} = (120 \times 7) : 100 = 840 : 100 = 8,4$; réponse : 8,4 m ;

c) $740 \times 0,03 = 22,2$; réponse : 22,2 kg ;

d) $7\,000 \times \frac{12}{100} = (7\,000 : 100) \times 12 = 70 \times 12 = 840$; réponse : 840 L ;

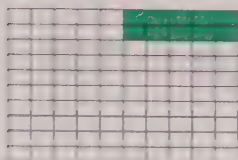
e) $18\,000 \times 0,06 = 1\,080$; réponse : 1 080 habitants.

6^e ● Les 220 élèves de sixième ont eu à répondre à trois questions. À la première, 85 % des élèves ont répondu correctement ; à la seconde, ils n'étaient plus que 60 % ; à la troisième, la plus difficile, 35 % seulement ont donné la bonne réponse. Combien d'élèves ont bien répondu à chacune des questions ?

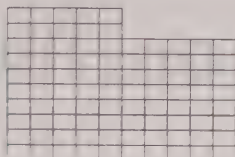
85 % de 220 c'est $220 \times 0,85$ ou 187 ; 1^{re} question : 187 élèves.

60 % de 220 c'est $220 \times 0,60$ ou 132 ; 2^e question : 132 élèves.

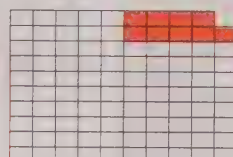
35 % de 220 c'est $220 \times 0,35$ ou 77 ; 3^e question : 77 élèves.



on
enlève
10 %



on
ajoute
10 %



où
est-il
passé ?

- 6^e ● Une enquête statistique de 1999 montre que 70 % des collégiens lisent des bandes dessinées, 52 % lisent des romans, 34 % des ouvrages de science-fiction, 10 % des pièces de théâtre et 7 % de la poésie ; un même collégien peut lire plusieurs sortes d'ouvrages.

Combien de collégiens cela fait-il chaque fois pour une population de 1 200 collégiens ?

Voici les réponses :

B.D.	Romans	S.F.	Théâtre	Poésie
840	624	408	120	84

Exemples de calculs :

$$1\,200 \times 0,7 = 840 ; 1\,200 \times 0,52 = 624 .$$

- 6^e ● Un libraire achète chez un éditeur une douzaine de livres à 4,5 € pièce. L'éditeur lui fait une remise de 22 % et lui donne un treizième livre gratuitement.

Quel est le prix de revient d'un livre pour le libraire ?

Prix des 12 livres avant remise : $4,5 \text{ €} \times 12 = 54 \text{ €}$.

Montant de la remise : $54 \text{ €} \times 0,22 = 11,88 \text{ €}$.

Dépense du libraire : $54 \text{ €} - 11,88 \text{ €} = 42,12 \text{ €}$.

Prix de revient d'un livre : $42,12 \text{ €} : 13 = 3,24 \text{ €}$.

- 6^e ● Un article de 800 € subit au cours du mois de décembre une hausse de 10 %, puis une baisse de 10 %.

Quelle est sa valeur finale ?

Dans un premier temps, l'article augmente de : $800 \text{ €} \times 0,1 = 80 \text{ €}$.

Sa nouvelle valeur affichée est de $800 \text{ €} + 80 \text{ €} = 880 \text{ €}$.

Puis il baisse de : $880 \text{ €} \times 0,1 = 88 \text{ €}$.

Sa valeur finale est : $880 \text{ €} - 88 \text{ €} = 792 \text{ €}$.

VOIR AUSSI :

Multiplier par a/b , 117

TABLEAUX DE
PROPORTIONNALITÉ

COMPRENDRE

- 5^e ● Qu'est-ce qu'un tableau de proportionnalité ?
Qu'est-ce qu'un coefficient de proportionnalité ?

1	5	7	10,5
3,6	18	25,2	37,8

× 3,6

■ Les nombres de la seconde ligne s'obtiennent en multipliant ceux de la première ligne par 3,6 ; on dit que les nombres de la seconde ligne sont **proportionnels** à ceux de la première et que **le coefficient de proportionnalité** est 3,6.

■ Pour remplir un tableau de proportionnalité, connaissant la première ligne et le coefficient, avec une calculatrice, on utilise une touche « opérateur constant ».

OUVRIR
L'ŒIL

À propos des produits en croix.
Le tableau peut être complet avec quatre cases, ou bien il peut s'agir d'un extrait de tableau plus vaste dans lequel on prend deux colonnes :

5	10,5
18	37,8

La propriété reste vraie :
 $5 \times 37,8 = 189$;
 $10,5 \times 18 = 189$.

- 5^e ● Les produits en croix

– Voici un tableau de proportionnalité à quatre cases :

a	c
b	d

– Si k est le coefficient de proportionnalité, on a :

$$k = \frac{b}{a} \quad \text{ou} \quad k = \frac{d}{c}, \quad \text{puis :} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

– On a aussi : $a \times d = b \times c$.

On dit que **les produits en croix sont égaux**.

UTILISER SES CONNAISSANCES

- 5^e ● Les tableaux ci-contre sont des tableaux de proportionnalité ; quels sont les nombres x et y ?
(On dit que l'on détermine une quatrième proportionnelle.)

10	8	1,5	y
9	x	0,8	1,2

Les produits en croix sont égaux.

Calcul de x : $10 \times x = 9 \times 8$; $x = 72 : 10$; $x = 7,2$.

Calcul de y : $0,8 \times y = 1,5 \times 1,2$; $y = 1,8 : 0,8$; $y = 2,25$.



La jauge indique la graduation 2.

La citerne a une contenance de 1 500 litres.

2	6
x	1 500

$$6 \times x = 2 \times 1\,500 ; x = 500.$$

Il reste 500 L.

5^e ● Calculer k , x , y et z pour que ce tableau soit un tableau de proportionnalité.

12	7	y	5	
8,4	x	5,6	z	

– La donnée de 12 et de son correspondant 8,4 permet de calculer k :

$$12 \times k = 8,4 ; k = 8,4 : 12 = 0,7.$$

– Calcul de x : $x = 7 \times 0,7 = 4,9$.

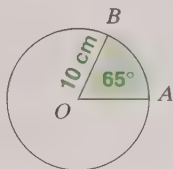
– Calcul de y : $y \times 0,7 = 5,6$; d'où $y = 5,6 : 0,7 = 8$.

– Calcul de z : $z = 5 \times 0,7 = 3,5$.

5^e 4^e ● Pour un cercle donné, la longueur d'un arc est proportionnelle à l'angle au centre associé. Pour un disque donné, l'aire d'un secteur est proportionnelle à son angle.

a) Quelle est la longueur d'un arc de ce cercle de 65° ?

b) Quelle est l'aire d'un secteur de 65° ? (Prendre $\pi \approx 3,14$.)



a) La longueur du cercle est $(2 \times 3,14 \times 10)$ cm ou 62,8 cm.

La longueur d'un arc est proportionnelle à l'angle au centre associé.

On a le tableau de proportionnalité :

Angle (en degrés)	360	65
Longueur de l'arc (en cm)	62,8	x

L'égalité des produits en croix donne : $360 \times x = 62,8 \times 65$; $x \approx 11,3$ cm.

b) L'aire du disque est $(3,14 \times 10 \times 10)$ cm² ou 314 cm².

L'aire du secteur est proportionnelle à son angle.

On a le tableau de proportionnalité :

Angle (en degrés)	360	65
Aire du secteur (en cm ²)	314	y

L'égalité des produits en croix donne :

$$360 \times y = 314 \times 65 \text{ et } y \approx 56,7 \text{ cm}^2.$$

VOIR AUSSI :

Arc de cercle, secteur de disque, 50

Longueur du cercle, aire du disque, 51

Arrondis, 7

RECONNAÎTRE UN TABLEAU DE PROPORTIONNALITÉ

COMPRENDRE

5^e ● Comment reconnaître un tableau de proportionnalité ?

- Il s'agit de savoir si les nombres de la seconde ligne sont obtenus en multipliant ceux de la première par un même nombre.

Si cela n'est pas évident, on peut :

- utiliser un nombre de la première ligne et son correspondant dans la seconde pour calculer le coefficient de proportionnalité éventuel (diviser le second par le premier) ;
- vérifier si ce coefficient éventuel convient pour tous les couples.

- Tableau à quatre cases

Si pour un tableau tel que :

a	b
c	d

on a : $a \times d = b \times c$,

alors on peut dire que c'est un tableau de proportionnalité.

UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous concernant des carrés :

Côté (en cm)	1	3	7	10
Périmètre (en cm)				
Aire (en cm ²)				

b) Le tableau donne le périmètre en fonction du côté (1^{re} et 2^e lignes).

Dans ce cas est-il un tableau de proportionnalité ?

c) Le tableau donne l'aire en fonction du côté (1^{re} et 3^e lignes).

Dans ce cas est-il un tableau de proportionnalité ?

a)

Côté (en cm)	1	3	7	10
Périmètre (en cm)	4	12	28	40
Aire (en cm ²)	1	9	49	100

Le prix de l'abonnement est-il proportionnel à la durée de l'abonnement ?

COGITO

3 mois	6 mois	1 an
54 €	98 €	180 €

Non

ERGO SUM

3 mois	6 mois	1 an
39 €	78 €	156 €

Oui

b) Le périmètre s'obtient en multipliant le côté par 4, nombre fixe.

C'est un tableau de proportionnalité.

On dit : « Le périmètre d'un carré est proportionnel à son côté. »

c) L'aire s'obtient en multipliant le côté par lui-même ; on ne multiplie pas les nombres de la première ligne par un même nombre pour obtenir ceux de la troisième ; ce n'est pas un tableau de proportionnalité.

5^e ● Les tableaux ci-dessous sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

①

3	17	10
2,1	11,9	7

②

7	4,9	9
10	7	13

① On appelle k l'éventuel coefficient de proportionnalité. On a :

$$3 \times k = 2,1 \text{ et } k = 2,1 : 3 = 0,7.$$

Convient-il pour les deux autres couples ?

$$17 \times 0,7 = 11,9 \text{ et } 10 \times 0,7 = 7.$$

C'est un tableau de proportionnalité, le coefficient est 0,7.

② De même : $7 \times k = 10$ et $k = \frac{10}{7}$. Convient-il ?

$$4,9 \times \frac{10}{7} = (4,9 \times 10) : 7 = 7.$$

$$9 \times \frac{10}{7} = (9 \times 10) : 7 = 90 : 7 \text{ ou } \frac{90}{7} ; \text{ cela est différent de } 13 \left(13 = \frac{91}{7} \right).$$

Le second n'est pas un tableau de proportionnalité.

5^e ● Parmi les quatre tableaux ci-dessous, quels sont ceux qui sont des tableaux de proportionnalité ?

①

4	12
9	27

②

10,5	3
11,2	3,2

③

17	43
21	53

④

41,2	206
17	85

① $4 \times 27 = 108$; $9 \times 12 = 108$; c'est un tableau de proportionnalité.

② $10,5 \times 3,2 = 33,6$; $11,2 \times 3 = 33,6$; oui.

③ $17 \times 53 = 901$; $21 \times 43 = 903$; non.

④ $41,2 \times 85 = 3\,502$; $17 \times 206 = 3\,502$; oui.

VOIR AUSSI :

Multiplier par a/b , 117

Proportionnalité, 119

Graphique d'une relation de proportionnalité, 131

ÉCHELLES

MOUVEMENT

UNIFORME



OUVRIR L'ŒIL

Les dimensions réelles et les dimensions sur une carte... doivent être données avec la même unité !

COMPRENDRE

5^e ● Qu'est-ce qu'un problème d'échelles ?

Les problèmes d'échelles sont des problèmes de proportionnalité.

Dimensions réelles	× échelle
Dimensions sur la carte, le plan...	

Si l'échelle est inférieure à 1, il s'agit d'une **réduction**.

Si l'échelle est supérieure à 1, il s'agit d'un **agrandissement**.

5^e ● Qu'est-ce qu'un mouvement uniforme ?

Pour certains mobiles, la distance parcourue d est proportionnelle à la durée t du déplacement, le coefficient de proportionnalité étant la vitesse v du mobile.

Durée	t
Distance	d

Pour ces mobiles, on dit que le **mouvement est uniforme**.

On a $d = v \times t$, ou ses variantes $v = \frac{d}{t}$ et $t = \frac{d}{v}$.

Dans ces formules d , v et t sont en unités correspondantes.

Les **correspondances usuelles** entre unités de longueur, de durée et de vitesse.

Distance	m	km	cm	km	km
Durée	s	h	s	s	min
Vitesse	m/s	km/h	cm/s	km/s	km/min

UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● Quelle est l'échelle d'une carte sur laquelle 12 cm représentent 24 km ?

Entre deux villages il y a 5,4 km ; quelle est la distance qui les sépare sur la carte ?

Deux villes sur la carte sont séparées par 8,5 cm ; quelle distance y a-t-il entre elles ?



D'un carrefour à l'autre, il y a :

■ 4,5 cm sur le plan :

$$\text{échelle} = \frac{1}{200\,000}$$

■ 18 min de trajet à vélo :

vitesse = 0,5 km/min.

Voici le tableau de proportionnalité traduisant l'énoncé :

Dimensions réelles (cm)	2 400 000	540 000	y	$\begin{array}{c} \leftarrow \times k \\ \rightarrow \end{array}$
Dimensions sur la carte (cm)	12	x	8,5	

On trouve : $k = \frac{12}{2\,400\,000} = \frac{1}{200\,000}$; l'échelle est $\frac{1}{200\,000}$.

$x = 2,7$ cm ; $y = 17$ km.

5^e ● Une cabine de téléphérique se déplace à la vitesse de 6 m/s.
Quelle est la distance parcourue en 1 min 27 s ?

En unités correspondantes, entre d la distance parcourue, v la vitesse et t la durée du déplacement, existe la relation $d = v \times t$.

$t = 1$ min 27 s = 60 s + 27 s = 87 s ; $v = 6$ m/s. Donc $d = 6 \times 87 = 522$ m.

La distance parcourue est 522 m.

5^e ● Une cabine de téléphérique a parcouru 1 100 m en 3 min 13 s.
Quelle est sa vitesse ?

En unités correspondantes, la vitesse v est donnée en fonction

de la distance parcourue d et de la durée t par : $v = \frac{d}{t}$.

$$3 \text{ min } 13 \text{ s} = (60 \times 3) + 13 \text{ s} = 193 \text{ s}.$$

v en m/s est égale à $\frac{1\,100}{193}$; soit $v \approx 5,7$ m/s.

La vitesse de la cabine est environ 5,7 m/s.

5^e ● Après un départ lancé une voiture a roulé très régulièrement
sur une distance de 1 km à la vitesse de 225 km/h.
Quel temps a-t-elle mis ?

En unités correspondantes, la durée t du déplacement est donnée en fonction

de d la distance parcourue et de v la vitesse par $t = \frac{d}{v}$:

$$t = \frac{1}{225} \text{ h}, \text{ soit } \left(\frac{1}{225} \times 3\,600 \right) \text{ s ou } 16 \text{ s}.$$

La voiture a mis 16 secondes pour parcourir le kilomètre.

VOIR AUSSI :

Fractions - addition, 15

Proportionnalité, 119-120

CALCULER UN POURCENTAGE

COMPRENDRE

5^e ● Quel est le pourcentage de ... ?

Voici deux problèmes :

1 - Un fermier F obtient 15 L de crème avec 125 L de lait.

Quel est le pourcentage de crème dans ce lait ?

2 - Sur les 397 électeurs inscrits d'une commune A ,

287 ont voté.

Quel est le pourcentage des votants par rapport aux inscrits ?

Ces problèmes ont la même structure. Dans les deux cas, il y a :

■ une situation réelle

- 125 litres de lait,
- 15 litres de crème.
- 397 électeurs inscrits,
- 287 votants.

■ une situation fictive

- 100 litres de lait,
- x litres de crème.
- 100 électeurs inscrits,
- y votants.

5^e ● Comment calculer un pourcentage ?

■ Dans tous les problèmes de ce genre, on « **conserve les proportions** ».

■ Résolution du premier problème

On a le tableau de proportionnalité :

Volume du lait	125	100
Volume de crème	15	x

Les produits en croix sont égaux : $125 \times x = 15 \times 100$.

Par suite : $x = 1\,500 : 125 = 12$.

Le pourcentage de crème dans le lait est 12 %.

■ Résolution du second problème

On a le tableau de proportionnalité :

Inscrits	397	100
Votants	287	y

Les produits en croix sont égaux : $397 \times y = 287 \times 100$.

Par suite : $y = 28\,700 : 397$; $y \approx 72,3$.

On dit : « Le pourcentage des votants par rapport aux inscrits est de 72,3 % » ou « 72,3 % des électeurs inscrits ont voté. »

OUVRIR L'ŒIL

● Veiller à bien remplir les tableaux de proportionnalité.

● On peut aussi écrire :

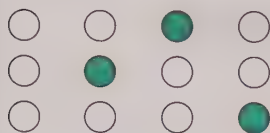
- 1^{er} tableau :

$$\frac{x}{100} = \frac{15}{125} (= 0,12) ;$$

- 2^e tableau :

$$\frac{y}{100} = \frac{287}{397} (\approx 0,723) ;$$

en notant sous deux formes le coefficient de proportionnalité.



Les jetons verts (3) sont une **partie** d'un tout (l'ensemble des 12 jetons).

S'il y avait 100 jetons en tout, il y aurait 25 jetons verts : **25 %**.

UTILISER SES CONNAISSANCES

- 5^e ● Un fermier *F* obtient 16 L de crème avec 140 L de son lait. Quel pourcentage de crème y a-t-il dans son lait ?

On a le tableau de proportionnalité :

Volume du lait	140	100
Volume de crème	16	<i>z</i>

Les produits en croix sont égaux :

$$140 \times z = 1\,600.$$

$$z = 1\,600 : 140 \approx 11,4.$$

Le pourcentage de crème dans son lait est d'environ 11,4 %.

- 5^e ● 560 des 792 électeurs inscrits dans une commune *B* ont voté. Quel est le pourcentage des votants par rapport aux inscrits ?

On a le tableau de proportionnalité :

Inscrits	792	100
Votants	560	<i>t</i>

Les produits en croix sont égaux :

$$792 \times t = 560 \times 100.$$

$$t = 56\,000 : 792 \approx 70,7.$$

Le pourcentage des votants par rapport aux inscrits est 70,7 % ou encore « 70,7 % des électeurs inscrits ont voté ».

- 5^e ● Sur les 600 objets fabriqués dans une usine, 30 sont défectueux. Quel est le pourcentage d'objets défectueux ?

On a le tableau de proportionnalité :

Nbre d'objets fabriqués	600	100
Nbre d'objets défectueux	30	<i>x</i>

Les produits en croix sont égaux :

$$600 \times x = 30 \times 100.$$

$$x = 3\,000 : 600 = 5.$$

Le pourcentage des objets défectueux est 5 %.

- 5^e ● Un objet coûtant 125 euros est soldé 115 euros. Quel est le pourcentage de baisse ?

$$\text{Baisse} = 125 - 115 = 10 \text{ (euros)}.$$

Ancien prix	125	100
Baisse	10	<i>x</i>

On a le tableau de proportionnalité :

$$\text{Les produits en croix sont égaux : } 125 \times x = 10 \times 100.$$

$$x = 1\,000 : 125 = 8. \text{ La baisse est de } 8 \text{ \%}.$$

EN SAVOIR PLUS

Lorsqu'un pourcentage ou **tant pour cent** est faible, on le remplace parfois par un **tant pour mille**.

Ainsi, au lieu de dire qu'un sucre vanillé contient 0,3 % de vanille, on dit qu'il en contient 3 pour 1 000, ce qui s'écrit 3 ‰.

VOIR AUSSI :

Multiplier par *a/b*, 117
Appliquer un pourcentage, 118
Produits en croix, 119
Des pourcentages pour comparer, 123

DES POURCENTAGES POUR COMPARER

COMPRENDRE

5^e ● Comment comparer avec des pourcentages ?

■ Le fermier F obtient 15 litres de crème pour 125 litres de lait, et le fermier F' 16 litres de crème pour 140 litres de lait. Lequel des deux a le lait le plus riche en crème ?

On ramène tout à 100 litres de lait (cf. Calculer un pourcentage, 122) ; on obtient 12 L pour F (12 %) et 11,4 L pour F' (11,4 %). On conclut : il y a, proportionnellement, plus de crème dans le lait du fermier F .

■ Il y a 287 votants pour 397 inscrits dans la commune A , et 560 votants sur 792 inscrits dans la commune B ; quelle est la commune dans laquelle, proportionnellement, on a le plus voté ? On ramène tout à 100 inscrits (cf. Calculer un pourcentage, 122) et on obtient 72,3 % pour A , et 70,7 % pour B .

Il y a eu, proportionnellement, plus de votants dans la commune A que dans la commune B .

UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● a) On obtient 510 kg de fer en traitant 1 400 kg de minerai. Quel pourcentage de fer y a-t-il dans ce minerai ?

b) Avec 2 410 kg d'un autre minerai, on obtient 930 kg de fer. Lequel des deux minerais est le plus riche en fer ?

Dans chaque cas, la quantité de fer obtenue est proportionnelle à la quantité de minerai traité.

a) On a le tableau de proportionnalité :

D'où $1\,400 \times x = 510 \times 100$;

$x = 51\,000 : 1\,400 \approx 36,4$.

Le minerai contient 36,4 % de fer.

Minerai (en kg)	1 400	100
Fer (en kg)	510	x

b) On a le tableau de proportionnalité :

D'où $2\,410 \times y = 930 \times 100$;

$y = 93\,000 : 2\,410 \approx 38,6$.

Le second minerai contient 38,6 % de fer : il est plus riche que le premier.

Minerai (en kg)	2 410	100
Fer (en kg)	930	y

CARAMOU

	23,00 €
	- 5,00 €
750 g	de remise

21,74 % ; c'est bien.

Quelle est la remise la plus avantageuse ?

CARADUR

	32,00 €
	- 7,00 €
750 g	de remise

21,88 % ; c'est mieux !

- 5^e ● Dans une classe A de 27 élèves, il y a 10 garçons.
 Dans une autre classe B, il y a 30 élèves et 11 garçons.
 Quelle est la classe dans laquelle il y a proportionnellement le plus de garçons ?

On doit imaginer deux classes de 100 élèves.

On a deux tableaux de proportionnalité :

Classe A

Élèves	27	100
Garçons	10	x

Classe B

Élèves	30	100
Garçons	11	y

L'égalité des produits en croix donne :

$$27 \times x = 10 \times 100 \text{ et } 30 \times y = 11 \times 100,$$

d'où $x \approx 37,0$ et $y \approx 36,7$.

Dans A, il y a 37,0 % de garçons ; dans B, il y en a 36,7 %.

C'est dans A qu'il y a, proportionnellement, le plus de garçons.

- 5^e ● Une somme de 1 500 €, placée pendant un an, a rapporté 90 € d'intérêt. Un autre placement a donné un intérêt annuel de 132 € pour un capital placé de 2 400 €.
 Calculer les taux de placement.
 Quel est le placement le plus avantageux ?

On imagine deux capitaux de 100 €.

On a deux tableaux de proportionnalité :

Premier placement

Capitaux	1 500	100
Intérêt	90	t

Deuxième placement

Capitaux	2 400	100
Intérêt	132	t'

Avec les produits en croix on a :

$$1\,500\,t = 9\,000 \text{ et } t = 6; \quad 2\,400\,t' = 13\,200 \text{ et } t' = 5,5.$$

Dans un premier cas, le taux est 6 % ; dans le second, il est 5,5 %.

Le premier placement est le plus avantageux.



Au collège, une classe de 100 élèves n'existe pas, pas plus d'ailleurs que 36,7 garçons ! Mais les pourcentages permettent la comparaison.

VOIR AUSSI :

Multiplier par a/b, 117

Appliquer un pourcentage, 118

Produits en croix, 119

Calculer un pourcentage, 122

VITESSE MOYENNE

COMPRENDRE

4^e ● Qu'est-ce qu'une vitesse moyenne ?

Pour calculer une vitesse moyenne, on doit connaître :

■ la **formule** : vitesse moyenne = $\frac{\text{distance parcourue}}{\text{durée du parcours}}$;

■ les **unités de durée** et savoir convertir une durée.

– En prenant la plus petite unité :

$$2 \text{ h } 12 \text{ min} = (2 \times 60 + 12) \text{ min} = 132 \text{ min} .$$

$$3 \text{ h } 17 \text{ min } 4 \text{ s} = (3 \times 3\,600 + 17 \times 60 + 4) \text{ s} = 11\,824 \text{ s} .$$

– Sous forme fractionnaire ou décimale :

$$3 \text{ h } 17 \text{ min} = \left(3 + \frac{17}{60}\right) \text{ h} = \frac{197}{60} \text{ h} \approx 3,283 \text{ h} .$$

■ Les correspondances usuelles entre unités de longueur, de durée et de vitesse (cf. fiche 121).

UTILISER SES CONNAISSANCES

4^e ● La vitesse moyenne d'un automobiliste a été de 17 m/s.

Exprimer cette vitesse en km/h.

Distance parcourue en 1 heure (en m) : $17 \times 3\,600$ ou 61 200 ;

$$61\,200 \text{ m} = 61,2 \text{ km} .$$

La vitesse moyenne est donc égale à 61,2 km/h.

4^e ● Un marathonien a parcouru les 42,195 km en 2 h 12 min.
Quelle est sa vitesse moyenne en m/min, puis en km/h ?

$$- 2 \text{ h } 12 \text{ min} = (2 \times 60 + 12) \text{ min} = 132 \text{ min} ; 42,195 \text{ km} = 42\,195 \text{ m} .$$

$$\text{La vitesse en m/min est } 42\,195 : 132 .$$

La vitesse moyenne est environ 320 m/min.

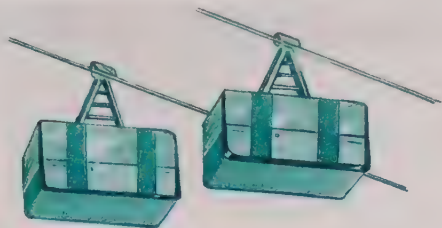
– En une heure, il parcourt environ (en m) :

$$(42\,195 : 132) \times 60 \approx 19\,180 \text{ et } 19\,180 \text{ m} = 19,180 \text{ km} .$$

Sa vitesse est donc environ : 19,180 km/h.

OUVRIR
L'ŒIL

Pour le dernier calcul, on n'a pas pris l'arrondi du quotient de 42 195 par 132 au mètre le plus proche, mais la valeur exacte 42 195 : 132 .



Téléphérique de l'aiguille

– Distance : 1 800 m.

– Vitesse moyenne : de 5 m/s à 6 m/s.

La durée du trajet varie entre 6 min à 5 min selon la vitesse.

- 4^e ● Une cabine de téléphérique s'est déplacée à la vitesse moyenne de 5 m/s sur une distance de 840 m.
Quel temps a-t-elle mis ?

En unités correspondantes, la durée t du déplacement est donnée en fonction de la distance parcourue d et de la vitesse v par : $t = \frac{d}{v}$.

$$t = (840 : 5) \text{ s} = 168 \text{ s} ; 168 \text{ s} = 2 \text{ min } 48 \text{ s}.$$

La cabine mettra 2 min 48 s pour parcourir les 840 m.

- 4^e ● Un cycliste a couvert 5 km en roulant à la vitesse de 44,760 km/h.

- a) Quel a été le temps mis pour parcourir les 5 km ?
b) En fait, il a roulé à cette vitesse-là pendant 9 min 23 s ;
quelle distance a-t-il parcourue ?

a) En prenant l'heure pour unité, le temps mis pour parcourir les 5 km à la vitesse de 44,760 km/h est égal à :

$$5 : 44,760 ;$$

$$5 \div 44,76 \text{ donne } 0,111706681.$$

En multipliant par 3 600, on a le temps en secondes ;
arrondi à l'unité, cela donne 402 s et $402 \text{ s} = 6 \text{ min } 42 \text{ s}$.

Ce cycliste a mis 6 min 42 s pour parcourir 5 km.

b) Dans cette question, on a intérêt à connaître la durée en secondes et la distance parcourue chaque seconde (vitesse en km/s).

$$9 \text{ min } 23 \text{ s} = (60 \text{ s} \times 9) + 23 \text{ s} = 540 \text{ s} + 23 \text{ s} = 563 \text{ s}.$$

En une heure, le cycliste parcourt 44,76 km ; en une seconde, il parcourt :

$$\frac{44,76}{3\,600} \text{ km}.$$

En 563 s, il parcourt donc :

$$\frac{44,76}{3\,600} \times 563 \text{ km}, \text{ soit environ } 7 \text{ km}.$$

OUVRIR L'ŒIL

Lorsque l'on effectue des calculs avec des conversions de secondes en minutes, ou de minutes en heures, il faut penser à utiliser la touche  de sa calculatrice.

(Cf. Division euclidienne, 10)

Ainsi :

$$168 \div 60 =$$

donne le quotient euclidien et le reste :

$$\begin{array}{r} 2 \quad 48 \\ \text{Q} \quad \text{R} \end{array}$$

$$168 \text{ s} = 2 \text{ min } 48 \text{ s}.$$

VOIR AUSSI :

Proportionnalité, 119-120

Mouvement uniforme, 121

Fonctions linéaires, 125

FONCTIONS LINÉAIRES

DÉFINITION - DÉTERMINATION

OUVRIR L'ŒIL

● Dans ce genre de problème, la proportionnalité est sous-entendue dans l'énoncé.

● k représente le poids d'un mètre de fil de fer.

COMPRENDRE

3^e ● Un exemple de fonction linéaire

3,2 m de fil de fer pèsent 100 g.

Combien pèsent 20 m, 32 m, 52 m, x mètres ?

Le poids est proportionnel à la longueur. D'où le tableau :

Longueurs (en mètre)	3,2	20	32	52	x
Poids (en gramme)	100				

$\times k$

Calcul de k : $3,2 k = 100$; d'où $k = 100 : 3,2 = 31,25$.

Image de 20 : $20 \times 31,25 = 625$.

Image de 32 : $32 \times 31,25 = 1\,000$.

Image de 52 : $52 \times 31,25 = 1\,625$.

Image de x : $x \times 31,25$ (ou $31,25x$).

Si on appelle y l'image d'une longueur x quelconque, on a :

$$y = 31,25x.$$

La relation qui, à tout nombre x associe le nombre y tel que $y = 31,25x$, est une **fonction linéaire**.

On peut noter cette fonction : $x \mapsto 31,25x$ et on lit « x a pour image $31,25x$ ».

On peut aussi noter cette fonction f ; l'image se note alors $f(x)$ et se lit « f de x » ; on écrit : $f(x) = 31,25x$.

● Comment déterminer une fonction linéaire ?

■ Définition

k étant un nombre relatif donné, la relation qui, à tout nombre relatif x associe le nombre relatif y tel que $y = kx$ ou $f(x) = kx$, est une **fonction linéaire** ; k est appelé le **coefficient de la fonction linéaire**.

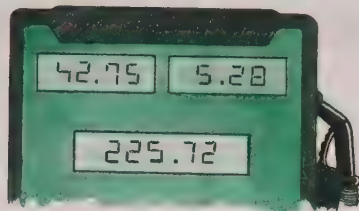
■ Détermination d'une fonction linéaire par la donnée d'un nombre non nul et de son image

Par exemple, on sait que pour une certaine fonction linéaire 3,2 a pour image 100 ; on en déduit que :

$$k \times 3,2 = 100 \text{ et } k = 100 : 3,2 = 31,25.$$

Cette fonction linéaire est telle que :

$$y = 31,25x \text{ ou } f(x) = 31,25x \text{ ou } x \mapsto 31,25x.$$



x : quantité en litres

y : prix à payer

$$y = 5,28 x.$$

UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● Une capital de x euros est placé à 11 % l'an.

a) Au nombre x on associe l'intérêt y produit en une année.

Quelle est la fonction linéaire obtenue ?

b) Quel est l'intérêt produit en un an par un capital de

1 000 € ? Et par un capital de 3 000 € ?

c) Quel est le capital qui produirait un intérêt de 770 € par an ?
un intérêt de 2 000 € par an ?

a) L'intérêt y produit en une année par un capital de x euros est égal à :

$$x \times \frac{11}{100} \text{ ou } 0,11x.$$

D'où la fonction linéaire définie par $y = 0,11x$.

b) Pour un capital de 1 000 €, l'intérêt est $(0,11 \times 1\,000)$ € ou 110 €.

Pour un capital de 3 000 €, l'intérêt est $(0,11 \times 3\,000)$ € ou 330 €.

c) On a $770 = 0,11x$.

Donc $x = 770 : 0,11 = 7\,000$.

Pour avoir un intérêt de 770 € par an au taux de 11 %, il faut un capital de 7 000 €.

2 000 = $0,11x$. Donc : $x = 2\,000 : 0,11$; $x \approx 18\,182$.

Avec un capital de 18 182 €, on a un intérêt d'environ 2 000 €.

3^e ● a) Pour une fonction linéaire, on sait que le nombre - 55

a pour image 35. Quelle est cette fonction linéaire ?

b) Pour une autre fonction linéaire, on sait que 8,5 est
l'image de 3,4. Quelle est cette fonction linéaire ?

a) Cette fonction linéaire est de la forme $y = kx$.

Pour $x = -55$, on a $y = 35$; d'où $35 = k \times (-55)$.

$$k = \frac{35}{-55} = -\frac{35}{55} = -\frac{5 \times 7}{5 \times 11} = -\frac{7}{11}, \text{ donc :}$$

$$y = -\frac{7}{11}x \text{ ou } x \mapsto -\frac{7}{11}x \text{ ou } f(x) = -\frac{7}{11}x.$$

b) $y = 8,5$ quand $x = 3,4$; donc $8,5 = k \times 3,4$.

$k = 8,5 : 3,4 = 2,5$; $y = 2,5x$ ou $x \mapsto 2,5x$ ou $g(x) = 2,5x$.



Il faut bien distinguer :

« a pour image »

de :

« est l'image de ».

VOIR AUSSI :

Simplifier une fraction, 14

Appliquer

un pourcentage, 118

Proportionnalité, 119-120

FONCTIONS LINÉAIRES

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

COMPRENDRE

3^e ● Quelle est la représentation graphique d'une fonction linéaire ?

■ La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine des axes de coordonnées.

Voici la représentation graphique de la fonction linéaire telle que :

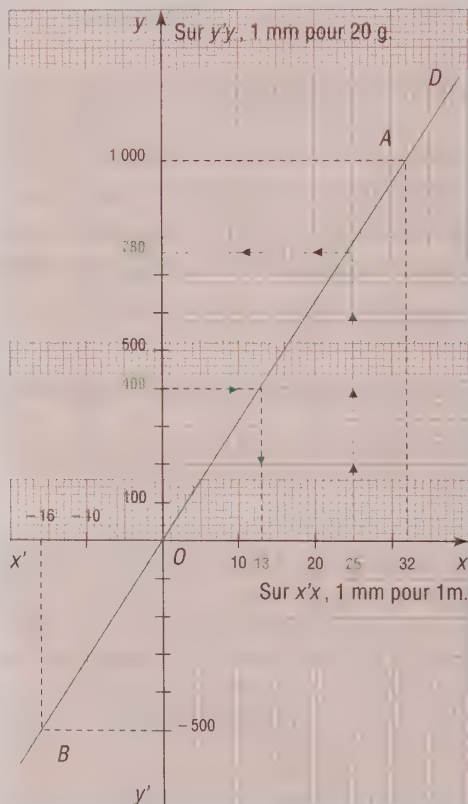
$$y = 31,25 x .$$

(Voir p. 258.)

Une droite étant déterminée par deux points, pour construire D , il a suffi d'adjoindre à O (0 a pour image 0) le point A (32 ; 1 000).

On choisit de plus le point B (-16 ; -500) pour contrôler le dessin.

$y = 31,25 x$ est l'équation de la droite D .



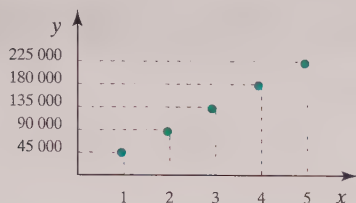
Attention au sens de lecture sur le graphique !

Il faut savoir si l'on veut l'image d'un nombre ou si l'on veut le nombre qui a pour image...

– Dans le premier cas, on part du point de $x'x$ repéré par 25 pour arriver à 780 sur $y'y$.

– Dans le second cas, on part du point de $y'y$ repéré par 400 pour arriver à 13 sur $x'x$ (exemple ci-contre).

■ La représentation graphique permet de trouver l'image de 25 ; c'est environ 780 (flèches noires). Elle permet de retrouver aussi le nombre qui a pour image 400 ; c'est environ 13 (flèches vertes).



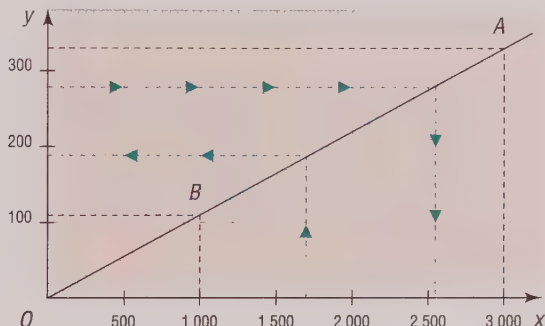
45 000 véhicules produits chaque mois.
 $y = 45\,000x$.

UTILISER SES CONNAISSANCES

- 3^e ● Entre le nombre positif x et le nombre y , il existe la relation $y = 0,11x$. Faire une représentation graphique de la fonction linéaire (sur $[Ox]$, 1 cm représentera 500 et sur $[Oy]$, 1 cm représentera 100). Utiliser ce graphique pour trouver l'image de 1 700 et le nombre qui a pour image 280.

Pour la représentation, on a utilisé A (3 000 ; 330).

Le point B (1 000 ; 110) sert à contrôler le tracé.



En partant du point de $[Ox]$ d'abscisse 1 700, on arrive au point de $[Oy]$ repéré par 190. L'image de 1 700 est 190.

En partant du point de $[Oy]$ repéré par 280, on arrive au point de $[Ox]$ repéré par 2 550. Le nombre 280 est l'image de 2 550.

- 3^e ● D et Δ sont les représentations graphiques de deux fonctions linéaires.
 Lesquelles ?

Pour D, on se sert du point A ; la fonction linéaire est de la forme $y = kx$.

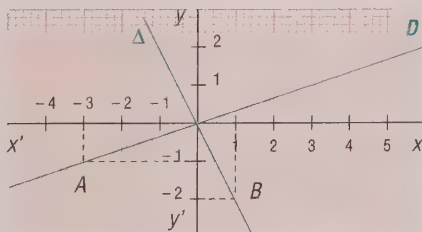
Quand $x = -3$; $y = -1$;

Donc $-1 = k \times (-3)$,

d'où $k = -1 : (-3)$; $k = \frac{1}{3}$. Par suite $y = \frac{1}{3}x$ ou $x \mapsto \frac{1}{3}x$.

Pour Δ on se sert de B.

Pour $x = 1$, $y = -2$. Donc $-2 = k \times 1 = k$; $y = -2x$ ou $x \mapsto -2x$.



OUVRIR L'ŒIL

- Être très attentif pour la lecture des coordonnées et dire uniquement ce que donne le graphique.

- Ici le calcul donnerait 187 et 2 545.

VOIR AUSSI :
 Fonctions linéaires, 125
 Graphiques et
 proportionnalité, 131

FONCTIONS LINÉAIRES

APPLICATIONS

EN ALGÈBRE

- 3^e ● Un capital de x euros est placé pendant une année au taux de 8 %. En fin d'année, l'intérêt s'ajoute au capital x pour constituer le nouveau capital y au début de la seconde année. Exprimer y en fonction de x .

Calcul de l'intérêt annuel : $x \times \frac{8}{100} = 0,08x$.

Nouveau capital : $x + 0,08x = 1x + 0,08x = (1 + 0,08)x = 1,08x$.

D'où $y = 1,08x$. C'est une fonction linéaire telle que $x \mapsto 1,08x$.

- 3^e ● Un commerçant annonce une baisse générale de 15 % ; calculer la réduction sur un prix marqué de x euros et le nouveau prix y correspondant à x . Représenter graphiquement la fonction linéaire obtenue, en se limitant aux valeurs de x positives.

Avec ce graphique, donner :

- le nouveau prix quand l'ancien est 225 € ;
- l'ancien prix quand le nouveau est 125 € .

Réduction : $x \times \frac{15}{100}$ ou $0,15x$.

Nouveau prix :

$$y = x - 0,15x$$

$$y = 1x - 0,15x$$

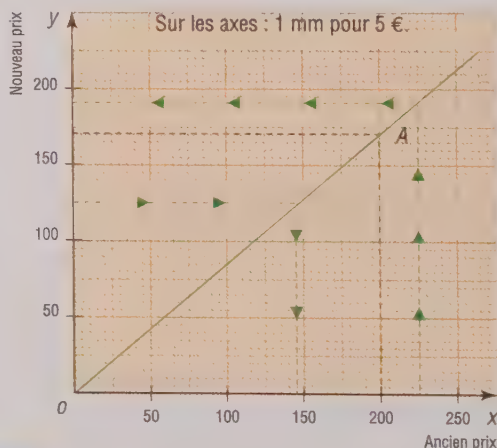
$$y = (1 - 0,15)x$$

$$y = 0,85x$$

Pour la représentation graphique, on utilise $A(200; 170)$.

Nouveau prix :
environ 190 €.

Ancien prix :
environ 150 €.



« La T.V.A. sur les travaux immobiliers passe de 20,6 % à 5,5 %. »

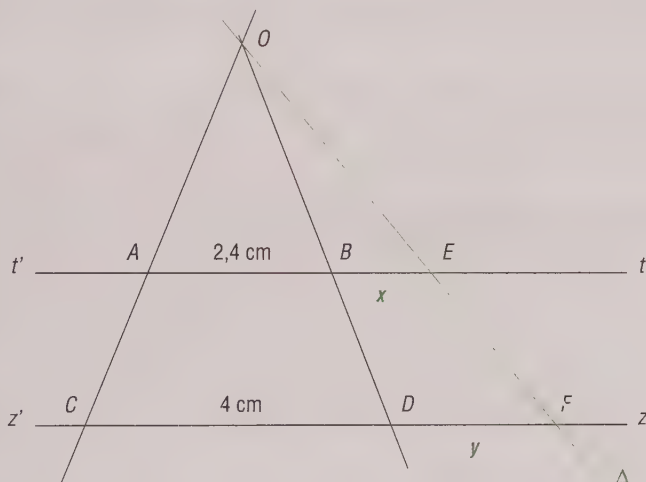
Prix hors taxes : 7 500 €.

Avant : $7\,500 \times 1,206 = 9\,045$ soit 9 045 € T.T.C.

Après : $7\,500 \times 1,055 = 7\,912,5$ soit 7 912,5 € T.T.C. } Le prix T.T.C. baisse de 1 132,5 €.

EN GÉOMÉTRIE

- 3^e ● Sur le dessin ci-dessous, les droites $t't$ et $z'z$ sont parallèles. Sur $t't$ et $z'z$ ont été respectivement construits les segments $[AB]$ et $[CD]$ de longueurs 2,4 cm et 4 cm ; les droites (AC) et (BD) se coupent en O . La droite Δ passant par O coupe $t't$ en E et $z'z$ en F . On désigne par x et y les longueurs respectives de $[BE]$ et $[DF]$. Exprimer y en fonction de x , puis x en fonction de y .



Les triangles OAB et OCD sont à côtés proportionnels (Thalès).

Donc $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}$; on en tire : $\frac{2,4}{4} = \frac{OB}{OD}$ (1).

Les triangles OBE et ODF sont à côtés proportionnels (Thalès).

Donc $\frac{OB}{OD} = \frac{BE}{DF} = \frac{OE}{OF}$; on en tire : $\frac{OB}{OD} = \frac{x}{y}$ (2).

À partir des égalités (1) et (2) on obtient :

$\frac{2,4}{4} = \frac{x}{y}$, soit $\frac{24}{40} = \frac{x}{y}$, d'où $\frac{3}{5} = \frac{x}{y}$, puis $3y = 5x$.

D'où y en fonction de x : $y = \frac{5}{3}x$. (C'est une fonction linéaire.)

D'où x en fonction de y : $x = \frac{3}{5}y$ ou $x = 0,6y$.

VOIR AUSSI :

Triangles à côtés

proportionnels, 74

Théorème de Thalès, 72

Appliquer un

pourcentage, 110

Fonctions

linéaires, 915-926

FONCTIONS AFFINES

DÉFINITION

DÉTERMINATION



OUVRIR L'ŒIL

$y = mx$ (fonction linéaire)
et $y = p$ (fonction constante)
sont deux cas particuliers de
fonctions affines.

COMPRENDRE

3^e ● Qu'est-ce qu'une fonction affine ?

m et p étant deux nombres relatifs donnés, la relation qui, à tout nombre relatif x , associe le nombre relatif y tel que $y = mx + p$, est une **fonction affine**.

m est le **coefficient de la fonction affine**.

On peut noter cette fonction : $x \mapsto mx + p$ et lire « x a pour image $mx + p$ ».

On peut aussi la noter f ; l'image de x se note alors $f(x)$, ce qui se lit « f de x », et on a $f(x) = mx + p$.

3^e ● Comment déterminer une fonction affine ?

Toute fonction affine est déterminée par la donnée de **deux** nombres et de leurs images.

UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● En France, la température est exprimée en degrés Celsius ($^{\circ}\text{C}$). Aux U.S.A., elle est exprimée en degrés Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$). Le lien qui existe entre la température en degrés Celsius (notée x) et la température en degrés Fahrenheit (notée y) est une fonction affine.

On sait que :

– à 0°C correspond 32°F ,

– à 10°C correspond 50°F .

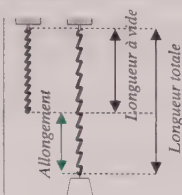
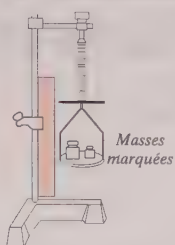
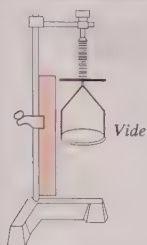
a) Quelle est la relation qui lie x à y ?

b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

Températures à	5 h	10 h	15 h	20 h
en degrés Celsius (x)	15	25	40	35
en degrés Fahrenheit (y)				
Variation en degrés Celsius	+ 10		+ 15	– 5
Variation en degrés Fahrenheit				

Vérifier que : $\text{variation en } ^{\circ}\text{F} = \text{variation en } ^{\circ}\text{C} \times 1,8$.

c) Calculer les images de -100 , -70 , -30 , 0 , 10 , 20 , 37 , 50 , 100 et 200 . Placer les résultats dans un tableau de valeur.



Longueur à vide : 15 cm.
 Allongement : 2,5 cm pour 1 Newton.
 Force exercée : x Newton.
 Longueur totale : y cm.

$$x \mapsto 2,5x + 15 \text{ ou } y = 2,5x + 15.$$

a) Une fonction affine est une relation qui à x associe y tel que :

$$y = mx + p.$$

Il faut calculer m et p (ce sont les inconnues) en tenant compte des données (à 0 correspond 32 ; à 10 correspond 50).

$$\text{On a le système } \begin{cases} 32 = m \times 0 + p \\ 50 = m \times 10 + p \end{cases} \quad \text{ou } \begin{cases} 32 = p \\ 50 = 10m + p \end{cases}$$

La première équation donne $p = 32$; on reporte cette valeur dans la seconde équation ; on obtient : $50 = 10m + 32$.

On en tire $10m = 18$, puis $m = 1,8$. D'où $y = 1,8x + 32$.

b)

Températures à	5 h	10 h	15 h	20 h
en degrés Celsius (x)	15	25	40	35
en degrés Fahrenheit (y)	59	77	104	95
Variation en degrés Celsius	+ 10	+ 15	- 5	
Variation en degrés Fahrenheit	+ 18	+ 27	- 9	

$$18 = 10 \times 1,8 ; 27 = 15 \times 1,8 ; -9 = -5 \times 1,8.$$

La variation de température exprimée en $^{\circ}\text{F}$ est proportionnelle à la variation de température exprimée en $^{\circ}\text{C}$; le coefficient de proportionnalité est 1,8.

c) On a le tableau :

-100	-70	-30	0	10	20	37	50	100	200
-148	-94	-22	32	50	68	98,6	122	212	392

(Ce tableau a été rempli avec la Galaxy 40 de Texas Instruments en utilisant deux opérateurs constants :

$$\times 1,8 \text{ (OP}_1\text{)} + 32 \text{ (OP}_2\text{)} 100 \text{ (-}x\text{) (OP}_1\text{) (OP}_2\text{)}$$

À ce stade s'affiche $[-148]$, l'image de -100 .

On continue 70 $(-x) \text{ (OP}_1\text{) (OP}_2\text{)}$ donne $[-94]$...

10 $(\text{OP}_1\text{) (OP}_2\text{)}$ donne $[50]$...)



Une fonction affine est déterminée par la donnée de deux nombres et de leurs images.

On résout donc un système de deux équations du 1^{er} degré à deux inconnues (cf. Systèmes d'équations, 46).

VOIR AUSSI :

Systèmes d'équations, 46
 Proportionnalité, 119-120
 Fonctions affines - représentation, 129

FONCTIONS AFFINES

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

COMPRENDRE

3^e ● Quelle est la représentation graphique d'une fonction affine ?

■ La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite** ; elle coupe l'axe des ordonnées.

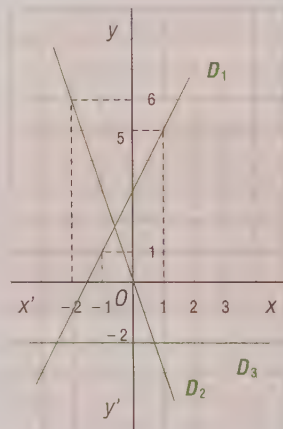
■ Toute droite coupant l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

■ Les représentations graphiques des fonctions affines définies par $y = 2x + 3$, $y = -3x$ et $y = -2$ sont respectivement les droites D_1 , D_2 et D_3 .

Pour D_1 , on a pris les couples $(-1; 1)$ et $(1; 5)$.

Pour D_2 , outre le couple $(0; 0)$, on a pris le couple $(-2; 6)$; un seul couple suffit, puisqu'elle représente une fonction linéaire. D_3 , parallèle à $x'x$, représente la fonction constante $y = -2$.

$y = 2x + 3$, $y = -3x$ et $y = -2$ sont respectivement les équations des droites D_1 , D_2 et D_3 .



$$y = -3x + 0$$

$$(m = -3; p = 0);$$

$$y = 0x - 2$$

$$(m = 0; p = -2);$$

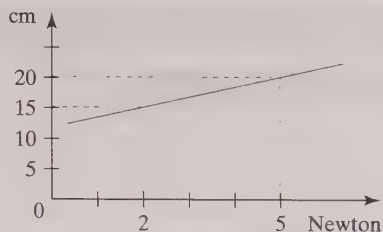
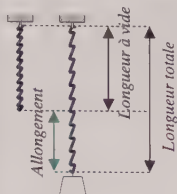
Les fonctions linéaires
et les fonctions constantes
sont deux cas particuliers de
fonctions affines.

UTILISER SES CONNAISSANCES

3^e ● La fonction affine qui, à la température x en degrés Celsius ($^{\circ}\text{C}$) associe la température en degrés Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) est définie par $y = 1,8x + 32$ ou $x \mapsto 1,8x + 32$.

a) Représenter graphiquement cette fonction.

b) Utiliser le graphique pour convertir en degrés Fahrenheit : -15°C et 30°C , puis pour exprimer en degrés Celsius la phrase « On peut atteindre -20°F à l'intérieur d'un congélateur même si à l'extérieur il fait 100°F ».



Quelle est la longueur à vide du ressort ?

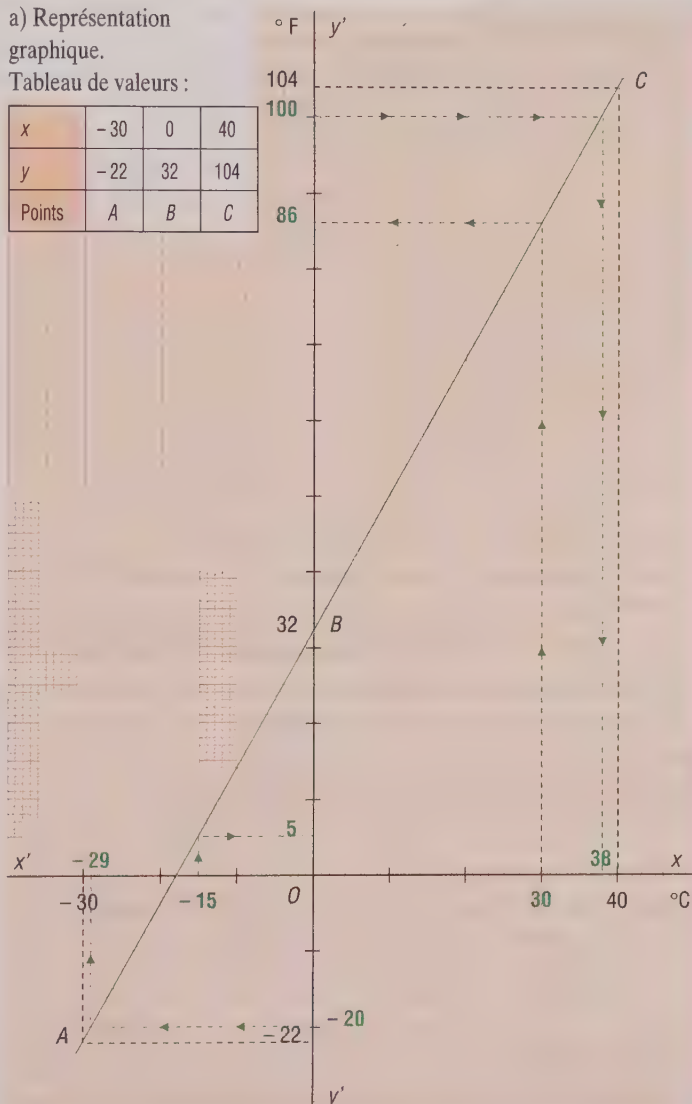
– Sur le graphique : entre 10 cm et 15 cm.

– Par le calcul : $\frac{35}{3}$ cm ; environ 11,3 cm.

a) Représentation graphique.

Tableau de valeurs :

x	-30	0	40
y	-22	32	104
Points	A	B	C



b) À -15°C correspond 5°F ; à 30°C correspond 86°F .

« On peut atteindre -29°C même si à l'extérieur il fait environ 38°C . »

VOIR AUSSI :

Fonctions linéaires, 125-126

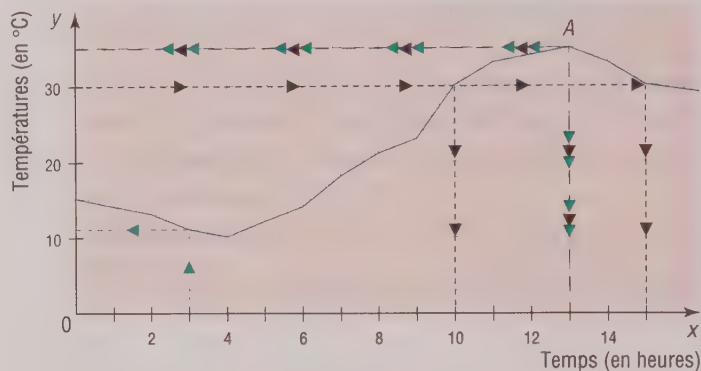
Fonctions affines, 128

REPRÉSENTATION
GRAPHIQUE

COMPRENDRE

6^e ● Comment lire un graphique ?

5^e La ligne verte est la trace laissée par le stylet d'un thermomètre enregistreur entre 0 et 16 h.



- > on part de 3 h ; on lit la température : 11°.
- > on part de 30° ; on lit le temps : 10 h et 15 h.
- > on part de A (le maximum), on arrive à 13 h sur [0x et à 35° sur [0y.

On peut faire un tableau donnant la température en fonction du temps (heure par heure par exemple).

Temps (heure)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Températures (°C)	15	14	13	11	10	12	14	18	21	23	30	...

OUVRIR
L'ŒIL

Dans un tableau, les unités sont écrites en début de ligne, puis ne sont plus répétées.

5^e ● Quand faire un graphique ?

Lorsqu'on a un tableau contenant deux suites de nombres qui se correspondent et que l'on veut visualiser cette correspondance on fait un graphique.

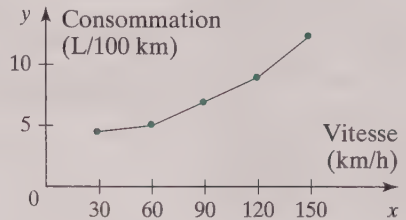
Par exemple, pour un bébé :

Âge (en semaines)	0	1	2	3	4	5	6	...
Poids (en kg)	3,5	3,3	3,6	3,8	4,0	4,3	4,5	...

On dit que les nombres de la deuxième ligne sont « en fonction de » ceux de la première ligne.

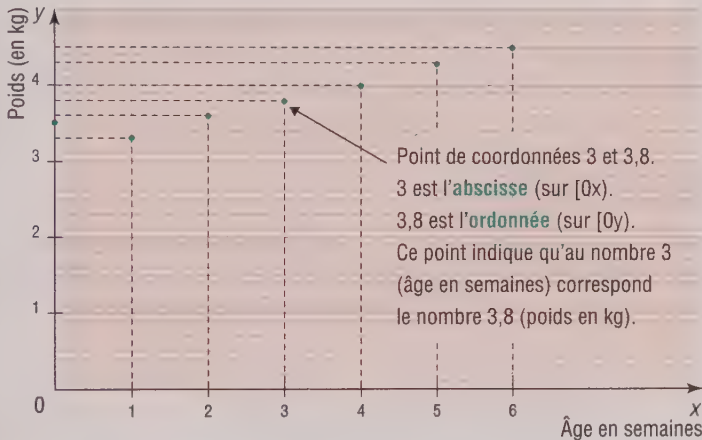
Tableau et graphique sont deux manières de faire parler des données.

Vitesse (km/h)	30	60	90	120	150
Consommation (L/100 km)	4,5	5	7	9	12,5



5^e ● Comment faire un graphique ?

Dans un angle droit $\widehat{xOy}$ dont les côtés sont gradués en tenant compte des nombres donnés et de la place dont on dispose.



GRAPHIQUES ET PROPORTIONNALITÉ

COMPRENDRE

4^e ● Quel est le graphique d'une relation de proportionnalité ?

La représentation graphique d'une relation de proportionnalité, dans un angle droit $\widehat{xOy}$, est contenue dans une demi-droite d'origine O .

Pour tracer cette demi-droite, il suffit d'un point, autre que O .

RECONNAÎTRE

4^e ● Si, dans un angle droit $\widehat{xOy}$, une représentation graphique est contenue dans une demi-droite d'origine O alors cette représentation est celle d'une **relation de proportionnalité**.

UTILISER SES CONNAISSANCES

4^e ● Compléter le tableau de proportionnalité ci-contre.

Donner une représentation

graphique des nombres de la seconde ligne en fonction de ceux de la première ; que vérifie-t-on ?

1	2	3	4	5	6

$\times 1.5$

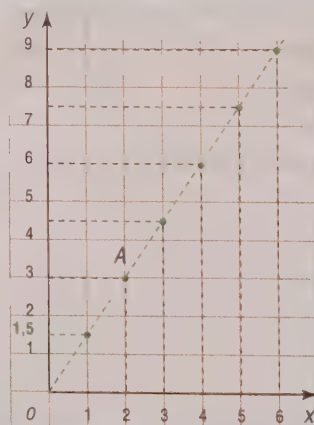
■ Tableau de proportionnalité :

1	2	3	4	5	6
1,5	3	4,5	6	7,5	9

$\times 1.5$

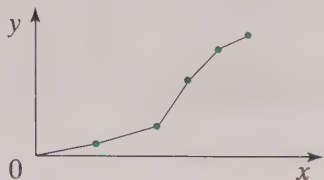
■ Au couple $(2; 3)$, on fait correspondre le point A d'abscisse 2 et d'ordonnée 3...

■ On vérifie que les six points sont sur une même demi-droite d'origine O .

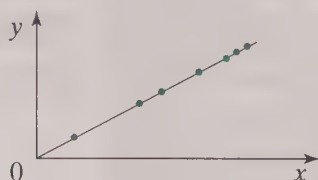
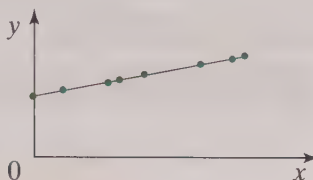


OUVRIR L'ŒIL

Dans une relation de proportionnalité, l'image de 1 est le coefficient de proportionnalité.



Non proportionnel



Proportionnel

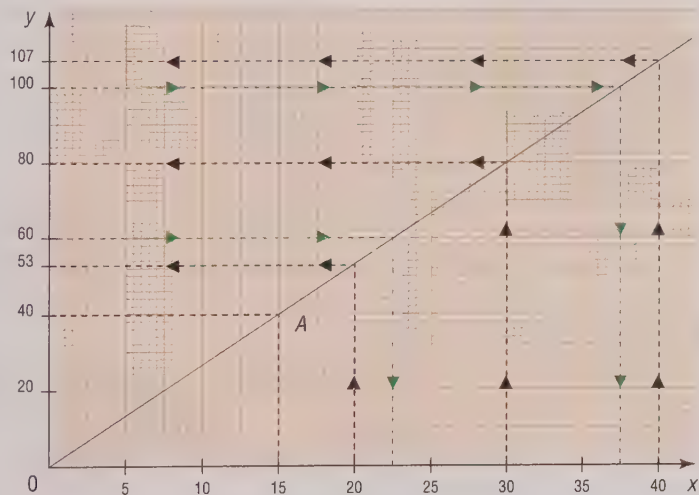
4^e ● Pour des objets fabriqués avec le même matériau, la masse est proportionnelle au volume. On étudie de tels objets ; l'un d'eux a une masse de 40 g pour un volume de 15 cm^3 .

a) Faire une représentation graphique donnant la masse en fonction du volume (en abscisses, le volume : 2 mm pour 1 cm^3 ; en ordonnées, la masse : 1 mm pour 2 g).

b) Lire les masses correspondant à 20 cm^3 , à 30 cm^3 et à 40 cm^3 .

c) Lire les volumes correspondant à 60 g et 100 g.

a) La masse est proportionnelle au volume. Les points du graphique sont sur une demi-droite d'origine O contenant A (15 ; 40).



b) Les masses correspondant à 20 cm^3 , 30 cm^3 et 40 cm^3 sont respectivement : 53 g, 80 g et 107 g (flèches noires).

c) Les volumes correspondant à 60 g et 100 g sont : $22,5 \text{ cm}^3$ et $37,5 \text{ cm}^3$ (flèches vertes).

VOIR AUSSI :

Proportionnalité, 119-120
Représentation graphique, 130

TABLEAUX
ET DIAGRAMMES

COMPRENDRE

5^e ● Vocabulaire de la statistique

Pour comprendre, prenons pour exemple l'étude des âges des 24 élèves d'une classe de cinquième.

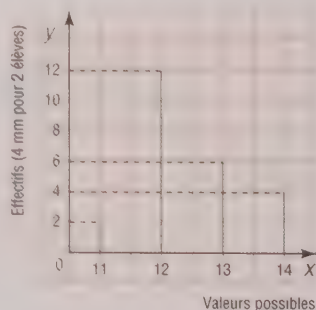
- **Population** étudiée : les élèves de la classe de cinquième.
- **Caractère** étudié : l'âge des élèves.
- **Valeurs** possibles du caractère : 11 ans, 12 ans, 13 ans, 14 ans.
- **Résultats** de l'enquête (**série statistique**) : 11, 11, 12, 13, 12, 12, 14, 12, 13, 14, 12, 12, 13, 13, 12, 12, 12, 14, 12, 13, 12, 14, 12, 13.

Tableau des effectifs :

Valeurs	11 ans	12 ans	13 ans	14 ans
Effectifs	2	12	6	4

5^e ● Faire un diagramme en bâtons

- On trace un angle droit xOy .
- On place les valeurs possibles du caractère sur $[Ox]$.
- À chaque valeur du caractère on associe un segment (bâton) dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif.

5^e ● Lire un diagramme circulaire

Il s'agit de déterminer les effectifs de chaque valeur du caractère en mesurant (rapporteur) les angles des secteurs.

On sait que les effectifs sont proportionnels aux angles et qu'à l'effectif total (ici 24) correspond l'angle plein (360°).



Valeurs	11 ans	12 ans	13 ans	14 ans	
Angles	30	180	90	60	360°
Effectifs	2	12	6	4	24

angle plein

$\times k$

effectif total

À savoir :

- lire en 6^e ;
- faire en 5^e.

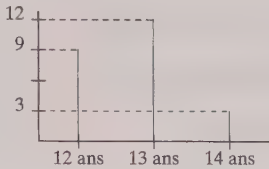


Diagramme en bâtons

À savoir :

- lire en 5^e ;
- faire en 4^e.

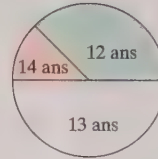


Diagramme circulaire

● Construction du tableau

Dans l'ordre, on a :

- rempli les cases contenant les valeurs (âges) ;
- effectué les mesures des angles et rempli les cases correspondantes ;

– calculé k : $360 \times k = 24$; $k = \frac{24}{360}$; $k = \frac{1}{15}$;

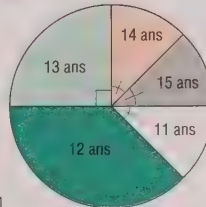
- rempli les cases contenant les effectifs :

$30 \times \frac{1}{15} = \frac{30}{15} = 2$; $180 \times \frac{1}{15} = \frac{180}{15} = 12$;

$90 \times \frac{1}{15} = 6$; $60 \times \frac{1}{15} = 4$.

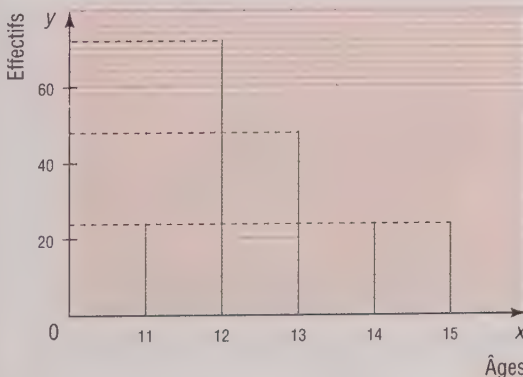
UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● Le diagramme circulaire des âges pour les 192 élèves d'un collège est celui donné ci-contre. Les angles aigus sont égaux. Déterminer l'effectif de chaque âge, puis faire un diagramme en bâtons.



Valeurs	11 ans	12 ans	13 ans	14 ans	15 ans	
Angles	45°	135°	90°	45°	45°	360°
Effectifs	24	72	48	24	24	192

$\times \frac{192}{360}$



OUVRIR L'ŒIL

Dans l'exercice ci-contre, les angles ont été calculés en utilisant les indications de la figure et du texte, mais non mesurés. On a calculé les effectifs avec la calculatrice.

VOIR AUSSI :

- Rapporteur, 54-55
- Multiplier par a/b , 117
- Proportionnalité, 119-120

DIAGRAMMES CIRCULAIRES ET AUTRES

COMPRENDRE

5^e Dans l'étude de l'âge des
4^e élèves d'une classe de 4^e,
on a obtenu le tableau :

Valeurs	12	13	14	15
Effectifs	1	20	6	3

● **Comment construire le diagramme circulaire correspondant aux effectifs ?**

■ **Le principe**

À chaque valeur du caractère on associe un secteur de disque d'angle au centre proportionnel à l'effectif de la valeur, l'angle plein (360°) étant associé à l'effectif total (30).

■ **La réalisation**

Dans l'ordre :

– on prépare le tableau des effectifs comme ci-contre ;

Valeurs	12	13	14	15	
Effectifs	1	20	6	3	30
Angles					360

$\times k$

– on calcule k : $30 \times k = 360$; $k = 12$;

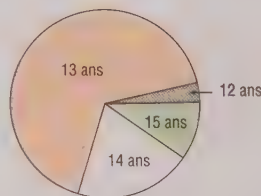
– on calcule les angles :

$$1 \times 12 = 12 ; 20 \times 12 = 240 ;$$

$$6 \times 12 = 72 \text{ et } 3 \times 12 = 36 ;$$

– on reporte les angles dans le tableau ;

– on construit le disque et ses secteurs (avec un rapporteur).



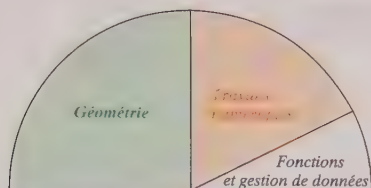
OUVRIR L'ŒIL

Quand on demande de visualiser les résultats d'une enquête dans un diagramme semi-circulaire, il suffit de remplacer l'angle plein (360°) par l'angle plat (180°).

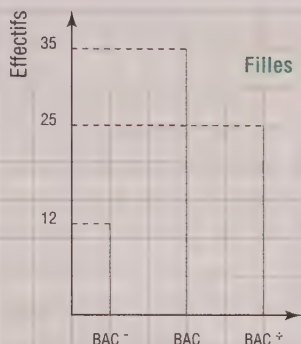
UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e ● **Le résultat d'une enquête statistique portant sur la longueur**
4^e **des études envisagées par des élèves de troisième a été illustré par les deux diagrammes ci-après.**

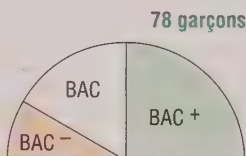
Faire, pour l'ensemble de ces élèves, un tableau donnant les effectifs pour chaque valeur (cet effectif s'appelle la **modalité de la valeur**) du caractère étudié, leur fréquence, puis un diagramme circulaire.



Il y a 136 fiches dans cet ouvrage.
 Sur le diagramme, la géométrie occupe un secteur de 90° , les travaux numériques $63,5^\circ$, les fonctions et la gestion de données $26,5^\circ$.
 Ces valeurs d'angles correspondent au nombre de fiches de chacune de ces parties.



BAC⁻ : arrêt avant Bac.
 BAC⁺ : poursuite après Bac.
 BAC : arrêt niveau Bac.



- Effectif total : $(12 + 25 + 35) + 78 = 150$.
- Les effectifs de chaque modalité, pour les filles, sont connus : BAC⁻ : 12 ; BAC : 25 ; BAC⁺ : 35.
- Pour ceux des garçons, on mesure les angles et on calcule :

Modalités	BAC ⁻	BAC	BAC ⁺	
Angles	30°	60°	90°	180°
Effectifs	13	26	39	78

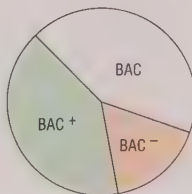
$$\times \frac{78}{180}$$

- D'où pour les 150 élèves de cette population :

Modalités	BAC ⁻	BAC	BAC ⁺	Totaux
Effectifs	25	61	64	150
Fréquences	$\frac{25}{150}$ ou 16,7 %	$\frac{61}{150}$ ou 40,7 %	$\frac{64}{150}$ ou 42,7 %	1
Angles				360°

- Calcul des angles pour le diagramme circulaire : les angles sont proportionnels aux effectifs, mais aussi aux fréquences.
 Il suffit donc de multiplier celles-ci par 360.

$$\frac{25}{150} \times 360 = 60 ; \quad \frac{61}{150} \times 360 \approx 146 ; \quad \frac{64}{150} \times 360 \approx 154.$$



OUVRIRE L'ŒIL

La somme des fréquences sous forme fractionnaire est 1 ; la somme des fréquences sous forme de pourcentages peut être légèrement différente de 100% à cause des arrondis.

VOIR AUSSI :
 Rapporteur, 54-55
 Proportionnalité, 119
 Tableaux et diagrammes, 132
 Fréquences, 134

FRÉQUENCES

COMPRENDRE

5^e ● Un exemple

4^e Pour savoir si les mots de 8 lettres sont **fréquents** dans la langue française, des élèves ont étudié la « longueur des mots » de la première page d'un livre (*La gloire de mon père*, Marcel Pagnol).
Population étudiée : 178 mots ; **caractère** : nombre des lettres.

Valeurs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectifs	14	41	27	29	17	17	16	12	2	1	1	1

La valeur 8 arrive 12 fois sur 178 mots. On dit que la fréquence de la valeur 8 est $\frac{12}{178}$; on la note aussi 0,067 ou 6,7 %.

5^e ● Qu'est-ce que la fréquence ?

4^e La **fréquence** d'une valeur (du caractère étudié) est un quotient.

$$\text{Fréquence} = \frac{\text{effectif de cette valeur}}{\text{effectif total}}$$

On peut l'exprimer par une fraction, par un nombre décimal à virgule ou par un pourcentage.

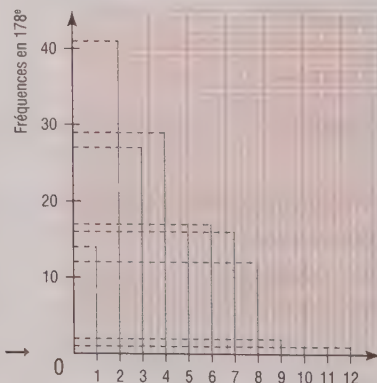
– Chaque fréquence est inférieure à 1.

– La somme de toutes les fréquences est 1.

■ Le tableau des effectifs peut se compléter d'une ou plusieurs lignes avec les fréquences.

Valeurs	1	2	3
Effectifs	14	41	27
Fréquences			
– fractions	$\frac{14}{178}$	$\frac{41}{178}$	$\frac{27}{178}$
– décimaux	0,079	0,230	0,152
– pourcentages	7,9 %	23 %	15,2 %

■ On peut tracer le diagramme en bâtons des fréquences.

OUVRIR
L'ŒIL

Il faut connaître les différentes écritures d'un quotient.

Ainsi :

$$\bullet \frac{12}{178} = \frac{6}{89}$$

$$\bullet \frac{12}{178} = 0,067\ 41\dots$$

$$\bullet 0,067 = \frac{67}{1\ 000} = \frac{6,7}{100}$$

On trouve 6 pétunias rose vif dans un parterre de 24 pétunias.

La fréquence des pétunias rose vif est $\frac{6}{24}$.

La fréquence est un quotient.

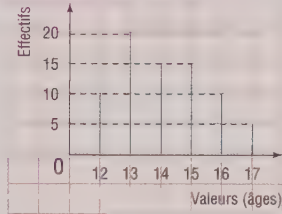
$$\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0,25 ; \text{ c'est aussi } 25 \%.$$

UTILISER SES CONNAISSANCES

5^e
4^e

● Population étudiée :
les élèves de 4^e d'un collège.
Caractère étudié : l'âge.
Les résultats de l'enquête sont
représentés dans le diagramme
ci-contre.

Faire un tableau donnant
les fréquences (sous forme de fractions
et de pourcentages).



Le diagramme en bâtons donne, par simple lecture, l'effectif de chaque valeur ;
il est facile d'avoir l'effectif total : 75.

Valeurs (âges)	12	13	14	15	16	17	
Effectifs	10	20	15	15	10	5	75
Fréquences							
– fractions	$\frac{10}{75}$	$\frac{20}{75}$	$\frac{15}{75}$	$\frac{15}{75}$	$\frac{10}{75}$	$\frac{5}{75}$	1
– en %	13,3	26,7	20	20	13,3	6,7	100

5^e
4^e

● On reprend les données de l'exercice précédent. Déterminer
l'effectif et la fréquence (sous forme de fractions) des élèves qui
ont au plus 12 ans, puis au plus 13 ans, puis au plus 14 ans...
Continuer et donner les réponses sous forme de tableau.

Au plus 12 ans : il n'y a que ceux qui ont 12 ans, soit 10.
Au plus 13 ans : il y a ceux de 12 ans et de 13 ans, soit $10 + 20 = 30$.
Au plus 14 ans : il y a ceux de 12 ans, 13 ans et 14 ans, soit un total de 45.
On a affaire à ce qu'on appelle des **effectifs cumulés**.

Valeurs	12	13	14	15	16	17
Effectifs	10	20	15	15	10	5
Effectifs cumulés	10	30	45	60	70	75

On aurait de même les **fréquences cumulées** : $\frac{10}{75}$, $\frac{30}{75}$, $\frac{45}{75}$...

VOIR AUSSI :
Fractions (addition), 15
Calculer un pourcentage, 122
Diagramme en bâtons, 132

MOYENNES

COMPRENDRE

4^e ● Un exemple

Lors d'un examen, on a relevé les notes mises par un correcteur : 11, 10, 8, 14, 10, 9, 8, 4, 12, 15, 13, 8, 7, 16, 9, 12, 15, 8, 6, 1, 18, 13, 16, 17, 12, 18, 7.

Il y a 27 notes et le total des notes est 297 ; la moyenne de ces notes est $297 : 27$, soit 11.

$$\text{Moyenne} = \frac{\text{somme de toutes les données}}{\text{nombre de données}}$$

La moyenne ne peut se calculer que pour un caractère quantitatif car les résultats de l'enquête sont des nombres.

4^e ● Une méthode pour calculer une moyenne

Lorsque des valeurs se répètent souvent, on a intérêt à faire d'abord le tableau des effectifs.

Par exemple, pour une épreuve sportive où il n'y a que cinq notes possibles [1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5], on peut avoir :

Valeurs	1	2	3	4	5	
Effectifs	6	15	32	20	9	82

La moyenne est :

$$\frac{6 \times 1 + 15 \times 2 + 32 \times 3 + 20 \times 4 + 9 \times 5}{82} \approx 3,13.$$

OUVRIR
L'ŒIL

Tout se passe comme si l'élève avait eu trois fois la note 12 et cinq fois la note 8.

4^e ● Qu'est-ce qu'une moyenne pondérée ?

Le calcul précédent ressemble au calcul d'une moyenne pondérée.

Par exemple, supposons qu'à un examen il y ait une épreuve théorique de coefficient 3 et une épreuve pratique de coefficient 5 et qu'un élève ait obtenu respectivement les notes 12 et 8 à ces épreuves.

La moyenne pondérée (ou moyenne) de l'élève est :

$$\frac{12 \times 3 + 8 \times 5}{3 + 5} = \frac{76}{8} = 9,5.$$

Où, mais
c'est moins que
la moyenne 12
de la classe.



J'ai eu 11,
c'est plus que la
moyenne 10 !



D'accord,
mais cela
augmente ma
moyenne !

UTILISER SES CONNAISSANCES

- 4^e ● Déterminer la moyenne de la série statistique suivante :
2,4 ; 2,9 ; 3,1 ; 4,2 ; 3,7 ; 2,2 ; 3,2 ; 2,9 ; 3,7 ; 4 ; 4,6 ; 2,8.

La somme des données est 39,7 et le nombre de données est 12.

La moyenne est égale à $39,7 : 12$; c'est environ 3,3.

- 4^e ● Voici les notes obtenues en mathématiques par un élève au cours d'une année scolaire :

– premier trimestre : 2 - 15 - 18 - 10 - 2 - 17 ;

– deuxième trimestre : 16 - 12 - 19 - 18 - 3 - 4 - 5 - 13 ;

– troisième trimestre : 5 - 16 - 3 - 2 - 18.

a) Calculer la moyenne de chaque trimestre.

b) Calculer la moyenne de toutes les notes de l'année.

c) Calculer la moyenne des trois moyennes trimestrielles.

$$\text{a) Premier trimestre : } \frac{2 + 15 + 18 + 10 + 2 + 17}{6} = \frac{64}{6} \approx 10,67.$$

$$\text{Deuxième trimestre : } \frac{16 + 12 + 19 + 18 + 3 + 4 + 5 + 13}{8} = \frac{90}{8} = 11,25.$$

$$\text{Troisième trimestre : } \frac{5 + 16 + 3 + 2 + 18}{5} = \frac{44}{5} = 8,8.$$

$$\text{b) Moyenne des notes de l'année : } \frac{64 + 90 + 44}{6 + 8 + 5} = \frac{198}{19} \approx 10,42.$$

$$\text{c) Moyenne des moyennes trimestrielles : } \frac{10,66 + 11,25 + 8,8}{3} \approx 10,24.$$

- 4^e ● a) On connaît la moyenne ; déterminer la note inconnue :
8, 13, 7, x , moyenne 10 ; 12, 6, y , 16, moyenne 13.

b) Chaque nombre est la moyenne de celui qui le précède et de celui qui le suit. Compléter :

10 ; ... ; 24 ; ... ; ... ; ... ; et 25 ; 24 ; ... ; ... ; ... ; ...

a) Il y a 4 notes ; la moyenne est 10 ; la somme des notes est $10 \times 4 = 40$.

$8 + 13 + 7 = 28$; la note manquante est $40 - 28$ soit 12 ; $x = 12$.

Somme : $13 \times 4 = 52$; $12 + 6 + 16 = 34$; la note qui manque est :

$$52 - 34 \text{ ou } 18 ; y = 18.$$

b) 10 ; 17 ; 24 ; 31 ; 38 ; 45 et 25 ; 24 ; 23 ; 22 ; 21 ; 20.

VOIR AUSSI :

Appliquer
un pourcentage, 118
Statistiques -
vocabulaire, 132
Fréquences, 134

MÉDIANE

DISPERSION

COMPRENDRE

3^e ● Qu'est-ce que la médiane d'une série statistique ?

■ La médiane d'une série statistique numérique est un nombre tel que l'effectif des valeurs inférieures (ou égales) à ce nombre et celui des valeurs supérieures (ou égales) à ce nombre soient au plus la moitié de l'effectif total.

Pour trouver la médiane, on range les éléments (ordre croissant ou décroissant) et on partage l'effectif en deux.

■ Deux cas :

– le nombre de termes est impair : 6 - 8 - 8 - **13** - 15 - 16 - 18 ; la médiane est **13** ; il y a 3 valeurs (moins de la moitié de 7) inférieures à 13 et 3 valeurs supérieures à 13.

– le nombre de termes est pair : 6 - 8 - 8 - 13 ↓ 15 - 16 - 18 - 20 ; la médiane est entre 13 et 15 ; on convient de prendre **14**, la moyenne des deux ; il y a 4 valeurs (moitié de 8) inférieures à 14 et 4 valeurs supérieures à 14.

3^e ● Comment calculer un écart type ?

Pour caractériser la **dispersion** des valeurs autour de la moyenne, on peut calculer, par exemple, l'écart type.

■ Première série ci-dessus

Moyenne : $84 : 7 = 12$.

Écarts à la moyenne, 6 - 4 - 4 - 1 - 3 - 4 - 6.

Carrés des écarts à la moyenne : 36 - 16 - 16 - 1 - 9 - 16 - 36.

Moyenne de ces carrés : $130 : 7$, soit environ 18,57.

L'écart type est la racine carrée de cette moyenne, environ 4,3.

■ Deuxième série ci-dessus

Moyenne : $104 : 8 = 13$.

Écarts à la moyenne, 7 - 5 - 5 - 0 - 2 - 3 - 5 - 7.

Carrés des écarts à la moyenne : 49 - 25 - 25 - 0 - 4 - 9 - 25 - 49.

Moyenne de ces carrés : $186 : 8$, soit 23,25.

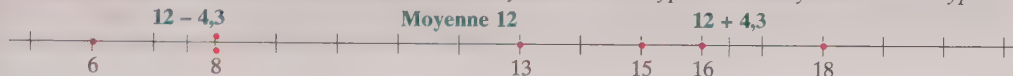
L'écart type est la racine carrée de cette moyenne, environ 4,8.

OUVRIR L'ŒIL

● Dans le premier cas, la moyenne est égale à 12. Dans le second cas, elle est égale à 13.

● Le graphique du bandeau montre que dans la première série, il y a 5 notes sur 7 entre 12 - 4,3 et 12 + 4,3 et que dans la seconde, il y a seulement 3 notes sur 8 entre 13 - 4,8 et 13 + 4,8. La dispersion autour de la moyenne est plus grande dans la seconde série.

Première série : il y a 71 % de notes entre « moyenne – écart type » et « moyenne + écart type ».



Deuxième série : il y a 37,5 % de notes entre « moyenne – écart type » et « moyenne + écart type ».



UTILISER SES CONNAISSANCES

- 3^e ● *Quels sont la valeur médiane, la moyenne et l'écart type de la série numérique constituée par les tailles (en cm) des dix personnes d'un groupe :*

160 - 160 - 162 - 165 - 165 - 166 - 166 - 168 - 168 - 170 ?

■ La cinquième mesure est 165 cm et la sixième, 166 cm.

La valeur médiane est 165,5 cm.

■ $1650 : 10 = 165$; la moyenne des tailles est 165 cm.

■ Écart à la moyenne : 5 - 5 - 3 - 0 - 0 - 1 - 1 - 3 - 3 - 5.

Carrés des écarts : 25 - 25 - 9 - 0 - 0 - 1 - 1 - 9 - 9 - 25.

Moyenne des carrés des écarts : $104 : 10 = 10,4$.

$\sqrt{10,4} \approx 3,2$. L'écart type est environ 3,2 cm.

- 3^e ● *Le même jour à 12 h, on a repéré les températures (en °C) dans 16 villes et on a obtenu :*

12 - 16 - 11 - 14 - 13 - 15 - 12 - 16 - 13 - 15 - 13 - 15 - 16 - 14 - 15 - 14.

a) *Quelle est la médiane de cette série statistique numérique ?*

b) *Calculer la moyenne de ces températures ?*

c) *Calculer l'écart type.*

d) *Quel est le pourcentage des températures comprises entre « moyenne – écart type » et « moyenne + écart type » ?*

a) Pour trouver la médiane ordonnons les températures par ordre croissant :

11 - 12 - 12 - 13 - 13 - 13 - 14 - 14 - 14 - 14 - 15 - 15 - 15 - 15 - 16 - 16 - 16.

La valeur médiane est 14 °C.

$$b) \frac{11 \times 1 + 12 \times 2 + 13 \times 3 + 14 \times 3 + 15 \times 4 + 16 \times 3}{16} = \frac{224}{16} = 14.$$

La moyenne des températures est 14 °C.

c) Calcul des écarts à la moyenne : 3 - 2 - 2 - 1 - 1 - 1 - 0 - 0 - 0 - 1 - 1 - 1 - 1 - 2 - 2 - 2 et de leurs carrés 9 - 4 - 4 - 1 - 1 - 1 - 0 - 0 - 0 - 1 - 1 - 1 - 1 - 4 - 4 - 4.

$$\text{La moyenne de ces carrés est : } \frac{9 + 4 \times 5 + 1 \times 7}{16} = \frac{36}{16} = 2,25.$$

$\sqrt{2,25} = 1,5$. L'écart type de la série est 1,5°.

d) Moyenne – écart type = 12,5° ; moyenne + écart type = 15,5°.

Nombre de températures comprises entre 12,5° et 15,5° : 10.

$$\text{Calcul du pourcentage : } \frac{10}{16} \times 100 = 62,5. \text{ Réponse : } 62,5 \%$$

VOIR AUSSI :

Moyennes, 135

Calcul

d'un pourcentage, 122

NOTATIONS - UNITÉS

NOTATIONS UTILISÉES

Pour désigner	nous avons noté	ce qui se lit
● Une droite	Δ , D ou d d' ou d_1 (AB)	grand delta, grand d , petit d petit d prime, petit d indice 1 droite passant par A et B
● Une demi-droite	$[Ax,$ $[AB)$	demi-droite Ax d'origine A , demi-droite d'origine A contenant le point B
● Un segment	$[AB]$	segment d'extrémités A et B
● Une longueur	AB , L ou l	longueur du segment $[AB]$, grand L ou petit l
● Un angle	$\widehat{xOy}$ $\widehat{AOB}$ $\hat{O}$	angle xOy (sommet O ; $[Ox]$ et $[Oy]$ sont les côtés) angle AOB (sommet O ; $[OA]$ et $[OB]$ sont les côtés) angle de sommet O
● L'égalité de deux longueurs sur les figures	$/$, $\times$, ou $//$	(cela ne se lit pas)
● L'égalité de deux angles sur les figures		(cela ne se lit pas)
● L'orthogonalité	$\perp$	est perpendiculaire à (entre deux droites)
● Le parallélisme	$//$	est parallèle à (entre deux droites)
● L'égalité (en général)	$=$	« est égal à », « est égale à » ou « égale »

ÉCRITURE DES SYMBOLES D'UNITÉS

(Conventions adoptées par l'Association française de normalisation : AFNOR.)

- Le symbole fixé pour une unité ne doit jamais être modifié, notamment en substituant une lettre majuscule à une lettre minuscule.

Écrivez : m km min s et non : M Km mn sec.

- Un symbole d'unité ne prend jamais la marque du pluriel et il ne peut être suivi d'un point que s'il s'agit du « point final » d'une phrase.

Écrivez : 48 cm 27 min 13 kg et non : 48 cms 27 min. 13 kgs.

- Dans le système décimal, il faut placer le symbole de l'unité immédiatement après le nombre, complètement écrit, et sur la même ligne que lui.

Écrivez : 48,5 mm 21,7 s et non : 48 mm,5 21 s,7.



LONGUEURS

L'unité est le **mètre** (symbole : m).

● Multiples

kilomètre	km	1 km = 1 000 m
hectomètre	hm	1 hm = 100 m
décamètre	dam	1 dam = 10 m

● Sous-multiples

décimètre	dm	1 dm = 0,1 m
centimètre	cm	1 cm = 0,01 m
millimètre	mm	1 mm = 0,001 m

Les unités de longueur « vont » de 10 en 10.

AIRES

L'unité est le **mètre carré** (symbole : m²).

● Multiples

kilomètre carré	km ²
hectomètre carré	hm ²
décamètre carré	dam ²

● Sous-multiples

décimètre carré	dm ²
centimètre carré	cm ²
millimètre carré	mm ²

Les unités d'aire « vont » de 100 en 100.

● Mesures agraires

hectare	ha	1 ha = 100 a = 10 000 m ²
are	a	1 a = 100 m ²
centiare	ca	1 ca = 0,01 a = 1 m ²

VOLUMES

L'unité est le **mètre cube** (symbole : m³).

● Multiples

kilomètre cube	km ³
hectomètre cube	hm ³
décamètre cube	dam ³

● Sous-multiples

décimètre cube	dm ³
centimètre cube	cm ³
millimètre cube	mm ³

Les unités de volume « vont » de 1 000 en 1 000.

CAPACITÉS

L'unité de capacité est le **litre** (symbole : L)
1 L = 1 dm³.

CAPACITÉS (suite)

● Multiples

hectolitre	hL	1 hL = 100 L = 0,1 m ³
décalitre	daL	1 daL = 10 L

● Sous-multiples

décilitre	dL	1 dL = 0,1 L
centilitre	cL	1 cL = 0,01 L
millilitre	mL	1 mL = 0,001 L = 1 cm ³

Les unités de capacité « vont » de 10 en 10.

MASSES

L'unité de masse est le **gramme** (symbole : g).

tonne	t	1 t = 1 000 kg
quintal	q	1 q = 100 kg
kilogramme	kg	1 kg = 1 000 g
hectogramme	hg	1 hg = 100 g
déca gramme	dag	1 dag = 10 g
gramme	g	
décigramme	dg	1 dg = 0,1 g
centigramme	cg	1 cg = 0,01 g
milligramme	mg	1 mg = 0,001 g

Les unités de masse « vont » de 10 en 10.

DURÉES

L'unité est la **seconde** (symbole : s).

● Multiples

minute	min	1 min = 60 s
heure	h	1 h = 60 min = 3 600 s
jour	j	1 j = 24 h = 86 400 s

● Sous-multiples

le dixième de seconde ou 0,1 s
le centième de seconde ou 0,01 s

● On utilise aussi les divisions décimales de l'heure. *Exemple* : 3,3 h = 3 h 18 min.

ANGLES

L'unité est le **degré d'angle** ou **degré** (symbole : °).

● Multiples

Le degré d'angle est la quatre-vingt-dixième partie de l'angle droit.
Un angle droit vaut 90°.
Un angle plat vaut 180°.
Un angle plein vaut 360°.

● Sous-multiples

le dixième de degré ou 0,1°
le centième de degré ou 0,01°

● Il existe aussi :

- la minute d'angle : 1° = 60 '
- la seconde d'angle : 1° = 3 600 "

INDEX

Les nombres en caractères gras sont des numéros de fiches

A

Abscisse d'un point **24-25-130**
 Abscisse du milieu d'un segment **24-106**
 Addition des décimaux **8**
 Addition des nombres relatifs **27**
 Addition des quotients **15**
 Addition des sommes algébriques **32**
 Additionner membre à membre **46**
 Addition vectorielle **103**
 Affine (fonction) **128-129**
 Agrandissement **74-121**
 Aire du carré **87**
 Aire du disque **51**
 Aire du losange **86**
 Aire du parallélogramme **88**
 Aire du pavé droit **113**
 Aire du rectangle **84**
 Aire du triangle **69**
 Aires (conversions) **69-84**
 Aires des solides **113-114**
 Alignés : des points sont alignés lorsqu'ils sont sur une même droite.
 Angle aigu **55**
 Angle au centre **50-57**
 Angle droit **55**
 Angle inscrit **57**
 Angle obtus **55**
 Angle plat **55**
 Angle plein **54-55**
 Angle rentrant **54-55**
 Angle saillant **54-55**
 Angles (construction) **54**
 Angles (mesure) **54**
 Angles (somme des) **56-68-82**
 Angles (vocabulaire) **55**
 Angles adjacents **56**
 Angles alternes-internes **58-59**
 Angles complémentaires **56**
 Angles consécutifs d'un quadrilatère **82**
 Angles correspondants **58-59**
 Angles du parallélogramme **88**
 Angles du triangle rectangle **56**
 Angles opposés d'un quadrilatère **82**
 Angles opposés par le sommet **56**
 Angles supplémentaires **56**
 Appliquer un pourcentage **118**

Approximations décimales **6**
 Arc de cercle **50**
 Arête d'un solide **107-108**
 Arrondi **7**
 Axe d'un disque ou d'un cercle **110**
 Axe d'un polygone régulier **111**
 Axe de symétrie (triangle isocèle) **65**
 Axe du cylindre **109**
 Axes de symétrie **95**
 Axes de symétrie d'un carré **87**
 Axes de symétrie d'un losange **86**
 Axes de symétrie d'un rectangle **84**

B

Base d'un solide **107-108-109-110-111**
 Base d'un triangle isocèle **65**
 Bissectrice d'un angle **60**
 Boule **112**

C

Calculatrice (voir « Utilisation de la calculatrice ») page 288
 Calculer un pourcentage **122**
 Calculs avec parenthèses (nombres arithmétiques) **18 à 21**
 Calculs avec parenthèses (nombres relatifs) **30-32 à 38**
 Capacité (unité de) **113**
 Capital-intérêt **123-125-127**
 Caractère (statistiques) **132**
 Carré **87-93-94**
 Centre de gravité d'un triangle **72**
 Cercle **50**
 Cercle (grand cercle d'une sphère) **112**
 Cercle circonscrit **70-77-83**
 Cercle circonscrit à un rectangle (ou un carré) **83**
 Cercle circonscrit à un triangle **70**
 Cercle circonscrit à un triangle rectangle **77**
 Cercle inscrit dans un triangle **70**
 Coefficient d'une fonction affine **128**
 Coefficient d'une fonction linéaire **125**

Coefficient de proportionnalité **119**
 Combinaison (méthode de) **46**
 Comparaison de décimaux **5**
 Comparaison de quotients **13**
 Comparaison de relatifs **26**
 Compas **50**
 Complémentaires (angles) **56**
 Composition de deux symétries centrales **104**
 Cône de révolution **110**
 Consécutifs : qui se suivent sans intermédiaire ; dans l'alphabet, *E* et *F* sont deux lettres consécutives, *E* et *H*, non consécutives. ; 19 et 20 sont deux nombres entiers consécutifs.
 Consécutifs (côtés, angles d'un quadrilatère) **82**
 Consécutifs (vecteurs) **103**
 Construction d'un angle (rapporteur) **54**
 Construction d'un carré **87-100**
 Construction d'un losange **85-86**
 Construction d'un parallélogramme **88-89-90**
 Construction d'un rectangle **83-84**
 Construction d'un triangle **67**
 Construction d'un triangle équilatéral **66-100**
 Construction d'un triangle isocèle **65**
 Construction d'une quatrième proportionnelle **74**
 Construction de deux droites parallèles **52**
 Construction de deux droites perpendiculaires **52**
 Construction de figures par rotation **99**
 Construction de figures par translation **101**
 Construction de figures symétriques **96-98**
 Construction de l'orthocentre d'un triangle **71**
 Construction de la bissectrice d'un angle **60**
 Construction de la distance d'un point à une droite **52**
 Construction de la tangente à un cercle **53**
 Construction de la médiatrice d'un segment **61-62**
 Construction de points symétriques **95-97**

Construction de polygones réguliers **100**
 Construction de segments **49-64-65-74**
 Construction du centre de gravité d'un triangle **72**
 Construction du cercle circonscrit à un triangle **70-77**
 Construction du cercle inscrit dans un triangle **70**
 Convertir une aire **69-84**
 Convertir une longueur **49**
 Convexe (quadrilatère) **82**
 Coordonnées du milieu d'un segment **106**
 Coordonnées d'un point **25-130**
 Coordonnées d'un vecteur **105**
 Corde **50**
 Correspondants (angles) **58-59**
 Cosinus d'un angle **80-81**
 Côté et sommet opposés d'un triangle **64**
 Côtés consécutifs d'un quadrilatère **82**
 Côtés d'un angle **55**
 Côtés opposés d'un quadrilatère **82**
 Critères de divisibilité **14**
 Croissant (ordre) **5**
 Cube **107-113**
 Cylindre de révolution **109**

D

Décimal (arrondi d'un) **7**
 Décimal (lecture d'un) **1**
 Décimale (approximation) **6**
 Décimale (fraction) **3**
 Décimaux (comparaison) **5**
 Décimaux (opérations) **8-9-11**
 Décroissant (ordre) **5**
 Degré Celsius-Fahrenheit **128-129**
Demi-droites opposées : un point A situé sur une droite xy détermine deux demi-droites $[Ax$ et $[Ay$. A est l'origine de chaque demi-droite. Ces demi-droites sont opposées.
 Dénominateur **3-9-13**
 Développement d'un solide **107-108-109-110-111**
 Développer **35**
 Diagonale d'un carré de côté a **78**
 Diagonale d'un losange **86**
 Diagonale d'un parallépipède rectangle **115**
 Diagonale d'un parallélogramme **89**
 Diagonale d'un quadrilatère **82**
 Diagonale d'un rectangle **83**
 Diagrammes en bâtons **132-133-134**
 Diagrammes circulaires **132-133**
 Diamètre **50**

Différence de décimaux **8-9**
 Différence de quotients **15**
 Dispersion **136**
 Disque (vocabulaire) **50**
 Distance (problèmes de) **63**
 Distance d'un point à un plan **112**
 Distance d'un point à une droite **52**
 Distance de deux points dans un repère orthonormé **78**
 Distance de deux points sur une droite graduée **24**
 Distance de deux points **49**
 Distributivité **19**
 Dividende **10-11-12**
 Diviser par $0,1$; $0,01$; $0,001$ **2**
 Diviser par 10 , 100 , $1\,000$ **2**
 Diviseur **10-11-12-13**
 Divisibilité (critères de) **14**
 Divisible **14**
 Division de décimaux (quand diviser ?) **12**
 Division de décimaux (technique) **10-11**
 Division euclidienne **10**
 Droit (angle) **55**
 Droite des milieux d'un triangle **73**
 Droite graduée **24**
 Droites parallèles **52**
 Droites perpendiculaires **52**
 Droite perpendiculaire à un plan **107-108-109-115-116**

E

Écart type **136**
 Échelle **121**
 Écriture des décimaux **3**
 Écriture fractionnaire **3**
 Écritures fractionnaires : addition, soustraction, multiplication, division **15-16**
 Effectifs (statistiques) **132**
 Effectifs cumulés (statistiques) **134**
 Ellipse **109**
 Énoncés réciproques **60-62-63**
 Équateur **112**
 Équations (système à deux inconnues) **45-46**
 Équation du premier degré à une inconnue **41**
 Équation $x^2 = a$ **22-42**
 Équation-produit **42**
 Équations de droites **126-129**
 Équations élémentaires ($a + x = b$; $a \cdot x = b$) **39-40**
 Équerre (tracer deux droites perpendiculaires) **52**
 Équerre (tracer deux droites parallèles) **52**
 Équidistant : à égale distance **60-62**
 Équilatéral (triangle) **66**
 Évaluer : donner la valeur de.
 Expression littérale **31**
 Extrêmes d'une proportion **74**

Faces d'un solide **107-108-111**
 Facteur **8**

Facteur : au lieu de dire « produit de plusieurs nombres » on dit souvent « produit de plusieurs facteurs ».

Factoriser **36-37-38**

Figure à main levée : figure exécutée approximativement sans instruments de mesure.

Fonctions affines **128-129**
 Fonctions constantes **128-129**

Fonction de (expression « en fonction de ») **127-130**

Fonction linéaire **125-126-127**

Fraction **13**

Fraction décimale **3**

Fractions décimales (opérations) **9**

Fraction (irréductible) **14-17**

Fraction (simplification) **14-17**

Fréquences (statistiques) **134**

Fréquences cumulées **134**

Fuyante **107**

G

Génératrice d'un cylindre **109**
 Génératrice d'un cône **110-115**
 Graduée (droite) **24**
 Grand cercle de la sphère **112**
 Graphique **45-130-131**
 Gravité (centre de) **72**

H

Hauteur d'un cône **110**
 Hauteur d'un cylindre **109**
 Hauteur d'un parallélogramme **88**
 Hauteur d'un prisme droit **108**
 Hauteur d'un triangle équilatéral de côté a **78**
 Hauteur d'un triangle **64**
 Hauteur d'une pyramide **111**
 Hexagone **100**
Hexagone : polygone à six côtés.
 Hypoténuse **77**

Identités remarquables **34**
 Inégalité (entre nombres relatifs) **26**
 Inégalité triangulaire **63**
 Inéquation du premier degré **44**
 Inéquations élémentaires **43**
 Inscrit (angle) **57**
 Inscrit (cercle) **70**

Intérêt **123-125-127**
 Interprétation graphique **45**
 Intersection d'un plan et d'un cône **116**
 Intersection d'un plan et d'un cylindre **109**
 Intersection d'un plan et d'une pyramide **116**
 Intersection d'un plan et d'une sphère **112-115**
 Inverses (nombres) **28**
 Irréductible (fraction) **13-14-17**
 Isocèle (triangle) **65**

Justifier : donner des preuves : calculs, raisonnement, ...

Linéaire (fonction) **125-126-127**
 Longueur (mesurage) **49**
 Longueur d'un cercle **51**
 Longueur (conversions) **49**
 Losange **85-86-87-92-94**

Médiane (statistique) **136**
 Médiane d'un triangle **72**
 Médiane relative à l'hypoténuse **77**
 Médiatrice (construction au compas) **62**
 Médiatrice (définition) **61**
 Membre à membre (additionner) **46**
 Membre d'une équation, d'une inéquation **41-43-44**
 Méridien **112**
 Mesurer un angle **54**
 Mesurer une longueur **49**
 Méthode graphique (systèmes) **45**
 Méthodes de substitution, de combinaison (systèmes) **46**
 Milieu d'un segment **49**
 Milieu d'un segment (abscisse sur une droite) **24**
 Milieu d'un segment (coordonnées) **106**
 Milieux (théorèmes des) **73**
 Mise en équation **47-48**
 Moitié **49**
 Mouvement uniforme **121**
 Moyenne (statistiques) **135**
 Moyenne pondérée **135**
 Moyens d'une proportion **74**
 Multiple **14-17**
 Multiplication de décimaux **8-9**
 Multiplication de nombres relatifs **28**

Multiplication de quotients **16**
 Multiplication de sommes algébriques **33**
 Multiplication par a/b **117**
 Multiplier par 0,1 ; 0,01 ; 0,001 **2**
 Multiplier par 10 ; 100 ; 1 000 **2**

Nombres inverses **28**
 Nombres opposés **27**
 Nombres premiers **14**
 Nombres premiers entre eux **17**
 Nombres relatifs **24-26**
 Nommer un quadrilatère **82**
 Notations pages **282-283**
 Notation scientifique (nombre décimal) **4**
 Numérateur **3-9-13**
 Numération décimale **1**

Obtus (angles) **54-55**
 Octogone **100**
 Opposé d'un relatif **27**
 Opposée d'une somme algébrique **32**
 Ordonnée **25**
 Ordre croissant **5**
 Ordre de grandeur **6**
 Ordre décroissant **5**
 Orthocentre **71**
 Orthogonal (repère orthogonal) **25**
 Orthogonal-orthonormé (repère) **25**

Parallélépipède rectangle **107**
 Parallèles **52**
 Parallèles (construction) **52**
 Parallèles de la sphère terrestre **112**
 Parallèles, sécante et angles **58**
 Parallélisme (reconnaître avec des angles) **59**
 Parallélogramme **88-89-90-94**
 Parallélogramme et vecteurs **102**
 Partie entière d'un nombre décimal **1**
 Partie entière, partie décimale **1**
 Patron d'un solide **107-108-109-110-111**
 Pavé droit **107-113**
 Pentagone régulier (cinq côtés) **100**
 Périmètre d'un carré **87**
 Périmètre d'un disque **51**
 Périmètre d'un rectangle **84**
Périmètre : pour un polygone, c'est la somme des côtés.

Perpendiculaire **52**
 Perspective cavalière **107-108**
 PGCD **17**
 Pied de la hauteur **64**
 Plan tangent à une sphère **112**
 Plans parallèles **116**
 Plat (angle) **55**
 Plein (angle) **54-55**
 Points symétriques **95-97**
 Polygone régulier **100**
 Population (statistiques) **132**
 Positions relatives d'un cercle et d'une droite **53**
 Pourcentage **118-122-123**
 PPCM **17**
 Premier (nombre) **14**
 Premiers entre eux (nombres) **17**
 Priorités dans les calculs de décimaux **18-21**
 Priorités dans les calculs de nombres relatifs **30**
 Prisme droit **108**
 Produit d'un décimal par une fraction **117**
 Produit de décimaux **8-9**
 Produit de nombres relatifs **28**
 Produit de quotients **16**
 Produit de racines carrées **23**
 Produit de sommes algébriques **33**
 Produits en croix **119**
 Proportion **74**
 Proportionnalité et graphiques **131**
 Proportionnalité **119-120**
 Proportionnels (triangles à côtés) **74**
 Puissances **28**
 Puissances de 10 **4**
 Pyramide **111**
 Pythagore (théorème) **78**
 Pythagore (réciproque) **79**
 Pythagore et l'espace **115**

Quadrilatères (vocabulaire) **82**
 Quotient (approximations décimales) **11**
 Quotient de nombres relatifs **29**
 Quotient euclidien **10**
 Quotients de décimaux (écriture, comparaison) **13**
 Quotients de décimaux (simplification) **14**
 Quotients de décimaux (opérations) **15-16**
 Quotients de racines carrées **23**

Racines carrées **22-23**
 Radical **22**
 Radicaux (calculs) **23**

Rangement (voir ordre croissant ou ordre décroissant)
 Rapporteur **54**
 Réciproque du théorème de Pythagore **79**
 Réciproque du théorème de Thalès **76**
 Réciproques (énoncés) **60-62-63**
 Reconnaître des droites parallèles **52-59-76**
 Reconnaître des paires d'angles particuliers **56**
 Reconnaître un carré **87-93-94**
 Reconnaître un losange **85-86-92-94**
 Reconnaître un parallélogramme **88-89-90-94**
 Reconnaître un rectangle **83-91-94**
 Reconnaître un tableau de proportionnalité **120**
 Reconnaître un triangle équilatéral **66**
 Reconnaître un triangle isocèle **65**
 Reconnaître un triangle rectangle **79**
 Reconnaître une bissectrice **60**
 Reconnaître une médiatrice **61-62**
 Reconnaître une tangente à un cercle **53**
 Rectangle (quadrilatère) **83-84-91-94**
 Rectangle (triangle) **77-78-79**
 Réduction (échelle) **121**
 Réduction (pyramide, cône) **116**
 Réduction d'un triangle **74**
 Réduction d'une somme algébrique **31-32**
 Règle des signes (nombres relatifs) **33**
 Régulier (polygone) **100**
 Régulière (pyramide) **111**
 Relatifs (nombres) **24**
 Rentrant (angle) **54-55**
 Repérage dans le plan **25**
 Repérage sur une droite **24**
 Repère orthogonal-orthonormé **25**
 Représentation graphique **126-129-130-131**
 Représentation graphique (relation de proportionnalité) **131**
 Représentation graphique d'une fonction affine **129**
 Représentation graphique d'une fonction linéaire **126**
 Résolution algébrique de problèmes **47-48**
 Résoudre une équation **39-40-41-42**
 Résoudre une inéquation **43-44**
 Résoudre un système d'équations **45-46**
Respectivement : si, les droites D

et D' passent respectivement par A et B cela signifie que D passe par A et D' par B .
 Reste **10**
 Rotation **99**

Saillant (angle) **54-55**
 Sécantes (droites) **52**
 Secteur de disque **50**
 Sections planes d'un cône et d'une pyramide **116**
 Sections planes d'une sphère **112-115**
 Séquences de calculs sur les décimaux **18-19-20-21**
 Série statistique **132**
 Simplifier une fraction **13-14-17**
 Sinus d'un angle **81**
 Somme de décimaux arithmétiques **8**
 Somme de nombres relatifs **27**
 Somme de quotients **15**
 Somme des angles d'un quadrilatère convexe **82**
 Somme des angles d'un triangle **68**
 Somme vectorielle **103**
 Sommes algébriques (opérations) **32-33**
 Sommes algébriques (réductions) **31**
 Sommes algébriques opposées **32**
 Sommet et côté opposé d'un triangle **64**
 Sommets consécutifs d'un quadrilatère **82**
 Sommets opposés d'un quadrilatère **82**
 Soustraction de décimaux arithmétiques **8**
 Soustraction de nombres relatifs **27**
 Soustraction de quotients **15**
 Soustraction de sommes algébriques **32**
 Sphère **112**
 Substitution (méthode de) **46**
 Supplémentaires (angles) **56**
 Surface conique **110**
 Surface cylindrique **109**
 Symétrie centrale **97-98**
 Symétrie orthogonale **95-96**
 Symétrique d'une figure **95-96-97-98**
 Symétriques (points) **95-97**
 Systèmes d'équations **45-46**

Tableau de numération décimale **1**
 Tableau de proportionnalité **119**

Tableau des effectifs (statistiques) **132**
 Tableau des unités pages 282-283
 Tableau et diagramme **132-133**
 Tangente à un cercle **53**
 Tangente d'un angle **81**
 Taux de placement **123-127**
 Thalès (réciproque) **76**
 Thalès (théorème) **75**
 Translation **101-102-103**
Trapeze : quadrilatère ayant deux côtés parallèles et deux seulement. **58-82**
 Triangle des milieux **73**
 Triangle équilatéral **66-100**
 Triangle isocèle **65**
 Triangle rectangle **77-78-79**
 Triangles (vocabulaire) **64**
 Triangles à côtés proportionnels **74**
 Triangulaire (inégalité) **63**

Unités (aire, volume, capacité) **113**
 Unités (longueurs, aires, volumes, capacités, masses, durées, angles) pages 282-283
 Unités de vitesse **121**
 Utilisation de l'équerre **52**
 Utilisation de la calculatrice : arrondis **7**
 Utilisation de la calculatrice : division de deux décimaux **11**
 Utilisation de la calculatrice : division euclidienne **10**
 Utilisation de la calculatrice : notation scientifique **4**
 Utilisation de la calculatrice : opérateurs constants **128**
 Utilisation de la calculatrice : racine carrée **22-78**
 Utilisation de la calculatrice : séquences de calculs **20-21**
 Utilisation de la calculatrice : simplification des fractions **13**
 Utilisation de la calculatrice : trigonométrie **80-81**
 Utilisation de la règle graduée **49**
 Utilisation du compas **50**
 Utilisation du rapporteur **54**

Valeurs du caractère (statistiques) **132**
 Vecteur **102-103**
 Vitesse moyenne **124**
 Vitesse **121**
 Volume **113-114**

Fiches Objectifs

51	Périmètre et aire d'un disque
78	Hypoténuse d'un triangle rectangle
80	Cosinus et angle
81	Sinus, tangente et angle
4	Écritures scientifiques
7	Arrondis
10	Division euclidienne
11	Quotient
13	Fraction, simplification
20	Priorité dans les calculs
21	Priorité dans les calculs
22	Racine carrée
128	Opérateurs constants

Touches

π	
$\sqrt{x}$	x^2
cos	2nd cos ⁻¹
sin	tan sin ⁻¹ tan ⁻¹
EE	-x
2nd	FIX
←	
÷	
/	SIMP
(	) ÷ - ×
(	) ÷
$\sqrt{x}$	
OP ₁	OP ₂

● La calculatrice peut intervenir dans la plupart des fiches, en particulier pour la vérification des calculs (touches $\div$ $-$ $\times$ $=$).

● On utilise aussi, au collège, les touches :

- $D \leftrightarrow F$ qui fait passer de l'écriture décimale à l'écriture fractionnaire (fiche 3) ;
 - $F \leftrightarrow D$ qui fait passer de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale, exacte ou approchée (fiche 3) ;
 - $1/x$ qui donne l'inverse (fiche 28) ;
 - y^x qui donne une puissance (fiche 28) ;
 - SUM RCL STO ou M+ M- MR qui permettent de réduire une somme algébrique (fiche 31) ;
 - % qui applique un pourcentage (fiche 118) ;
 - 2nd x $\Sigma+$ σ qui calcule une moyenne (fiche 135), puis un écart type (fiche 136) ;
- Au lycée, la calculatrice devra être programmable.

Véritable répertoire des savoirs exigibles en mathématiques au collège, indispensable pour **réviser** ou **approfondir** le programme, cet ouvrage accompagnera votre enfant de la 6^e à la 3^e.

Structuré en **fiches claires et attrayantes**, ce livre facilite une assimilation durable des connaissances des quatre années de collège.

Très **simple à utiliser**, ce Maxi Mémento propose à chacun une progression personnalisée.

CE QUE VOUS TROUVEREZ DANS CE MAXI MÉMENTO

- ▶ Le **sommaire détaillé** inventorie les notions du programme fiche par fiche et indique les classes concernées par l'acquisition de ce savoir.
- ▶ Des **repères de couleurs** identifient les différentes parties du programme.
- ▶ La structure des fiches en deux points : **comprendre** et **utiliser ses connaissances** a été conçue pour une compréhension immédiate des notions et de leur mise en pratique dans les exercices.
- ▶ Des **indications de niveaux** permettent de savoir dans quelle classe chaque notion est traitée.
- ▶ Un **système de renvois simple** relie le thème de la fiche à toutes les autres notions qui lui sont relatives.
- ▶ Un **index exhaustif** donne accès très rapidement à l'information cherchée.

DANS LA MÊME COLLECTION

- FRANÇAIS CE2 - CM1 - CM2
- MATHS CE2 - CM1 - CM2
- FRANÇAIS 6^e - 5^e - 4^e - 3^e
- MATHS 6^e - 5^e - 4^e - 3^e
- ANGLAIS 6^e - 5^e - 4^e - 3^e

www.hachette-education.com



16/7948/9

